

ZWEITES PROTOKOLL: AUFLADUNG UND ENTLADUNG VON KONDENSATOREN

CLARISSA PINHEIRO, NENG TANG, AND ALLAN A. ZEA

ZUSAMMENFASSUNG. In diesem Protokoll beschreiben wir die Durchführung des Versuchs „Aufladung und Entladung von Kondensatoren“, der am 25. 02. 2020 im Physik-Praktikum vom Studienkolleg der Technischen Universität Berlin stattfand. Hier führen wir eine graphische Auswertung durch, um die zeitliche Änderung von zwei wichtigen physikalischen Größen zu untersuchen und ein paar Formeln experimentell zu bestätigen.

1. BESCHREIBUNG

In der Elektrotechnik stellt sich manchmal die Frage, ob (und wie) sich eine gewisse Größe zeitlich ändert. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem typischen Beispiel: die zeitliche Änderung von Stromstärke und Spannung beim Aufladen und Entladen eines Kondensators in einem geschlossenen Stromkreis. Wir werden mithilfe der Methoden zur graphischen Auswertung von Experimenten wichtige physikalische Größen bei unserem Versuch berechnen und sehen, dass die zwei Formeln, die hier untersucht werden, eine zuverlässige Annäherung an die Realität geben.

1.1. Herleitung der Grundformeln. Man kann relativ leicht zeigen, dass der Ladestrom I als Funktion der Zeit t beim Aufladen eines Kondensators der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R exponentiell abnimmt. Aufgrund der zweiten Kirchhoffschen Regel (auch Maschenregel genannt) gilt $U_0 - U_R - U_C = 0$, wobei U_0 , U_R und U_C jeweils die Spannung der Spannungsquelle, die am Widerstand abfallende Spannung und die am Kondensator herrschende Spannung darstellen [Hug05]. Setzt man $U_R = R \cdot I$ und $U_C = \frac{q}{C}$ in diese Gleichung ein, so bekommt man folgendes:

$$(1) \quad U_0 - I \cdot R - \frac{q}{C} = 0.$$

Weil die Stromstärke die Ladungsmenge ist, die pro Zeiteinheit auf den Kondensator fließt, gilt $I(t) = \dot{q}(t) = dq/dt$. In (1) eingesetzt ergibt sich also

$$(2) \quad U_0 - \frac{dq}{dt} R - \frac{q}{C} = 0.$$

Mit Standardmethoden der Analysis können wir dann die Funktion $q(t)$ bestimmen, die diese Differentialgleichung erfüllt. Nach Umformung von (2) und durch das Integrieren der resultierenden Gleichung bekommen wir:

$$(3) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C \cdot U_0 - q}{R \cdot C},$$

$$(4) \quad \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{C \cdot U_0 - q} = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt.$$

Date: 25. 02. 2020.

[Studienkolleg Kurs 348T Gruppe B].

Sei $u = C \cdot U_0 - q$, dann ist $du = -dq$. Die Substitution in (4) ergibt:

$$(5) \quad - \int_{q_0}^{q(t)} \frac{du}{u} = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt,$$

$$(6) \quad \ln \left(\frac{C \cdot U_0 - q(t)}{C \cdot U_0} \right) = - \frac{t}{R \cdot C}.$$

Man sieht sofort nach Exponenzieren von (6) und Auflösen nach $q(t)$, dass

$$(7) \quad q(t) = C \cdot U_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} \right).$$

Im Folgenden ersetzen wir das Produkt, das im Nenner des Arguments der exponentiellen Funktion von Gleichung (7) auftaucht, durch die sogenannte Zeitkonstante $\tau := R \cdot C$.

Da die Stromstärke die Ableitung der Funktion $q(t)$ nach der Zeit ist, erhält man

$$(8) \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-(1/\tau)t} = I_0 \cdot e^{-(1/\tau)t}.$$

Hier gilt $I(t) \rightarrow I_0$, wenn $t \rightarrow 0$ und $I(t) \rightarrow 0$ für beliebig große Werte von t .

Auf ähnliche Weise kann man beweisen, dass die Spannung U als Funktion der Zeit t beim Entladen des Kondensators exponentiell abnimmt, nämlich

$$(9) \quad U(t) = U_0 \cdot e^{-(1/\tau)t}.$$

In den folgenden Abschnitten versuchen wir, die Gleichungen (8) und (9) genauer zu untersuchen und zu zeigen, dass sie unsere Ergebnisse sinnvoll erklären können.

