

OSCILAÇÕES MECÂNICAS

1. INTRODUÇÃO:

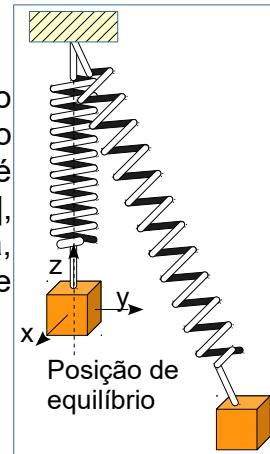
Todo sistema mecânico com massa e rigidez, tem capacidade de oscilar, ou seja, quando em movimento desloca-se em torno de um “ponto de equilíbrio”. O “ponto de equilíbrio” é o ponto da trajetória em que a aceleração do sistema é nula, ou seja, aquele em que a resultante das forças externas aplicadas ao sistema é NULA.

Os sistemas mecânicos apresentam formas (ou modos) diferentes de vibração, que são diferenciados entre si basicamente pela frequência de vibração. Qualquer sistema mecânico possui *infinitos* modos de vibração, embora no desenvolvimento desse estudo, condições simplificadoras irão limitá-los.

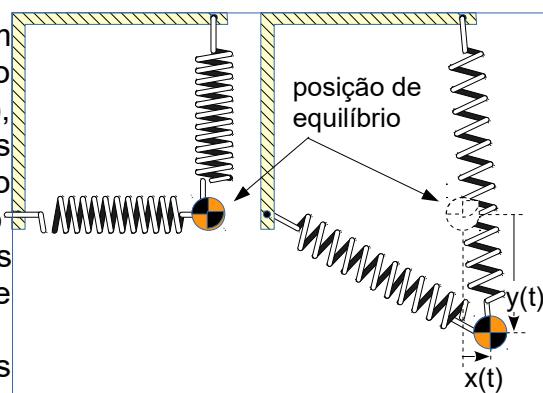
1.1. Graus de Liberdade:

Para descrever os movimentos de um sistema, utilizam-se coordenadas independentes entre si, e expressas em função do tempo. O **mínimo número** de coordenadas, ou variáveis independentes, necessárias para descrever o movimento de um sistema mecânico, é denominado de **grau de liberdade**.

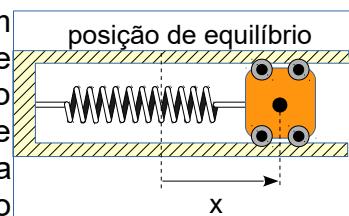
O sistema composto por um ponto material (sem dimensões), sob ação de uma mola, encontra-se ilustrado ao lado. Considerando que o ponto material possa deslocar-se livremente no espaço, sua posição é definida através de suas coordenadas espaciais: abscissa [$x(t)$], ordenada [$y(t)$] e cota [$z(t)$], que são independentes entre si, ou seja, não é possível relacioná-las entre si, de forma que o número de variáveis necessárias para descrever o movimento diminua.
Este é um exemplo de sistema com três (3) graus de liberdade.



O sistema composto por um ponto material (sem dimensões), sob ação de duas molas, e apoiado em superfície horizontal, ou seja, o plano (x,y), encontra-se ilustrado ao lado. Considerando as limitações impostas pelo vínculo representado pelo plano horizontal, pode-se afirmar que o ponto material tem posição definida através de suas coordenadas: abscissa [$x(t)$] e ordenada [$y(t)$], que são independentes entre si.
Este é um exemplo de sistema com dois (2) graus de liberdade.



O sistema composto por um sólido sob ação de uma mola e com movimentos limitados por trilhos horizontais e fixos, encontra-se ilustrado ao lado. Levando em conta as limitações impostas pelo vínculo representado pelos trilhos horizontais fixos, pode-se afirmar que sua posição é perfeitamente definida através da abscissa [$x(t)$], medida em relação ao ponto de equilíbrio do sólido.
Este é um exemplo de sistema com um (1) grau de liberdade.



1.1.1.Exemplo:

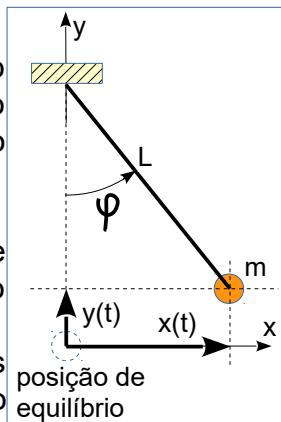
Considere-se um pêndulo simples que é composto por um ponto material de massa m , ligado a um ponto de suspensão através de fio ideal de comprimento L . Quantos graus de liberdade possui o pêndulo simples?

A resposta deve se basear nas premissas: o mínimo número de coordenadas independentes entre si, necessárias à descrição do movimento do mesmo.

No instante (t) , o ponto material tem posição expressa pelas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$, entretanto, essas coordenadas não são independentes entre si, e podem ser expressas em função de uma terceira variável, o ângulo φ .

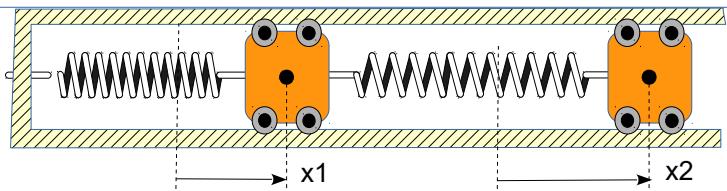
Note-se que: $x(t) = L \cdot \sin(\varphi)$ e $y(t) = L - L \cdot \cos(\varphi)$.

Demonstra-se dessa forma, que a posição do pêndulo fica perfeitamente determinada com o uso de apenas uma única coordenada angular φ . Isto posto, o pêndulo simples é um exemplo de um (1) grau de liberdade.



1.1.2.Exemplo:

Considere-se um sistema composto por dois sólidos. O primeiro está ligado a uma parede fixa, através de uma mola, e também está interligado ao segundo sólido através de uma segunda mola.



Trilhos horizontais e fixos, impõem a ambos os sólidos deslocamentos horizontais. Quantos graus de liberdade possui esse sistema?

Neste caso, cada sólido tem posição determinada respectivamente por suas abscissas, ou seja, x_1 e x_2 , que são independentes entre si, pois a mola que os conecta, em cada instante, apresenta-se deformada de forma arbitrária. Este sistema é um exemplo de dois graus de liberdade.

1.2.Modos normais de vibração & graus de liberdade.

Todo sistema apresenta modos normais de vibração, que fisicamente caracterizam as formas ("jeitos") de vibração do sistema, ou seja, cada modo de vibração caracteriza-se por uma frequência de vibração e por uma "razão de amplitude". Observa-se que o número de modos normais de vibração é igual ao número de graus de liberdade.

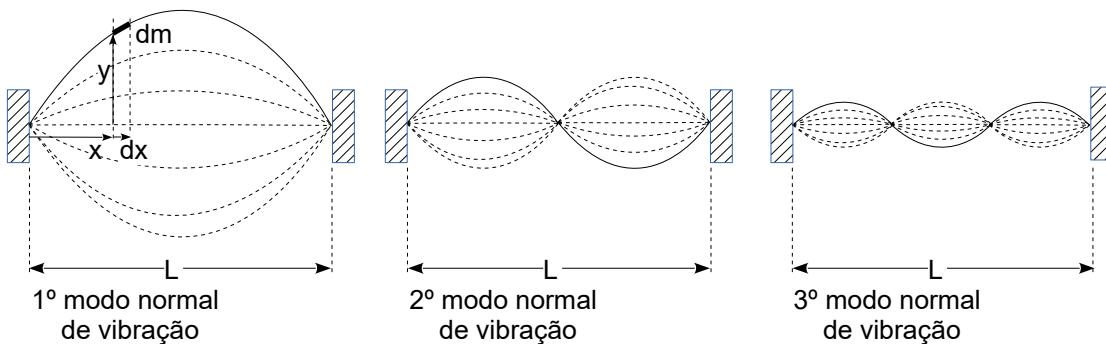
Como exemplo, considere-se uma corda de violão, com comprimento (L), massa (m), tracionada pela força (F). A densidade linear de massa da corda é: $\lambda = m/L$. A corda é constituída por elementos de massa infinitesimais. Considere-se o elemento de massa (dm), posicionado entre (x) e ($x + dx$), e que no instante (t) apresenta deslocamento (y), em relação à sua posição de equilíbrio. Desta forma, cada elemento de massa (dm), em cada instante, tem sua posição determinada pelas coordenadas (x,y), conforme ilustrado a seguir. Sob essa óptica, como são infinitos elementos de massa "dm", o número de graus de liberdade é infinito.

Demonstra-se que a corda pode vibrar com infinitas frequências e amplitudes, onde cada uma das frequências de vibração, corresponde a um modo normal de vibração. A título de

curiosidade, as possíveis frequências da corda são expressas por: $f = \frac{n}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, sendo (n) um número inteiro qualquer.

O primeiro modo normal, é aquele que apresenta frequência de vibração determinada por $n = 1$, ou seja: $f_1 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

A figura seguinte ilustra algumas posições da corda em instantes diferentes, e para modos de vibração diferentes, onde as linhas contínuas ilustram a posição de deformação máxima da corda, e as linhas tracejadas indicam outras posições em outros instantes.



Como sugerido acima, sistema com **um grau de liberdade** possui apenas um modo normal de vibração e consequentemente apenas **uma frequência própria** de vibração. Um sistema com três graus de liberdade, possui três modos normais de vibrações e portanto três frequências próprias de vibração.

2. OSCILAÇÃO LIVRE SEM AMORTECIMENTO, COM 1 GL – UM GRAU DE LIBERDADE.

Oscilação Livre, significa que não há força excitadora com variação periódica, agindo sobre o sistema.

Sem amortecimento, significa que serão desprezados os efeitos de atritos, ou seja, a energia mecânica do sistema será conservada.

Um grau de liberdade, significa que a posição do sistema será definida por apenas uma coordenada, e apresentará apenas uma única frequência de vibração.

2.1. O método de Newton.

Oscilações desse tipo podem ser produzidas, por exemplo, impondo ao sistema, deslocamento inicial ($x_0 \neq 0$) em relação à Posição de Equilíbrio, e abandonado em repouso ($v_0 = 0$). Outra forma de produzir este tipo de oscilação seria impor ao sistema, impulso inicial ($v_0 \neq 0$), entenda-se velocidade inicial diferente de zero, em sua posição de equilíbrio ($x_0 = 0$). Também há outras possibilidades onde no instante inicial o sistema apresenta deslocamento e velocidade iniciais ($x_0 \neq 0; v_0 \neq 0$).

Estas formas de se iniciar o movimento são denominadas de condições iniciais do movimento, e são fundamentais para estabelecer a equação horária dos mesmos, ou seja: $x(t) = f(t)$.

Considere-se um sistema simples, composto por ponto material (sem dimensão) e mola dispostos na vertical.

Caracterizando o sistema ...

A mola é caracterizada por: comprimento natural (L_0) e rigidez (k).

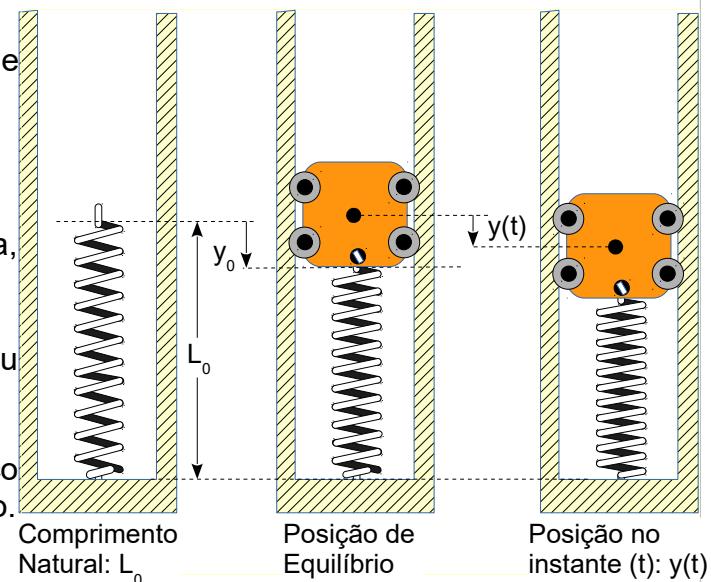
Entenda-se como comprimento natural L_0 , o comprimento da mola quando a mesma não apresenta deformação. A rigidez k , no caso de **mola helicoidal**, é uma grandeza que depende das características de construção da mola, tais como, diâmetro do fio empregado (d), raio da hélice (R), número de espiras (n) e do módulo de elasticidade transversal do material (G), ou seja: $k = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot n \cdot R^3}$.

Usualmente as molas (sistemas elásticos) seguem a Lei de Hooke, preservados os limites de comportamento elástico do material com o qual foram construídas, ou seja, quando submetidas a esforço (força) (F), apresentam deformação (x), tal que: $F = k \cdot x$.

O ponto material, possui massa (m) e suas dimensões são desprezadas.

A figura anexa ilustra três posições:

- 1) mola no seu estado natural, ou seja, com comprimento (L_0);
- 2) o sistema completo em equilíbrio, ou seja, resultante das forças NULA;
- 3) a posição $y(t)$, num instante genérico (t), e com origem na posição de equilíbrio.

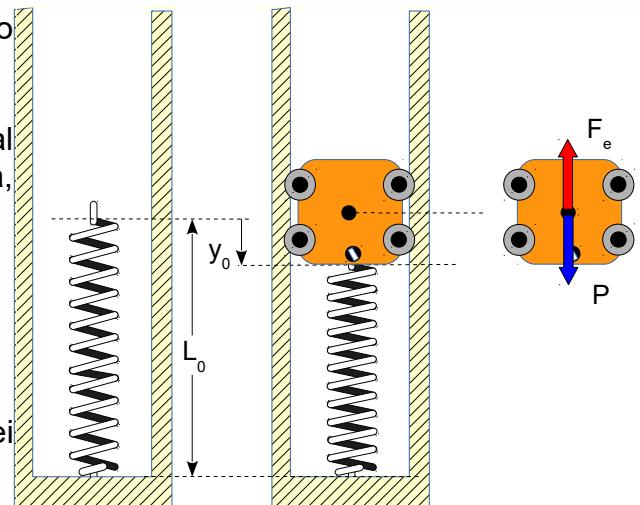


Equacionando o ponto material na posição de equilíbrio.

A cinemática: a aceleração do ponto material na posição de equilíbrio é NULA, ou seja, $a = \ddot{y} = zero$

As forças agentes no ponto material são:

- 1) peso: $P = m \cdot g$;
- 2) força elástica: $F_e = k \cdot y_0$, conforme a Lei de Hooke.



A dinâmica: a Lei de Newton se aplica a ponto material:

$$P - F_e = m \cdot a \quad \text{ou} \quad P - F_e = m \cdot \ddot{y}, \quad \text{com} \quad a = \ddot{y} = zero, \quad \text{tem-se:} \quad P - F_e = 0$$

substituindo as forças, tem-se: $m \cdot g - k \cdot y_0 = 0$

Nota: adotou-se o sentido do eixo (y) como positivo, ou seja, forças com sentido "para baixo" serão consideradas positivas.

Da equação anterior determina-se a deformação estática: $y_0 = \frac{m \cdot g}{k}$.

Nota: a deformação estática está intimamente ligada à frequência do único modo natural de vibração. Antecipando, seja ω_0 , a pulsação natural do sistema, que posteriormente será demonstrado ser expressa por: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ou seja,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{y_0}.$$

Esta nota, estabelece a origem do método estático para determinação da frequência própria do sistema.

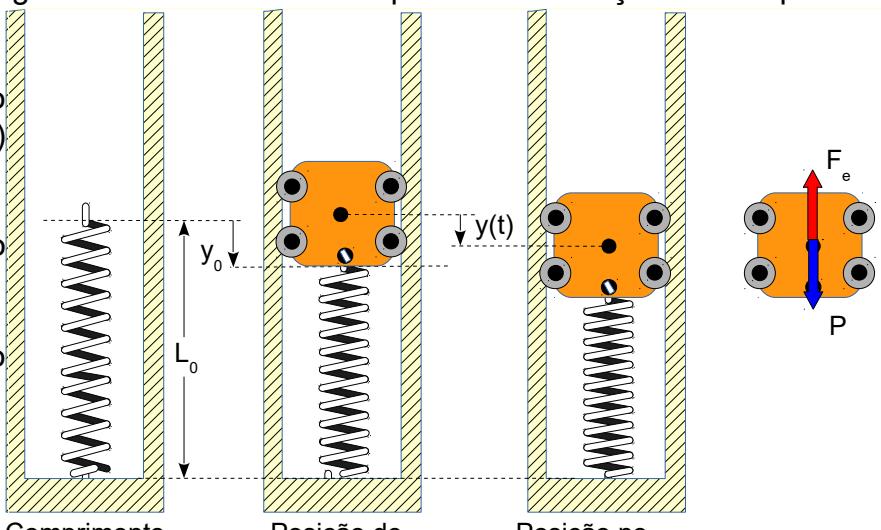
Equacionando o ponto material no instante (t) qualquer.

A cinemática: a aceleração do ponto material é: $a = \ddot{y}$

As forças agentes no ponto material são:

1) peso: $P = m \cdot g$;

2) força elástica: $F_e = k \cdot (y_0 + y)$, conforme a Lei de Hooke.



