Integración y aplicaciones (I)

Tema 3

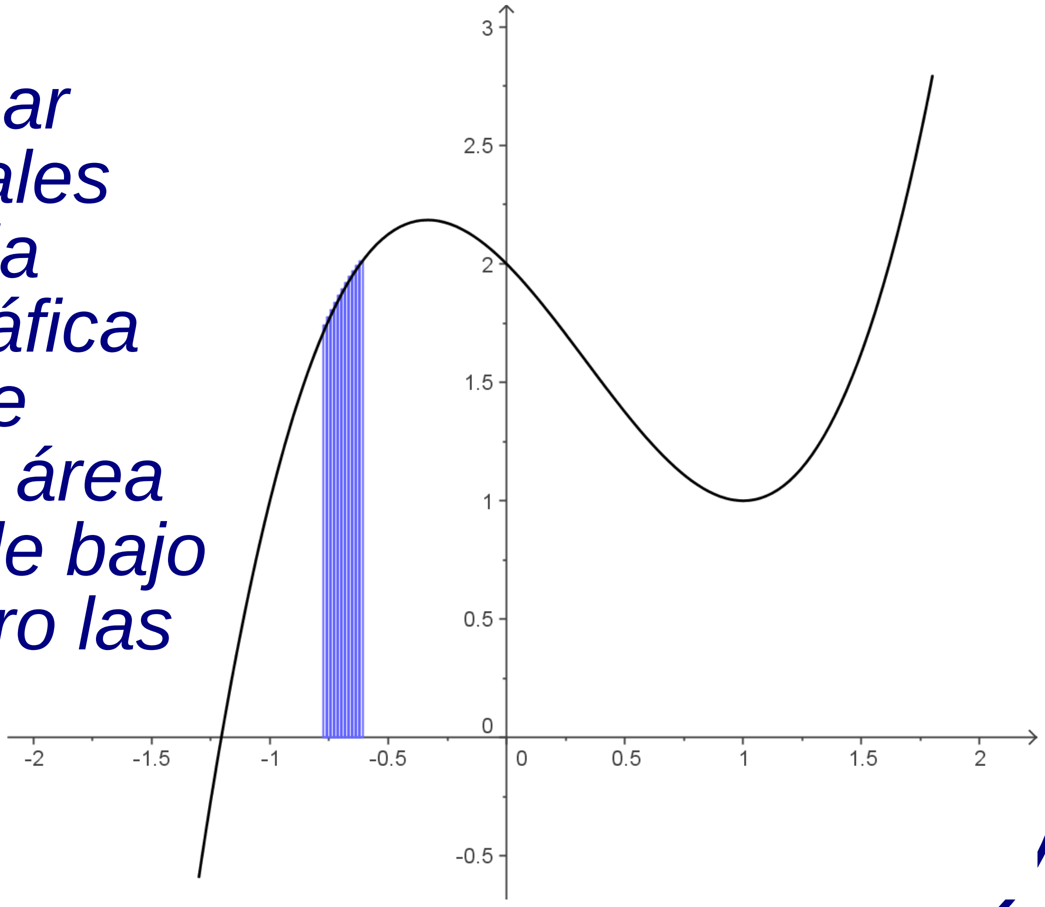
Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)

Concepto de integral

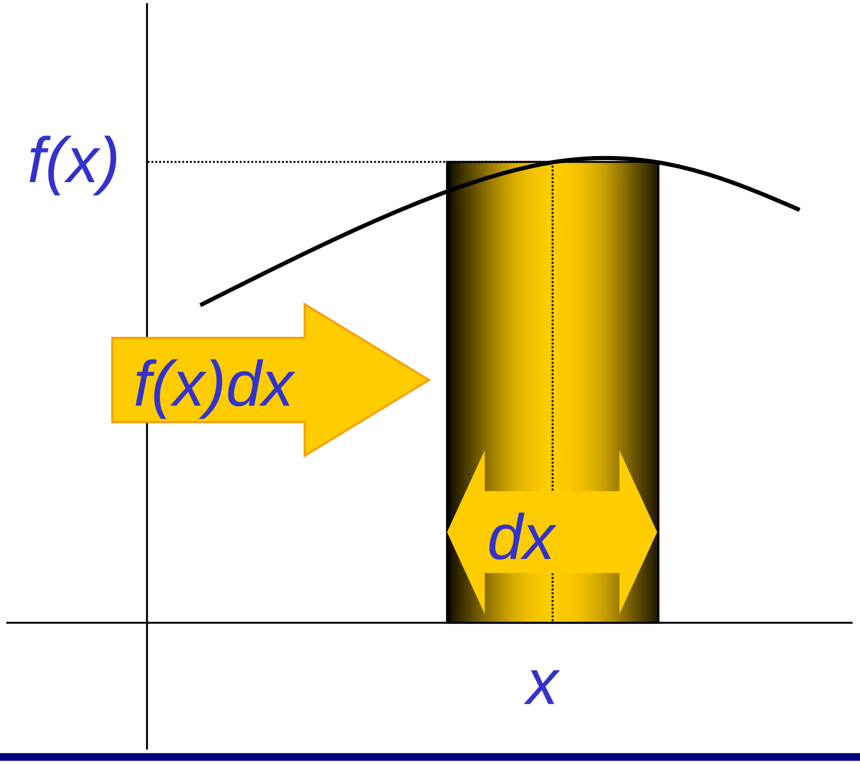
Integrar significa acumular pequeños (ínfimos) y consecutivos resultados:

Si pudiéramos sumar las líneas verticales asociadas a cada punto de una gráfica conceptualmente obtendríamos el área que queda por de bajo de la gráfica, pero las líneas no tiene superficie, sólo longitud.



Problema del área

Para que las líneas verticales tuvieran superficie deberíamos considerar que tiene un pequeño grosor, un ancho ínfimo que llamaremos *dx*



Formalización matemática

Sea *f* acotada en *[a,b]*, intervalo dividido en *n* subintervalos de longitud *Δx* de la forma:

$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ tal que

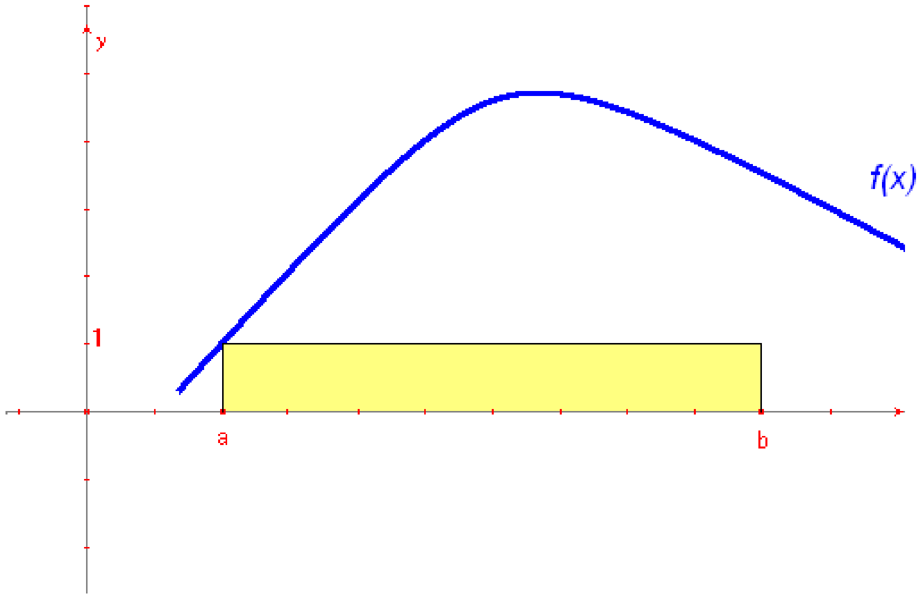
$$x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}=\Delta x$$

