Ejercicio 1

MATEMÁTICA DISCRETA JUNIO 2016

1.(a) $G = (V, A)$ $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

cuarta fila $(3\ 1\ 1\ 2\ 0)$
segunda fila $(1\ 0\ 2\ 1\ 0)$

- Indica cuál es el grado del vértice v_2.

  - Grado V_2 es la suma de la segunda fila.

    $1 + 0 + 2 + 1 + 0 = 4$ $d_G(v_2) = 4$

- Calcula el conjunto $\Gamma(v_4)$ (vértices adyacentes a v4)
  cuarta fila $(3\ 1\ 1\ 2\ 0)$ - los vértices adyacentes son v1 v2 v3 porque son los que hay una arista que los une a v4.
  Tienen valor $\neq 0$.
- Indica si el grafo es simple.
  - El grafo no es simple porque contiene bucles, como se aprecia en la cuarta fila $(3\ 1\ 1\ 2\ 0)$
    bucle

- Calcula el número de cadenas de longitud 2 del vértice v_2 al v_4. (Matriz de adyacencia al cuadrado)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times (1\ 0\ 2\ 1\ 0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.b) Vertices grado 3 $\Rightarrow$ n

Vértices grado 4 $\Rightarrow$ 3

Vértices grado 2 $\Rightarrow$ 3

Vértices grado 1 $\Rightarrow$ 13

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \{ v \in V,\ d_G(v) = 1 \} \\ V_2 = \{ v \in V,\ d_G(v) = 2 \} \\ V_3 = \{ v \in V,\ d_G(v) = 3 \} \\ V_4 = \{ v \in V,\ d_G(v) = 4 \} \end{array}\right| \begin{array}{l} |V_1| = 13 \\ |V_2| = 3 \\ |V_3| = n \\ |V_4| = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = V \\ V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ V_1 \cap V_3 = \emptyset \\ V_1 \cap V_4 = \emptyset \\ V_2 \cap V_3 = \emptyset \\ V_2 \cap V_4 = \emptyset \\ V_3 \cap V_4 = \emptyset \end{array}\right\} \{V_1, V_2, V_3, V_4\} \text{ Partición de } V.$$

$$Card(V) = Card(V_1) + Card(V_2) + Card(V_3) + Card(V_4)$$

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v) + \sum_{v \in V_3} d_G(v) + \sum_{v \in V_4} d_G(v)$$

$$|V| = |V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4|$$

Teoremas

$$G(V,A) \Rightarrow \sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot Card(A)$$

$$árbol(V,A) \Rightarrow Card(A) = Card(V) - 1$$

$$T(V,A) \text{ árbol} \Rightarrow \sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot Card(A) - 2$$

$$13 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot n + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot n + 2 \cdot 3 - 2$$

