

# Confiabilidad Bayesiana en Transformadores de Instrumento

Alma Maldonado Santiago  
Andres Christen                  Enrique Villa

8 de enero de 2014

## Resumen

En el 2006 los transformadores de instrumento en las subáreas de Coatzacoalcos y Temascal (Veracruz), observaron un número inusualmente elevado de fallas, lo que condujo a la necesidad de estudiar la confiabilidad de los transformadores. Se deseaba pronosticar el número de fallas de sus equipos por año. En este trabajo se diseña una metodología para la construcción de un plan óptimo de almacenamiento de transformadores, esta construcción se realiza desde un enfoque bayesiano. Haciendo uso de una función de pérdida que será definida en un contexto, que permita minimizar los costos del almacén.

**Palabras claves:** Transformadores, confiabilidad, Estadística Bayesiana, Función de utilidad, t-walk, optimización, simulación.

## 1. Introducción

Los transformadores de instrumento son herramientas costosas y difíciles de transportar. La mayoría de las empresas que fabrican este tipo de transformadores lo hacen bajo pedido y se tardan un tiempo considerable en cumplirlo. Su abastecimiento resulta una tarea a optimizar, debido a los costos que pueden minimizarse, como transporte y el costo del almacenamiento mismo, cuando no se usaron los aparatos. Sin embargo esta optimización, debe ser tal que no permita que la empresa se quede sin transformadores puesto que esto implicaría un costo por no poder cobrar el servicio.

Los elementos disponibles dentro del estudio, es una base de datos de transformadores de instrumento de corriente en las subáreas de Coatzacoalcos y Temascal. Se disponen de sus tiempos de vida a lo largo de 26 años hasta el 2006, con datos censurados y no censurados.

Tabla 1: Tiempos de vida de transformadores de corriente,  $t_i$  (meses),  $e_i = 1$  indica un dato censurado,  $e_i = 0$  es un dato no censurado.

$i$	$t_i$	$t_i$	$i$	$t_i$	$e_i$	$i$	$t_i$	$e_i$	$i$	$t_i$	$e_i$
1	8	1	36	107	0	106	272	1	141	308	0
2	8	1	37	116	1	107	272	1	142	308	0
3	8	1	38	119	0	108	272	1	143	308	1
4	8	1	39	119	0	109	272	1	144	308	1
5	8	1	40	139	0	110	272	1	145	308	1
6	20	1	41	140	0	111	274	0	146	308	1
7	20	1	42	144	0	112	274	0	147	308	1
8	20	1	43	146	0	113	274	0	148	308	1
9	20	1	44	146	0	114	275	0	149	308	1
10	32	1	45	152	1	115	275	0	150	308	1
11	32	1	46	159	0	116	275	0	151	308	1
12	32	1	47	159	0	117	276	0	152	308	1
13	32	1	48	159	0	118	281	0	153	308	1
14	32	1	49	160	0	119	281	0	154	308	1
15	32	1	50	161	0	120	284	0	155	308	1
16	32	1	51	164	1	121	284	0	156	308	1
17	56	1	52	167	0	122	284	0	157	308	1
18	80	1	53	172	0	123	284	0	158	308	1
19	80	1	54	172	0	124	286	0	159	308	1
20	80	1	55	176	1	125	286	0	160	308	1
21	80	1	56	183	0	126	286	0	161	308	1
22	80	1	57	188	1	127	287	0	162	308	1
23	80	1	58	203	0	128	288	0	163	308	1
24	80	1	59	205	0	129	288	0	164	308	1
25	80	1	60	214	0	130	288	0	165	308	1
26	80	1	61	214	0	131	288	0	166	308	1
27	80	1	62	215	0	132	296	1	167	308	1
28	80	1	63	216	0	133	296	1	168	308	1
29	80	1	64	216	0	134	296	1	169	308	1
30	80	1	65	216	0	135	296	1	170	308	1
31	80	1	66	218	0	136	298	0	171	308	1
32	80	1	67	218	0	137	299	0	172	308	1
33	94	0	68	218	0	138	300	0	173	308	1
34	94	0	69	225	0	139	308	0			
35	94	0	70	225	0	140	308	0			

Los datos se muestran en la Tabla 1, representados de la siguiente manera,  $(\underline{t}, \underline{e}) = \{t_i, e_i\}_{i=1}^n$ , donde  $e_i = 1$  indica que el transformador  $i$  aun siguió en operación al final de 2006, lo que implica que es un dato censurado por la derecha. Mientras que  $e_i = 0$ , se refiere a un valor no censurado. De estudios anteriores realizados por el CIMAT, los tiempos de vida son modelados adecuadamente por medio de una distribución Weibull. La función de Verosimilitud bajo este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$f(\underline{t}|\underline{e}, \beta, \eta) = \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\}. \quad (1)$$

Para iniciar la inferencia de los datos disponibles, necesitamos proponer una distribución a priori que refleje el conocimiento que se tiene acerca del fenómeno a modelar. Elegimos como modelo para los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  distribuciones gammas, con la siguiente notación:

$$\beta \sim Ga(a_1, b_1) \quad (2)$$

y

$$\eta \sim Ga(a_2, b_2). \quad (3)$$

Cabe mencionar que la elección de una distribución a priori específica, solo se debe de interpretar como un medio o instrumento que nos ayudará a modelar la información disponible.

Es de interés ahora establecer los parámetros para las a prioris, estos se fijarán con la ayuda de dos elementos:

- La distribución predictiva a priori.
- El comportamiento de la función de riesgo de los transformadores.

Primero hablaremos acerca de la función de riesgo. Esta función describe el desgaste de los transformadores a lo largo del tiempo. Al empezar su funcionamiento, el riesgo a fallar es pequeño y conforme pasa el tiempo, debido al uso, el ambiente y otros factores, el riesgo aumenta paulatinamente..

Por lo tanto la distribución a priori propuesta debe tener una función de riesgo creciente, esto es el parámetro  $\beta$  tiene que ser mayor que 1.