y

$$m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k+1}-x_k]\}$$

$$M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k+1}-x_k]\}$$

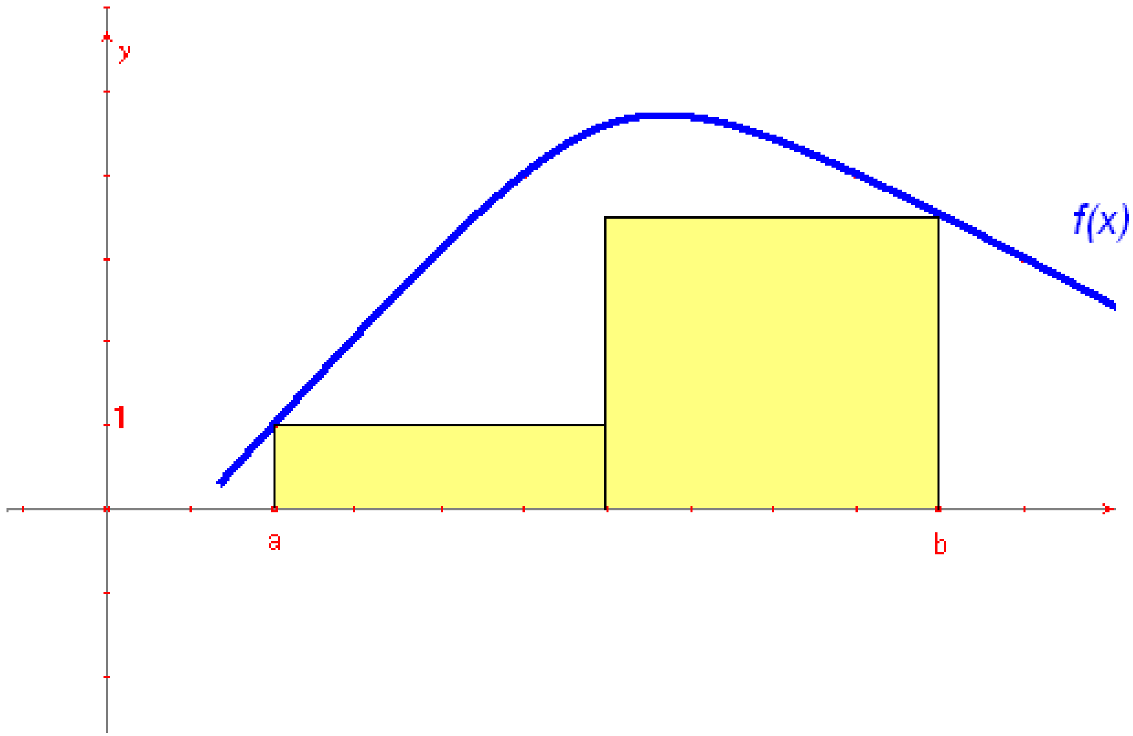
SUMAS INFERIORES



$$L_1(f) = m_1 \Delta x$$

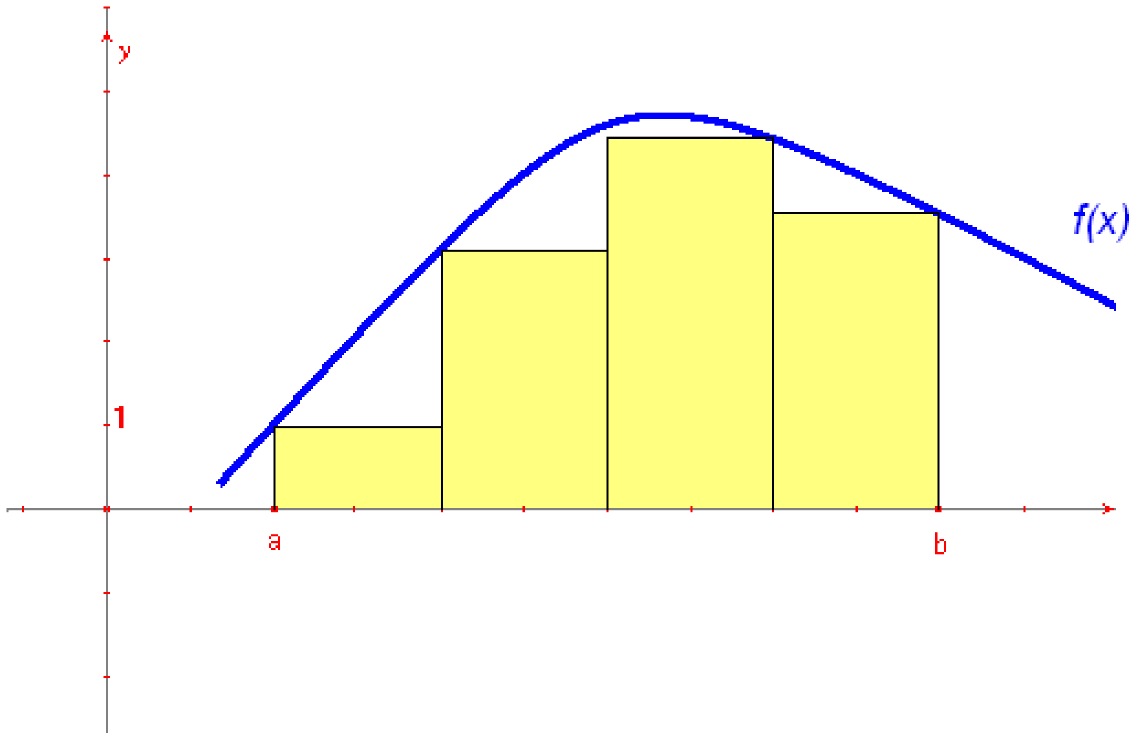
$$\Delta x = \frac{b-a}{1}$$

SUMAS INFERIORES



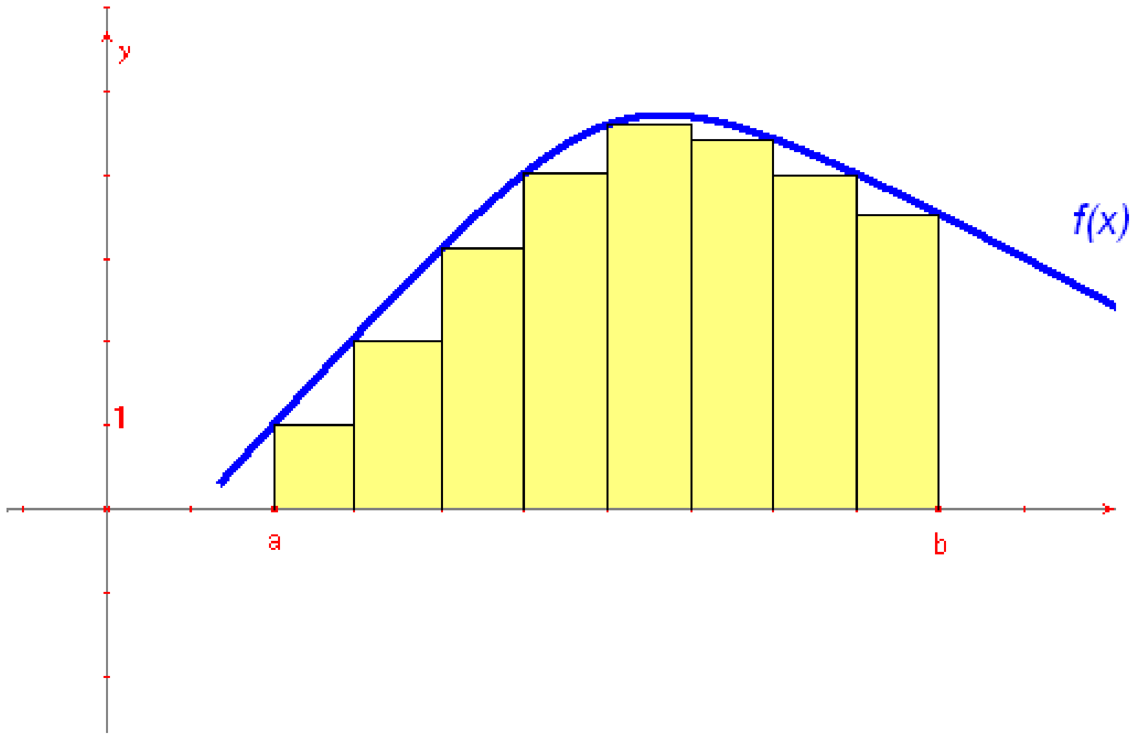
$$L_2(f) = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x = \sum_{k=1}^{2} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

SUMAS INFERIORES



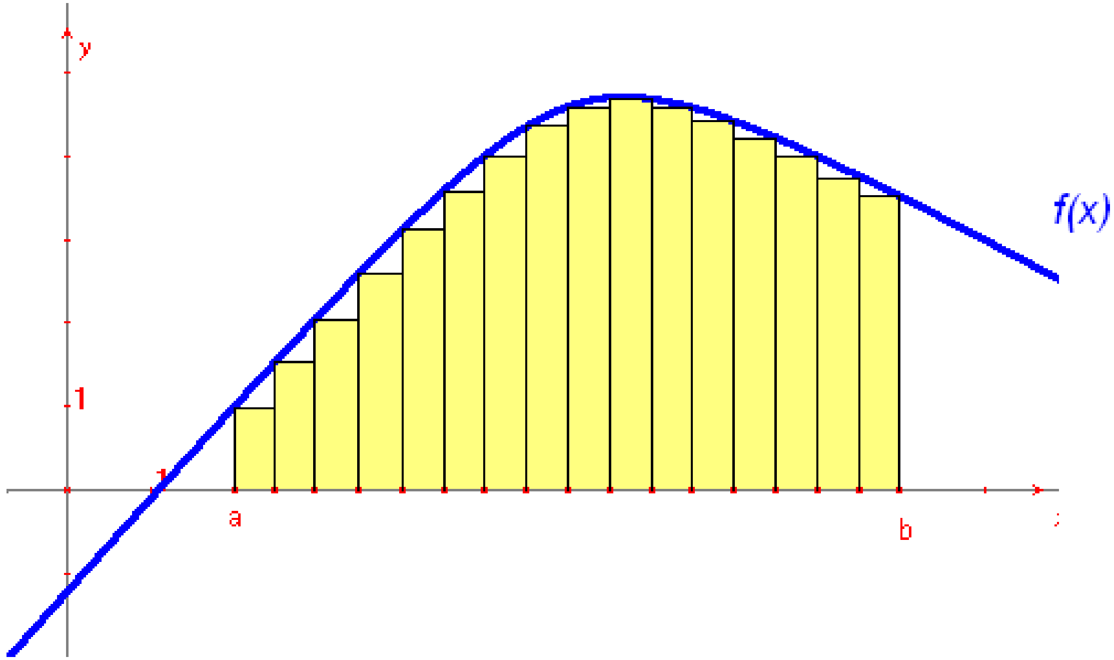
$$L_4(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_4\Delta x = \sum_{k=1}^{4} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{4}$$

