Índice general

Capítulo 1

Vectores y Sistemas lineales

Gran parte de los problemas matemáticos que aparecen en el estudio de aplicaciones científicas o técnicas necesitan resolver, en alguna de sus etapas, un sistema de ecuaciones lineales. De ahí que éste sea uno de los problemas más importante de las matemáticas y, por consiguiente, resulte apropiado empezar el curso con el estudio de los mismos. El alumno ha estudiado en etapas anteriores (por ejemplo en la E.S.O y en el Bachillerato) la resolución de sistemas por lo que éste capítulo se dará en forma de repaso para refrescar los conocimientos adquiridos anteriormente. Empezaremos con los vectores y sus operaciones, y seguiremos con los sistemas y su resolución en forma matricial. Seguidamente se estudian dos métodos iterativos de mucha utilidad para resolver sistemas por ordenador.

Objetivos:

- *Escalonamiento y reducción de una matriz*
- *El alumno deberá resolver cualquier sistema lineal mediante el algoritmo de Gauss*
- *Conocimiento y aplicación de los métodos iterativos.*

1.1 Vectores. El conjunto $\mathbb{R}^n$

Considerando en el plano un sistema de ejes cartesianos y dos puntos A y B, un vector fijo (véase la figura 1.1) es el segmento de recta que va desde A hasta B y se escribe $\overrightarrow{AB}$; nótese que $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$ pues los vectores tienen un sentido que lo indica el orden de los puntos (desde el punto inicial hasta el punto final).
Si tomamos como punto inicial el punto O (intersección de los ejes), el vec-

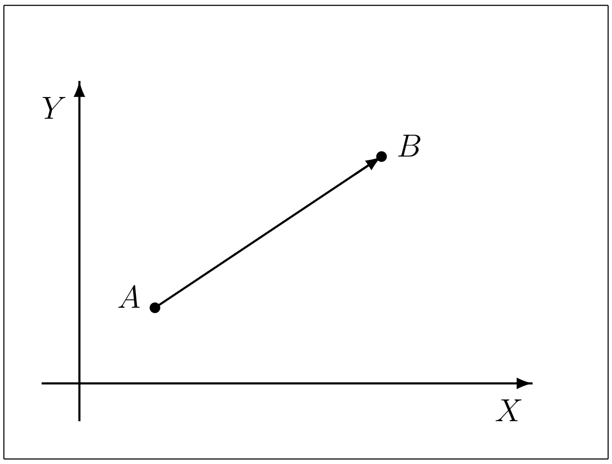


Figura 1.1: Vector en el plano

tor $\overrightarrow{OA}$ se llama vector de posición; a cada punto del plano le corresponde un vector de posición y es natural representarlos usando coordenadas y los denotaremos con letras minúsculas en negrita. En la figura 1.2 están representados los vectores $\boldsymbol{a} = (3, 2), \boldsymbol{b} = (-1, 3), \boldsymbol{c} = (2, -1)$.

Dos vectores fijos son equivalentes si al trasladarlos al origen son iguales; es decir tienen el mismo vector de posición (geométricamente son paralelos, tienen el mismo sentido y la misma longitud). Hablamos de vector libre; se puede trasladar paralelamente a cualquier punto y el representante de todos es el vector de posición. Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, y si las coordenadas de los puntos que lo definen son $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ su vector de posición es $\boldsymbol{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
Para sumar vectores en el plano, basta sumar sus componentes y geométricamente se aplica la ley del paralelogramo (figura 1.3). En la siguiente sección se definen las operaciones en $\mathbb{R}^n$.
Cada vector de posición (o simplemente vector) se representa con un par de números; el conjunto de vectores se identifica con $\mathbb{R}^2$ que son los pares ordenados de números reales. Extendiendo esta idea para $3, 4, \ldots, n$ definimos lo siguiente:

Definición 1.1: Un conjunto ordenado de n números reales se llama n-**tupla** o n-**vector** que se denota por

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots u_n).$$

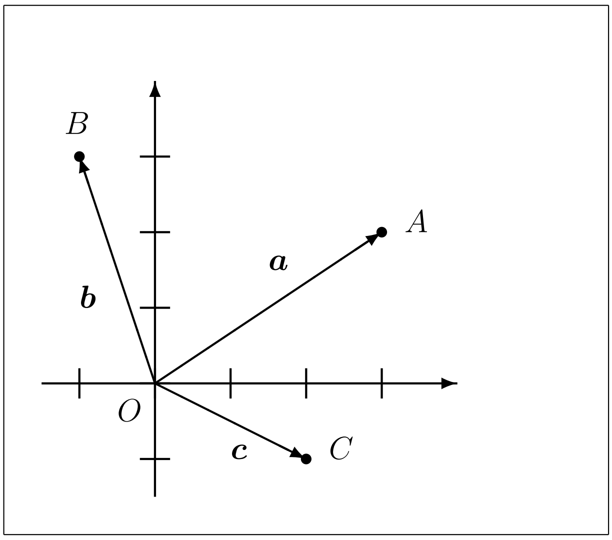


Figura 1.2: Vectores de posición

El conjunto de todos los vectores es $\mathbb{R}^n$. Nótese que dos vectores son iguales si tienen iguales todas sus correspondientes componentes

$$(u_1, u_2, \ldots u_n) = (v_1, v_2, \ldots v_n) \iff u_i = v_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots n.$$

1.2 Operaciones con vectores

En el conjunto $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones de la siguiente forma

Definición 1.2: Sean $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ dos vectores y α un numero (escalar)

- La suma de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.
- El producto de α por $\boldsymbol{u}$ es $\alpha\boldsymbol{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$.