Nota: adotou-se $y(t) = y$

A dinâmica: a Lei de Newton se aplica a ponto material.

$$P - F_e = m \cdot a \Rightarrow P - F_e = m \cdot \ddot{y} \Rightarrow m \cdot g - k \cdot (y_0 + y) = m \cdot \ddot{y}$$

Recuperando o valor de y_0 , ou seja, ($y_0 = \frac{m \cdot g}{k}$), tem-se: $m \cdot g - k \cdot (\frac{m \cdot g}{k} + y) = m \cdot \ddot{y}$

Desenvolvendo ...

$$m \cdot g - m \cdot g - k \cdot y = m \cdot \ddot{y} \Rightarrow \\ m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0 \dots \text{a equação diferencial do movimento}$$

Nota: quando se adota a origem dos deslocamentos na posição de equilíbrio, parte da força elástica, ou seja, a parte representada por $k \cdot y_0$, é eliminada da equação diferencial pela força peso. Isso simplifica os cálculos pois não é necessário considerar nem o peso e nem a deformação total da mola, apenas a deformação a partir da posição de equilíbrio.

A solução da equação diferencial:

O tipo de função que satisfaz a equação diferencial, é aquela cuja derivada segunda, em relação ao tempo, é proporcional à própria função. As funções harmônicas, entenda-se as funções seno e cosseno, possuem essa característica.

Seja a “proposta de solução”, a função $y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$. Sendo: A , ω_0 , e φ , constantes a serem determinadas.

Derivando em relação ao tempo:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \Rightarrow \dot{y}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) \Rightarrow \ddot{y}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Note-se que: $\ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y$.

Substituindo a última relação na equação diferencial, tem-se:

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0 \Rightarrow m \cdot (-\omega_0^2 \cdot y) + k \cdot y = 0 \Rightarrow (-m \cdot \omega_0^2 + k) \cdot y = 0$$

Como $y = y(t)$, não pode ser nulo para todos os instantes, resta a solução:

$$-m \cdot \omega_0^2 + k = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$$

A solução típica: $y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \Rightarrow y(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \cdot t + \varphi\right)$.

Resumindo...

Oscilação Livre, Sem Amortecimento, com 1 GL grau de liberdade.

Equação diferencial: $m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0$ ou $\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$ ou $\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$

Nota: **k** é a **rigidez equivalente** do sistema, e **m** a **massa efetiva** do sistema.

A solução da equação diferencial, ou **equação horária do movimento** é:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \Rightarrow y(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \cdot t + \varphi\right)$$

Nota: as constantes A e φ são obtidas pela imposição das condições iniciais do movimento, que variam de acordo com cada exemplo numérico.

A **pulsação** própria do movimento é: $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$

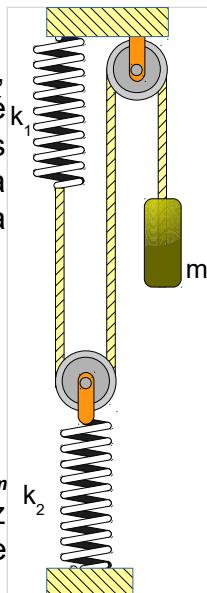
Nota: nos casos de sistemas mais complexos do que o simplório sistema massa mola abordado, a obtenção da equação diferencial é a única forma de identificar a pulsação do sistema: $\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$. Quando o coeficiente da aceleração (\ddot{y}) é um (1), o coeficiente da posição (y) é o quadrado da pulsação própria.

A análise da forma do quadrado da pulsação ($\omega_0^2 = \frac{k_{eq.}}{m_{ef.}}$), indicada na equação diferencial, é que permite responder o que é rigidez equivalente e o que é massa efetiva.

2.1.1.Exemplo:

No sistema ilustrado em sua posição de equilíbrio, as polias são leves, sem atrito e o fio é ideal. A massa m está suspensa pelo fio que é suportado pelas polias, uma com eixo fixo, outra sustentada por mola. As rigidezes das molas são k_1 e k_2 . No instante $t = 0$, a massa é abandonada em repouso deslocada de y_0 , no sentido descendente em relação à posição de equilíbrio. Pedem-se:

- o diagrama de esforços;
- a equação diferencial do movimento;
- a equação horária do movimento (ou equação finita).



Solução:

Considere-se que num instante t qualquer, o bloco tenha deslocamento y_m em relação a sua posição de equilíbrio. Nessa condição, a mola de rigidez k_1 deformou-se de $\Delta_1 = |y_1| = y_1$ e a mola de rigidez k_2 deformou-se de

$\Delta_2 = |y_p| = -y_p$ sendo y_p o deslocamento da polia. Na figura seguinte, ilustram-se os deslocamentos.

Note-se que foi adotado como sentido positivo, o sentido do deslocamento da massa m , ou seja, sentido descendente.

Desta forma, o deslocamento y_1 do extremo da mola de rigidez k_1 , por ser descendente, também é positivo.

Por outro lado o deslocamento y_p da polia, por ser ascendente, é negativo.

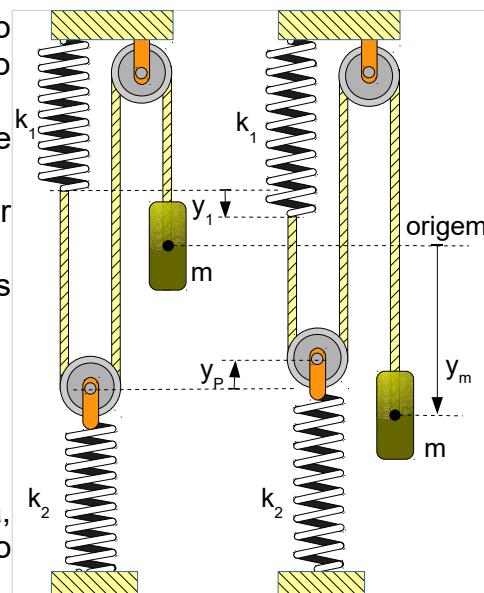
Essas considerações explicam as relações entre esses deslocamentos e as deformações das molas:

$$\Delta_1 = |y_1| = y_1 \text{ e } \Delta_2 = |y_p| = -y_p .$$

Relacionando os deslocamentos com as deformações:

O comprimento do fio ideal é invariável, ou seja, mesmo após as deformações das molas, o comprimento do fio permanece o mesmo: L .

Comparando o comprimento do fio em cada situação ilustrada, entenda-se, entre os instantes $t = 0$, e o instante genérico t , tem-se:



1) Os comprimentos de fios enrolados nas polias são invariantes, portanto não serão alvo de maiores considerações, pois serão os mesmos em cada um dos instantes considerados;

2) O comprimento de fio entre a mola de rigidez k_1 e a polia móvel, diminui de y_1 com o movimento do extremo da mola e também diminui de $|y_p|$ pois a polia sobe, ou seja, esse comprimento de fio diminui de: $y_1 + |y_p|$;

3) O comprimento de fio entre a polia móvel e a polia fixa, diminui de $|y_p|$ pois a polia móvel sobe, ou seja, esse comprimento de fio diminui de: $|y_p|$;

4) O comprimento de fio entre a polia fixa e a massa m , aumenta de y_m , pois a massa desce, ou seja, esse comprimento de fio aumenta de: y_m .

Impondo a igualdade dos comprimentos obtém-se: $L = L - y_1 - |y_p| - |y_p| + y_m$.

Eliminando o comprimento total (L) do fio obtém-se a relação entre os deslocamentos:

$$y_m = y_1 + 2 \cdot |y_p|$$

No diagrama de esforços, deve-se levar em conta que fio ideal e as polias leves, garantem a mesma tração em todos os pontos do fio. Isto posto, fica bastante simples montar o diagrama de esforços, entenda-se forças, como ilustrado na figura.

Equacionando a polia móvel:

$$Q - 2 \cdot T = m_p \cdot a_p \Rightarrow Q = 2 \cdot T \text{ pois } m_p = \text{zero} .$$

A mola de rigidez k_1 deforma de y_1 , sob ação da força T , ou seja: $T = k_1 \cdot y_1$ (Lei de Hooke)

A mola de rigidez k_2 , deforma de $|y_p|$ sob ação da força Q , ou seja: $Q = 2 \cdot T = k_2 \cdot |y_p| \Rightarrow T = \frac{k_2}{2} \cdot |y_p|$

Eliminando a força T , nas equações $T = k_1 \cdot y_1$ e $T = \frac{k_2}{2} \cdot |y_p|$, tem-se: $|y_p| = \frac{2 \cdot k_1}{k_2} \cdot y_1$.

Retomando a relação entre os deslocamentos:

$$y_m = y_1 + 2 \cdot |y_p| \Rightarrow y_m = y_1 + \frac{4 \cdot k_1}{k_2} \cdot y_1$$

$$\text{Colocando } y_1 \text{ em evidência} \dots y_m = \left(1 + \frac{4 \cdot k_1}{k_2}\right) \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{4 \cdot k_1}{k_2}\right)} \cdot y_m$$

Equacionando a massa m : $-T = m \cdot a_m \Rightarrow -T = m \cdot \ddot{y}_m$

Recuperando a equação que determina a tração $T = k_1 \cdot y_1$, pode-se escrever:

$$-k_1 \cdot y_1 = m \cdot \ddot{y}_m \Rightarrow \frac{-k_1}{\left(1 + \frac{4 \cdot k_1}{k_2}\right)} \cdot y_m = m \cdot \ddot{y}_m \Rightarrow \frac{-k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)} \cdot y_m = m \cdot \ddot{y}_m$$

$$\text{Rescrevendo na forma usual, tem-se: } \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1) \cdot m} \cdot y_m = 0$$

Comparando com a equação diferencial característica, ou seja, $\ddot{y} + \frac{k_{eq}}{m_{ef}} \cdot y = 0$, tem-se:

$$\ddot{y}_m + \frac{\frac{k_1 \cdot k_2}{m}}{(k_2 + 4 \cdot k_1)} \cdot y_m = 0 \Rightarrow m_{ef} = m \Rightarrow k_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k_{eq}}{m_{ef}}$$

$$\text{ou seja: } k_{eq} = k_1 \cdot k_2 \text{ e } m_{ef} = k_2 + 4 \cdot k_1$$

Nota: este exemplo esclarece de forma apropriada, o que foi dito sobre a importância do desenvolvimento da equação diferencial, para a obtenção da massa efetiva e da rigidez equivalente.

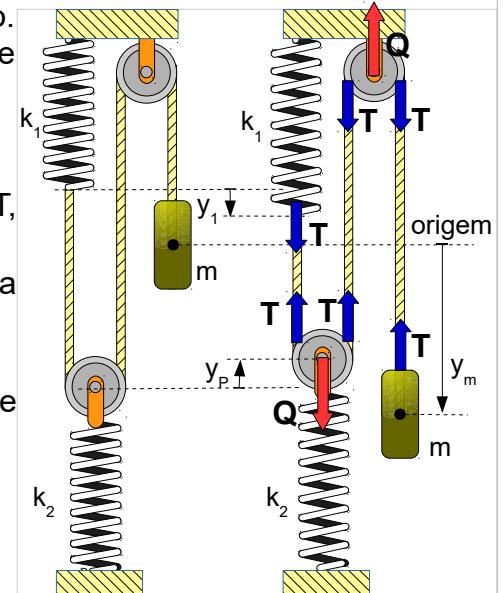
A solução da equação diferencial, ou equação horária do movimento:

$$y_m = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ , com } \omega_0^2 = \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1) \cdot m} ;$$

no instante $t = 0$ tem-se:

$$y_m = Y_0 \Rightarrow y_m = Y_0 = A \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow A = \frac{Y_0}{\cos \varphi}$$

$$\dot{y}_m = zero \Rightarrow \dot{y}_m = 0 = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \mp n \cdot \pi$$



Uma possível solução:

$$\varphi=0 \Rightarrow A=Y_0 \Rightarrow y_m=Y_0 \cdot \cos\left(k_1 \cdot \frac{k_2}{(k_2+4 \cdot k_1) \cdot m} \cdot t\right)$$

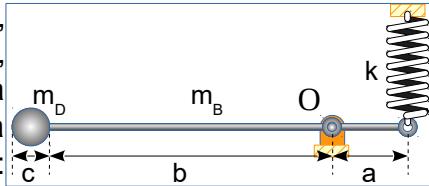
2.1.2.Exemplo:

O sistema ilustrado é composto por um disco de massa m_D , diâmetro c , ligado a uma barra homogênea de massa m_B , comprimento $L = b + a$, articulada em O e conectada à mola de rigidez k . O momento de inércia de um disco, de massa m_D e raio R_D , em relação ao seu centro de massa é:

$I_{CM}^D = 0,5 \cdot m_D \cdot R_D^2$. O momento de inércia de uma barra de massa m_B e comprimento L , em relação ao seu centro de massa é: $I_{CM}^B = m_B \cdot L^2 / 12$.

A posição ilustrada é a de equilíbrio do sistema. Considerando que esse sistema oscile com pequenas oscilações, pedem-se:

- a) o diagrama de esforços (forças);
- b) a equação diferencial;
- c) a massa efetiva;
- d) a rigidez equivalente;
- e) a equação horária do movimento.



Solução:

Entenda-se que, pequenas oscilações, significa que o sistema gira com "ângulos pequenos", ou seja, o ângulo de rotação é próximo de zero.

Sendo pequeno o ângulo de rotação $\varphi \approx 0$, pode-se adotar com muita precisão que:

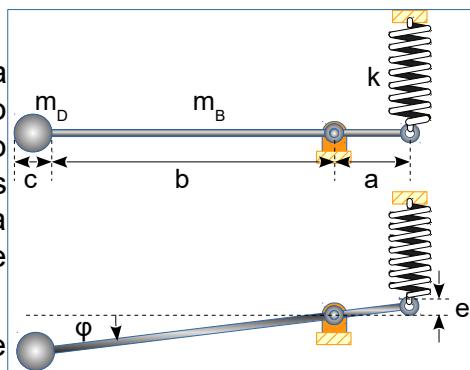
$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ (em rad)} \quad \text{e} \quad \cos \varphi \approx 1,0$$

Nota: o que é ângulo pequeno?; são ângulos que respeitam as condições acima. Para que não restem dúvidas apresenta-se a tabela abaixo.

$\varphi(^{\circ})$	$\varphi(rad)$	$\sin \varphi$	erro (%)
5	0,087	0,087	0,00
10	0,175	0,174	0,57
15	0,262	0,259	1,16

A figura ao lado, ilustra duas posições:

a) A **posição de equilíbrio** do sistema. Para essa posição, a resultante das forças externas aplicadas ao sistema (barra + disco), assim como o momento resultante são NULOS. Isso permite afirmar que os pesos do disco e da barra, são equilibrados por força elástica da mola, ou seja, a mola encontra-se comprimida de " δ ".



Sugestão: equacione o equilíbrio do sistema e calcule a deformação " δ " em função dos pesos do mesmo.

b) A **posição num instante "t"** qualquer, definida pela posição angular φ . Note-se que para essa nova posição, a deformação da mola aumenta para ($\delta + e$).

Adotou-se a posição de equilíbrio como origem dos deslocamentos angulares. Desta

forma, pode-se desconsiderar tanto os pesos do sistema quanto a deformação inicial da mola “ δ ”.

O diagrama de esforços (forças) ...

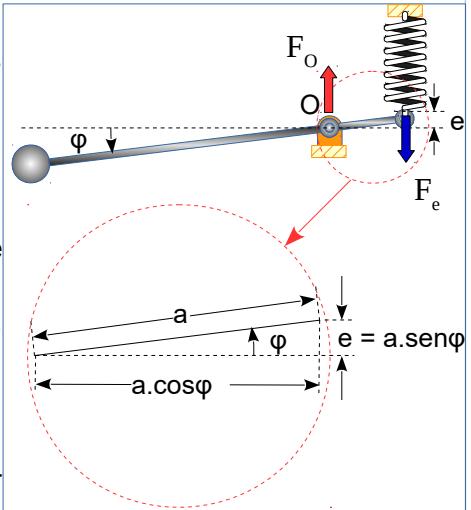
Com as considerações anteriores, restam apenas duas forças a serem consideradas: a força elástica aplicada pela mola ($F_e = k \cdot e$) e a reação da articulação O (F_O).

Com a projeção da dimensão “a” na vertical, obtém-se a deformação a mola: $e = a \cdot \sin \varphi \Rightarrow e = a \cdot \varphi$, que permite: $F_e = k \cdot e = k \cdot a \cdot \varphi$

Com a projeção da dimensão “a” na horizontal, obtém-se o braço da força elástica em relação ao polo O:

$$b_{F_e} = a \cdot \cos \varphi \Rightarrow b_{F_e} = a$$

Impondo o TMA – Teorema do Momento Angular $\sum_{\text{pólo } O} \text{momentos} = I_O \cdot \ddot{\alpha}$, obtém-se:



Nota: momento positivo é aquele que produz aumento na posição angular, ou seja, momento positivo é anti-horário.