El siguiente paso, es observar el comportamiento de la distribución predictiva a priori. Al momento de asignar una distribución de probabilidad a los parámetros  $(\beta, \eta)$ , estos no tienen interpretación cuantificable por experiencias. No es posible conocer explícitamente sus valores por observaciones previas, solo tenemos conocimiento del fenómeno en general. Si se sabe la manera a priori del comportamiento del tiempo de vida de los transformadores entonces se tiene conocimiento de la distribución predictiva a priori. Esta distribución esta dada por:

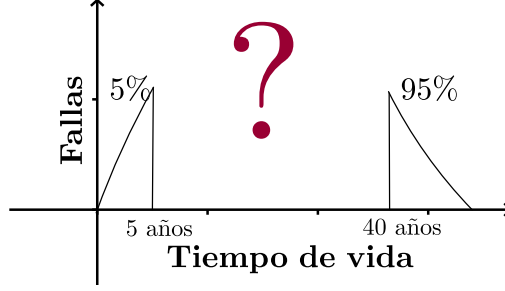


Figura 1: Distribución predictiva a priori a modelar.

$$f(t) = \int_{\beta, \eta} f(t|\beta, \eta) f(\beta, \eta) d\beta d\eta,$$

donde  $f(\beta, \eta)$  es la distribución conjunta a priori de  $\beta$  y  $\eta$ . Por experiencia podemos conocer ciertas características del tiempo de vida de los transformadores y tener información previa de  $f(t)$ . Esta información determina un rango de valores para  $\beta$  y  $\eta$ . La manera más común de establecer la distribución a priori predictiva es empleando dos cuantiles.

Suponiendo que el 5% de los transformadores fallan en los primeros 5 años (80 meses) y que el 95% de ellos ya fallaron a los 40 años (480 meses) o antes, y si además

$$T \sim \text{Weibull}(\eta^*, \beta^*)$$

es la variable aleatoria a priori que modela el tiempo de vida de los transformadores. La Figura 1 muestra la distribución a priori predictiva, con los cuantiles fijados en los extremos. Sin embargo el centro de la distribución debe ser modelada.

La información de los cuantiles se representa por:

$$P(T \leq 80) = 0.05$$

y

$$P(T \leq 480) = 0.95.$$

Con esta información es posible conocer  $\eta^*$  y  $\beta^*$  de la siguiente forma, se sabe que para una variable aleatoria Weibull

$$P(T \leq t) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\}$$

Por lo tanto debemos resolver

$$\begin{aligned} 0.05 &= 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta^*} \right)^{\beta^*} \right\} \\ 0.95 &= 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta^*} \right)^{\beta^*} \right\} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a que

$$\begin{aligned} \beta^* &= 1.955 \\ \eta^* &= 273.8 \end{aligned}$$

Los parámetros encontrados describen el comportamiento a priori del tiempo de vida, no de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ . Con ayuda de estos datos se pueden obtener los parámetros  $a_1, b_1, a_2$  y  $b_2$ , que como lo mencionamos son los parámetros, para las distribuciones Gammas de  $\beta$  y  $\eta$  respectivamente, notando lo siguiente:

- 1.- Como  $\beta^* = 1.955$ , quiere decir que los valores que produzca la distribución Gamma con parámetros  $a_1$  y  $b_1$  oscilaran alrededor de estos valores. Similarmente como  $\eta^* = 273.8$  significa que los valores que tome la distribución  $Ga(a_2, b_2)$  estarán alrededor de 273.8 aproximadamente.
- 2.- De manera general la función de densidad de una variable aleatoria Gamma con parámetros  $a$  y  $s$ , representada como  $Ga(a, s)$  es

$$f(x) = \frac{1}{s^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp \left\{ -\frac{x}{s} \right\}$$

y su valor esperado esta dado por:

$$E(X) = as.$$

Del hecho de que  $\beta \sim \text{Gamma}(a_1, b_1)$  y juntando las dos aseveraciones anteriores se tiene que:  $\beta^* = 1.955 \approx E(\beta) = a_1 b_1$ , así

$$b_1 = \frac{1.955}{a_1}.$$

De manera similar para  $\eta \sim \text{Gamma}(a_2, b_2)$  se obtiene

$\eta^* = 273.8 \approx E(\eta) = a_2 b_2$ , de donde

$$b_2 = \frac{273.8}{a_2}.$$

Tanto  $b_1$  como  $b_2$  quedan expresadas en función de  $a_1$  y  $a_2$ , que son los parámetros de forma para  $\beta$  y  $\eta$  respectivamente.

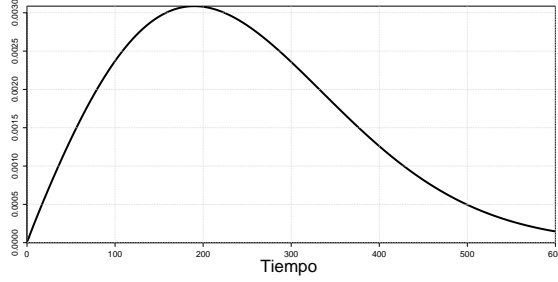


Figura 2: **Función de densidad a priori.**

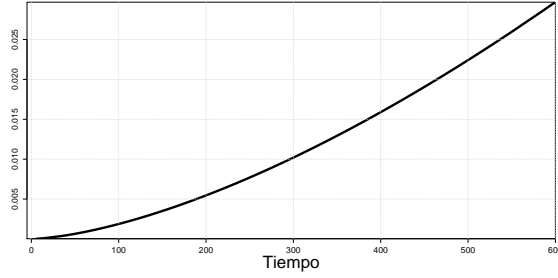


Figura 3: **Función de riesgo a priori.**

Para fijar  $a_1$  y  $a_2$ , se proponen distintos valores para estos parámetros. Para cada uno de los valores propuestos se obtienen sus respectivas  $b_1$  y  $b_2$ , con lo que queda de manera explícita establecidas las distribuciones a priori. Una vez teniendo estas a prioris se produce la distribución predictiva a priori y la función de riesgo. Luego se evalúa que tan cerca se encuentra la a priori predictiva de la información que se esta modelando, para finalmente elegir  $a_1$  y  $a_2$  que ajusten de manera razonable la información a priori.

Realizando el procedimiento anterior se fijaron los siguiente valores  $a_1 = 25$ ,  $b_1 = 0.092$ ,  $a_2 = 12$  y  $b_2 = 2.2$ . La Figura 2 muestra la densidad predictiva a priori con los valores establecidos, y la Figura 3 muestra la función de riesgo, se ha modelado de manera creciente.

## 2. Distribución Posterior

Recordando que  $T$  es la variable aleatoria que representa los tiempo de vida de los transformadores, su función de verosimilitud esta dada por (1) y las distribuciones (2), (3). La distribución posterior es

$$\begin{aligned} f(\beta, \eta|T) &\propto \text{Verosimilitud} \times \text{A priori} \\ &= f(T|\beta, \eta)f(\beta, \eta) \end{aligned}$$

Suponiendo que existe independencia a priori, entre los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  se tiene:

$$\begin{aligned}
f(\beta, \eta|T) &= f(T|\beta, \eta)f(\beta, \eta) \\
&= f(T|\beta, \eta)f(\beta)f(\eta) \\
&= \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \\
&\quad \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \beta^{a-1} \exp\left\{-\frac{\beta}{b}\right\} \frac{1}{b_1^{a_1} \Gamma(a_1)} \eta^{a_1-1} \exp\left\{-\frac{\eta}{b_1}\right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

La Ecuación (4) muestra que la distribución posterior de los parámetros, es una expresión compleja y no fácil de evaluar. En tales situaciones se recurre a la ayuda de métodos computacionalmente intensivos que permiten simular una muestra de la distribución posterior, tales como algoritmos MCMC, que son ampliamente utilizados en estas situaciones.