2. DURCHFÜHRUNG

Für die Durchführung des Experiments wurde eine Schaltung nach Abb. 1 aufgebaut. Die Schaltung besteht aus einem Widerstand und drei parallel geschalteten Kapazitäten. Der Widerstand und die Kapazitäten waren nach Herstellerangabe $R = (5 \pm 5\%) \text{ M}\Omega$ beziehungsweise $C_1 = (4,7 \pm 5\%) \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = (1 \pm 5\%) \text{ }\mu\text{F}$ und $C_3 = (4,7 \pm 5\%) \text{ }\mu\text{F}$. Die Gesamtkapazität ist gegeben durch $C = C_1 + C_2 + C_3 = (6,7 \pm 5\%) \text{ }\mu\text{F}$, mit den Randwerten $C_{\min} = 6,4 \text{ }\mu\text{F}$ und $C_{\max} = 7,0 \text{ }\mu\text{F}$. Mit diesen Angaben konnten wir schon im Voraus sagen, wie der Wert der Zeitkonstante am Ende unseres Experiments aussehen soll, denn es gilt $\tau = R \cdot C = (33,5 \pm 10\%) \text{ s}$.

Beim Schließen des Stromkreises wurden im ersten Versuch die Messwerte für den Ladestrom I zu den vorgegebenen Zeitpunkten t dokumentiert. Wir verwendeten eine analoge Stoppuhr mit dem geschätzten Fehler $\Delta t = 1 \text{ s}$ für alle Messungen. Der geschätzte Fehler für die Strommesswerte betrug $\Delta I = 0,1 \text{ }\mu\text{A}$.

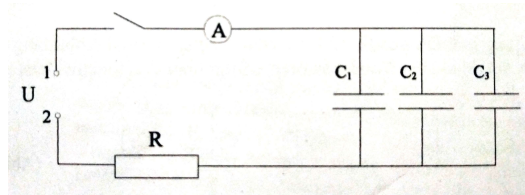


ABBILDUNG 1. Stromkreis für den ersten Versuch.

Diese Schaltung wurde dann entsprechend Abb. 2 umgebaut. Die Entladung der zuvor aufgeladenen Kondensatoren erfolgte hierbei über den Innenwiderstand $R_{i,V}$ des Voltmeters. Beim Schließen des Stromkreises wurden diesmal die Messwerte für die Spannung U zu den vorgegebenen Zeitpunkten t dokumentiert. Der geschätzte Fehler für die Spannungen war dabei $\Delta U = 0,01 \text{ V}$.

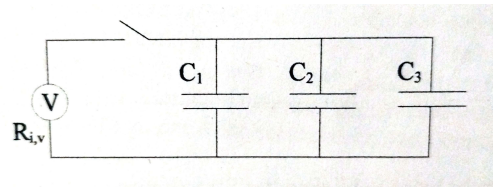


ABBILDUNG 2. Stromkreis für den zweiten Versuch. An diesem Stromkreis ist ein Voltmeter mit dem Innenwiderstand $R_{i,V}$ angeschlossen.

2.1. Daten. Alle Messungen wurden von einem unserer Gruppenmitglieder während der Versuche dokumentiert. Weil beide Experimente in der Regel sehr schnell ablaufen, nahmen wir nach Empfehlung des Lehrers ein Video von ihnen auf und trugen dann die Messwerte in die vorgegebenen Tabellen ein. Die gesammelten Daten für den ersten und zweiten Versuch sind jeweils in den Tabellen 1 und 2 zusammengefasst.