Calculando momentos: $M_O^{F_e} = -F_e \cdot b_{F_e} = -F_e \cdot a = -k \cdot a^2 \cdot \varphi$; $M_O^{F_O} = \text{zero}$

O momento resultante: $M_o^{\text{Res.}} = -k \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}$

A cinemática: $\alpha = \ddot{\varphi}$

Os momentos de inércia:

1) da barra em relação ao seu centro de massa:

$$I_{CM}^B = \frac{m_B}{12} \cdot L^2 \Rightarrow I_{CM}^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a+b)^2 ;$$

2) da barra em relação ao polo O:

$$I_O^B = I_{CM}^B + m_B \cdot OCM^2 \Rightarrow I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a+b)^2 + m_B \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 ;$$

$$I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a+b)^2 + m_B \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b) + \frac{m_B}{4} \cdot (b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b)$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo por 3:

$$I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b) + \frac{m_B}{12} \cdot (3 \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 - 6 \cdot a \cdot b)$$

$$I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 - 6 \cdot a \cdot b)$$

Desenvolvendo: $I_O^B = \frac{m_B}{12} \cdot (4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b)$

Finalmente: $I_O^B = \frac{m_B}{3} \cdot (a^2 + b^2 - a \cdot b)$

3) do disco em relação ao seu centro de massa:

$$I_{CM}^D = \frac{1}{2} \cdot m_D \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 ;$$

4) do disco em relação ao polo O:

$$I_O^D = I_{CM}^D + m_D \cdot OCM^2 \Rightarrow I_O^D = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 + m_D \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$$

Rearranjando os termos:

$$I_O^D = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 + m_D \cdot \left(\frac{2 \cdot b + c}{2}\right)^2 \Rightarrow I_O^D = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 + \frac{m_D}{4} \cdot (2 \cdot b + c)^2$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$I_O^D = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 + \frac{m_D}{4} \cdot (4 \cdot b^2 + c^2 + 4 \cdot b \cdot c)$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo por 2:

$$I_O^D = \frac{1}{8} \cdot m_D \cdot c^2 + \frac{m_D}{8} \cdot (8 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 + 8 \cdot b \cdot c)$$

Rearranjando: $I_O^D = \frac{m_D}{8} \cdot (c^2 + 8 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 + 8 \cdot b \cdot c)$

Finalmente: $I_O^D = \frac{m_D}{8} \cdot (3 \cdot c^2 + 8 \cdot b^2 + 8 \cdot b \cdot c)$

5) do sistema em relação ao polo O:

$$I_O^{sist.} = I_O^D + I_O^B$$

$$I_O^{sist.} = \frac{m_D}{8} \cdot (3 \cdot c^2 + 8 \cdot b^2 + 8 \cdot b \cdot c) + \frac{m_B}{3} \cdot (a^2 + b^2 - a \cdot b)$$

Impondo o TMA: $M_o = I_o \cdot \alpha \Rightarrow -k \cdot a^2 \cdot \varphi = I_O^{sist.} \cdot \ddot{\varphi}$

Rearranjando a equação diferencial:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k \cdot a^2}{I_O^{sist.}} \cdot \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\varphi} + \frac{k}{\frac{I_O^{sist.}}{a^2}} \cdot \varphi = 0$$

Comparando com a equação diferencial característica $\ddot{x} + \frac{k_{eq.}}{m_{ef.}} \cdot x = 0$ ou $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

obtém-se: $k_{eq.} = k$, $m_{ef.} = \frac{I_O^{sist.}}{a^2}$ e $\omega_0^2 = \frac{k \cdot a^2}{I_O^{sist.}}$.

Definições: $k_{eq.}$ é a rigidez equivalente, $m_{ef.}$ é a massa efetiva e ω_0 é a pulsação própria do sistema, que no caso é única pois, o sistema possui um grau de liberdade.

A equação horária do movimento é: $\varphi = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + B)$, sendo A e B constantes ajustáveis às condições iniciais do movimento, e $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k \cdot a^2}{I_O^{sist.}}\right)}$.

2.2.O Método da Energia Mecânica.

Em oscilações sem amortecimento, a energia mecânica se conserva, desta forma é possível determinar as equações diferencial e horária do movimento, impondo a conservação da energia mecânica.

A energia mecânica é a soma das energias Cinética e Potencial do sistema em estudo:

$$EM = EC + EP = \text{constante}$$

Derivando a equação anterior em relação ao tempo, tem-se: $\dot{EM} = \dot{EC} + \dot{EP} = \text{zero}$. Esta equação é a base do método da energia.

2.2.1.Exemplo:

No sistema ilustrado na posição de equilíbrio, as polias são leves, sem atrito e o fio é ideal. A massa m está suspensa pelo fio que é suportado pelas polias, uma com eixo fixo, outra sustentada por mola. As rigidezes das molas são k_1 e k_2 . No instante $t = 0$, a massa é abandonada em repouso deslocada de y_0 , no sentido descendente em relação à posição de equilíbrio. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a equação horária do movimento (ou equação finita).

O inconveniente de utilizar o método da Energia é que as relações entre os deslocamentos são necessárias ...

Não parece sensato repetir os mesmos desenvolvimentos feitos no item 2.1.1., e desta forma, nos aproveitaremos de alguns deles, entretanto, quase metade do desenvolvimento foi necessário para deduzir as expressões agora importadas:

$$y_m = y_1 + 2 \cdot |y_p| ; \quad |y_p| = \frac{2 \cdot k_1}{k_2} \cdot y_1 .$$

Expressando deformação y_1 , da mola de rigidez k_1 , em função do deslocamento y_m da massa m :

$$y_m = y_1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot k_1}{k_2} \cdot y_1 \Rightarrow y_m = y_1 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot k_1}{k_2}\right)$$

$$y_m = y_1 \cdot \left(\frac{k_2 + 4 \cdot k_1}{k_2}\right) \Rightarrow y_1 = \frac{k_2 \cdot y_m}{k_2 + 4 \cdot k_1} .$$

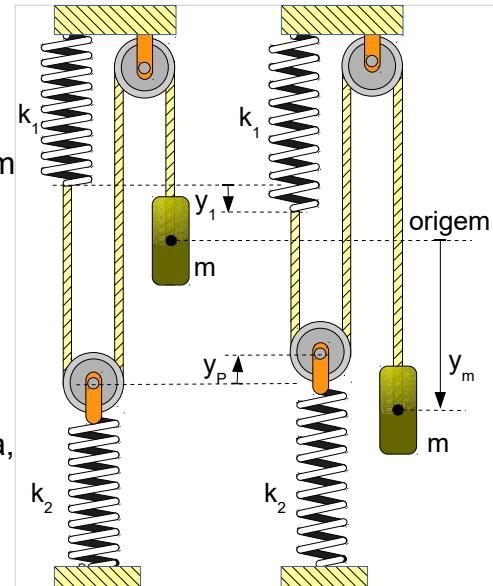
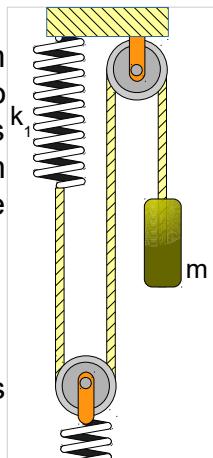
Expressando o módulo do deslocamento $|y_p|$ da polia, em função do deslocamento y_m da massa m :

$$|y_p| = \frac{2 \cdot k_1}{k_2} \cdot \frac{k_2 \cdot y_m}{k_2 + 4 \cdot k_1} \Rightarrow |y_p| = \frac{2 \cdot k_1 \cdot y_m}{k_2 + 4 \cdot k_1} .$$

A Energia Cinética da massa m : $EC = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}_m^2$

A Energia Potencial elástica da mola de rigidez k_1 :

$$EP_1 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot y_1^2 \Rightarrow EP_1 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \left(\frac{k_2 \cdot y_m}{k_2 + 4 \cdot k_1}\right)^2 \Rightarrow EP_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m^2$$



A Energia Potencial Elástica da mola de rigidez k_2 :

$$EP_2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_p^2 \Rightarrow EP_2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot k_1 \cdot y_m}{k_2 + 4 \cdot k_1} \right)^2 \Rightarrow EP_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_2 \cdot 4 \cdot k_1^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m^2$$

A Energia Mecânica do Sistema: $EM = EC + EP_1 + EP_2$

Nota: Ressalte-se que aparentemente faltam as energias Potenciais Gravitacionais, resultado do trabalho das forças pesos, entretanto, como a origem dos deslocamentos coincide com a posição de equilíbrio, estas forças foram equilibradas pelas forças elásticas das molas.

A Energia Mecânica do sistema: $EM = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}_m^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k_2 \cdot 4 \cdot k_1^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m^2$

Derivando a Energia Mecânica em relação ao tempo:

$$0 = m \cdot \dot{y}_m \cdot \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m \cdot \dot{y}_m + \frac{k_2 \cdot 4 \cdot k_1^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} \cdot y_m \cdot \dot{y}_m$$

Rearranjando a expressão:

$$0 = \dot{y}_m \cdot (m \cdot \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2} + \frac{k_2 \cdot 4 \cdot k_1^2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2}) \cdot y_m \Rightarrow 0 = \dot{y}_m \cdot (m \cdot \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot (k_2 + 4 \cdot k_1)}{(k_2 + 4 \cdot k_1)^2}) \cdot y_m$$

Finalmente, tem-se: $0 = \dot{y}_m \cdot (m \cdot \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_2 + 4 \cdot k_1}) \cdot y_m$, esta equação está na forma de um produto, assim possui duas soluções:

1º) $\dot{y}_m = 0 \Rightarrow$ define a existência da posição de equilíbrio, ou seja, o sistema abandonado em repouso nessa posição, assim permanece;

2º) $m \cdot \ddot{y}_m + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_2 + 4 \cdot k_1} \cdot y_m = 0 \Rightarrow$ é a equação diferencial do movimento, ou em outra

forma, tem-se: $\ddot{y}_m + \frac{\frac{k_1 \cdot k_2}{k_2 + 4 \cdot k_1}}{m} \cdot y_m = 0 \Rightarrow m_{ef.} = m \Rightarrow k_{eq.} = \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1)} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k_{eq.}}{m_{ef.}}$.

A solução da equação diferencial, ou equação horária do movimento:

$$y_m = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ , com } \omega_0^2 = \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1) \cdot m} ;$$

no instante $t = 0$ tem-se:

$$y_m = Y_0 \Rightarrow y_m = Y_0 = A \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow A = \frac{Y_0}{\cos \varphi}$$

$$\dot{y}_m = zero \Rightarrow \dot{y}_m = 0 = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \mp n \cdot \pi$$

Uma solução possível:

$$\varphi = 0 \Rightarrow A = Y_0 \Rightarrow y_m = Y_0 \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 + 4 \cdot k_1) \cdot m} \cdot t\right)$$

2.2.2.Exemplo:

O sistema ilustrado é composto por um disco de massa m_D , diâmetro c , ligado a uma barra homogênea de massa m_B , comprimento $L = b + a$, articulada em O e conectada à mola de rigidez k . O momento de inércia de um disco, de massa m_D e raio R_D , em relação ao seu centro de massa é:

$$I_{CM}^D = 0,5 \cdot m_D \cdot R_D^2$$

O momento de inércia de uma barra de massa m_B e comprimento L , em relação ao seu centro de massa é: $I_{CM}^B = m_B \cdot L^2 / 12$.

A posição ilustrada é a de equilíbrio do sistema. Considerando que esse sistema oscile com pequenas oscilações, pedem-se:

- a) a equação diferencial;
- b) a massa efetiva;
- c) a rigidez equivalente;
- d) a equação horária do movimento.

A relação entre a deformação a mola e o deslocamento angular: $e = a \cdot \sin \varphi \Rightarrow e = a \cdot \varphi$

A Energia Potencial Elástica:

$$EP = \frac{1}{2} \cdot k \cdot e^2 \Rightarrow EP = \frac{1}{2} \cdot k \cdot a^2 \cdot \varphi^2$$

A Energia Cinética de Rotação:

$$EC = \frac{1}{2} \cdot I_O^{Sist.} \cdot \dot{\varphi}^2 ; \text{ onde } I_O^{Sist.} \text{ foi calculado no item 2.1.2}$$

A Energia Mecânica:

$$EM = EC + EP \Rightarrow EM = \frac{1}{2} \cdot I_O^{Sist.} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot a^2 \cdot \varphi^2$$

Nota: a energia Potencial Gravitacional não precisa ser levada em conta pois se anula com a parte da Energia Potencial Elástica; considere-se que a deformação da mola na posição de equilíbrio, gera força elástica suficiente para anular as forças pesos.

Derivando a Energia Mecânica em relação ao tempo:

$$0 = I_O^{Sist.} \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi + k \cdot a^2 \cdot \varphi \Rightarrow (I_O^{Sist.} \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi} = 0$$

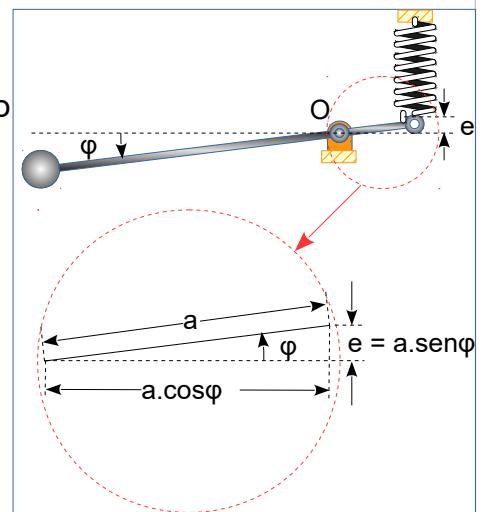
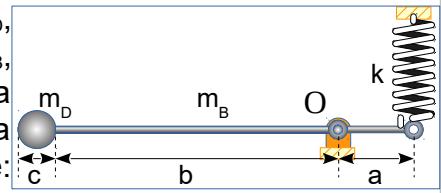
Esta equação apresenta-se em forma de um produto, ou seja, possui duas soluções:

1º) $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$ define a existência da posição de equilíbrio;

$$2º) I_O^{Sist.} \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{k \cdot a^2}{I_O^{Sist.}} \cdot \varphi = 0 \text{ ou } \ddot{\varphi} + \frac{k}{I_O^{Sist.}} \cdot \frac{a^2}{\varphi} \cdot \varphi = 0$$

O que resulta: $k_{eq.} = k$, $m_{ef.} = \frac{I_O^{sist.}}{a^2}$ e $\omega_0^2 = \frac{k \cdot a^2}{I_O^{sist.}}$.

A equação horária do movimento é: $\varphi = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + B)$, sendo A e B constantes



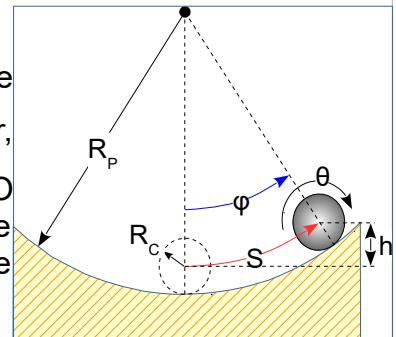
ajustáveis às condições iniciais do movimento, e $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k \cdot a^2}{I_O^{sist.}}\right)}$.

2.2.3.Exemplo:

Considere-se um cilindro de massa m , raio R_C , momento de inércia baricêntrico $I_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R_C^2$, que rola sem escorregar,

sobre a parte interna de uma pista cilíndrica de raio R_p . O cilindro é abandonado fora de sua posição de equilíbrio e oscila sem escorregar em relação à pista. Considerando-se pequenas oscilações, pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão própria do movimento;
- e a equação horária do movimento.



Solução:

A estratégia é determinar a energia mecânica do cilindro, derivá-la em relação ao tempo para obter-se a equação diferencial do movimento, ou seja, determinar a energia cinética e a energia potencial, que nesse caso será apenas gravitacional.

O movimento do cilindro é plano, e como não escorrega em relação a pista, que encontra-se em repouso, o ponto de contato é o CIR – Centro Instantâneo de Rotação.

O centro do cilindro desloca-se em trajetória circular, de centro coincidente com o centro de curvatura da pista e raio $r = R_p - R_C$.

Considere-se que a posição ilustrada, seja a posição do cilindro num instante qualquer “t”, quando seu centro de massa deslocou-se “S” ao longo de sua trajetória, medido a partir da posição de equilíbrio, e o cilindro girou “θ” em torno de eixo próprio.

Nesse instante “t”, o centro do cilindro desloca-se com velocidade $v = \dot{S}$, e o cilindro gira com velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$. Considerando o CIR, pode-se garantir que: $v = \omega \cdot R_C$.

Da definição de radianos, pode-se relacionar o ângulo “φ” com o deslocamento “S”, ou seja: $\phi = \frac{S}{(R_p - R_C)}$, entenda-se ângulo = $\frac{\text{arco}}{\text{raio}}$.

Derivando essa equação em relação o tempo, tem-se:

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{S}}{(R_p - R_C)} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{(R_p - R_C)} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{R_C}{(R_p - R_C)} \cdot \omega .$$

Expressando a velocidade do centro do cilindro e a velocidade angular do mesmo, em função do ângulo “φ”: $v = \dot{\phi} \cdot (R_p - R_C)$ e $\omega = \dot{\phi} \cdot \frac{(R_p - R_C)}{R_C}$.

A energia cinética do cilindro é composta por duas partes: a energia cinética de translação e a energia cinética de rotação:

$$EC = EC_{trans.} + EC_{rot} \Rightarrow EC = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{CM} \cdot \omega^2$$

Substituindo as velocidades em função do ângulo “ φ ”:

$$EC = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot R_c^2\right) \cdot \frac{(R_p - R_c)^2}{R_c^2} \cdot \dot{\varphi}^2$$

Colocando $\dot{\varphi}$ em evidência:

$$EC = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2\right) \cdot \dot{\varphi}^2$$

Rearranjando ... $EC = \left(\frac{3}{4} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2\right) \cdot \dot{\varphi}^2$

Neste caso não existe o força elástica e portanto **não** existe energia potencial elástica, ou seja, a energia potencial é apenas gravitacional.

