笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

线性代数第一课

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\4 & 5 & 7\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix}$$

二阶　　　　三阶　　　　　　四阶

例 1：

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}=1\times3-2\times2=-1$$

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{vmatrix}=3\times6-4\times5=-2$$

例 2：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\4 & 5 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times(-1)\times1=-1$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times(-1)\times1\times1=-1$$

例 3：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\4 & 5 & 7\end{vmatrix}\xlongequal{行_2-2行_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2-2\times1 & 3-2\times2 & 4-2\times3\\4 & 5 & 7\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\4 & 5 & 7\end{vmatrix}\xlongequal{行_3-4行_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\4-4\times1 & 5-4\times2 & 7-4\times3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\0 & -3 & -5\end{vmatrix}\xlongequal{行_3-3行_2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\0 & -3-3\times(-1) & -5-3\times(-2)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 1 = -1$$

例 4：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 12 & 12\end{vmatrix} \overset{行_2-2行_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 12 & 12\end{vmatrix} \overset{行_3-4行_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & -3 & -5 & -8\\8 & 9 & 12 & 12\end{vmatrix} \overset{行_4-8行_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & -3 & -5 & -8\\0 & -7 & -12 & -20\end{vmatrix} \overset{行_3-3行_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & -7 & -12 & -20\end{vmatrix} \overset{行_4-7行_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} \overset{行_4-2行_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 1\times(-1) = 1$$

例 5：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix} = 2\times(-1) = -2$$

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\2 & 3 & 4 & 5\\12 & 15 & 21 & 24\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix} = 2\times 3\times\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7 & 8\\8 & 9 & 10 & 12\end{vmatrix} = 2\times 3\times(-1) = -6$$

例 6：

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\4&5&7&8\\8&9&10&12\end{vmatrix}=-1$$

$$\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\4&5&7&8\\8&9&10&12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\leftrightarrow\text{行}_2}-1\times\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\4&5&7&8\\8&9&10&12\end{vmatrix}=-1\times(-1)=1$$

$$\begin{vmatrix}0&0&0&3\\0&0&3&2\\1&2&3&4\\0&5&2&4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\leftrightarrow\text{行}_4}-1\times\begin{vmatrix}0&5&2&4\\0&0&3&2\\1&2&3&4\\0&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_2\leftrightarrow\text{行}_3}-1\times(-1)$$

$$\times\begin{vmatrix}0&5&2&4\\1&2&3&4\\0&0&3&2\\0&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\leftrightarrow\text{行}_2}-1\times(-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&5&2&4\\0&0&3&2\\0&0&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-1)\times1\times5\times3\times3=-45$$

例 7：

行：r　　　列：c

$$\begin{vmatrix}0&0&0&3\\0&0&3&2\\1&2&3&4\\0&5&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4}-1\times(-1)\begin{vmatrix}0&5&2&4\\1&2&3&4\\0&0&3&2\\0&0&0&3\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\4&5&7&8\\8&9&10&12\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-3&-5&-8\\8&9&10&12\end{vmatrix}$$

线性代数第二课

例 1：

$$\begin{vmatrix}2&3&3&3\\3&2&3&3\\3&3&2&3\\3&3&3&2\end{vmatrix}=(2-3)^{4-1}[2+(4-1)\times 3]=-11$$

例 2：

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&6\\3^2&4^2&5^2&6^2\\3^3&4^3&5^3&6^3\end{vmatrix}=(6-5)(6-4)(6-3)(5-4)(5-3)(4-3)=12$$

