

ERSTES PROTOKOLL: DAS FEDERPENDEL

NENG TANG, NAM DUONG TRAN, AND ALLAN A. ZEA

ZUSAMMENFASSUNG. In diesem Protokoll beschreiben wir die Durchführung des Versuchs „Das Federpendel“, der am 18. 02. 2020 im Physik-Praktikum vom Studienkolleg der Technischen Universität Berlin stattfand. Hier versuchten wir, eine wohlbekannte Proportionalität im einfachen Federpendelmodell experimentell zu zeigen. Eine statistische und graphische Auswertung unserer Ergebnisse ist gegeben.

1. BESCHREIBUNG

Eines der bekanntesten Beispiele für harmonische Oszillatoren in der Physik ist das sogenannte *Federpendel* [FLS10]. Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder mit der Federkonstanten c und einem daran befestigten Massestück M . Wird das System einmal angeregt, dann beginnt eine harmonische Schwingung um die Ruhelage, welche bei fehlender Dämpfung (die Amplitude der Schwingung nimmt im Laufe der Zeit nicht ab) nicht abklingt [Wei]. Falls eine Dämpfung auftritt, verschwindet dementsprechend die Bewegung der Masse M . Die Federkraft F , die auf die Masse M wirkt, kann mithilfe des *Hookeschen Gesetzes* mathematisch beschrieben werden. Dieses Gesetz besagt, dass die Kraft F proportional zur Auslenkung y ist, genauer gesagt $F = -cy$ (siehe Abb. 1).

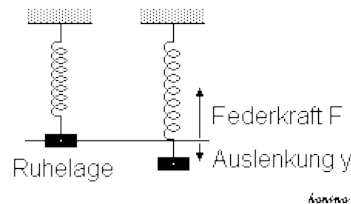


ABBILDUNG 1. Kraft an einem einfachen Federpendel. Gezeichnet von Honina (2005). Veröffentlicht unter der Lizenz GFDL.

Nach einer Umformung der Grundgleichung der Mechanik ergibt sich eine lineare homogene Differentialgleichung der Form $\ddot{y} + \frac{c}{M}y = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y(t) = A_1 \cos(\sqrt{M/c} \cdot t) + A_2 \sin(\sqrt{M/c} \cdot t)$ für reelle Konstanten A_1 und A_2 [FLS10]. Die Zeit T für eine Periode, auch *Schwingungsdauer* genannt, ist dann $T = 2\pi\sqrt{M/c}$.

Wie bei vielen anderen physikalischen Vorgängen sind die Berechnungen bei der Schwingung eines Federpendels in der Regel idealisiert. Es wird z.B. oft angenommen, dass die Dehnung der einzelnen Windungen der Feder regelmäßig oder die Federmasse gleich null ist, was in Wirklichkeit niemals vorkommt.

Date: 18. 02. 2020.

[Studienkolleg Kurs 348T Gruppe B].

Wird die Federmasse vernachlässigt, ist die Beschreibung des Modells selbstverständlich einfacher. Doch es kann der Vollständigkeit halber sinnvoll sein in einem Experiment, sie mit zu berücksichtigen. Sei dafür m_f die Masse der Feder mit der Gesamtlänge ℓ , dann kann die kinetische Energie E_{kin} des Systems folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(1) \quad E_{kin} = \frac{1}{2}M\dot{\delta}(\ell)^2 + \int_0^\ell \frac{1}{2}\lambda\dot{\delta}(s)^2 ds,$$

wobei $\delta(s)$ die Verschiebung vom Punkt ist, der sich im Ruhezustand an der Stelle $y = s$ auf der Feder befindet, und $\lambda := m_f/\ell$ die lineare Massendichte der Feder darstellt.

Nehmen wir abschließend an, die Dehnung der Feder ist annähernd regelmäßig, dann gilt $\delta(s) = \frac{s}{\ell}\delta(\ell)$ für alle Stellen $0 \leq s \leq \ell$ auf der Feder. Aus (1) folgt also

$$(2) \quad E_{kin} = \frac{1}{2}M\dot{\delta}(\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{\ell}\dot{\delta}(\ell)^2 \int_0^\ell \frac{s^2}{\ell^2} ds = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3}m_f \right) \dot{\delta}(\ell)^2.$$

Die Masse $m := M + \frac{1}{3}m_f$, die auf der rechten Seite der Gleichung (2) auftaucht, bezeichnet man oft in der Literatur als die *effektive Masse* des Systems. Man kann schließen, dass sich ein Drittel der Federmasse so verhält, als wäre es ein Teil der Masse des Körpers, der an der Feder hängt. Es muss dann für die Schwingungsdauer T folgendes gelten:

$$(3) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{1}{3}m_f}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Das Hauptziel von dieser Arbeit ist es, die Proportionalität $T \sim \sqrt{m}$ experimentell zu bestätigen und die Federkonstante c im System zu bestimmen. Dafür nehmen wir die Methoden zur statistischen und graphischen Auswertung von Experimenten, die im Physik-Unterricht behandelt worden sind, in Anspruch.

