



# ЛР №1.04 — Закон динамики

---

выполнили: студенты группы М3205 Ващенков Алексей, Белунин Дмитрий, Патолицына Анастасия

преподаватель: Хуснутдинова Наира Рустемовна

---

## Цели работы

1. Проверка основного закона динамики вращения.
2. Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

## Задачи

1. Измерение времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине.
2. Расчёт ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити.
3. Расчёт момента инерции крестовины с утяжелителями и момента силы трения.
4. Исследование зависимости момента силы натяжения нити от углового ускорения. Проверка основного закона динамики вращения.
5. Исследование зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Проверка теоремы Штейнера.

## Описание установки

## Экспериментальная установка

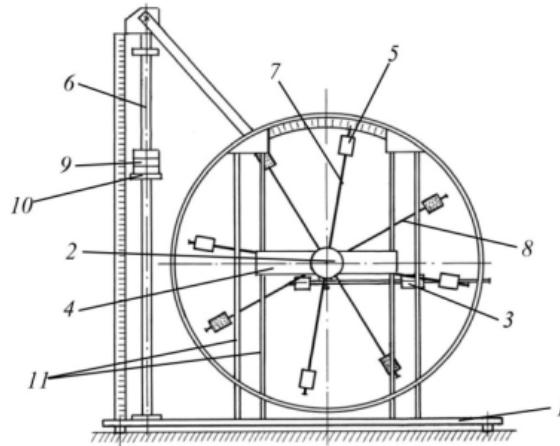


Рис. 2. Стенд лаборатории механики (общий вид)

Общий вид экспериментальной установки изображен на Рис. 2.  
В состав установки входят:

1. Основание
2. Рукоятка сцепления крестовин
3. Устройства принудительного трения
4. Поперечина
5. Груз крестовины
6. Трубчатая направляющая
7. Передняя крестовина
8. Задняя крестовина
9. Шайбы каретки
10. Каретка
11. Система передних стоек

## Используемая теория

Момент инерции крестовины по теореме Штейнера:

$$I_0 = \bar{I} - 4 \cdot m_{yt} \cdot \bar{R}^2, \quad m_{yt} = m_{yt} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}) \cdot (I_i - \bar{I})}{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}$$

Зависимость пройденного пути от времени при равноускоренном движении:

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}$$

Связь между угловым ускорением и линейным ускорением груза:

$$\varepsilon = \frac{2a}{d} = \frac{4h}{t^2 d}$$

Момент силы натяжения нити:

$$M = \frac{md}{2}(g - a)$$

Основной закон динамики вращения:

$$I \cdot \varepsilon = M - M_{\text{тр}}$$

Расстояние от оси крестовины до грузов-утяжелителей:

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

Абсолютная погрешность с учетом погрешности приборов:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{\text{изм}}\right)^2}$$

Погрешность косвенного значения:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

## Результаты

Таблицы №1 для масс  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$

- Нашли среднее время падения гири для всех масс гири и всех положениях утяжелителей на крестовине и рассчитали погрешность среднего значения времени  $\Delta t$  для  $m_1$

Расчёт погрешности производили по формуле:

$$\Delta t_{\text{ср1}} = t_{\alpha, N} \cdot \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^N (t_i - t_{\text{ср1}})^2}$$

- Используя найденные значения  $t_{\text{ср}}$  рассчитали ускорение  $a$  груза, угловое ускорение  $\varepsilon$  крестовины и момент  $M$  силы натяжения нити. Для первых значений  $a, \varepsilon$  и  $M$  вычислить их погрешности и записать соответствующие доверительные интервалы.

