

# Dedicatoria

---

A mis padres  
Pedro Virgilio y Maria Teresa.  
Por su apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida.

# Agradecimientos

---

Mi más sincero agradecimiento es para el Dr Enrique Villa Diharce y Dr. Andrés Christen García por haber compartido conmigo parte de su amplio conocimiento en la realización de esta tesis.

A mis padres Pedro Virgilio Maldonado Martínez y Maria Teresa Santiago Ruiz les agradezco sus consejos, su guía, su confianza en la realización de mis sueños y sobre todo su apoyo incondicional en todo momento.

A los buenos amigos que conocí en esta etapa de mi vida, con quienes compartí grandes momentos y que son ahora parte de mi vida. En especial a Bryan Yaset Agüero Cruz por sus consejos, cariño y apoyo incondicional brindados durante mi estancia en Guanajuato.

Agradezco al CONACYT por el apoyo recibido en la realización de mis estudios de maestría, al CIMAT, A. C. por la gran oportunidad que representó en mi desarrollo profesional.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>3</b>
1.1. Definición del problema . . . . .	3
1.2. Justificación . . . . .	4
1.3. Transformadores de Instrumento . . . . .	4
<b>2. Conceptos Básicos</b>	<b>7</b>
2.1. Distribución Weibull . . . . .	9
2.2. Introducción al uso de Métodos Bayesianos . . . . .	12
2.3. Inferencia Bayesiana . . . . .	14
2.3.1. Método de Simulación . . . . .	18
2.3.2. Estimación Bayesiana . . . . .	20
<b>3. Transformadores y Estadística Bayesiana</b>	<b>22</b>
3.1. Distribución Apriori . . . . .	22
3.2. Distribución Posterior . . . . .	28
<b>4. Pérdida Esperada</b>	<b>33</b>
4.1. Almacenamiento de Transformadores . . . . .	34
4.2. Funciones de Pérdida . . . . .	38
4.2.1. Política A . . . . .	39
4.2.2. Política B . . . . .	45
4.2.3. Política C . . . . .	48
4.3. Conclusiones . . . . .	50
<b>5. Conclusiones Generales y Estudios Futuros</b>	<b>54</b>
5.1. Trabajo a futuro . . . . .	55

# Introducción

La estadística Bayesiana es hoy en día ampliamente usada, en parte debido a la flexibilidad de incluir información conocida previamente. En los últimos años el estudio de confiabilidad dentro del ámbito industrial ha tomado gran importancia, al describir los tiempos de vida y evaluar el desgaste de sus instrumentos de trabajo utilizados. En el presente trabajo se conjugan estas dos áreas, para proponer un plan de inventario óptimo de los transformadores de instrumento empleados en las subestaciones de Veracruz, empleando una función de utilidad. A continuación se da un panorama general del contenido de este trabajo.

Para introducir al lector en el contexto de interés, en el capítulo 1 se proporciona la descripción del problema, junto con los objetivos generales del trabajo.

En el capítulo 2, se comentan los principales resultados utilizados en la teoría de confiabilidad. Se da una breve introducción al uso de métodos Bayesianos y la manera de realizar inferencia y estimación. Los principales métodos computacionales empleados para la obtención de la distribución posterior, son explicados de manera general dentro de este capítulo.

En el capítulo 3, se verá la manera de analizar los datos de transformadores de instrumento dentro de un enfoque Bayesiano. Empezando con la propuesta de la distribución a priori de los tiempos de vida y la manera detallada de establecerse, para continuar con encontrar la distribución posterior. Debido a que esta última resultó ser una expresión compleja, se recurrió al empleo de métodos computacionalmente intensivos, para la obtención de una muestra de la distribución posterior. Posteriormente las funciones de confiabilidad y riesgo son ilustradas empleando esta muestra.

Al inicio del capítulo 4, se hace un breve resumen de la información relevante del capítulo 3, que ayudará al establecimiento de la función de utilidad. Primero se describe la construcción de distintas funciones de utilidad, junto con sus utilidades esperadas y se detalla la manera de obtener aproximaciones para estas funciones. Al final del capítulo se describen las conclusiones y comparaciones entre las distintas utilidades esperadas.

Posteriormente el capítulo 5, contiene conclusiones generales y trabajos a futuro. Fi-

nalmente se aportan los códigos en R, empleados para realizar las simulaciones y la distribución a priori.

# Capítulo 1

## Objetivos

### 1.1. Definición del problema

En el 2006 los transformadores de instrumento en las subáreas de Coatzacoalcos y Temascal (Veracruz), observaron un número inusualmente elevado de fallas, lo que condujo a la necesidad de estudiar la confiabilidad de los transformadores. Se deseaba pronosticar el número de fallas de sus equipos por año. En el estudio realizado por el CIMAT, se hizo un análisis de los datos disponibles, empezando por un análisis exploratorio. Posteriormente realizaron distintas comparaciones por tipo, estatus y marca de los transformadores, para finalmente centrarse en el estudio de los transformadores con más fallas, que resultaron ser los transformadores de corriente.

Al realizar el análisis de confiabilidad se obtuvo que la distribución que mejor ajustaba a los datos es una distribución Weibull. Bajo esta distribución se estimaron los parámetros, algunos cuantiles de interés e intervalos de confianza usando la aproximación normal. Además se analizó el estado de las unidades que sobrevivieron a un tiempo determinado, mediante la función de riesgo y la confiabilidad condicional, con la finalidad de pronosticar las tasas de falla de los transformadores.

El interés de este trabajo radica en realizar un análisis de confiabilidad desde el enfoque Bayesiano, hacer estimaciones de las funciones de confiabilidad y describir la tasa de desgaste de las unidades. Esto conducirá a proponer una política adecuada que minimice los costos de almacenamiento de los equipos, mediante una función de utilidad, para pronosticar el número de transformadores requeridos en el almacén hasta un tiempo específico.

## 1.2. Justificación

Actualmente una de las mayores necesidades de una empresa o negocio, es el empleo óptimo de sus herramientas de trabajo. Una falla en sus instrumentos implica pérdidas en mayor o menor medida. Así el implementar políticas óptimas y planes estratégicos de sus herramientas de uso, ha significado una parte crucial en el desempeño de su trabajo.

Por lo tanto, el generar un plan de inventario para los transformadores resultará de gran importancia. Dado que los transformadores de instrumento son costosos, resultará útil estimar su tiempo de vida.

La presente investigación se justifica desde dos puntos de vista:

- Desde el punto de vista práctico, se desea proponer al problema planteado una estrategia de acción, empleando funciones de utilidad que permitan minimizar los costos esperados.
- Desde el punto de vista teórico, esta investigación generará reflexión y discusión sobre el conocimiento existente, en cuanto a la forma de comportarse de los transformadores.

Dentro del desarrollo de esta tesina se hará lo siguiente:

- I. Revisar la teoría Bayesiana necesaria para abordar el problema.
- II. Proponer alguna estrategia óptima de inventario o almacenamiento, mediante una función de utilidad que permita minimizar los costos esperados.

A continuación mencionaremos que son los transformadores de instrumento, y en que radica la importancia en desarrollar un plan óptimo de inventario.

## 1.3. Transformadores de Instrumento

Un transformador eléctrico utiliza las propiedades físicas de la inducción electromagnética y es capaz de elevar o disminuir la tensión eléctrica, transformar la frecuencia, equilibrar o desequilibrar circuitos eléctricos, según la necesidad y caso específico.

El primer transformador fue construido por Michael Faraday, compuesto por dos bobinas enrolladas una encima de la otra. Al variar la corriente que circulaba en una de ellas, cerrando o abriendo el interruptor, el flujo magnético a través de la otra bobina variaba, y se inducía una corriente eléctrica.

A partir de entonces se han creado diferentes tipos de transformadores cada vez más

sofisticados, pero empleando el mismo principio de inducción. En particular en esta tesina se utilizarán un tipo especial de transformadores, llamados transformadores de instrumento.

Los transformadores de instrumento (TI) tienen la tarea de convertir grandes valores de corriente y voltaje a valores pequeños que son fácilmente aplicables, para los propósitos de medición y protección. Su misión es evitar la presencia de elevadas tensiones en aquellos dispositivos que van a estar al alcance de las personas. Estos transformadores pueden ser de dos tipos:

- Transformador de potencial (TP): Cuya función es transformar o cambiar el voltaje, comúnmente se enfocan en reducir el voltaje.
- Transformador de corriente (TC): Su función consiste en transformar o cambiar la corriente.

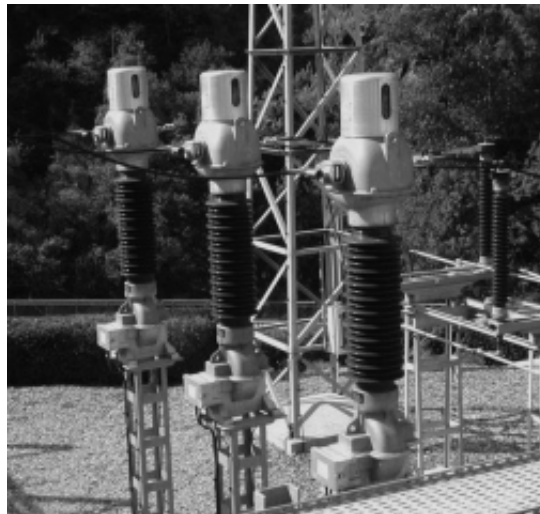


Figura 1.1: Transformadores de medición.

Los transformadores resultan de suma importancia en la generación y distribución de la energía eléctrica. Su interés principal radica en los siguientes puntos:

- Los transformadores de instrumento (Figura 1.1), ayudan a determinar los consumos de energía, formando parte del sistema de medición de energía eléctrica para las redes de alta tensión y con ellos realizar los montos de los cobros. En la parte superior del transformador se conecta la red eléctrica. Mientras que en la parte inferior se colocan los elementos de medición, en esta parte la tensión eléctrica es mucho más reducida que en la superior.



- Sirven de protección, al momento en que se origina una descarga. El sistema designado para protección desactiva los interruptores, con lo que evita que se generen daños de mayor magnitud en la red.
- Cuando el transformador falla de manera catastrófica impide la medición del flujo de energía eléctrica.

La falta de alguno de ellos implica pérdidas económicas para la empresa que proveer el servicio de energía . Sin embargo el tener demasiados en almacén implica pérdidas también. Lo ideal es encontrar una cantidad adecuada de transformadores, de tal forma que los costo sean mínimos, esto es debemos optimizar el inventario.

## Capítulo 2

# Conceptos Básicos

En estadística industrial el área de confiabilidad es una rama ampliamente utilizada. Su origen se remonta a la década de los años 40, en aplicaciones militares durante la segunda guerra mundial. Fue empleada para estudiar el funcionamiento de equipos electrónicos y mecánicos por periodos largos de tiempo. A partir de entonces esta rama se ha empleado dentro de empresas y negocios para la evaluación de la confiabilidad de sus componentes.

Día con día la competencia entre productos y servicios proporcionados por empresas hacen que estas se preocupen por la durabilidad de sus productos, pero al mismo tiempo la optimización de sus costos. En un estudio de confiabilidad se pueden evaluar y cuantificar estos aspectos.

Desde el surgimiento de la rama de confiabilidad se han propuesto distintas definiciones, a continuación mencionaremos dos de ellas:

- La confiabilidad es la probabilidad de que una unidad realice su función hasta un tiempo específico bajo las condiciones de uso encontradas.[2]
- La confiabilidad se refiere al funcionamiento adecuado de equipos y sistemas en el cual influye factores como software, hardware, humanos y ambientales, es decir, la probabilidad que algo funcione exitosamente bajo condiciones específicas como función del tiempo.[4]

Existen muchas otras expectativas de lo que debería ser confiabilidad, pero todas ellas enfatizan, a que confiabilidad se refiere, a la calidad que tiene un sistema a través del tiempo, e involucra elementos que conllevan al mejoramiento, pronóstico y mantenimiento del sistema, es decir, que funcione de manera correcta durante el tiempo que sea usado y bajo las condiciones para las cuales fue creado.

El principal análisis en confiabilidad se centra en periodos para los cuales el componente funciona, lo que comúnmente son llamados tiempos de vida o tiempos a la falla.

Por ejemplo, supongamos que se desea hallar la confiabilidad de maquinas de cocer que laboran 8 horas al día. Se observan  $n$  maquinas de cocer durante un periodo de tiempo y se registran los tiempos en que fallaron o dejaron de funcionar, es decir, los tiempos de vida o tiempos a la falla. Supongamos además que de las  $n$  maquinas solo  $k$  maquinas fallaron y  $n - k$  no fallaron, al finalizar el periodo de observación. Esta información es proporcionada para realizar un estudio de confiabilidad. Un punto importante a recalcar es que debido a que siempre se tienen limitantes de tiempo al momento de observar el funcionamiento de componentes, es muy común trabajar con datos censurados. En este contexto un dato censurado será aquella observación que nos da información parcial de las ocurrencias de las fallas. Existen tres tipos principales de censura:

- Censura por la derecha: Se fija un tiempo de observación y las unidades que no fallaron son llamados censuras por la derecha.
- Censura por la izquierda: Ocurre cuando al inspeccionar las unidades después de un periodo de tiempo se encuentra que algunas ya fallaron, pero no se sabe el momento de su ocurrencia.
- Censura por intervalo: Cuando se inspecciona en intervalos de tiempo y se observan fallas en cierto intervalo pero no se conoce exactamente en que momento ocurrieron.

Teniendo claro que los tiempos de vida son los datos registrados del tiempo de funcionamiento de un componente, es común preguntarse la manera en que se modelan estos tiempos. Los tiempos de vida son observaciones aleatorias que varían a través del tiempo, por lo tanto son modelados por variables aleatorias. Dentro del análisis de confiabilidad la función principal que se usa para estudiar los tiempos de vida es la función de confiabilidad.

Si  $T$  una variable aleatoria entonces la función de confiabilidad o supervivencia esta dada por:

$$C(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \quad (2.1)$$

Donde  $F$  es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria  $T$ . La ecuación (2.1) calcula la probabilidad de que una unidad sobreviva despues de un tiempo  $t$ . La función que analiza la tasa de falla instantánea o la manera en la cual un componente se degrada es la función de riesgo.

Supongamos que estamos interesados en la probabilidad de que un componente que ha trabajado hasta un tiempo  $t$ , falle en un intervalo  $[t, t + \Delta t]$ , es decir,

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{C(t)}$$

Si deseamos conocer su tasa de falla, entonces tendremos que dividir entre la longitud del intervalo y hacerlo tender a cero, es decir,

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{C(t)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{C(t)} \\ &= \frac{f(t)}{C(t)} \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de riesgo esta dada por:

$$h(t) = \frac{f(t)}{C(t)}.$$

Es importante ahora mencionar que dentro de la teoría de confiabilidad existe una serie de distribuciones que comúnmente se usan para modelar los tiempos de vida de los componentes. Las distribuciones más comunes son la distribución Exponencial, distribución Weibull, distribución Lognormal, distribución Logística, distribución Gamma y distribución Gaussiana Inversa. La descripción de ellas puede verse en [11]. Sin embargo en el desarrollo de esta tesina será de interés considerar la distribución Weibull como veremos en capítulos posteriores.

## 2.1. Distribución Weibull

La distribución de probabilidad Weibull fue propuesta por Waloddi Weibull en 1951, para describir la fatiga de materiales. Hasta nuestros días es una distribución muy común dentro del estudio de tiempos de vida.

Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución Weibull, denotada como  $X \sim \text{Weibull}(\eta, \beta)$ , si su función de densidad esta dada por:

$$f(t; \eta; \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \right\}$$

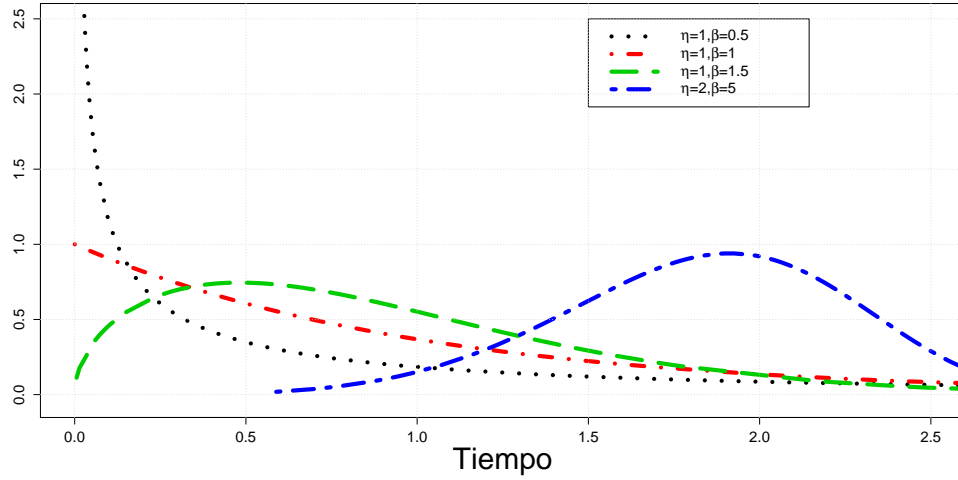


Figura 2.1: Comportamiento de la densidad Weibull.

donde  $t > 0, \beta > 0$  y  $\eta > 0$ .

Entonces

- Su función de distribución esta dada por:

$$F(t; \eta; \beta) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\}$$

- Su función de confiabilidad es:

$$C(t; \eta; \beta) = \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\}$$

- Su función de riesgo es:

$$h(t; \eta; \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

En las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 podemos ver distintas formas de la distribución Weibull en cuanto a su densidad, distribución acumulada, confiabilidad y función de riesgo. Donde  $\eta$  representa el parámetro de escala y  $\beta$  el de forma. A  $\eta$  también se le llama vida característica, ya que coincide con el cuantil  $t_{.63}$ , el cual se encuentra

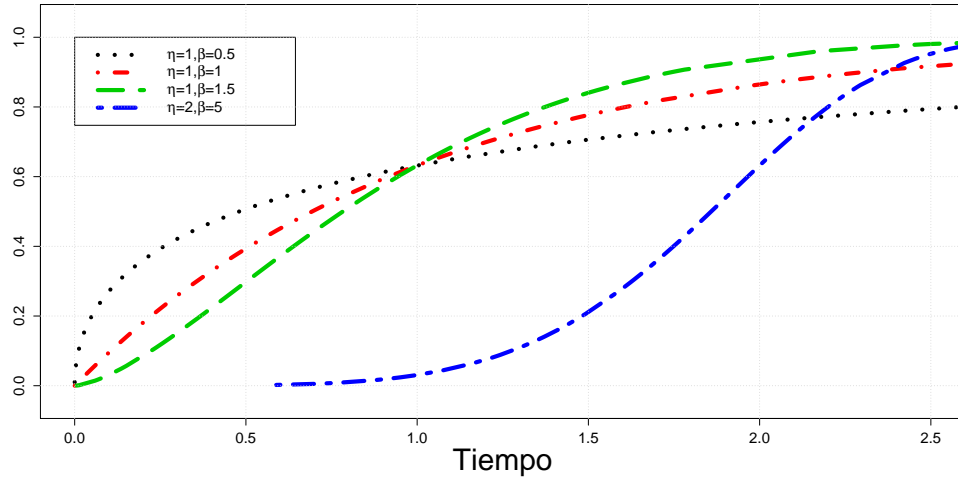


Figura 2.2: Comportamiento de la función de distribución acumulada Weibull

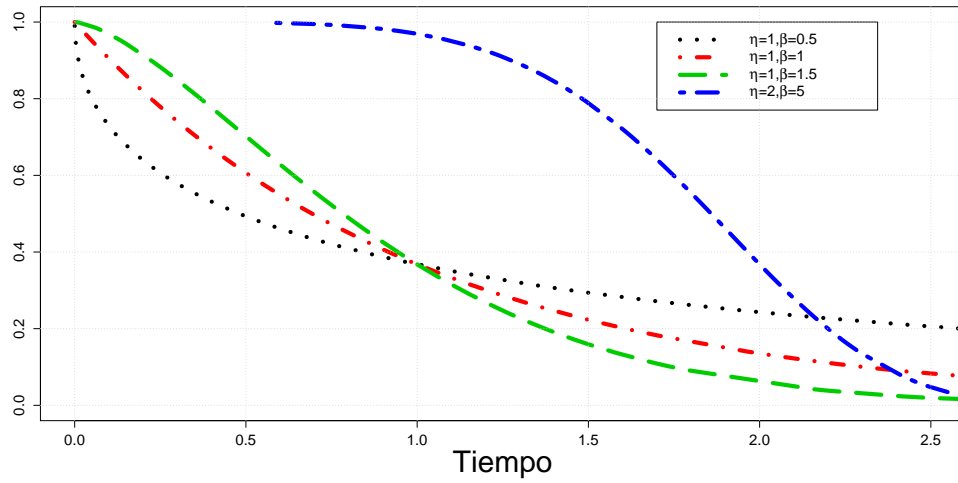


Figura 2.3: Comportamiento de la función de confiabilidad Weibull.

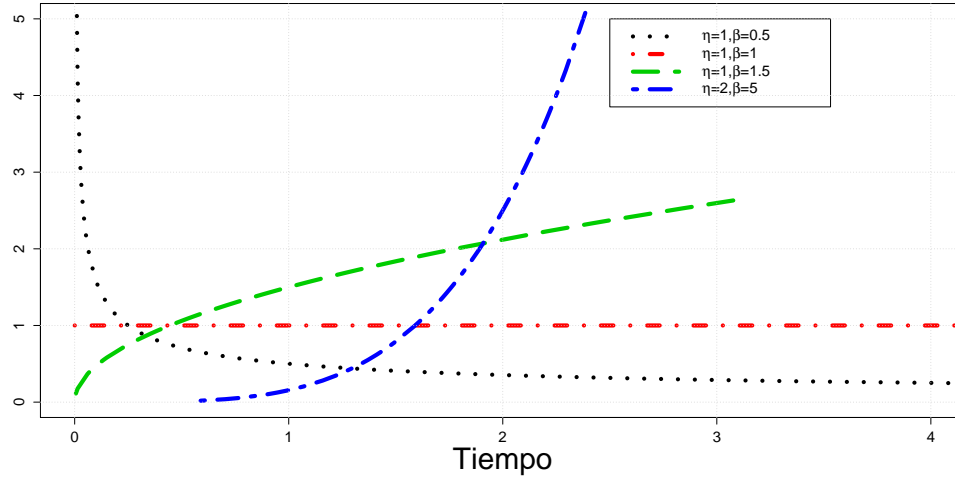


Figura 2.4: Comportamiento de la función de riesgo Weibull.

después de la mediana y describe la mayor parte de la vida de componente. Esta distribución es ampliamente usada dada la flexibilidad que tiene su función de riesgo, puesto que para valores de  $\beta < 1$  se tiene una función de riesgo decreciente, para  $\beta = 1$  es constante y para  $\beta > 1$  es creciente como se aprecia en la Figura 2.4.

## 2.2. Introducción al uso de Métodos Bayesianos

La estadística Bayesiana combina los datos del experimento a analizar con información previa, que se conoce o se ha observado previamente de dicho experimento llamada distribución a priori, para producir una distribución posterior de los parámetros.

Las combinaciones de experiencias pasadas dan la información a priori para formar un marco de referencia y tomar una decisión que conlleve al mejoramiento de algún proceso. En la mayoría de las aplicaciones es necesario y útil combinar información a priori con datos experimentales. Por ejemplo, supongamos que al realizar un estudio de confiabilidad los ingenieros expertos saben con cierta certeza, el tiempo promedio que tarda en fallar un componente. Además de estudios anteriores, su tiempo de falla es Weibull con ciertos parámetros que se encuentra dentro de un rango específico. Para estimar la distribución del ciclo de vida de un componente similar, este conocimiento previo puede ayudar a optimizar el tamaño de la muestra y a disminuir la incertidumbre en la inferencia.

A grandes rasgos el procedimiento para hacer inferencia Bayesiana sobre un vector de parámetros  $\theta$ , es el siguiente (Figura 2.5):

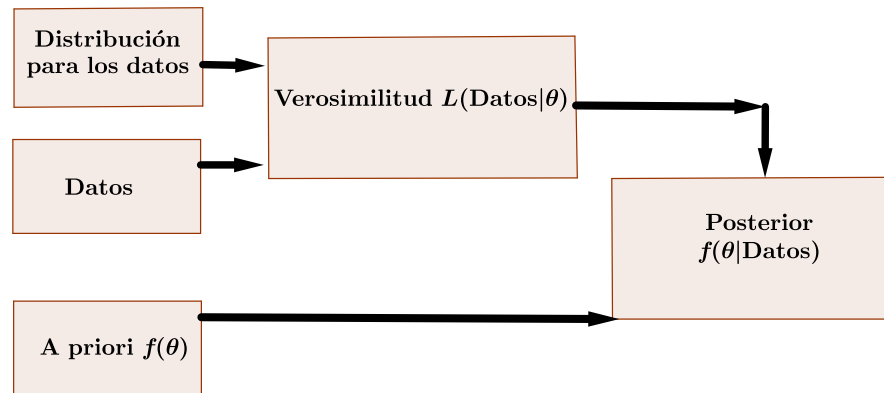


Figura 2.5: Método Bayesiano para realizar inferencia.

- Conocimiento apriori acerca de  $\theta$  expresado en términos de una función de densidad de probabilidad, denotada por  $f(\theta)$ .
- La verosimilitud para los datos disponibles y un modelo especificado dado por  $L(\text{Datos}|\theta)$ .
- Utilizar la regla de Bayes, para obtener una distribución posterior, que resulte de la combinación de la verosimilitud y el conocimiento de la distribución a priori de  $\theta$ . La distribución posterior es usada para cuantificar la incertidumbre de las cantidades de interés.

Uno de los primeros pasos para hacer estadística Bayesiana consiste en obtener información modelable en términos de una función de densidad. La obtención de la distribución a priori para un solo parámetro puede ser sencilla, si se ha considerado la experiencia en situaciones similares. Para un vector de parámetros, establecer la distribución a priori conjunta puede ser mucho más complicado. También es difícil obtener información sobre la dependencia de los parámetros y expresarlo en términos de una distribución conjunta. Por ejemplo, si la experiencia previa de estimaciones pasadas para los parámetros de la distribución lognormal  $\mu$  y  $\sigma$  indican que están altamente correlacionados, significa que la distribución a priori para estos parámetros debería reflejar esta dependencia.

Un enfoque adecuado para construir la distribución a priori, consiste en formular información acerca de un cuantil en especial (o parámetros), de acuerdo a experiencia previa.



Al momento de elegir una distribución a priori, existen 3 tipos diferentes:

- Cuando se tiene la información suficiente tales que los parámetros son conocidos, y conducen a una distribución degenerada<sup>1</sup>.
- Información difusa de los parámetros, que conduzcan una distribución a priori no informativa.
- Una distribución a priori informativa no degenerada.

Comunmente, las principales fuentes de información para una distribución a priori son:

- I. Opinión de expertos u otros.
- II. Información de datos pasados.

Finalmente podemos mencionar que el uso de una distribución a priori es un instrumento de modelación que permite descartar entornos o escenarios improbables. Este instrumento de modelación permite tomar una decisión acerca de la forma que debe tener la función de distribución a priori.

## 2.3. Inferencia Bayesiana

Se puede observar que dadas dos variables aleatorias  $X$ ,  $Y$ , la función de densidad  $f(Y|X)$  es proporcional a  $f(X, Y)$ , en el siguiente sentido. Sabemos que

$$f(y) = \int f(x, y) dx = \int f(x) f(y|x) dx,$$

es claro que

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{f(y)f(x|y)}{f(x)}. \quad (2.2)$$

Entonces

$$f(Y|X) \propto f(Y)f(X|Y),$$

esta es una de las formas del teorema de Bayes y es la utilizada dentro de la estadística Bayesiana. La igualdad esta bien definida para variables discretas y continuas [1]. La constante de proporcionalidad, es el denominador de la expresión (2.2), y es

<sup>1</sup>Una variable aleatoria  $X$  es degenerada en un punto o conjunto  $c \in \mathbb{R}$ , si  $P(X = x) = 1$  si  $x \in c$  y  $P(X = x) = 0$  si  $x \notin c$ .

necesaria para que  $f(Y|X)$  sea una distribución de probabilidad. En el caso continuo se determina por

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\int f(x, y) dy},$$

y en el caso discreto es

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum_y f(x, y)}.$$

Veamos un ejemplo artificial de la manera en la cuál se aplica el teorema de Bayes.

### Ejemplo

Supongamos que  $Y$  es la variable aleatoria que describe el tiempo en que falla por primera vez cierto objeto [1], el cual es medido por un instrumento que tiene un pequeño retraso en la medición. Sea  $X$  el tiempo de registro del instrumento, es decir,  $X$  es mayor que  $Y$ , pero solo es posible observar  $X$  y necesitamos concluir algo acerca de  $Y$ . Supongamos además que se sabe que

$$\begin{aligned} f(y) &= \exp\{-y\} \quad (0 < y < \infty) \\ f(x|y) &= k \exp\{-k(x - y)\} \quad (y < x < \infty) \end{aligned}$$

Entonces para hacer conclusiones del comportamiento de  $Y$  dado  $X$ , necesitamos a  $f(Y|X)$ . Aplicando el teorema de Bayes citado anteriormente se tiene que

$$\begin{aligned} f(y|x) &\propto f(y)f(x|y) \\ &\propto k \exp\{-y\} \exp\{-k(x - y)\} \\ &\propto \exp\{(k - 1)y\} \quad (0 < y < x). \end{aligned}$$

Con frecuencia es suficiente con obtener este resultado, pero la constante de proporcionalidad es necesaria para que lo que se esta obteniendo sea una distribución de probabilidad, en este caso la constante de proporcionalidad es:

$$\int_0^x \exp\{(k - 1)y\} dy = \frac{1}{k - 1} [\exp\{(k - 1)x\} - 1].$$

Si estamos interesados en  $k$  parámetros desconocidos

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

y tenemos la creencia de alguna distribución a priori para estos valores expresada en términos de la distribución de probabilidad  $f(\theta)$ , contamos con  $n$  observaciones de una muestra del experimento a observar

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

con una distribución de probabilidad que depende de estos  $k$  parámetros desconocidos. Entonces los componentes de  $X$  son variables aleatorias y la dependencia de  $X$  sobre  $\theta$ , puede ser expresada en términos de una función de densidad de probabilidad (fdp)

$$f(X|\theta).$$

Es posible encontrar una manera de expresar la distribución de interés considerando la distribución a priori y los datos. La herramienta básica es el teorema de Bayes para variables aleatorias, este afirma que

$$f(\theta|X) \propto f(\theta)f(X|\theta),$$

la función  $f(X|\theta)$ , como función de  $X$  y fijando  $\theta$  es una densidad, sin embargo  $f(X|\theta)$  como función de  $\theta$  la llamamos función de verosimilitud y con frecuencia la escribimos como

$$L(\theta|X) = f(X|\theta).$$

Con  $f(\theta)$  como la distribución a priori para  $\theta$  y  $f(\theta|X)$  como la distribución posterior para  $\theta$  dado  $X$ , el teorema de Bayes se transforma en su forma más memorable:

$$\text{Posterior} \propto \text{A priori} \times \text{Verosimilitud.}$$

La relación anterior resume, el camino en el cual deberíamos modificar nuestra creencia considerando los datos disponibles. Para una muestra inicial de  $X$  observaciones

$$f(\theta|X) \propto f(\theta)L(\theta|X). \quad (2.3)$$

Los cálculos y conclusiones anteriores se sintetizan en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.1.** *La distribución posterior  $f(\theta|X)$  es la distribución condicional de  $\theta$  dado los datos, expresada por:*

$$f(\theta|X) = \frac{L(X|\theta)f(\theta)}{\int_{\Omega} L(X|\theta)f(\theta) d\theta},$$

donde  $\Omega$  es el espacio paramétrico de  $\theta$  y  $f(\theta)$  es la distribución a priori para  $\theta$ .

