MATEMÁTICAS I (ÁLGEBRA) .... **enero 2014**

1 (1 punto) Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño; dad una condición necesaria y suficiente para que $(A-B)(A-B) = A^2 - B^2$

Solución: Puesto que $(A-B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$, es condición necesaria y suficiente que $AB = BA$ es decir, que conmuten.

2 (1 punto) Hallad k para que conmuten las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k+2 & 2 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Se debe cumplir que $AB = BA$

(a) AB

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+2 & 2 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+6 & 2k+4 & 6 \\ 2k+4 & 4 & 2 \\ k+2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) BA

$$\begin{bmatrix} k+2 & 2 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+6 & 2k+4 & k+2 \\ 2k+4 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que la igualdad se cumple si, y sólo si, $k = 4$.

3 (1 punto) Hallad $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{2014}$

Solución: Calculando las primeras potencias

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \ldots$$

Se deduce que

$$A^{2014} = \begin{bmatrix} -2013 & 2014 \\ -2014 & 2015 \end{bmatrix}$$

4 (2 puntos) Se tienen tres lingotes de 100 gramos cuya composición (en gramos) es la siguiente

	Oro	Plata	Cobre
Lingote 1	20	30	50
Lingote 2	30	40	30
Lingote 3	40	50	10

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes para formar uno nuevo que contenga 42 gr. de oro, 57 de plata y 51 de cobre?

Solución: El nuevo lingote debe pesar 150 gramos. Si llamamos x, y, z (todos menores que 100) a las cantidades (en gramos) que tomamos de los lingotes 1,2 y 3 respectivamente se obtiene un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 150 \\ 0'20x & + & 0'30y & + & 0'40z & = & 42 \\ 0'30x & + & 0'40y & + & 0'50z & = & 57 \\ 0'50x & + & 0'30y & + & 0'10z & = & 51 \end{array}\right\}$$

Resolviéndolo por Gauss (por ejemplo) se obtiene la solución indeterminada

$$(30+\alpha, 120-2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Como han de ser cantidades no negativas se deduce que $0 \leq \alpha \leq 60$. Luego se han de tomar: α gramos (de 0 a 60) del lingote 3, $30+\alpha$ del lingote 1 y $120-2\alpha$ del lingote 2.

5 Dado el sistema siguiente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(a) (1 punto) Calcula la factorización LU de la matriz de coeficientes

(b) (1 punto) Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando la factorización anterior.

Solución:

(a) Una factorización es

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 0 \\ 2 & -11 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Se resuelve el sistema $A\boldsymbol{x} = LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en dos fases. Llamamos $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$ (incógnitas auxiliares)

(1) $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -10 & 0 & 1 \\ 2 & -11 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

cuya solución es $\boldsymbol{y} = (2, 1/2, 3)$

(2) $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

La solución es $\boldsymbol{x} = (2, -1, 3)$

6 Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0'5 puntos) Obtened el polinomio característico de A.

(b) (0'5 puntos) Obtened los valores propios de A.

(c) (1 punto) Para cada valor propio de A, obtened una base del correspondiente subespacio propio.

(d) (0'5 puntos) Hallad una matriz diagonal D semejante a A

(e) (0'5 puntos) Hallad una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$

Solución:

(a)

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -6 & 5-\lambda & 6 \\ 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = -(\lambda+1)(\lambda-3)^2$$

(b) Los valores propios son -1 (simple) y 3 (doble)

(c)
- $\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es $\begin{bmatrix} -\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por tanto $E_A(-1) = \text{Env}\{(-1, -2, 1)\}$

- $\lambda = 3$

$$\left[\begin{array}{rrrcr} -3 & 1 & 3 & | & 0 \\ -6 & 2 & 6 & | & 0 \\ 3 & -1 & -3 & | & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{lrrcr} 1 & -1/3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right]$$

La solución es $\begin{bmatrix} 1/3\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por tanto $E_A(3) = \text{Env}\{(1/3, 1, 0), (1, 0, 1)\} = \text{Env}\{(1, 3, 0), (1, 0, 1)\}$

(d) La matriz D puede ser $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(e) La matriz P puede ser $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$