

# **Применение вариационного метода для блендинга изображений (*Using the Variation Method to Image Blending*)**

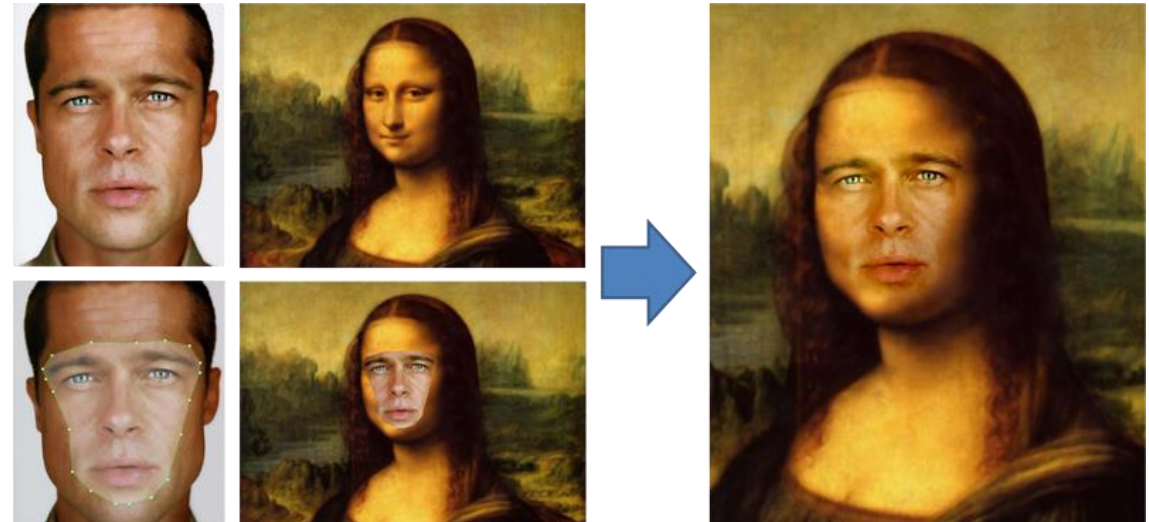
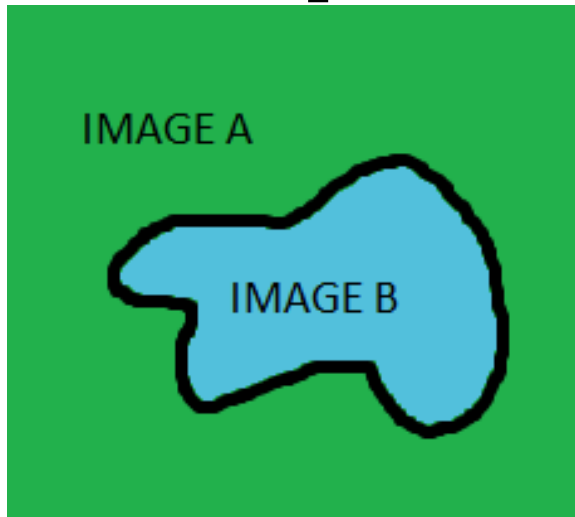
*Владислав Хайдуков*

# Постановка задачи

2 / 21

Пусть у нас имеются изображения  $A$ , на которое в определенном месте накладывается изображение  $B$ .

Вставку изображения  $B$  нужно выполнить так, чтобы градиент изображения  $A$  в области изображения  $B$  равнялся градиенту начального изображения  $B$ .



1. J. Matías Di Martino, Gabriele Facciolo, and Enric Meinhardt-Llopis, Poisson Image Editing, Image Processing On Line, 6 (2016), pp. 300–325.  
<https://doi.org/10.5201/ipol.2016.163>
2. Nordin Saad, A'qilah Ahmad Dahalan, Azali Saudi. Modified Poisson compositing technique on skewed grid. AIMS Mathematics, 2022, Volume 7, Issue 2: 2176-2194. doi: 10.3934/math.2022124.
3. Fouad Mohammad Salama, Nur Nadiah Abd Hamid, Umair Ali, Norhashidah Hj. Mohd Ali. Fast hybrid explicit group methods for solving 2D fractional advection-diffusion equation. AIMS Mathematics, 2022, Volume 7, Issue 9: 15854-15880. doi: 10.3934/math.2022868