2. DURCHFÜHRUNG

In diesem Experiment wurde eine Feder an einen Haken gehängt, welcher an einem Stativ befestigt war. Anschließend wurde ein Massestück $M_1 = 0,05$ kg an die Feder gehängt und die Feder zum Schwingen angeregt. Die Anfangsauslenkung war so ausgewählt, dass die Feder während des Versuchs immer gespannt blieb. Um zuverlässigere Ergebnisse zu erzielen, maßen wir 30 Schwingungsdauern mit einer digitalen Stoppuhr und rechneten dann die ungefähre Zeit für eine einzige Periode; all dies wurde noch 6 Mal für dieselbe Masse wiederholt. Die verwendete Stoppuhr hatte einen Messfehler von $\pm 0,01$ s.

Der obige Versuch wurde mit den Massen $M_2 = 0,1$ kg, $M_3 = 0,2$ kg und $M_4 = 0,3$ kg wiederholt. Für die anschließende Durchführung waren 5 weitere Massestücke von je 0,05 kg nötig. Um das Verhalten des Federpendels mit einer Masse von 0,2 kg untersuchen zu können, wurden z.B. vier Massen von 0,05 kg untereinander gehängt. Mit Hilfe von einem Kraftmesser und der Fallbeschleunigung $g \approx 9,81$ m/s² konnten wir die Federmasse $m_f = 0,10$ kg bestimmen. Der geschätzte Fehler der Massen war Null.

2.1. Vorauswertung der Ergebnisse. Mit einem Kraftmesser konnten wir die notwendige Kraft für die Verschiebung $\delta(\ell) = 0,1$ m (eine vertikale Verschiebung des Federendes um 10 cm) messen, welche 3,5 N betrug. Dies erlaubte uns, den Wert von c vorherzusagen, denn es folgt aus dem Hookeschem Gesetz, dass c ungefähr 35 N/m sein soll.

Da die Gleichung (3) keinen linearen Zusammenhang zwischen T und m darstellt, lässt sich feststellen, dass eine Transformation der Achsen notwendig sein könnte, um die Versuchsergebnisse mittels einer linearen Regression graphisch auszuwerten. Zu diesem Punkt kommen wir wieder im Abschnitt 3.

2.2. Daten. Alle Messungen wurden von einem unserer Gruppenmitglieder während des Versuchs dokumentiert und verarbeitet. Die gesammelten Daten sind in der Tabelle 1 zusammengefasst. Aufgrund von technischen Problemen mit der ausgewählten Stoppuhr trat bei der Messung von 30 Schwingungsdauern für die Masse M_4 ein Fehler auf: die Stoptaste war nicht sehr berührungsempfindlich und es fiel uns schwer, das Ergebnis rechtzeitig in die Tabelle einzutragen. Infolgedessen entschieden wir uns, den Wert (20,4 s) wegzulassen und das Experiment ein weiteres Mal durchzuführen.

TABELLE 1. Messungen von Schwingungsdauern.

M	0,05 kg		0,1 kg		0,2 kg		0,3 kg	
\sqrt{m}	0,29		0,37		0,48		0,58	
	30 T / s	T / s	30 T / s	T / s	30 T / s	T / s	30 T / s	T / s
1	9,78	0,33	12,43	0,41	15,50	0,52	19,12	0,64
2	9,87	0,33	12,06	0,40	15,65	0,52	18,94	0,63
3	10,22	0,34	12,25	0,41	15,63	0,52	19,40	0,65
4	9,94	0,33	12,12	0,40	16,15	0,54	18,87	0,63
5	10,03	0,33	12,25	0,41	15,59	0,52	19,00	0,63
6	9,85	0,33	12,19	0,41	16,04	0,54	19,06	0,64