例 3：

已知$\begin{vmatrix}\mathbf{a_1}&\mathbf{b_1}&\mathbf{c_1}\\\mathbf{a_2}&\mathbf{b_2}&\mathbf{c_2}\\\mathbf{a_3}&\mathbf{b_3}&\mathbf{c_3}\end{vmatrix}$**=1，试求**$\begin{vmatrix}\mathbf{a_1}+\mathbf{c_1}&\mathbf{b_1}&\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}\\\mathbf{a_2}+\mathbf{c_2}&\mathbf{b_2}&\mathbf{a_2}+\mathbf{b_2}\\\mathbf{a_3}+\mathbf{c_3}&\mathbf{b_3}&\mathbf{a_3}+\mathbf{b_3}\end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}a_1+c_1&b_1&a_1+b_1\\a_2+c_2&b_2&a_2+b_2\\a_3+c_3&b_3&a_3+b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1+b_1\\a_2&b_2&a_2+b_2\\a_3&b_3&a_3+b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&b_1&a_1+b_1\\c_2&b_2&a_2+b_2\\c_3&b_3&a_3+b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1\\a_2&b_2&a_2\\a_3&b_3&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b_1&b_1\\a_2&b_2&b_2\\a_3&b_3&b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&b_1&a_1\\c_2&b_2&a_2\\c_3&b_3&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&b_1&b_1\\c_2&b_2&b_2\\c_3&b_3&b_3\end{vmatrix}$$

$$=0+0+\begin{vmatrix}c_1&b_1&a_1\\c_2&b_2&a_2\\c_3&b_3&a_3\end{vmatrix}+0=-\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=-1$$

例 4：

试求$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$中 a_{23} 的余子式。

解：

余子式 ：M　　　$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}=-8$

$M_{12}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}=-8$

代数余子式 ：A　　　$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-1\times(-8)=8$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-1\times(-8)=8$

例 5：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}+ 2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}+ 3\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

例 6：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}+a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}+ 5\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}+ 9\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

例 7：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\6&0&7\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}1&3\\6&7\end{vmatrix}+$$

$$0\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}1&3\\4&5\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}$$

例 8：

已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，试求：

①$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}+6A_{14}$；

②$3A_{11}+4A_{21}+5A_{31}+6A_{41}$；

③$3M_{11}+4M_{21}+5M_{31}+6M_{41}$。

解：

①$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}+6A_{14}=\begin{vmatrix}3&4&5&6\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$

②$3A_{11}+4A_{21}+5A_{31}+6A_{41}=\begin{vmatrix}3&2&3&4\\4&6&7&8\\5&10&11&12\\6&14&15&16\end{vmatrix}$

③$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=M_{11}\ \to M_{11}=A_{11}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-M_{21}\to M_{21}=-A_{21}$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=M_{31}\ \to M_{31}=A_{31}$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot M_{41}=-M_{41} \rightarrow M_{41}=-A_{41}$$

$$\therefore 3M_{11}+4M_{21}+5M_{31}+6M_{41}=3A_{11}-4A_{21}+5A_{31}-6A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 10 & 11 & 12 \\ -6 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

例 9：

请判断下列方程组是否有唯一解。

$$①\begin{cases} \mathbf{x_1+2x_2+3x_3=0} \\ \mathbf{4x_1+5x_2+6x_3=0} \\ \mathbf{7x_1+8x_2+9x_3=0} \end{cases} \qquad ②\begin{cases} \mathbf{x_1+2x_2+3x_3=1} \\ \mathbf{4x_1+5x_2+6x_3=2} \\ \mathbf{7x_1+8x_2+9x_3=3} \end{cases}$$

解：

①：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$ ∴ 该方程组有零解与非零解，即没有唯一解。

②：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$ ∴ 该方程组有多个解或无解。

例 10：

已知$\begin{cases} \mathbf{x_1+\lambda x_2+3x_3=0} \\ \mathbf{4x_1+5x_2+6x_3=0} \\ \mathbf{7x_1+8x_2+9x_3=0} \end{cases}$ **有非零解，请确定 λ 的值。**