$$13 + 6 + 3n + 12 = 26 + 6 + 2n + 6 - 2$$

$$3n + 31 = 36 + 2n$$

$$3n - 2n = 36 - 31$$

$$\boxed{n = 5}$$

Ejercicio 2

MATEMÁTICA DISCRETA JUNIO 2016

PERT

TEORIA

¿POR QUÉ? - No acíclico
- Nº creciente

¿CÓMO? Buscar $v \in V$, $d_e(v$ #1, Borrar, reiterar

Ec. Bellman

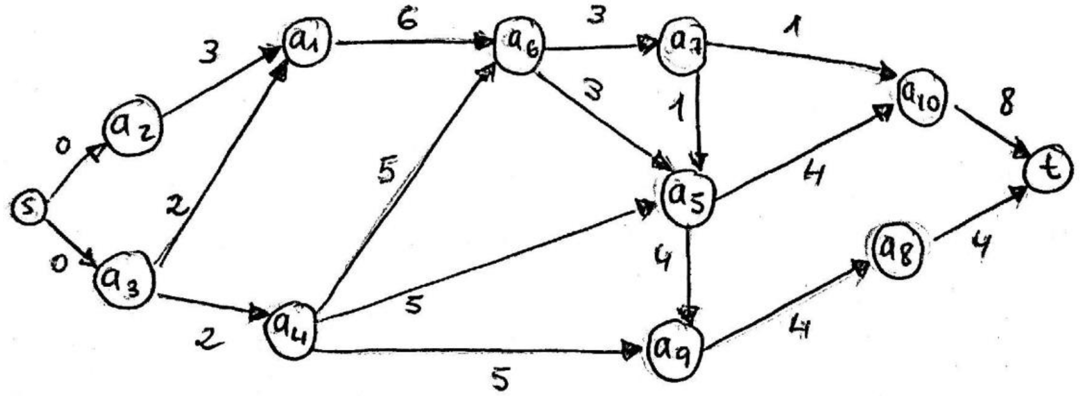
$$u_j = \max_{k<j} u_k + w_{kj}$$

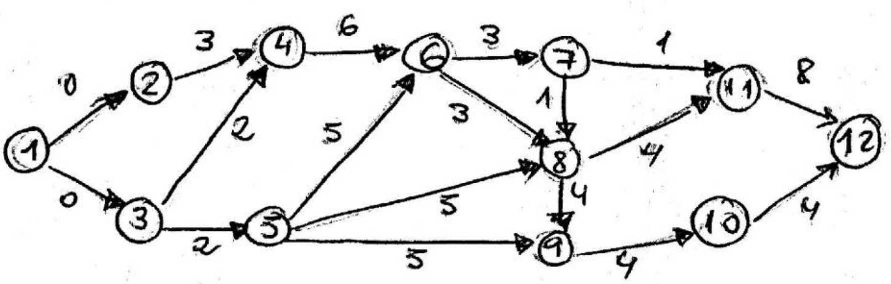
Camino crítico

- Camino compuesto por actividades críticas que no se pueden atrasar sin retrasar el proyecto final.

Holgura

- Máximo ~~número de días~~ retraso admisible en actividad X remunerada en act. Y, que alcanza el camino crítico de dos formas.





Ejercicio 2

$u_1 = 0$

$u_2 = \max\{u_1 + w_{12}\} = 0$

$u_3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$

$u_4 = \max\{\underline{u_2 + w_{24}}, u_3 + w_{34}\} = \max\{\underline{0+3}, 0+2\} = \{\underline{3}, 2\} = \{3\}$

1-2-4

$u_5 = \max\{u_3 + w_{35}\} = \max\{0+2\} = \{2\}$ 1-3-5

$u_6 = \max\{\underline{u_4 + w_{46}}, u_5 + w_{56}\} = \max\{\underline{3+6}, 2+5\} = \{9\}$

1-2-4-6

$u_7 = \max\{u_6 + w_{67}\} = \max\{9+3\} = 12$ 1-2-4-6-7

$u_8 = \max\{u_5 + w_{58}, u_6 + w_{68}, \underline{u_7 + w_{78}}\} = \max\{2+5, 9+3, \underline{12+1}\} = \{13\}$

1-2-4-6-7-8

$u_9 = \max\{u_5 + w_{59}, \underline{u_8 + w_{89}}\} = \max\{2+5, \underline{13+4}\} = \{17\}$

1-2-4-6-7-8-9

$u_{10} = \max\{\underline{u_9 + w_{910}}\} = \max\{17+4\} = \{21\}$ 9-10-

$u_{11} = \max\{u_7 + w_{711}, \underline{u_8 + w_{811}}\} = \max\{12+1, \underline{13+4}\} = \{17\}$

8-11

$u_{12} = \max\{\underline{u_{10} + w_{1012}}, u_{11} + w_{1112}\} = \max\{\underline{21+4}, 17+8\} = \underline{\{25\}}$

mínimo nº de días.

1-2-4-6-7-8-9-10-12

$s - a_1 \overset{3}{-} a_6 \overset{6}{-} a_7 \overset{1}{-} a_5 \overset{4}{-} a_9 \overset{4}{-} a_8 \overset{4}{-} t$: CAMINO CRÍTICO

- Días que se puede retrasar la actividad a_4 sin afectar a la duración total.

$u_5 + x + w_{56} \leq u_6$ $\quad 2 + x + 5 \leq 9$ $\quad x \leq 2$

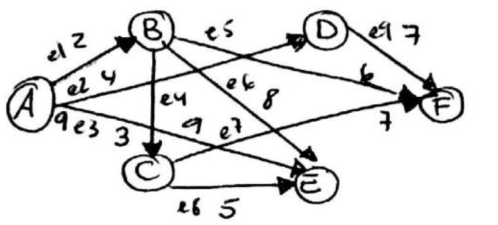
$u_5 + x + w_{58} \leq u_8$ $\quad 2 + x + 5 \leq 13$ $\quad x \leq 6$

$u_5 + x + w_{59} \leq u_9$ $\quad 2 + x + 5 \leq 17$ $\quad x \leq 10$

- 2 es el máximo número de días que se puede retrasar la act. a_4.