En ambos casos el resultado es otro vector.El vector $(0, 0, \ldots, 0)$ se le llama vector **nulo** y se representa por $\mathbf{0}$; llamamos vector opuesto de $\boldsymbol{u}$ al vector $-\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$. El vector resta o diferencia es $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$. La suma y diferencia de vectores en $\mathbb{R}^2$ se ilustra en la figura 1.3 y las propiedades se recogen en el siguiente:

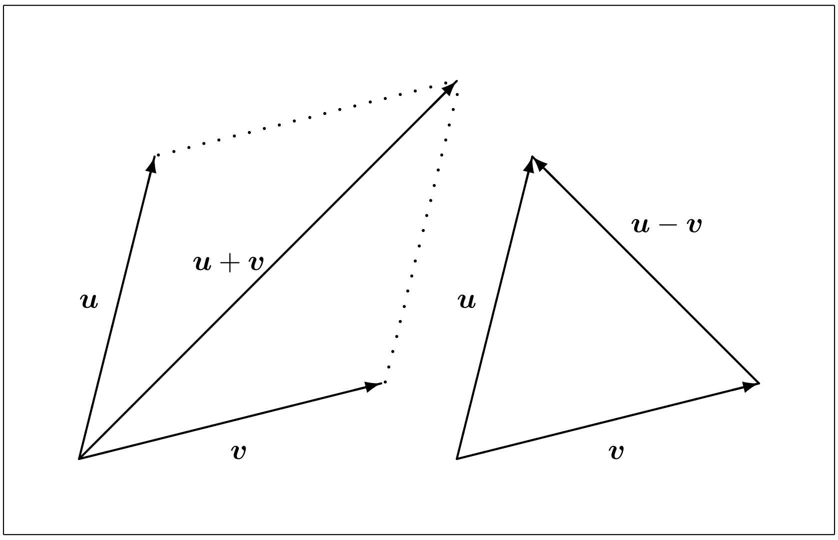


Figura 1.3: Suma y diferencia de vectores

Teorema 1.1: Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ y α y β escalares se tienen las siguientes propiedades:

(a) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ (propiedad asociativa)

(b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (propiedad conmutativa)

(c) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

(d) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}$

(e) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$

(f) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$

(g) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

(h) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

Ejemplo 1.1: *Dados* $\boldsymbol{u}=(1,-2,3)$, $\boldsymbol{v}=(-2,2,0)$ *y* $\boldsymbol{w}=(-1,-5,4)$ *entonces*

$$6\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}=(6,-12,18)-(-8,8,0)+(-5,-25,20)=(9,-45,38).$$

Hasta ahora escribimos los vectores o n-tuplas como $(u_1, \ldots, u_n)$, esto es, en horizontal y entre paréntesis, pero a veces (en su tratamiento como matrices) convendrá escribirlos en vertical y entre corchetes, por lo que indistintamente escribiremos

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

1.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 1.3: Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas o variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ los coeficientes y $b_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes.

Obsérvese que a_{ij} es el coeficiente de la $-i-$ésima ecuación relativa a la $-j-$ésima incógnita. El término lineal se refiere a que las incógnitas están tal cuál; así, las ecuaciones lineales no contienen productos, inversos u otras funciones de las variables; éstas se presentan únicamente en su primera potencia y están multiplicadas sólo por constantes.
A veces, cuando hay pocas incógnitas, se suele usar $x, y, z, \ldots$ para designar a las incógnitas.

Ejemplo 1.2: *El sistema*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. El siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & \pi \\ & - & y & - & z & = & \sqrt{6} \end{array}\right\}$$

es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas en el que no figura alguna incógnita porque su coeficiente es 0. Sin embargo el siguiente

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & & & - & \dfrac{2}{x_3} & = & 2 \\ & - & x_2 & - & 5x_3 & = & \sqrt{6} \end{array}\right\}$$

no es lineal ¿por qué?

Ejemplo 1.3: *Las siguientes ecuaciones son:*

(a) $xy - z = 0$ *No lineal*

(b) $(\cos\dfrac{\pi}{3})x + \sqrt{5}y - (\ln 5)z = 2^{\mathrm{e}}$ *Lineal*

(c) $x - y + z^2 = -1$ *No lineal.*

Definición 1.4: Una **solución** es una vector o $n-$tupla $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tal que al sustituir cada x_i por la correspondiente u_i se verifican la m ecuaciones.

Ejemplo 1.4: *Una solución del sistema*

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & & - & x_3 & = 2 \\ & x_2 & + & x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

es la terna $(3, -1, 1)$ *pues al sustituir* x_1 *por 3,* x_2 *por* -1 *y* x_3 *por 1, se cumplen las dos ecuaciones como se puede comprobar fácilmente; por otra parte, también es solución* $(2, 0, 0)$ *lo que pone de manifiesto que un sistema puede tener varias soluciones (posteriormente veremos que si hay 2 soluciones distintas, entonces hay infinitas). Sin embargo el sistema*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

no tiene solución (¿por qué?). En cambio el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$

sólo admite la solución $(1, 1)$ *como fácilmente puede comprobar el alumno usando los métodos conocidos en bachiller.*

Definición 1.5: Atendiendo al número de soluciones, se tiene la siguiente clasificación

$$\text{Sistemas}\begin{cases}\textbf{Compatibles}\begin{cases}\textbf{Determinados: } \text{Solución única}\\ \\ \textbf{Indeterminados: } \text{Más de una solución}\end{cases}\\ \\ \textbf{Incompatibles: } \text{Ninguna solución}\end{cases}$$

1.4 Resolución de sistemas

Comencemos con los sistemas más sencillos como el siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right\}$$

De la última ecuación se deduce que $x_3 = 3$; sustituyendo éste valor en la segunda ecuación y despejando se obtiene $x_2 = 2$ y por fin, en la primera ecuación se despeja $x_1 = -1$. El sistema es compatible determinado y la solución (única) es $(-1, 4, 3)$.

El procedimiento usado, se llama **sustitución regresiva** y es válido para sistemas como el anterior en donde cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior; empezando con la última ecuación se despeja la incógnita y se sustituye en la anterior, así hasta llegar a la primera. Otro sistema, similar al anterior, es

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & & & = & -3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

En éste caso, empezando por la primera ecuación se obtiene $x = -1$; sustituyendo éste valor en la segunda ecuación y despejando se obtiene $y = -1$ y por fin, en la tercera ecuación se despeja $z = -1$. El sistema es compatible determinado y la solución (única) es $(-1, -1, -1)$. Hemos usado ahora **sustitución progresiva**.

Por desgracia, no todos los sistemas son tan sencilos como los anteriores (a los que llamamos *triangulares*). La idea es transformar cualquier sistema en otro triangular con las mismas soluciones, y aplicar los procedimientos antes vistos. Pero ¿cómo sabemos si dos sistemas tienen las mismas soluciones?