解：

$D=0$ 即$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$ 解得 $\lambda=2$

用到的表格

方程组	D≠0	D=0
齐次	只有一组零解	有零解与非零解
非齐次	只有一组非零解	有多个解或无解

线性代数第三课

一、矩阵加减

例 1：

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$，试求 2A+3B

解：

$$2A=\begin{pmatrix} 1\times 2 & 3\times 2 \\ 2\times 2 & 4\times 2 \\ 5\times 2 & 6\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 7\times 3 & 8\times 3 \\ 9\times 3 & 10\times 3 \\ 11\times 3 & 12\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 27 & 30 \\ 33 & 36 \end{pmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{pmatrix} 2+21 & 6+24 \\ 4+27 & 8+30 \\ 10+33 & 12+36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 30 \\ 31 & 38 \\ 43 & 48 \end{pmatrix}$$

二、矩阵相乘

例 1：

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，试求 A×B

解：

$$A\times B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\times 7+3\times 10 & 1\times 8+3\times 11 & 1\times 9+3\times 12 \\ 2\times 7+4\times 10 & 2\times 8+4\times 11 & 2\times 9+4\times 12 \\ 5\times 7+6\times 10 & 5\times 8+6\times 11 & 5\times 9+6\times 12 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 37 & 41 & 45 \\ 54 & 60 & 66 \\ 95 & 106 & 117 \end{pmatrix}$$

例 2：

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$**，** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9}\end{pmatrix}$**，试求** $\mathbf{A^2B-2AB}$

解：

$$
\begin{aligned}
A^2B-2AB&=(A^2-2A)\cdot B\\
&=\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\\
&=\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

三、矩阵取绝对值

例 1：

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{7}\end{pmatrix}$**，试求** $\mathbf{|A|}$

解：$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\end{vmatrix}=-1$

例 2：

已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$，试求 $|A|$

解：$A=2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$|A|=2^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}=8\times(-1)\ =-8$$

表格：

AB 与 BA 未必相等
$AX=AY$ 不能推出 $X=Y$
$(AB)^k$ 与 A^kB^k 不一定相等
$A^2+(k+j)AB+kjB^2$ 与 $(A+kB)(A+jB)$ 不一定相等 但 $A^2+(k+j)A+kjE=A^2+(k+j)AE+kjE^2=(A+kE)(A+jE)$
$\lvert\lambda A\rvert=\lambda^n\lvert A\rvert$

线性代数第四课

一、涉及到转置的题目

例 1：

已知 $A=(1 \quad 0 \quad 1)$，求 A^TAA^T

解：

$$A^TAA^T=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot(1 \quad 0 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

简便算法：

$$\because AA^T=(1 \quad 0 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2$$

$$\therefore A^TAA^T=A^T\cdot 2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

表格：

AB 与 BA 未必相等
$AX=AY$ 不能推出 $X=Y$
$(AB)^k$ 与 A^kB^k 不一定相等
$A^2+(k+j)AB+kjB^2$ 与 $(A+kB)(A+jB)$ 不一定相等 但 $A^2+(k+j)A+kjE=A^2+(k+j)AE+kjE^2=(A+kE)(A+jE)$
$\|\lambda A\|=\lambda^n\|A\|$
$(AB)^T=B^TA^T$
$\|A^T\|=\|A\|$

二、证明矩阵可逆

例 1：

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，试判断 A 是否可逆。

解：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{vmatrix}=24\neq0$$

$\therefore$ A 可逆

例 2：

设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 A 可逆。

解：

$A^2-A-2E=0$

$A^2-A=2E$

$A^2-AE=2E$

$A(A-E)=2E$

$A[\frac{1}{2}(A-E)]=E$

令 $B=\frac{1}{2}(A-E)$

则 $A\cdot B=E$

$\therefore$ A 可逆

三、求逆矩阵

例 1：

已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

解：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_{2\times}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -5 & 9 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 5 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

例 2：

已知 $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求 B^{-1}

解：

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_{2\times}\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$\therefore\ B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

四、利用 $A\cdot A^{-1}=E$ 或 $A^{-1}\cdot A=E$ 计算

例 1：

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$、$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$，求矩阵 X 使其满足 AXB=C。