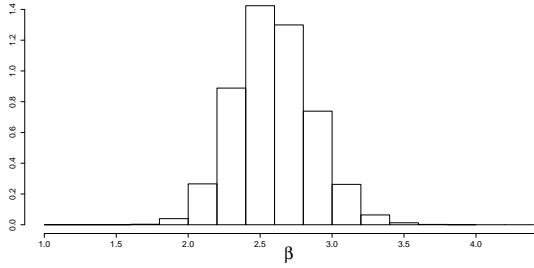


Figura 4: Salida t-walk para  $\beta$ .

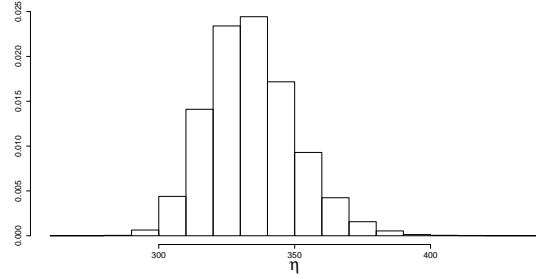


Figura 5: Salida t-walk para  $\eta$ .

Para conocer la muestra de la distribución posterior se uso el lenguaje de programación R, y la función t-walk que permite obtener tal muestra [5]. Con la función t-walk se realizaron 900,000 iteraciones para obtener la muestra deseada (4). Los resultados están resumidos en las Figuras 4 y 5 que indican los valores en los que se concentran  $\beta$  y  $\eta$ .

Las Figuras 6 y 7, muestran el análisis de convergencia obtenido empleando la función t-walk. Observamos que la convergencia se da en un número de iteraciones relativamente pequeño.

Con la muestra se obtiene la función de confiabilidad y la función de riesgo que se presentan en las Figuras 8 y 9 respectivamente. La confiabilidad decae lentamente. Se espera que a los 200 meses la probabilidad de que un transformador no falle es de 0.8. En la Tabla 2 se muestran las probabilidades de la función de confiabilidad, de los transformadores que seguían operando después del 2006.

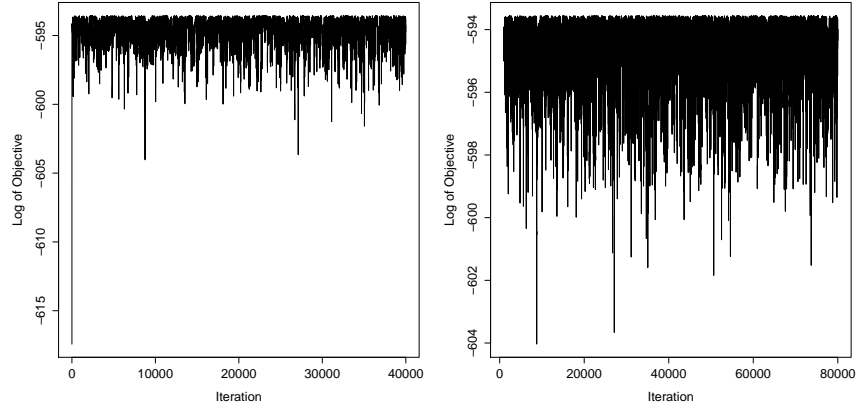


Figura 6: Dentro de t-Walk, se suele emplear, la función logaritmo de la distribución objetivo para evaluar la convergencia del método. La gráfica muestra el comportamiento de esta función.

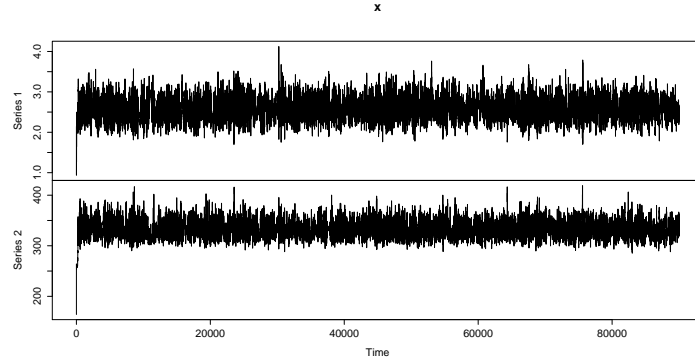


Figura 7: Series de convergencia de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ , proporcionados por la función t-Walk. La serie 1 corresponde a  $\beta$  y la serie 2 a  $\eta$ .

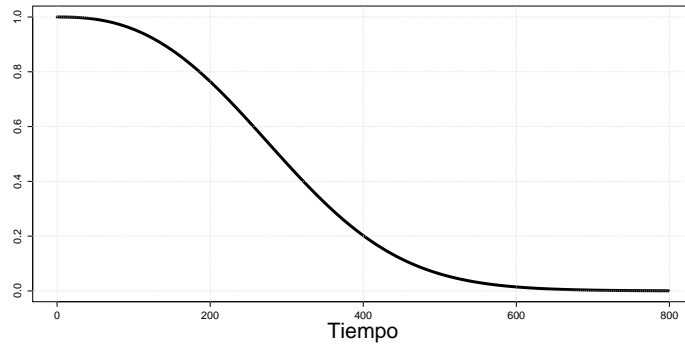


Figura 8: Confiabilidad posterior obtenida.



Tabla 2: Confiabilidad de los transformadores que seguían funcionando después del 2006.

Meses de trabajo	8	20	32	56	80	116
Confiabilidad	0.99	0.99	0.99	0.98	0.97	0.93
Meses de trabajo	152	164	176	188	272	296
Confiabilidad	0.87	0.85	0.82	0.79	0.55	0.47

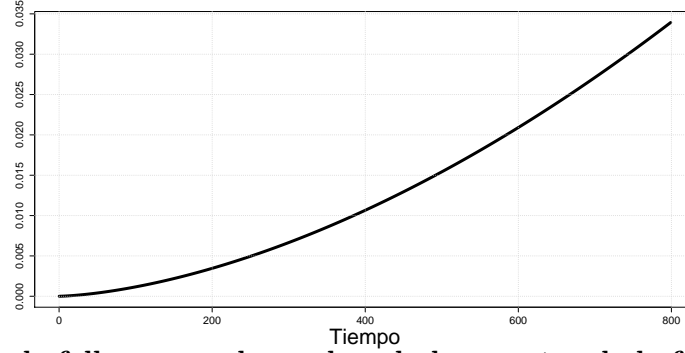


Figura 9: Tasa de falla mensual, empleando la muestra de la función t-Walk.

