



Лабораторная работа №1.02

Изучение скольжения тележки по наклонной плоскости

выполнили: студенты группы М3205 Бородина Ирина, Орешин Илья, Патолицына Анастасия

преподаватель: Хуснутдинова Наира Рустемовна

Цели работы:

1. Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.
2. Определение величины ускорения свободного падения g .

Задачи:

1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона.
2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту.
3. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренности движения тележки.
4. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения.

Экспериментальная установка:

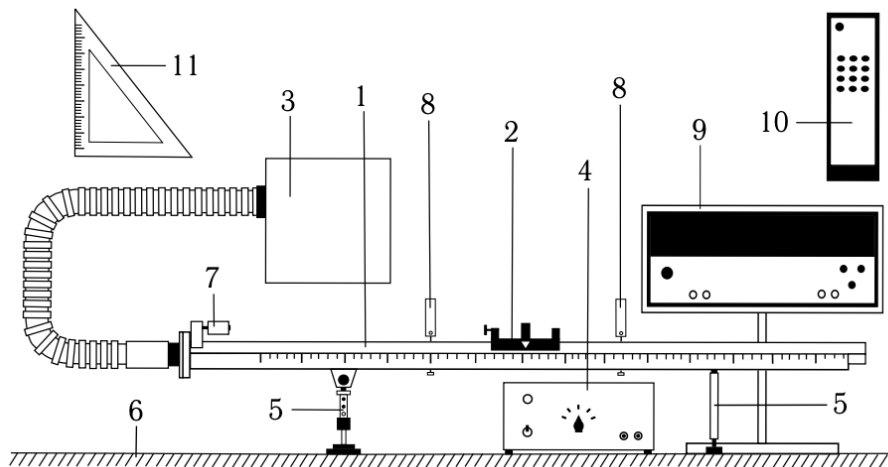


Рис. 1. Общий вид экспериментальной установки.

Оборудование (Рис. 1):

1. Рельс с сантиметровой шкалой на лицевой стороне.
2. Тележка.
3. Воздушный насос.
4. Источник питания насоса ВС 4-12.
5. Опоры рельса.
6. Опорная плоскость (поверхность стола).
7. Фиксирующий электромагнит.
8. Оптические ворота.
9. Цифровой измерительный прибор ПКЦ-3.
10. Пульт дистанционного управления прибором ПКЦ-3.
11. Линейка – угольник.

Характеристики средств измерений приведены в Табл. 1.

Теория:

(формулы)

$$Y = x_2 - x_1 \text{ и } Z = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2}$$

Абсолютная погрешность - это разница между измеряемым \bar{x} и истинным $x_{\text{и}}$ значениями измеряемой величины.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\%$$

Относительная погрешность - это отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины.

Коэффициент a теоретическая зависимость $Y = aZ$ можно найти по формуле

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2}$$

Среднеквадратическое отклонение (СКО здесь и далее) можно найти по формуле

$$\sigma(a) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_i - aZ_i)^2}}{(N-1) \sum_{i=1}^N Z_i^2}$$

Абсолютная погрешность коэффициента a для доверительной вероятности $\alpha = 0,90$

$$\Delta a = 2\sigma(a)$$

Синус угла наклона рельса к горизонту

$$\sin(\alpha) = \frac{(h_0 - h) - (h'_0 - h')}{x' - x}$$

(подписать что такое h,x)

Значение ускорения

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

Погрешность ускорения

$$\Delta a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_{\text{и}})^2 + \Delta x_{\text{и}}^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + \langle t_2 \rangle \Delta t_2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

где Δx – приборная погрешность измерения координат

$x_1, x_2, \Delta t_1, \Delta t_2$ – абсолютные погрешности значений времен t_1 и t_2 .

