Confiabilidad y algunas políticas de inventario para transformadores de instrumento

Alma Delia Maldonado Santiago

Directores: Dr. Enrique Villa Diharce.
Dr. Andrés Christen García.

Agosto 2013

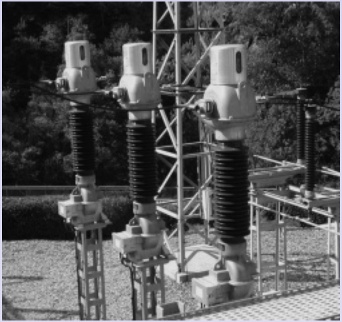
Definición del problema

En el 2006 los transformadores de instrumento en las subáreas de Coatzacoalcos y Temascal (Veracruz), observaron un número elevado de fallas

Se deseaba pronosticar el número de fallas por año

Transformadores de instrumento

- Los transformadores de instrumento ayudan a determinar los consumos de energía.
- Sirven de protección, al momento en que se origina una descarga.
- Cuando el transformador falla de manera catastrófica impide la medición del flujo de energia eléctrica.



Objetivos

1. Revisar la teoría Bayesiana necesaria para abordar el problema.
2. Proponer alguna estrategia óptima de inventario o almacenamiento, mediante una función de utilidad que permita minimizar los costos esperados.

Método Bayesiano para realizar inferencia

Método Bayesiano para realizar inferencia

- Conocimiento a priori acerca de θ expresado en términos de una función de densidad de probabilidad denotada por $f(\theta)$.
- La verosimilitud para los datos disponibles y un modelo especificado dado por $L(Datos|\theta)$.
- Utilizar la regla de Bayes:

$$\boxed{\text{Posterior} \propto \text{A priori} \times \text{Verosimilitud.}}$$

Datos

i	t_i	e_i	i	t_i	e_i	i	t_i	e_i	i	t_i	e_i
1	8	1	36	107	0	106	272	1	141	308	0
2	8	1	37	116	1	107	272	1	142	308	0
3	8	1	38	119	0	108	272	1	143	308	1
4	8	1	39	119	0	109	272	1	144	308	1
5	8	1	40	139	0	110	272	1	145	308	1
6	20	1	41	140	0	111	274	0	146	308	1
7	20	1	42	144	0	112	274	0	147	308	1
8	20	1	43	146	0	113	274	0	148	308	1
9	20	1	44	146	0	114	275	0	149	308	1
10	32	1	45	152	1	115	275	0	150	308	1
11	32	1	46	159	0	116	275	0	151	308	1
12	32	1	47	159	0	117	276	0	152	308	1
13	32	1	48	159	0	118	281	0	153	308	1
14	32	1	49	160	0	119	281	0	154	308	1
15	32	1	50	161	0	120	284	0	155	308	1
16	32	1	51	164	1	121	284	0	156	308	1
17	56	1	52	167	0	122	284	0	157	308	1
18	80	1	53	172	0	123	284	0	158	308	1
19	80	1	54	172	0	124	286	0	159	308	1
20	80	1	55	176	1	125	286	0	160	308	1
21	80	1	56	183	0	126	286	0	161	308	1
22	80	1	57	188	1	127	287	0	162	308	1
23	80	1	58	203	0	128	288	0	163	308	1
24	80	1	59	205	0	129	288	0	164	308	1
25	80	1	60	214	0	130	288	0	165	308	1
26	80	1	61	214	0	131	288	0	166	308	1

Verosimilitud

- Representación: $(\underline{t}, \underline{e}) = \{t_i, e_i\}_{i=1}^{n}$, donde

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \text{ es un dato censurado,} \\ 0 & \text{si } t_i \text{ es una observación completa.} \end{cases}$$

- Verosimilitud: $t_i \sim \text{Weibull}(\beta, \eta)$, luego

$$\begin{aligned} f(\underline{t}|\underline{e}, \beta, \eta) &= \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \\ &\quad \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\}. \end{aligned}$$