De aquí:

$$f(\theta|X) \propto L(X|\theta)f(\theta)$$

y

$$f(X) = \int L(X|\theta)f(\theta) d\theta,$$

a esta última expresión se le suele llamar verosimilitud integrada. Es en realidad la distribución marginal de los datos, vista como función de  $X$ .

La distribución posterior es una distribución para los parámetros de la distribución y en la mayoría de las veces es de interés hacer inferencia sobre alguna observación  $X$ , y no sobre los parámetros. Para realizar esta inferencia se emplea la distribución predictiva.

**Teorema 2.3.2.** *Bajo el supuesto de que existe independencia entre los datos  $X$ , dados los parámetros  $\theta$ , para la observación futura  $y$ , la distribución predictiva posterior es:*

$$f(y|X) = \int_{\theta} f(y|\theta)f(\theta|X)d\theta = E_{(\theta|X)}[f(y|\theta)],$$

La demostración del teorema anterior se puede ver en Bernardo y Smith(1994). [6]

El ejemplo siguiente ilustra la forma de realizar inferencia sobre los parámetros de una distribución.

### Ejemplo

Supongamos que lanzamos de una moneda no justa y observamos el resultado. Modelamos el experimento con variables aleatorias Bernoulli de parámetro  $p$ ,  $x_i \sim \text{Ber}(p)$ . Dado que es una moneda no justa, tenemos conocimiento a priori de  $p$ , modelada como una variable aleatoria Beta,  $p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ . Para deducir conclusiones acerca de este experimento necesitamos hallar la distribución posterior de  $p$  dado los datos, utilizando la expresión (2.3).

La verosimilitud esta dada por

$$f(X|p) = p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}. \quad (2.4)$$

La distribución a priori de  $p$  es:

$$f(p) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} I_{[0,1]}(p) \quad (2.5)$$

La distribución posterior usando (2.4), (2.5) y sustituyéndolas en (2.3) es

$$\begin{aligned} f(p|X) &\propto f(X|p)f(p) \\ &\propto p^{\sum x_i + \alpha - 1}(1-p)^{\beta - 1}I_{[0,1]}(p), \end{aligned}$$

esta última expresión puede ser completada para que sea una distribución Beta, por lo tanto

$$p|X \sim \text{Beta}(\alpha + \sum x_i, \beta + n - \sum x_i).$$

La distribución posterior encontrada pertenece a la misma familia que la distribución a priori. Cuando se tienen casos como los anteriores en donde la distribución a priori y la posterior se distribuyen de la misma manera pero con diferentes parámetros son llamadas distribuciones conjugadas.

### 2.3.1. Método de Simulación

Antes de la aparición de métodos computacionales las distribuciones conjugadas eran las empleadas en estadística Bayesiana, por la facilidad de los cálculos. Sin embargo limitaba en gran medida el manejo de las distribuciones a priori y de los posibles modelos. Actualmente los procedimientos computacionales han realizado el empleo de este enfoque estadístico, puesto que se puede proponer la distribución a priori adecuada, sin forzarla a que sea necesariamente conjugada, permitiendo que al momento de obtener la distribución posterior, aunque se tenga una expresión bastante compleja, puedan obtenerse aproximaciones de esta distribución. Estas aproximaciones se ven reflejadas en la simulación de datos de la distribución posterior. A finales de los años 80's surgieron métodos de simulación para realizar cálculos de este tipo, uno de los más utilizados son los algoritmos Markov Chains Monte Carlo (MCMC).

El algoritmo MCMC (Markov Chain Monte Carlo) es una clase general de algoritmos usados para producir muestras de la distribución posterior, en altas dimensiones. El objetivo básico de un algoritmo MCMC es simular valores o muestras de una distribución posterior de un vector de parámetros. Tiene la propiedad de que la distribución de la  $j$ -ésima iteración en la secuencia de valores muestrales, convergen a una muestra aleatoria de la distribución posterior para  $j$  grande. En general muestras sucesivas de la distribución posterior están correlacionadas, pero esta correlación tiende a perderse conforme el tamaño de la muestra crece. Así para valores grandes de la muestra se actualizan los últimos grupos dentro de una secuencia, digamos  $\theta^{(m)}, \theta^{(m+1)} \dots \theta^{(m+k)}$  y estos representan la muestra de la distribución posterior de interés.

Consideremos dos tipos de algoritmos MCMC: Metropolis- Hasting y Gibbs samplers. A continuación mencionaremos las ideas básicas de estos algoritmos.

### Muestreo Gibbs.

El muestreo Gibbs es probablemente uno de los algoritmos MCMC más usados dentro de la estadística Bayesiana [5]. El término formal fue establecido por Geman y Geman[12], cuando estudiaban modelos de procesamiento de imágenes. El muestreo Gibbs es un método para generar datos de variables aleatorias sin tener que realizar explícitamente los cálculos que se involucran para obtener la densidad, se basa en propiedades de las cadenas de Markov. Cassella y George(1992) dan una tutorial acerca de este método [8].

A grandes rasgos un Muestreo Gibbs se construye de la siguiente manera.

Supongamos que tenemos un vector de parámetros  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  y denotamos las distribuciones posteriores condicionales totales (full conditionals) por :

$f_1(\theta_1|\theta_2, \dots, \theta_q, \text{datos}), f_2(\theta_2|\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_q, \text{datos}), \dots, f_q(\theta_q|\theta_1, \dots, \theta_{q-1}, \text{datos})$ .

**PASO I:** Generar un valor inicial  $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_p^0)$  y considerar  $j=0$ .

**PASO II:** Construir  $\theta^{j+1} = (\theta_1^{j+1}, \dots, \theta_p^{j+1})$  de la siguiente manera:

- Generar  $\theta_1^{j+1} \sim f_1(\theta_1|\theta_2, \dots, \theta_q, \text{datos})$ ;
- Generar  $\theta_2^{j+1} \sim f_2(\theta_2|\theta_1, \dots, \theta_q, \text{datos}) \dots$
- Generar  $\theta_q^{(j+1)} \sim f_q(\theta_q|\theta_1, \dots, \theta_{q-1}, \text{datos})$ .

**PASO III:** incrementar  $j$  y regresar al paso II.

**PASO IV:** Regresar  $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \dots \theta^{(M)}\}$

Gelfand y Smith (1992) mostraron que bajo ciertas condiciones de regularidad, el vector generado tiene distribución estacionaria  $f(\theta|\text{Datos})$  utilizando ciertas propiedades de cadenas de Markov.

### Metropolis Hastings

Las primeras ideas del algoritmo Metropolis-Hastings fueron introducidas en el artículo “The Monte Carlo Method” por Metropolis and Ulam(1949), mostrando un ejemplo de estimación de probabilidades de éxito para una estrategia del solitario, realizando muchos intentos y calculando la proporción de éxito. El método fue generalizado y probado más tarde por el profesor de la universidad de Toronto llamado W. Keith Hasting(1970). David B. Hitchcock(2003) proporciona una historia detallada sobre el nacimiento de este método. [9]

Metropolis Hasting es un algoritmo de simulación al igual que Muestro Gibbs, solo que un poco más general. Su mayor peso recae en la selección de una distribución propuesta. Supongamos que  $\pi(x)$  es la distribución objetivo, por ejemplo, es la distribución posterior, de la que se desea simular. La distribución “propuesta” es una distribución condicional  $q(y|x)$  y constituye “una sugerencia” de pasar de un estado  $x$  a un punto  $y$ . [10]

De manera general el algoritmo es el siguiente [5]:

**PASO I:** Iniciar con un valor  $x^{(t)}$  dentro del soporte de la distribución objetivo.

**PASO II:** Generar un valor candidato  $y^{(t)} \sim q(\cdot|x^{(t)})$ .

**PASO III:** Generar  $u_t \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  si

$$u < \min \left\{ \frac{\pi(y) q(x|y)}{\pi(x) q(y|x)}, 1 \right\},$$

hacer  $x^{(t+1)} = y^{(t)}$ , si no rechazar y hacer  $x^{(t+1)} = x^{(t)}$ .

**PASO IV:** Regresar al paso II.

**PASO V:** Regresar  $\{x^t, x^{t+1}, \dots, x^{t+M}\}$ .

El éxito del algoritmo depende de la selección de la distribución propuesta. Como lo discutido por Chib and Greenberg, [10] la propagación de la densidad propuesta afecta el comportamiento de la cadena de Markov en dos sentidos: una es el rango de aceptación (el porcentaje de veces que se mueve de un punto a otro) y la otra es la región del espacio donde se mueve la cadena. Para construirla se deben considerar ciertas propiedades [10].

Los métodos anteriores se emplean para producir datos de la distribución posterior y realizar estimaciones sobre estos.

### 2.3.2. Estimación Bayesiana

Una vez generada la muestra de la distribución posterior es de interés obtener estimadores basados en la muestra obtenida, realizar inferencia y pronósticos de funciones que revelen el comportamiento del fenómeno modelado. A continuación mencionaremos la manera de realizar estas estimaciones utilizando la muestra de la distribución posterior.

Una estimación común después de obtener la muestra, es encontrar la media posterior para alguna función  $g(\theta)$ . Si  $f(\theta|Datos)$  es la densidad de probabilidad posterior,

entonces la media se obtiene como:

$$E[g(\theta)|Datos] = \int g(\theta)f(\theta|Datos) d\theta. \quad (2.6)$$

Por otro lado, si suponemos que la muestra de la distribución posterior es  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_M^*$ , entonces por la ley de los grande números, la media posterior de  $g(\theta)$  se aproxima por

$$\hat{g}(\theta) \approx \frac{1}{M^*} \sum_{i=1}^{M^*} g(\theta_i^*).$$

Los métodos Bayesianos son también usados para predecir un evento futuro. Las fallas de un determinado componente en un proceso específico, pueden predecirse usando la distribución posterior predictiva. Una manera de calcularla es utilizando la muestra de la distribución posterior, es a través de un promedio. De la siguiente manera:

$$f(x|Datos) \approx \frac{1}{M^*} \sum_{i=1}^{M^*} f(x|\theta_i^*), \quad (2.7)$$

para cada  $x$  dentro del dominio de la distribución posterior.

Similarmente la cdf posterior predictiva es aproximada por el valor esperado de la cdf posterior

$$F(x|Datos) \approx \frac{1}{M^*} \sum_{i=1}^{M^*} F(x|\theta_i^*), \quad (2.8)$$

para cada  $x$  dentro del dominio de la distribución posterior.

Una vez que se tenga la muestra de la distribución posterior, podemos calcular todas las funciones que caractericen al fenómeno modelado, tales como la función de confiabilidad y la de riesgo, que serán de interés en los capítulos posteriores.



## Capítulo 3

# Transformadores y Estadística Bayesiana

En esta tesina se propone un plan de inventario de transformadores de instrumento, desde un enfoque Bayesiano. Para lograr esta meta, se necesita primero conocer aspectos exploratorios sobre el comportamiento del tiempo de vida de los transformadores. Para empezar el estudio que nos conduzca al plan de inventario o almacenamiento, tenemos que realizar inferencia sobre los datos e información disponible.

En este capítulo se hace el análisis de los datos, proponiendo una distribución a priori, para combinarla con la función de verosimilitud y tener la distribución posterior, para conseguir conclusiones acerca del comportamiento de los tiempos de vida de los transformadores.

### 3.1. Distribución Apriori

Los elementos disponibles dentro del estudio, es una base de datos de transformadores de instrumento de corriente en las subáreas de Coatzacoalcos y Temascal. Se disponen de sus tiempos de vida a lo largo de 26 años hasta el 2006, con datos censurados y no censurados.

Los datos se muestran en la Tabla 3.1, representados de la siguiente manera,  $(\underline{t}, \underline{e}) = \{t_i, e_i\}_{i=1}^n$ , donde  $e_i = 1$  indica que el transformador  $i$  aun siguió en operación al final de 2006, lo que implica que es un dato censurado por la derecha. Mientras que  $e_i = 0$ , se refiere a un valor no censurado. De estudios anteriores realizados por el CIMAT, los tiempos de vida son modelados adecuadamente por medio de una distribución Weibull.

Tabla 3.1: Tiempos de vida de transformadores de corriente,  $t_i$  (meses),  $e_i = 1$  indica un dato censurado,  $e_i = 0$  es un dato no censurado.

$i$	$t_i$	$t_i$	$i$	$t_i$	$e_i$	$i$	$t_i$	$e_i$	$i$	$t_i$	$e_i$
1	8	1	36	107	0	106	272	1	141	308	0
2	8	1	37	116	1	107	272	1	142	308	0
3	8	1	38	119	0	108	272	1	143	308	1
4	8	1	39	119	0	109	272	1	144	308	1
5	8	1	40	139	0	110	272	1	145	308	1
6	20	1	41	140	0	111	274	0	146	308	1
7	20	1	42	144	0	112	274	0	147	308	1
8	20	1	43	146	0	113	274	0	148	308	1
9	20	1	44	146	0	114	275	0	149	308	1
10	32	1	45	152	1	115	275	0	150	308	1
11	32	1	46	159	0	116	275	0	151	308	1
12	32	1	47	159	0	117	276	0	152	308	1
13	32	1	48	159	0	118	281	0	153	308	1
14	32	1	49	160	0	119	281	0	154	308	1
15	32	1	50	161	0	120	284	0	155	308	1
16	32	1	51	164	1	121	284	0	156	308	1
17	56	1	52	167	0	122	284	0	157	308	1
18	80	1	53	172	0	123	284	0	158	308	1
19	80	1	54	172	0	124	286	0	159	308	1
20	80	1	55	176	1	125	286	0	160	308	1
21	80	1	56	183	0	126	286	0	161	308	1
22	80	1	57	188	1	127	287	0	162	308	1
23	80	1	58	203	0	128	288	0	163	308	1
24	80	1	59	205	0	129	288	0	164	308	1
25	80	1	60	214	0	130	288	0	165	308	1
26	80	1	61	214	0	131	288	0	166	308	1
27	80	1	62	215	0	132	296	1	167	308	1
28	80	1	63	216	0	133	296	1	168	308	1
29	80	1	64	216	0	134	296	1	169	308	1
30	80	1	65	216	0	135	296	1	170	308	1
31	80	1	66	218	0	136	298	0	171	308	1
32	80	1	67	218	0	137	299	0	172	308	1
33	94	0	68	218	0	138	300	0	173	308	1
34	94	0	69	225	0	139	308	0			
35	94	0	70	225	0	140	308	0			

La función de Verosimilitud bajo este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$f(\underline{t}|\underline{e}, \beta, \eta) = \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\}. \quad (3.1)$$

Para iniciar la inferencia de los datos disponibles, necesitamos proponer una distribución a priori que refleje el conocimiento que se tiene acerca del fenómeno a modelar. Elegimos como modelo para los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  distribuciones gammas, con la siguiente notación:

$$\beta \sim Ga(a_1, b_1) \quad (3.2)$$

y

$$\eta \sim Ga(a_2, b_2). \quad (3.3)$$

La razón por la cual elegir distribuciones Gammas para las a prioris es su flexibilidad, pueden obtenerse formas sesgadas a la derecha, izquierda o centradas. Cabe mencionar que la elección de una distribución a priori específica, solo se debe de interpretar como un medio o instrumento que nos ayudará a modelar la información disponible.