### 3. Almacenamiento de Transformadores

Sea  $n_0$  el número inicial de transformadores disponibles para reemplazar a los que fallan. Supongamos que al momento en que falla un transformador, se hace el pedido para sustituirlo y se espera un periodo de  $\delta$  meses hasta que llega la orden. Mientras tanto este se reemplazará por uno de los  $n_0$  disponibles, si es que todavía quedan en el almacén. Interesa determinar el valor de  $n_0$ , que asegure que a lo largo del periodo de tiempo analizado  $(0, t)$ , el almacén tenga los suficientes transformadores para cubrir las fallas a un costo mínimo.

La Figura 10 es un diagrama general de las etapas para determinar la propuesta de inventario óptima, empleando la muestra de la distribución posterior y algunos costos que posteriormente estableceremos.

El procedimiento para determinar el valor óptimo de  $n_0$ , se basa en el cálculo de la función de pérdida esperada. Para esto simulamos tiempos de vida  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . El tiempo  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  provendrá de una distribución Weibull con parámetros  $(\beta_i, \eta_i)$  de la muestra que ya se obtuvo de la distribución posterior. La Tabla 3 contiene un conjunto de realizaciones  $(\beta, \eta)$  de la distribución posterior y el  $t_i$  correspondiente,

- $t_1 = 274$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.228,347.37).
- $t_2 = 542$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.386,358.77).

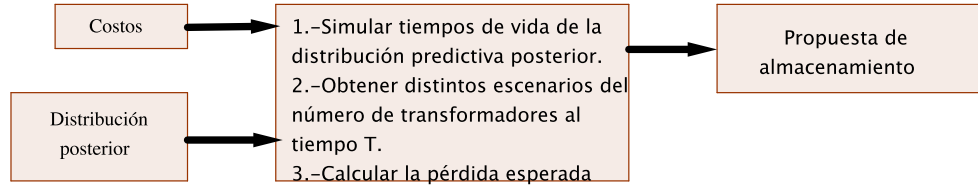


Figura 10: **Contrucción del Plan de Almacenamiento.**

Tabla 3: **Muestra MCMC.**

$i$	$\beta$	$\eta$	$t_i$
1	2.228	347.37	274
2	2.386	358.77	542
3	3.534	350.55	305
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	2.456	340.51	180

- $t_3 = 30.5$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(3.534,350.55).
- $\vdots$
- $t_n = 180$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.456,340.51).

Los tiempos de vida simulados pueden ser considerados como una muestra, que resulta de una mezcla de distribuciones Weibull. Se puede demostrar que estos tiempos de vida provienen de la distribución posterior predictiva de  $t$ .

Una vez establecidos los tiempos de falla de los transformadores. El número de transformadores en el almacén hasta el tiempo  $t$ , dependerá del número de fallas que ocurran durante el periodo de observación  $(0, t)$ , de  $\delta$  y del número de transformadores que fijemos como iniciales  $n_0$ , es decir, es una función:

$$n(t, n_0, \delta).$$

Para observar el comportamiento de  $n(t, n_0, \delta)$  por simulación, se consideran tiempos de falla similares a los de la Tabla 3. Se asume que al momento en que falla un transformador se solicita y llega  $\delta$  meses después. Como solo se pide un transformador cuando alguno ha fallado, siempre tendremos en el almacén a lo más  $n_0$  transformadores. De manera más clara la forma de operar de  $n(t, n_0, \delta)$ , el número de transformadores disponibles en el almacén en el intervalo de tiempo de  $(0, t)$  es la siguiente: Al inicio del periodo  $n(0, n_0, \delta) = n_0$ , una vez que se llega a un tiempo de falla  $t_1$  el valor de  $n(t_1, n_0, \delta)$  será  $n_0 - 1$  disminuye en uno y este se recuperará  $\delta$  meses después. Si se llega a otro tiempo de falla antes de que llegue la orden entonces  $n(\cdot)$  disminuirá en uno nuevamente, si ocurre lo contrario se recuperará al menos en una unidad.

Necesitamos establecer una función de pérdida, a partir de los escenarios simulados, que permita saber la cantidad inicial adecuada de transformadores que deben tenerse en el almacén.

## 4. Funciones de Pérdida

Se proponen tres posibles políticas de inventario y posteriormente se describen sus funciones de pérdida. Se considera una política de inventario, al planteamiento de una función de pérdida que refleje los costos de mayor interés para la empresa.

### Política A

La primera política reflejará el costo de quedarnos sin transformadores disponibles en el almacén. Estará enfocada a determinar el  $n_0$  adecuado, tal que no permita que dentro del periodo de observación, el almacén se quede sin transformadores para cubrir todas sus demandas.

### Política B

La segunda política además de considerar el costo de la política A, adiciona el costo del lote inicial de transformadores en el almacén.

### Política C

Esta última política se centra en evaluar dos tipos de costos.

- 1.- Costo de falta de transformadores por unidad de tiempo. Este costo también considerado en las políticas anteriores.
- 2.- Costo de almacenamiento por cada unidad de tiempo.

#### 4.1. Política A

Supongamos que se tiene una trayectoria como la de la Figura 11, hasta un tiempo de 10 meses y con 1 transformador inicial de reserva. Supongamos además que al tiempo 3 falla un transformador, luego  $n(3) = 0$ . Después de un tiempo falla otro y no tenemos repuesto, entonces el número de transformadores en reserva es negativo ( $n(4) = -1$ ). La pérdida asociada a partir de este tiempo, es el número de meses que permanece en esta situación (1 mes), multiplicada por un valor de  $c$  unidades monetarias, que representa el costo de no poder cobrar la electricidad, por cada mes que no se tuvo un transformador de instrumento. Si se observa hasta  $t = 10$  entonces habría que sumar las pérdidas que representan el segundo bloque, que empieza en el tiempo  $t = 6$ . Del bloque de  $t = 6$  a  $t = 7$  la pérdida involucra solamente a un transformador. Sin embargo en el intervalo de tiempo de  $[7, 9]$  meses la pérdida es más grande, puesto que faltan dos transformadores para sustituir. La pérdida será los dos transformadores faltantes multiplicada por la longitud de tiempo que dure este hecho, (2 meses) por el valor de  $c$ . Por lo tanto la pérdida total es:

$$c[1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1]$$

Lo que significa que la pérdida es la suma de las áreas delimitadas por debajo de cero, multiplicada por  $c$ , donde  $c$  se tiene que establecer con información adicional. Sin perder generalidad se puede suponer  $c = 1$ .

