Аналогично определению модуля вектора по формуле (4) определяется так называемая *норма* элемента $f(x)$ пространства Φ:

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}. \qquad (10)$$

Расстояние между элементами $f(x)$ и $\varphi(x)$ пространства Φ аналогично формуле (5) будем называть выражение

$$||f-\varphi|| = \sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2 \mathrm{d}x}. \qquad (11)$$

Выражение (11) расстояния между элементами пространства называется *метрикой* пространства. Оно с точностью до множителя $\sqrt{b-a}$ совпадает со среднеквадратичным уклонением δ определенным в § 7.

Очевидно, что если $f(x) \equiv \varphi(x)$, т.е. $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают во всех точках отрезка $[a,b]$, то $||f-\varphi|| = 0$. Но если $||f-\varphi|| = 0$, то $f(x) = \varphi(x)$ во всех точках отрезка $[a,b]$, кроме конечного числа точек*. Но в этом случае также говорят, что элементы пространства Φ тождественны.

Пространство кусочно монотонных ограниченных функций, в котором определены операции (7), (8) и метрика определяется равенством (11), называется *линейным функциональным пространством с квадратичной метрикой.* Элементы простртнства Φ называются *точками* пространства или *векторами.* Рассмотрим, далее, последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots, \qquad (12)$$

принадлежащих пространству Φ

Последовательность функций (12) называется *ортогональной на отрезке* $[a,b]$, если при любых $i, j (i \neq j)$ выполняются равенства

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad (13)$$

На основании равенств (I) § 1 следует, что, например, система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \cos 3x, sin 3x, \ldots.$$

ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Покажем, далее, что разложение функции в ряд Фурье по ортогональным функциям аналогично разложению вектора по

*Может и быть бесконечное число точек, где $f(x) \neq \varphi(x)$.

ортогональным векторам. Пусть дан вектор

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \ldots + A_k e_k + \ldots + A_n e_n. \tag{14}$$

Мы предполагаем, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортогональны, т. е. если $i \neq j$, то

$$(e_i, e_j) = 0. \tag{15}$$

Чтобы определить проекцию A_k, умножаем скалярно первую и левую часть равенства (14) на вектор e_k. На основании свойств (2), (3) получаем:

$$(A, e_k) = A_1(e_1, e_k) + A_2(e_2, e_k) + \ldots + A_k(e_k, e_k) + \ldots + A_n(e_n, e_k).$$

Учитывая (15), получаем

$$(A, e_k) = A_k(e_k, e_k),$$

откуда

$$A_k = \frac{(A, e_k)}{(e_k, e_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Допустим, далее, что функция $f(x)$ разложена по системе ортогональных функций:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{17}$$

Умножая скалярно обе части равенства (17) на $\varphi_k(x)$ и учитывая равенства 9 и 13, получим*

$$(f, \varphi_k) = a_k(\varphi_k, \varphi_k),$$

откуда

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b [\varphi(x)]^2 \mathrm{d}x}. \tag{18}$$

Формула (18) аналогична формуле (16). Обозначим, далее

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{19}$$

$$\delta = ||f - s_n|| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

то система ортогональных функций (12) является *полной* на отрезке $[a, b]$.

Ряд Фурье (17) сходится к функции $f(x)$ *в среднем.*

---

*Мы предполагаем, что получающиеся в процессе рассмотрения ряды сходятся и почленное интегрирование законно.