TABELLE 1. Messung der Stromstärke $I(t)$ beim Aufladen einer Parallelschaltung von Kondensatoren über einen Widerstand R .

t / s	5	10	15	20	25	30	35
$I / \mu\text{A}$	3,4	3,0	2,6	2,2	1,9	1,7	1,5
$I_{\text{max}} / \mu\text{A}$	3,5	3,1	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
$I_{\text{min}} / \mu\text{A}$	3,3	2,9	2,5	2,1	1,8	1,6	1,4
$\ln(I / \mu\text{A})$	1,22	1,10	0,96	0,79	0,64	0,53	0,41
$\ln(I_{\text{max}} / \mu\text{A})$	1,25	1,13	0,99	0,83	0,69	0,59	0,47
$\ln(I_{\text{min}} / \mu\text{A})$	1,19	1,06	0,92	0,74	0,59	0,47	0,34
t / s	40	45	50	55	60	65	70
$I / \mu\text{A}$	1,3	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$I_{\text{max}} / \mu\text{A}$	1,4	1,2	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
$I_{\text{min}} / \mu\text{A}$	1,2	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
$\ln(I / \mu\text{A})$	0,26	0,10	-0,11	-0,22	-0,36	-0,51	-0,69
$\ln(I_{\text{max}} / \mu\text{A})$	0,34	0,18	0	-0,11	-0,22	-0,36	-0,51
$\ln(I_{\text{min}} / \mu\text{A})$	0,18	0	-0,22	-0,36	-0,51	-0,69	-0,92

TABELLE 2. Messung der Spannung $U(t)$ beim Entladen der Kondensatoren über den Innenwiderstand des Voltmeters.

t / s	10	20	30	40	50	60	70	80
U/V	8,9	7,8	6,8	6,1	5,2	4,6	4,0	3,5
U_{\max}/V	9,0	7,9	6,9	6,2	5,3	4,7	4,1	3,6
U_{\min}/V	8,8	7,7	6,7	6,0	5,1	4,5	3,9	3,4
$\ln(U/V)$	2,19	2,05	1,92	1,81	1,65	1,53	1,39	1,25
$\ln(U_{\max}/V)$	2,20	2,07	1,93	1,82	1,67	1,55	1,41	1,28
$\ln(U_{\min}/V)$	2,17	2,04	1,90	1,79	1,63	1,50	1,36	1,22

t / s	90	100	110	120	130	140	150	160
U/V	3,1	2,8	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3
U_{\max}/V	3,2	2,9	2,6	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4
U_{\min}/V	3,0	2,7	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2
$\ln(U/V)$	1,13	1,03	0,92	0,79	0,64	0,53	0,41	0,26
$\ln(U_{\max}/V)$	1,16	1,06	0,96	0,83	0,69	0,59	0,47	0,34
$\ln(U_{\min}/V)$	1,10	0,99	0,88	0,74	0,59	0,47	0,34	0,18

3. AUSWERTUNG

3.1. Graphische Auswertung des 1. Versuchs. Weil die Gleichung (8) keiner linearen Abhängigkeit zwischen den untersuchten Größen entspricht, wurden zur Auswertung des ersten Versuchs die Werte von $\ln(I/\mu A)$ als Funktion von t auf Millimeterpapier dargestellt. Die kurze Seite des Blattes ist hierbei die t -Achse und die lange Seite die $\ln(I/\mu A)$ -Achse. Für die t -Achse wurde den Maßstab $5s \sim 10$ mm gewählt. Für die $\ln(I/\mu A)$ -Achse hingegen den Maßstab $1 \sim 100$ mm. Alle Wertepaare mit ihren entsprechenden Fehlerrechtecken sind auf dem Blatt am Ende dieses Dokuments eingezeichnet.

Sei $\bar{I} := I/\mu A$ der Betrag der Stromstärke I , dann folgt aus (8):

$$(10) \quad \ln \bar{I} = -\frac{1}{\tau} \cdot t + \ln \bar{I}_0.$$

Es lässt sich feststellen, dass der resultierende Graph wegen (10) durch eine Gerade beschrieben ist. Mithilfe eines Steigungsdreiecks an den Randstellen der Grafik sind wir folglich in der Lage, den Wert von τ zu bestimmen:

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{\ln I(t=5s) - \ln I(t=70s)}{5s - 70s} = \frac{1,22 - (-0,69)}{5 - 70} s^{-1} = -0,03s^{-1}.$$

Es ist durchaus wichtig zu merken, dass $\Delta\tau = \Delta R + \Delta C = 10\%$. Für die Zeitkonstante gilt also $\tau = (33,33 \pm 10\%)$ s, mit $\tau_{\min} = 30$ s und $\tau_{\max} = 36,66$ s. Diese Werte sind sinnvoll, wenn wir sie mit denen im Abschnitt 2 vergleichen.