Definición 1.6: Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Vamos a ver como se transforma un sistema en otro equivalente. Hay tres operaciones entre ecuaciones que lo consiguen, llamadas *operaciones elementales* que son las siguientes

- Tipo 1: Intercambiar dos ecuaciones.
- Tipo 2: Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Tipo 3: Sumar a una ecuación, otra distinta multiplicada por cualquier escalar.

El alumno debe probar que cualquier operación elemental transforma un sistema en otro equivalente.

Ejemplo 1.5: *Resolved el siguiente sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Si sumamos a la segunda fila el doble de la primera (operación de tipo 3), obtenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & & & 9x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ahora restamos a la tercera fila, la primera

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & & & 9x_3 & = & 9 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

Intercambiamos las ecuaciones segunda y tercera (tipo 1)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & & & 9x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la tercera ecuación por 1/9 (tipo 2) se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Tenemos un sistema equivalente al original; éste se resuelve por sustitución regresiva obteniéndose la solución $(1, 1, 1)$.
Vamos a operar de forma mas compacta, sólo con los coeficientes, disponiendo éstos en forma de rectángulo (llamado matriz y que se estudiarán en el siguiente capítulo); así, el sistema anterior lo expresamos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Las operaciones elementales se aplican ahora sobre las filas con la siguiente notación

- **Tipo 1**: Intercambiar las filas i y j se indica $F_{i \leftrightarrow j}$.
- **Tipo 2**: Multiplicar la fila i por $\alpha \neq 0$ se indica $F_i \leftarrow \alpha F_i$.
- **Tipo 3**: Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por β se indica $F_i \leftarrow F_{ij}(\beta)$.

Las operaciones anteriores se indican de la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{1}{9} F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Lo que hemos hecho ha sido obtener una matriz en forma **escalonada**

Definición 1.7: Una matriz está en forma **escalonada** si cumple las tres condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo (por la izquierda) de cada fila es un 1, que se llama **uno principal**.

- Cada "uno principal" está a la derecha de los "unos principales" de las filas precedentes.

- Las filas nulas, si existen, están en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo 1.6: *La siguientes matrices son escalonadas*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si el sistema tiene m ecuaciones (m filas) el número máximo de "unos principales" es m. Hay uno por fila, salvo que la fila sea idénticamente nula. El orden para escalonar una matriz es el siguiente:

> *Comenzamos con el primer elemento de la primera fila; si no es cero, se divide la fila por dicho número (operación de tipo 2) y ya tenemos el primer "uno principal"; a continuación hacemos ceros por debajo de él (operación de tipo 3); si fuera cero, se busca por debajo un elemento no nulo y se intercambian las filas, pero si todos los elementos por debajo son ceros también, entonces pasamos a la siguiente columna. Una vez conseguido un "uno principal" se busca el siguiente "uno principal" en las siguientes fila y columna hasta agotar las filas.*

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1.7: *Consideremos el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}\right\}$$

Vamos a resolverlo en forma matricial, escalonando la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{1}{4} F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow -\frac{1}{6} F_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La última fila tiene un uno principal en la última columna, lo que delata la incompatibilidad pues la ecuación $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$ no tiene solución; en el paso anterior ya se veía ésta incompatibilidad, pues la última fila representa la ecuación $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -6$ claramente sin solución.

Ejemplo 1.8: *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}\right\}$$

Procediendo como en el ejemplo anterior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow -F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última ecuación es $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$ y es satisfecha por cualquier 4-tupla de números; nos interesa por tanto, buscar soluciones para las dos primeras ecuaciones y, empezamos por la última, asignando a las incógnitas que no tienen uno principal un parámetro para cada una de la siguiente forma $x_3 = \alpha$ y $x_4 = \beta$ que representan números arbitrarios. Ahora despejamos $x_2 = 4 + 3x_3 + 5x_4 = 4 + 3\alpha + 5\beta$ y por sustitución regresiva

$$x_1 = 3 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 - (4 + 3\alpha + 5\beta) + \alpha + 2\beta = -1 - 2\alpha - 3\beta$$

La solución se representará a partir de ahora de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2\alpha - 3\beta \\ 4 + 3\alpha + 5\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

El procedimiento usado se llama eliminación de **Gauss** y consiste en formar una matriz con los coeficientes y términos independientes, que se llama matriz ampliada, y escalonarla. Si hay un uno principal en la última columna (o, equivalentemente si una fila queda de la forma $[\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \star\ ]$ siendo $\star$ un número no nulo), el sistema es **Incompatible**. Si ésto no ocurre, el sistema es **Compatible** siendo **Determinado** cuando hay tantos unos principales como incógnitas e **Indeterminado** cuando hay menos unos principales que incógnitas.

Como hemos visto, el algoritmo de Gauss (escalonamiento) hace ceros debajo de los unos principales; nada impide hacer ceros por encima de dichos unos obteniéndose una matriz más simple (con más ceros) que llamaremos reducida y, la resolución en éste caso, es trivial pues basta despejar cada incógnita principal (columnas con uno principal) en función de las incógnitas no principales a las que se han asignado valores libres de forma parámetrica.

Definición 1.8: Una matriz está en forma **reducida** si es escalonada y además cada uno principal es el único elemento no nulo en su columna.

Ejemplo 1.9: *Las siguientes matrices están en forma reducida*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si para resolver un sistema, reducimos la matriz, estamos usando una variante de Gauss que se llama de **Gauss-Jordan** que tiene más coste de operaciones pero nos evitamos la sustitución regresiva.

Ejemplo 1.10: *Reducir la siguiente matriz dada ya en forma escalonada; empezaremos por la última fila (ahora vamos de abajo hacia arriba)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 4F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ejemplo 1.11: *Resolver los sistemas siguientes usando el método de Gauss-Jordan*

(a)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Pasamos a forma matricial

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow -\frac{1}{4}F_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 4F_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - \frac{5}{4}F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es compatible determinado y la solución es

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & -3 \end{array}\right\}$$

Pasamos a forma matricial

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hemos escalonado la matriz y observamos que hay 2 unos principales lo que indica que el sistema es indeterminado y las incógnitas principales son x_1 y x_3. El sistema equivalente es

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Reduciendo la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Asignando parámetros a las incógnitas no principales $x_2 = \alpha$ y $x_4 = \beta$ se obtiene la solución

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \alpha - \beta \\ \alpha \\ 1 + \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.5 Sistemas homogéneos

Cuando en el sistema 1.1 son nulos los términos independientes, el sistema se llama homogéneo.