Adota-se o ponto de equilíbrio como sendo o ponto de referência da energia potencial, ou seja, o ponto onde $EP_{grav.} = zero$. Para o instante “t” em estudo, a energia potencial é:

$EP_{grav.} = m \cdot g \cdot h$; onde: “m” é a massa do cilindro; “g” é a aceleração da gravidade local; e “h” a altura em relação ao ponto de equilíbrio.

Note-se que: $h = (R_p - R_c) - (R_p - R_c) \cdot \cos \varphi$ ou ...
 $h = (R_p - R_c) \cdot (1 - \cos \varphi)$

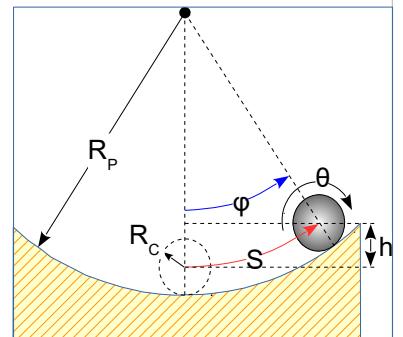
A energia potencial gravitacional é:

$$EP_{grav.} = m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot (1 - \cos \varphi)$$

Finalmente a energia mecânica é:

$$EM = EC + EP$$

$$EM = \frac{3}{4} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot (1 - \cos \varphi)$$



Derivando em relação ao tempo:

$$zero = \frac{3}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Fatorando a equação, ou seja, expressando a mesma como um produto de termos:

$$\left(\frac{3}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot \sin \varphi\right) \cdot \dot{\varphi} = 0$$

As duas soluções:

$\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$ define a existência do ponto de equilíbrio;

$\frac{3}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot \sin \varphi = 0 \Rightarrow$ a equação diferencial do movimento.

Considerando “pequenas oscilações”, a equação diferencial do movimento fica **muito** simplificada, ou seja, $\sin \varphi = \varphi$.

$\frac{3}{2} \cdot m \cdot (R_p - R_c)^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot (R_p - R_c) \cdot \varphi = 0 \Rightarrow$ equação diferencial do movimento!

Na forma padrão:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2 \cdot g}{3 \cdot (R_p - R_c)} \cdot \varphi = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2 \cdot g}{3 \cdot (R_p - R_c)} \Rightarrow \varphi = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + B)$$

Nota: neste caso, não há sentido em considerar a rigidez equivalente e nem mesmo considerar a massa efetiva.

2.2.4. A massa do sistema elástico.

Nos exemplos anteriores, a massa do sistema elástico foi desprezada, entretanto, tal consideração, introduz desvio (ou erro) sistemático no cálculo das frequências próprias “ ω_0 ”, gerando valores maiores do que aqueles encontrados experimentalmente.

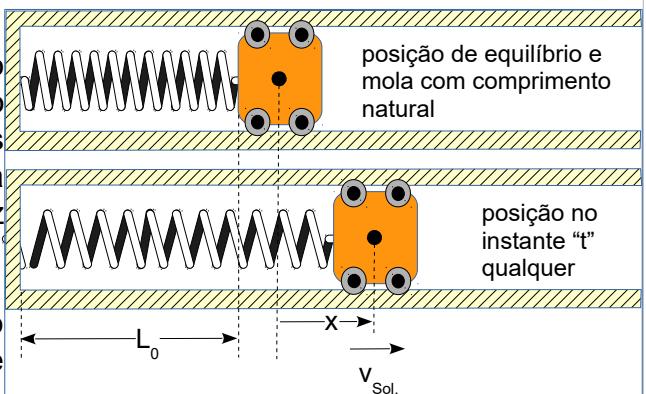
Esse é um problema complicado, pois, a mola pode ser entendida como composta por infinitos elementos de massa “ dm ”, e consequentemente apresentará infinitos modos de vibração, o que certamente trará um problema maior do que os que se tem abordado até aqui.

É comum utilizar um “modelo”, que aproxima o cálculo das frequências próprias, dos valores reais, entretanto, é apenas uma forma de minimizar os erros, evitando uma solução penosa.

O Modelo:

Considere-se o sistema ilustrado, onde o sólido apresenta massa m , tem movimento de translação horizontal, guiado por trilhos horizontais e fixos. O sólido é acoplado à mola de comprimento natural L_0 , de rigidez k , e massa m_M .

Considere-se que no instante “t” qualquer, o sólido apresenta posição definida por “x” e velocidade “ $v_{sol.}$ ”.



Note-se que $v_{sol.} = \dot{x}$

Calculando a energia mecânica “EM” no instante “t” genérico:

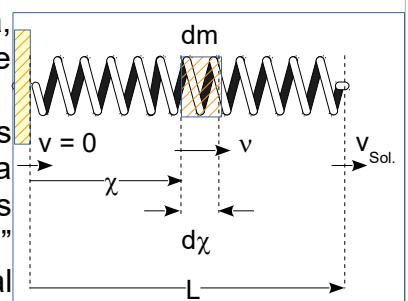
A energia cinética “ $EC_{sol.}$ ” armazenada no sólido é: $EC_{sol.} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x})^2$.

A energia potencial elástica armazenada na mola é: $EP_{el.} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$

A energia cinética armazenada na mola:

O extremo fixo da mola apresenta sempre velocidade nula, afinal está preso a uma parede, o outro extremo sempre apresenta a velocidade do sólido.

Considere-se que a mola seja composta por elementos infinitesimais de massa “ dm ”, e que cada um deles apresenta velocidade linearmente distribuída entre as velocidades dos extremos da mola. Desta forma, um elemento de massa “ dm ” localizado entre “ χ ” e “ $\chi + d\chi$ ”, tem velocidade “ v ” proporcional a sua abscissa.



Montando a proporção:

$$\frac{v}{v_{sol.}} = \frac{\chi}{L} \Rightarrow v = \frac{v_{sol.}}{L} \cdot \chi \quad : \text{velocidade do elemento de massa posicionado entre } \chi \text{ e } \chi + d\chi$$

Consider-se que a massa da mola, mesmo quando deformada, seja uniformemente distribuída, ou seja:

$$\frac{dm}{m_M} = \frac{d\chi}{L} \Rightarrow dm = \frac{m_M}{L} \cdot d\chi$$

A energia cinética de um elemento de massa "dm" da mola:

$$dEC_{dm} = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 \Rightarrow dEC_{dm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_M}{L} \cdot d\chi \cdot \left(\frac{v_{sol.}}{L} \cdot \chi \right)^2 \Rightarrow dEC_{dm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_M \cdot v_{sol.}^2}{L^3} \cdot \chi^2 \cdot d\chi$$

A energia cinética da mola:

$$EC = \int dEC_{dm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_M \cdot v_{sol.}^2}{L^3} \cdot \int_0^L \chi^2 \cdot d\chi \Rightarrow EC = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_M \cdot v_{sol.}^2}{L^3} \cdot \frac{L^3}{3} \Rightarrow EC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot m_M \cdot v_{sol.}^2 \right)$$

Recuperando a relação: $v_{sol.} = \dot{x}$, tem-se:

$$EC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot m_M \right) \cdot \dot{x}^2$$

Esse resultado poderá ser resumido como: "a energia cinética de uma mola, é igual a energia cinética de um terço (1/3) de sua massa, deslocando-se com a velocidade de seu extremo móvel".

Finalmente a energia mecânica do sistema:

$$EM = EC_{sol.} + EP_{el.} + EC \Rightarrow EM = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_M \cdot \ddot{x}^2 \right)$$

Derivando a energia mecânica em relação ao tempo:

$$0 = m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot \dot{x} \ddot{x}$$

Fatorando a equação: $\dot{x} \cdot (m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot \ddot{x}) = 0$

Agrupando os termos: $\dot{x} \cdot ((m + \frac{1}{3} \cdot m_M) \cdot \ddot{x} + k \cdot x) = 0$

Como sempre, há duas soluções:

$\dot{x} = 0 \Rightarrow$ determina a existência do ponto de equilíbrio;

$(m + \frac{1}{3} \cdot m_M) \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \Rightarrow$ a equação diferencial do movimento

Reescrevendo na forma tradicional:

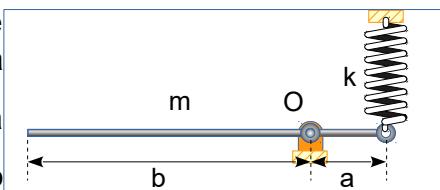
$$\ddot{x} + \frac{k}{(m + \frac{1}{3} \cdot m_M)} \cdot x = 0 \Rightarrow k_{eq.} = k ; m_{ef.} = m + \frac{1}{3} \cdot m_M ; \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{(m + \frac{1}{3} \cdot m_M)} \right)}$$

Note-se que a pulsação diminui, produzindo um resultado mais próximo do resultado experimental.

2.2.5.Exemplo:

O sistema ilustrado apresenta barra homogênea de comprimento $L=a+b$, massa m , momento de inércia baricêntrico $I_{CM}=\frac{m \cdot L^2}{12}$, articulada em O, e sustentada por mola de rigidez k , com massa m_M . Considerando pequenas oscilações, pedem-se:

- a equação diferencial;
- a rigidez equivalente;
- a massa efetiva;
- a frequência (pulsão) própria do sistema.



Solução:

O momento de inércia da barra em relação ao polo CM:

$$I_{CM} = \frac{m \cdot L^2}{12} \Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a+b)^2$$

O momento de inércia em relação ao polo O:

Teorema dos eixos paralelos:

$$I_O = I_{CM} + m \cdot OCM^2$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a+b)^2 + m \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 \text{ ou ...}$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a+b)^2 + m \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a+b)^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot (b-a)^2$$

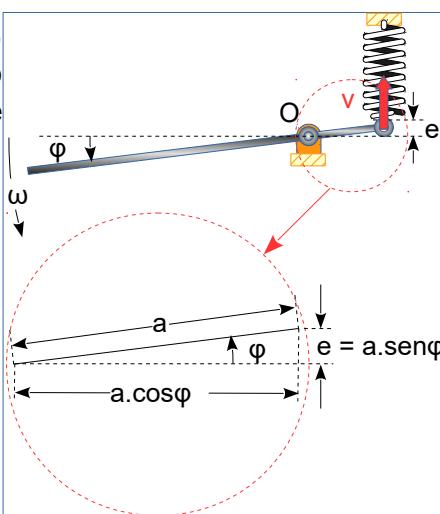
$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b) + \frac{1}{4} \cdot m \cdot (b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b)$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b) + \frac{3}{12} \cdot m \cdot (b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b) \text{ ou ...}$$

$$I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 - 6 \cdot a \cdot b) \Rightarrow I_O = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b)$$

Finalmente: $I_O = \frac{1}{3} \cdot m \cdot (a^2 + b^2 - a \cdot b)$

No instante "t" qualquer, a barra apresenta-se na posição angular φ , com velocidade angular $\omega = \dot{\varphi}$, e o extremo da mola desloca-se com velocidade $v = \omega \cdot a = \dot{\varphi} \cdot a$ e apresenta deformação $e = a \cdot \sin \varphi \approx a \cdot \varphi$.



A energia mecânica do sistema é:

$$EM_{Sist.} = EC_{barra} + EP_{mola} + EC_{mola}$$

$$EM_{Sist.} = \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (a \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot (\dot{\varphi} \cdot a)^2$$

Reorganizando ...

$$EM_{Sist.} = \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot a^2 \cdot \varphi^2 + \frac{1}{6} \cdot m_M \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

Derivando a energia mecânica em relação ao tempo:

$$0 = I_O \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}$$

Fatorando a equação:

$$(I_O \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} = 0$$

Reorganizando:

$$((I_O + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot a^2) \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi} = 0$$

Como sempre, existem duas soluções:

1^a) $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$ estabelece a existência do ponto de equilíbrio;

2^a) $(I_O + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot a^2) \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot a^2 \cdot \varphi = 0 \Rightarrow$ é a equação diferencial do movimento

Reescrevendo na forma usual:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k \cdot a^2}{(I_O + \frac{1}{3} \cdot m_M \cdot a^2)} \cdot \varphi = 0 \quad \text{ou} \dots$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{(\frac{I_O}{a^2} + \frac{1}{3} \cdot m_M)} \cdot \varphi = 0 \Rightarrow k_{eq.} = k ; m_{ef.} = \frac{I_O}{a^2} + \frac{1}{3} \cdot m_M ; \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{(\frac{I_O}{a^2} + \frac{1}{3} \cdot m_M)}\right)}$$

3. OSCILAÇÕES LIVRES COM AMORTECIMENTO COM 1 GL – UM GRAU DE LIBERDADE..

Oscilação Livre, significa que não há força excitadora com variação periódica, agindo sobre o sistema.

Com amortecimento, significa que a energia mecânica não se conserva pois serão consideradas forças dissipativas. Exemplos de forças dissipativas:

a) A força de atrito entre duas superfícies sólidas, sem lubrificantes, que **deslizam** entre si, expressa em função da reação normal "N" e do coeficiente de atrito "μ" entre as mesmas, ou seja: $f_{at.} = -\mu \cdot N$.

b) A força de atrito viscoso, que envolve o cisalhamento das camadas de fluido, e é expressa por formas variadas, que dependem do regime de cisalhamento, da velocidade relativa do sólido em relação ao fluido, da geometria do sólido, e da viscosidade do fluido. A força de atrito viscoso, que produz a equação diferencial do movimento mais simples, é expressa pelo produto entre, uma constante **c** que depende de características do fluido, do corpo que se desloca em relação ao mesmo e, a velocidade relativa do corpo em relação ao fluido **v**. A força viscosa se opõe à velocidade relativa entre o sólido e o fluido:

$F_{vis.} = -c \cdot v$. Neste estudo, essa segunda opção de força viscosa, terá precedência sobre a primeira.

Um grau de liberdade, significa que a posição do sistema será definida por apenas

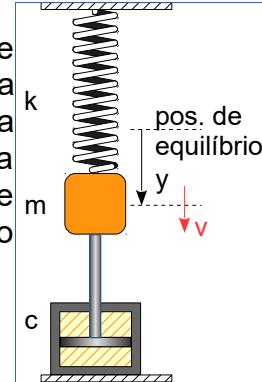
uma coordenada, e apresentará apenas uma única frequência de vibração.

3.1.Método de Newton.

O sistema mais simplificado com as características citadas, é aquele onde um ponto material de massa m , desloca-se sob ação de força elástica produzida por uma mola de rigidez k e sob ação de força viscosa produzida por um amortecedor com coeficiente da força viscosa c . A figura ilustra o ponto material, no instante "t" qualquer, deslocado de "y" em relação à posição de equilíbrio, com velocidade "v", e aceleração "a".

As forças agentes:

- a) força elástica: $F_{el.} = -k \cdot y$;
- b) força viscosa: $F_{visc.} = -c \cdot v \Rightarrow F_{visc.} = -c \cdot \dot{y}$



Nota: como a origem do sistema está na posição de equilíbrio, o peso próprio e a força da mola nessa posição, anulam-se mutuamente. Isso garante que tanto o peso quanto a deformação da mola, na posição de equilíbrio, desaparecerão da equação diferencial.

Aplicando-se a Lei de Newton, tem-se:

$$m \cdot a = F_{el.} + F_{visc.} \Rightarrow m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - c \cdot \dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot \dot{y} = 0$$

Esta forma da equação é denominada de **equação diferencial característica** do movimento. Na solução dessa equação diferencial, é usual a utilização de algumas grandezas, definidas nessa oportunidade:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k_{eq.}}{m_{ef.}}\right)} : \text{a pulsação própria do sistema} ;$$

$$\gamma = \frac{c}{2 \cdot m} : \text{parâmetro de amortecimento};$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} : \text{grau de amortecimento};$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} : \text{razão de frequências}.$$

Reescrevendo a equação com as novas definições:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = 0$$

Na busca por uma função que possa ser solução dessa equação diferencial, deve-se adotar uma função, tal que, ela mesma, sua derivada primeira, e sua derivada segunda sejam linearmente dependentes, algo do tipo: $y = e^{st}$.

Derivando em relação ao tempo: $\dot{y} = s \cdot e^{st}$

$$\ddot{y} = s^2 \cdot e^{st}$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial:

$$s^2 \cdot e^{st} + \omega_0^2 \cdot e^{st} + 2 \cdot \gamma \cdot s \cdot e^{st} = 0 \Rightarrow (s^2 + \omega_0^2 + 2 \cdot \gamma \cdot s) \cdot e^{st} = 0$$

Com a equação na forma de produto, pode-se afirmar que existe apenas uma única solução: $s^2 + \omega_0^2 + 2 \cdot \gamma \cdot s = 0 \Rightarrow s = \frac{-2 \cdot \gamma \pm \sqrt{(2 \cdot \gamma)^2 - 4 \cdot \omega_0^2}}{2}$

$$\text{Desenvolvendo: } s = \frac{-2 \cdot \gamma \pm \sqrt{(2 \cdot \gamma)^2 - 4 \cdot \omega_0^2}}{2} \Rightarrow s = -\gamma \pm \sqrt{\frac{(2 \cdot \gamma)^2 - 4 \cdot \omega_0^2}{4}}$$

Obtém-se duas soluções: $s = -\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}$.

A solução geral pode ser escrita na forma:

$$y(t) = A \cdot e^{[-\gamma + \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} + B \cdot e^{[-\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} ;$$

Sendo A e B, constantes ajustáveis à condições iniciais, ou seja, para $y(0)$ e $\dot{y}(0)$;

A solução geral pode ser escrita de **três formas** diferentes:

1ª forma: amortecimento fraco, onde $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} < 1$.