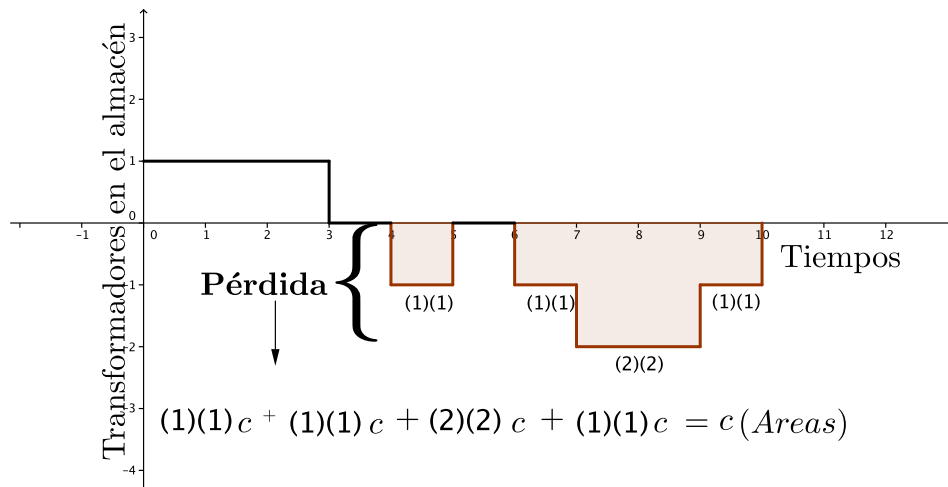


Figura 11: Almacenamiento de transformadores, hasta 10 unidades de tiempo, mostrando la pérdida sobre ese período.

De manera general, podemos construir la función de pérdida asociada a la política

A, como se describe a continuación.

Sean  $\underline{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  los tiempos de falla de los transformadores y  $\underline{\ell} = \{\ell_1 = t_1 + \delta, \ell_2 = t_2 + \delta, \dots, \ell_n = t_n + \delta\}$ , los tiempos de llegada de los transformadores pedidos.

Definamos  $X(t; \underline{T})$  como el número de transformadores en el almacén que se usaron para cubrir los tiempos de fallas hasta el tiempo  $t$  y  $Y(t; \underline{T})$  el número de transformadores que se pidieron y llegaron antes del tiempo  $t$ . Luego  $X(0) = n_0$  y  $Y(0) = 0$ .

Sea  $Z(t, \underline{T}) = X(t; \underline{T}) + Y(t; \underline{T})$ , indica el comportamiento de la función  $n(t, n_0, \delta)$ . Interesa conocer las veces en la cual esta permanece por debajo de cero.

La siguiente función restringue solo al área de interés

$$W(t; \underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t; \underline{T}) \geq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t; \underline{T}) < 0 \end{cases}$$

Una vez establecidas las funciones anteriores la función de pérdida esta dada por

$$L(t, \underline{T}; \delta, n_0) = \int_0^t W(s; \underline{T}) ds, \quad (5)$$

dicho en palabras la pérdida esta representada por la integral sobre el periodo de observación, de las veces en las cuales el almacén se quedo sin transformadores disponibles para su uso.

## 4.2. Pérdida Esperada

La función de pérdida dada por la Ecuación (5), depende de  $n_0, \delta$  que son valores constantes y de  $\underline{T}$  que es una variable aleatoria, por lo tanto la función de pérdida es una función estocástica, en el sentido de que depende de una variable aleatoria. Entonces la pérdida esperada también es una función estocástica, y esta dada por:

$$U(t, n_0, \delta) = E(L(t, \underline{T}, n_0, \delta)). \quad (6)$$

Por la ley de los grandes números, la manera de estimar la Ecuación (6), es mediante la expresión:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \int_0^t W(y, \underline{T}_s) dy, \quad (7)$$

donde  $M$  es el número de  $\underline{T}_s$  simulados. Para calcular la expresión (7) por simulación se hace de la siguiente manera:

- I. Se simulan  $M$  trayectorias de tiempos de vida, dicho en otras palabras  $M$  vectores del tipo  $\underline{T}$ .

II. Para cada trayectoria se calcula la Ecuación (5).

III. De los  $M$  valores obtenidos, se obtiene el promedio de ellos, que será la pérdida esperada.

De acuerdo a los pasos anteriores, se realizaron 1000 simulaciones para cada pareja

$$(\delta_i, n_{0_j})$$

donde  $\delta_i = 6, 8$  y 12 meses,  $n_{0_j} = 1, 2, \dots, 24$  que representa el número de transformadores al inicio del periodo. Luego se obtuvo el promedio de las funciones de pérdida, calculadas en cada una de las 1000 simulaciones para cada pareja, se consideró un tiempo de observación de 40 años (480 meses).

La Figura 12 muestra la gráfica de las pérdidas esperadas para  $\delta = 6, 8, 12$  meses. Observamos que para valores de  $n_0$  pequeños, las perdidas esperadas son grandes. A medida que  $n_0$  crece, los promedios disminuyen. Al considerarse tiempos de espera más largos, los costos también se incrementan, las mayores pérdidas se tienen cuando  $\delta = 12$ , para este periodo de espera se necesitan al menos 24 transformadores al inicio del periodo de observación (Tabla 6). Para  $\delta = 8$  se requieren 15 transformadores (Tabla 5) y para  $\delta = 6$  se necesitan 15 transformadores en el almacén (Tabla 4).

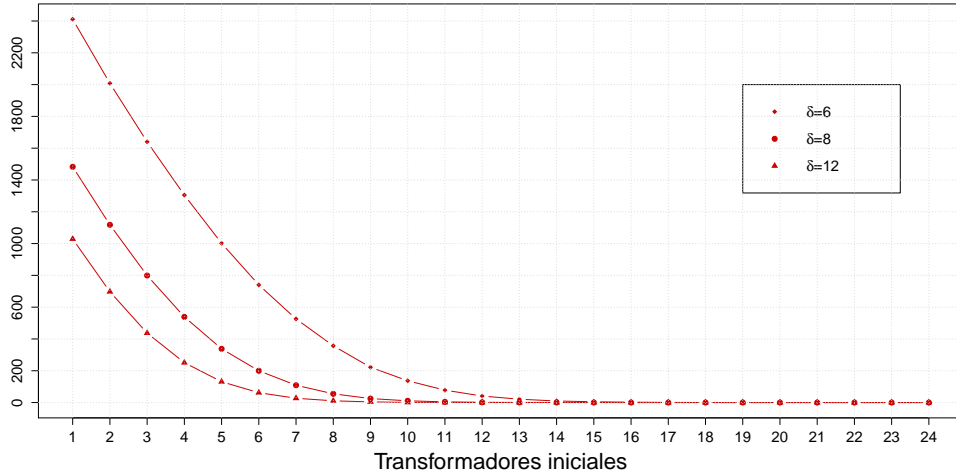


Figura 12: Pérdidas Esperadas con la Política A, usando  $t = 480$ ,  $\delta = 6, 8, 12$  y Diferentes Valores de  $n_0$ .