解：

$AXB=C$

$A^{-1}AXB=A^{-1}C$

$EXB=A^{-1}C$

$XB=A^{-1}C$

$XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$XE=A^{-1}CB^{-1}$

$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

五、利用 $A\cdot A^{*}=|A|E$ 或 $A^{*}\cdot A=|A|E$ 计算

例 1：

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$，且 $A^{*}X=A^{-1}+X$ ，求矩阵 X。

解：

$$A^*X=A^{-1}+X$$

$$AA^*X=A(A^{-1}+X)$$

$$|A|EX=A(A^{-1}+X)$$

$$|A|EX=AA^{-1}+AX$$

$$|A|EX=E+AX$$

$$|A|EX-AX=E$$

$$(|A|E-A)X=E$$

$$(|A|E-A)^{-1}\cdot(|A|E-A)X=(|A|E-A)^{-1}\cdot E$$

$$EX=(|A|E-A)^{-1}\cdot E$$

$$X=(|A|E-A)^{-1}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&7\end{vmatrix}=-1$$

$$\therefore X=(-E-A)^{-1}=\left[-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&7\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-2&-4&-4\\-4&-5&-8\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

六、求矩阵的秩

例 1：

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **，求** $\mathbf{R(A)}$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$

例 2：

已知 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **，求** $\mathbf{R(B)}$

解：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(B)=2$

七、已知矩阵的秩，求矩阵里的未知数

例 1：

已知 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & \mu & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & \lambda\end{pmatrix}$，且 R(B)=1，求 λ、μ 的值。

解：

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & \mu & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & \mu-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-12\end{pmatrix}$$

$$R(B)=1\Rightarrow\begin{cases}\mu-4=0\\ \lambda-12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=4\\ \lambda=12\end{cases}$$

线性代数第五课

一、 判断某向量是否可由某向量组线性表示

例 1：

已知 $\boldsymbol{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a_3}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}$，b=$\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$，试判断 b 能否由 $\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，$\boldsymbol{a_3}$ 线性表示。

解：

令 $A=(a_1，a_2，a_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-2\\2&1&4\\2&3&0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-2\\2&1&4\\2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$$

令 $B=(a_1，a_2，a_3，b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-2&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-2&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(B)=3$$

$\therefore R(A)=R(B)$ $\quad\therefore$ b 能由 a_1，a_2，a_3 线性表示

线性表示：$b=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3$

二、 判断某个向量组是否线性相关

例 1：

已知 $\boldsymbol{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a_3}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a_4}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$，**试判断** $\mathbf{A}=(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4})$ **是否线性相关。**

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-2&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$$

$\because R(A)=3<$向量个数　　$\therefore$ 线性相关

线性相关：a_1，a_2，a_3，a_4 中存在一个向量可用其他向量线性表示

$a_4=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3$　　　　$a_2=k_1a_1+k_2a_3+k_3a_4$

$a_3=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_4$　　　　$a_1=k_1a_2+k_2a_3+k_3a_4$

三、已知三维向量空间的一组基底，求某一向量在此基底下的坐标

例 1：

设三维向量空间的一组基底 $\boldsymbol{\alpha_1=(1,1,0)}$，$\boldsymbol{\alpha_2=(1,0,1)}$，$\boldsymbol{\alpha_3=(0,1,1)}$，**求向量** $\boldsymbol{\beta=(2,0,0)}$ **在此基底下的坐标。**

解：

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

$(2,0,0)=k_1(1,1,0)+k_2(1,0,1)+k_3(0,1,1)$

$(2,0,0)=(k_1,k_1,0)+(k_2,0,k_2)+(0,k_3,k_3)$

$$\begin{cases} 2=k_1+k_2+0 \\ 0=k_1+0+k_3 \\ 0=0+k_2+k_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = -1 \end{cases}$$