Una vez elegidos los instrumentos de modelación, es de interés establecer los parámetros para las a prioris, estos se fijarán con la ayuda de dos elementos:

- La distribución predictiva a priori.
- El comportamiento de la función de riesgo de los transformadores.

Primero hablaremos acerca de la función de riesgo. Esta función describe el desgaste de los transformadores a lo largo del tiempo. Al empezar su funcionamiento, el riesgo a fallar es pequeño y conforme pasa el tiempo, debido al uso, el ambiente y otros factores, el riesgo aumenta paulatinamente. La determinación o modelación de las distribuciones a priori tienen como misión descartar entornos improbables de los fenómenos que modelan. En la Figura 3.1 se observan tres trayectorias posibles de riesgo. Si la vida de los transformadores tiene una función de riesgo decreciente, indica que al momento de iniciar su vida útil, el riesgo a fallar es alto y conforme pasa el tiempo, se reduce. Sin embargo existen factores como la humedad que no permiten que el riesgo de falla de un transformador disminuya, sino al contrario.

Por otra parte si la función de riesgo es constante, se concluiría que los transformadores no se degradan a través del tiempo. Lo que no ocurre dadas las condiciones de uso. Así la función de riesgo adecuada, es aquella que indique que en los primeros años de vida su riesgo es pequeño y a lo largo del tiempo este riesgo aumenta. Una función de riesgo creciente es la más razonable de acuerdo al funcionamiento de los transformadores.

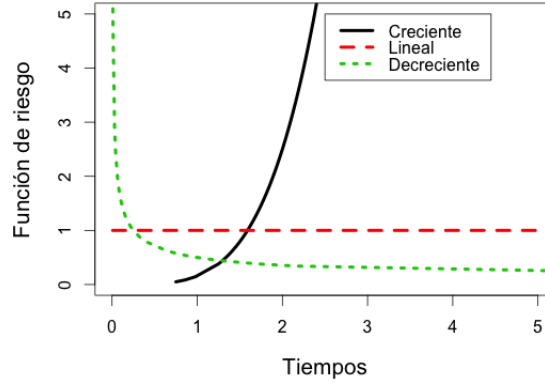


Figura 3.1: Posibles funciones de riesgo para la distribución predictiva a priori.

Por lo tanto la distribución a priori propuesta debe tener una función de riesgo creciente, esto es el parámetro  $\beta$  tiene que ser mayor que 1.

El siguiente paso, es observar el comportamiento de la distribución predictiva a priori. Previamente se mencionó la manera en la cual se obtiene la distribución predictiva posterior, sin embargo no se comentó nada al respecto de la **distribución predictiva a priori**. Al momento de asignar una distribución de probabilidad a los parámetros  $(\beta, \eta)$ , estos no tienen interpretación cuantificable por experiencias. No es posible conocer explícitamente sus valores por observaciones previas, solo tenemos conocimiento del fenómeno en general. Si se sabe la manera a priori del comportamiento del tiempo de vida de los transformadores entonces se tiene conocimiento de la distribución predictiva a priori. Esta distribución esta dada por:

$$f(t) = \int_{\beta, \eta} f(t|\beta, \eta) f(\beta, \eta) d\beta d\eta,$$

donde  $f(\beta, \eta)$  es la distribución conjunta a priori de  $\beta$  y  $\eta$ . Por experiencia podemos conocer ciertas características del tiempo de vida de los transformadores y tener información previa de  $f(t)$ . Esta información determina un rango de valores para  $\beta$  y  $\eta$ . La manera más común de establecer la distribución a priori predictiva es empleando dos cuantiles. Como describiremos en los siguientes párrafos.

Suponiendo que el 5 % de los transformadores fallan en los primeros 5 años (80 meses) y que el 95 % de ellos ya fallaron a los 40 años (480 meses) o antes, y si además

$$T \sim \text{Weibull}(\eta^*, \beta^*)$$

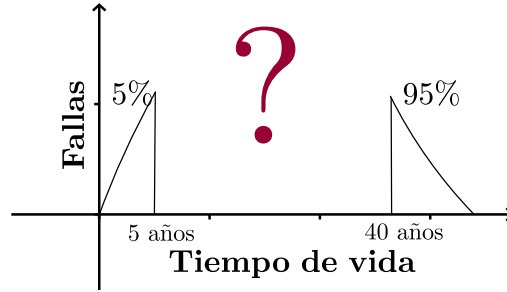


Figura 3.2: Distribución predictiva a priori a modelar.

es la variable aleatoria a priori que modela el tiempo de vida de los transformadores. La Figura 3.2 muestra la distribución a priori predictiva, con los cuantiles fijados en los extremos. Sin embargo el centro de la distribución debe ser modelada.

La información de los cuantiles se representa por:

$$P(T \leq 80) = 0.05$$

y

$$P(T \leq 480) = 0.95.$$

Con esta información es posible conocer  $\eta^*$  y  $\beta^*$  de la siguiente forma, se sabe que para una variable aleatoria Weibull

$$P(T \leq t) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta} \right\}$$

Por lo tanto debemos resolver

$$\begin{aligned} 0.05 &= 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta^*} \right)^{\beta^*} \right\} \\ 0.95 &= 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta^*} \right)^{\beta^*} \right\} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a que

$$\begin{aligned} \beta^* &= 1.955 \\ \eta^* &= 273.8 \end{aligned}$$

Los parámetros encontrados describen el comportamiento a priori del tiempo de vida, no de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ . Con ayuda de estos datos se pueden obtener los parámetros  $a_1, b_1, a_2$  y  $b_2$ , que como lo mencionamos al inicio de la sección son los parámetros, para las distribuciones Gammas de  $\beta$  y  $\eta$  respectivamente, notando lo siguiente:

- 1.- Como  $\beta^* = 1.955$ , quiere decir que los valores que produzca la distribución Gamma con parámetros  $a_1$  y  $b_1$  oscilaran alrededor de estos valores. Similarmente como  $\eta^* = 273.8$  significa que los valores que tome la distribución  $Ga(a_2, b_2)$  estarán alrededor de 273.8 aproximadamente.
- 2.- De manera general la función de densidad de una variable aleatoria Gamma con parámetros  $a$  y  $s$ , representada como  $Ga(a, s)$  es

$$f(x) = \frac{1}{s^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp \left\{ -\frac{x}{s} \right\}$$

y su valor esperado esta dado por:

$$E(X) = as.$$

Del hecho de que  $\beta \sim \text{Gamma}(a_1, b_1)$  y juntando las dos aseveraciones anteriores se tiene que:  $\beta^* = 1.955 \approx E(\beta) = a_1 b_1$ , así

$$b_1 = \frac{1.955}{a_1}.$$

De manera similar para  $\eta \sim \text{Gamma}(a_2, b_2)$  se obtiene

$\eta^* = 273.8 \approx E(\eta) = a_2 b_2$ , de donde

$$b_2 = \frac{273.8}{a_2}.$$

Tanto  $b_1$  como  $b_2$  quedan expresadas en función de  $a_1$  y  $a_2$ , que son los parámetros de forma para  $\beta$  y  $\eta$  respectivamente.

Para fijar  $a_1$  y  $a_2$ , se proponen distintos valores para estos parámetros. Para cada uno de los valores propuestos se obtienen sus respectivas  $b_1$  y  $b_2$ , con lo que queda de manera explícita establecidas las distribuciones a priori. Una vez teniendo estas a prioris se produce la distribución predictiva a priori y la función de riesgo. Luego se evalúa que tan cerca se encuentra la a priori predictiva de la información que se esta modelando, para finalmente elegir  $a_1$  y  $a_2$  que ajusten de manera razonable la información a priori.

Realizando el procedimiento anterior se fijaron los siguiente valores  $a_1 = 25$ ,  $b_1 = 0.092$ ,  $a_2 = 12$  y  $b_2 = 2.2$ . La Figura 3.3 muestra la densidad predictiva a priori con los valores establecidos, y la Figura 3.4 muestra la función de riesgo, se ha modelado de manera creciente.

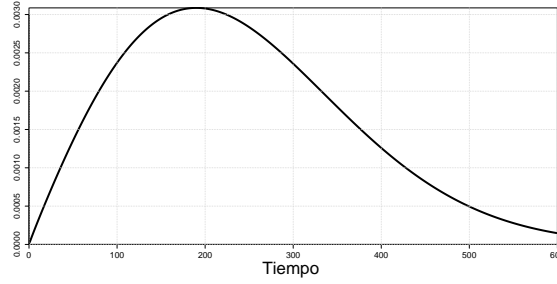


Figura 3.3: Función de densidad a priori.

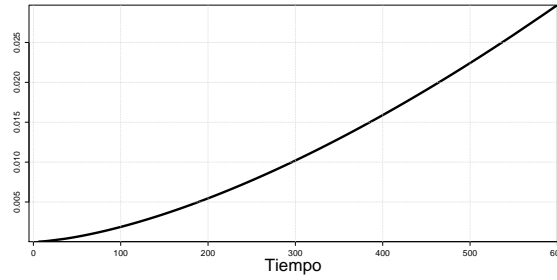


Figura 3.4: Función de riesgo a priori.

### 3.2. Distribución Posterior

Recordando que  $T$  es la variable aleatoria que representa los tiempo de vida de los transformadores, su función de verosimilitud esta dada por (3.1) y las distribuciones (3.2), (3.3). La distribución posterior es

$$\begin{aligned} f(\beta, \eta|T) &\propto \text{Verosimilitud} \times \text{A priori} \\ &= f(T|\beta, \eta)f(\beta, \eta) \end{aligned}$$

Suponiendo que existe independencia a priori, entre los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  se tiene:

$$\begin{aligned} f(\beta, \eta|T) &= f(T|\beta, \eta)f(\beta, \eta) \\ &= f(T|\beta, \eta)f(\beta)f(\eta) \\ &= \prod_{e_i=0} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{e_i=1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \\ &\quad \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \beta^{a-1} \exp\left\{-\frac{\beta}{b}\right\} \frac{1}{b_1^{a_1} \Gamma(a_1)} \eta^{a_1-1} \exp\left\{-\frac{\eta}{b_1}\right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

La Ecuación (3.4) muestra que la distribución posterior de los parámetros, es una expresión compleja y no fácil de evaluar. En tales situaciones se recurre a la ayuda de métodos computacionalmente intensivos que permiten simular una muestra de la distribución posterior, tales como algoritmos MCMC, que son ampliamente utilizados en estas situaciones.

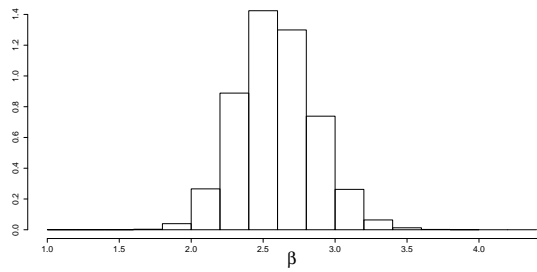


Figura 3.5: Salida t-walk para  $\beta$ .

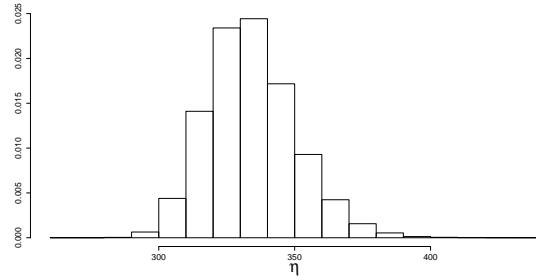


Figura 3.6: Salida t-walk para  $\eta$ .

Para conocer la muestra de la distribución posterior se usó el lenguaje de programación R, y la función t-walk que permite obtener tal muestra [7]. Con la función t-walk se realizaron 900,000 iteraciones para obtener la muestra deseada (3.4). Los resultados están resumidos en las Figuras 3.5 y 3.6 que indican los valores en los que se concentran  $\beta$  y  $\eta$ . Por ejemplo en la Figura 3.5 los valores de  $\beta$  más probables oscilan alrededor de 2.5, pero puede tomar valores de 2 hasta 3.5. Mientras que en la Figura 3.6 observamos los valores para  $\eta$  que presentan un rango de entre 280 y 400. Siendo alrededor de 335 el más probable.

Las Figuras 3.7 y 3.8, muestran el análisis de convergencia obtenido empleando la función t-walk. Observamos que la convergencia se da en un número de iteraciones relativamente pequeño.

Con la muestra, se obtiene la densidad predictiva posterior, que describe el comportamiento de los tiempos de vida de los transformadores. La Figura 3.9 muestra esta distribución, considerando la incertidumbre de los parámetros desconocidos  $\beta$  y  $\eta$ .

La función de confiabilidad y la función de riesgo se presentan en las Figuras 3.10 y 3.11 respectivamente. La confiabilidad decae lentamente. Se espera que a los 200 meses la probabilidad de que un transformador no falle es de 0.8. En la Tabla 3.2 se muestran las probabilidades de la función de confiabilidad, de los transformadores que seguían operando después del 2006.

La probabilidad de que un transformador siga funcionando después de 8 meses es alta, de 0.99. Mientras que la probabilidad de que funcione después de 12 años empieza a decrecer, es de 0.87.



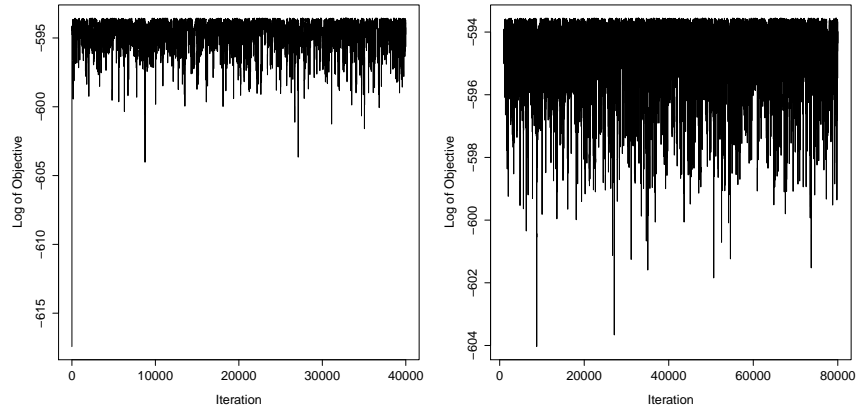


Figura 3.7: Dentro de t-Walk, se suele emplear, la función logaritmo de la distribución objetivo para evaluar la convergencia del método. La gráfica muestra el comportamiento de esta función.