Sendo $s = -\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}$, o radical da raiz quadrada será negativo, ou seja, soluções complexas. Sendo $i = \sqrt{(-1)}$, tem-se: $s = -\gamma \pm i \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}$. Reescrevendo o radical da raiz quadrada: $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$.

Nota: ω_a é denominada de pulsação amortecida.

Com essas considerações o expoente "s" assume a forma:

$$s = -\gamma \pm i \cdot \sqrt{(\omega_a^2)} \Rightarrow s = -\gamma \pm i \cdot \omega_a^2 , \text{ e a solução passa a ser escrita como:}$$

$$y(t) = A \cdot e^{(-\gamma + i \cdot \omega_a \cdot t)} + B \cdot e^{(-\gamma - i \cdot \omega_a^2 \cdot t)} \Rightarrow y(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [A \cdot e^{(+i \cdot \omega_a \cdot t)} + B \cdot e^{(-i \cdot \omega_a^2 \cdot t)}]$$

Considerando a equação de Euler $e^{(\pm i \cdot \omega_a \cdot t)} = \cos(\omega_a \cdot t) \pm i \cdot \sin(\omega_a \cdot t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\gamma \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_a \cdot t) + i \cdot A \cdot \sin(\omega_a \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_a \cdot t) - i \cdot B \cdot \sin(\omega_a \cdot t)] \\ y(t) &= e^{-\gamma \cdot t} \cdot [(A+B) \cdot \cos(\omega_a \cdot t) + i \cdot (A-B) \cdot \sin(\omega_a \cdot t)] \end{aligned}$$

Adotando-se as constantes A e B, que são expressas por números complexos, de tal forma que B seja o complexo conjugado de A, obtém-se:

$$A = \frac{a}{2} + i \cdot \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{a}{2} - i \cdot \frac{b}{2} .$$

Desta forma: $A+B=a$ e $A-B=i \cdot b$, que na equação anterior resulta:

$$y(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [a \cdot \cos(\omega_a \cdot t) + i \cdot (i \cdot b) \cdot \sin(\omega_a \cdot t)]$$

$$y(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [a \cdot \cos(\omega_a \cdot t) - b \cdot \sin(\omega_a \cdot t)]$$

A solução está determinada, sendo que as constantes "a" e "b" serão obtidas através das condições iniciais do problema, ou seja, posição no instante zero e velocidade no instante zero.

Como a soma de seno e cosseno, não é uma função intuitiva e fácil de trabalhar, é usual apresentá-la na forma monômica (fatorada).

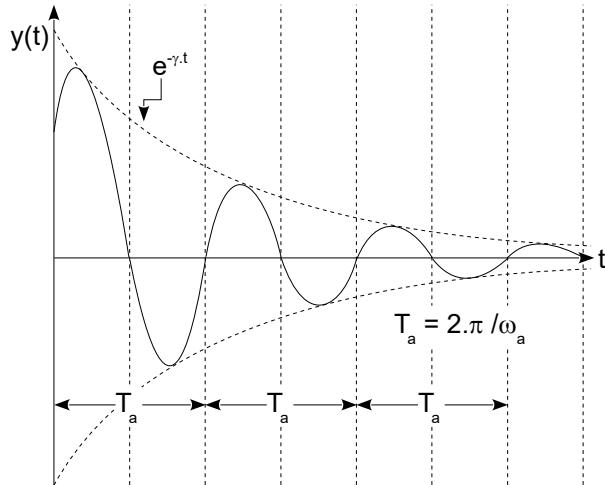
Do cosseno da soma, tem-se: $a_0 \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi) = a_0 \cdot \cos(\omega_a \cdot t) \cdot \cos(\varphi) - a_0 \cdot \sin(\omega_a \cdot t) \cdot \sin(\varphi)$.

Comparando com a solução, tem-se: $a = a_0 \cdot \cos(\varphi)$ e $b = a_0 \cdot \sin(\varphi)$.

Na forma monômica: $y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi)$.

Sendo as constantes a_0 e φ , determinadas por condições iniciais, tais como, posição e velocidade no instante $t = 0$.

O gráfico da solução em função do tempo tem o aspecto ilustrado na figura abaixo:



2^a forma: amortecimento crítico, onde $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} = 1$.

Recuperando a solução geral:

$$y(t) = A \cdot e^{[-\gamma + \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} + B \cdot e^{[-\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} \Rightarrow y(t) = A \cdot e^{(-\gamma \cdot t)} + B \cdot e^{(-\gamma \cdot t)}$$

Cuja solução geral tem a forma:

$$y(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{(-\gamma \cdot t)}$$

Sendo que, as constantes A e B são determinadas em função das condições iniciais, tais como: posição e velocidade no instante zero.

3^a forma: amortecimento forte, onde $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} > 1$.

Neste caso, a solução geral se aplica sem alterações:

$$y(t) = A \cdot e^{[-\gamma + \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} + B \cdot e^{[-\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t}$$

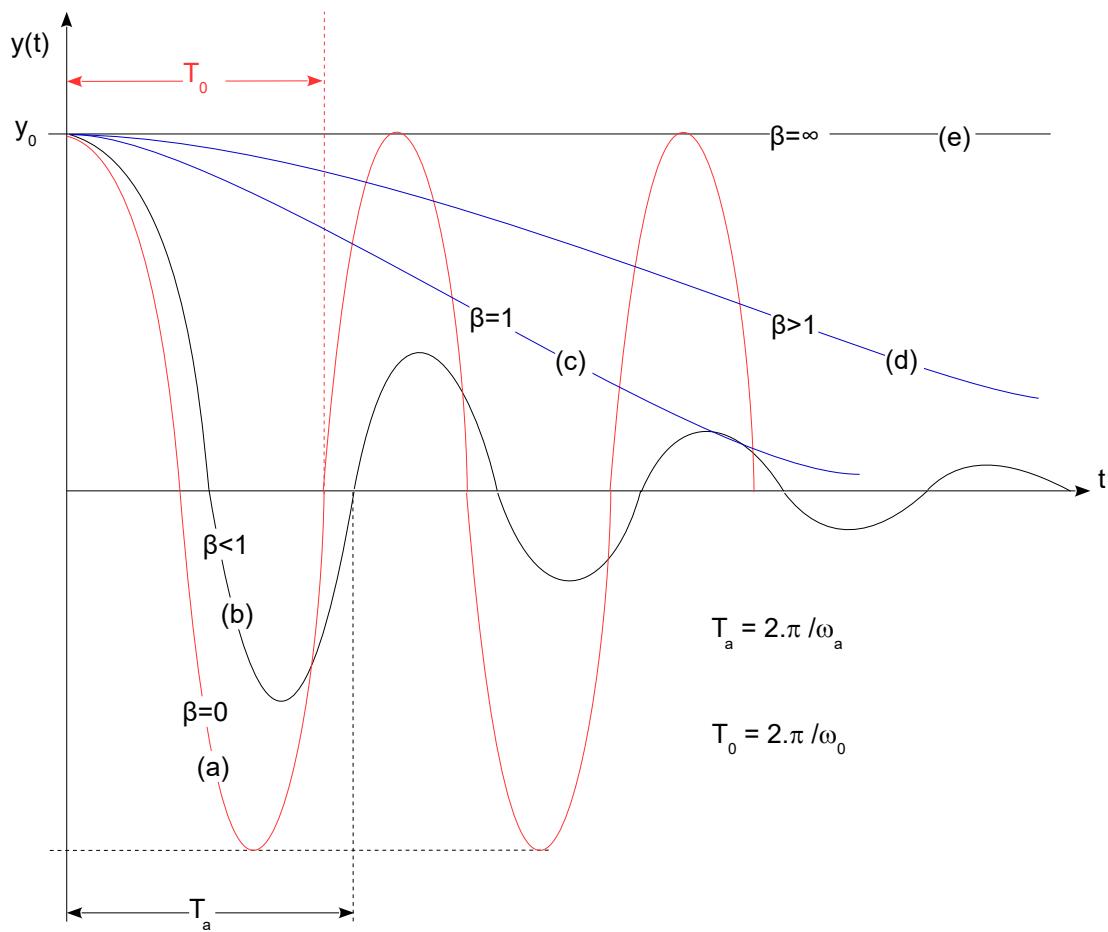
Sendo que, as constantes A e B são determinadas em função das condições iniciais, tais como: posição e velocidade no instante zero.

A figura anexa ilustra os comportamentos de cada tipo de movimento, expressando a posição em função do tempo "y(t)" e, considerando que a posição no instante t = 0, seja expressa por "y₀".

- a) Movimento de Oscilação Livre **Sem** Amortecimento 1 GL – Grau de Liberdade, corresponde a solução com $\beta=0$.
- b) Movimento de Oscilação Livre Com Amortecimento 1 GL – Grau de Liberdade
1º caso: oscilação com amortecimento fraco: $\beta<1$.
- c) Movimento de Oscilação Livre Com Amortecimento 1 GL – Grau de Liberdade
2º caso: oscilação com amortecimento crítico: $\beta=1$.
- d) Movimento de Oscilação Livre Com Amortecimento 1 GL – Grau de Liberdade
3º caso: oscilação com amortecimento forte: $\beta>1$.
- e) Movimento de Oscilação Livre Com Amortecimento 1 GL – Grau de Liberdade
3º caso: oscilação com amortecimento forte: $\beta=\infty$.

Nota: no caso a) e b) estão indicados os dois “períodos”, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ e $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$,

respectivamente: o período do movimento de oscilação sem amortecimento e o pseudoperíodo do movimento de oscilação amortecida. Ressalte-se que o pseudoperíodo é sempre maior que o período próprio, ou seja: $T_a > T_0$.



Resumindo....

Oscilação Livre com Amortecimento – 1 GL – Grau de Liberdade.

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot \dot{y} = 0 \quad ; \text{ a equação diferencial}$$

$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k_{eq}}{m_{ef}}\right)}$: a pulsão própria do sistema sem amortecimento;

$\gamma = \frac{c}{2 \cdot m}$: parâmetro de amortecimento;

$\beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$: grau de amortecimento;

$r = \frac{\omega}{\omega_0}$; razão de frequências;

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = 0 \quad ; \text{ a equação diferencial na forma usual;}$$

1º Tipo: *Amortecimento fraco*, $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} < 1 \Rightarrow \omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad ; \quad y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi)$ sendo as constantes a_0 e φ , determinadas por condições iniciais, tais como, posição e velocidade no instante $t = 0$.

2º Tipo: *Amortecimento Crítico*: $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} = 1 \Rightarrow y(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{(-\gamma \cdot t)}$

sendo que, as constantes A e B são determinadas em função das condições iniciais, tais como: posição e velocidade no instante zero.

3º Tipo: *Amortecimento Forte*: $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} > 1 \Rightarrow y(t) = A \cdot e^{[-\gamma + \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t} + B \cdot e^{[-\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}] \cdot t}$

sendo que, as constantes A e B são determinadas em função das condições iniciais, tais como: posição e velocidade no instante zero.

3.1.1. Exemplo:

Um sólido de massa $m = 20 \text{ kg}$, oscila com amortecimento viscoso com frequência de oscilação $f_a = 10 \text{ Hz}$. Em 10 segundos a amplitude sofre redução de 10%. Pedem-se:

- o coeficiente de resistência viscosa "c";
- o parâmetro de amortecimento " γ ";
- o decremento logarítmico " $D = \gamma \cdot T_a$ ";
- em que proporção varia o período quando se suprime o amortecimento.

Solução:

a frequência do movimento oscilatório amortecido é:

$$f_a = 10 \Rightarrow \omega_a = 2\pi \cdot f_a \Rightarrow \omega_a = 20\pi$$

recuperando a equação horária do movimento oscilatório amortecido:

$$y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(20\pi \cdot t + \varphi)$$

no instante ($t=0$), tem-se: $y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(20\pi \cdot t + \varphi)$

no instante ($t=10$), tem-se: $y(t+10) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot (t+10)} \cdot \cos(20\pi \cdot (t+10) + \varphi)$

desenvolvendo: $y(t+10) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot (t+10)} \cdot \cos(20\pi \cdot t + 100\pi + \varphi)$

$$y(t+10) = a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot (t+10)} \cdot \cos(20\pi \cdot t + \varphi)$$

Considerando que em 10 s, ocorre redução na amplitude de 10% tem-se:

$$\frac{y(t+10)}{y(t)} = 0,90$$

$$\frac{a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot (t+10)} \cdot \cos(20\pi \cdot t + \varphi)}{a_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(20\pi \cdot t + \varphi)} = 0,90 \Rightarrow e^{-\gamma \cdot 10} = 0,90 \Rightarrow \ln(e^{-\gamma \cdot 10}) = \ln(0,90)$$

$$-\gamma \cdot 10 = -0,1054 \Rightarrow \gamma = 0,0105$$

$$\text{Sendo } \gamma = \frac{c}{2 \cdot m} \Rightarrow c = \gamma \cdot 2 \cdot m \Rightarrow c = 0,421$$

$$\text{Sendo } D = \gamma \cdot T_a \text{ e } T_a = \frac{1}{f_a} \Rightarrow D = \frac{\gamma}{f_a} \Rightarrow D = 0,0011$$

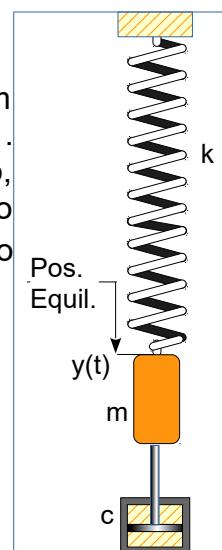
$$\text{Sendo } \omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_a^2 + \gamma^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{(\omega_a^2 + \gamma^2)} = 62,8319$$

$$\text{A razão entre os períodos é: } \frac{T_0}{T_a} = \frac{\frac{1}{f_0}}{\frac{1}{f_a}} = \frac{\frac{1}{\omega_0}}{\frac{1}{\omega_a}} = \frac{\omega_a}{\omega_0} \Rightarrow \frac{T_0}{T_a} = \frac{20\pi}{\sqrt{(20\pi)^2 + \gamma^2}} = 0,99999998$$

3.1.2. Exemplo:

A figura ilustra um sólido de massa $m = 0,200 \text{ kg}$, sob ação de mola com rigidez "k" e amortecedor com constante da força viscosa $c = 10 \text{ N.s/m}$. A partir da posição de equilíbrio, o sólido é lançado na vertical, para baixo, com velocidade $v_0 = 0,30 \text{ m/s}$. Sabe-se que essa mesma mola sob ação de sólido teste, com massa $m_t = 0,050 \text{ kg}$, apresenta deformação $\Delta = 0,005 \text{ m}$ quando em equilíbrio. Adotar $g = 10 \text{ m/s}^2$. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- o grau de amortecimento;
- a equação horária do movimento;
- o máximo afastamento do sólido em relação à posição de equilíbrio.

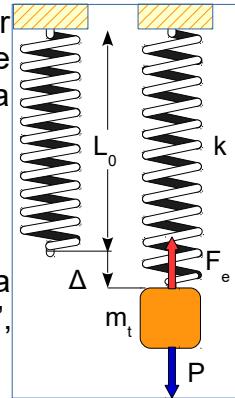


Solução:

Considerando o efeito do bloco teste, sobre a mola, é possível determinar a rigidez da mesma, impondo o equilíbrio, ou seja: na posição de equilíbrio, duas forças agem sobre o sólido teste, o peso próprio e a força elástica e a soma dessas é nula.

$$P - F_e = 0 \Rightarrow m \cdot g - k \cdot \Delta = 0 \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{\Delta} = 400 \frac{N}{m};$$

O sólido no instante "t" qualquer, encontra-se deslocado em relação a sua posição de equilíbrio de "y(t)", deslocando-se com velocidade "v = \dot{y}" , conforme ilustrado.



O diagrama de esforços (forças) no instante "t" ...

Impondo a Lei de Newton:

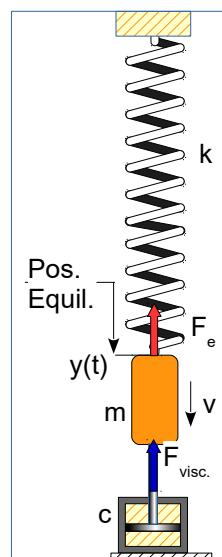
$$-F_{el.} - F_{visc.} = m \cdot \ddot{y} \Rightarrow -k \cdot y - c \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot \dot{y} = 0 \text{ ou:}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = 0 \quad (\text{a})$$

Sendo:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k_{eq.}}{m_{ef.}}\right)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{400}{0,200}\right)} = 44,7 \frac{rad}{s} \text{ e}$$

$$\gamma = \frac{c}{2 \cdot m} \Rightarrow \gamma = \frac{10}{2 \cdot 0,200} = 25 s^{-1}$$



$$\text{Sendo } \beta = \frac{\gamma}{\omega_0} \text{ o grau de amortecimento ... } \beta = \frac{25}{44,7} = 0,56 \quad (\text{b})$$

Conclui-se portanto que o amortecimento é fraco ($\beta < 1$), ou seja, a solução da equação diferencial, ou posição em função do tempo é:

$$y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi)$$

com: $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \omega_a = \sqrt{(44,7^2 - 25^2)} = 37,1$.