SUMAS INFERIORES



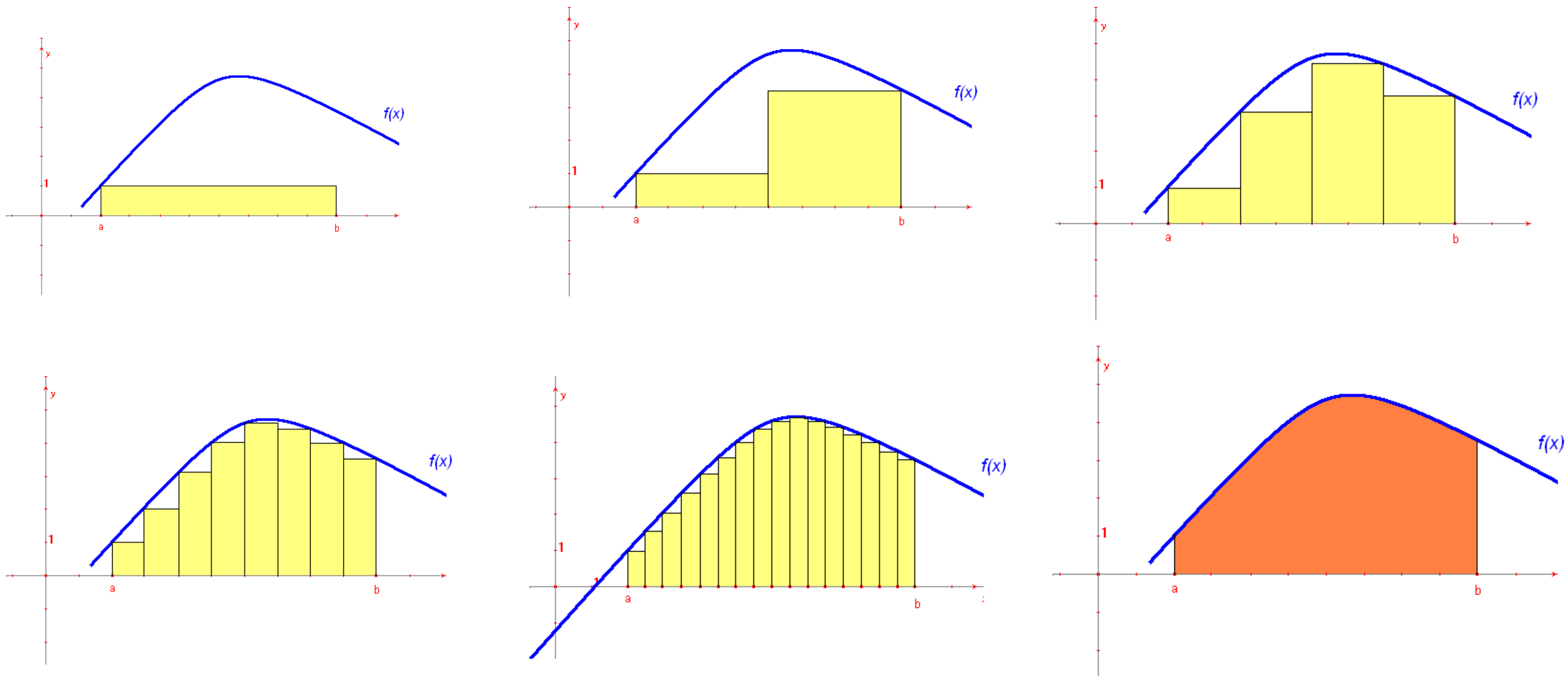
$$L_8(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_8\Delta x = \sum_{k=1}^{8} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{8}$$

SUMAS INFERIORES



$$L_{16}(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots. + m_{16}\Delta x = \sum_{k=1}^{16} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{16}$$

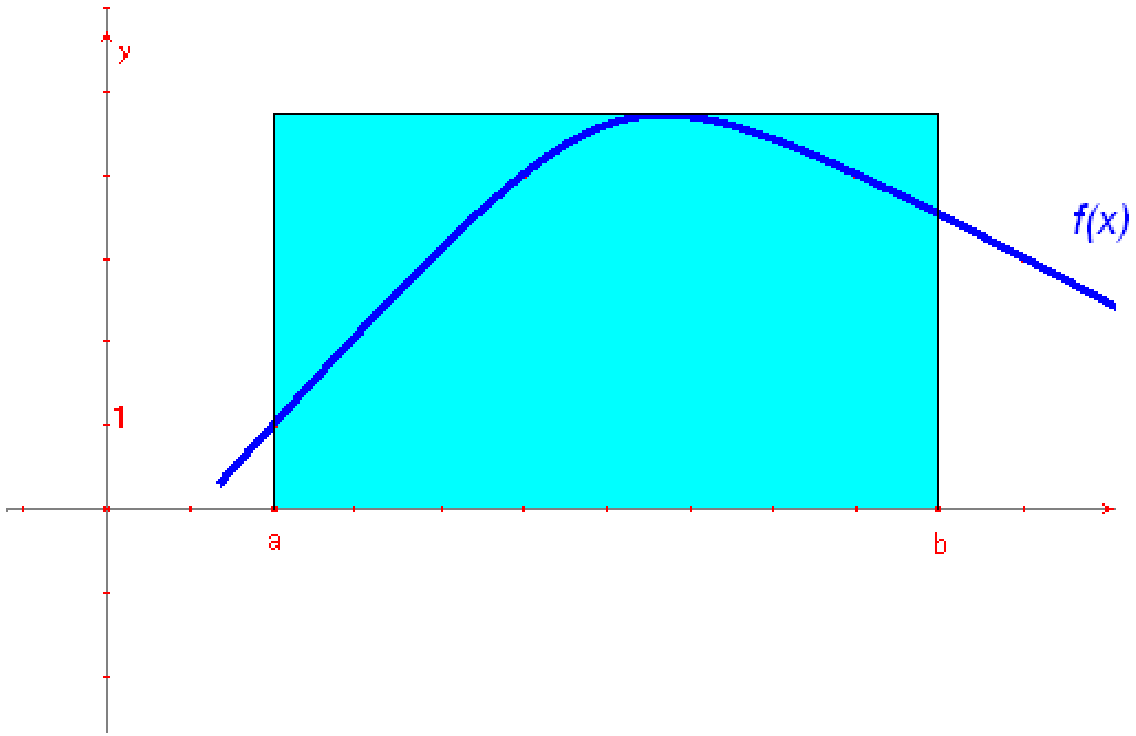
SUMAS INFERIORES



$$L_n(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

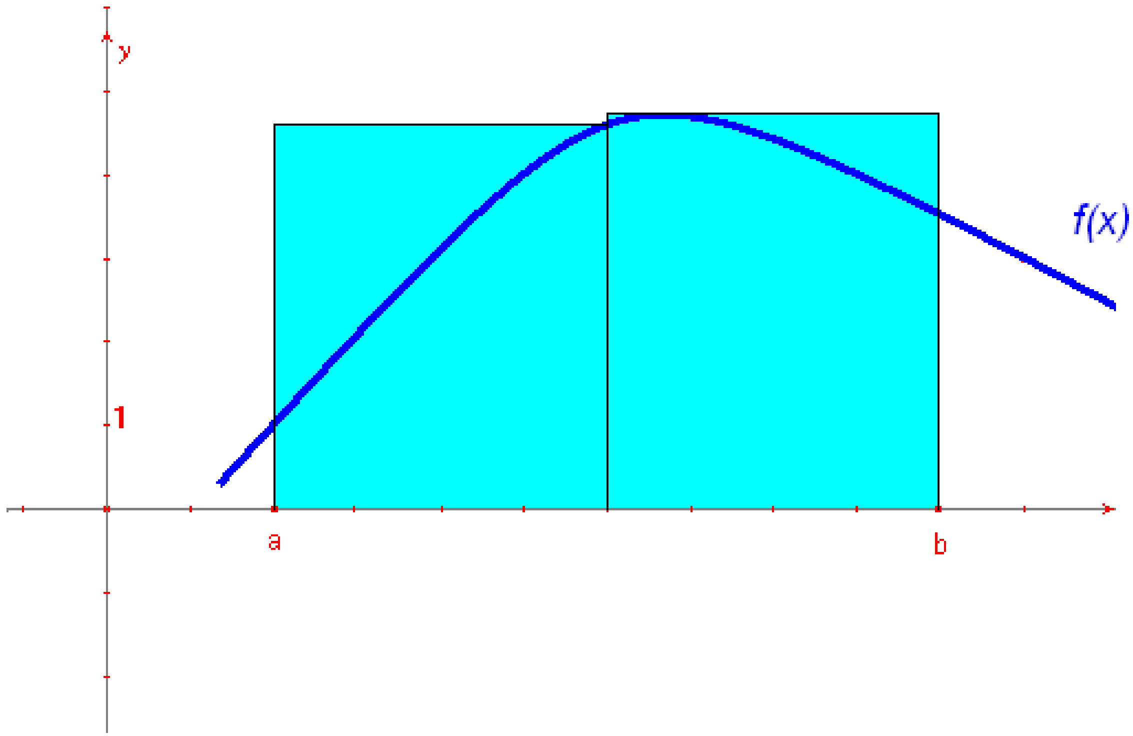
$$L_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \acute{A}rea\ inferior\ de\ f\ entre\ x = a\ y\ x = b$$

SUMAS SUPERIORES



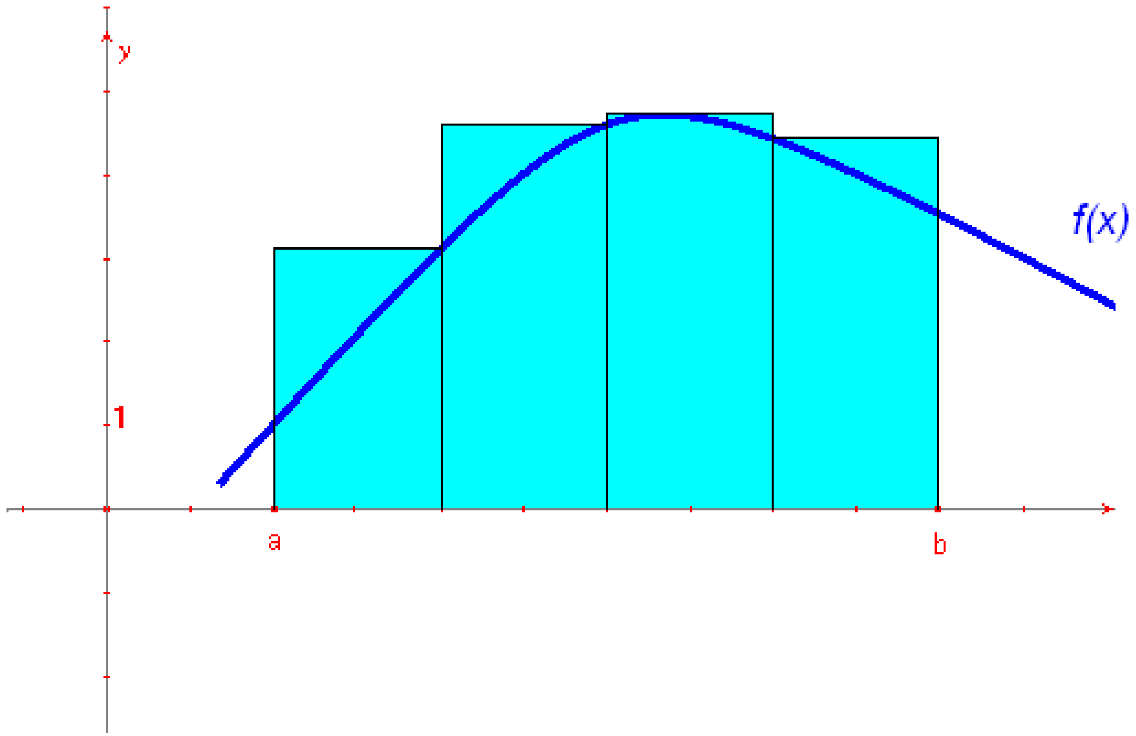
$$U_1(f) = M_1 \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{1}$$