Теоретическая зависимость α от $\sin \alpha$

$\alpha = A + B \sin \alpha$, где $A = -\mu g, B = g$

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i \sin \alpha_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2}$$

$$A = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N a_i - B \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)$$

СКО для ускорения свободного падения (коэффициента B)

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{D(N-2)}}$$

где

$$d_i = a_i - (A + B \sin \alpha_i)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2$$

Абсолютная погрешность коэффициента В

$$\Delta g = 2\sigma_g$$

Относительная погрешность g

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} * 100\%$$

Метод наименьших квадратов (МНК).

Суть его заключается в подборе таких значений коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений, измеренных в опытах значений $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ от рассчитанных был абы минимальной.

МНК позволяет не только найти коэффициенты функциональной зависимости, но и провести оценку погрешностей найденных коэффициентов.

Расчет коэффициентов

a и b следует проводить в такой последовательности:

1. Из опыта получить n пар значений аргумента и функции (x_i, y_i) .
2. Найти средние значения всех экспериментальных точек:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

3. Найти коэффициенты прямой по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

4. Рассчитать параметры D , d_i :

$$d_i = y_i - (a + bx_i)$$

$$D = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

5. Определить СКО коэффициентов a и b :

$$S_b^2 = \frac{1}{D} \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

$$S_a^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D} \right) \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

Расчет коэффициента b и его СКО упрощается, если из теории известно, что прямая проходит через начало координат.

Тогда параметр

b и его СКО находят по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$S_b^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} \frac{\sum d_i^2}{n-1}$$

6. Погрешность рассчитанной величины y при произвольном значении аргумента x рассчитывают для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ как погрешность косвенных измерений:

$$\Delta_y = \sqrt{(2S_a)^2 + (2S_b x)^2}$$

Ход работы:

На практическом занятии мы провели измерения для Задание 1 и Задание 2. Все полученные значения измерений мы занесли в соответствующие таблицы, как сказано в Заданиях.

Задание 1. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренности движения тележки.

1. По результатам из Табл. 3 рассчитайте величины $Y = x_2 - x_1$ и $Z = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$ и их погрешности.

$x_2 - x_1, \text{ м}$	$(t_2^2 - t_1^2)/2, \text{ с}^2$
0,25	1,93
0,35	2,41
0,55	4,40
0,75	4,60
0,95	6,76

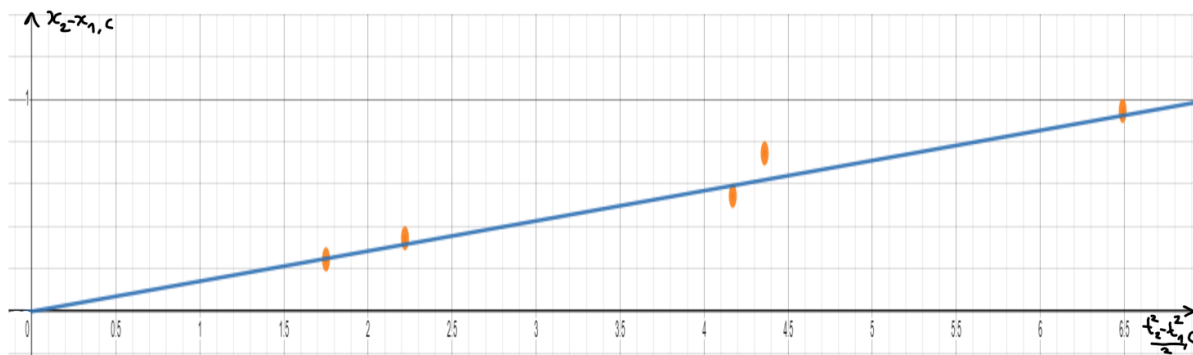
Рисунок 1. Значения Y, Z .

$$\Delta t = \sqrt{\left(-t_1 * \frac{2}{3} * 0,1\text{с}\right)^2 + \left(t_2 * \frac{2}{3} * 0,1\text{с}\right)^2}$$

$$\Delta x = 0,0047\text{м}$$

2,4. Рисунок 1, на котором изображены точки экспериментальной зависимости Y_i, Z_i , а также график вида $Y = aZ$, с угловым коэффициентом равным ускорению,

значение которого было получено следующем пункте.