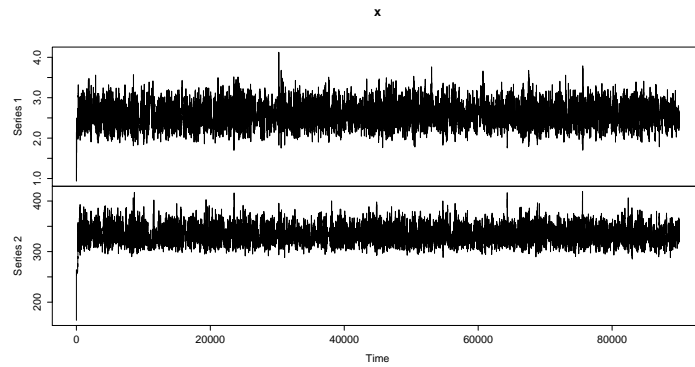


Figura 3.8: Series de convergencia de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ , proporcionados por la función t-Walk. La serie 1 corresponde a  $\beta$  y la serie 2 a  $\eta$ .

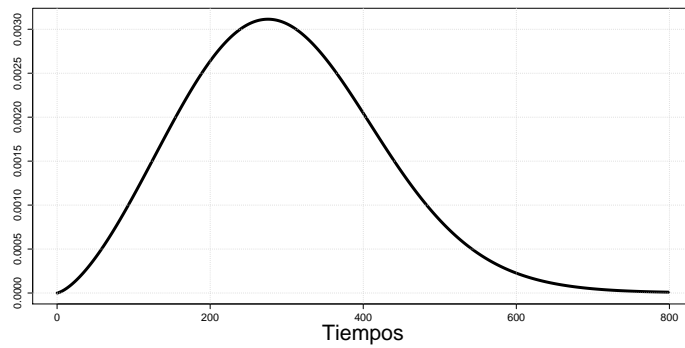


Figura 3.9: Densidad predictiva posterior.

Tabla 3.2: Confiabilidad de los transformadores que seguían funcionando después del 2006.

Meses de trabajo	8	20	32	56	80	116
Confiabilidad	0.99	0.99	0.99	0.98	0.97	0.93
Meses de trabajo	152	164	176	188	272	296
Confiabilidad	0.87	0.85	0.82	0.79	0.55	0.47

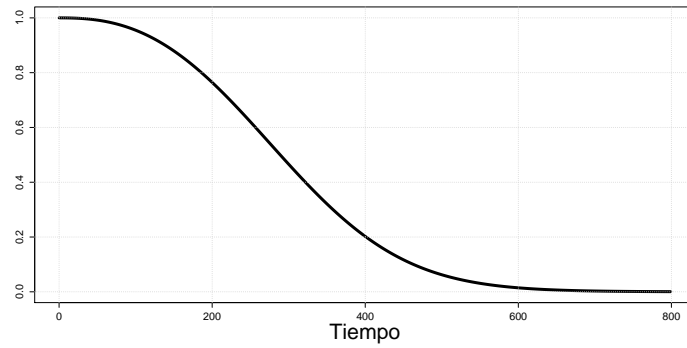


Figura 3.10: Confiabilidad posterior obtenida.

Un aspecto importante a evaluar es conocer la confiabilidad condicional, dada por:

$$C(t_0|t) = P(T > t_0 + t | T > t).$$

Esta indica la confiabilidad de un componente que ya ha vivido hasta un tiempo  $t$ . En la Tabla 3.3 se muestra la confiabilidad condicional de los transformadores que han vivido hasta un tiempo dado. Cuando el transformador ha trabajado 8 meses, la probabilidad de que siga funcionando un año más, es prácticamente 1 y la probabilidad de que trabaje 12 años más es 0.96, indicando que es un componente nuevo y su tiempo de vida es bueno, aún después de 12 años de operación. Por otra parte cuando un transformador ya ha vivido 308 meses (25 años), la probabilidad de que opere un año más es 0.4 y la probabilidad que viva 20 años más es casi cero.

Para obtener los valores de la Tabla 3.3, se considera la incertidumbre de los parámetros desconocidos  $\beta$  y  $\eta$ , la cuál se refleja por los valores obtenidos de la muestra de la distribución posterior, dada en (3.4), siendo que de (2.6) y (2.8),

$$C(t_0|t) = \int P(T > t_0 + t | T > t, \beta, \eta) f(\beta, \eta) d\beta d\eta.$$

Dicha integral es aproximada con la muestra de la distribución generada mediante el empleo del algoritmo MCMC (t-Walk) por medio de la expresión (2.8). Para evaluar

Tabla 3.3: Confiabilidad condicional de los transformadores que seguían en funcionamiento después del 2006

Meses de trabajo ( $t$ )	$C(1 \text{ año} t)$	$C(2 \text{ años} t)$	$C(7 \text{ años} t)$	$C(12 \text{ años} t)$	$C(20 \text{ años} t)$
8	1.00	1.00	0.99	0.98	0.96
20	1.00	1.00	0.98	0.96	0.91
32	0.99	0.99	0.96	0.93	0.85
56	0.98	0.98	0.92	0.86	0.73
80	0.96	0.95	0.88	0.78	0.62
116	0.92	0.90	0.79	0.66	0.47
152	0.85	0.83	0.68	0.54	0.34
164	0.82	0.80	0.65	0.50	0.30
176	0.80	0.77	0.61	0.46	0.26
188	0.76	0.73	0.57	0.42	0.23
272	0.52	0.48	0.31	0.19	0.08
296	0.44	0.41	0.25	0.15	0.06
308	0.41	0.37	0.23	0.13	0.05

el patrón de desgaste de la unidades en la Figura 3.11 observamos la función de riesgo de los transformadores, esta crece de manera lenta. Por lo tanto cabe recalcar que las

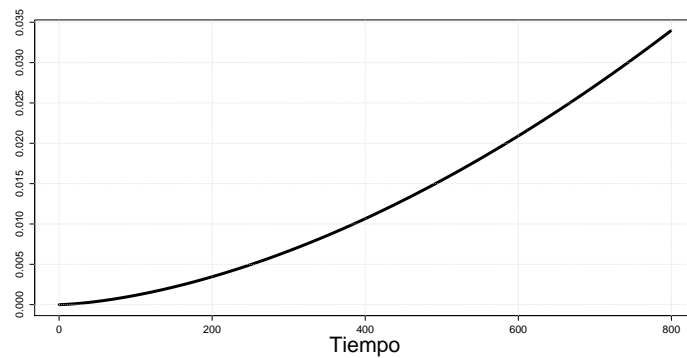


Figura 3.11: Tasa de falla mensual, empleando la muestra de la función t-Walk.

gráficas de las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 son aproximaciones empleando la muestra de la distribución posterior obtenida y aplicando (2.8).

## Capítulo 4

# Pérdida Esperada

Con frecuencia nos enfrentamos a situaciones donde debemos tomar decisiones de trascendencia, tanto de interés personal como de interés organizacional. La importancia de una decisión depende del riesgo asociado a ella, por lo cual es importante conocer, tanto su probabilidad, como su costo. El proceso que conlleva una decisión puede realizarse identificando adecuadamente los siguientes aspectos:

- Localizar el punto en donde se requiere tomar la decisión.
- Establecer una serie de hipótesis que pueden ser aceptadas o refutadas mediante el uso de modelos que se han diseñado para tal fin.
- Conocer las consecuencias asociadas a las diferentes elecciones posibles, las cuales frecuentemente son medidas en costos monetarios.

Uno de los principales objetivos al realizar un estudio de confiabilidad, es tomar decisiones que minimicen costos. El tema de optimización no se aborda dentro de la literatura clásica de confiabilidad. Es común que para pronosticar algunas cantidades de interés se consideren cuantiles adecuados, ya sean bajos o altos, según el problema que se desee resolver, omitiendo consideraciones externas como monetarias u optimización de procesos.

Lo ideal sería decidir en forma adecuada, considerando todos los factores y prever de antemano los costos asociados a esa decisión, para así enfocar programas que reflejen una reducción de costos.

En este trabajo se diseña una metodología para la construcción de un plan óptimo de almacenamiento de transformadores. Haciendo uso de una función de pérdida que será definida en un contexto, que permita minimizar los costos del almacén.

## 4.1. Almacenamiento de Transformadores

Los transformadores de instrumento son herramientas costosas y difíciles de transportar. La mayoría de las empresas que fabrican este tipo de transformadores lo hacen bajo pedido y se tardan un tiempo considerable en cumplirlo. Su abastecimiento resulta una tarea a optimizar, debido a los costos que pueden minimizarse, como transporte y el costo del almacenamiento mismo, cuando no se usaron los aparatos. Sin embargo esta optimización, debe ser tal que no permita que la empresa se quede sin transformadores puesto que esto implicaría un costo por no poder cobrar el servicio.

En el presente trabajo se busca desarrollar un plan de inventario para la optimización del número de transformadores almacenados a un tiempo  $t$ . Para ello necesitamos tener cierta información sobre la manera en que debe operar el almacén.

Sea  $n_0$  el número inicial de transformadores disponibles para reemplazar a los que fallan. Supongamos que al momento en que falla un transformador, se hace el pedido para sustituirlo y se espera un periodo de  $\delta$  meses hasta que llega la orden. Mientras tanto este se reemplazará por uno de los  $n_0$  disponibles, si es que todavía quedan en el almacén. Interesa determinar el valor de  $n_0$ , que asegure que a lo largo del periodo de tiempo analizado  $(0, t)$ , el almacén tenga los suficientes transformadores para cubrir las fallas a un costo mínimo.

En el capítulo anterior obtuvimos la muestra de la distribución posterior para los parámetros, que describen el comportamiento del tiempo de vida de los transformadores. La Figura 4.1 muestra un esquema representativo, de los elementos disponibles para la construcción de la función de pérdida, que conduzca a la determinación de  $n_0$ . Mientras que la Figura 4.2 es un diagrama general de las etapas para determinar la

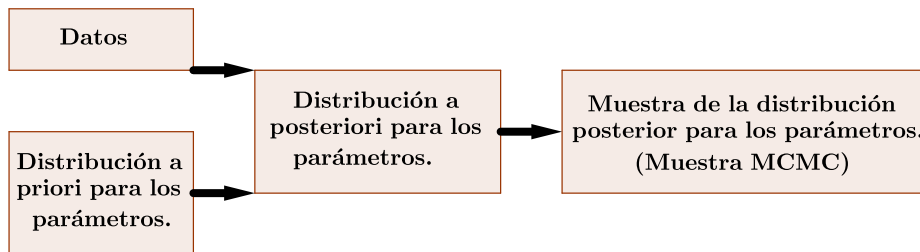


Figura 4.1: Etapas Realizadas en el Capítulo Anterior.

propuesta de inventario óptima, empleando la muestra de la distribución posterior y algunos costos que posteriormente estableceremos.

El procedimiento para determinar el valor óptimo de  $n_0$ , se basa en el cálculo de la

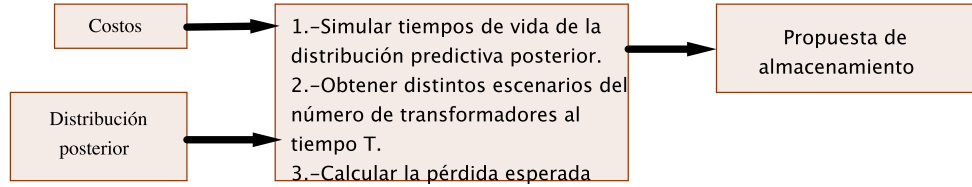


Figura 4.2: Contrucción del Plan de Almacenamiento.

función de pérdida esperada. Para esto simulamos tiempos de vida  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . El tiempo  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  provendrá de una distribución Weibull con parámetros  $(\beta_i, \eta_i)$  de la muestra que ya se obtuvo de la distribución posterior. Tabla 4.1 contiene un conjunto de realizaciones  $(\beta, \eta)$  de la distribución posterior y el  $t_i$  correspondiente,

- $t_1 = 274$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.228,347.37).
- $t_2 = 542$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.386,358.77).
- $t_3 = 30.5$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(3.534,350.55).
- $\vdots$
- $t_n = 180$  es un dato que proviene de la distribución Weibull(2.456,340.51).

Los tiempos de vida simulados pueden ser considerados como una muestra, que resulta de una mezcla de distribuciones Weibull. Se puede demostrar que estos tiempos de vida provienen de la distribución posterior predictiva de  $t$ . Se calcula por medio de la siguiente integral:

$$f(t|\text{Datos}) = \int f(t|\beta, \eta) f(\beta, \eta|\text{Datos}) d\beta d\eta$$

y se aproxima por medio de (2.7).

Tabla 4.1: Muestra MCMC.

$i$	$\beta$	$\eta$	$t_i$
1	2.228	347.37	274
2	2.386	358.77	542
3	3.534	350.55	305
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	2.456	340.51	180

Una vez establecidos los tiempos de falla de los transformadores. El número de transformadores en el almacén hasta el tiempo  $t$ , dependerá del número de fallas que ocurran durante el periodo de observación  $(0, t)$ , de  $\delta$  y del número de transformadores que fijemos como iniciales  $n_0$ , es decir, es una función:

$$n(t, n_0, \delta).$$

Para observar el comportamiento de  $n(t, n_0, \delta)$  por simulación, se consideran tiempos de falla similares a los de la Tabla 4.1. Se asume que al momento en que falla un transformador se solicita y llega  $\delta$  meses después. Como solo se pide un transformador cuando alguno ha fallado, siempre tendremos en el almacén a lo más  $n_0$  transformadores. De manera más clara la forma de operar de  $n(t, n_0, \delta)$ , el número de transformadores disponibles en el almacén en el intervalo de tiempo de  $(0, t)$  es la siguiente: Al inicio del periodo  $n(0, n_0, \delta) = n_0$ , una vez que se llega a un tiempo de falla  $t_1$  el valor de  $n(t_1, n_0, \delta)$  será  $n_0 - 1$  disminuye en uno y este se recuperará  $\delta$  meses después. Si se llega a otro tiempo de falla antes de que llegue la orden entonces  $n(\cdot)$  disminuirá en uno nuevamente, si ocurre lo contrario se recuperará al menos en una unidad.

Las gráficas de algunas trayectorias simuladas de la función  $n(t, n_0, \delta)$  para valores de  $\delta = 6, 8$  y 12 meses se muestran en las Figuras 4.3 4.4 y 4.5.

Se decidió analizar estos valores de  $\delta$ , debido a que si los transformadores llegan en periodos menores de 6 meses, los valores de  $n(t, n_0, \delta)$  no varían de manera significativa. Por otro lado considerar periodos de espera más largos que un año parece ser un periodo grande de espera. Necesitamos establecer una función de pérdida, a partir de los escenarios simulados, que permita saber la cantidad inicial adecuada de transformadores que deben tenerse en el almacén. La siguiente sección describirá la manera de establecer esta función.