SUMAS SUPERIORES



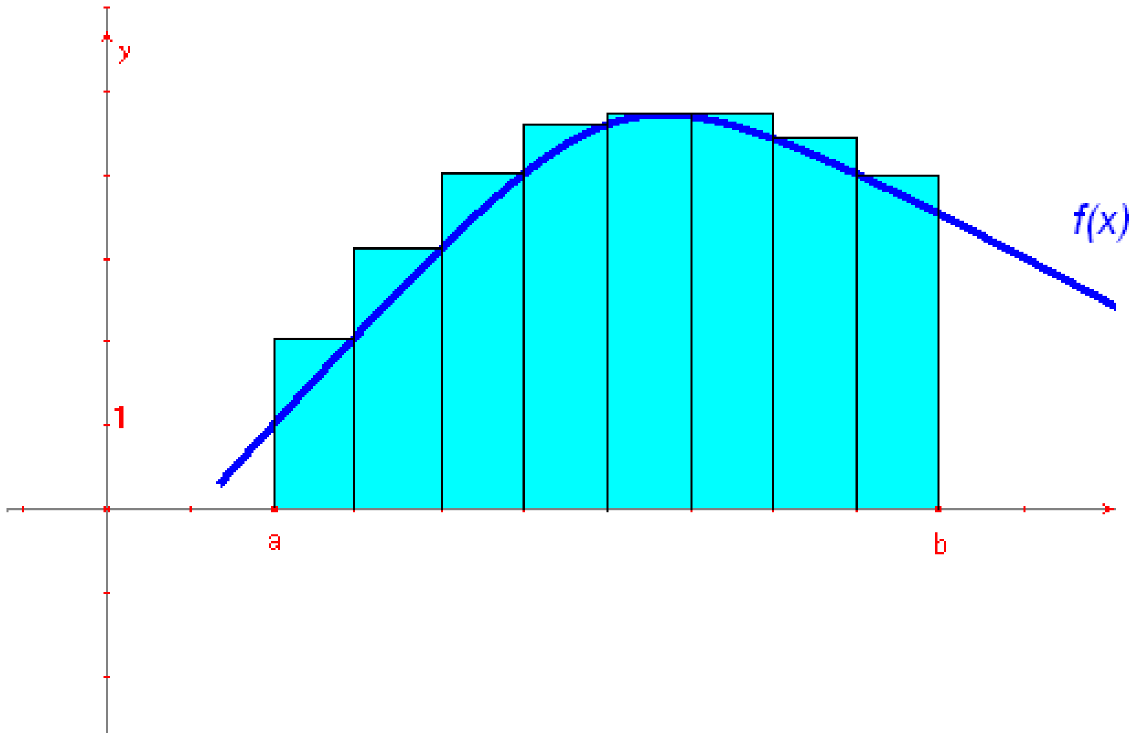
$$U_2(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x = \sum_{k=1}^{2} M_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

SUMAS SUPERIORES



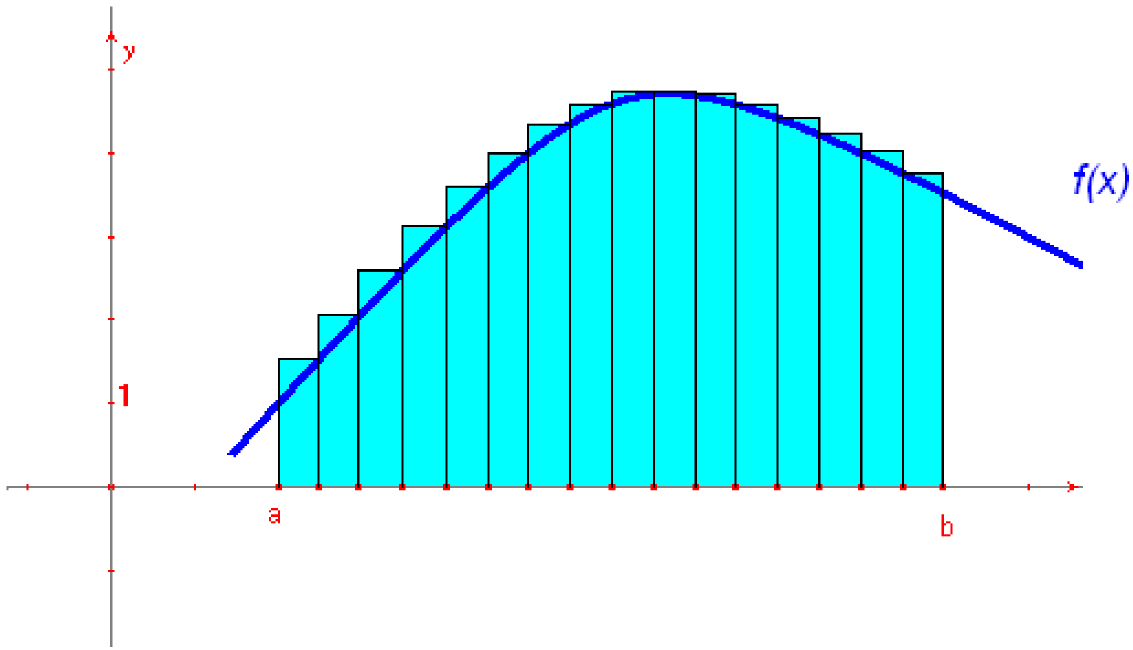
$$U_4(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_4\Delta x = \sum_{k=1}^{4} M_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{4}$$

SUMAS SUPERIORES



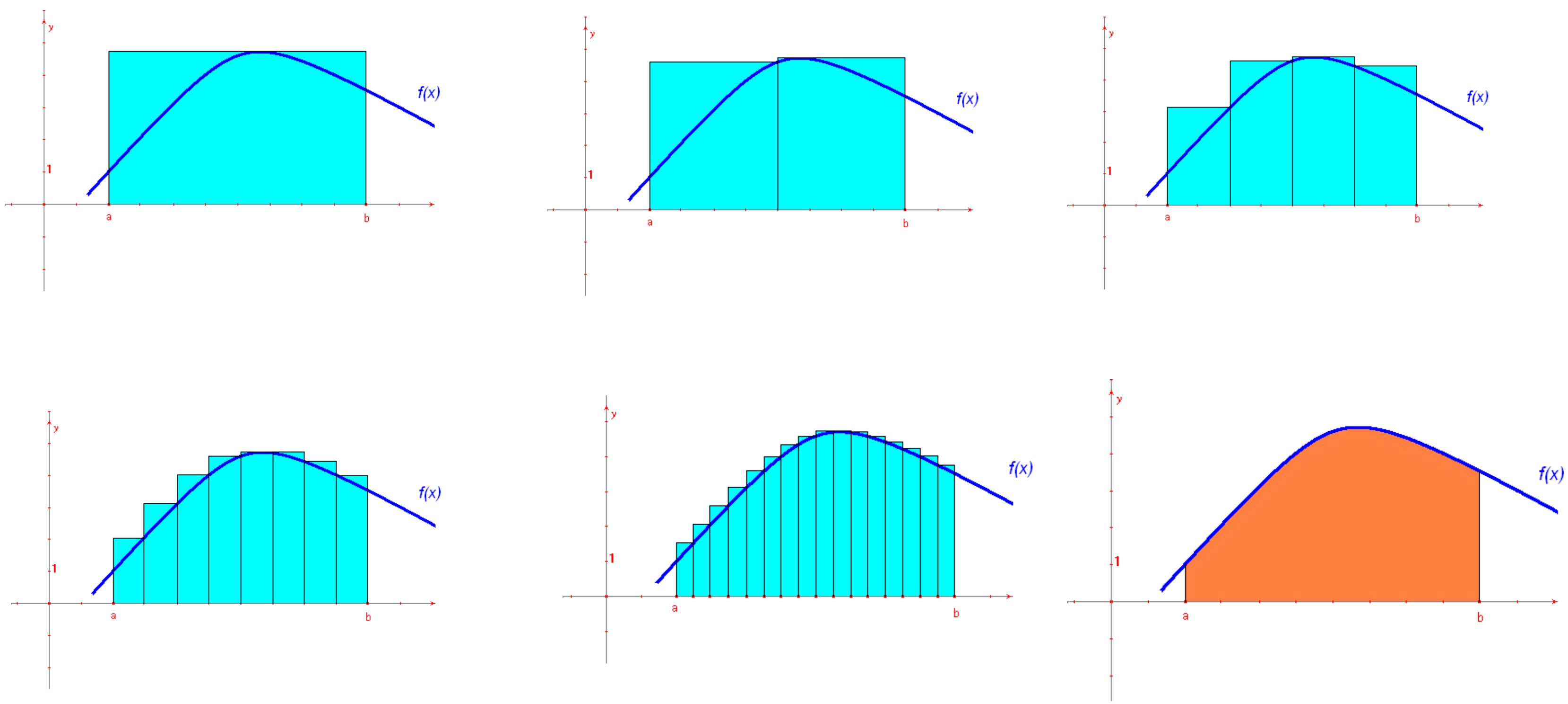
$$U_8(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_8\Delta x = \sum_{k=1}^{8} M_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{8}$$