∴ 坐标为 $(k_1，k_2，k_3)=(1，1，-1)$

四、求几个行向量的极大无关组

例 1：

已知向量 $a_1=(0，-4，12，8)$，$a_2=(-1，-3，5，1)$，$a_3=(3，5，-1，4)$，$a_4=(1，1，1，3)$。求向量 a_1，a_2，a_3，a_4 的一个极大无关组。

解：

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 12 & 8 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3\text{-}3r_1}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2+r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \underset{r_4\text{-}2r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则　R=3

∴ a_4，a_2，a_3 是 a_1，a_2，a_3，a_4 的一个极大无关组

线性代数第六课

一、 判断方程组解的情况

<table>
<tr><th colspan="2">条件</th><th colspan="3">解的情况</th></tr>
<tr><td rowspan="2">齐次</td><td>R(A)=未知数个数</td><td colspan="3">唯一解（零解）</td></tr>
<tr><td>R(A)<未知数个数</td><td colspan="3">多个解（零解和多个非零解）</td></tr>
<tr><td rowspan="3">非齐次</td><td>R(A)≠R(A|b)</td><td colspan="3">无解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R(A)=R(A|b)</td><td rowspan="2">有解</td><td>R(A)=R(A|b)=未知数个数</td><td>一个非零解</td></tr>
<tr><td>R(A)=R(A|b)＜未知数个数</td><td>多个非零解</td></tr>
</table>

例 1：

判断方程组解的情况

①：$\begin{cases} \mathbf{x_1+x_2+x_4=0} \\ \mathbf{x_2+x_4=0} \\ \mathbf{x_1+x_3+x_4=0} \\ \mathbf{x_1+x_2+x_3=0} \end{cases}$

解：$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_1+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases} = \begin{cases} x_1+\ \ x_2+0x_3+\ \ x_4=0 \\ 0x_1+\ \ x_2+0x_3+\ \ x_4=0 \\ x_1+0x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=0 \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+0x_4=0 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

R(A)=4=未知数个数=4

∴ 该方程组有唯一解

②： $\begin{cases} \mathbf{x_1+x_2+x_4=1} \\ \mathbf{x_2+x_4=2} \\ \mathbf{x_1+x_3+x_4=3} \\ \mathbf{x_1+x_2+x_3+2x_4=4} \end{cases}$

解：$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=1 \\ x_2+x_4=2 \\ x_1+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \end{cases} = \begin{cases} x_1+x_2+0x_3+x_4=1 \\ 0x_1+x_2+0x_3+x_4=2 \\ x_1+0x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_3+r_2 \\ r_4-r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_3+r_2 \\ r_4-r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$R(A)=3 \neq R(A|b)=4$

$\therefore$ 该方程组无解

③： $\begin{cases} \mathbf{x_1+x_2+x_4=1} \\ \mathbf{x_2+x_4=2} \\ \mathbf{x_1+x_3+x_4=3} \\ \mathbf{x_1+x_2+x_3=4} \end{cases}$

解：$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=1 \\ x_2+x_4=2 \\ x_1+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3=4 \end{cases} = \begin{cases} x_1+x_2+0x_3+x_4=1 \\ 0x_1+x_2+0x_3+x_4=2 \\ x_1+0x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+0x_4=4 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_3+r_2 \\ r_4-r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&2\\1&0&1&1&3\\1&1&1&0&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1\\r_3+r_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&4\\0&0&0&-2&-1\end{array}\right)$$

R(A)=4=R(A|b)=4=未知数个数=4

∴ 该方程组有一个解

二、 解方程组

例 1：

解方程组 $\begin{cases}\mathbf{x_1+x_2+x_4=1}\\\mathbf{x_2+x_4=2}\\\mathbf{x_1+x_3+x_4=3}\\\mathbf{x_1+x_2+x_3+2x_4=5}\end{cases}$

解：

$$\text{原式}=\begin{cases}x_1+x_2+0x_3+x_4=1\\0x_1+x_2+0x_3+x_4=2\\x_1+0x_2+x_3+x_4=3\\x_1+x_2+x_3+2x_4=5\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&2\\1&0&1&1&3\\1&1&1&2&5\end{array}\right)\xrightarrow{\text{一系列行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