$$m_1 = (220 \pm 0.5) \text{ грамм}$$

Время	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$t_1$	4, 32	5, 57	6, 68	7, 39	8, 06	8, 7
$t_2$	4, 4	6	6, 2	7, 32	7, 85	8, 7
$t_3$	4, 52	6, 15	6, 3	7, 33	7, 91	9, 02
$t_{\text{ср}}$	$4, 41 \pm 0, 25$	$5, 91 \pm 0, 75$	$6, 39 \pm 0, 62$	$7, 35 \pm 0, 16$	$7, 94 \pm 0, 09$	$8, 81 \pm 0, 17$

$$m_2 = (440 \pm 1.0) \text{ грамм}$$

Время	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$t_1$	3, 28	4, 19	4, 53	4, 99	5, 89	6, 88
$t_2$	3, 09	4	4, 71	5, 11	6, 02	7, 01
$t_3$	3, 22	4, 14	4, 46	5, 17	6, 03	6, 87
$t_{\text{ср}}$	$3, 20 \pm 0, 24$	$4, 11 \pm 0, 24$	$4, 57 \pm 0, 32$	$5, 09 \pm 0, 23$	$5, 98 \pm 0, 19$	$6, 92 \pm 0, 19$

$$m_3 = (660 \pm 1.5) \text{ грамм}$$

Время	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$t_1$	2, 63	3, 29	3, 61	4, 39	4, 85	5, 51
$t_2$	2, 56	3, 28	3, 66	4, 26	4, 78	5, 51
$t_3$	2, 56	3, 21	3, 67	4, 39	4, 78	5, 43
$t_{\text{ср}}$	$2, 58 \pm 0, 10$	$3, 26 \pm 0, 11$	$3, 65 \pm 0, 08$	$4, 35 \pm 0, 14$	$4, 80 \pm 0, 10$	$5, 48 \pm 0, 11$

$$m_4 = (880 \pm 2.0) \text{ грамм}$$

Время	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$t_1$	2, 23	2, 75	3, 15	3, 93	4, 27	4, 78
$t_2$	2, 36	2, 64	3, 21	3, 86	4, 2	4, 64
$t_3$	2, 4	2, 82	3, 28	3, 8	4, 25	4, 72
$t_{\text{ср}}$	$2, 33 \pm 0, 22$	$2, 74 \pm 0, 23$	$3, 21 \pm 0, 16$	$3, 86 \pm 0, 16$	$4, 24 \pm 0, 09$	$4, 71 \pm 0, 17$

3. Используя найденные значения  $t_{\text{ср}}$  рассчитали ускорение  $a$  груза, угловое ускорение крестовины и момент  $M$  силы натяжения нити, и для первых значений  $a$ ,  $\varepsilon$  и  $M$  вычислили их погрешности и записать соответствующие доверительные интервалы.

#### Ускорение $a$

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1$	0.071878	0.040128	0.034251	0.025939	0.022207	0.018051
$m_2$	0.137004	0.082879	0.067132	0.054037	0.039149	0.029236
$m_3$	0.209781	0.131732	0.105278	0.0741	0.06068	0.046563
$m_4$	0.257879	0.186932	0.135587	0.0938	0.077875	0.063108

$$a = \frac{2h}{t^2} \Rightarrow \Delta a_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cdot \Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(-\frac{4h}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2} = 0.008143413$$

#### Угловое ускорение $\varepsilon$

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1$	3.12512	1.744678	1.489174	1.127767	0.965515	0.784833
$m_2$	5.956697	3.603434	2.918781	2.349441	1.70215	1.271124
$m_3$	9.120934	5.727499	4.577286	3.221718	2.638243	2.024468
$m_4$	11.21214	8.127489	5.895066	4.078269	3.385856	2.743837

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{2a}{d} = \frac{4h}{t^2 \cdot d} \\ \Rightarrow \Delta\varepsilon_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{t^2 d} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(-\frac{4h}{t^3 d} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(-\frac{4h}{t^2 d^2} \cdot \Delta d\right)^2} = 0.356357063\end{aligned}$$