Tabla 4: **Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$ .**

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1029.433	697.822	437.725	251.263	131.085	62.514	27.148	11.136
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	4.003	1.343	0.446	0.167	0.028	0.040	0.000	0.000
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla 5: **Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 8$ .**

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1483.721	1118.711	799.610	539.082	338.785	200.591	109.192	55.774
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	25.935	11.184	4.376	1.637	0.733	0.219	0.081	0.032
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.004	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00

Tabla 6: **Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 12$ .**

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	2411.0	2008.7	1640.9	1305.0	1002.0	740.5	526.5	357.3
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	222.7	137.1	78.0	41.8	21.1	9.8	4.8	2.3
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.9	0.34	0.09	0.03	0.01	0.02	0.003	0.00

Cabe destacar que los valores considerando de  $\delta$ 's y  $t = 480$  meses, se utilizaron para ilustrar la metodología sugerida, puesto que no se tiene acceso a los valores reales. Sin embargo con la metodología propuesta, cualesquiera que fueran los valores reales, los cálculos anteriores pueden realizarse.

### 4.3. Política B

Dentro de esta sección se emplea la política B, para establecer la función de pérdida utilizando los siguientes costos:

#### Costo 1:

El costo de no poder cobrar la electricidad durante un periodo de tiempo donde no había transformadores en reserva, considerado en la sección

anterior.

**Costo 2:**

El costo de almacenamiento por unidad e de tiempo.

Sea  $C$  el costo de no poder cobrar la electricidad en una unidad de tiempo. Luego el costo de almacenar un transformador por una unidad de tiempo, lo podemos expresar en términos de  $C$  como  $rC$ . Asumiendo que el **Costo 1** es mayor que el **Costo 2** entonces  $r \in (0, 1)$ .

La función de pérdida considerando el **costo 1** y el costo inicial de almacenamiento durante la primera unidad de tiempo es:

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = C \int_0^t W(s; \underline{T}) ds + rn_0C ,$$

Suponiendo  $C = 1$ , es decir, una unidad de dinero. La pérdida se simplifica a:

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s; \underline{T}) ds + rn_0, \quad (8)$$

La pérdida esperada puede calcularse como:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left( \int_0^t W(y; \underline{T}_s) dy + n_0 r \right)$$

donde  $M$  es el número de  $\underline{T}$ 's simulados. Es decir, a la pérdida planteada en la sección anterior se le suma la recta  $rn_0$ , como función de  $n_0$ . Esta recta representa los costos de almacenamiento de los transformadores iniciales.

Asignando valores a  $r$ , se puede observar la manera de comportarse de esta función de pérdida (8) y los valores de  $n_0$ 's que esta función proporcione. La manera de estimar la pérdida esperada es por medio de simulaciones (como se describe en la política A). A continuación se muestran los resultados.

En la Figura 13 observamos las pérdidas esperadas suponiendo distintos números de transformadores iniciales, y  $r = 0.1$ , la recta mostrada corresponde a  $n_0 r$ . A partir de cierto punto la pérdida esperada esta sobre la misma linea que la recta, esto indica que a partir del primer punto en el cual se da este parecido, la pérdida esperada se ve afectada por los costo de almacenamiento.

En la Tabla 7 mostramos los valores graficados de la Figura 13. De  $n_0 = 1$  hasta 13, la pérdida esperada decrece, a partir de  $n_0 = 13$  la pérdida empieza a crecer lentamente. Por lo que el  $n_0$  óptimo para  $\delta = 6$  meses y  $r = 0.1$  es 13 transformadores. Un comportamiento similar se observa en el resto de las Figuras mostradas (14 y 15).

Para un periodo de reemplazo  $\delta=8$  meses, los resultados de la pérdida esperada se ven en la Figura 14 y los valores graficados en la Tabla 8. A partir de  $n_0 = 14$  la pérdida esperada empieza a crecer.



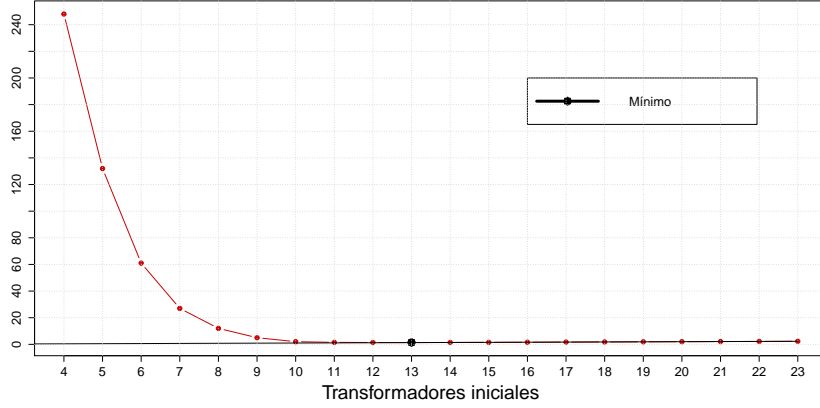


Figura 13: Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 6$  y  $r=0.1$

Tabla 7: Política B: Valores de las Pérdida Esperadas con  $\delta = 6$ ,  $r = 0.1$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
Promedio	1026.86	701.26	441.20	248.58	132.61	61.29	27.04	12.30
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
Promedio	5.50	2.71	1.50	1.39	1.34	1.43	1.50	1.60
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	23
Promedio	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40

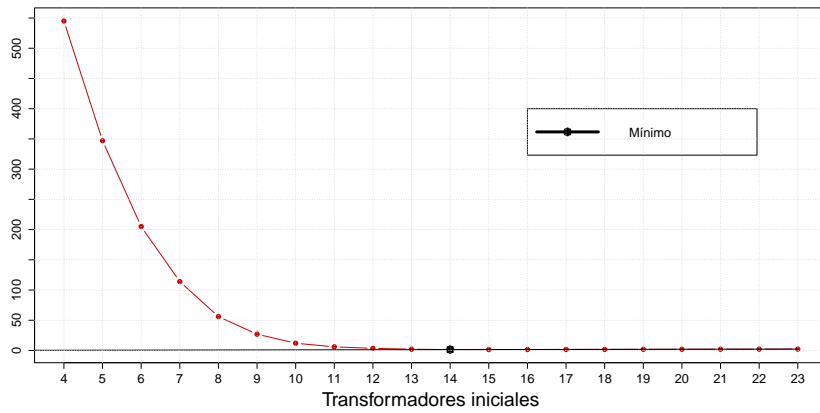


Figura 14: Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 8$  y  $r=0.1$

En la Figura 15 se muestra la grafica de la pérdida esperada con  $r = 0.5$ . De la Tabla 9 se deduce que el número de transformadores iniciales, adecuados en el almacén es  $n_0 = 11$ .