Definición 1.9: Un sistema se llama homogéneo si es de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Un sistema homogéneo es siempre compatible pues admite, al menos, la n-tupla nula como solución (llamada solución trivial); por lo demás, se resuelven como hemos visto, esto es, por Gauss o Gauss-Jordan. Posteriormente veremos la importancia de estos sistemas.

Ejemplo 1.12:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ignoramos la última fila y, en la segunda llamamos $x_3 = \alpha$ y por sustitución regresiva $x_2 = 5\alpha$, $x_1 = -2x_2 + 7\alpha = -3\alpha$. La solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ 5\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1.6 Métodos iterativos

El método de Gauss es un método directo, que tras un número finito de pasos se llega a la solución exacta si se trabaja con aritmética de precisión infinita, es decir, sin redondeo. Existen métodos **iterativos** que, partiendo de una solución inicial (un vector que no es solución), construye una sucesión de vectores que, a veces (no siempre), converge a la solución; en este caso, la solución exacta no se obtiene pero se puede conseguir con la precisión deseada. Veamos un ejemplo

Ejemplo 1.13: *Resolved el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & -7 \end{array}\right\}$$

Despejamos x_1 en la primera ecuación y x_2 en la segunda

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7}$$
$$x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

Partiendo de una solución inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ se sustituye en el miembro derecho de cada ecuación y se obtiene $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(0)}}{5}$$

Sustituyendo esta obtenemos $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ y así sucesivamente. La solución inicial típicamente es $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 0)$ y se forma la sucesión $\{\boldsymbol{x}^{(i)}\}_0^{+\infty}$. En el ejemplo anterior tenemos

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + 0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3 \cdot 0}{5} \approx 1'400$$

Sustituyendo estos valores

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + 1'4}{7} \approx 0'914$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

En la siguiente tabla se dan las 6 primeras iteraciones

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'914$	$0'976$	$0'9934$	$0'998$	$0'999$
$x_2^{(i)}$	0	$1'400$	$1'829$	$1'949$	$1'985$	$1'996$	$1'999$

La solución parece converger a la solución $(1, 2)$ que es la exacta.

En un proceso iterativo hay que poner una condición de parada (no se puede iterar indefinidamente). Una condición razonable es detener el proceso cuando dos soluciones consecutivas sean muy parecidas, pero ¿que quiere decir soluciones parecidas? Una forma es que el vector diferencia sea pequeño, pero ¿que quere decir pequeño? El alumno conoce de los estudios secundarios el concepto de norma (o módulo) de un vector que es una forma de "medir" los vectores. Recordemos que la norma de un vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ es

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Entonces, el proceso iterativo se puede detener cuando $\left\|\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\right\|$ sea menor que un número elegido de antemano que suele ser 10^{-k} eligiendo k según la precisión deseada.

Otra forma de detener el proceso es cuando la diferencia de dos soluciones consecutivas tenga las componentes menores que un número prefijado: $\left|x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}\right| < \epsilon$ para $j = 1, 2, \dots n$. o bién $\text{máx}\left|x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}\right| < \epsilon$. Por ejemplo dadas dos aproximaciones

$$(1'9998, 0'0002, -1'9988) \quad \text{y } (1'9999, 0'0001, -1'9989)$$

su diferencia es en valor absoluto $(0'0001, 0'0001, 0'0001)$; la máxima componente es una diez-milésima que podría ser un error tolerable (el error lo pone el usuario.)

El ejemplo que se ha visto anteriormente se ha resuelto usando el método de **Jacobi** que detallamos a continuación.

Método de Jacobi

Para resolver el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

Se despeja x_j en la $i-$sima ecuación (supuesto que $a_{ii} \neq 0$)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Se puede resumir de la siguiente forma

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Partiendo de una solución inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (que suele ser el vector nulo $(0, 0, \ldots, 0)$) e iterando se obtiene la sucesión $\{\boldsymbol{x}^{(i)}\}_0^{+\infty}$ que puede converger o no, a la solución real; el proceso se detiene cuando

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(i+1)} - \boldsymbol{x}^{(i)}\right\| < 10^{-k}.$$

o bién cuando

$$\text{máx}\left|x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}\right| < 10^{-k}.$$

Ni no se consigue la condición de parada hay que detener el proceso cuando el número de iteraciones supera una cota prefijada. El algoritmo queda así
`Dado el sistema, una solución inicial` $\boldsymbol{x}^{(0)}$ `y prefijados` $k, N \in \mathbb{N}$

- `Para` $i = 1, 2, \ldots$ `calcular` $\boldsymbol{x}^{(i)}$ `en función de` $\boldsymbol{x}^{(i-1)}$

$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}}\\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i-1)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}}\\
&\vdots\\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i-1)} - a_{n2}x_2^{(i-1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i-1)}}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

- `Detener el proceso cuando` $\left\|\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\right\| < 10^{-k}$ `ó` $i > N$.

Una variante el método de Jacobi conocida como método de **Gauss-Seidel** consiste en utilizar los valores que se van calculando tan pronto como se pueda; es decir, la $i-$ésima iteración se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}}\\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}}\\
&\vdots\\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i)} - a_{n2}x_2^{(i)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

Para calcular $x_j^{(i)}$ se usan $(j-1)$ valores de la iteración actual y $(n-j)$ de la anterior ; exactamente se usan

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots x_{j-1}^{(i)}, x_{j+1}^{(i-1)}, \ldots x_n^{(i-1)}.$$

y el cálculo es

$$x_j^{(i)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(i)} - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1}^{(i)} - a_{j,j+1}x_{j+1}^{(i-1)} - \cdots - a_{jn}x_n^{(i-1)}}{a_{jj}}$$

Al ir incorporando algunos valores en la misma iteración se espera acelerar la convergencia; veamos el ejemplo anterior usando este método

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(1)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

La segunda iteración es

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + x_2^{(1)}}{7} = \frac{5 + 1'829}{7} \approx 0'976$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3x_1^{(2)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'976}{5} \approx 1'985$$

La tabla siguiente muestra que la convergencia es más rápida que con el método de Jacobi

i	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'976$	$0'998$	$1'000$	$1'000$
$x_2^{(i)}$	0	$1'829$	$1'985$	$1'999$	$2'000$	$2'000$