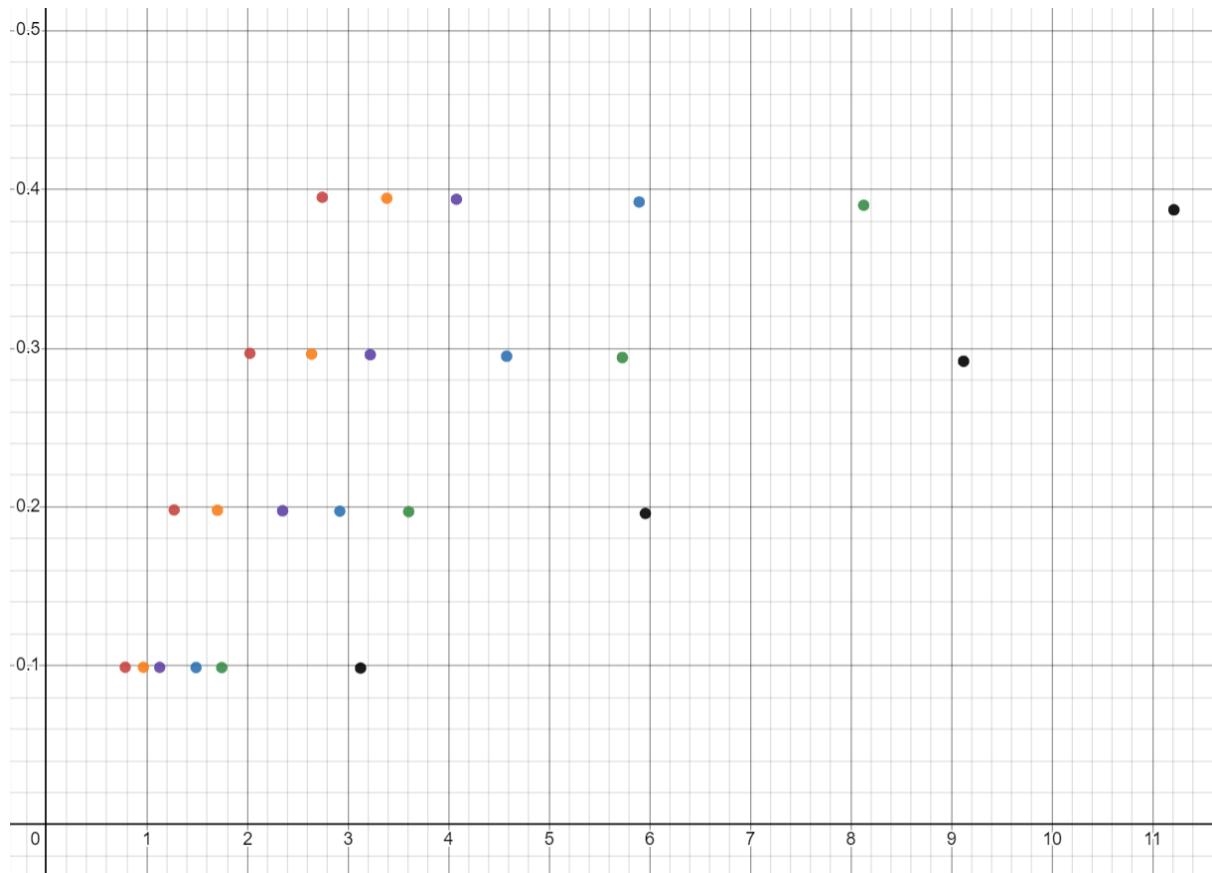
#### Момент силы $M$ натяжения нити

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1$	0.098651	0.098972	0.099032	0.099116	0.099154	0.099196
$m_2$	0.195984	0.197079	0.197398	0.197663	0.197964	0.198165
$m_3$	0.291766	0.294136	0.294939	0.295886	0.296293	0.296722
$m_4$	0.387075	0.389947	0.392025	0.393717	0.394361	0.394959

$$\begin{aligned}M &= \frac{md}{2}(g - a) = \frac{md}{2} \left(g - \frac{2h}{t^2}\right) \\ \Rightarrow \Delta M_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial t} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2} = \\ &\sqrt{\left(\frac{md}{t^2} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{2mdh}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{m(gt^2 - 2h)}{2t^2} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{d(gt^2 - 2h)}{2t^2} \cdot \Delta m\right)^2} \\ &= 0.001149423\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= (0.071878 \pm 0.008143413) \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_a = 11.3\%, \quad \alpha = 0.95 \\ \varepsilon_1 &= (3.12512 \pm 0.356357063) \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_\varepsilon = 11.4\%, \quad \alpha = 0.95 \\ M_1 &= (0.098651 \pm 0.001149423) \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_M = 1.16\%, \quad \alpha = 0.95\end{aligned}$$