SUMAS SUPERIORES



$$U_{16}(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_{16}\Delta x = \sum_{k=1}^{16} M_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{16}$$

SUMAS SUPERIORES



$$U_n(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots. + M_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$U_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{Área superior de } f \text{ entre } x = a \text{ y } x = b$$

Darboux (particularización Riemann)

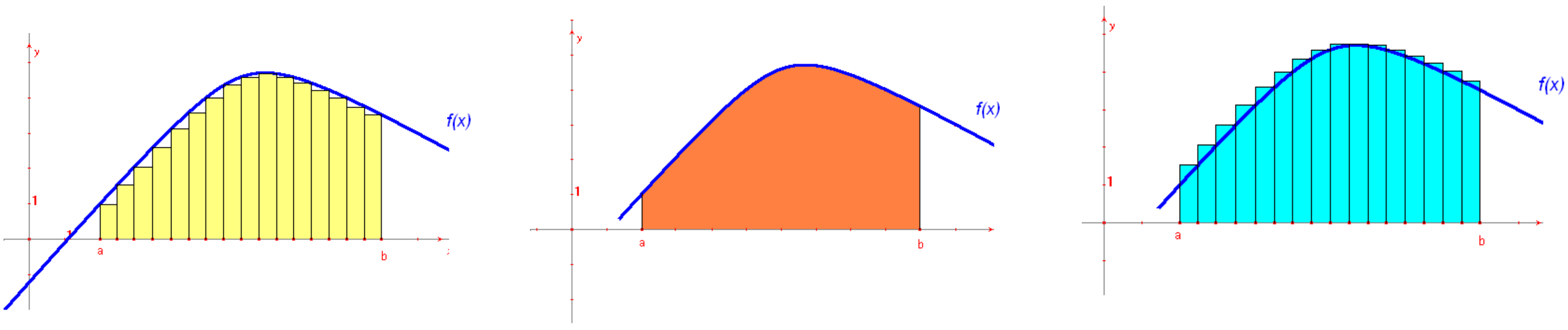
Para cualquier *n*

$$L_n(f) \leq \acute{A}rea \leq U_n(f)$$

Cuando $n \to \infty$ entonces $\Delta x \to 0$, y si entonces L_n y U_n y son el mismo límite, se dice que *f* es integrable en *[a,b]* y ese límite se le llama integral definida de *f* entre *a* y *b* y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

INTEGRAL DEFINIDA



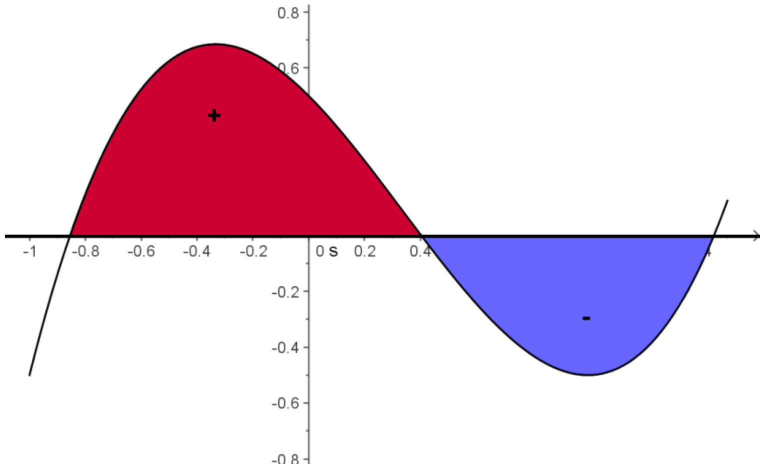
$$Área = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} U_n(f)$$

Corte con el eje X

Si *f(x)* es positiva y negativa, la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa la diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje x:



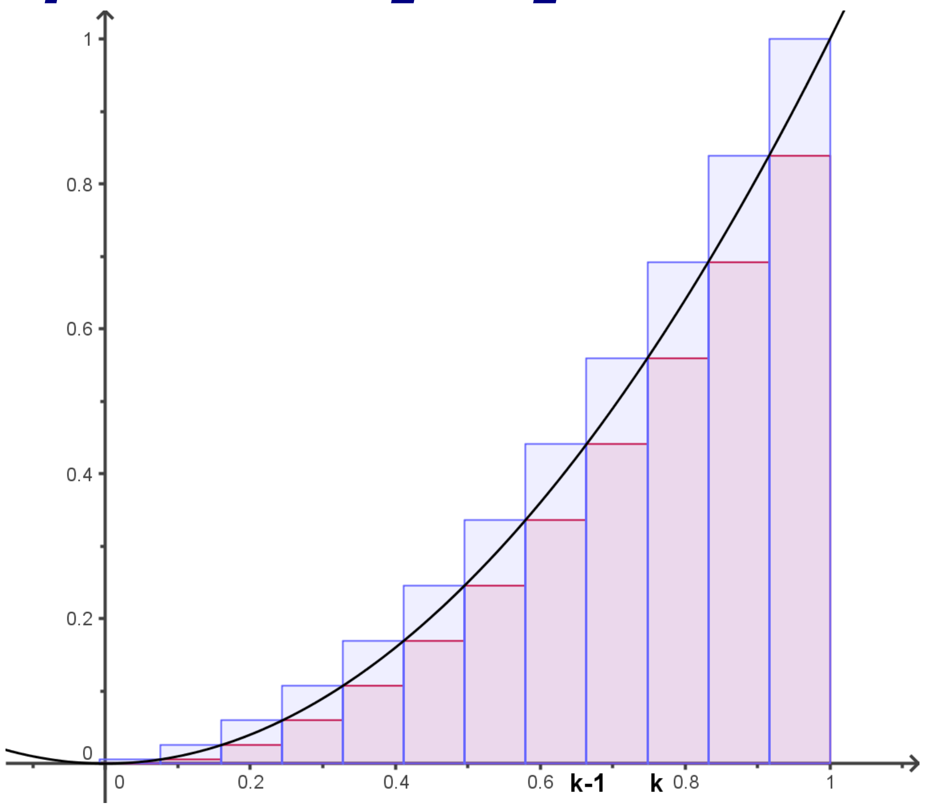
Integrar $f(x)=x^2$ para $x \in [0,1]$

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$L_n(f)=\frac{1}{n^3}\left[0^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

$$U_n(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$U_n(f)=\frac{1}{n^3}\left[1^2+\ldots+n^2\right]$$



Usando: $1^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$L_n(f)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \qquad U_n(f)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

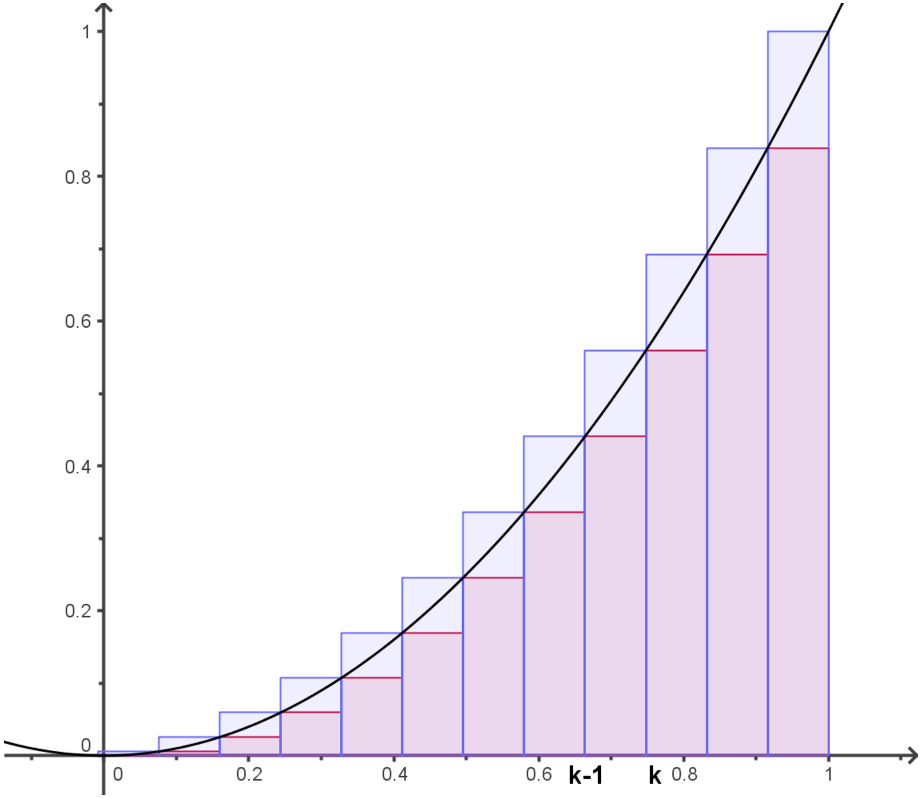
Integrar f(x)=x² para x є [0,1]

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \frac{2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

