Proofs 1

alessandro.manfucci@studenti.unitn.it

20/07/2023

Table of contents

1 Equazioni di ricorrenza

1.0.1 Template

$T(n) = a_1T(n/b_1) + a_2T(n/b_2) + f(n)$

i) $T(n)$ crescente e positiva
ii) $T(n) \geq f(n) \implies T(n) = \Omega(f(n))$
iii) $T'(n) = (a_1 + a_2) \cdot T'(n/min(b_1, b_2)) + f(n),\ T(n) \leq T'(n) \implies T(n) = O(...)$ per il MT
iv) $T'(n) = (a_1 + a_2) \cdot T'(n/max(b_1, b_2)) + f(n),\ T(n) \geq T'(n) \implies T(n) = \Omega(...)$ per il MT
v) Vogliamo dimostrare che $T(n) = O(f(n))$, ovvero che con $c > 0, m \geq 0$ vale $T(n) \leq cf(n) \forall n \geq m$

- *Base:*
- *Ipotesi induttiva:*
- *Passo induttivo:*

1.1 Metodo dell'albero di ricorsione

Livello	**Dim. input**	**Costo per chiamata**	**N. chiamate**	**Costo livello**

1.2 Master Theorems

TEO.1 Ricorrenze lineari con partizione bilanciata

Siano a e b costanti intere tali che $a \geq 1$ e $b \geq 2$. Siano poi c e β costanti reali tali che $c > 0$ e $\beta \geq 0$. Sia $T(n)$ una funzione di ricorrenza della seguente forma:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + cn^\beta & \text{se} \quad n > 1 \\ d & \text{se} \quad n \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Allora, posto $\alpha := \frac{\log a}{\log b} = \log_b a$ vale:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha}) & \text{se} \quad \alpha > \beta \\ \Theta(n^{\alpha} \log n) & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ \Theta(n^{\beta}) & \text{se} \quad \alpha < \beta \end{cases} \tag{2}$$

- **Proof**:

TEO.2 Ricorrenze lineari con partizione bilanciata – Est.

Siano $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ una funzione asintoticamente positiva. Sia poi $T(n)$ una funzione di ricorrenza della seguente forma:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se} \quad n > 1 \\ d & \text{se} \quad n \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Allora, posto $\alpha := \frac{\log a}{\log b} = \log_b a$ vale:

1) *Se* $\exists \epsilon > 0 : f(n) = O(n^{\alpha - \epsilon})$
   allora $T(n) = \Theta(n^{\alpha})$
2) *Se* $f(n) = \Theta(n\alpha)$
   allora $T(n) = \Theta(f(n) \log n)$
3) *Se* $\exists \epsilon > 0 : f(n) = \Omega(n^{\alpha + \epsilon}) \wedge \exists c : 0 < c < 1, \exists m \geq 0 : af(n/b) \leq cf(n) \forall n \geq m$
   allora $T(n) = \Theta(f(n))$

- **Proof**:

TEO.3 Ricorrenze lineari di ordine costante

Siano $a_1, a_2, ..., a_h$ costanti intere non negative con h costante e positivo. Siano poi c e β costanti reali tali che $c > 0$ e $\beta \geq 0$. Sia infine $T(n)$ definita dalla seguente funzione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{h} (a_i T(n-i)) + cn^{\beta} & \text{se} \quad n > m \\ \Theta(1) & \text{se} \quad n \leq m \leq h \end{cases} \tag{4}$$

Allora, posto $a = \sum_{i=1}^{h} a_i$ vale:
1) $a = 1 \implies T(n) = \Theta(n^{\beta+1})$
2) $a \geq 2 \implies T(n) = \Theta(a^n \cdot n^{\beta})$

- **Proof**:

1.3 Proprietà dei logaritmi

1. $\log_a a = 1$	*Proprietà fondamentale*
2. $\log_a 1 = 0$	*Proprietà fondamentale*
3. $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$	*Teorema del prodotto*
4. $\log_a b \cdot c = \log_a b - \log_a c$	*Teorema del rapporto*
5. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$	*Teorema della potenza*
6. $\log_{a^n} bm = \frac{m \cdot \log_a b}{n}$	*Potenza alla base e all'argomento*
7. $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$	*Base frazionaria*
8. $\log_a \frac{1}{b} = -\log_b a$	*Argomento frazionario*
9. $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$	*Base e argomento frazionario*
10. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	*Commutazione base e argomento*
11. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	*Cambio di base*
12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	*Scambio base-argomento*

1.4 Serie matematiche convergenti

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} k = \frac{k(k+1)}{2}$	*Formula di Gauss*
2. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \forall q : \lvert q \rvert \geq 1$	*Serie geometrica finita*
3. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \forall q : \lvert q \rvert < 1$	*Serie geometrica finita*
4. $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \forall \lvert q \rvert < 1$	*Serie geometrica infinita decrescente*
5. $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2} \forall \lvert q \rvert < 1$	*Serie geometrica infinita decrescente*
6. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1$	*Serie di Mengoli*