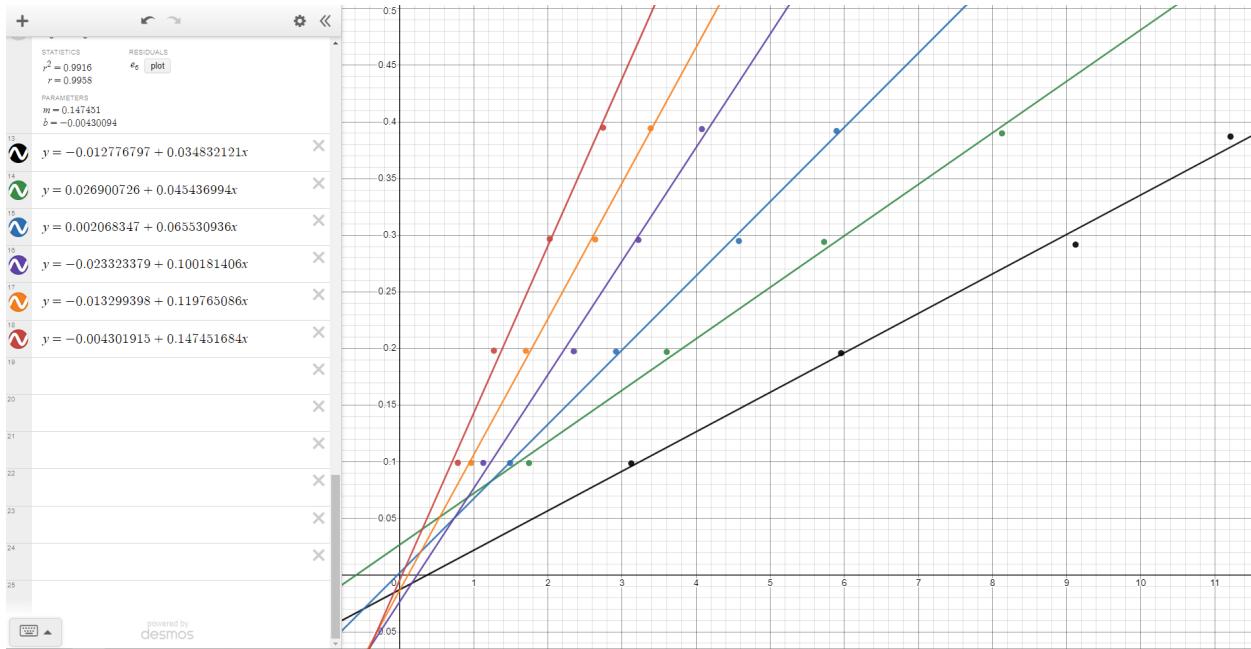
3. Отметили точки зависимости  $M(\varepsilon)$  для каждого положения утяжелителей.



4. Для каждого положения утяжелителей на основе таблицы  $M$  и  $\varepsilon$  по методу наименьших квадратов (МНК) рассчитали момент  $I$  инерции крестовины с утяжелителями и момент силы трения  $M_{\text{тр}}$ .

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$M_{\text{тр}}$	-0.01278	0.026901	0.002068	-0.02332	-0.0133	-0.0043
$I$	0.034832	0.045437	0.065531	0.100181	0.119765	0.147452

5. Используя вычисленные в п. 4 значения  $I$  и  $M_{\text{тр}}$ , на рисунке из пункта 3, построили графики зависимости (8) для всех положений утяжелителей.