Vamos a ver un ejemplo en el que falla el método

Ejemplo 1.14: *Aplicad el método de Gauss-Seidel partiendo de la solución inicial* $(0,0)$, *al sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $(2,1)$

Despejando

$$x_1 = 1 + x_2$$
$$x_2 = 5 - 2x_1$$

La primera iteración da $x_1^{(1)} = 1 + 0 = 1$, $x_2^{(1)} = 5 - 2 \cdot 1 = 3$. Las siguientes se recogen en la tabla

i	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(i)}$	0	1	4	-2	10	-14
$x_2^{(i)}$	0	3	-3	9	-15	33

Los valores no convergen por lo que el método falla. Nos preguntamos ahora, ¿cuándo convergen los métodos iterativos? Una convergencia asegurada se da cuando la matriz de coeficientes es **diagonalmente dominante**

Definición 1.10: Una matriz de tamaño $n \times n$ se llama diagonalmente dominante cuando para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| .$$

Es decir dada elemento diagonal es, en valor absoluto, estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos de su fila.

Teorema 1.2: Si la matriz de un sistema lineal es diagonalmente dominante, el sistema es compatible determinado y los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución para cualquier aproximación inicial.

Hay casos en que la matriz no es diagonalmente dominante pero una reordenación de las ecuaciones si; veamos el siguiente

Ejemplo 1.15: *Aplicad el método de Gauss-Seidel al sistema siguiente cuya solución es* $(1, 1, 1)$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes no es diagonalmente dominante pero reordenando las ecuaciones se tiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

Partiendo de la solución inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)$ se obtienen las iteraciones

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(1)} &= (0'66667, 0'55556, 0'95556)\\
\boldsymbol{x}^{(2)} &= (0'71852, 0'89136, 1'06914)\\
\boldsymbol{x}^{(3)} &= (0'90453, 0'99122, 1'03468)\\
\boldsymbol{x}^{(4)} &= (0'98259, 1'00576, 1'00927)\\
\boldsymbol{x}^{(5)} &= (1'0007, 1'0033, 1'0010)
\end{aligned}$$

La diferencia entre las dos últimas iteraciones es

$$\boldsymbol{e} = (0'0181791, -0'0056247, -0'0095235)$$

cuya norma es $0'021279$. Podríamos seguir iterando hasta conseguir rebajar esta norma a la cota deseada porque la convergencia está asegurada en este caso, pero puede ocurrir que el método converja aunque la matriz **no** sea diagonalmente dominante.

Cálculos con Octave

(a) **Forma escalonada de una matriz** A. La forma reducida se obtiene directamente con la orden `rref(A)` pero la forma escalonada no tiene instrucción. Las tres operaciones elementales se calculan de la siguiente forma

- Tipo I. Intercambio de las filas i y j

```
Octave> x=A(i,:);A(i,:)=A(j,:); A(j,:)=x
```

- Tipo II. Multiplicación de la fila i por el escalar k

```
Octave> A(i,:)=k*A(i,:)
```

- Tipo III. Sumar a la fila i la fila j multiplicada por k

```
Octave> A(i,:)=A(i,:)+k*A(j,:)
```

(b) **Métodos iterativos**. Dado el sistema de 3 ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & y & + & z & = & 8\\
x & + & 3y & + & z & = & 10\\
x & + & y & + & 3z & = & 12
\end{array}\right\}$$

Despejamos una incógnita en cada ecuación

$$\begin{aligned} x &= \frac{8-y-z}{3} \\ y &= \frac{10-x-z}{3} \\ z &= \frac{12-x-y}{3} \end{aligned}$$

Para hacer las iteraciones con Octave, hacemos

- **Jacobi**

```
Octave> x=[0 0 0];
Octave> x=[(8-x(2)-x(3))/3  (10-x(1)-x(3))/3
(12-x(1)-x(2))/3]
```

  Esto produce una sóla iteración. Repitiendo la orden (tecla de cursor arriba) se obtienen las sucesivas, aunque su puede hacer con un bucle `for`; por ejemplo para hacer 6 iteraciones

```
Octave> x=[0 0 0];
Octave> for i=1:6 x=[(8-x(2)-x(3))/3
(10-x(1)-x(3))/3  (12-x(1)-x(2))/3] endfor
```

- **Gauss-Seidel**

```
Octave> x=[0 0 0];
Octave> for i=1:6 x(1)= (8-x(2)-x(3))/3;x(2)=(10-x(1)
-x(3))/3;x=[x(1) x(2) (12-x(1)-x(2))/3] endfor
```

1.7 Problemas resueltos

1.1 Probad que $(3/2-\alpha, -1/2-\beta, \alpha, \beta)$ es solución del sistema siguiente para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución: Sustituyendo x por $3/2-\alpha$, y por $-1/2-\beta$, z por α y t por β, hay que comprobar que se verifican las dos ecuaciones.

$$(3/2-\alpha) + (-1/2-\beta) + \alpha + \beta = 3/2 - 1/2 = 1$$
$$(3/2-\alpha) - (-1/2-\beta) + \alpha - \beta = 3/2 + 1/2 = 2$$

Se verifican las ecuaciones independientemente de los valores de α y β.

1.2 Según se resuelva un sistema, se puede llegar a soluciones aparentemente distintas (siendo sean la misma). Comprobad que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son iguales

$$S_1 = \{(1-2\alpha, 6+4\alpha, \alpha)\colon \forall\alpha\}, \qquad S_2 = \{(4-\alpha/2, \alpha, -3/2+\alpha/4)\colon \forall\alpha\}$$

Solución: Lo primero que hay que observar es que el parámetro α que aparece en ambos conjuntos no quiere decir que tenga el mismo valor (se podría haber usado β u otra letra en el segundo conjunto); es conveniente, para hacer más clara la demostración, que expresemos S_2 de otra forma $S_2 = \{(4-\beta/2, \beta, -3/2+\beta/4)\colon \forall\beta\}$. Hay que comprobar que $S_1 = S_2$ y usaremos el método de la doble inclusión

(a) $S_1 \subseteq S_2$. Sea un elemento cualquiera $\boldsymbol{x} = (1-2\alpha, 6+4\alpha, \alpha) \in S_1$; haciendo $\beta = 6+4\alpha$ se tiene que $\alpha = -3/2+\beta/4$ y sustituyendo en $\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (1-2(-3/2+\beta/4), 6+4(-3/2+\beta/4), -3/2+\beta/4) \\ &= (4-\beta/2, \beta, -3/2+\beta/4) \in S_2 \end{aligned}$$