∴R=3

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{一系列行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$ 设 1 个未知数k

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 - k \\ x_3 = 4 - k \\ x_4 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 0k \\ x_2 = \ \ 2 - 1k \\ x_3 = \ \ 4 - 1k \\ x_4 = \ \ 0 + 1k \end{cases}$$

解为：$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 2：

解方程组 $\begin{cases} \mathbf{2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1} \\ \mathbf{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1} \\ \mathbf{4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1} \\ \mathbf{2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1} \end{cases}$

解：

原式=$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{一系列行变换}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$R=2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{一系列行变换}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{6}x_5 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

设 3 个未知数 k_1 k_2 k_3

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{6}x_5 = \frac{1}{6} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + 0\,k_3 + 0\,k_2 + \frac{1}{3}k_1 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}k_3 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{5}{6}k_1 \\ x_3 = 0 + 1\,k_3 + 0\,k_2 + 0\,k_1 \\ x_4 = 0 + 0\,k_3 + 1\,k_2 + 0\,k_1 \\ x_5 = 0 + 0\,k_3 + 0\,k_2 + 1\,k_1 \end{cases}$$

解为 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

三、 求方程组的通解、特解、基础解系

例 1：

求方程组 $\begin{cases} \mathbf{2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1} \\ \mathbf{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1} \\ \mathbf{4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1} \\ \mathbf{2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1} \end{cases}$ **的通解、一个特解和基础解系**

解：

通解为 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

令$\begin{cases}k_1=1\\k_2=1\\k_3=1\end{cases}$，可得一个特解为$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

令$\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$，可得一个特解为$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

基础解系：$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

四、 已知某方程组的多个特解，求某齐次方程组的通解

例 1：

四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的特解为 η_1，η_2，η_3，$R(A)=2$。求 $Ax=0$ 的通解。（已知 $\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$）

解：

设有 2 个未知数k_1，k_2

找两个线性无关的矩阵 X_1、X_2，使 $AX_1=0$， $AX_2=0$

则 $A\eta_1=b$， $A\eta_2=b$， $A\eta_3=b$

$\therefore\ A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=b+b=2b\Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=2b$

$$A(\eta_2+\eta_3)=A\eta_2+A\eta_3=b+b=2b \Rightarrow A\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}=2b$$

$$A(\eta_3+\eta_1)=A\eta_3+A\eta_1=b+b=2b \Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}=2b$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}=2b-2b=0 \qquad A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}=2b-2b=0$$

$$A\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}\right]=0 \qquad A\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right]=0$$

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}=0 \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore \quad X_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 通解为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

五、 已知某方程组的多个特解，求某非齐次方程组的通解

例 1：

四元非齐次线性方程组 Ax=b 的特解为 η_1，η_2，η_3，R(A)=2。求 Ax=b 的通解。（已知 $\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$）

解：

设有 2 个未知数k_1，k_2

找两个线性无关的矩阵 X_1、X_2，使 $AX_1=0$， $AX_2=0$

则 $A\eta_1=b$， $A\eta_2=b$， $A\eta_3=b$

$$\therefore A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=b+b=2b \Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=2b$$

$$A(\eta_2+\eta_3)=A\eta_2+A\eta_3=b+b=2b \Rightarrow A\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}=2b$$

$$A(\eta_3+\eta_1)=A\eta_3+A\eta_1=b+b=2b \Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}=2b$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}=2b-2b=0 \qquad A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}=2b-2b=0$$

$$A\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}\right]=0 \qquad A\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right]=0$$

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}=0 \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\ X_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

即 找出一个矩阵 Y，满足 $AY=b$

$$\therefore A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=b+b=2b$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=2b \Rightarrow A\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=b \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=b$$

$$\therefore \quad Y=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ 通解为 } \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\\ -1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$$