3. AUSWERTUNG

Zur Auswertung des Experiments wenden wir uns nun an ein paar typische Formeln der Statistik [Fre09]. Sei $\overline{T^{(k)}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{(k)}$ der Mittelwert der Periodenmessungen für eine Masse M_k , wobei $n = 6$ die Anzahl der (gültigen) Versuche ist, dann sind die durchschnittlichen Schwingungsdauern für die Massen M_1, M_2, M_3 und M_4 beziehungsweise $\overline{T^{(1)}} = 0,33$ s, $\overline{T^{(2)}} = 0,41$ s, $\overline{T^{(3)}} = 0,52$ s und $\overline{T^{(4)}} = 0,64$ s.

Die entsprechende Standardabweichung und der Standardfehler des Mittelwertes sind jeweils gegeben durch $\sigma^{(k)} := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(T_i^{(k)} - \overline{T^{(k)}}\right)^2}$ und $\Delta \overline{T^{(k)}} := \sigma^{(k)} / \sqrt{n}$. Weil die Fehler $\Delta \overline{T^{(1)}} = 1,67 \times 10^{-3}$ s, $\Delta \overline{T^{(2)}} = 2,11 \times 10^{-3}$ s, $\Delta \overline{T^{(3)}} = 4,22 \times 10^{-3}$ s und $\Delta \overline{T^{(4)}} = 3,33 \times 10^{-3}$ s genügend klein sind, ist es angemessen, den prozentualen Fehler zu rechnen, den wir wie folgt definieren:

$$(4) \quad p^{(k)} := \frac{\Delta \overline{T^{(k)}}}{\overline{T^{(k)}}} 100\%.$$

Es ergibt sich, dass $p^{(1)} = 0,51\%$, $p^{(2)} = 0,51\%$, $p^{(3)} = 0,81\%$ und $p^{(4)} = 0,52\%$.

3.1. Graphische Auswertung. Eine Grafik unserer Daten auf Millimeterpapier ist diesem Dokument beigelegt. Hier wird der Zusammenhang zwischen der effektiven Masse m und der zweiten Potenz der (durchschnittlichen) Schwingungsdauer T^2 gezeigt. Da die geschätzten Fehler so klein waren, waren die entsprechenden Fehlerbalken sehr schwer darzustellen. Die Repräsentation der Grenzgeraden für die lineare Regression war deshalb sehr ungenau. In der Grafik sind die Grenzgeraden und die Ausgleichsgerade jeweils in blau und pink dargestellt. Die Steigung der Ausgleichsgeraden kann man mit einem Steigungsdreieck zwischen den Punkten $(0,08|0,11)$ und $(0,34|0,41)$ auf der Grafik bestimmen, *d.h.*

$$\frac{(2\pi)^2}{\bar{c}} = \frac{0,41 \text{ s}^2 - 0,11 \text{ s}^2}{0,34 \text{ kg} - 0,08 \text{ kg}} = 1,15 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Wenn wir diesen Vorgang für die obere und untere Grenzgeraden wiederholen, können wir weiterhin den Fehler $\Delta\bar{c}$ bekommen und sehen, dass $\bar{c} \pm \Delta\bar{c} = (34,21 \pm 0,10) \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Man erkennt sofort, dass dieses Ergebnis dem Wert von der Federkonstanten c entspricht, den wir im Abschnitt 2 anhand des Hookeschen Gesetzes berechneten.

4. AUSBLICK

Mit Hilfe der graphischen Auswertung des Experiments bestätigten wir in dieser Arbeit die Proportionalität zwischen der effektiven Masse und der Schwingungsdauer eines Federpendelsystems. Die Darstellung der Ausgleichsgeraden war aufgrund von sehr kleinen Messfehlern ziemlich ungenau und es gibt in dieser Hinsicht Raum für Verbesserungen. Die Ergebnisse waren nichtsdestotrotz überzeugend und entsprachen alldem, was in der Mechanik-Literatur bekannt ist.

LITERATUR

- [FLS10] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics; New Millennium Ed.* Basic Books, New York, NY, 2010.
- [Fre09] David A. Freedman. *Statistical Models: Theory and Practice.* Cambridge University Press, 2009.
- [Wei] Eric W. Weisstein. *Simple Harmonic Motion.* MathWorld – A Wolfram Web Resource.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: tang_neng@campus.tu-berlin.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: tnduong2209@gmail.com

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: zealobo@campus.tu-berlin.de