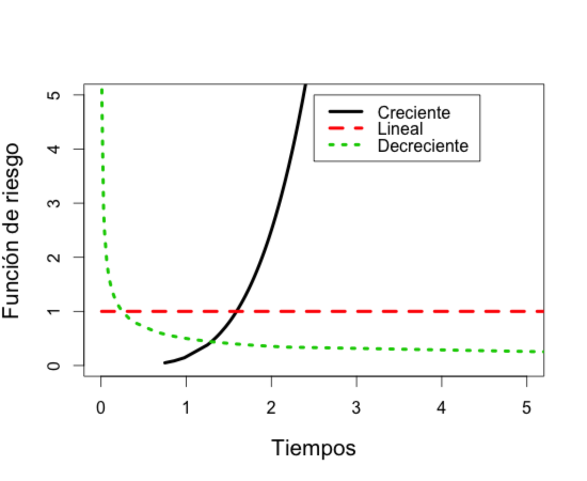
Modelos a Priori

- **Instrumentos de modelación:** $\beta \sim$Ga(a_1, b_1) y $\eta \sim$Ga(a_2, b_2)

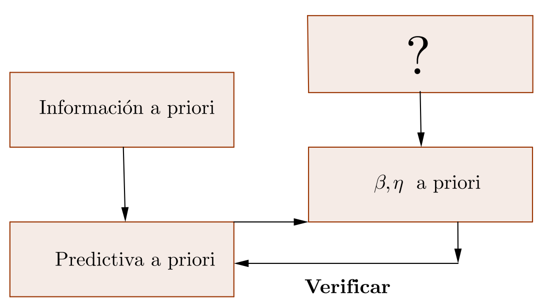
Es de interés establecer los parámetros para las a prioris, estos se fijarán con la ayuda de dos elementos:

- El comportamiento de la función de riesgo de los transformadores.
- La distribución predictiva a priori.

Funciones de riesgo para la distribución predictiva a priori



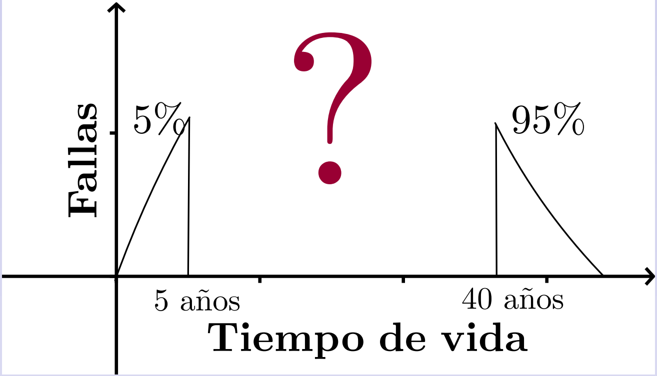
Determinación a priori



Distribución predictiva a priori

- Por experiencia podemos conocer ciertas carácterísticas del tiempo de vida de los transformadores y tener información de la distribución predictiva a priori.
- Suponiendo que el 5 % de los transformadores fallan en los primeros años (80 meses) y que el 95 % de ellos fallaron a los 40 años (480 meses) o antes.

Distribución predictiva a priori



Obtención distribución a priori.

- Si los tiempos de vida de los transformadores se representan por la variable aleatoria $T \sim$ Weibull (η^*, β^*).
- La información anterior de los cuantiles se representa de la siguiente manera:

$$P(T \leq 80) = 0.05$$

$$P(T \leq 480) = 0.95,$$

resolviendo el sistema: $\beta^* = 1.955$ y $\eta^* = 273.8$

- De manera general la función de densidad de una variable aleatoria Gamma con parámetros a y s es: $f(x) = \frac{1}{s^a\Gamma(a)} x^{a-1} \exp\{x/s\}$, su valor esperado es $E(X) = as$.
- Luego $\beta^* = 1.955 \approx E(\beta) = a_1 b_1$ lo que implica que $b_1 \approx \frac{1.955}{a_1}$, similarmente para η: $\eta^* = 1.955 \approx E(\eta) = a_2 b_2$ y $b_2 \approx \frac{273.8}{a_2}$.
- Para fijar a_1 y a_2, se proponen distintos valores para estos parámetros. Para cada valor se obtiene b_1 y b_2, con lo que se tiene establecida la distribución a priori. De ellas se elige la que modele razonablemente bien la información.