六、判断解集合中线性无关的解向量个数

例 1：

设 A 是 3×4 矩阵且 R(A)=2，若齐次线性方程组 Ax=0 有解，求解集合中线性无关的解向量个数。

解：

未知数个数=4　R(A)=2　4−2=2

∴ 解向量个数为 2

例 2：

设 A 是 m 行 n 列矩阵，若 Ax=b≠0 有解，且 R(A)=r，求 Ax=b 的解集合中最多线性无关的解向量个数。

解：

未知数个数=n　R(A)=r

∴ 解向量个数为 $n-r+1$

线性代数第七课

一、 规范正交化

例 1：

试把向量 $\mathbf{a_1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$，$\mathbf{a_2}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$，$\mathbf{a_3}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$ 规范正交化。

解：

$$b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$[b_1,a_2]=1\times(-1)+2\times3+(-1)\times1=4$$

$$[b_1,b_1]=1\times1+2\times2+(-1)\times(-1)=6$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$||b_1||=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$||b_2||=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$||b_3||=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$e_1=\frac{b_1}{||b_1||}=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$e_2=\frac{b_2}{||b_2||}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3=\frac{b_3}{||b_3||}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

二、 求矩阵的特征值

例 1：

求矩阵 A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值。

解：

$$令|A-\lambda E|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda^2-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{-(\lambda+2)(\lambda-1)}{1+\lambda} \end{vmatrix}=0$$

$1\cdot(\lambda^2-1)\cdot\frac{-(\lambda+2)(\lambda-1)}{1+\lambda}=0$

$(\lambda+2)\cdot(\lambda-1)^2=0$

当 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，满足要求

$\therefore$ $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

例 2：

求矩阵 A=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值。

解：

$$令|A-\lambda E|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2-\lambda\\ 0 & 1 & 2+\lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\cdot(2-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

$1\cdot 1\cdot(\lambda-1)^2\cdot(2-\lambda)=0$

$(\lambda-1)^2\cdot(2-\lambda)=0$

当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=1$ 时，满足要求

$\therefore$ $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

三、 求矩阵的特征向量

例 1：

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征向量。

解：

上个题型已经求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$ ，$\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda=\lambda_1=-2$ 时

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}-(-2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda E)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}x=0\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$$

通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore\lambda=\lambda_1=-2$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda E)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}x=0\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\-x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\lambda=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

例 2：

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征向量。

解：

上个题型已经求得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda=\lambda_1=2$ 时

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda E)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}x=0 \Rightarrow \begin{cases}-3x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ -4x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0\end{cases}$$

通解为 $k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore \lambda=\lambda_1=2$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda E)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}x=0 \Rightarrow \begin{cases}-2x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ -4x_1+2x_2+0\cdot x_3=0\\ x_1+0\cdot x_2+x_3=0\end{cases}$$

通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$　　$\therefore \lambda=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

四、判断方阵是否与对角阵相似/是否满足 $P^{-1}AP=\Lambda$

例 1：

已知方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，请判断 A 是否与对角阵相似。

解：

上个题型求得：

$\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

特征向量个数 ：3

方阵阶数 ：3

特征向量个数=方阵阶数

∴ 方阵 A 与对角阵相似

例 2：

已知方阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，请判断 A 是否满足 $P^{-1}AP=\Lambda$

解：

上个题型求得：

$\lambda_1=2$ 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

特征向量个数: 2

方阵阶数: 3

特征向量个数≠方阵阶数

∴ 方阵 A 不满足 $P^{-1}AP=\Lambda$

五、求方阵对应的对角阵 Λ 及可逆变换矩阵 P

例 1：

已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$与对角阵相似，求相应的对角阵 Λ 及可逆变换矩阵 P

解：

第二个题型已经求得：A 的特征值为 $\lambda_1=-2$ $\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=-2$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

将ξ_1规范正交化

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b_1=\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|b_1\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将ξ_2、ξ_3规范正交化