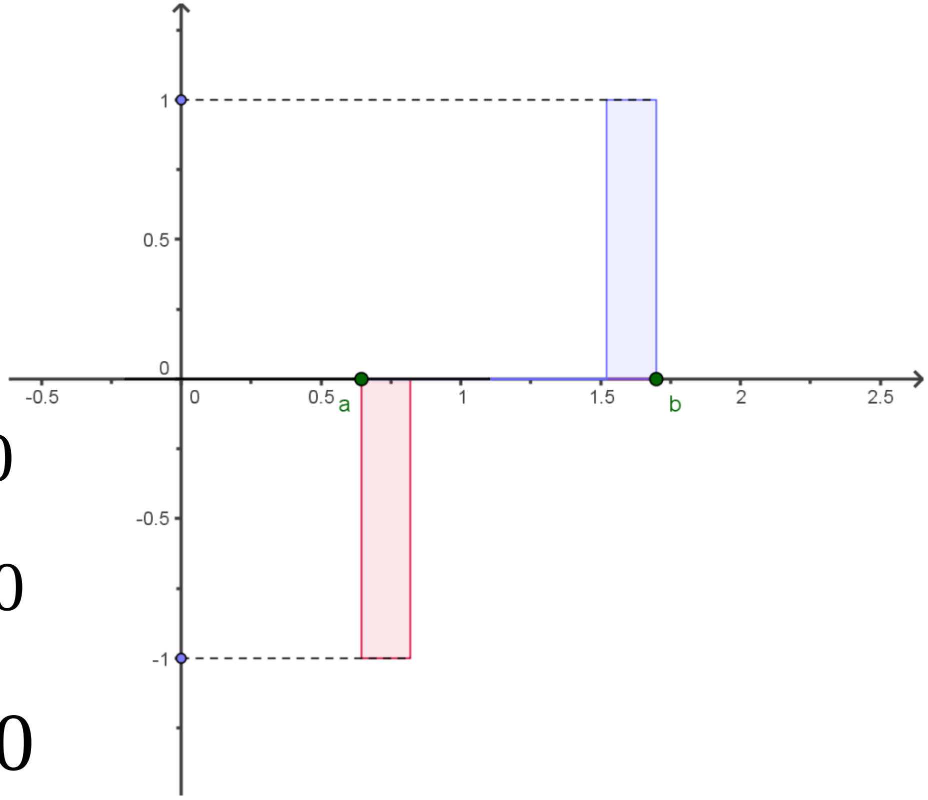
$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \frac{2}{6}$$



$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Discontinuidad e integrabilidad

$$g(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x=a \\ 0 & \text{si} \quad a<x<b \\ 1 & \text{si} \quad x=b\end{cases}$$



$$L_n(g)=-\frac{b-a}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} L_n(g)=0$$

$$U_n(g)=\frac{b-a}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} U_n(g)=0$$

$$\int_a^b g(x)dx=0$$

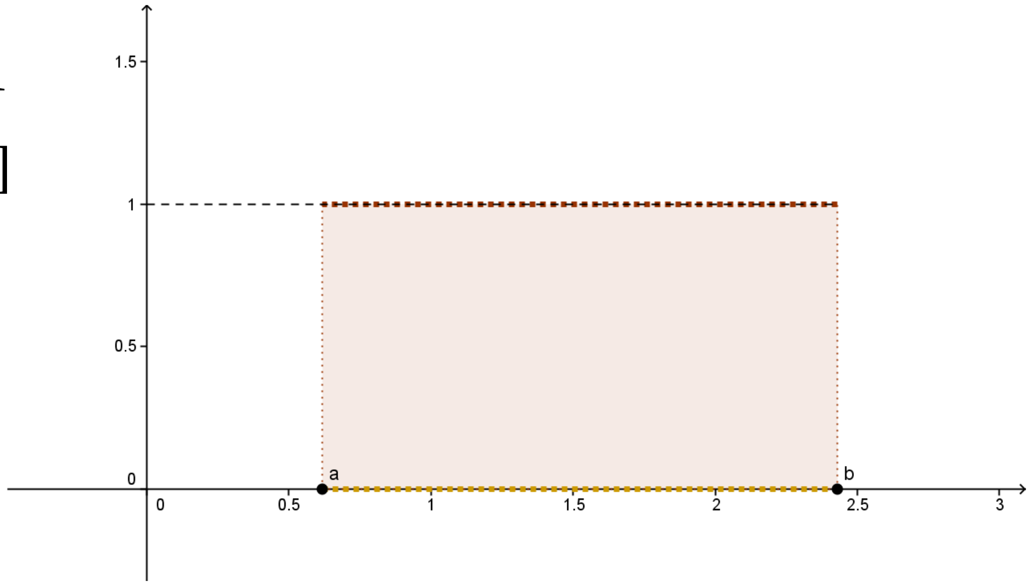
Las funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son integrables

Función de Dirichlet

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x \quad \text{racional}\\ 0 & \text{si} \quad x \quad \text{iracional}\end{cases}$$

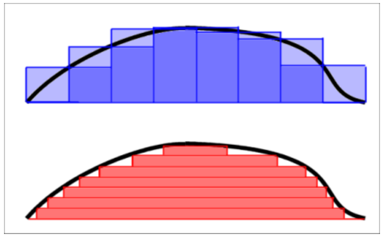
$$\lim_{n\to\infty} L_n(h)=0\,\frac{b-a}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(h)=n\,\frac{b-a}{n}=b-a$$



Para definición dada, la función h(x) no es integrable porque los límites no coinciden

Otra definición: Lebesgue



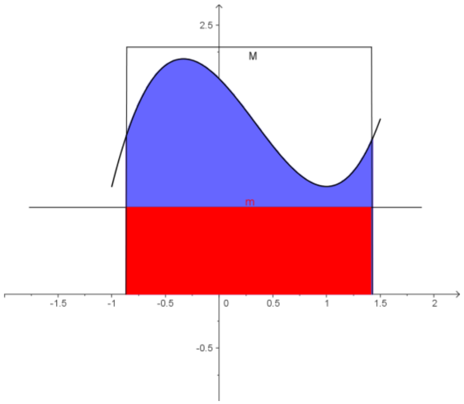
Propiedades

Linealidad $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

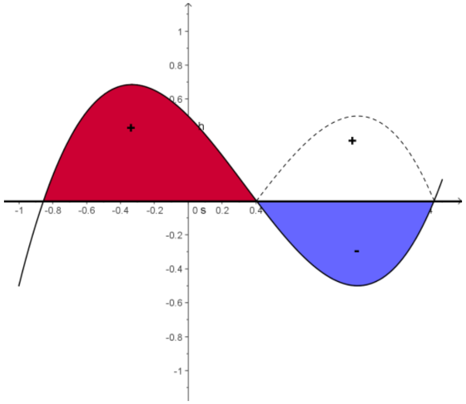
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Desigualdades

- Si *m≤f(x)≤M* para *xє[a,b]* entonces
  $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



- $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$



Propiedades

Desigualdades

- Si *f(x)≤g(x)* para *xϵ[a,b]* entonces

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

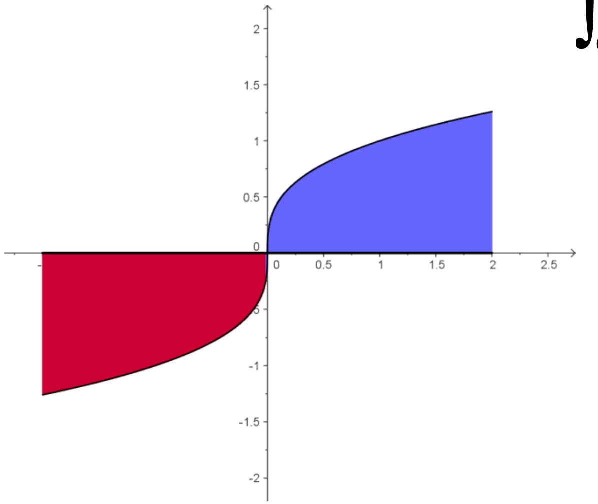
- Si *f(x)≥0* para *xϵ[a,b]* y *[c,d]⊂[a,b]* entonces

$$\int_c^d f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

Otros

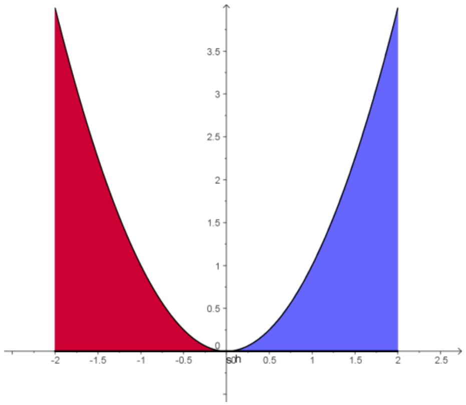
- Si f(x) es impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



- Si f(x) es par

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$



Integrabilidad a trozos

Teoremas:

- Sean *a<c<b* y *f(x)* integrable en *[a,b]* entonces *f(x)* es integrable en *[a,c]* y *[c,b]*,

y $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

además $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

generalizando $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

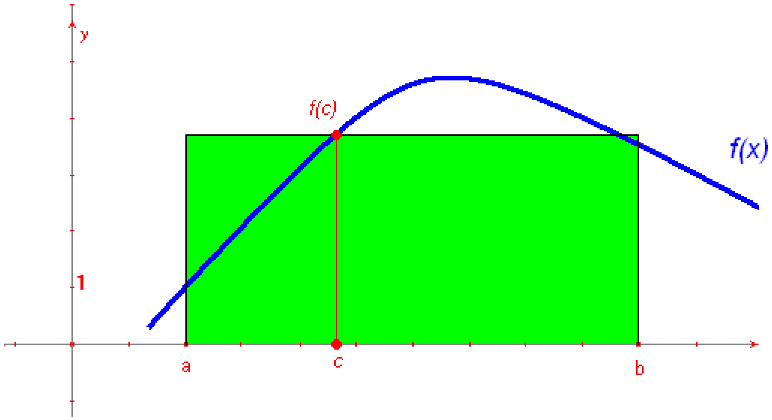
Integrabilidad a trozos

Teoremas:

- Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces integrable en $[a,b]$

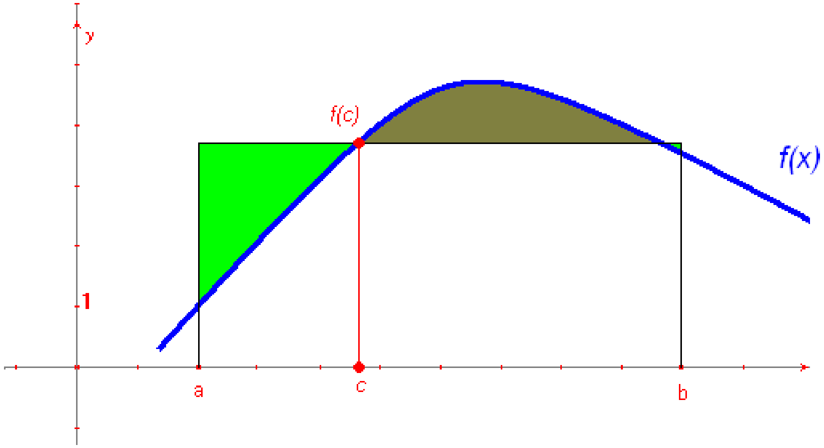
- Si $f(x)$ es continua a trozos en $[a,b]$ entonces integrable en $[a,b]$

TEOREMA DE LA MEDIA (INTEGRAL)



Si la función *f(x)*
es continua en *[a,b]*
entonces
existe un *cϵ[a,b]* tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$



Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)

- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)

Primer teorema fundamental

Si *f(x)* es integrable en *[a,b]* entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en *[a,b]*.