Die Anfangsstromstärke des Stromkreises lässt sich einfach aus den Ordinatenabschnitten von Ausgleichsgerade und Grenzgeraden ermitteln. Der $\ln(\bar{I})$ -Achsenabschnitt liegt offensichtlich bei $\ln \bar{I}_0 = 1,38$, mit $\bar{I}_{0,\min} = 1,32$ und $\bar{I}_{0,\max} = 1,43$. Daraus folgt, der Anfangsstrom ist $I_0 = 3,97 \mu A$, mit $I_{0,\min} = 3,74 \mu A$ und $I_{0,\max} = 4,17 \mu A$.

3.2. Graphische Auswertung des 2. Versuchs. Ähnlich wie beim ersten Versuch wurden zur Auswertung des zweiten Versuchs die Werte von $\ln(U/V)$ als Funktion von t auf Millimeterpapier dargestellt. Die kurze Seite des Blattes ist dieses Mal die t -Achse und die lange Seite die $\ln(U/V)$ -Achse. Für die t -Achse wurde den Maßstab $10\text{s} \sim 10\text{ mm}$ gewählt und für die $\ln(U/V)$ -Achse den Maßstab $1 \sim 100\text{ mm}$. Alle Wertepaare mit ihren Fehlerrechtecken sind auf dem Blatt am Ende dieses Dokuments eingezeichnet.

Sei $\bar{U} := U/V$ der Betrag der Spannung U , dann folgt aus (9):

$$(11) \quad \ln \bar{U} = -\frac{1}{\tau} \cdot t + \ln \bar{U}_0.$$

Dank (11) ist der Graph auch eine Gerade. Mithilfe von einem Steigungsdreieck wie beim ersten Versuch sehen wir, dass $\tau = (100 \pm 10\%) \text{ s}$, mit $\tau_{\min} = 90\text{s}$ und $\tau_{\max} = 100\text{s}$.

Für den Innenwiderstand $R_{i,V}$ muss gelten $R_{i,V} = \frac{\tau}{C} = \frac{100\text{s}}{6,7 \mu\text{F}} = 14,9 \text{ M}\Omega$. Aus den Randwerten von t und C lassen sich nun Maximal- und Minimalwert von $R_{i,V}$ berechnen:

$$\begin{aligned} R_{i,V_{\min}} &= \frac{\tau_{\min}}{C_{\max}} = \frac{90\text{s}}{7,0 \mu\text{F}} = 12,9 \text{ M}\Omega. \\ R_{i,V_{\max}} &= \frac{\tau_{\max}}{C_{\min}} = \frac{110\text{s}}{6,4 \mu\text{F}} = 17,4 \text{ M}\Omega. \\ \Delta R_{i,V} &= \frac{R_{i,V_{\max}} - R_{i,V_{\min}}}{2} = \frac{17,4 \text{ M}\Omega - 12,9 \text{ M}\Omega}{2} = 0,2 \text{ M}\Omega. \end{aligned}$$

An der letzten Grafik erkennt man, dass die Ausgleichsgerade die $\ln(U/V)$ -Achse bei $\ln(\bar{U}_0) = 2,30$ schneidet. Aus diesem Grund soll die Anfangsspannung U_0 des aufgeladenen Kondensators ungefähr $9,97 \text{ V}$ sein. Das Fehlerintervall ΔU_0 konnte aufgrund der Achsenskalierung in unserem Beispiel leider nicht sinnvoll dargestellt werden.

4. AUSBLICK

Mit Hilfe der graphischen Auswertung konnten wir die zeitliche Änderung von einigen physikalischen Größen untersuchen und ein paar wichtige Konstanten bestimmen wie z.B. die Zeitkonstante und den Innenwiderstand des Voltmeters. Wir zeigten auch, dass die zwei untersuchten Formeln in unserem Versuch eine sinnvolle Annäherung an die Realität geben.

LITERATUR

[Hug05] Scott Hughes. *Lecture 9: Variable currents and Thévenin equivalence*. Course 8.022 (Spring 2005), Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, 2005.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: clarissavpinheiro@outlook.com

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: tang_neng@campus.tu-berlin.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN, STRASSE DES 17. JUNI 135, 10623 BERLIN, DEUTSCHLAND
Email address: zealobo@campus.tu-berlin.de