Derivando a posição em função do tempo:

$$\dot{y}(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot [-\gamma \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi) - \omega_a \cdot \sin(\omega_a \cdot t + \varphi)]$$

Reduzindo à forma monômica:

$$A \cdot \cos((\omega_a \cdot t + \varphi) + \delta) = A \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi) \cdot \cos(\delta) - A \cdot \sin(\omega_a \cdot t + \varphi) \cdot \sin(\delta)$$

Comparando as duas últimas equações, obtém-se:

$$-\gamma = A \cdot \cos(\delta) \qquad \qquad \omega_a = A \cdot \sin(\delta)$$

Dividindo as equações membro a membro: $\frac{-\omega_a}{\gamma} = \tan(\delta) \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{-\omega_a}{\gamma}\right)$

Elevando ao quadrado ambas as equações e somando membro a membro:

$$A = \sqrt{(\omega_a^2 + \gamma^2)} \Rightarrow A = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2 + \gamma^2)} = \omega_0$$

Finalmente a equação da velocidade na forma monômica:

$$\dot{y}(t) = \omega_0 \cdot a_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi + \delta) \text{ com } \delta = \arctan\left(\frac{-\omega_a}{\gamma}\right)$$

Nota: derivar esse tipo de equação, implica em somar δ ao argumento e multiplicá-la por ω_0 .

A equação da aceleração: $\ddot{y}(t) = \omega_0^2 \cdot a_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \varphi + 2\delta)$

Calculando ... $y(t) = a_0 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(37,1 \cdot t + \varphi)$

$$\delta = \arctan\left(\frac{-\omega_a}{\gamma}\right) \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{-37,1}{25}\right) = -0,98 \text{ rad } 4^\circ \text{ quadrante}$$

$$\text{ou } \delta = -0,98 + \pi = 2,16 \text{ rad } 2^\circ \text{ quadrante}$$

Substituindo na equação da velocidade:

$$\dot{y}(t) = 44,7 \cdot a_0 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(37,1 \cdot t + \varphi + 2,16)$$

No instante $t = 0$, tem-se:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = a_0 \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$$

$$\dot{y}(0) = 0,30 \Rightarrow 0,30 = 44,7 \cdot a_0 \cdot \cos(\varphi + 2,16)$$

$$\text{Para } \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0,30 = 44,7 \cdot a_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2,16\right) \Rightarrow 0,30 = a_0 \cdot (-37,2) \Rightarrow a_0 = -0,0081$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0,30 = 44,7 \cdot a_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2,16\right) \Rightarrow 0,30 = a_0 \cdot 37,2 \Rightarrow a_0 = 0,0081$$

Finalmente a equação horária:

$$y(t) = 0,0081 \cdot e^{-25t} \cdot \cos\left(37,1 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{c})$$

O máximo afastamento da posição de equilíbrio é obtido impondo:

$$\dot{y}(t) = 0 \text{ e } \ddot{y}(t) < 0$$

Derivando e impondo as condições de máximo:

$$\dot{y}(t) = 0,36 \cdot e^{-25t} \cdot \cos\left(37,1 \cdot t + \frac{3\pi}{2} + 2,16\right) = 0$$

$$\dot{y}(t) = 0,36 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(37,1 \cdot t + 2 \cdot \pi + 0,59) = 0$$

$$\dot{y}(t) = 0,36 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(37,1 \cdot t + 0,59) = 0$$

$$37,1 \cdot t + 0,59 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,026 \text{ s}$$

Nota: esse é o primeiro instante em que a velocidade (derivada) se anula, assim nem é preciso testar a derivada segunda.

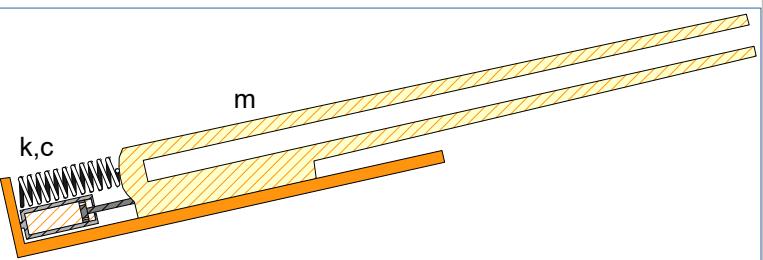
Substituindo na equação da posição:

$$y(0,026) = 0,0081 \cdot e^{-25 \cdot 0,026} \cdot \cos\left(37,1 \cdot 0,026 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y(0,026) = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

3.1.3. Exemplo:

Um canhão possui cano com massa $m = 700 \text{ kg}$, cujo recuo se faz sob efeito de um sistema mola amortecedor. A mola possui rigidez $k = 8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e o amortecedor possui constante "c" da resistência viscosa.



Pede-se determinar a constante "c" da resistência viscosa, para que o cano volte à sua posição de equilíbrio (posição de disparo), o mais rápido possível sem oscilar.

Solução:

Sem oscilar implica que o movimento não pode ser de oscilação amortecida, ou seja, o grau de amortecimento é: $\beta \geq 1$. Voltar o mais rápido possível à posição de equilíbrio exclui amortecimento forte, ou seja, o único movimento que se ajusta ao pedido é o de amortecimento crítico, ou seja: $\beta = 1$

Tem-se:

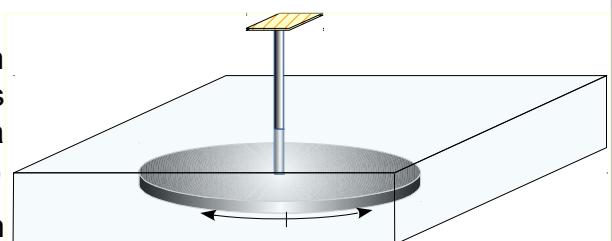
$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k_{eq.}}{m_{ef.}}\right)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{8 \cdot 10^4}{700}\right)} = 10,69 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\gamma = \frac{c}{2 \cdot m} \Rightarrow \gamma = \frac{c}{2 \cdot 700} = \frac{c}{1400}$$

Sendo $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$ o grau de amortecimento ... $1 = \frac{c}{1400} \frac{1}{10,69} \Rightarrow c = 14966 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$

3.1.4. Exemplo:

Um pêndulo de torção é constituído por um disco, submerso em óleo, e suspenso através de um fio. O disco possui momento de inércia $I = 0,004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. O fio possui rigidez de torção $k_T = 1,6 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$. Quando o disco move-se com

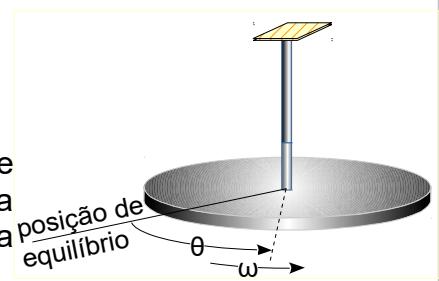


velocidade angular $\dot{\theta}$ em relação ao óleo, é exercido sobre o mesmo, conjugado viscoso expresso por: $C_{vis.} = -0,1 \cdot \dot{\theta} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- o grau de amortecimento β ;
- a equação horária do movimento.

Solução:

No instante "t" qualquer, o disco tem posição angular θ e velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$. Nessas condições o fio aplica no disco o conjugado elástico $C_{el.} = -k_T \cdot \theta$ e o óleo aplica no mesmo conjugado viscoso $C_{vis.} = -0,1 \cdot \dot{\theta}$.



Imponto o TMA – Teorema do Momento Angular:

$$-k_T \cdot \theta - 0,1 \cdot \dot{\theta} = I \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow -1,6 \cdot \theta - 0,1 \cdot \dot{\theta} = 0,004 \cdot \ddot{\theta} \text{ na forma usual ...}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1,6}{0,004} \cdot \theta + \frac{0,1}{0,004} \cdot \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 400 \cdot \theta + 25 \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (\text{a})$$

Comparando com a equação diferencial típica, ou seja, $\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = 0$ tem-se:

$$\omega_0^2 = 400 \Rightarrow \omega_0 = 20$$

$$2 \cdot \gamma = 25 \Rightarrow \gamma = 12,5$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\omega_0} \Rightarrow \beta = \frac{12,5}{20} \Rightarrow \beta = 0,625 \quad (\text{b})$$

Equação horária do movimento:

$$y(t) = a_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi) \quad \text{e} \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\omega_a = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)} \Rightarrow \omega_a = 15,61 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y(t) = a_0 \cdot e^{-12,5t} \cdot \cos(15,61t + \varphi) \quad (\text{c})$$

Nota: as constantes a_0 e φ não são determináveis pois as condições iniciais não foram informadas.

4. OSCILAÇÃO FORÇADA COM AMORTECIMENTO 1 GL – GRAU DE LIBERDADE.

Oscilação Forçada, significa que o sistema é submetido a uma força de intensidade oscilante, tal como: $F_{ex.} = F_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Submetido a tal força o sistema oscila com a frequência imposta pela mesma, ou seja, a pulsação do movimento é: ω .

Com amortecimento, significa que há dissipação de energia pela presença de uma força dissipativa. A força dissipativa mais usual nos estudos de vibração é a força viscosa do tipo: $F_{visc.} = -c \cdot v$, sendo "v" velocidade relativa do sólido, (ou ponto material) que compõe o sistema, em relação ao fluido. A escolha desse tipo de força dissipativa é empregada pois simplifica a solução da equação diferencial do movimento.

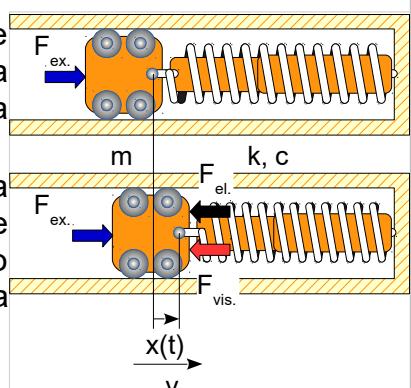
1 GL – Grau de Liberdade, significa que o sistema tem seu movimento descrito com o uso de apenas uma variável e, quando abandonado pra vibrar livremente, vibra com apenas um modo normal de vibração, ou seja, com apenas uma pulsação.

4.1. Método de Newton.

Considere-se uma partícula de massa "m" sob ação de um sistema mola amortecedor, com rigidez "k", constante da resistência viscosa "c" e de uma força excitadora $F_{ex.} = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

No instante "t" genérico, considere-se que o sistema tenha posição "x(t)", com origem na posição de equilíbrio e velocidade "v". Dessa forma, duas outras forças estarão presentes, a força elástica $F_{el.} = -k \cdot x$ e a força viscosa

$$F_{vis.} = -c \cdot v = -c \cdot \dot{x} .$$



Imponto a Lei de Newton, tem-se:

$$F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) - k \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

Reescrevendo:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ ou } \dots$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ onde: } \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \text{ e } \gamma = \frac{c}{2 \cdot m}$$

A solução permanente é:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

Testando essa proposta de solução ...

$$-A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + \omega_0^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) - 2 \cdot \gamma \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Reescrevendo ...

$$A \cdot [(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \boxed{\cos(\omega \cdot t + \alpha)} - 2 \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \boxed{\sin(\omega \cdot t + \alpha)}] = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Expressando o primeiro membro na forma monômica ...

$$B \cdot \cos[(\omega \cdot t + \alpha) + \Delta] = B \cdot \cos \Delta \cdot \boxed{\cos(\omega \cdot t + \alpha)} - B \cdot \sin \Delta \cdot \boxed{\sin(\omega \cdot t + \alpha)}$$

Comparando os termos, tem-se:

$$B \cdot \cos \Delta = (\omega_0^2 - \omega^2) \text{ e } B \cdot \sin \Delta = 2 \cdot \gamma \cdot \omega$$

Dividindo as últimas igualdades membro a membro, sendo a segunda igualdade pela primeira, tem-se:

$$\tan \Delta = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Elevando as ambas as igualdades ao quadrado e somando membro a membro, tem-se:

$$B^2 \cdot \cos^2 \Delta + B^2 \cdot \sin^2 \Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \gamma \cdot \omega)^2$$

$$B^2 \cdot (\cos^2 \Delta + \sin^2 \Delta) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \gamma \cdot \omega)^2$$

$$B = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \gamma \cdot \omega)^2}$$

Reescrevendo B:

1º) multiplicando e também dividindo por ω_0^2 :

$$B = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \gamma \cdot \omega)^2}$$

2º) passando o denominador para dentro da raiz quadrada:

$$B = \omega_0^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_0^4} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \gamma \cdot \omega)^2)}$$

3º) passando o denominador para dentro dos quadrados:

$$B = \omega_0^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0^2}\right)^2} \Rightarrow B = \omega_0^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

4º) aplicando as seguintes igualdades:

$$\frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \quad ; \quad r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad ; \quad \beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

tem-se:

$$B = \omega_0^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow B = \omega_0^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2}$$

Reescrevendo a fase Δ :

1º) dividindo o numerador e também o denominador por ω_0^2 :

$$\tan \Delta = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \tan \Delta = \frac{\frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0^2}}{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \tan \Delta = \frac{2 \cdot \frac{\gamma}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

2º) aplicando as seguintes igualdades:

$$\frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \quad ; \quad r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad ; \quad \beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

tem-se:

$$\tan \Delta = \frac{2 \cdot \beta \cdot r}{1 - r^2}$$

Recuperando a expressão na forma binômica:

$$A \cdot [(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) - 2 \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)] = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Na equação acima, o termo entre chaves “[...]” pode ser escrito como:

$$B \cdot \cos[(\omega \cdot t + \alpha) + \Delta]$$

Substituindo os valores de “B” e de “ Δ ” ...

$$\omega_0^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2} \cdot \cos[(\omega \cdot t + \alpha) + \Delta] \text{ com } \Delta = \arctan\left(\frac{2 \cdot \beta \cdot r}{1 - r^2}\right)$$

Substituindo o termo entre chaves “[...]”, obtém-se:

$$A \cdot \omega_0^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2} \cdot \cos((\omega \cdot t + \alpha) + \Delta) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Impondo a igualdade indicada acima:

os coeficientes dos cosenos devem ser iguais:

$$A \cdot \omega_0^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2}}$$

Utilizando: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}} \Rightarrow A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

os argumentos dos cosenos devem ser iguais:

$$\omega \cdot t + \alpha + \Delta = \omega \cdot t \Rightarrow \alpha = -\Delta, \text{ ou seja: } \alpha = \arctan\left(\frac{-2\beta r}{1-r^2}\right)$$

Resumindo

Equação diferencial: $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + 2\gamma \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Solução: $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-2\beta r}{1-r^2}\right)$$

Outras relações:

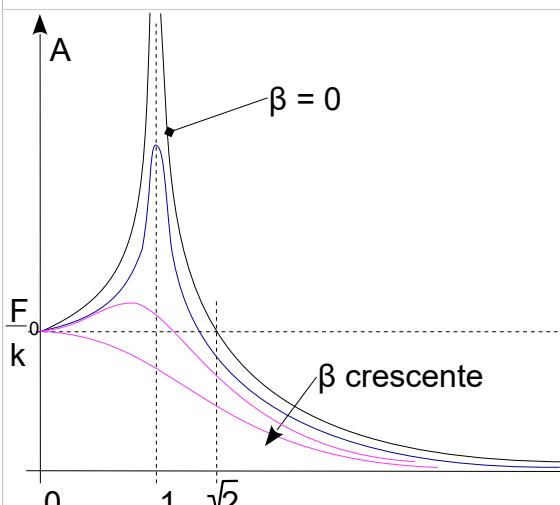
$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$\gamma = \frac{c}{2 \cdot m}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

Nota: em todos os problemas, deve-se ajustar a equação diferencial para que possa ser comparada com a equação diferencial característica, pois assim a solução estará garantida.



O comportamento desse sistema está ilustrado no gráfico anexo, onde se expressa a amplitude do movimento "A", em função da razão de freqüência "r".

Especialmente, para " $\beta = 0$ " e " $r = 1$ ", observa-se um pico de amplitude infinito, é o caso de ressonância entre o sistema e a freqüência da força excitadora $\omega = \omega_0$.

Algumas particularidades do comportamento desse sistema podem ser salientadas:

a) as amplitudes de vibração são menores para $r > \sqrt{2}$.

b) o aumento do grau de amortecimento produz diminuição da amplitude de vibração.

Saliente-se que esse comportamento não é universal, e outros sistemas terão comportamentos semelhantes mas NÃO iguais, em especial no que diz respeito à relação entre o aumento do grau de amortecimento e a diminuição da amplitude. Em verdade existem sistemas com comportamento oposto a este.

4.1.1. Exemplo

Um sistema composto por uma base oscilante na direção vertical, que move-se segundo a equação horária $y_B(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$, estimula um bloco (sólido) de massa "m" através de mola de rigidez "k". O bloco tem seus movimentos influenciados por um sistema amortecedor com constante da resistência viscosa "c". Em função das grandezas citadas, pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a equação horária do movimento do bloco.