# Подобные задачи

4 / 21

- ❑ *Задача восстановления изображения по векторному полю градиентов [1–3].*
- ❑ **Задача бесшовной вставки (блендинг) изображения [1].**
- ❑ *Задача восстановления изображения со смешиванием градиентов изображений [1–2].*
- ❑ *Задача редактирования области изображения [1–3].*
- ❑ *Задача восстановления части изображения [1–3].*
- ❑ *Задача замены части изображения на похожую [1–3].*

# Подход к решению задачи

5 / 21

## Проблемы:

- при численном решении уравнения Пуассона образуются большие СЛАУ с разреженной структурой;
- нужно много вычислительных ресурсов.

## Возможные решения:

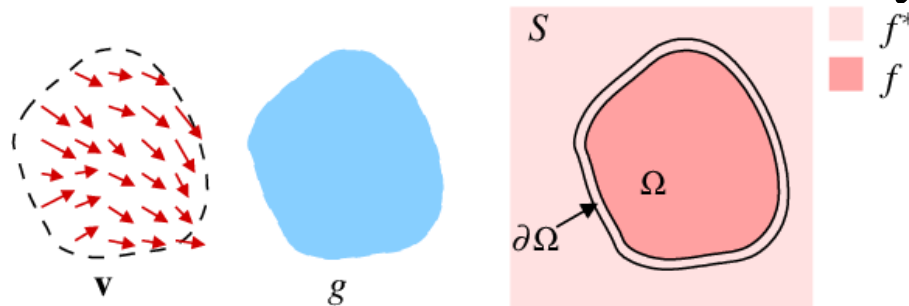
- использование многосеточных методов решения СЛАУ;
- распараллеливание процессов в ходе решения СЛАУ;
- использование вспомогательных готовых библиотек (желательно с открытым кодом);
- комбинация существующих решений.

# Математический инструмент

6 / 21

Найти функцию  $f(x, y)$  для которой функционал имеет глобальный минимум:

$$J(f) = \iint_{\Omega} F(\nabla f, v) dx dy \rightarrow \min,$$



$$F(\nabla f, v) = \|\nabla f, v\| = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - v_x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} - v_y \right)^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial f'_y} = 0 \quad \text{— уравнение Эйлера — Лагранжа.}$$

$$2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Граничные условия вида:

а) Дирихле (первого рода):

$$f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega};$$

б) Неймана (второго рода):

$$f'|_{\partial\Omega} = g^*|_{\partial\Omega};$$

в) Робіна (третьего рода):

$$\alpha f|_{\partial\Omega} + \beta f'|_{\partial\Omega} = \varphi^*|_{\partial\Omega}.$$

# Бесшовная вставка. Математический пример

8 / 21

Найти  $\varphi(x)$  для которой

$$J(\varphi', v) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} F(\varphi', v) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [(\varphi' - v)^2] dx \rightarrow \min,$$

где  $v(x) = \pi \cos \pi x$ ,  $\varphi(1/3) = f(1/3)$ ,  $\varphi(2/3) = f(2/3)$ ,

$$f(x) = 2 - \cos 2\pi x^2, \quad x \in [0; 1].$$

**Решение:**

$$2 \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{dv}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = (\pi \cos \pi x)' = -\pi^2 \sin \pi x.$$