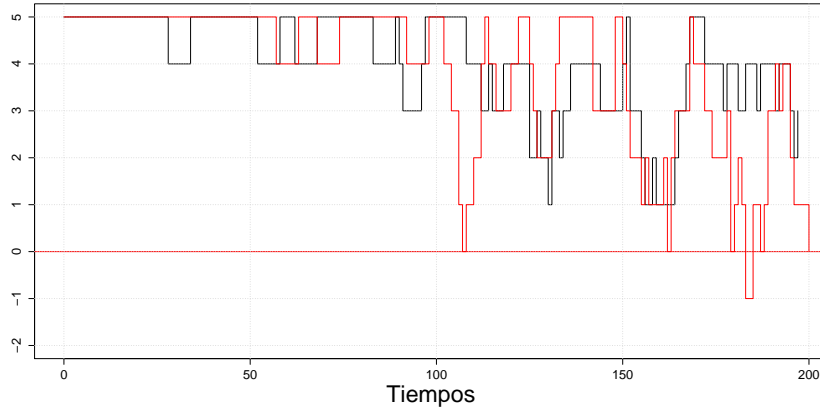


Figura 4.3: Dos trayectorias obtenidas mediante simulación del número de transformadores en el almacén hasta el tiempo  $t = 200$  meses, con  $n_0 = 5$  transformadores al inicio del periodo de observación y  $\delta = 6$  meses de espera de llegada de los transformadores que se han pedido.

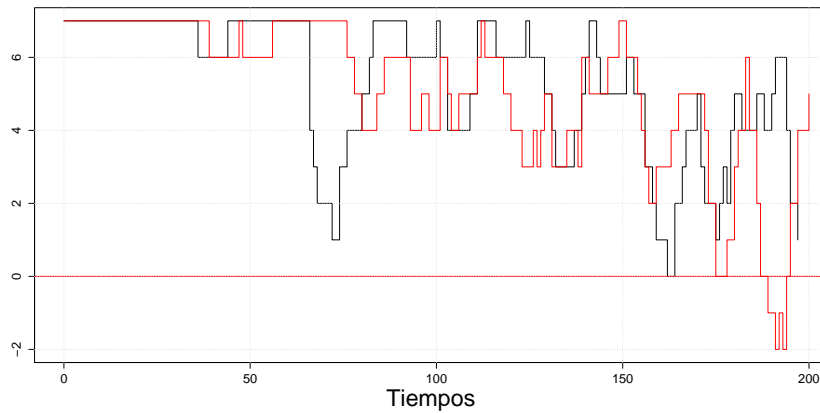


Figura 4.4: Dos trayectorias obtenidas mediante simulación del número de transformadores en el almacén hasta el tiempo  $t = 200$ , con  $n_0 = 7$  y  $\delta = 8$



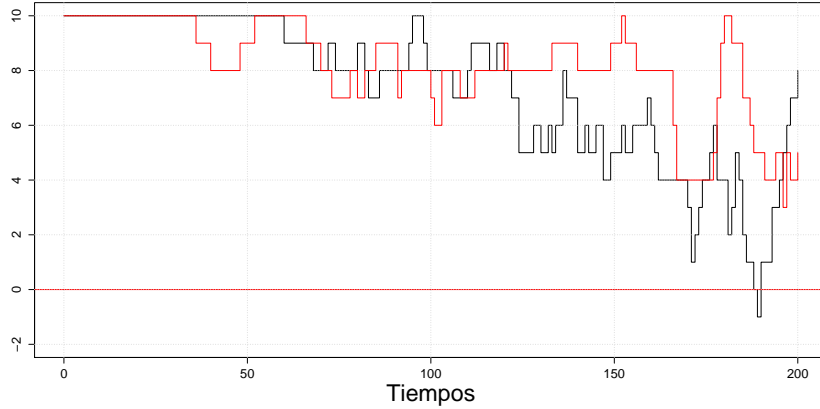


Figura 4.5: Trayectorias simuladas del número de transformadores en inventario o almacenados con  $n_0 = 10$ ,  $t = 200$  y  $\delta = 12$ .

## 4.2. Funciones de Pérdida

Al hablar de función de pérdida nos referimos a una función que expresa los costos de pérdidas o ganancias al tomar diferentes acciones. A continuación se proponen tres posibles políticas de inventario y posteriormente se describen sus funciones de pérdida. Se considera una política de inventario, al planteamiento de una función de pérdida que refleje los costos de mayor interés para la empresa.

### Política A

La primera política reflejará el costo de quedarnos sin transformadores disponibles en el almacén. Estará enfocada a determinar el  $n_0$  adecuado, tal que no permita que dentro del periodo de observación, el almacén se quede sin transformadores para cubrir todas sus demandas.

### Política B

La segunda política además de considerar el costo de la política A, adiciona el costo del lote inicial de transformadores en el almacén.

### Política C

Esta última política se centra en evaluar dos tipos de costos.

- 1.- Costo de falta de transformadores por unidad de tiempo. Este costo también considerado en las políticas anteriores.
- 2.- Costo de almacenamiento por cada unidad de tiempo.

### 4.2.1. Política A

Usando las Figuras 4.3 4.4 y 4.5, es posible obtener la permanencia por debajo de cero de las trayectorias para distintos valores iniciales de  $n_0$ , lo cual se interpretaría como el número de veces que la empresa se quedo sin transformadores para reemplazar. Es natural que entre más pequeño sea  $n_0$ , se permanece más tiempo por debajo de cero y entre más grande, la empresa se quedará sin reservas por menos tiempo.

Supongamos que se tiene una trayectoria como la de la Figura 4.6, hasta un tiempo de 10 meses y con 1 transformador inicial de reserva. Supongamos además que al tiempo 3 falla un transformador, luego  $n(3) = 0$ . Después de un tiempo falla otro y no tenemos repuesto, entonces el número de transformadores en reserva es negativo ( $n(4) = -1$ ). La pérdida asociada a partir de este tiempo, es el número de meses que permanece en esta situación (1 mes), multiplicada por un valor de  $c$  unidades monetarias, que representa el costo de no poder cobrar la electricidad, por cada mes que no se tuvo un transformador de instrumento. Si se observa hasta  $t = 10$  entonces habría que sumar las pérdidas que representan el segundo bloque, que empieza en el tiempo  $t = 6$ . Del bloque de  $t = 6$  a  $t = 7$  la pérdida involucra solamente a un transformador. Sin embargo en el intervalo de tiempo de  $[7, 9]$  meses la pérdida es más grande, puesto que faltan dos transformadores para sustituir. La pérdida será los dos transformadores faltantes multiplicada por la longitud de tiempo que dure este hecho, (2 meses) por el valor de  $c$ . Por lo tanto la pérdida total es:

$$c[1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1]$$

Lo que significa que la pérdida es la suma de las áreas delimitadas por debajo de cero, multiplicada por  $c$ , donde  $c$  se tiene que establecer con información adicional. Sin perder generalidad se puede suponer  $c = 1$ .

De manera general, podemos construir la función de pérdida asociada a la política A, como se describe a continuación.

Sean  $\underline{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  los tiempos de falla de los transformadores y  $\underline{\ell} = \{\ell_1 = t_1 + \delta, \ell_2 = t_2 + \delta, \dots, \ell_n = t_n + \delta\}$ , los tiempos de llegada de los transformadores pedidos.

Definamos  $X(t; \underline{T})$  como el número de transformadores en el almacén que se usaron para cubrir los tiempos de fallas hasta el tiempo  $t$  y  $Y(t; \underline{T})$  el número de transformadores que se pidieron y llegaron antes del tiempo  $t$ . Luego  $X(0) = n_0$  y  $Y(0) = 0$ .

Sea  $Z(t, \underline{T}) = X(t; \underline{T}) + Y(t; \underline{T})$ , indica el comportamiento de la función  $n(t, n_0, \delta)$ . Interesa conocer las veces en la cual esta permanece por debajo de cero.

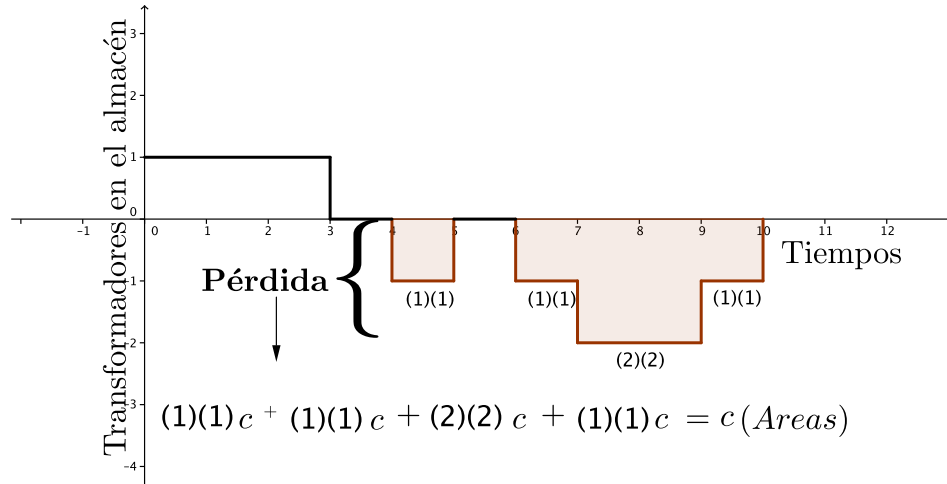


Figura 4.6: Almacenamiento de transformadores, hasta 10 unidades de tiempo, mostrando la pérdida sobre ese período.

La siguiente función restringue solo al área de interés

$$W(t; \underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t; \underline{T}) \geq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t; \underline{T}) < 0 \end{cases}$$

Una vez establecidas las funciones anteriores la función de pérdida esta dada por

$$L(t, \underline{T}; \delta, n_0) = \int_0^t W(s; \underline{T}) ds, \quad (4.1)$$

dicho en palabras la pérdida esta representada por la integral sobre el periodo de observación, de las veces en las cuales el almacén se quedo sin transformadores disponibles para su uso.

Para tener una idea clara de la forma de calcular (4.1), veamos el siguiente que ejemplo.

### Ejemplo:

Supongamos que en el intervalo  $(0, 7)$  de tiempo, ocurrieron solo 6 fallas, en los tiempos dados en la Tabla 4.2. Es de interés conocer el número de transformadores al tiempo 7 con  $n_0 = 3$  y  $\delta = 3$ .

La Figura 4.7 muestra dos gráficas, la primera de lado izquierdo, ilustra a través del tiempo la forma de comportarse del número de transformadores que se usaron para cubrir los tiempos de falla. Por cada tiempo de falla, el número de transformadores en

Tabla 4.2: Valores de  $\underline{T}$ .

0.730	0.812	0.868	2.786	3.064	3.401
-------	-------	-------	-------	-------	-------

el almacén disminuye en 1. Dado que iniciamos con 3 transformadores  $X(0) = 3$ , al final de la sexta falla  $X(3.401) = -3$ .

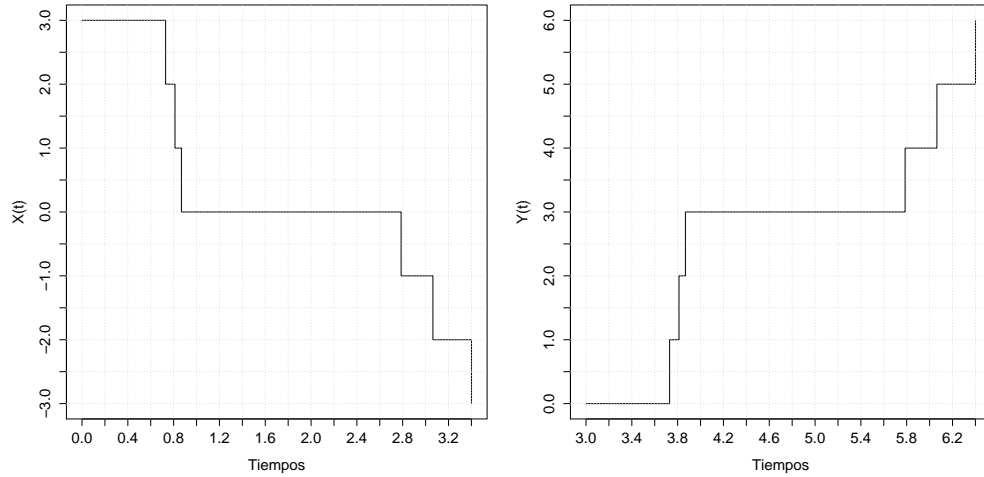


Figura 4.7: **Izquierda:** Función  $X(t)$  el número de transformadores en el almacén que se usaron para cubrir las fallas durante el periodo de observación. **Derecha:** Función  $Y(t)$ , describe los tiempos en que llegaron los transformadores que fueron solicitados.

Mientras que del lado derecho vemos el comportamiento de  $Y(t)$ . Al tiempo cero,  $Y(0) = 0$ , ya que no se ha pedido ningún transformador. La primera llegada ocurrirá al tiempo  $t_1 + \delta = 0.730 + 3 = 3.730$ , de ahí subirá cada  $t_i + \delta$ , donde los  $t_i$ 's son tomados de la Tabla 4.2. La Tabla 4.3 muestra los tiempos en los cuales llegaron los transformadores pedidos.

Tabla 4.3: Valores de  $\underline{\ell}$ .

3.730	3.812	3.868	5.786	6.064	6.401
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Una vez teniendo estas gráficas podemos obtener  $Z(t)$  como la suma de ellas, mostrada en la Figura 4.8, esta gráfica representa los tiempos a los cuales fallaron los transformadores y llegaron los repuestos, de acuerdo a las Tablas 4.2 y 4.3.

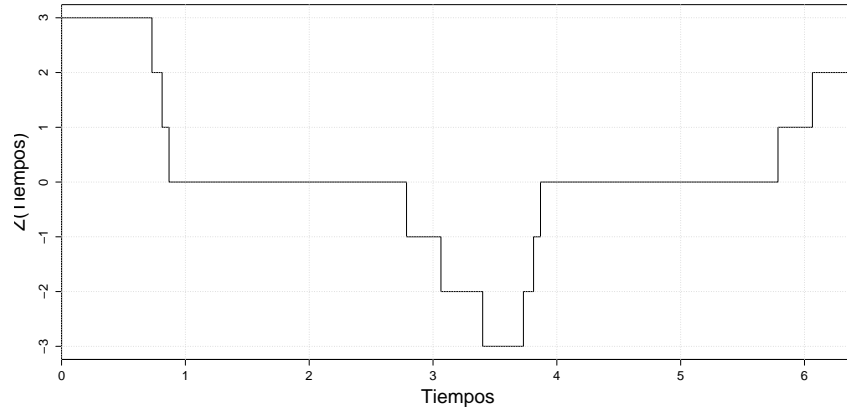


Figura 4.8: Función  $Z(t)$  es el número de transformadores el almacén hasta  $t = 7$ .

El tiempo de permanencia sin transformadores y durante que periodos se observa en la Figura 4.9, representada por la función  $W(t)$ . Esta función es escalonada baja y sube según fue un tiempo de falla o un tiempo de llegada de un transformador pedido. Los valores explícitos de  $W(t)$ , están en la Tabla 4.4.