(b) $S_2 \subseteq S_1$. Sea un elemento cualquiera $\boldsymbol{y} = (4-\beta/2, \beta, -3/2+\beta/4) \in S_1$; llamando $\alpha = -3/2+\beta/4$ y procediendo como en el apartado anterior

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (4-\beta/2, \beta, -3/2+\beta/4) \\ &= (1-2\alpha, 6+4\alpha, \alpha) \in S_1 \end{aligned}$$

1.3 Resolved el siguiente sistema por el método de Gauss-Jordan

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftarrow -F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow (-1/3) F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tenemos la forma reducida con 2 unos principales y 4 incógnitas, por lo que asignamos un parámetro distinto a cada incógnita no principal (en este caso las segunda y cuarta). La solución es $x_2 = \alpha, x_4 = \beta, x_1 = -2 + 3\alpha, x_3 = 1 + 2\beta$, que expresamos

$$\begin{bmatrix} -2+3\alpha \\ \alpha \\ 1+2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.4 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a) ¿Bajo qué condiciones la forma escalonada reducida de A es la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(b) Probar que si $ad - bc \neq 0$ el sistema $\left.\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & r \\ cx & + & dy & = & s \end{array}\right\}$ es compatible determinado y hallar la solución.

Solución:

(a) Para buscar el primer uno principal supondremos que $a \neq 0$; en este caso

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - \dfrac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

Ha de ser $d - \dfrac{cb}{a} \neq 0$ o lo que es lo mismo $ad - bc \neq 0$. Una condición es , por tanto, que $a \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$. supongamos ahora que $a = 0$; la matriz es $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y, necesariamente, ha de ser $c \neq 0$. Operando

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Tenemos ahora que ha de ser $b \neq 0$, o sea, $bc \neq 0$ que se puede poner como $ad - bc \neq 0$. Resumiendo ambas condiciones (sea a cero o no), se tiene que una condición necesaria y suficiente para la reducción antedicha es

$$ad - bc \neq 0.$$

(b) Por el apartado anterior el sistema es compatible pues la forma reducida tiene 2 unos principales. Falta hallar la solución; supongamos, en primer lugar, que $a \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b & | & r \\ c & d & | & s \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & b/a & | & r/a \\ c & d & | & s \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & b/a & | & r/a \\ 0 & d - cb/a & | & s - cr/a \end{bmatrix}$$

Como el número $d - cb/a \neq 0$ ya que $ad - bc \neq 0$ dividimos la segunda fila por dicho número

$$\begin{bmatrix} 1 & b/a & | & r/a \\ 0 & d - cb/a & | & s - cr/a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & b/a & | & r/a \\ 0 & 1 & | & (s - cr/a)/(d - cb/a) \end{bmatrix}$$

Se obtiene $y = (s - cr/a)/(d - cb/a) = \dfrac{as - cr}{ad - bc}$. Despejando en la primera ecuación

$$x = \frac{r - by}{a} = \text{(operando)} = \frac{dr - bs}{ad - bc}$$

Veamos ahora el caso $a = 0$; como $b \neq 0$ (y también $c \neq 0$ ¿por qué?) se tiene de la primera ecuación que $y = r/b$ y sustituyendo en la segunda

$$x = \frac{s - dy}{c} = \frac{bs - dr}{bc}$$

La solución, en este caso, se puede expresar

$$(x, y) = \left(\frac{bs - dr}{bc}, \frac{r}{b}\right) = \left(\frac{dr - bs}{ad - bc}, \frac{as - cr}{ad - bc}\right)$$

Luego, en cualquier caso, la solución es

$$x = \left(\frac{dr - bs}{ad - bc}\right), \qquad y = \left(\frac{as - cr}{ad - bc}\right)$$

1.5 Hallad los valores de a que hacen compatible el siguientes sistema y resolvedlo para tales valores.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ a^2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2a^2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ a & 1 & 1 & | & a \\ a^2 & -1 & 3 & | & 2a^2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & | & 0 \\ 0 & -1-a^2 & 3-a^2 & | & a^2 \end{array}\right]$$

Suponiendo $a \neq 1$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1-a^2 & 3-a^2 & | & a^2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & a^2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & a^2/4 \end{array}\right]$$

Usemos el algoritmo de sustitución regresiva:

$$x_3 = \frac{a^2}{4}, \quad x_2 = -x_3 = -\frac{a^2}{4}, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1$$

El sistema, si $a \neq 1$, es C.D. con solución $(1, -a^2/4, a^2/4)$. Para $a = 1$ retomemos los cálculos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & -2 & 2 & |1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -2 & 2 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es indeterminado con solución

$$(3/2 - 2\alpha, -1/2 + \alpha, \alpha.)$$

1.6 Clasificad el siguiente sistema en función de a y b.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & - & ax_3 & = & b \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 4 & 7 & -a & | & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 9 & | & 1 \\ 0 & 3 & -a+16 & | & b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 9 & | & 1 \\ 0 & 0 & -a-11 & | & b-3 \end{bmatrix}$$

Si $-a - 11 \neq 0$ el sistema es determinado. Si $-a - 11 = 0$ y $b - 3 = 0$ es indeterminado y si $b - 3 \neq 0$ es incompatible. Resumiendo

$$\left\{\begin{array}{ll} a \neq -11 & \text{Determinado} \\ a = -11 & \left\{\begin{array}{ll} b \neq 3 & \text{Incompatible} \\ b = 3 & \text{Indeterminado} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1.7 Tenemos 20 monedas que suman 3 euros; las monedas son de 5, 10 y 20 céntimos.

(a) ¿Cuántas monedas hay de cada clase sabiendo que el número de monedas de 10 céntimos es igual que el de 20 céntimos?

(b) Encontrad todas las combinaciones de 20 monedas (de 5, 10 y 20 céntimos) que suman 3 euros.

Solución: Llamemos x al número de monedas de 5 céntimos, y al de 10 y z al de 20.