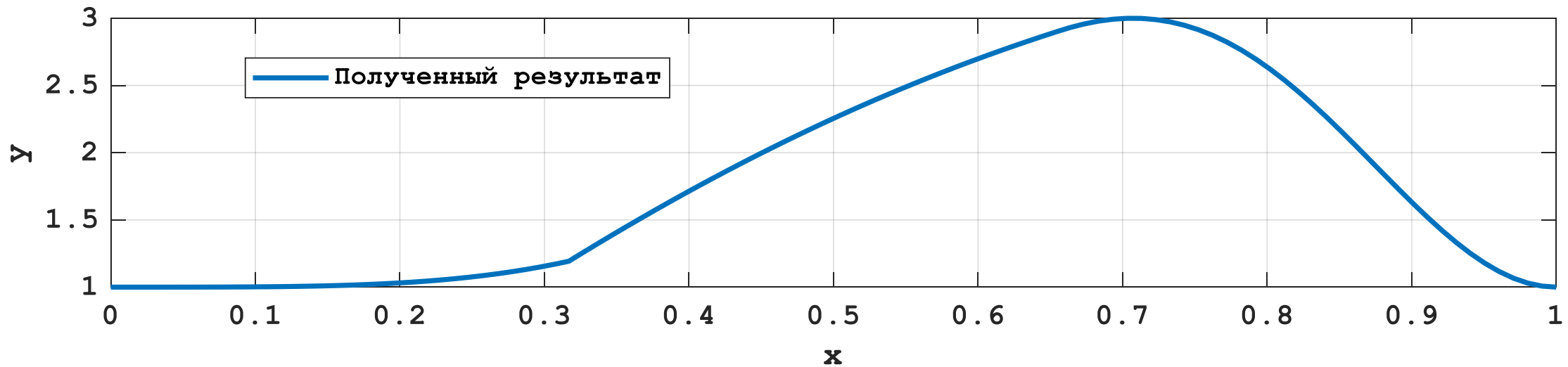
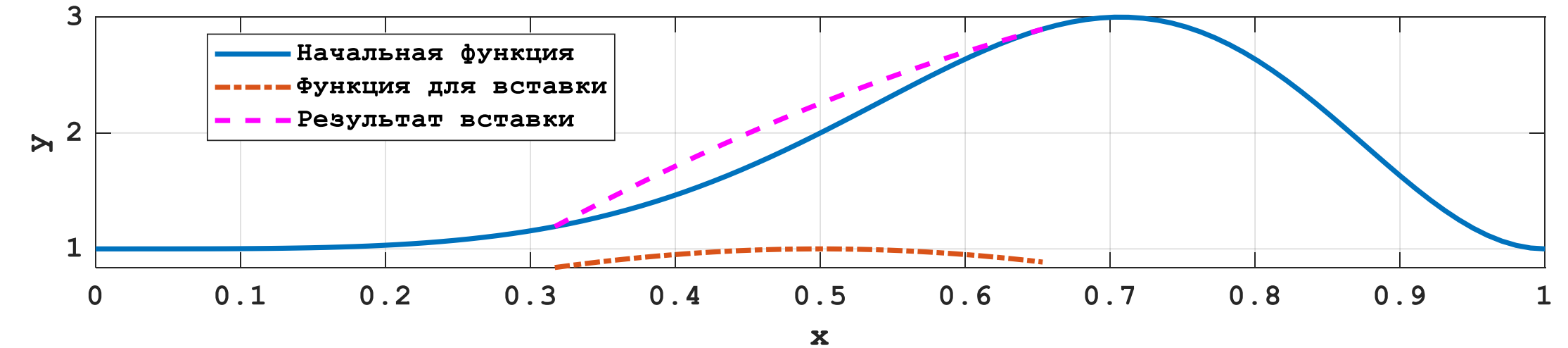
**Окончательно имеем:**

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\pi^2 \sin \pi x, \quad \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right), \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right).$$



# Бесшовная вставка. Математический пример

9 / 21



# Бесшовная вставка. Математический пример 2

10 / 21

Знайти  $\varphi(x, y)$  для якої

$$J(\nabla\varphi, v) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} F(\nabla\varphi, v) dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left[ (\varphi'_x - v_x)^2 + (\varphi'_y - v_y)^2 \right] dx dy \rightarrow \min,$$

де  $v_x = g'_x$ ,  $v_y = g'_y$ ,  $g(x, y) = \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5))$

з граничними умовами:

$$\varphi(1/3, y) = f(1/3, y), \quad \varphi(2/3, y) = f(2/3, y),$$

$$\varphi(x, 1/3) = f(x, 1/3), \quad \varphi(x, 2/3) = f(x, 2/3).$$

$$f(x, y) = \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)).$$

# Бесшовная вставка. Математический пример 2

11/21

**Решение:**

$$v_x(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} = \pi(y - 0.5) \cos(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)), \quad v_y(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y} = \pi(x - 0.5) \cos(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)).$$

Используя уравнение Эйлера-Лагранжа, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\pi^2(y - 0.5)^2 \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)), \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\pi^2(x - 0.5)^2 \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)).$$