Se fijaron lo siguiente valores: $a_1 = 25$, $a_2 = 12$, $b_1 = 0.092$ y $b_2 = 2.2$.

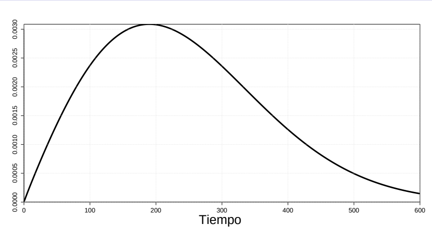


Figura: **Densidad predictiva a priori.**

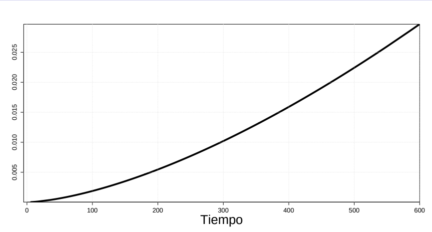


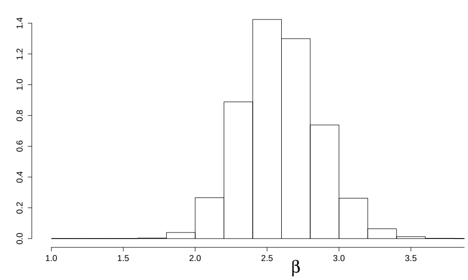
Figura: **Función de riesgo a priori.**

Distribución posterior

La distribución posterior esta dada por:

$$
\begin{aligned}
f(\beta,\eta) &= \text{Verosimilitud} \times \text{A priori} \\
&= \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \\
& \quad \frac{1}{b^a\Gamma(a)}\beta^{a-1}\exp\left\{-\frac{\beta}{b}\right\} \frac{1}{b_1^{a_1}\Gamma(a_1)}\eta^{a_1-1}\exp\left\{-\frac{\eta}{b_1}\right\}.
\end{aligned}
$$

Muestra de la distribución posterior



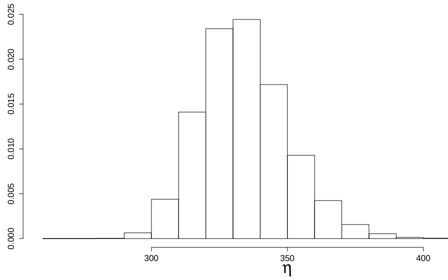


Figura: **Salida t-walk para** β.

Figura: **Salida t-walk para** η.

Políticas de inventario

- Los transformadores de instrumento son herramientas costosas y difíciles de transportar.
- Su abastecimiento resulta una tarea a optimizar, debido a los costos que pueden ser minimizados.
- Se busca desarrollar un plan de inventario para la optimización del número de trasformadores almacenados a un tiempo t.

Funcionamiento del almacén

- Sea n_0 el número de transformadores disponibles para reemplazar a los que fallan. Al momento en que falla un transformador, se hace el pedido para sustituirlo y se espera δ meses hasta que llega la orden.
- Interesa determinar el valor de n_0, que asegure que a lo largo del periodo de tiempo analizado $(0, t)$, el almacén tenga suficientes transformadores para cubrir las fallas a un costo mínimo.

Construcción del plan de almacenamiento

Planteamiento de políticas

A La primera política reflejará el costo de quedarnos sin transformadores disponibles en el almacén.

B La segunda política además de considerar el costo de la política A, adiciona el costo del lote inicial de transformadores en el almacén.

C Esta última política se centra en evaluar dos tipos de costos.

  1.- Costo de falta de transformadores por unidad de tiempo. Este costo también considerado en las políticas anteriores.