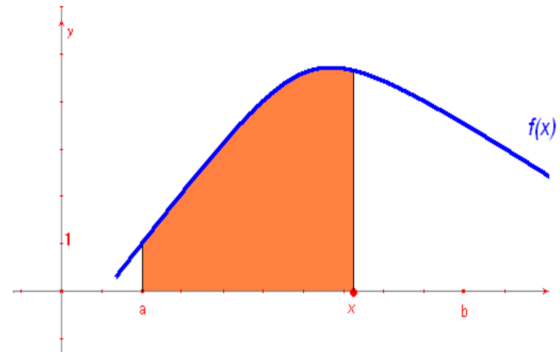
Si además *f(x)* es continua en *c*є*(a,b)* entonces *F(x)* es derivable en *c* y

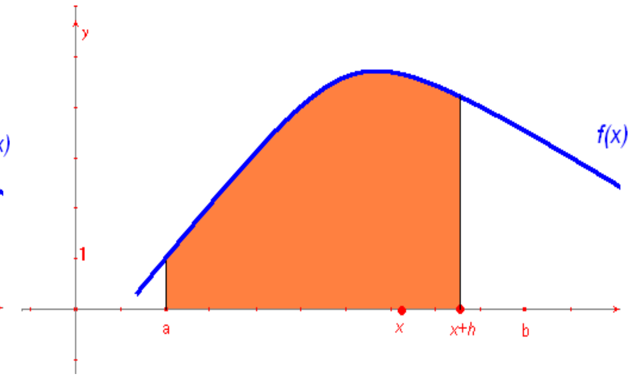
$$F'(x) = f(x)$$

Demostración gráfica

Si

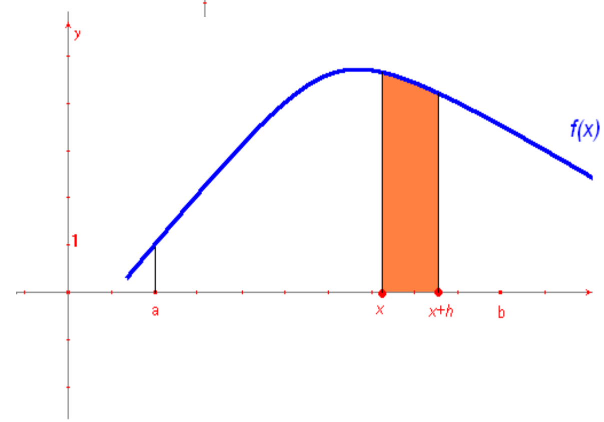
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$





por teorema valor medio

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(c)$$



donde *cϵ[x,x+h]*
y por definición:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h -> 0} \frac{h \cdot f(c)}{h} = f(x)$$

Segundo teorema fundamental

Si *f(x)* es continua en *[a,b]* y *f(x)=g'(x)* entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)]_a^b$$

Demostración:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad F'(x) = f(x) \qquad F(x) = g(x) + k$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = g(a) + k = 0 \qquad k = -g(a)$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = g(b) + k = g(b) - g(a) = g(t)]_a^b$$

Regla de Barrow

Se dice que *g(x)* es una primitiva de *f(x)* si *f(x)=g'(x)*

F(x)=g(x)+k nos sirve para representar cualquier elemento el conjunto de todas las primitivas de *f(x)*

Y el segundo teorema fundamental se conoce como regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida

Integral indefinida

Es el conjunto de todas las infinitas primitivas de una función y se denota por

$$\int f(x)dx$$

y se resuelve como

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde *C* es la constante de integración.

Integral indefinida

Nos sirven para resolver integrales definidas mediante la regla de Barrow.

El sistema consiste en establecer tablas de primitivas o aplicar reglas para el calculo de las no conocidas, y así poder resolver las integrales.

Elementales:

$$\int 0dx = c \qquad \int adx = ax + c \qquad \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

Tablas de primitivas

Generalizando:

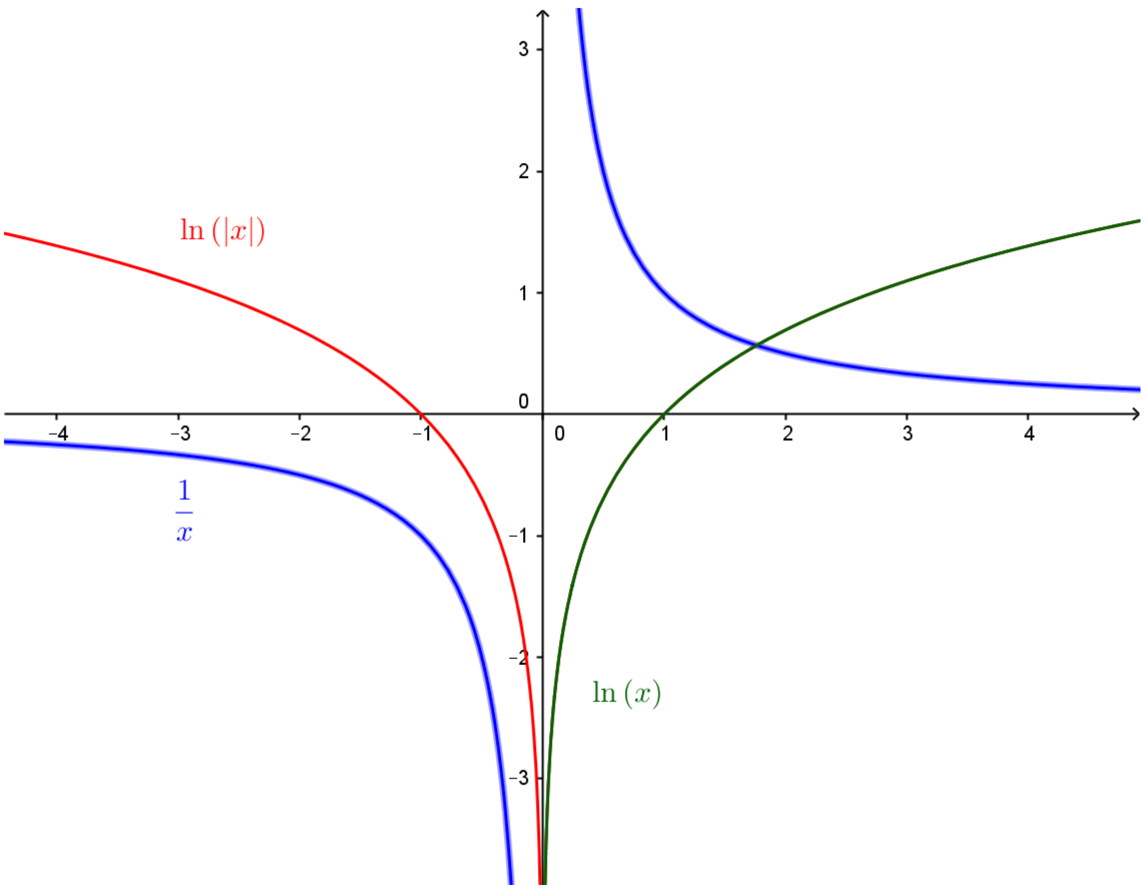
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Como $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Generalizando:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$



Tablas de primitivas

Como

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

entonces:

$$\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

Tablas de primitivas

Como

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

entonces:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Y mas … (ver tablas de primitivas).