**Окончательно имеем:**

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\pi^2((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2) \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)),$$

$$(x, y) \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]^2, \quad \varphi\left(\frac{1}{3}, y\right) = f\left(\frac{1}{3}, y\right), \quad \varphi\left(\frac{2}{3}, y\right) = f\left(\frac{2}{3}, y\right),$$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{3}\right) = f\left(x, \frac{1}{3}\right), \quad \varphi\left(x, \frac{2}{3}\right) = f\left(x, \frac{2}{3}\right).$$

# Бесшовная вставка. Математический пример 2

12 / 21

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\pi^2 (y - 0.5)^2 \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)),$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\pi^2 (y - 0.5)^2 \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)).$$

Остаточно маємо:

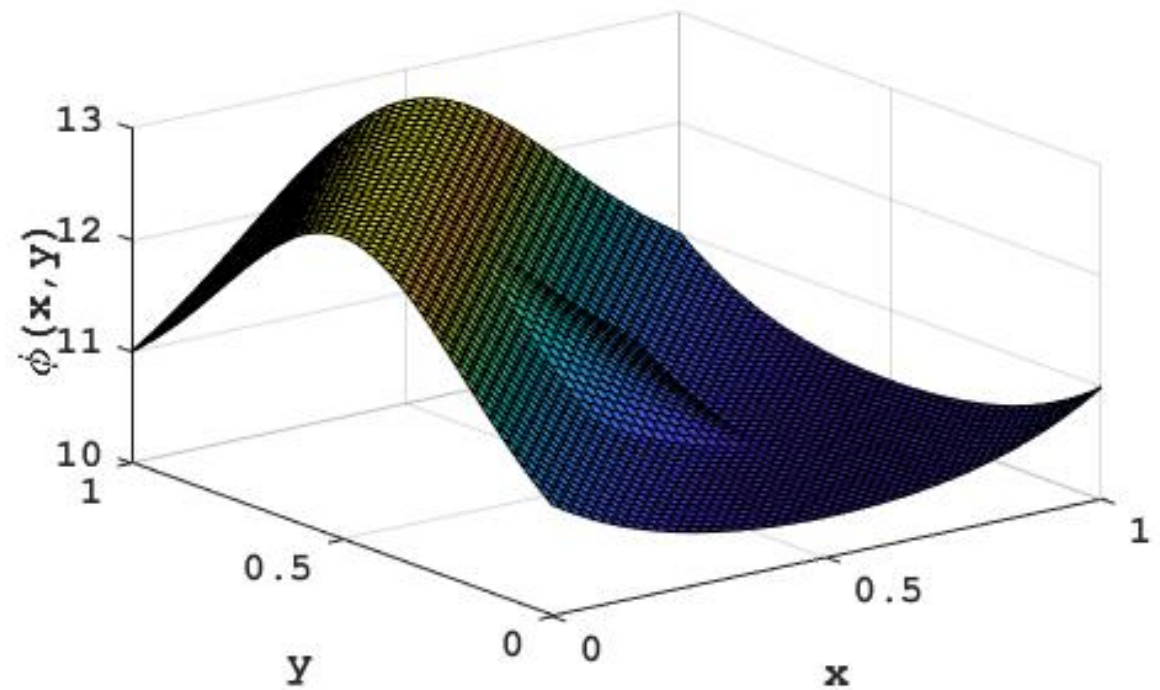
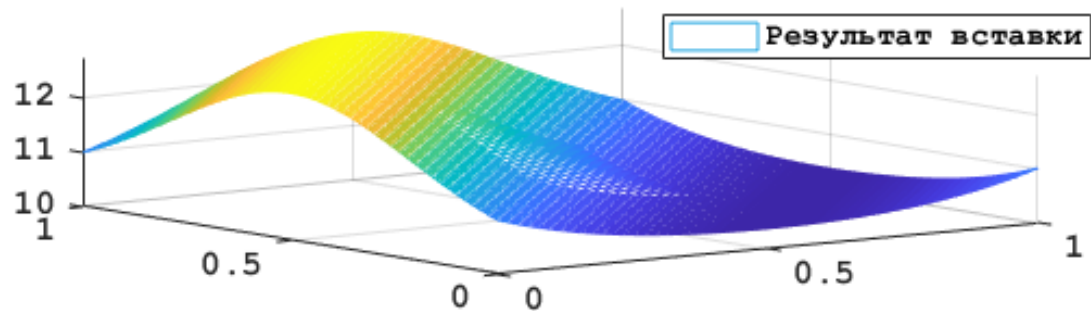
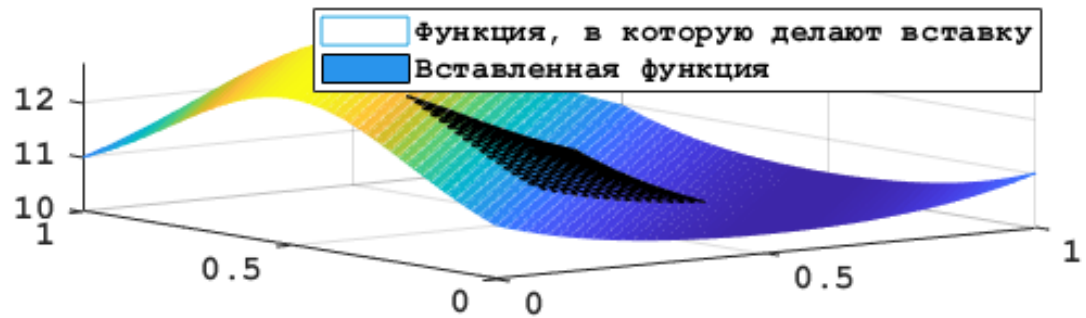
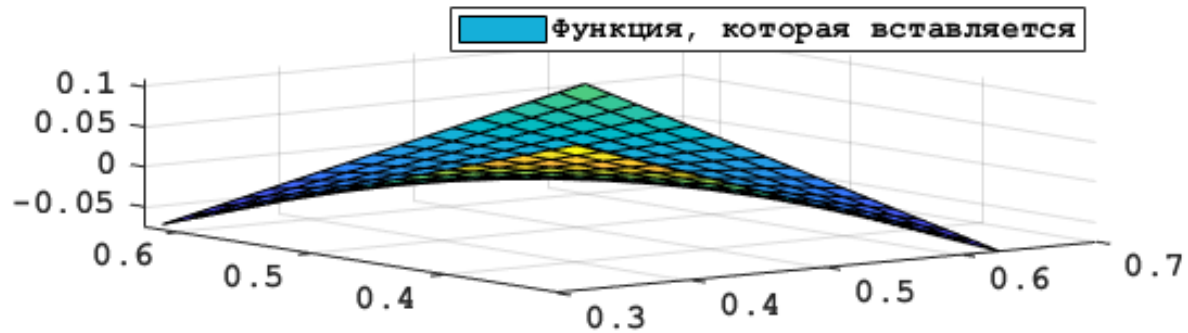
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\pi^2 ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2) \sin(\pi(x - 0.5)(y - 0.5)),$$