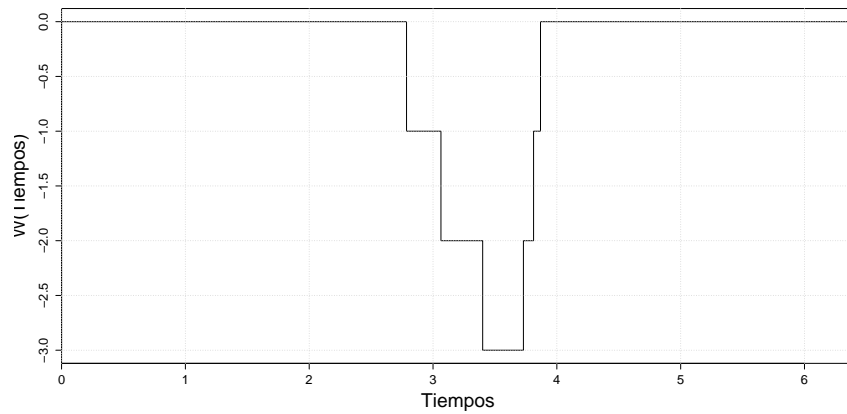


Figura 4.9: Función  $W(t)$  que representa la trayectoria negativa de los transformadores en el almacén.

Tabla 4.4: Valores de la función  $W(t)$ .

Tiempos	0.730	0.812	0.868	2.786	3.064	3.401
$W(\text{Tiempos})$	0	0	0	-1	-2	-3
Tiempos	3.730	3.812	3.868	5.786	6.064	6.401
$W(\text{Tiempos})$	-2	-1	0	0	0	0

La función de pérdida dada en la Ecuación (4.1), se obtiene como el área de la función  $W(t)$ .

$$\begin{aligned}
 L(\underline{T}, 3, 3) &= \int W(s) ds \\
 &= 1(3.064 - 2.786) + 2(3.401 - 3.064) + 3(3.730 - 3.401) \\
 &\quad + 2(3.812 - 3.730) + 1(3.868 - 3.812) \\
 &= 8.159
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de la función de pérdida es 8.159.

### Pérdida Esperada

La función de pérdida dada por la Ecuación (4.1), depende de  $n_0$ ,  $\delta$  que son valores constantes y de  $\underline{T}$  que es una variable aleatoria, por lo tanto la función de pérdida es una función estocástica, en el sentido de que depende de una variable aleatoria. Entonces la pérdida esperada también es una función estocástica, y esta dada por:

$$U(t, n_0, \delta) = E(L(t, \underline{T}, n_0, \delta)). \quad (4.2)$$

Por la ley de los grandes números, la manera de estimar la Ecuación (4.2), es mediante la expresión:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \int_0^t W(y, \underline{T}_s) dy, \quad (4.3)$$

donde  $M$  es el número de  $\underline{T}_s$  simulados. Para calcular la expresión (4.3) por simulación se hace de la siguiente manera:

- I. Se simulan  $M$  trayectorias de tiempos de vida, dicho en otras palabras  $M$  vectores del tipo  $\underline{T}$ .
- II. Para cada trayectoria se calcula la Ecuación (4.1).

III. De los  $M$  valores obtenidos, se obtiene el promedio de ellos, que será la pérdida esperada.

De acuerdo a los pasos anteriores, se realizaron 1000 simulaciones para cada pareja

$$(\delta_i, n_{0_j})$$

donde  $\delta_i = 6, 8$  y  $12$  meses,  $n_{0_j} = 1, 2, \dots, 24$  que representa el número de transformadores al inicio del periodo. Luego se obtuvo el promedio de las funciones de pérdida, calculadas en cada una de las 1000 simulaciones para cada pareja, se consideró un tiempo de observación de 40 años (480 meses).

La Figura 4.10 muestra la gráfica de las pérdidas esperadas para  $\delta = 6, 8, 12$  meses. Observamos que para valores de  $n_0$  pequeños, las perdidas esperadas son grandes. A medida que  $n_0$  crece, los promedios disminuyen. Al considerarse tiempos de espera más largos, los costos también se incrementan, las mayores pérdidas se tienen cuando  $\delta = 12$ , para este periodo de espera se necesitan al menos 24 transformadores al inicio del periodo de observación (Tabla 4.7). Para  $\delta = 8$  se requieren 15 transformadores (Tabla 4.6) y para  $\delta = 6$  se necesitan 15 transformadores en el almacén (Tabla 4.5).

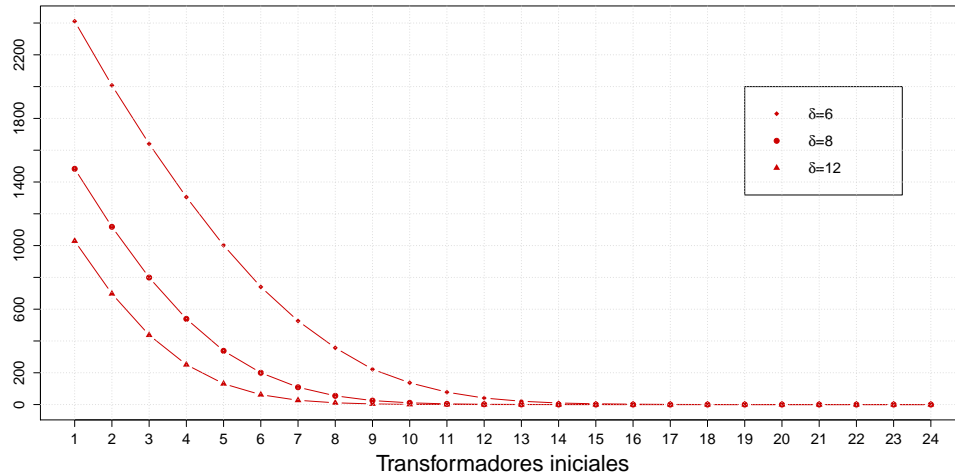


Figura 4.10: Pérdidas Esperadas con la Política A, usando  $t = 480$ ,  $\delta = 6, 8, 12$  y Diferentes Valores de  $n_0$ .

Tabla 4.5: Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1029.433	697.822	437.725	251.263	131.085	62.514	27.148	11.136
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	4.003	1.343	0.446	0.167	0.028	0.040	0.000	0.000
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla 4.6: Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 8$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1483.721	1118.711	799.610	539.082	338.785	200.591	109.192	55.774
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	25.935	11.184	4.376	1.637	0.733	0.219	0.081	0.032
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.004	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00

Tabla 4.7: Política A: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 12$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	2411.0	2008.7	1640.9	1305.0	1002.0	740.5	526.5	357.3
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	222.7	137.1	78.0	41.8	21.1	9.8	4.8	2.3
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	0.9	0.34	0.09	0.03	0.01	0.02	0.003	0.00

Cabe destacar que los valores considerando de  $\delta$ 's y  $t = 480$  meses, se utilizaron para ilustrar la metodología sugerida, puesto que no se tiene acceso a los valores reales. Sin embargo con la metodología propuesta, cualesquiera que fueran los valores reales, los cálculos anteriores pueden realizarse.

#### 4.2.2. Política B

Dentro de esta sección se emplea la política B, para establecer la función de pérdida utilizando los siguientes costos:

##### Costo 1:

El costo de no poder cobrar la electricidad durante un periodo de tiempo donde



no había transformadores en reserva, considerado en la sección anterior.

**Costo 2:**

El costo de almacenamiento por unidad e de tiempo.

Sea  $C$  el costo de no poder cobrar la electricidad en una unidad de tiempo. Luego el costo de almacenar un transformador por una unidad de tiempo, lo podemos expresar en términos de  $C$  como  $rC$ . Asumiendo que el **Costo 1** es mayor que el **Costo 2** entonces  $r \in (0, 1)$ .

La función de pérdida considerando el **costo 1** y el costo inicial de almacenamiento durante la primera unidad de tiempo es:

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = C \int_0^t W(s; \underline{T}) ds + rn_0 C ,$$

Suponiendo  $C = 1$ , es decir, una unidad de dinero. La pérdida se simplifica a:

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s; \underline{T}) ds + rn_0, \quad (4.4)$$

La pérdida esperada puede calcularse como:

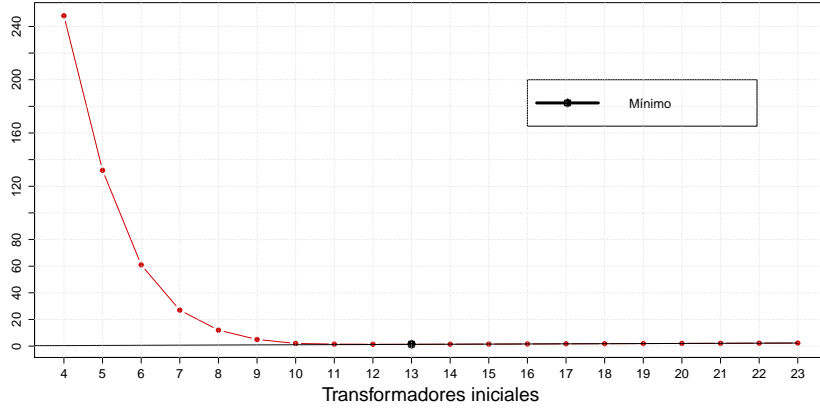
$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left( \int_0^t W(y; \underline{T}_s) dy + n_0 r \right)$$

donde  $M$  es el número de  $\underline{T}$ 's simulados. Es decir, a la pérdida planteada en la sección anterior se le suma la recta  $rn_0$ , como función de  $n_0$ . Esta recta representa los costos de almacenamiento de los transformadores iniciales.

Asignando valores a  $r$ , se puede observar la manera de comportarse de esta función de pérdida (4.4) y los valores de  $n_0$ 's que esta función proporcione. La manera de estimar la pérdida esperada es por medio de simulaciones (como se describe en la política A). A continuación se muestran los resultados.

En la Figura 4.11 observamos las pérdidas esperadas suponiendo distintos números de transformadores iniciales, y  $r = 0.1$ , la recta mostrada corresponde a  $n_0 r$ . A partir de cierto punto la pérdida esperada esta sobre la misma linea que la recta, esto indica que a partir del primer punto en el cual se da este parecido, la pérdida esperada se ve afectada por los costo de almacenamiento.

En la Tabla 4.8 mostramos los valores graficados de la Figura 4.11. De  $n_0 = 1$  hasta 13, la pérdida esperada decrece, a partir de  $n_0 = 13$  la pérdida empieza a crecer lentamente. Por lo que el  $n_0$  óptimo para  $\delta = 6$  meses y  $r = 0.1$  es 13 transformadores.

Figura 4.11: Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 6$  y  $r=0.1$ Tabla 4.8: Política B: Valores de las Pérdida Esperadas con  $\delta = 6$ ,  $r = 0.1$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1026.86	701.26	441.20	248.58	132.61	61.29	27.04	12.30
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	5.50	2.71	1.50	1.39	1.34	1.43	1.50	1.60
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	23
<b>Promedio</b>	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40

Un comportamiento similar se observa en el resto de las Figuras mostradas (4.12 y 4.13).

Para un periodo de reemplazo  $\delta=8$  meses, los resultados de la pérdida esperada se ven en la Figura 4.12 y los valores graficados en la Tabla 4.9. A partir de  $n_0 = 14$  la pérdida esperada empieza a crecer.

Tabla 4.9: Política B: Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 8$ ,  $r = 0.1$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1485.90	1127.06	798.25	545.79	347.76	205.38	114.38	56.49
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	27.63	12.22	6.74	3.51	2.11	1.49	1.52	1.61
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	1.72	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40

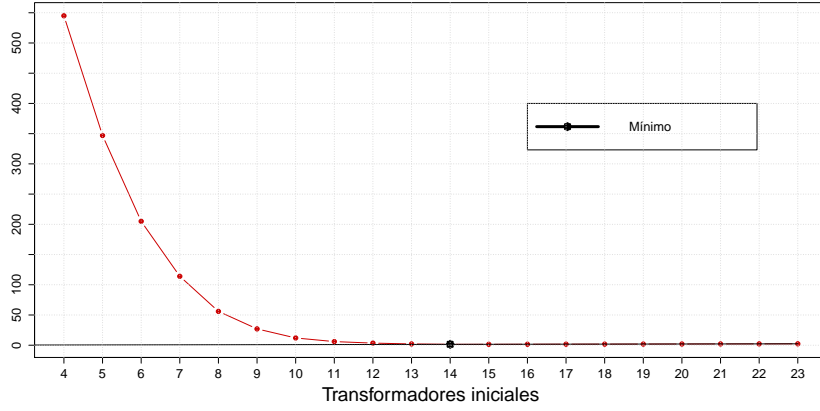


Figura 4.12: Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 8$  y  $r=0.1$

En la Figura 4.13 se muestra la grafica de la pérdida esperada con  $r = 0.5$ . De la Tabla 4.10 se deduce que el número de transformadores iniciales, adecuados en el almacén es  $n_0 = 11$ .

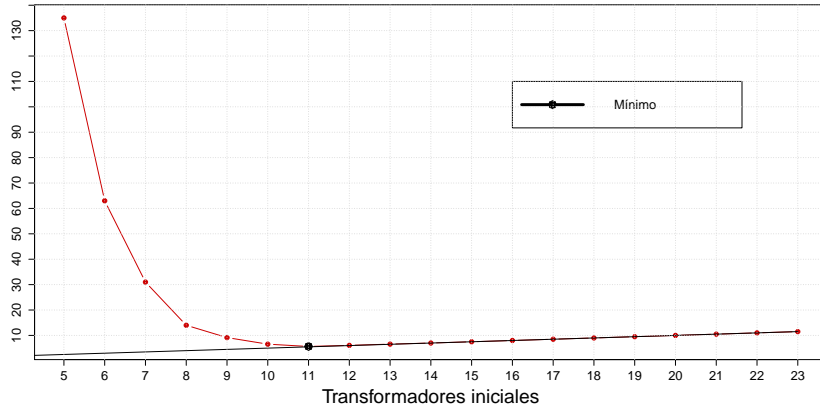


Figura 4.13: Pérdidas Esperadas con la Política B, usando  $\delta = 6$  y  $r=0.5$

### 4.2.3. Política C

Esta última política considera los dos costos empleados en la Política B por unidad de tiempo. La función de pérdida, esta dada por la siguiente expresión.

$$L(t, \underline{T}, \delta, n_0) = \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r \int_0^t A(s, \underline{T}) ds \quad (4.5)$$

Tabla 4.10: **Política B. Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$ ,  $r = 0.5$ .**

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	1030.57	699.97	432.87	249.35	135.35	65.35	31.56	14.56
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	9.15	6.56	5.65	6.08	6.57	7.00	7.50	8.00
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	8.50	9.00	9.50	10.0	10.50	11.00	11.50	12.00

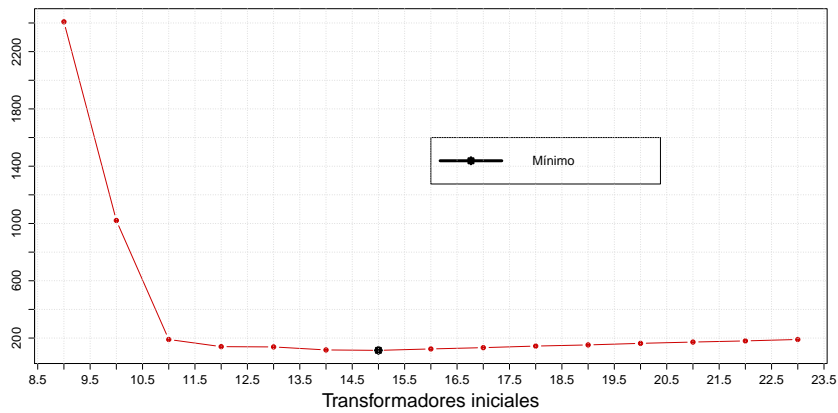
donde:

$$A(t, \underline{T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z(t, \underline{T}) \leq 0, \\ Z(t) & \text{si } Z(t, \underline{T}) > 0 \end{cases}$$

La función  $A(t, \underline{T})$  refleja las pérdidas que existen por almacenar transformadores. Para este caso la pérdida esperada se calcula como:

$$\hat{U}(t, n_0, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left( \int_0^t W(s, \underline{T}) ds + r \int_0^t A(s, \underline{T}) ds \right). \quad (4.6)$$

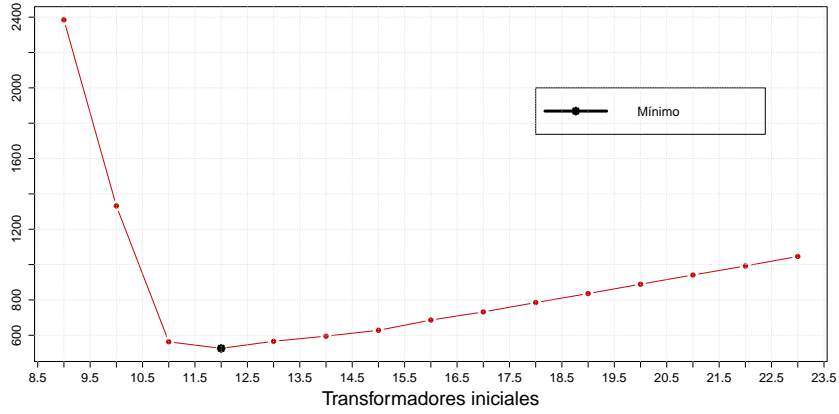
Para evaluar la Ecuación (4.6) procedemos de la misma manera que en las políticas anteriores. A continuación se mostraran algunas gráficas (Figuras 4.14 y 4.15) y Tablas (4.11 y 4.12) de los resultados.