Ejercicio 1

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} \cos(x) & para \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ -1 & para \quad \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

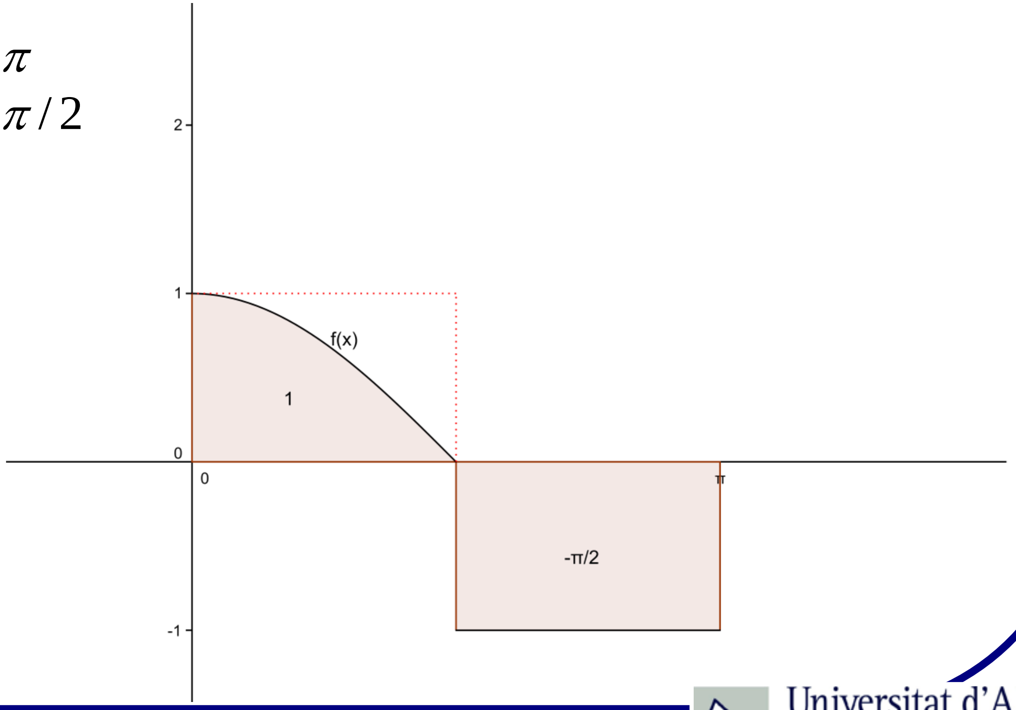
Ejercicio 1

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ si } \quad f(x) = \begin{cases} \cos(x) & para \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ -1 & para \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-1)dx =$$

$$= \operatorname{sen}(x)]_0^{\pi/2} + (-x)]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 1 - \pi/2$$



Ejercicio 2

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4 - 4}\,dt$$

Ejercicio 2

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt$$

Por ser impar el integrando:

$$F(1)=\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt=0$$

x=1 y=0

Ejercicio 2

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4-4}\,dt$$

Por ser impar el integrando:

$$F(1) = \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{t^4-4}\,dt = 0$$ *x=1 y=0*

Pendiente es la derivada en ese punto *x=1*:

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4} \qquad F'(1) = \frac{1}{-3}$$

Ejercicio 2

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4 - 4} dt$$

Por ser impar el integrando:

$$F(1) = \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{t^4 - 4} dt = 0$$ *x=1 y=0*

Pendiente es la derivada en ese punto *x=1*:

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4 - 4} \qquad F'(1) = \frac{1}{-3}$$

Entonces la tangente es:

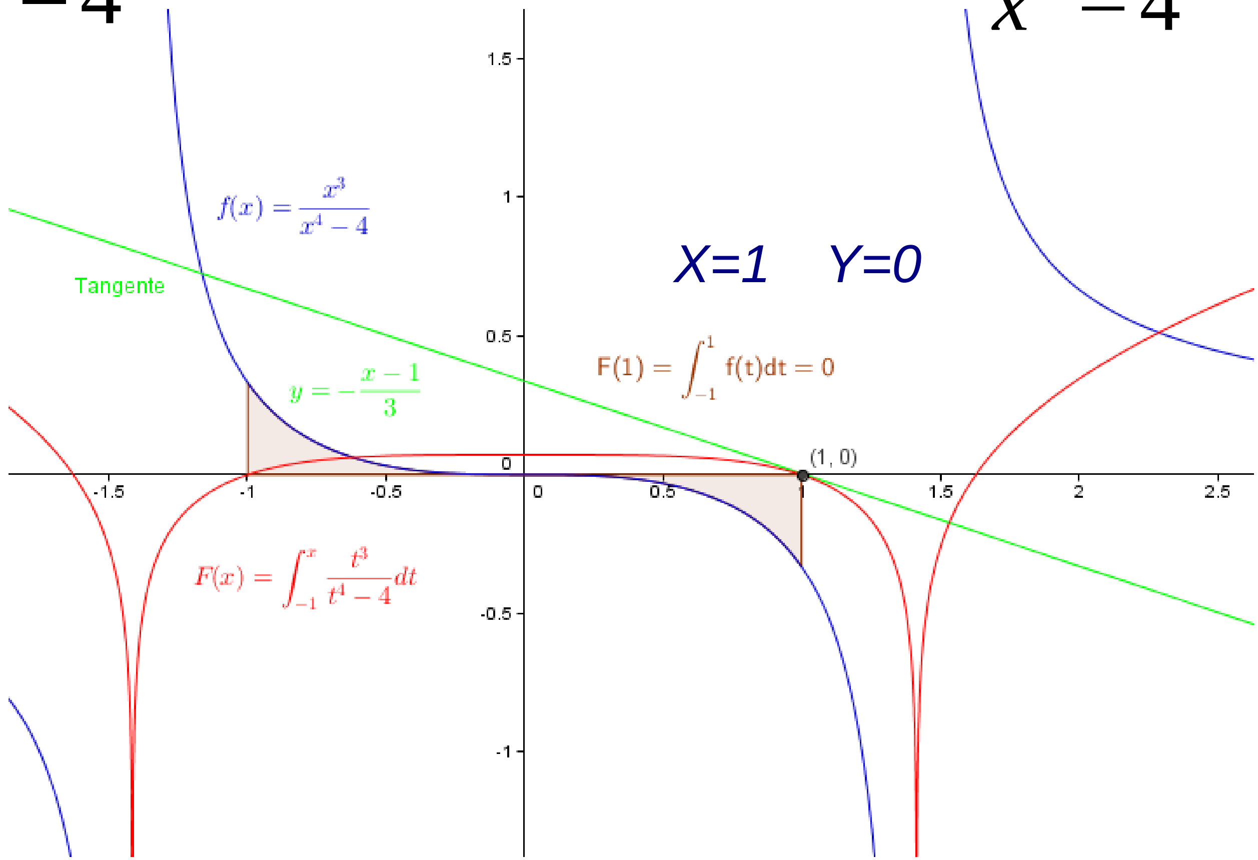
$$\frac{y-0}{x-1} = -\frac{1}{3} \qquad y = -\frac{x-1}{3}$$

Ejercicio 2

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4 - 4}\, dt \qquad F'(x) = f(x) = \frac{x^3}{x^4 - 4}$$

$$y = -\frac{x-1}{3}$$



Teorema

Si *f(t)* es continua en *[a(x),b(x)]* ó *[b(x),a(x)]* si *a(x)>b(x)*

y $H(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$

entonces: $H'(x)= f[b(x)]b'(x)- f[a(x)]a'(x)$

Demostración:

Si suponemos $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$ entonces

$$H(x)=\int_{0}^{b(x)} f(t)dt-\int_{0}^{a(x)} f(t)dt = F[b(x)]-F[a(x)]$$

y

$$H'(x)= f[b(x)]b'(x)- f[a(x)]a'(x)$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la función

$$H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la función

$$H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{sen}(t^2)\,dt$$

$$H'(x) = \mathrm{sen}[(\sqrt{x})^2]\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\mathrm{sen}(x)}{2\sqrt{x}}$$

Reglas

Combinación lineal:

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Como la derivada del logaritmo de una función es

$$\frac{d}{dx}\ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln[f(x)] + c$$

Reglas

Como la regla de la cadena deriva

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^a = a[f(x)]^{a-1} f'(x)$$

entonces:

$$\int [f(x)]^a f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c$$

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable

Integración por cambio de variable

Como la regla de la cadena deriva

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

entonces:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)] + c$$

Hacemos el cambio de variable *u=g(x)* para sustituir *du* por *g'(x)dx*:

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

Ejemplo 1

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

Ejemplo 1

$$\int x\cos(x^2)dx$$

Cambiaremos $u=x^2$ y $du=2xdx$ en:

$$\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) + c = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + c$$

Ejemplo 2

Al aplicarlo a las definidas …

$$\int_{e}^{5} \frac{dx}{x\ln(x)}$$

Ejemplo 2

Al aplicarlo a las definidas …

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)}$$

Cambio u=ln(x) y du=dx/x,
y también e y 5:

$$u(e) = \ln(e) = 1$$
$$u(5) = \ln(5)$$

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_1^{\ln(5)} \frac{du}{u} = \ln(u)\Big]_1^{\ln(5)}$$

$$\ln(\ln(5)) - \ln(1) = \ln(\ln(5))$$

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes

Integración por partes

Si $\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ entonces

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

de donde:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Si cambiamos a la nomenclatura *df=f'(x)dx*, y hacemos u=f(x) y v=g(x), la regla queda:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integración por partes

Sentado **u**n **d**ía **v**i **u**n **v**aliente **S**oldado **v**estido **d**e **u**niforme

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Prioridad para escoger U:

1. Inversas: arcsen, arccos, arctag
2. Logarítmicas: log
3. Aritméticas: x^n
4. Trigonométricas: sen, cos, tag
5. Exponenciales: e^x

Ejemplo 1

$$\int \ln(x)dx$$

Ejemplo 1

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Tomamos *u=ln(x)* y *dv=dx*

Ejemplo 1

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos *u=ln(x)* y *dv=dx*

Calculamos *du=dx/x* y *v=x*

Ejemplo 1

$$\int \ln(x)dx \qquad \int u dv = uv - \int v du$$

Tomamos $\quad$ *u=ln(x)* y *dv=dx*

Calculamos $\quad$ *du=dx/x* y *v=x*

Sustituimos

$$\int \ln(x)dx = \ln(x)x - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + c = x(\ln(x) - 1) + c$$

Ejemplo 2

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$$

Ejemplo 2

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos *u=sen(x)* y *dv=e^x dx*

Calculamos *du=cos(x)dx* y *v=e^x*

Sustituimos

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Ejemplo 2

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos *u=sen(x)* y *dv=e^x dx*
Calculamos *du=cos(x)dx* y *v=e^x*
Sustituimos

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Tomamos *u=cos(x)* y *dv=e^x dx*
Calculamos *du=-sen(x)dx* y *v=e^x*
Sustituimos

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

Ejemplo 2

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx$$

Integral por partes cíclica

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x \mathrm{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x \mathrm{sen}(x) - e^x \cos(x) - \int e^x sen(x)dx$$

$$2\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x\left(\mathrm{sen}(x) - \cos(x)\right)$$

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x\left(\frac{\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{2}\right) + c$$