(a) Con los datos planteamos el sistema

$$\begin{aligned} &x+y+z=20\\ &5x+10y+20z=300\\ &y=z \end{aligned}$$

Se ordena se simplifica y queda

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 20\\ x & + & 2y & + & 4z & = & 60\\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

La solución es $(0,10,10)$.

(b) Surge el sistema anterior sin la última ecuación

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 20\\ x & + & 2y & + & 4z & = & 60 \end{array}\right\}$$

El sistema es indeterminado con solución

$$(-20+2\alpha, 40-3\alpha, \alpha). \tag{1.2}$$

De las infinitas soluciones tenemos que buscar las que sean enteros no negativos

$$\begin{aligned} -20+2\alpha \geq 0 &\to \alpha \geq 10\\ 40-3\alpha \geq 0 &\to \alpha \leq \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Esto limita los valores de α (que es z) al conjunto $\{10,11,12,13\}$. Sustituyendo en (1.2) se obtienen las cuatro soluciones

x	y	z
0	10	10
2	7	11
4	4	12
6	1	13

1.8 Se colocan tres cepas bacterianas I, II y III en un tubo de ensayo donde son alimentadas con tres fuentes alimenticias A, B y C. Cada da se colocan en el tubo 2300 unidades de A, 800 de B y 1500 de C y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento según muestra la tabla ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Solución: Llamando x al número de bacterias de la cepa I, y al de la cepa II y z al de la cepa III se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 2300 \\ x & + & 2y & & & = & 800 \\ x & + & 3y & + & z & = & 1500 \end{array}\right\}$$

El sistema es C.D. con solución $(100, 350, 350.)$

1.8 Problemas propuestos

1.9 Comprobad que $(1, 1, 1)$ es solución del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

1.10 Comprobad que la 3-tupla es solución del sistema correspondiente, para cualquier α:

$$\begin{bmatrix} -2+3\alpha \\ 1+5\alpha \\ 2-2\alpha \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 5 \\ 2x & & & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & 4z & = & 7 \end{array}\right\}$$

1.11 Comprobad que la 3-tupla es solución del sistema correspondiente, para cualquier α:

$$\begin{bmatrix} -1+2\alpha \\ 4-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

1.12 Dado el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(a) Comprobad que $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 1)$ y $\boldsymbol{u} = (6, -3, -3)$ son soluciones.

(b) Probad que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ es solución para cualesquiera números reales α y β.

1.13 De las siguientes matrices, decid cuáles están en forma escalonada, cuáles en forma escalonada reducida y cuáles no están en ninguna de estas dos formas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.14 ¿Cuál de las siguientes matrices está en forma reducida?

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

1.15 Resolver los siguientes sistemas por el método de sustitución hacia atrás

(a) $\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 3 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 5 \\ & & 2x_2 & = & 6 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & & & 3x_3 & = & -1 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right\}$

(f) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

1.16 Determinar, sin hacer operaciones, si los siguientes sistemas en forma de matriz ampliada son compatibles determinados, indeterminados o incompatibles.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$

1.17 Resolved los sistemas anteriores.

1.18 Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss

(a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2r & + & s & = & 3 \\ 4r & + & s & = & 7 \\ 2r & + & 5s & = & -1 \end{array}\right\}$

(f) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$

(g) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & -1 \end{array}\right\}$

(h) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & d & = & 4 \\ a & + & 2b & + & 3c & + & 4d & = & 10 \\ a & + & 3b & + & 6c & + & 10d & = & 20 \\ a & + & 4b & + & 10c & + & 20d & = & 35 \end{array}\right\}$

(i) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 1/2a & + & b & - & c & - & 6d & & & = & 2 \\ 1/6a & + & 1/2b & & & - & 3d & + & e & = & -1 \\ 1/3a & & & - & 2c & & & - & 4e & = & 8 \end{array}\right\}$

(j) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} \sqrt{2}x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & \sqrt{2}y & - & 3z & = & -\sqrt{2} \\ & - & y & + & \sqrt{2}z & = & 1 \end{array}\right\}$

1.19 Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss-Jordan

(a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$

(f) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$

1.20 Para qué valores de a son compatibles los siguientes sistemas? Obtened la solución de los compatibles.

(a) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 & + & ax_2 & = & 8 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & = & a \end{array}\right\}$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & ax_2 & & & = & 4 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -a \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcr} ax_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & = & 2 \end{array}\right\}$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcrcr} ax_1 & - & 3ax_2 & = & 1 \\ 2ax_1 & + & (6a+1)x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2ax_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

1.21 Resolver los sistemas en función de k

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & kx_2 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & k \\ 2x & - & y & + & 4z & = & k^2 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

1.22 Clasificad los siguientes sistemas en función de a y b.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & - & ax_3 & = & b \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 6x_3 & = & b \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & b+2 \end{array}\right\}$$

1.23 Dado un triángulo ABC con lados a, b y c y aplicando trigonometría elemental se tiene que

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & c\cdot\cos B & + & b\cdot\cos C & = & a \\ c\cdot\cos A & & & + & a\cdot\cos C & = & b \\ b\cdot\cos A & + & a\cdot\cos B & & & = & c \end{array}\right\}$$

Resolved el sistema para hallar $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$ en función de a, b y c y probad el teorema del coseno que dice:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \end{aligned}$$

1.24 Admitiendo que $1 + 2 + \cdots + n = an^2 + bn + c, \quad \forall n \in \{0, 1, 2, 3\ldots\}$, calcula a, b y c.

1.25 Admitiendo que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d, \quad \forall n \in \{0, 1, 2, 3\ldots\}$, calcula a, b , c y d.

1.26 Con ayuda de los problemas anteriores halla $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, y comprueba que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

1.27 Prueba que por tres puntos no colineales pasa una única parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

1.28 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos

$$A = (1, -1), B = (2, 0), C = (3, -5)$$

Los siguientes problemas son aplicaciones de los sistemas; se debe plantear un sistema con los datos del problema y seleccionar después las soluciones. En muchos de ellos se exige que la solución sean números naturales, esto es, un vector de $\mathbb{N}^n$ y no de $\mathbb{R}^n$ por lo que es preciso restringir el conjunto de soluciones en el caso de sistemas indeterminados.

1.29 La suma de las tres cifras de un número es 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de unidades y decenas. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calculad dicho número.