6. Для каждого положения утяжелителей нашли расстояние  $R$  между осью  $O$  вращения и центром С утяжелителя по формуле, и его квадрат

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

$l_1$  – расстояние от оси вращения до первой риски;

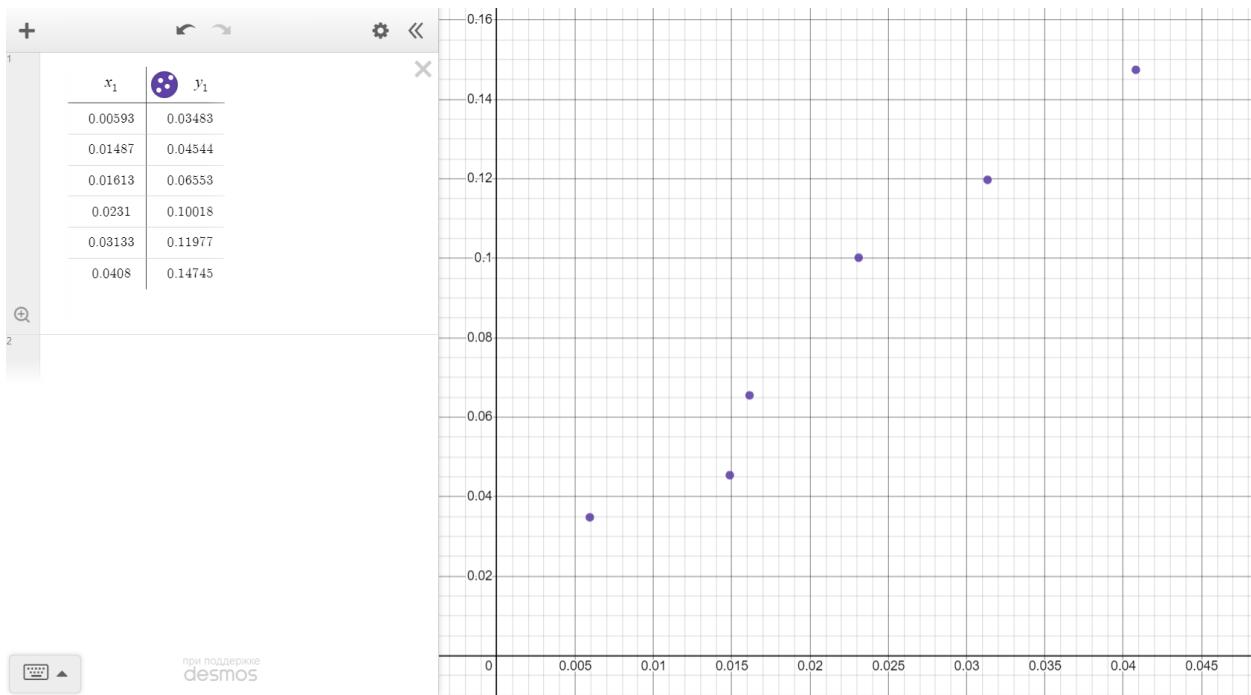
$n$  – номер риски, на которой установлены утяжелители;

$l_0$  – расстояние между соседними рисками;

$b$  – размер утяжелителя вдоль спицы.

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$R_i$	0.077	0.102	0.127	0.152	0.177	0.202
$R_i^2$	0.005929	0.010404	0.016129	0.023104	0.031329	0.040804

7. Объединили значения  $R^2$  и  $I$  в таблицу и на основе этой таблицы в координатах:  $I$ (ордината) –  $R^2$  (абсцисса) отметили экспериментальные точки зависимости  $I(R^2)$



8. На основе найденных значений  $I$  и  $R^2$  с помощью МНК определить значения  $I_0$  и  $m_{yt}$ , а также их погрешности  $\Delta I_0$  и  $\Delta m_{yt}$ . В соответствии с формулой (7) величина  $I_0$  – свободное слагаемое в линейной зависимости  $I(R^2)$ ,  $m_{yt}$  – четверть от углового коэффициента наклона этой зависимости.