MATEMÁTICA DISCRETA JUNIO 2016

Ejercicio 3 [KRUSKAL]



Algoritmo de kruskal.

① $T = \emptyset$

② Ordenar en orden creciente las aristas de G, es decir,

$$e1, e2 \ldots, em \,/\, w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_m$$

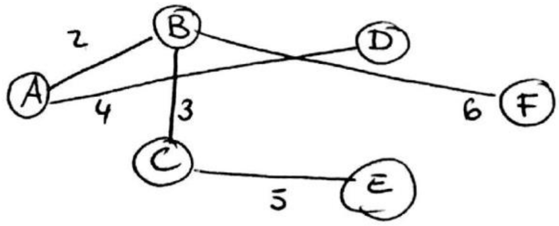
③ Añadir aristas en T de forma ordenada siempre que no se formen ciclos hasta tener, en T, $n-1$ aristas.

$n = 6$ (número vértices)

Total: 5 aristas.

Aristas:	e1	e4	e2	e8	e5	e9	e7	e6	e3
Peso:	2	3	4	5	6	7	7	8	9

- Se introducen las aristas en este orden sin formar ciclo, hasta 5 aristas.



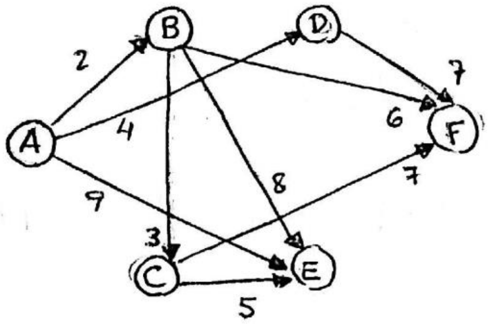
PESO: 20

Ejercicio 3

MATEMÁTICA DISCRETA   JUNIO 2016

PRIM y KRUSKAL

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	-	4	9	-
B	2	-	3	-	8	6
C	-	3	-	-	5	7
D	4	-	-	-	-	7
E	9	8	5	-	-	-
F	-	6	7	7	-	-



It. 1

$T = \emptyset \quad U = \{a\}$

alcanza mínimo

$L(b) = 2 \quad L(c) = \infty \quad L(d) = 4 \quad L(e) = 9 \quad L(f) = \infty$

$\min u \in U \{L(u)\} = L(b)$ - añadimos el vértice $\{a\}$ a U y la arista $\{a,b\}$ a T

It. 2

$T = \{\{a,b\}\} \quad U = \{a,b\}$

ACTUALIZAMOS $L(u)$, $\forall u \in U$

$\boxed{L(c) = \min\{L(c), W_{bc}\} = \min\{\infty, 3\} = 3}$

$L(d) = \min\{L(d), W_{bd}\} = \min\{4, \infty\} = 4$

$L(e) = \min\{L(e), W_{be}\} = \min\{9, 8\} = 8$

$L(f) = \min\{L(f), W_{bf}\} = \min\{\infty, 6\} = 6$ → mínimo

$\min u \in U \{L(u)\} = L(c)$ - añadimos el vértice $\{c\}$ a U y la arista $\{c,e\}$ a T.

It. 3

$T = \{\{a,b\}, \{b,c\}\} \quad U = \{a,b,c\}$

ACTUALIZAMOS $L(u)$, $\forall u \notin U$

$\boxed{L(d) = \min\{L(d), W_{cd}\} = \min\{4, \infty\} = 4}$

$L(e) = \min\{L(e), \underline{W_{ce}}\} = \min\{8, 5\} = 5$ → alcanza mínimo

$L(f) = \min\{L(f), W_{cf}\} = \min\{6, 7\} = 6$

$\min u \in U \{L(u)\} = L(d)$ - añadimos el vértice $\{d\}$ a U y la arista $\{a,d\}$