$$(x, y) \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]^2, \quad \varphi\left(\frac{1}{3}, y\right) = f\left(\frac{1}{3}, y\right), \quad \varphi\left(\frac{2}{3}, y\right) = f\left(\frac{2}{3}, y\right),$$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{3}\right) = f\left(x, \frac{1}{3}\right), \quad \varphi\left(x, \frac{2}{3}\right) = f\left(x, \frac{2}{3}\right).$$

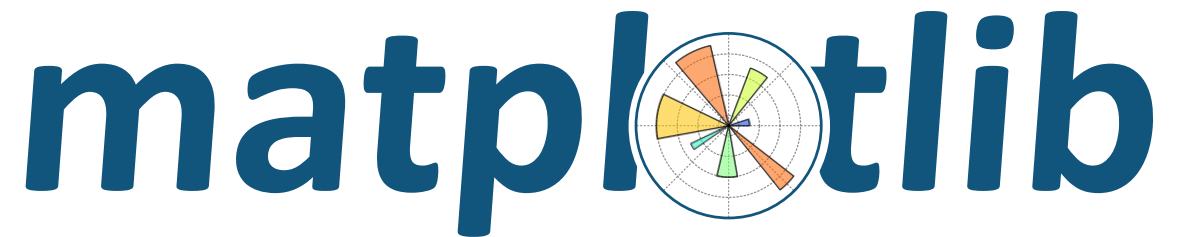
# Бесшовная вставка. Математический пример 2