Tabla 8: **Política B: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 8$ ,  $r = 0.1$ .**

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1485.90	1127.06	798.25	545.79	347.76	205.38	114.38	56.49
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	27.63	12.22	6.74	3.51	2.11	1.49	1.52	1.61
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	1.72	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40

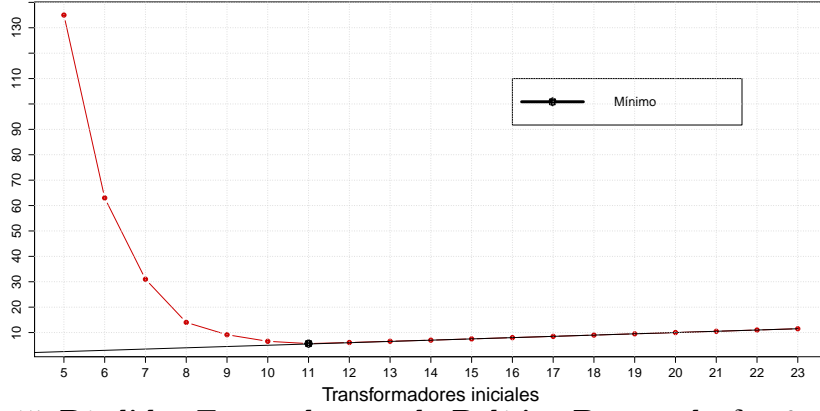


Figura 15: **Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 6$  y  $r=0.5$**

#### 4.4. Política C

Esta última política considera los dos costos empleados en la Política B por unidad de tiempo. La función de pérdida, esta dada por la siguiente expresión.

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r \int_0^t A(s, \underline{T}) ds \quad (9)$$

donde:

$$A(t, \underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t, \underline{T}) \leq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t, \underline{T}) > 0 \end{cases}$$

La función  $A(t, \underline{T})$  refleja las pérdidas que existen por almacenar transformadores. Para este caso la pérdida esperada se calcula como:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left( \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r \int_0^t A(s, \underline{T}) ds \right). \quad (10)$$

Para evaluar la Ecuación (10) procedemos de la misma manera que en las políticas anteriores. A continuación se mostraran algunas gráficas (Figuras 16 y 17) y Tablas (10 y 11) de los resultados.

Tabla 9: Política B. Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$ ,  $r = 0.5$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1030.57	699.97	432.87	249.35	135.35	65.35	31.56	14.56
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	9.15	6.56	5.65	6.08	6.57	7.00	7.50	8.00
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	8.50	9.00	9.50	10.0	10.50	11.00	11.50	12.00

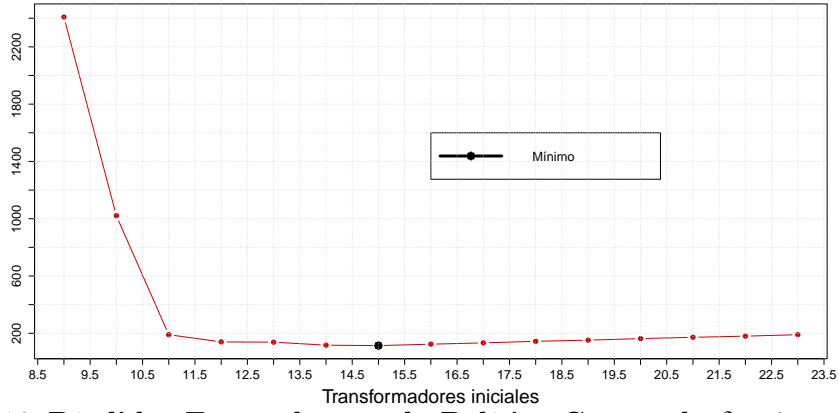


Figura 16: Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 6$  y  $r = 0.01$

Tabla 10: Política C. Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$  y  $r = 0.01$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	611687.9	413680.9	256825.8	150424.5	75977.0	37610.2	16419.3	6576.2
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	2408.7	1021.0	190.9	140.7	138.1	117.3	114.6	124.0
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	133.4	144.0	152.2	163.5	172.2	180.6	190.4	199.2

Las gráficas presentadas tienen un comportamiento similar, a las que previamente ya habíamos obtenido. La tendencia es bajar para los primeros valores de  $n_0$  y posteriormente subir. La diferencia más significativa radica en el hecho de que los costos, a los cuales se minimiza  $n_0$  son mucho mayores que en las anteriores funciones de pérdida. Este hecho se debe a que dentro de esta última política se consideran costos de almacenamiento por cada unidad de tiempo.

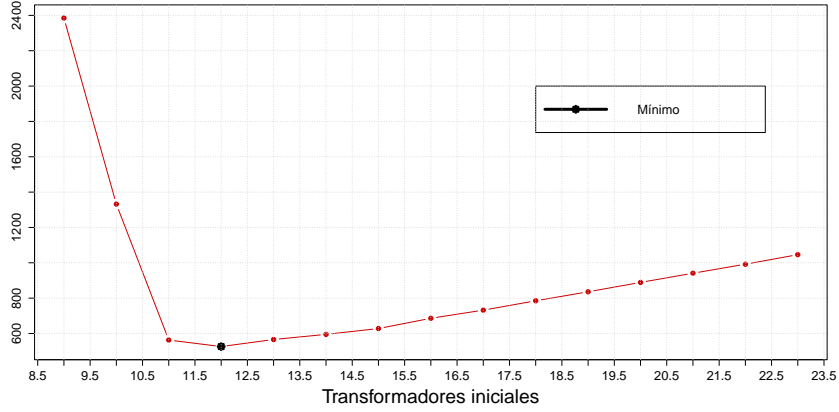


Figura 17: Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 6$  y  $r = 0.1$ .

Tabla 11: Política C: Valores de la Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$  y  $r = 0.1$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
Promedio	606757	417457	258881	151181	78446	38066	15675	6799
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
Promedio	2385	1332	563	526	566	576	628	686
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
Promedio	732	785	836	889	941	992	1046	1098

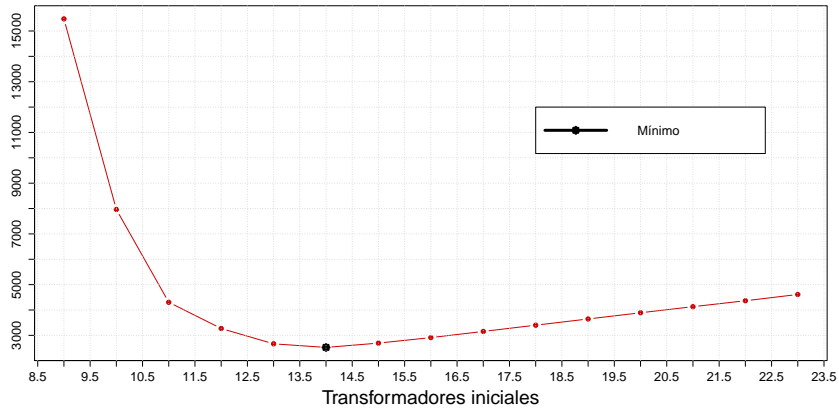


Figura 18: Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 8$ ,  $r = 0.5$ .