$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$b_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$b_3=\xi_3-\frac{[b_2,\xi_3]}{[b_2,b_2]}b_2$

$=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\|b_2\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\|b_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

将 ξ_1 规范正交化 $\Rightarrow$ $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

将 ξ_2 、ξ_3 规范正交化 $\Rightarrow$ $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

可逆变换矩阵 $P=(\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ )$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

六、已知$\mathbf{P^{-1}AP=\Lambda}$，求关于 A 的复杂式子

例 1：

已知 $\mathbf{A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$**，求** $\mathbf{A^{10}}$

解：

上一个题型求得：A 与对角阵相似， 即 A 满足 $P^{-1}AP=\Lambda$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A 的特征值为 $\lambda_1=-2$ $\lambda_2=\lambda_3=1$

$$\therefore\ A^{10}=P\cdot\begin{pmatrix} {\lambda_1}^{10} & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^{10} & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^{10} \end{pmatrix}\cdot P^T$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} (-2)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

最终结果就不给大家算了

线性代数第八课

一、 求二次型对应的系数矩阵

例 1：

求二次型 $\mathbf{f = -2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3}$ 对应的系数矩阵。

解：

令 $f = a_{11}{x_1}^2+a_{22}{x_2}^2+a_{33}{x_3}^2$

$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

解得$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{12} = -1 \\ a_{13} = 1 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$

∴ 系数矩阵为：$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

例 2：

求二次型 $\mathbf{f = x^2 -3z^2 -4xy+yz}$ 对应的系数矩阵

解：

令 $f = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2$

$+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$

$$解得\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{22} = 0 \\ a_{33} = -3 \\ a_{12} = -2 \\ a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0.5 \end{cases}$$

$$\therefore 系数矩阵为：\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -3 \end{pmatrix}$$

二、把二次型化成标准形

例 1：

化二次型 $f = -2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$为标准形，并求所用的变换矩阵 P

解：

二次型的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A 的特征值为：$\lambda_1=-2$　　$\lambda_2=1$　　$\lambda_3=1$

标准形是$f = -2{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

三、把二次型化成规范形

例 1：

化二次型 $f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$为规范形，并求所用的变换矩阵 C

解：

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A 的特征值为：$\lambda_1=-2$　　$\lambda_2=1$　　$\lambda_3=1$

规范形是$f=-{z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$

满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

四、用配方法把二次型化成标准形

例 1：

用配方法把二次型 $f={x_1}^2+2{x_2}^2+5{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 化为标准形，并求所用的变换矩阵 P。

解：

$f={x_1}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2{x_2}^2+5{x_3}^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-{x_2}^2-{x_3}^2-2x_2x_3+2{x_2}^2+5{x_3}^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+{x_2}^2+4{x_3}^2+4x_2x_3$

$$f=(x_1+x_2+x_3)^2+{x_2}^2+4x_2x_3+4{x_3}^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2-4{x_3}^2+4{x_3}^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

标准形是 $f={y_1}^2+{y_2}^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+2x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\x_2=\quad\ \ y_2-2y_3\\x_3=\qquad\quad\ \ y_3\end{cases}$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

五、判断二次型的正定性

例 1：

判断 $f={x_1}^2+2{x_2}^2+6{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 的正定性

解：

二次型的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$

一阶顺序主子式为 $|1|=1>0$

二阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\times2-1\times1=1>0$

三阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\times1\times1=1>0$

$\therefore f$ 是正定的

六、二次型为正定的等价条件

二次型 f 为正定⇔系数矩阵 A 的顺序主子式均大于 0

⇔系数矩阵 A 的特征值均大于 0

⇔ f 化成的标准形里系数均大于 0

⇔当 x_i 不全为 0 时 f＞0 恒成立

例 1：

若二次型 f 为正定，则系数矩阵 A 的特征值　（A）

A、都大于 0　B、都大于等于 0　C、可能正也可能负　D、都小于 0