  2.- Costo de almacenamiento por cada unidad de tiempo.

Política A

Sean $\underline{T} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ los tiempos de falla de los transformadores y $\underline{\ell} = \{\ell_1 = t_1 + \delta, \ell_2 = t_2 + \delta, \cdots, \ell_n = t_n + \delta\}$, los tiempos de llegada de los transformadores pedidos.
Definamos $X(t; \underline{T})$ como el número de transformadores en el almacén que se usaron para cubrir los tiempos de fallas hasta el tiempo t y $Y(t; \underline{T})$ el número de transformadores que se pidieron y llegaron antes del tiempo t. Luego $X(0) = n_0$ y $Y(0) = 0$.

Sea $Z(t;\underline{T}) = X(t;\underline{T}) + Y(t,\underline{T})$.
La siguiente función restringue solo al área de interés

$$W(t;\underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t;\underline{T}) \geq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t;\underline{T}) < 0 \end{cases}$$

Una vez establecidas las funciones anteriores la función de utilidad esta dada por

$$L(t,\underline{T},\delta,n_0) = \int_0^t W(s,\underline{T})ds, \tag{1}$$

La **Utilidad Esperada** es

$$U(t, n_0, \delta) = E(L(t, \underline{T}, n_0, \delta)).$$

Por la ley de los grandes números, la manera de estimarla es mediante la expresión:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^{M} \int_0^t W(y, \underline{T}_s) dy, \qquad (2)$$

donde M es el número de $\underline{T}_s$ simulados.

Para calcular la expresión (??) por simulación se hace de la siguiente manera:

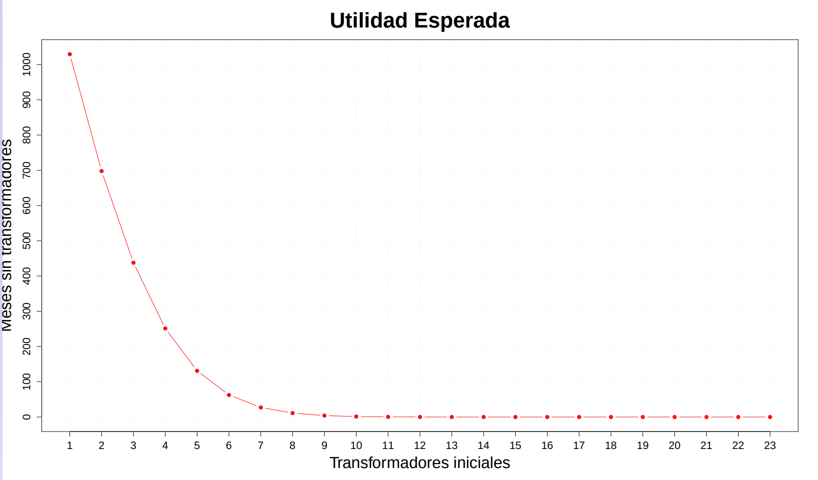
1. Se simulan M trayectorias de tiempos de vida, dicho en otras palabras M vectores del tipo $\underline{T}$.
2. Para cada trayectoria se calcula la Ecuación (??).
3. De los M valores obtenidos, se obtiene el promedio de ellos, que será la utilidad esperada.

De acuerdo a los pasos anteriores, se realizaron 1000 simulaciones para cada pareja

$$(\delta_i, n_{0_j})$$

donde $\delta_i = 6, 8$ y 12 meses, $n_{0_j} = 1, 2, \cdots, 24$ numero de transformadores al inicio de cada periodo de observación. Luego se obtuvo el promedio de las funciones de utilidad, calculadas en cada una de las 1000 simulaciones para cada pareja.

Utilidades esperadas con la política A, usando $t = 480$ y $\delta = 6$



Cuadro: **Política A: Valores de las utilidades esperadas con $\delta = 6$.**

n_0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Promedio	1029.433	697.822	437.725	251.263	131.085	62.514	27.148	11.136
n_0	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Promedio	4.003	1.343	0.446	0.167	0.028	0.040	0.000	0.000
n_0	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Promedio	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Política B

Costo 1:

El costo de no poder cobrar la electricidad durante un periodo de tiempo donde no había transformadores en reserva, considerado en la sección anterior.