## 5. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se han obtenido valores para el número de transformadores iniciales que se deben de tener en el inventario. La Tablas 12, 13 y 14,

resumen los valores obtenidos y mencionados en las secciones anteriores.

Tabla 12: **Resultados de la Política A.**

$\delta$	$n_0$	costo
6	15	0.00
8	19	0.00
12	24	0.00

En la Tabla 12 se muestran los valores óptimos de transformadores iniciales que deben tenerse en el almacén, para un periodo de tiempo de 40 años con diferentes valores de  $\delta$ , bajo la política A. Es normal observar que entre mayor sea el periodo de espera de un transformador solicitado, mayor será el número de transformadores requeridos para el almacenamiento. Los costos asociados son cero, indica que a partir de la cantidad  $n_0$  de transformadores, no habrá pérdidas en cuanto a la falta de ellos. Las conclusiones anteriores corresponden solo al considerarse un costo. Para ambos costos, los resultados se muestran en la Tabla 13, para diferentes valores de  $r$  y usando la política B.

Tabla 13: **Resultados de la Política B.**

$\delta$	$n_0$	costo	$r$
6	14	0.14	0.01
8	17	0.16	0.01
12	22	0.20	0.01
6	13	1.34	0.1
8	14	1.49	0.1
12	20	2.00	0.1
6	11	5.65	0.5
8	14	7.11	0.5
12	18	9.16	0.5

De la Tabla 13 notamos que al añadir costos de almacenamiento inicial, los costos para  $n_0$  obtenidos no se minimizan a cero.

Cuando  $r = 0.01$ , indica que si el costo de no tener un transformador disponible es  $c$ , entonces el costo por tener un transformador almacenado y no usarlo es  $rc = \frac{1}{100}c$ . El quedarse sin un transformador es 100 veces más caro que almacenar un transformador y no usarlo. Para un periodo de espera  $\delta = 8$  meses se obtiene que  $n_0 = 17$  y el costo asociado es 0.16. El valor de  $n_0$  es menor que el

obtenido en la Tabla 12, pero el costo es mayor. Esto se debe a que la función de pérdida dada por la Ecuación (8), involucra costos de almacenamiento, entonces la pérdida esperada buscará tener la mínima cantidad de transformadores al costo más pequeño posible. Los resultados obtenidos para  $r = 0.01$  no son tan significativamente variante de los mostrados en la Tabla 12, ya que la proporción  $r$ , es pequeña. Las diferencias notorias son para valores de  $r$  mayores.

Al tener  $r = 0.1$ , indica que el quedarnos sin transformadores en 10 veces más costoso que tener almacenados transformadores. Los costos a los cuales se minimiza la pérdida esperada oscilan de 1 a 2 unidades de  $c$  y los valores de  $n_0$  son menores o iguales al considerar solo la política A. Un efecto similar ocurre al considerar  $r = 0.5$ .

A medida que  $r$  crece, el valor de  $n_0$  se hace pequeño y el costo aumenta. Entre mayor sea el costo de almacenamiento, se buscará tener menos transformadores.

Finalmente para la política C, los costos aumentan significativamente respecto a la política A y B. Ahora se consideran costos por unidad de tiempo, tanto de falta de ellos como de almacenamiento. Así que se busca no tener transformadores en el almacén pero tampoco necesitarlos, razón por la cual, los costos de optimización para esta política son altos y los valores de  $n_0$  asociados son menores a los de las políticas anteriores.

Tabla 14: **Resultados de la Política C.**

$\delta$	$n_0$	costo	$r$
6	15	114	0.01
8	16	119	0.01
12	20	145	0.01
6	12	526	0.1
8	15	606	0.1
12	20	779	0.1
6	11	2209	0.5
8	14	2524	0.5
12	15	8836	0.5

Una vez presentadas las funciones de pérdida planteadas y los resultados obtenidos. La pregunta de mayor interés es ¿Cuál es la más adecuada?. La aplicación de cualquiera de ellas dependerá de las condiciones reales del problema, determinadas por la empresa. Por ejemplo, si dentro la empresa, el principal costo a minimizar es el de no poder cobrar la electricidad, en el tiempo que no se tenga un transformador de reemplazo, entonces aplicaríamos la propuesta A. Si por otra

parte la empresa determina que además de considerar el costo de no tener transformadores disponibles, le interesa minimizar el costo de almacenamiento  $n_0$ , al inicio de su periodo de observación, más el costo de no tenerlos. Y justifica que a lo largo del tiempo el adquirir solo un transformador a la vez no le afecta de manera significativa, pero que el adquirir más de uno, si representa gastos importantes, entonces sería adecuado considerar política B. Finalmente si para la empresa los costo de almacenar y de no tener transformadores en reserva afectan de manera importante, emplearíamos la última función de pérdida propuesta. La aplicación de las políticas estará ligada esencialmente a las necesidades de la empresa que se dedica a emplear como instrumentos de trabajo este tipo de transformadores.

A lo largo de este capítulo hemos planteado una manera de proponer una función, que cuantifique la perdida esperada por la falta de transformadores en el almacén. Existen distintas formas de plantear el remplazamiento de los transformadores, inclusive otras funciones de pérdida podrían ser exploradas. Sin embargo dentro del desarrollo de este trabajo se propuso una posible solución y se presentaron los resultados.

## Referencias

- [1] Peter M. Lee. “**Bayesian Statistics an introduction**”. A member of the Hodder Headline Group LONDON (2004).
- [2] William Q. Meeker and Luis A. Escobar. “**Statistical Methods for Reliability Data**”. Wiley series in Probability and Mathematical Statistics (1998).
- [3] Michael S. Hamada Alyson G. Wilson, C. Shane Reese Harry F. Martz “**Bayesian Reliability**”. Springer-Science+Business (2008).
- [4] Ming-Hui Chen, Qi-Man Shao and Joseph G. Ibrahim. “**Monte Carlo Methods in Bayesian Computation**”. Springer-Verlag (2000).
- [5] R Development Core Team(2010). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-070, URL <http://www.R-project.org>.