3. ускорение методом наименьших квадратов $a=0,144$

$a = 0,142$ -ускорение, полученное альтернативным методом

$\sigma_a = 0,0064$ -среднеквадратическое отклонение (СКО) ускорения

$\Delta_a = 0,0064 * 2 = 0,0128$ - абсолютная погрешность коэффициента a для доверительной вероятности $\alpha = 0,90$

$$\varepsilon_a = \frac{0,0128}{0,1422} * 100\% = 9\%$$

Доверительный интервал $[0,1422-0,0128 ; 0,1422+0,0128]$

5. У нас величины пропорциональны так как график - прямая, значит ускорение является константным значением, а следовательно движение является равноускоренным.

Задание 2. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения

1. Рисунок 2, на котором показаны значения синуса в зависимости от количества пластин ,которые за угол наклона рельса к горизонту

Нпл		$\sin \alpha$
	1	0,013
	2	0,027
	3	0,037
	4	0,054
	5	0,064
Нпл-количество пластин		

2. Рисунок 3, на котором показаны средние значения времени t_1 и t_2 и их погрешности

$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1, \text{ с}$	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2, \text{ с}$
1,38 ± 0,124	4,52 ± 0,0868
0,9 ± 0,110	3 ± 0,0667
0,72 ± 0,087	2,44 ± 0,0953
0,6 ± 0,067	2,1 ± 0,0667
0,52 ± 0,087	1,9 ± 0,0667

3,4 Рисунок 4, на котором показаны результаты расчета ускорения в виде доверительного интервала $\langle a \rangle \pm \Delta a$

$\langle a \rangle \pm \Delta a, \text{ м/с}^2$
0,026 ± 0,054
0,085 ± 0,058
0,202 ± 0,087
0,370 ± 0,072
0,568 ± 0,080

5. Коэффициенты B , A формула $a=A+B\sin \alpha_i$ $B=g=10,45518255 \frac{M}{c^2}$

$$A=-0,15743 \frac{M}{c^2}$$

6. Найдем среднеквадратичное отклонение для ускорения свободного падения (коэффициента B)

$$\sigma_g = 1,345365$$

Абсолютная погрешность коэффициента для доверительной вероятности $\alpha = 0,90$:

$$\Delta g = 2,690731$$

Относительную погрешность :

$$\varepsilon_g = 25,73586\%$$

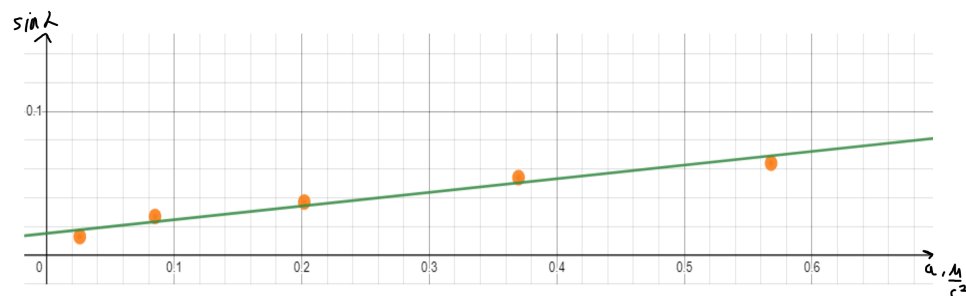
Доверительный интервал: $[10,45518255-2,690731 ; 10,45518255+2,690731]$

7. Нашли абсолютное отклонение от табличного значения $g_{\text{табл}}$ для Санкт-Петербурга:

$$|g_{\text{эксп}} - g_{\text{табл}}| = 10,45518255 - 9,8195 = 0,6356825$$

Полученное отклонение превышает абсолютную погрешность в 4,2 раза

8. Рисунок 6, на котором отмечены экспериментальные точки зависимости $a = a \sin(\alpha)$ и построен график зависимости $a = A + B \sin \alpha$, на горизонтальной оси ускорения a , а на вертикальной оси - синус угол наклона