Costo 2:

El costo de almacenamiento por unidad de tiempo.

Sea C el costo de no poder cobrar la electricidad en una unidad de tiempo. Luego el costo de almacenar un transformador por una unidad de tiempo, lo podemos expresar en términos de C como rC. Asumiendo que el **Costo 1** es mayor que el **Costo 2** entonces $r \in (0, 1)$.

La función de utilidad considerando el **costo 1** y el costo inicial de almacenamiento durante la primera unidad de tiempo es:

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = C \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r n_0 C \ ,$$

Suponiendo $C = 1$, es decir, una unidad de dinero. La utilidad se simplifica a:

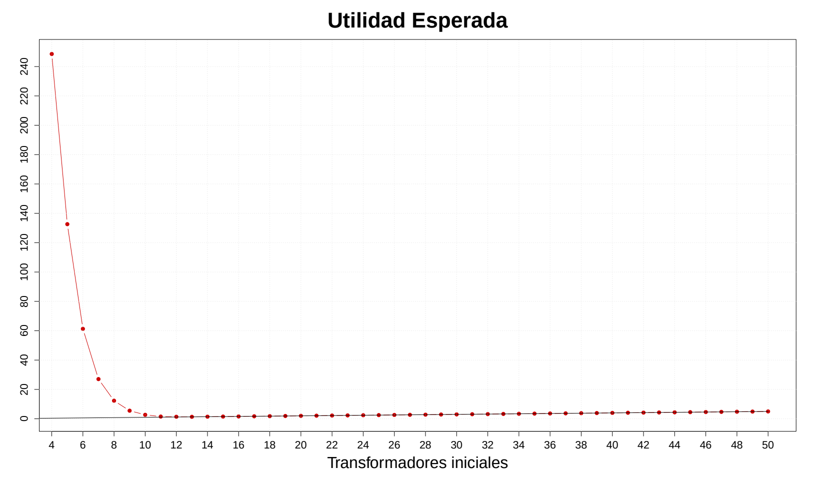
$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r n_0, \tag{3}$$

La utilidad esperada puede calcularse como:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^{M} \left(\int_0^t W(y, \underline{T}_s) dy + n_0 r \right)$$

Asignando valores a r, se puede observar la manera de comportarse de esta función de utilidad (??). La manera de estimar la pérdida esperada es por medio de simulaciones.

Utilidades esperadas usando la política B, con $\delta = 6$ y r=0.1



Cuadro: **Política B: Valores de las utilidades esperadas con $\delta = 6$, $r = 0.1$.**

n_0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Promedio	1026.86	701.26	441.20	248.58	132.61	61.29	27.04	12.30
n_0	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Promedio	5.50	2.71	1.50	1.39	1.34	1.43	1.50	1.60
n_0	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**23**
Promedio	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40

Política C

Esta última política considera los dos costos empleados en la Política B por unidad de tiempo. La función de utilidad, esta dada por la siguiente expresión.

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s, \underline{T})ds + r \int_0^t A(s, \underline{T})ds \tag{4}$$

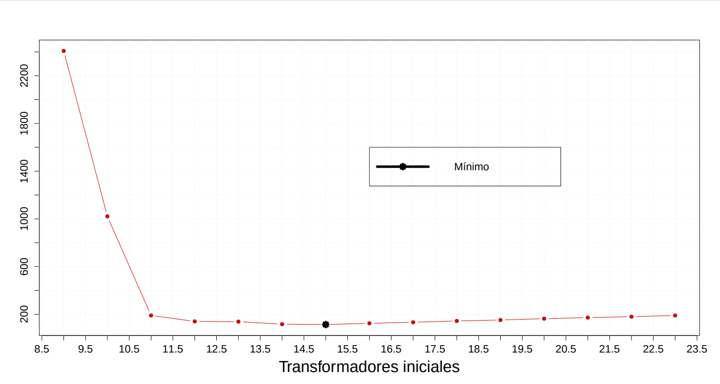
donde:

$$A(t, \underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t, \underline{T}) \leq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t, \underline{T}) > 0 \end{cases}$$