Ejercicio 3

It. 4

$T = \{\{a,b\},\{b,c\},\{a,d\}\}$ $\quad U = \{a,b,c,d\}$

Actualizamos $L(v)$, $\forall \mu \notin U$

$L(e) = \min\{L(e), W_{de}\} = \min\{5, \infty\} = 5$

$L(f) = \min\{L(f), W_{df}\} = \min\{6, 7\} = 6$

$\min_{\mu \notin U}\{L(v)\} = L(e)$

- añadimos el vértice e a U y la arista $\{c,e\}$ a T

It. 5

$T = \{\{a,b\},\{b,c\},\{a,d\},\{c,e\}\}$ $\quad U = \{a,b,c,d,e\}$

$L(f) = \min\{L(f), W_{ef}\} = \min\{6, \infty\} = 6$

$\min_{\mu \notin U}\{L(\mu)\} = L(f)$

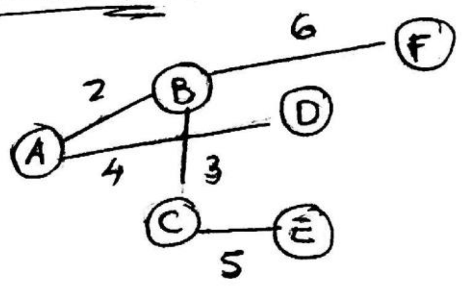
- añadimos el vértice f a U y la arista $\{b,f\}$

It. 6

$T = \{\{a,b\},\{b,c\},\{a,d\},\{c,e\},\{b,f\}\}$ $\quad U = \{a,b,c,d,e,f\}$

PARAR

ÁRBOL RESULTANTE



PESO = 20

Ejercicio 4

Ejercicio 4 MATEMÁTICA DISCRETA JUNIO 2016

$1000 \leq z \leq 1500$

a) El número buscado debe ser congruente con 7 módulo 17.

b) Si dividimos este número entre 23 nos da como resto 11.

$$\left.\begin{array}{l} z = 7 \pmod{17} \\ z = 11 \pmod{23} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} z = 17x + 7 \\ z = 23y + 11 \end{array}$$

$\boxed{as + bt = d}$

$ab = \ldots$

$$17x + 7 = 23y + 11$$

$$17x - 23y = 11 - 7$$

$$17x - 23y = 4$$

$a = 17$

$b = -23$

$d = 1$

$d_{\ldots} = 4$

$$m.c.d(17, 23) = 1$$

$$23 = 17 \cdot 1 + 6$$

$$17 = 6 \cdot 2 + 5$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1 \longrightarrow m.c.d$$

$$5 = 1 \cdot 5 + 0$$

Bezout $d = as + bt$

$$1 = 6(1) + 5(-1)$$

$$1 = 6(1) + (17(1) + 6(-2))(-1)$$

$$1 = 6(1) + 17(-1) + 6(2)$$

$$1 = 6(3) + 17(-1)$$

$$1 = (3) \cdot (23(1) + 17(-1)) + 17(-1)$$

$$1 = 23(3) + 17(-3) + 17(-1)$$

$$1 = 23(3) + 17(-4)$$

$$(s, t) = (-4, -3)$$

Ejercicio 4

$$\left.\begin{array}{l} d = 1 \\ dn = 4 \end{array}\right\} n = 4 \qquad (x_0, y_0) = (ns, nt)$$
$$= (-16, -12)$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \alpha \cdot d \\ b = \beta \cdot d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 17 = \alpha \cdot 1 \\ -23 = \beta \cdot 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = 17 \\ \beta = -23 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \beta k \\ y = y_0 - \alpha k \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -16 - 23k \\ y = -12 - 17k \end{array}$$

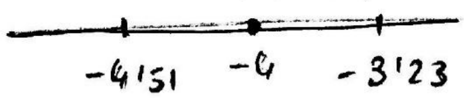
$$z = 17x + 7 \Longrightarrow 17(-16 - 23k) + 7 \Longrightarrow -265 - 391k$$

$$z = 23y + 11 \longrightarrow 23(-12 - 17k) + 11 \Longrightarrow -265 - 391k$$

$$1000 \leq -265 - 391k \leq 1500$$

$$\frac{1265}{-391} \geq k \geq \frac{1765}{-391}$$

$$-3'23 \geq k \geq -4'51$$



$$\underline{k = \{-4\}}$$

$$z = -265 - 391(-4)$$
$$= \underline{1299}$$

Ejercicio 5

5. a) dos últimos cifras de $\underline{\underline{21^{1642}}}$

- Saber que para sacar la dos últimos cifras se utiliza 100.

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(4) \cdot \varphi(25)$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{40}}$$

$$mcd(21, 100) = 1$$

$$[21]^{1642} = [21]^{40 \cdot 41 + 2} = \left([21]^{40}\right)^{41} + (21)^2$$

$$= 1 \cdot (21)^2$$

$$441 = [4\,41]$$

$\Downarrow$

DOS ÚLTIMAS CIFR