MATRIZ: Estructura dispuesta en filas y columnas para almacenar elementos. *Se* denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... Los elementos de una matriz A se denotan por: aij, donde i son las filas y j las columnas. A = (aij) = [aij]

La dimensión o tamaño de A, que se denota por mxn donde m es el número de filas y n el de columnas, indica el nº de elementos de la matriz A.

Existen distintos tipo de matrices: ver "M1-TiposMatrices.pdf"

MATRICES IGUALES: A = (aij) y B = (bij) son iguales si son del mismo tamaño y las componentes correspondientes son iguales.

SUMA DE MATRICES: A = (aij) m×n, B = (bij) m×n → C = A+B = (cij) m×n = (aij+bij

Condición necesaria para sumar matrices: las matrices deben ser de igual tamaño.

PRODUCTO DE MATRIZ POR ESCALAR: A = (aij) m×n, $\alpha \in \mathbb{R}$, α A = α aij (i=1,...m), (j=1,...n)

Propiedades: Sean A, B matrices mxn, α,β, escalares.

a) $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$;

b) $(\alpha+\beta)A= \alpha A+\beta A$;

c) $\alpha(\beta A)= (\alpha\beta)A$;

d) $1A=A$;

e) $(\alpha A)^T= \alpha(A^T)$;

PRODUCTO VECTORIAL: Sean a= (a1,…an) y b=(b1,…bn) vectores. El producto escalar de a y b, a.b, es el número:

a.b = (a1,…an). (b1,…bn)T = (a1b1+ a2b2+… anbn)

a.b = b.a (conmutativa)

PRODUCTO MATRICIAL

Sean las matrices A = $[a_{ik}]$mxn y B = $[b_{kj}]$nxp. El producto AB es la matriz C = $[c_{ij}]$ de tamaño mxp de forma que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_2j + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Condición **<u>necesaria</u>** para multiplicar matrices: El nº de columnas de A debe coincidir con el de filas de B

El producto de matrices no es conmutativo, en general.

El producto de matrices no nulas puede ser la matriz nula.

El producto de matrices A, B simétricas es matriz simétrica si A y B conmutan, es decir, si AB = BA

<u>Propiedades</u>

a) Asociativa: Sean A(nxm), B (mxp), C(pxq), entonces A(BC) (nxq) = (AB)C (nxq)

b) Distributiva: Sean A(mxn), B y c (nxp), entonces A(B+C)(mxp) = AB (mxp) + AC (mxp),

c) Sean A(mxn), B(nxp), entonces $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

d) Sean A(mxn), B(nxp), entonces $(AB)^T = B^TAT$

e) Si A(mxn) entonces $AO_{nxp} = O_{mxp}$; $O_{lxm}\, A = O_{lxn}$ también $I_mA = A = AI_n$

POTENCIA DE UNA MATRIZ

$$A^K = \begin{cases} \overbrace{A\cdots A}^{k \text{ factores}}, & \text{si } k > 0 \\ I, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Propiedades. Si **A** es una matriz cuadrada y **r** y **s** enteros no negativos, entonces:

a) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$; $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

b) $A^rA^s = A^{r+s}$

c) $(A^r)^s = A^{rs}$

d) $A^rA^s = A^{r+s} = A^sA^r$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Se dice que una matriz A, nxn es **invertible** si existe otra matriz B, nxn, tal que: **BA = AB = I**

Donde **I** es la matriz identidad nxn. B es la matriz inversa de A, B = A^{-1} , se escribe **A A^{-1} = A^{-1}A = I**

La matriz inversa, si existe, es única.

a) La matriz cuadrada nula no es invertible pues OB = O por lo que AB $\neq$ **I**. Una fila con fila/columna cero no tiene inversa.

b) La matriz identidad es invertible y su inversa es ella misma pues: **II** = **II** = **I**

Como las matrices no se pueden dividir entre ellas se usa la inversa para despejar matrices en ecuaciones matriciales.

Ej. Si tenemos AX = B, para despejar X se debe determinar 1º si A es invertible y si es así, operar con la inversa de A para obtener X.

A^{-1} AX = A^{-1} B → X = A^{-1} B

Propiedades:

Sean A y B matrices invertibles del mismo tamaño:

a) A-1 es invertible y (A-$^{-1}$ 1) = A

b) AT es invertible y $(A^T)^{-1}$ = $(A\text{-}1)^T$

c) Si $\alpha \neq$ o entonces α A es invertible y $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}$

d) AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

SIMPLIFICAR MATRICES

Teorema 2.14: Sean A y B matrices (*m*xn) y C (nxn) invertible. Sean D y E matrices (nxp)

a) Si AC = BC entonces A = B

b) Si CD = CE entonces D = E

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR BLOQUES

Una matriz A está **dividida o particionada en bloques** si se puede organizar como una matriz de submatrices (bloques) de la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & & \cdots & \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pr} \end{array}\right].$$

> Los bloques se obtienen trazando imaginariamente rectas verticales y horizontales entre los elementos de la matriz A.

> Los **bloques** se designan por: **Aij**.

Condición <u>necesaria</u> para multiplicar matrices A y B /bloques**:** El nº de bloques columna de A = nº de bloques fila de B

> Los bloques deben respetar los tamaños de la multiplicación de matrices usual

EJEMPLO

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right].$$

Matriz A formada por 2 x 3 bloques:
2 filas y 3 columnas de bloques

Definición 3.4 *Se define el producto de dos matrices A y B descompuestas en bloques como la matriz por bloques C que tiene en la posición (i,j) el bloque*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} B_{kj}$$

PARTICIONES ESPECIALES DE MATRICES QUE FACILITAN el PRODUCTO AB, Amxn, Bnxp

a) Se divide la matriz **B por columnas/** B = b:1, b:2,…b:p, donde cada columna es una matriz nx1.

El producto Ab:j es una matriz (mx1) que coincide con la j-ésima columna de la matriz producto AB.

AB = A[b:1, b:2,…b:p] = [Ab:1, Ab:2,…Ab:p]

b) Se divide la matriz **A por filas/**A = [a1:,a2:,…am:]$^{T.}$ El producto AB= [a1:,a2:,…am:]^T B = [a1:B, a2:B,…am:B]T.

El producto ai:B es la **fila i-ésima** del producto AB

c) Se expresa A por filas y B por columnas.

[a1:,a2:,…am:]^T [b:1, b:2,…b:p]. Cada producto ai:bj: es un escalar y la matriz producto es:

AB = [a1:b:1, a1:b:2,…..a1:b:p; ….. am:b:1, a1:b:2,…..am:b:p] = [ai:b:j]mxp

d) Se expresa A por columnas y B por filas.

AB = [a:1,a:2,…a:n]^T [b1:, b2:,…bn:]. Cada producto a:ib:j es una matriz mxp y el producto que es:

AB = [a:1b1: + a:2b2: +…+ a:nbn:] viene expresado como suma de matrices.

e) Si una de las dos matrices es diagonal, el producto es más sencillo.

→ Si A es diagonal nxn, se expresa B por fila:

AB = [a11,0,…0; 0,a22,…0; 0,…0,ann][b1:,b2:,…bn:]^T = [a11b1:; a22b2:;…annbn:]^T

Se multiplica cada fila de B por el elemento diagonal correspondiente de A.

→ Si B es diagonal nxn, se expresa A por columnas:

AB =][a:1, a:2,…a:n] [b11,0,…0; 0,b22,…0; 0,…0,bnn] = [b11a:1; b22a:2;…bnna:n]

Se multiplica cada columna de A por el elemento diagonal correspondiente de B