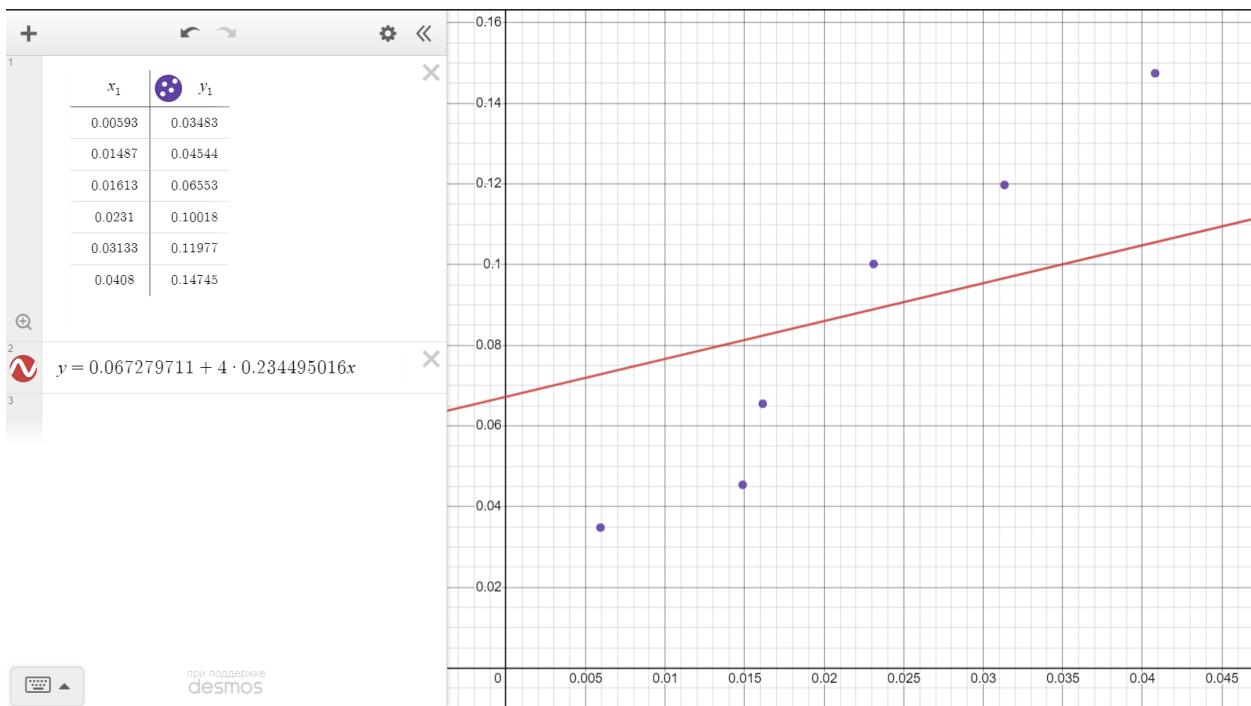
$$m_{yt} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}) \cdot (I_i - \bar{I})}{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} = 0.2345$$

$$\Delta m_{yt} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (I_i - (I_0 + 4 \cdot m_{yt} \cdot \bar{R}^2))^2}{(N-2) \cdot \sum_{i=1}^N (R_i^2 - \bar{R}^2)^2}} = 0.0045$$

$$I_0 = \bar{I} - 4 \cdot m_{yt} \cdot \bar{R}^2 = 0.06728$$

$$\Delta I_0 = 2 \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{R}^2}{\sum_{i=1}^N (R_i^2 - \bar{R}^2)^2} \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (I_i - (I_0 + 4 \cdot m_{yt} \cdot \bar{R}^2))^2}{N-2}} = 0.00076$$

9. Построили график зависимости, используя значения  $I_0$  и  $m_{yt}$ , вычисленные в пункте 8, на рисунке из пункта 7



## Выводы

Рассчитаны необходимые параметры и значения для проверки зависимости момента инерции от масс грузов-утяжелителей на спицах вращающейся крестовины. Также экспериментально проверен основной закон динамики, связывающий угловое ускорение с моментами сил трения и натяжения нити. Получены доверительные интервалы для некоторых характеристик динамики вращения, построены соответствующие графики.