Solução:

As forças agentes são " $F_{el.}$ " E força " $F_{vis.}$ ", desta forma, aplicando a Lei de Newton:

$$-F_{el.} - F_{vis.} = m \cdot a$$

Sendo:

$$-k \cdot (y - y_B) - c \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$$

Substituindo " y_B ":

$$-k \cdot (y - a \cdot \cos(t)) - c \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$$

$$-k \cdot y + k \cdot a \cdot \cos(t) - c \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$$

Reescrevendo:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot \dot{y} = \frac{k}{m} \cdot a \cdot \cos(t) \text{ ou } \dots$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = \frac{k \cdot a}{m} \cdot \cos(t) \quad (\text{a})$$

Comparando com a equação na forma usual:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Conclui-se que:

$$F_0 = k \cdot a$$

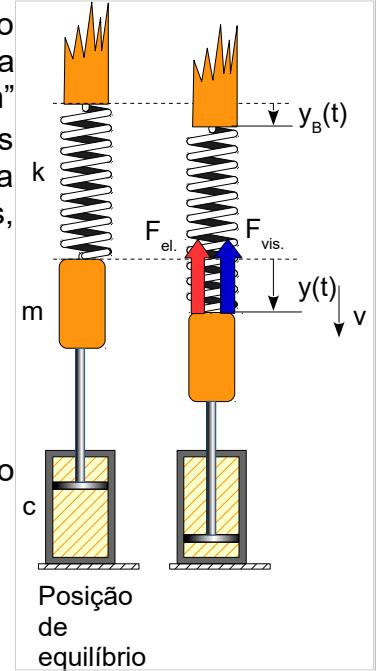
A equação horária: $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad (\text{b})$

com:

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2}} \quad \text{e} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{-2\beta \cdot r}{1-r^2}\right)$$

Substituindo " F_0 ", obtém-se:

$$A = \frac{a}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta \cdot r)^2}} \quad \text{e} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{-2\beta \cdot r}{1-r^2}\right)$$



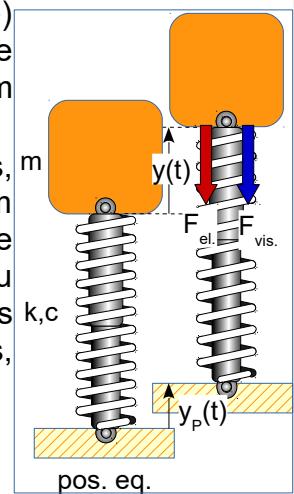
4.1.2. Exemplo

Considere-se um equipamento de massa “m”, apoiado em piso (lage) através de um sistema mola amortecedor com rigidez “k” e constante da resistência viscosa “c”. Esse piso desloca-se na vertical com equação horária $y_p(t)=a \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Esta descrição é comum, onde um equipamento sensível à vibrações, é instalado em um piso (lage) onde outros equipamentos, também instalados no mesmo local, são fontes de vibração. Máquinas que tenham partes que se movem em movimentos oscilatórios, ou assemelhados, se comportam como fontes de vibrações. Exemplos que se encaixam nessa categoria são: selecionadores com peneiras, máquinas operatrizes, motores, compressores, prensas.

Considerando os dados informados, pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a equação horária do movimento;
- a máxima aceleração do equipamento;
- construir um gráfico da amplitude do deslocamento do equipamento em estudo, em função da razão de frequência “r”.
- sugerir ações que “isolem” o equipamento das fontes de vibrações.



Solução:

Num instante “t” genérico, o piso encontra-se na posição “ y_p ” com velocidade “ $v_p = \dot{y}_p$ ” e o equipamento encontra-se na posição “y” com velocidade “ $v = \dot{y}$ ”.

Portanto, nesse instante, a mola encontra-se alongada de “ $\Delta = y - y_p$ ”, o que produz força elástica “ $F_{el.} = -k \cdot (y - y_p)$ ”, e o amortecedor produz força viscosa “ $F_{visc.} = -c \cdot v_{rel.}$ ”, sendo “ $v_{rel.}$ ” a velocidade relativa entre as partes, ou seja, $v_{rel.} = \dot{y} - \dot{y}_p$.

Nota: a velocidade relativa pode ser obtida através da derivada do deslocamento relativo “ Δ ”, ou seja: $\Delta = y - y_p \Rightarrow \dot{\Delta} = \dot{y} - \dot{y}_p$

Resumindo, duas forças agem no equipamento:

$$\begin{aligned} F_{el.} &= -k \cdot (y - y_p) \Rightarrow F_{el.} = -k \cdot (y - a \cdot \cos(\omega \cdot t)) \Rightarrow F_{el.} = -k \cdot y + k \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ e} \\ F_{visc.} &= -c \cdot (\dot{y} - \dot{y}_p) \Rightarrow F_{visc.} = -c \cdot \dot{y} - c \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Obtendo a derivada de “ y_p ”: $y_p(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow \dot{y}_p = -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Substituindo na força viscosa: $F_{visc.} = -c \cdot \dot{y} - c \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Impondo a Lei de Newton:

$$F_{el.} + F_{visc.} = m \cdot \ddot{y} \Rightarrow -k \cdot y + k \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) - c \cdot \dot{y} - c \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot \ddot{y}$$

Rearranjando ...

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y + c \cdot \dot{y} = k \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) - c \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot \dot{y} = \frac{a}{m} \cdot [k \cdot \cos(\omega \cdot t) - c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

Identificando os termos:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = \frac{a}{m} \cdot [k \cdot \cos(\omega \cdot t) - c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)] \quad (\text{a})$$

Nota: o segundo membro não é comparável ao caso usual, então deve ser transformado na forma monômica.

Transformando o 2º membro na forma monômica:

$$\begin{aligned} B \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) &= B \cdot \cos \delta \cdot \cos(\omega \cdot t) - B \cdot \sin \delta \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ B \cdot \sin \delta &= c \cdot \omega \quad \text{e} \quad B \cdot \cos \delta = k \end{aligned}$$

Obtendo B e δ :

$$\delta = \arctan\left(\frac{c \cdot \omega}{k}\right) \quad \text{e} \quad B = \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + k^2}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{c \cdot \omega}{k}\right) \quad \text{como:} \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \Rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{c \cdot \omega}{k}\right) \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{c \cdot \omega}{m \cdot \omega_0 \cdot \omega_0}\right) \quad \text{como:} \quad \gamma = \frac{c}{2 \cdot m} \Rightarrow \frac{c}{m} = 2 \cdot \gamma$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{c \cdot \omega}{m \cdot \omega_0 \cdot \omega_0}\right) \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\omega_0 \cdot \omega_0}\right) \quad \text{como:} \quad \beta = \frac{\gamma}{\omega_0} \quad \text{e} \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\delta = \arctan(2 \cdot \beta \cdot r)$$

Substituindo na equação:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} = \frac{a}{m} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + k^2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

Comparando com as formas usuais:

$$\text{equação diferencial: } \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{Conclui-se que:} \quad F_0 = a \cdot \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + k^2}$$

$$\text{a solução: } x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad \text{conclui-se que:} \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta + \alpha)$$

$$\text{com: } \delta = \arctan(2 \cdot \beta \cdot r) \quad \text{e} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{-2 \cdot \beta \cdot r}{1 - r^2}\right)$$

A amplitude:

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}} \Rightarrow A = \frac{a \cdot \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + k^2}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}}$$

$$A = a \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2 + k^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}}$$

$$A = a \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2}{k^2} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}} \quad \text{com} \quad k = \omega_0^2 \cdot m$$

$$A = a \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2}{\omega_0^4 \cdot m^2} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}} \quad \text{com} \quad \frac{c}{m} = 2 \cdot \gamma \Rightarrow \frac{c^2}{m^2} = 4 \cdot \gamma^2$$

$$A = a \cdot \sqrt{2^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\gamma}{\omega_0} \quad \text{e} \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{tem-se:} \quad A = a \cdot \sqrt{2^2 \cdot \beta^2 \cdot r^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot r)^2}}$$

Finalmente:

$$A = a \cdot \frac{\sqrt{2^2 \cdot \beta^2 \cdot r^2 + 1}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

A equação horária:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta + \alpha) \quad \text{onde:}$$

$$A = a \cdot \frac{\sqrt{2^2 \cdot \beta^2 \cdot r^2 + 1}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$\delta = \arctan(2\beta r)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-2\beta r}{1-r^2}\right) \quad (\text{b})$$

A aceleração: $\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta + \alpha)$

A máxima aceleração:

$$\ddot{x}_{\max} = A \cdot \omega^2 \Rightarrow \ddot{x}_{\max} = \omega^2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2^2 \cdot \beta^2 \cdot r^2 + 1}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}} \quad (\text{c})$$

O gráfico da amplitude: (d)

r	0	1	$\sqrt{2}$
A	a	$a \cdot \sqrt{\frac{1+(2\beta)^2}{(2\beta)^2}}$	a

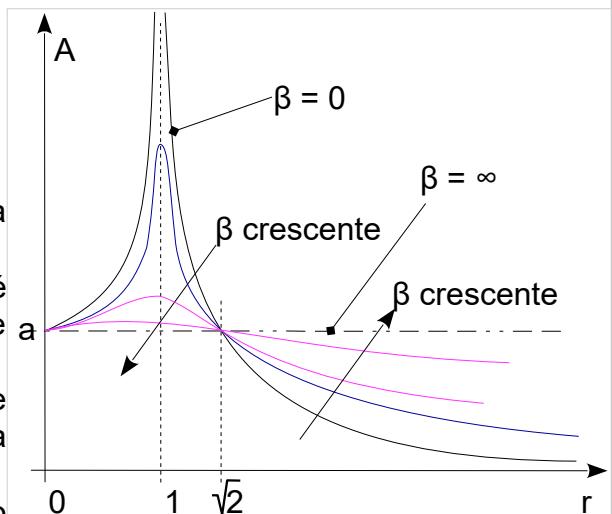
Notas:

1^a) para $r=1$ e $\beta=0$, a amplitude tende a infinito, é o caso de ressonância;

2^a) para $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, a amplitude nunca é menor que "a", independentemente do grau de amortecimento " β ";

3^a) para $r > \sqrt{2}$, as amplitudes são sempre menores que "a" e tendem a zero para $r \gg \sqrt{2}$.

3^a) para $r > \sqrt{2}$, as menores amplitudes são sempre para grau de amortecimento $\beta=0$.



Sugestões para minimizar a amplitude de vibração do sistema: (e)

1^a) trabalhar na faixa de razão de freqüências $r > \sqrt{2}$.

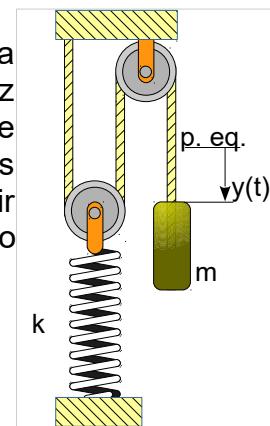
2^a) eliminar os amortecedores $\beta=0$.

5. LISTA DE EXERCÍCIOS PREPARATÓRIA PARA A 1^a PROVA.

QUESTÃO 01

No sistema ilustrado, as duas polias são leves e sem atrito. A polia superior tem eixo fixo. A polia inferior está ligada a uma mola de rigidez $k = 8,0 \text{ kN/m}$. A mola é ancorada ao piso. Um fio ideal (leve, flexível e inextensível) que passa pelas polias e não escorrega em relação às mesmas, liga-se a um bloco de massa $m = 10,0 \text{ kg}$, e ao teto. A partir da posição de equilíbrio, descola-se o bloco de $a_0 = 0,3 \text{ m}$ e o abandona-se em repouso. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsação do movimento (ω_0);
- a equação horária da posição em função do tempo ($y(t)$);
- a energia mecânica do sistema.

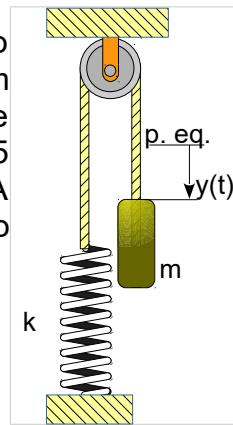


$$\ddot{y}_B + 200 \cdot y_B = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4 \cdot m}} = 14,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad y_B = 0,3 \cdot \cos(14,14 \cdot t) \quad EM = 90 \text{ J}$$

QUESTÃO 02

No sistema ilustrado a polia de eixo fixo, possui raio $R = 0,3 \text{ m}$, momento de inércia em relação ao seu centro $I = 0,113 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, gira livremente (sem atrito). Um fio ideal (leve, flexível e inextensível) que passa pela polia e não escorrega em relação à mesma, liga-se a um bloco de massa $m = 1,5 \text{ kg}$, e a uma mola de rigidez $k = 1.000 \text{ N}$. A mola é ancorada ao piso. A partir da posição de equilíbrio, descola-se o bloco de $a_0 = 0,3 \text{ m}$ e o abandona-se em repouso. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsação do movimento (ω_0);
- a equação horária da posição em função do tempo ($y(t)$);
- a energia mecânica do sistema.

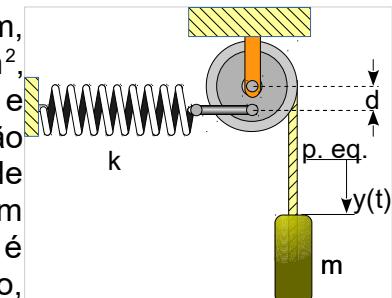


$$\ddot{y} + 362,9 \cdot y = 0 \quad \omega_0 = 19,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad y = 0,3 \cdot \cos(19,05 \cdot t) \quad EM = 45 \text{ J}$$

QUESTÃO 03

No sistema ilustrado a polia de eixo fixo, possui raio $R = 0,3 \text{ m}$, momento de inércia em relação ao seu centro $I = 0,113 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, gira livremente (sem atrito). Um fio ideal (leve, flexível e inextensível) que passa pela polia e não escorrega em relação à mesma, liga-se a um bloco de massa $m = 1,5 \text{ kg}$. Outro fio de mesmas características, liga o ponto da polia distante $d = 0,2 \text{ m}$ de seu centro, a uma mola de rigidez $k = 1.000 \text{ N/m}$. A mola é ancorada a uma parede. A partir da posição de equilíbrio, descola-se o bloco de $a_0 = 0,01 \text{ m}$ e o abandona-se em repouso. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsação do movimento (ω_0);
- a equação horária da posição em função do tempo ($y(t)$);
- a energia mecânica do sistema.



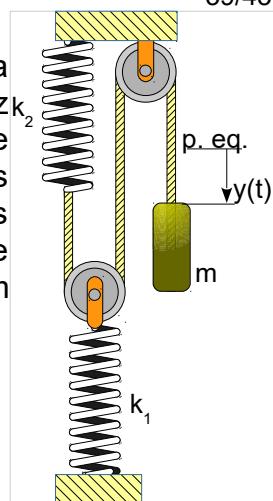
$$\ddot{y} + 161,29 \cdot y = 0 \quad \omega_0 = 12,70 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad y(t) = 0,01 \cdot \cos(12,70 \cdot t) \quad EM = 0,022 \text{ J}$$

QUESTÃO 04

No sistema ilustrado, as duas polias são leves e sem atrito. A polia superior tem eixo fixo. A polia inferior está ligada a uma mola de rigidez $k_2 = 8,0 \text{ kN/m}$, que é ancorada ao piso. Um fio ideal (leve, flexível e inextensível) que passa pelas polias e não escorrega em relação às mesmas, liga-se a um bloco de massa $m = 10,0 \text{ kg}$, e ao teto através de outra mola de rigidez $k_1 = 4,0 \text{ kN/m}$. A partir da posição de equilíbrio, descola-se o bloco de $a_0 = 0,3 \text{ m}$ e o abandona-se em repouso. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão do movimento (ω_0);
- a equação horária da posição em função do tempo ($y(t)$);
- a energia mecânica do sistema.

$$\ddot{y} + 133,33 \cdot y = 0 \quad \omega_0 = 11,55 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad y(t) = 0,3 \cdot \cos(11,55 \cdot t) \quad EM = 60 \text{ J}$$

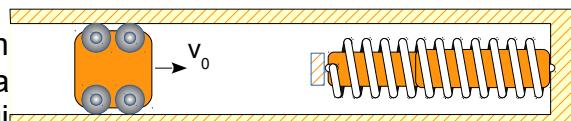


QUESTÃO 05

Um pistão de massa $4,4 \text{ kg}$ percorre um tubo com velocidade $18,0 \text{ m/s}$ e aciona um conjunto mola amortecedor, conforme ilustrado. A mola possui massa desprezível e rigidez $k = 35000 \text{ N/m}$. O amortecedor possui constante da resistência viscosa $c = 180,0 \text{ N.s/m}$. Pedem-se:

- o máximo deslocamento do pistão, após acionar o conjunto mola amortecedor;
- a duração do deslocamento anterior.