13 / 21



# Использованные технологии

14 / 21



# Основные фрагменты кода

15 / 21

```
def CreateSparseMatrix(nx,ny):  
    # задаем шаблон коэффициентов из единиц  
    Ones = np.ones((nx*ny,))  
    # формируем ленты матрицы на основании ф-ра Лапласа  
    data = np.array([Ones, Ones, -4*Ones, Ones, Ones])  
    # формируем местоположения лент в матрице  
    diags = np.array([-ny, -1, 0, 1, ny])  
    # сформировали матрицу, сделали доступ к ней  
    A = spdiags(data, diags, nx*ny, nx*ny);  
    A = sp.csr_matrix(A)  
    # удаляем лишние коэффициенты в матрице для 2-х лент  
    for i in range(ny,N,ny):    A[i,i-1]=A[i-1,i]=0
```

# Основные фрагменты кода

16 / 21

# Вторая основная функция для решения поставленной задачи

```
def FormRightPart(imgInsert, imgContainer):  
    imgInsert = np.double(imgInsert) # переходим к double для попиксельной обработки  
    imgContainer = np.double(imgContainer)  
    # Правая часть ур.Пуассона  
    tmp = imgInsert[:-2,1:-1,:] - 2*imgInsert[1:-1,1:-1,:] + imgInsert[2:,1:-1,:]  
    tmp += imgInsert[1:-1,:-2,:] - 2*imgInsert[1:-1,1:-1,:] + imgInsert[1:-1,2:,:]   
  
    # Учет граничных условий (тут подтягиваем значения с рамки  
    # в контейнере для вставки изображения)  
    tmp[:,0,:] -= imgContainer[1:-1,0,:] # низ  
    tmp[:,-1,:] -= imgContainer[1:-1,-1,:] # верх  
    tmp[0,:,:] -= imgContainer[0,1:-1,:] # лево  
    tmp[-1,:,:] -= imgContainer[-1,1:-1,:] # право  
  
    return tmp # возвращаем правую часть пока что в матричном виде, а не в векторном
```



# Основные фрагменты кода

17 / 21

```
# функция преобразования правой части в векторную (переход от матрицы) и решение
СЛАУ
def GetSolution(A,B,nx,ny):
    Sol = np.zeros((nx,ny,channel)) # выделяем память под матрицу решения
    for i in range(channel): # решаем уравнение Пуассона для всех каналов
        b = np.reshape(B[:, :, i], (N,1)) # взяли каналы и преобразовали его в вектор
        start = time.time() # стартовая точка отсчета времени решения СЛАУ
        X = spsolve(A,b) # Решили СЛАУ, используя scipy
        finish = time.time() # конец по времени для решения СЛАУ
        Sol[:, :, i] = np.reshape(X, (nx,ny)) # вектор-решение обратно в матрицу
    Sol[Sol>255] = 255; Sol[Sol<0] = 0 # обрабатываем выход за пределы для RGB
    Sol = np.uint8(Sol) # преобразование в uint8

    return Sol
```

# Результаты работы кода

18 / 21

## Пример входных данных

Изображение-контейнер



Изображение-шаблон  
(для вставки)





# Результаты работы кода

19 / 21

Результат – входные данные (результат решения задачи)



07.08.2023

*Применение вариационного метода для блендинга изображений (Using the Variation Method to Image Blending)*

# Общие выводы по результатам

20 / 21

- ❑ В проекте реализована основная задача – задача восстановления изображения по полю его градиентов.
- ❑ На основании полученных результатов решения базовой задачи (восстановления изображения по полю градиентов) решена чуть сложнее задача – задача бесшовной вставки одного изображения в другое на основании вариационного принципа, который сводится к решению краевой задачи для уравнения Пуассона.
- ❑ Разработанный программный код протестирован на разных полноцветных изображениях. Программа работает корректно.
- ❑ Код работает быстро, учитывая развитую библиотеку SCIPY, которая была использована для решения СЛАУ с разреженной матрицей ленточной структуры.

# Рекомендации по улучшению

21 / 21

Для получения более эффективного и эффектного результата можно применить:

- ☐ метод смешивания градиентов;
- ☐ делать вставку изображения без фона или с минимальным фоном в изображении;
- ☐ распараллелить (для получение более быстрого результата для больших изображений для блендинга);
- ☐ комбинировать (в зависимости от задачи и потребности).

**Дякую за увагу!**

