Álgebra

Ejercicio 1. (2 ptos) Matrices y Operaciones.

a) (1 pto) Sean los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determina si el vector **u** pertenece a Env { v_1, v_2, v_3 }

Solución

El vector u pertenece a la envoltura si existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que: $c_1 v_1 + c_2 v_3 + c_3 v_3 = u$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es determinado con solución única, tenemos que *u* sí pertenece a la envoltura.

b) (1 pto) Sea S = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 } un conjunto de vectores de R^4, donde:

$v_1 = (1,2,-2,1)$, $v_2 = (-3,0,-4,3)$, $v_3 = (2,1,1-1)$, $v_4 = (-3,3,-9,6)$, $v_5 = (9,3,7,-6)$.

Determina una **base para S** formada por vectores del conjunto S.

Solución

Paso 1: Formamos la ecuación:

$$c_1(1,2,-2,1) + c_2(-3,0,-4,3) + c_3(2,1,1-1) + c_4(-3,3,-9,6) + c_5(9,3,7,-6) = 0$$

Paso 2: se obtiene el sistema homogéneo asociado:

$$\begin{array}{rrrrrcl} c_1 & -3c_2 & +2c_3 & -3c_4 & +9c_5 & = & 0 \\ 2c_1 & & +c_3 & +3c_4 & +3c_5 & = & 0 \\ -2c_1 & -4c_2 & +c_3 & -9c_4 & +7c_5 & = & 0 \\ c_1 & +3c_2 & -3c_3 & +6c_4 & -6c_5 & = & 0 \end{array}$$

Paso 3: como La forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como las columnas 1 y 2 tienen unos principales, la base para S está formada por los vectores { v_1, v_2 }

Álgebra

Ejercicio 2. (2,5 ptos) Resolución de Sistemas de Ecuaciones con métodos directos

Un fabricante utiliza 4 ingredientes E, F, G y H en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean *x, y, z,* y *t* las cantidades respectivas de E, F, G y H que componen cada producto. Una unidad de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas A, B, C y un número de kilocalorías en las cantidades que se reflejan en la tabla siguiente:

	E	F	G	H
Vitamina A	1	1	1	2
Vitamina B	1	2	1	3
Vitamina C	1	3	2	1
kilocalorías	2	2	1	1

Si designamos respectivamente por *u, v, r* y *w* a los miligramos de vitamina A, B, C y a las kilocalorías que tendrá el producto elaborado por los 4 ingredientes, se pide:

a) (0,5 ptos) Expresa **matricialmente** la relación entre las cantidades de *x, y, z, t* y *u, v, r*, *w.*

b) (1 pto) **Justifica** si dados unos valores fijos de *u, v, r* y *w* es posible encontrar de forma única valores de *x, y, z* y *t* que proporcionen esos miligramos de vitaminas y esas kilocalorías.

c) (1 pto) Calcula qué **cantidad** de cada ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de 300 mg. de vitamina A, 430 mg. de B, 320 mg. de C y 250 kilocalorías.

Solución

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \\ w \end{bmatrix}$$

b) El sistema es siempre compatible determinado porque la matriz de coeficiente es invertible, lo que se puede comprobar calculando su determinante.

c)

d) Resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 430 \\ 310 \\ 250 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la solución x = 20, y = 30, z = 50, t = 100

Álgebra

Ejercicio 3. (2,5 ptos.) Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la factorización LU

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales Ax = b dado por las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) (1'25 ptos) Encuentra una **factorización LU** de la matriz A.
b) (1'25 ptos) Usa la factorización anterior para **resolver** el sistema lineal dado.

Solución

a)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 7/2 & 19/2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$

Ejercicio 4. (3 ptos) Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 18 & -8 \end{bmatrix}$$

a) (0'5 ptos) Calcula el **polinomio característico.**
b) (0'5 ptos) Calcula los **valores propios**
c) (1 pto) Consigue una **base** para cada subespacio propio indicando su dimensión.
d) (1 pto) A partir de los resultados obtenidos escribe una matriz diagonal D tal que **$D = P^{-1}A\,P$.**

Solución

(a) $-\lambda^3 + 110\lambda - 111=0$

(b) $\lambda = 1$ (simple), $\lambda = -11$ (simple), $\lambda = 10$ (simple)

(c) Para $\lambda = 1$, base B1 = {(1,0,0)}, dim(B1) = 1; para $\lambda=-11$, base B2 = {(1,-1,6)}, dim(B2) = 1 y para $\lambda = 10$, base B3 = {(-1,1,1)}, dim(B3) = 1

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$