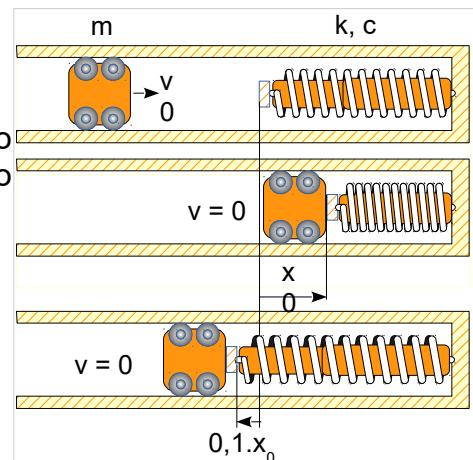
$$x_{\max} = 0,137 \text{ m} \quad t_{para} = 0,016 \text{ s}$$



QUESTÃO 06

Um absorvedor de choques é projetado para que no retorno, ultrapasse o ponto de equilíbrio em 10% do deslocamento inicial. Pedem-se:

- o tipo de amortecimento;
- o grau de amortecimento.
- Oscilação amortecida; b) $\beta = 0,59$

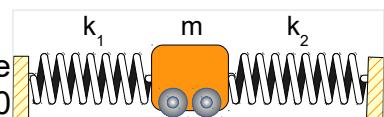


QUESTÃO 07

No sistema ilustrado o bloco de massa $m = 10,0 \text{ kg}$, desloca-se sob ação de duas molas com rigidez $k_1 = 2,0 \text{ kN/m}$ e $k_2 = 3,0 \text{ kN/m}$. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão do movimento (ω_0);

$$\ddot{x} + 300 \cdot x = 0 \quad \omega_0 = 22,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

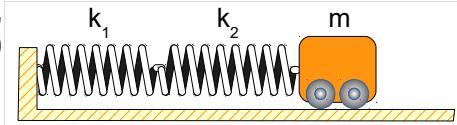


QUESTÃO 08

No sistema ilustrado o bloco de massa $m = 10,0 \text{ kg}$, desloca-se sob ação de duas molas com rigidez $k_1 = 2,0 \text{ kN/m}$ e $k_2 = 3,0 \text{ kN/m}$. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão do movimento (ω_0);

$$\ddot{x} + 120 \cdot x = 0 \quad \omega_0 = 10,95 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

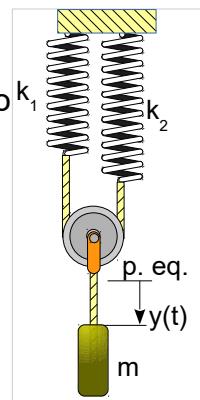


QUESTÃO 09

No sistema ilustrado o bloco de massa $m = 10,0 \text{ kg}$, desloca-se sob ação de duas molas com rigidez $k_1 = 2,0 \text{ kN/m}$ e $k_2 = 3,0 \text{ kN/m}$. Pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão do movimento (ω_0);

$$\ddot{y} + 480 \cdot y = 0 \quad \omega_0 = 21,91 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

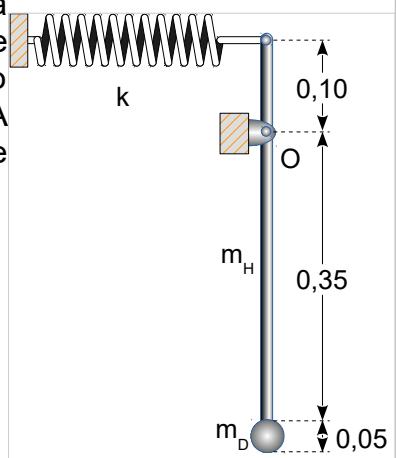


QUESTÃO 10

O sistema ilustrado é constituído por haste delgada de massa $m_H = 2,0 \text{ kg}$, e por disco de massa $m_D = 1,0 \text{ kg}$ solidamente soldado à haste. O conjunto tem eixo fixo passando pelo ponto O, e encontra-se sob ação da mola de rigidez $k = 2,0 \text{ kN/m}$. A jazitura vertical é a posição de equilíbrio. Considerando-se pequenas oscilações, pedem-se:

- o momento de inércia do sistema em relação ao polo O;
- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão do movimento (ω_0);

$$I_{\text{Sist.}}^O = 0,206 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \ddot{\theta} + 127,43 \cdot \theta = 0 \quad \omega_0 = 11,29 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

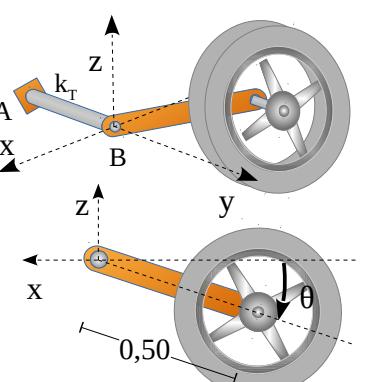


QUESTÃO 11

A suspensão de torção de um veículo possui barra de torção AB com rigidez $k_T = 4808 \text{ N.m/rad}$. A roda possui massa $m_R = 25 \text{ kg}$ e momento de inércia em relação ao próprio centro de massa $I_R^{\text{CM}} = 4,50 \text{ kg.m}^2$. A barra de ligação entre a roda A propriamente e a barra de torção, possui massa $m_B = 10 \text{ kg}$ e raio de giração $r_G = 0,30 \text{ m}$, em relação ao eixo de torção que passa pelo ponto B. Pedem-se:

- A equação diferencial, e a frequência própria de oscilação quando a roda está destravada em relação à barra de ligação (freios não acionados);
- A equação diferencial, e a frequência própria de oscilação quando a roda está travada em relação à barra de ligação (freios acionados).

$$\ddot{\theta} + 672,45 \cdot \theta = 0 \quad \omega_0 = 25,93 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \ddot{\theta} + 412,70 \cdot \theta = 0 \quad \omega_0 = 20,32 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

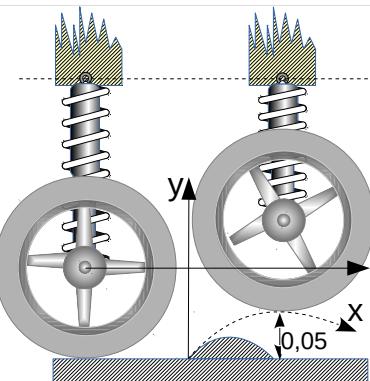


QUESTÃO 12

O sistema de suspensão ilustrado possui massa oscilante $m = 25 \text{ kg}$, amortecedor de ação dupla com constante da força elástica c , e mola com rigidez $k = 25000 \text{ N/m}$.

O sistema de suspensão é acionado ao passar por uma saliência do piso conforme sugerido na ilustração. Considere-se que o ponto de ancoramento da suspensão tenha cota invariante durante o processo que se segue após o deslocamento da roda, ou seja, considera-se o sistema como de um grau de liberdade. Considera-se que a roda seja um corpo rígido, e no impacto com o solo no instante inicial ($t = 0$), a mesma é arremessada para cima com velocidade $v_0 = 3 \text{ m/s}$. Pedem-se:

- determinar o tempo decorrido, até a roda voltar a tocar o solo, considerando que o grau de amortecimento é $\beta = 0,350$ e a velocidade com a qual toca o solo;
- determinar o tempo decorrido, até a roda voltar a tocar o solo.



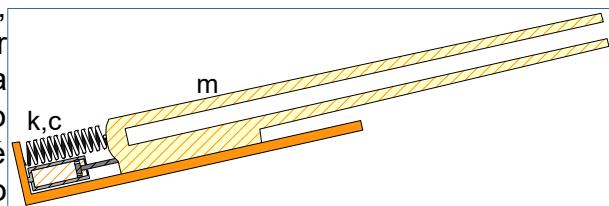
$$t_T = 0,115 \text{ s} \quad t = 3,337 \cdot 10^{-5}$$

QUESTÃO 13

Refazer o exercício anterior considerando que o grau de amortecimento seja $\beta = 1,000$.

QUESTÃO 14

Um canhão de canhão de massa $m = 700 \text{ kg}$, está assentado em conjunto mola amortecedor com rigidez $k = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ e coeficiente da força viscosa c . Sabe-se que após um tiro o canhão recua a $a = 0,6 \text{ m}$, e que o amortecedor é de ação simples com acionamento no final do curso de recuo. Os componentes do canhão foram usinados com tolerância de $0,001 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pedem-se:

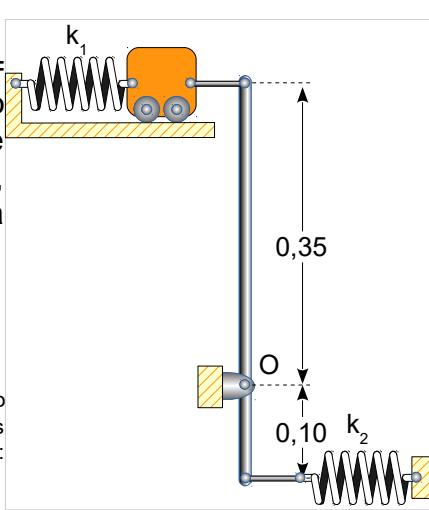


- a velocidade inicial de recuo do canhão;
- velocidade da bala na boca do canhão, caso sua massa seja $m_B = 20,0 \text{ kg}$;
- a constante "c" da força viscosa para que o amortecimento seja crítico;
- o tempo necessário para que o canhão volte à posição de tiro;
- a cadênciaria máxima de tiro do canhão.

$$v_0 = 12,42 \text{ m/s} \quad v_{bala} = 434,70 \text{ m/s} \quad c = 28.980 \text{ N} \cdot \text{s/m} \quad t_{ciclo} = 0,856 \text{ s} \quad f_{tiro} = 70,2 \text{ tiros/min}$$

QUESTÃO 15

O sistema ilustrado é constituído por bloco de massa $m_B = 7,0 \text{ kg}$, ligado à mola de rigidez $k_1 = 500 \text{ N/m}$, e conectado a uma haste leve através de articulação. Essa última haste também se apresenta articulada a uma segunda haste leve, que possui eixo fixo passando pelo ponto O , e liga-se a uma segunda mola de rigidez $k_2 = 4900 \text{ N/m}$. Pedem-se:



- a equação diferencial do movimento;
- a pulsação própria do movimento;
- a rigidez efetivada conjunta.

Sugestões: pequenas oscilações permitem: $\sin \theta = \theta$; $\cos \theta = 1$; o deslocamento dos extremos da haste podem ser encontrados pela projeção das dimensões 0,35 e 0,10 na horizontal. Exemplo: o deslocamento x do bloco é:

$$x = 0,35 \cdot \sin \theta$$

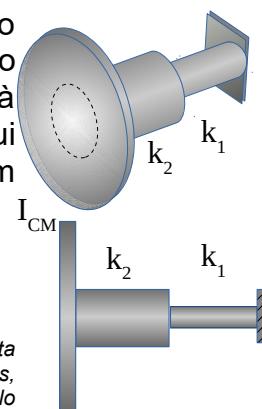
$$\ddot{x} + 128,7 \cdot x = 0 \quad \omega_0 = 11,34 \text{ rad/s} \quad k_{eq} = 900,8 \text{ N/m}$$

QUESTÃO 16

O sistema ilustrado apresenta disco de momento de inércia, em relação ao seu centro de massa, $I_{CM} = 13,5 \text{ kg.m}^2$, ligado a um eixo de diâmetro variável. O trecho do eixo que possui menor diâmetro possui rigidez à torção $k_1 = 2500 \text{ N.m/rad}$. O trecho do eixo com maior diâmetro possui rigidez à torção $k_2 = 6300 \text{ N.m/rad}$. Colocando-se o disco a oscilar em torno do eixo, pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão própria do movimento;
- a rigidez efetivada conjunta.

Sugestão: Quando o disco apresenta deslocamento angular θ , o cilindro ligado a ele (rigidez k_2) apresenta deformação torcional θ_2 , e o cilindro seguinte apresenta deformação torcional θ_1 . Nas condições anteriores, o disco sofre a ação do momento elástico M , que se opõe ao deslocamento angular θ , e é aplicado pelo cilindro de rigidez k_2 . Por sua vez o disco reage sobre o cilindro de rigidez k_2 com momento M de sentido oposto. Através da junção entre os dois cilindros, o cilindro de rigidez k_2 , transfere o momento M para o cilindro seguinte e este reage sobre o anterior com momento M no sentido inverso.



$$\ddot{\theta} + 132,58 \cdot \theta = 0 \quad \omega_0^2 = 11,51 \text{ rad/s} \quad k_{eq} = 1789,77 \text{ N.m/rad}$$

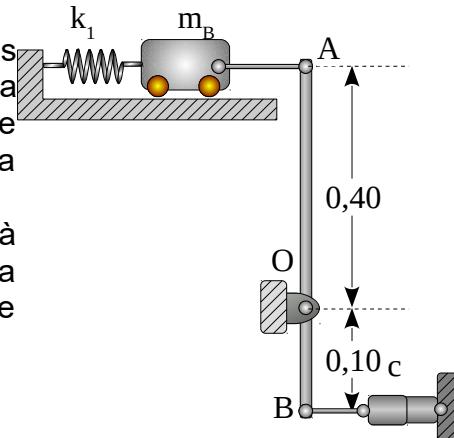
QUESTÃO 17

O sistema ilustrado é constituído pelos seguintes elementos: 1º) Bloco de massa $m_B = 7,0 \text{ kg}$; 2º) mola de rigidez $k_1 = 400 \text{ N/m}$; 3º) amortecedor com coeficiente da força viscosa $c = 175 \text{ N.s/m}$; 4º) barra AB leve (massa desprezível) com comprimento $L = 0,50 \text{ m}$.

O bloco apoia-se em superfície lisa, encontra-se ligado à mola, e articulado à barra no ponto A. A barra AB gira livremente em torno do eixo fixo que passa pelo ponto O, e conecta-se ao bloco e ao amortecedor.

Considerando-se **pequenas oscilações**, pedem-se:

- a equação diferencial do movimento;
- a pulsão própria sem amortecimento;
- a pulsão do movimento;
- a rigidez equivalente do conjunto.



Sugestões: pequenas oscilações permitem: $\sin \theta = \theta$; $\cos \theta = 1$; o deslocamento dos extremos da haste podem ser encontrados pela projeção das dimensões 0,40 e 0,10 na horizontal. Exemplo: o deslocamento x do bloco é: $x = 0,40 \cdot \sin \theta$
 $\Rightarrow x = 0,40 \cdot \theta$

$$\ddot{x} + 57,1 \cdot x + 1,6 \cdot \dot{x} = 0 \quad \omega_0 = 7,56 \text{ rad/s} \quad \omega_a = 7,51 \text{ rad/s} \quad k_{eq} = 400 \text{ N/m}$$

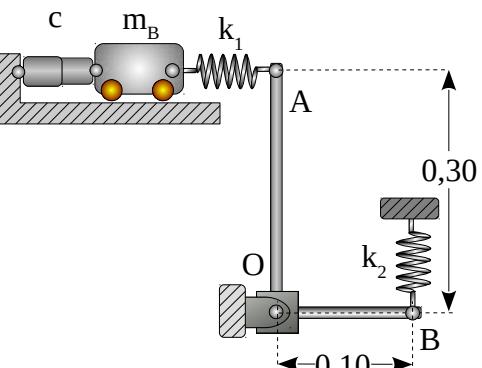
QUESTÃO 18

O sistema ilustrado é constituído pelos seguintes elementos:

1º) Bloco de massa $m_B = 7,0 \text{ kg}$; 2º) mola de rigidez $k_1 = 1500 \text{ N/m}$; 3º) mola de rigidez $k_2 = 1500 \text{ N/m}$; 4º) amortecedor com coeficiente da força viscosa $c = 125 \text{ N.s/m}$; 4º) barra AB leve (massa desprezível) com comprimento $L = 0,40 \text{ m}$.

O bloco apoiado em superfície lisa, encontra-se ligado ao amortecedor, e conecta-se à barra AB, através da mola de rigidez k_1 . A barra AB pode girar livremente em torno do eixo fixo que passa pelo ponto O, e conecta-se também à mola de rigidez k_2 .

Considerando-se **pequenas oscilações**, pedem-se:



- a) o diagrama de esforços;
 b) a equação diferencial do movimento;
 b) a pulsação ω_0 ;
 c) a rigidez equivalente do conjunto.

$$\ddot{x} + 17,86 \cdot \dot{x} + 21,43 \cdot x = 0 \quad \omega_0 = 4,63 \text{ rad/s} \quad k_{eq.} = 150 \text{ N/m}$$

QUESTÃO 19

O sistema ilustrado é constituído pelos seguintes elementos:

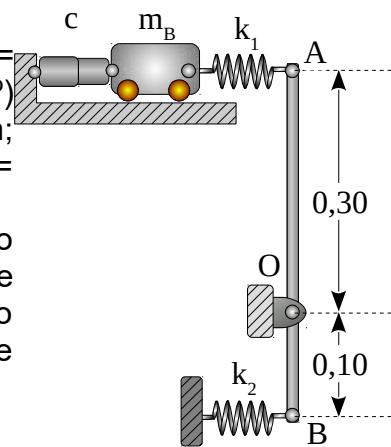
- 1º) bloco de massa $m_B = 7,0 \text{ kg}$; 2º) mola de rigidez $k_1 = 2000 \text{ N/m}$; 3º) mola de rigidez $k_2 = 2000 \text{ N/m}$; 4º) amortecedor com coeficiente da força viscosa $c = 125 \text{ N.s/m}$,
 4º) barra AB leve (massa desprezível) com comprimento $L = 0,40 \text{ m}$.

O bloco apoiado em superfície lisa, encontra-se ligado ao amortecedor, e conecta-se à barra AB, através da mola de rigidez k_1 . A barra AB pode girar livremente em torno do eixo fixo que passa pelo ponto O, e conecta-se também à mola de rigidez k_2 .

Considerando-se **pequenas oscilações**, pedem-se:

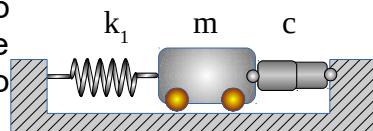
- a) o diagrama de esforços;
 b) a equação diferencial do movimento;
 b) a pulsação ω_0 ;
 c) a rigidez equivalente do conjunto.

$$\ddot{x} + \frac{200}{7} \cdot x + \frac{125}{7} \cdot \dot{x} = 0 \quad \omega_0 = 5,34 \text{ rad/s} \quad k_{eq.} = 200 \text{ N/m}$$



QUESTÃO 20

No sistema ilustrado o bloco de massa m desloca-se sob ação da mola com rigidez $k_1 = 2,0 \text{ kN/m}$ e do amortecedor de constante c. Sabendo-se que a equação diferencial do movimento é $\ddot{y} + 500 \cdot y + 5 \cdot \dot{y} = 0$, pedem-se:



- a) a massa m;
 b) a constante c do amortecedor;
 c) a pulsação do movimento amortecido.

$$m = 4,0 \text{ kg} \quad c = 20 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad \omega_a = 22,22 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$