Figura 4.14: **Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 6$  y  $r = 0.01$** 

Las gráficas presentadas tienen un comportamiento similar, a las que previamente ya habíamos obtenido. La tendencia es bajar para los primeros valores de  $n_0$  y posteriormente subir. La diferencia más significativa radica en el hecho de que los costos, a los

Tabla 4.11: Política C. Valores de las Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$  y  $r = 0.01$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	611687.9	413680.9	256825.8	150424.5	75977.0	37610.2	16419.3	6576.2
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	2408.7	1021.0	190.9	140.7	138.1	117.3	114.6	124.0
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	133.4	144.0	152.2	163.5	172.2	180.6	190.4	199.2

Figura 4.15: Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 6$  y  $r = 0.1$ .Tabla 4.12: Política C: Valores de la Pérdidas Esperadas con  $\delta = 6$  y  $r = 0.1$ .

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio</b>	606757	417457	258881	151181	78446	38066	15675	6799
$n_0$	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>Promedio</b>	2385	1332	563	526	566	576	628	686
$n_0$	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>Promedio</b>	732	785	836	889	941	992	1046	1098

cuales se minimiza  $n_0$  son mucho mayores que en las anteriores funciones de pérdida. Este hecho se debe a que dentro de esta última política se consideran costos de almacenamiento por cada unidad de tiempo.

### 4.3. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se han obtenido valores para el número de transformadores iniciales que se deben de tener en el inventario. La Tablas 4.13, 4.14 y 4.15, resumen

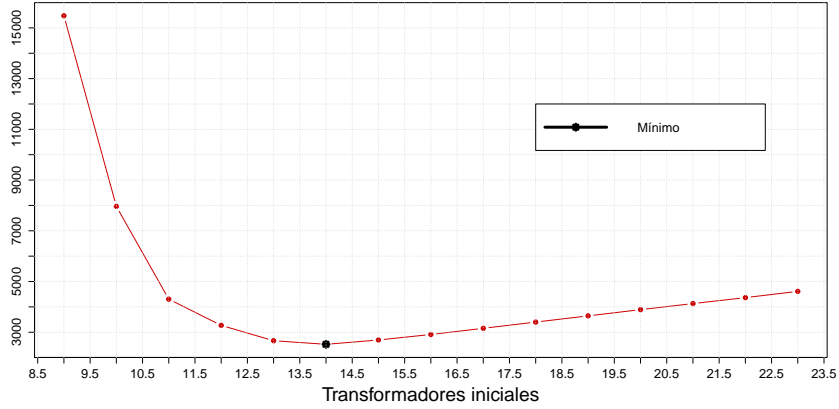


Figura 4.16: **Pérdidas Esperadas con la Política C, usando  $\delta = 8$ ,  $r = 0.5$ .**

los valores obtenidos y mencionados en las secciones anteriores.

Tabla 4.13: **Resultados de la Política A.**

$\delta$	$n_0$	costo
6	15	0.00
8	19	0.00
12	24	0.00

En la Tabla 4.13 se muestran los valores óptimos de transformadores iniciales que deben tenerse en el almacén, para un periodo de tiempo de 40 años con diferentes valores de  $\delta$ , bajo la política A. Es normal observar que entre mayor sea el periodo de espera de un transformador solicitado, mayor será el número de transformadores requeridos para el almacenamiento. Los costos asociados son cero, indica que a partir de la cantidad  $n_0$  de transformadores, no habrá pérdidas en cuanto a la falta de ellos. Las conclusiones anteriores corresponden solo al considerarse un costo. Para ambos costos, los resultados se muestran en la Tabla 4.14, para diferentes valores de  $r$  y usando la política B.

De la Tabla 4.14 notamos que al añadir costos de almacenamiento inicial, los costos para  $n_0$  obtenidos no se minimizan a cero.

Cuando  $r = 0.01$ , indica que si el costo de no tener un transformador disponible es  $c$ , entonces el costo por tener un transformador almacenado y no usarlo es  $rc = \frac{1}{100}c$ . El quedarse sin un transformador es 100 veces más caro que almacenar un transformador y no usarlo. Para un periodo de espera  $\delta = 8$  meses se obtiene que  $n_0 = 17$  y el costo

Tabla 4.14: **Resultados de la Política B.**

$\delta$	$n_0$	costo	$r$
6	14	0.14	0.01
8	17	0.16	0.01
12	22	0.20	0.01
6	13	1.34	0.1
8	14	1.49	0.1
12	20	2.00	0.1
6	11	5.65	0.5
8	14	7.11	0.5
12	18	9.16	0.5

asociado es 0.16. El valor de  $n_0$  es menor que el obtenido en la Tabla 4.13, pero el costo es mayor. Esto se debe a que la función de pérdida dada por la Ecuación (4.4), involucra costos de almacenamiento, entonces la pérdida esperada buscará tener la mínima cantidad de transformadores al costo más pequeño posible. Los resultados obtenidos para  $r = 0.01$  no son tan significativamente variante de los mostrados en la Tabla 4.13, ya que la proporción  $r$ , es pequeña. Las diferencias notorias son para valores de  $r$  mayores.

Al tener  $r = 0.1$ , indica que el quedarnos sin transformadores es 10 veces más costoso que tener almacenados transformadores. Los costos a los cuales se minimiza la pérdida esperada oscilan de 1 a 2 unidades de  $c$  y los valores de  $n_0$  son menores o iguales al considerar solo la política A. Un efecto similar ocurre al considerar  $r = 0.5$ .

A medida que  $r$  crece, el valor de  $n_0$  se hace pequeño y el costo aumenta. Entre mayor sea el costo de almacenamiento, se buscará tener menos transformadores.

Finalmente para la política C, los costos aumentan significativamente respecto a la política A y B. Ahora se consideran costos por unidad de tiempo, tanto de falta de ellos como de almacenamiento. Así que se busca no tener transformadores en el almacén pero tampoco necesitarlos, razón por la cual, los costos de optimización para esta política son altos y los valores de  $n_0$  asociados son menores a los de las políticas anteriores.

Una vez presentadas las funciones de pérdida planteadas y los resultados obtenidos. La pregunta de mayor interés es ¿Cuál es la más adecuada?. La aplicación de cualquiera de ellas dependerá de las condiciones reales del problema, determinadas por la empresa. Por ejemplo, si dentro la empresa, el principal costo a minimizar es el de no poder cobrar la electricidad, en el tiempo que no se tenga un transformador de reem-

Tabla 4.15: **Resultados de la Política C.**

$\delta$	$n_0$	costo	$r$
6	15	114	0.01
8	16	119	0.01
12	20	145	0.01
6	12	526	0.1
8	15	606	0.1
12	20	779	0.1
6	11	2209	0.5
8	14	2524	0.5
12	15	8836	0.5

plazo, entonces aplicaríamos la propuesta A. Si por otra parte la empresa determina que además de considerar el costo de no tener transformadores disponibles, le interesa minimizar el costo de almacenamiento  $n_0$ , al inicio de su periodo de observación, más el costo de no tenerlos. Y justifica que a lo largo del tiempo el adquirir solo un transformador a la vez no le afecta de manera significativa, pero que el adquirir más de uno, si representa gastos importantes, entonces sería adecuado considerar política B. Finalmente si para la empresa los costo de almacenar y de no tener transformadores en reserva afectan de manera importante, emplearíamos la última función de pérdida propuesta. La aplicación de las políticas estará ligada esencialmente a las necesidades de la empresa que se dedica a emplear como instrumentos de trabajo este tipo de transformadores.

A lo largo de este capítulo hemos planteado una manera de proponer una función, que cuantifique la pérdida esperada por la falta de transformadores en el almacén. Existen distintas formas de plantear el remplazamiento de los transformadores, inclusive otras funciones de pérdida podrían ser exploradas. Sin embargo dentro del desarrollo de este trabajo se propuso una posible solución y se presentaron los resultados.



## Capítulo 5

# Conclusiones Generales y Estudios Futuros

El objetivo principal de este trabajo, fue proponer una política de inventario de transformadores de instrumento, empleando herramientas de estadística Bayesiana. La importancia de desarrollar esta política, se debe a que los transformadores de instrumento son objetos de medición costosos y se adquieren bajo pedido. La mayoría de las veces, las empresas que necesitan estos transformadores, observan aproximadamente cuantos de sus equipos fallarán en un cierto periodo de tiempo, para fijar la cantidad que tendrán en el almacén o inventariados. Sin embargo no se centran en minimizar los costos generados durante el periodo de observación. Este trabajo tuvo como finalidad minimizar estos costos.

A continuación se mencionan los aspectos más relevantes aportados dentro de esta tesina.

- La manera de abordar el problema de inventario fue mediante el empleo de estadística Bayesiana, asignándole una distribución de probabilidad a los parámetros de la distribución de los tiempos de vida (Weibull).

Para realizar estadística Bayesiana, necesitamos establecer distribuciones a priori para los parámetros. En la literatura, la determinación de ellas usualmente no se explica, se menciona que debe ser construida en base al conocimiento previo del experto, pero no se detalla la manera de modelar este conocimiento a priori en una distribución de probabilidad. En esta tesina se explica de manera detallada un método para establecer y modelar estas distribuciones a priori.

- El tiempo de vida de los transformadores es una variable aleatoria, por lo tanto, no se sabrá exactamente cuántos transformadores fallarán en cierto intervalo de tiempo.

Para proponer la política de almacenamiento o inventario, es necesario establecer una función de pérdida que refleje los costos de pérdidas asociados al inventario. Sin embargo esta función dependerá de la variable aleatoria que describe los tiempos de vida de los transformadores, así que para establecer la política de almacenamiento óptima, se centró en la minimización del valor esperado de la función de pérdida, por lo que se plantearon algunas funciones de pérdida para describir las pérdidas monetarias de la empresa. Además se detalló la manera de construir y evaluar estas funciones. Dado que al evaluarlas se tienen aspectos aleatorios, se realizaron simulaciones, las cuales permitieron observar el fenómeno de las fallas a lo largo de cierto tiempo y posteriormente obtener la pérdida esperada. El procedimiento expuesto también puede adaptarse a otros problemas de inventario.

### 5.1. Trabajo a futuro

La estadística Bayesiana en el presente es de gran utilidad. Siempre existe la inquietud de lo que pasaría si otras distribuciones iniciales, fueran consideradas. Sería interesante explorar otros métodos para el establecimiento de las distribuciones a priori, tales como distribuciones uniforme o no informativas. Una vez estableciendo estas distribuciones a prioris comparar los resultados con los obtenidos en esta tesina.

En la mayoría de las ocasiones, la distribución posterior para los parámetros resulta una expresión compleja y difícil de evaluar, de ahí la importancia del desarrollo de los algoritmos MCMC. Los algoritmos MCMC varían dependiendo de su construcción. El empleado en esta tesina fue un algoritmo Metropolis-Hasting. Un trabajo a futuro es realizar la construcción de un algoritmo Gibbs Sampling o la implementación de un Metropolis-Hasting con alguna distribución propuesta que utilice condiciones del fenómeno a modelar.

Finalmente conocer más aspectos sobre las políticas de inventario de las empresas que se dedican a cobrar el servicio de electricidad, ayudará a determinar una función de pérdida más completa, en el sentido de considerar todos los costos involucrados en el inventario. Un aspecto interesante sería realizar la propuesta sobre la implementación de una política de inventario o almacenamiento, a alguna empresa en particular y emplear los métodos descritos en esta tesina.

# Bibliografía

- [1] Peter M. Lee. “**Bayesian Statistics an introduction**”. A member of the Hodder Headline Group LONDON (2004).
- [2] William Q. Meeker and Luis A. Escobar. “**Statistical Methods for Reliability Data**”. Wiley series in Probability and Mathematical Statistics (1998).
- [3] Michael S. Hamada Alyson G. Wilson, C. Shane Reese Harry F. Martz “**Bayesian Reliability**”. Springer-Science+Business (2008).
- [4] J.F. Lawless “**Statistical models and methods for lifetime data**”. Wiley series in Probability and Mathematical Statistics (1982).
- [5] Ming-Hui Chen, Qi-Man Shao and Joseph G. Ibrahim. textbf“Monte Carlo Methods in Bayesian Computation”. Springer-Verlag (2000).
- [6] J. M. Bernardo and A. F. M. Smith “**Bayesian Theory**”. Wiley series in probability and mathematical statistics (1994).
- [7] R Development Core Team(2010). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-070, URL <http://www.R-project.org>.
- [8] George Casella; Edward I. George “**Explaining the Gibbs Sampler**”. The American Statistician & Vol. 46, No. 3. (Aug ., 1992), pp. 167-174. World Scientific (2000).
- [9] David B. Hitchcock “**A History of the Metropolis-Hastings Algorithm**”. The American Statistician & Vol. 57, No. 4. (Nov., 2003), pp. 254-257.
- [10] Siddhartha Chib; Edward Greenberg “**Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm**”. The American Statistician & Vol. 49, No. 4. (Nov., 1995), pp. 327-335.

- 
- [11] Norman L. Johson; Samuel Kotz; N. Balakrishnan **“Continuous Univariate Distribution”**. Volume 1. Second edition Wiley series in probability and mathematical statistic (1994).
  - [12] Geman, S. and D. Geman. **“Gibbs distribution and Bayesian restoration of images”** . Stochastic relaxation. IEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 6. (1984), pp 721-741.