Результаты:

Таблица 1: Измерительные приборы

Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Δ_n
Линейка на рельсе	1,3 м	1 см/дел	—	5 мм
Линейка на угольнике	250 мм	1 мм/дел	—	0,5 мм
ПКЦ-3 в режиме секундомера	100 с	0,1 с	—	0,1 с

Таблица 2: Искомые данные датчиков секундомера относительно тележки

	x, м	x', м	h(0), мм	h'(0), мм
	0,22	1	200	200
Δ , мм	5	5	0,5	0,5

Таблица 3: Результаты прямых измерений движения тележки при различном расстоянии датчиков друг от друга (Задание 1)

№	Измеренные величины				Рассчитанные величины		
	x1, м	x2, м	t1, с	t2, с	x2-x1, м	$(t^2(2)-t(1)^2)/2, с^2$	$\Delta t, с^2$
1	0,15	0,40	1,20	2,30	0,25	1,93	0,17
2	0,15	0,50	1,20	2,50	0,35	2,41	0,18
3	0,15	0,70	1,20	3,20	0,55	4,40	0,23
4	0,15	0,90	1,30	3,30	0,75	4,60	0,24
5	0,15	1,10	1,30	3,90	0,95	6,76	0,27

Таблица 4: Результаты прямых измерений движения тележки при различном угле наклона установки (Задание 2)

Нпл	h, мм	h', мм	№	t1, с	t2, с
1	210	200	1	1,3	4,5
			2	1,3	4,5
			3	1,4	4,5
			4	1,4	4,5
			5	1,4	4,6
2	220	201	1	0,9	3
			2	0,9	3
			3	0,9	3
			4	0,9	3
			5	0,9	3
3	230	202	1	0,7	2,4
			2	0,7	2,4
			3	0,7	2,5
			4	0,8	2,5
			5	0,7	2,4
4	240	202	1	0,6	2,1
			2	0,6	2,1
			3	0,6	2,1
			4	0,6	2,1
			5	0,6	2,1
5	250	203	1	0,5	1,9
			2	0,5	1,9
			3	0,6	1,9
			4	0,5	1,9
			5	0,5	1,9
Нпл - количество пластин					
h - высота на координате x=0.22м					
h' - высота на координате x'= 1,00м					

Таблица 5: результаты расчетов со значениями значения синуса угол наклона рельса к горизонту, средними значениями времени t_1 и t_2 и их погрешностями и результаты расчета ускорения в виде доверительного интервала

Таблица 5: Результаты расчетов (Задание 2)				
Нпл	$\sin \alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1, \text{ c}$	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2, \text{ c}$	$\langle a \rangle \pm \Delta a, \text{ м/с}^2$
1	0,013	$1,38 \pm 0,124$	$4,52 \pm 0,0868$	$0,026 \pm 0,054$
2	0,027	$0,9 \pm 0,110$	$3 \pm 0,0667$	$0,085 \pm 0,058$
3	0,037	$0,72 \pm 0,087$	$2,44 \pm 0,0953$	$0,202 \pm 0,087$
4	0,054	$0,6 \pm 0,067$	$2,1 \pm 0,0667$	$0,370 \pm 0,072$
5	0,064	$0,52 \pm 0,087$	$1,9 \pm 0,0667$	$0,568 \pm 0,080$
Нпл-количество пластин				

Выводы:

В ходе экспериментов мы подтвердили равноускоренное движение тележки по наклонной плоскости при фиксированном угле наклона рельса. График зависимости $Y=aZ$ демонстрирует прямую линию, что соответствует законам равноускоренного движения.

Также мы установили, что в зависимости от угла наклона рельса к горизонту ускорение тележки пропорционально $\sin \alpha$.

Мы получили $g = 10,455 \pm 2,691 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Измеренное значение ускорения свободного падения отличается от табличного, что может быть связано с погрешностью установки, методикой измерений или условиями эксперимента