La función $A(t, \underline{T})$ refleja las pérdidas que existen por almacenar transformadores. La utilidad esperada se calcula como:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^{M} \left(\int_0^t W(s, \underline{T})ds + r \int_0^t A(s, \underline{T})ds \right). \tag{5}$$

Utilidades esperadas usando la política C con $\delta = 6$ y $r = 0.01$



Cuadro: **Política C. Valores de las utilidades esperadas con $\delta = 6$ y $r = 0.01$.**

n_0	1	2	3	4	5	6	7	8
Promedio	611687.9	413680.9	256825.8	150424.5	75977.0	37610.2	16419.3	6576.2
n_0	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Promedio	2408.7	1021.0	190.9	140.7	138.1	117.3	114.6	124.0
n_0	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Promedio	133.4	144.0	152.2	163.5	172.2	180.6	190.4	199.2

Conclusiones

Se han descrito 3 políticas de almacenamiento, que pretender crear entornos realistas, para determinar los valores óptimos que conduzcan a la minimización de costos. A continuación se muestran los resultados resumidos obtenidos.

Conclusiones

Cuadro: **Resultados de la política A.**

δ	n_0	costo
6	15	0.00
8	19	0.00
12	24	0.00

Cuadro: **Resultados de la política B.**

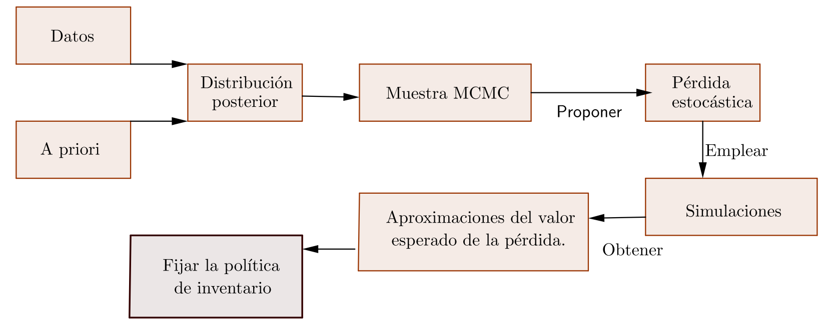
δ	n_0	costo	r
6	14	0.14	0.01
8	17	0.16	0.01
12	22	0.20	0.01
6	13	1.34	0.1
8	14	1.49	0.1
12	20	2.00	0.1
6	11	5.65	0.5
8	14	7.11	0.5
12	18	9.16	0.5

Cuadro: **Resultados de la política C.**

δ	n_0	costo	r
6	15	114	0.01
8	16	119	0.01
12	20	145	0.01
6	12	526	0.1
8	15	606	0.1
12	20	779	0.1
6	11	2209	0.5
8	14	2524	0.5
12	15	8836	0.5

- Una vez presentadas las funciones de utilidad planteadas y los resultados obtenidos. La pregunta de interés es ¿Cúal es la más adecuada?, la aplicación de cualquiera de ellas dependerá de las condiciones reales de problema.

El objetivo principal de este trabajo, fue proponer una política de inventario de transformadores de instrumento, empleando herramientas de estadística Bayesiana. El esquema muestra el panorama general utilizado.



Bibliografía

- Peter M. Lee. "**Bayesian Statistics an introduction**". Wiley series in Probability and Mathematical Statistic ,3 edición (2004).
- William Q. Meeker and Luis A. Escobar. "**Statistical Metohds for Reliability Data**". Wiley series in Probability and Mathematical Statistic (1998).
- Michael S. Hamada Alyson G. Wilson, C. Shane Reese Harry F. Martz "**Bayesian Reliability**". Springer-Science+Bisiness (2008).

GRACIAS