1.30 Se colocan tres cepas bacterianas I, II y III en un tubo de ensayo donde son alimentadas con tres fuentes alimenticias A, B y C. Cada día se colocan en el tubo 1500 unidades de A, 3000de B y 4500 de C y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento según muestra la tabla ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
A	1	1	1
B	1	2	3
C	1	3	5

1.31 Una florista ofrece tres tamaños (pequeño, mediano y grande) de arreglos florales que contienen rosas, margaritas y crisantemos. Cada arreglo contiene el número de flores que recoge el siguiente tabla

	Rosas	Margaritas	Crisantemos
Pequeño	1	3	3
Mediano	2	4	6
Grande	4	8	6

Si un día utilizó 24 rosas, 50 margaritas y 48 crisantemos ¿cuántos arreglos de cada tipo hizo?

1.32 Se tienen tres lingotes de 100 gramos cuya composición (en gramos) es la siguiente

	Oro	Plata	Cobre
Lingote 1	20	30	50
Lingote 2	30	40	30
Lingote 3	40	50	10

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes para formar uno nuevo que contenga 42 gr. de oro, 57 de plata y 51 de cobre?

1.33 Un grifo llena una bañera en 2 horas. Otro la llena en 3 horas ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en llenarla?

1.34 Dos grifos A y B llenan una bañera en 1h 12m. Los grifos A y C la llenan en 1h 30m y los grifos B y C la llenan en 2 horas ¿Cuánto tiempo tardarán los tres juntos en llenar la bañera? ¿Cuánto tiempo tardará cada uno por separado en llenarla?

1.35 Problema de las vacas de Newton La hierba crece de forma uniforme y constante en un verde prado. Se sabe que 70 vacas se lo comen en 24 días y que 30 vacas se lo comen en 60 días ¿Cuántas vacas son necesarias para que se coman toda la hierba del prado en 96 días?

Métodos iterativos

1.36 Aplíquense los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel a los siguientes sistemas iterando hasta que dos soluciones consecutivas coincidan hasta las milésimas.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 4'5x_1 & - & 0'5x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3'5x_2 & = & -1 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 17 \\ x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 18 \end{array}\right\}$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$

1.37 Pruébese que el método de Gauss-Seidel diverge en los sistemas siguientes; reordénense después las ecuaciones para obtener la convergencia del método obteniendo 12 iteraciones.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

1.38 Pruébese que el método de Gauss-Seidel converge en los siguientes casos aunque la matriz de coeficientes no es diagonalmente dominante y no hay forma de reordenar las ecuaciones para conseguirlo.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 5x_2 & = & 14 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -7 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -8 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 102 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -90 \end{array}\right\}$$

Capítulo 2

Matrices y operaciones

Las matrices forman una herramienta versátil a la vez que potente para el tratamiento de muchos problemas de la ciencia; en el capítulo anterior nos han ayudado para hacer las operaciones entre ecuaciones de una forma más compacta y en este capítulo se definen formalmente así como las operaciones entre ellas que el alumno ya debe conocer. Se termina el capítulo viendo una aplicación a los grafos.

Objetivos:

- *Dominio de las operaciones matriciales*
- *Conocimiento de las propiedades de las operaciones entre matrices*
- *Manejo del producto de matrices en bloques.*

2.1 Introducción

Definición 2.1: Una matriz de tamaño $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ escalares dispuestos en m filas y n columnas.

Su representación general es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

El elemento a_{ij} está en la fila i y en la columna j. Se les suele identificar con letras mayúsculas y, a veces, la notación (2.1) se simplifica y se pone

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{o simplemente } A = [a_{ij}].$$

Ejemplo 2.1: *La matrices*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

son de tamaños 2×3, 1×4 *y* 2×2 *respectivamente.*

Definición 2.2: Dos matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{r\times s}$ son iguales si $m = r$,$n = s$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo valor de i y j.

Definición 2.3: Siendo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, se llama matriz traspuesta de A a la matriz A^T de tamaño $n \times m$ cuyo elemento (i, j) es el elemento (j, i) de A. Esto es

$$A^T = [a_{ji}]_{n\times m}.$$

Obsérvese que la $i-$ésima fila de A es la $i-$ésima columna de A^T.

Ejemplo 2.2: *Para la matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad y \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Algunas matrices reciben un nombre especial como las siguientes

Definición 2.4: Una matriz es **cuadrada** si tiene el mismo número de filas que de columnas, o sea, $m = n$.

Definición 2.5: Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$, y **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.
A cualquiera de ellas se les llama **triangular**.

El aspecto general de éstas es el siguiente

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

SUPERIOR INFERIOR

donde el asterisco $(*)$ representa un número arbitrario.

Definición 2.6: En una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ a los elementos a_{ii} se les llama diagonales.
Una matriz es **diagonal** cuando son nulos los elementos no diagonales.

Definición 2.7: Llamamos matriz **fila** a una matriz de tamaño $1 \times n$ y matriz **columna** a una matriz de tamaño $m \times 1$.

Ejemplo 2.3: *Son matrices cuadradas las siguientes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

La matriz A es triangular inferior, la matriz B es triangular superior y la matriz C es diagonal.

Como comentamos en el capítulo anterior, la $n-$tupla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se escribe a veces como la matriz columna $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ que no debe confundirse con la matriz fila $[u_1, u_2 \ldots, u_n]$ que es su traspuesta.

2.2 Suma de matrices

Definición 2.8: La suma de dos matrices del mismo tamaño es la matriz de igual tamaño cuyo elemento (i, j) es la suma de los elemento (i, j) de las matrices sumandos. Es decir, si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ entonces

$$A + B = [a_{ij} + bij].$$

Nótese que sólo se suman las matrices del mismo tamaño, sumando los elementos que están en la misma posición.

Ejemplo 2.4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definición 2.9: Se llama **matriz opuesta** de la matriz $A = [a_{ij}]$, y se escribe $-A$ a la matriz del mismo tamaño definida

$$-A = [-a_{ij}]$$

Ejemplo 2.5:

$$-\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definición 2.10: Se llama **matriz nula** de tamaño $m\times n$, y se escribe $O_{m\times n}$ o simplemente O a la matriz cuyos elementos son todos nulos.

Se tienen la siguientes propiedades similares a la suma de vectores:

Teorema 2.1: Si A,B y C son matrices del mismo tamaño:

(a) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (propiedad asociativa)

(b) $A+B = B+A$ (propiedad conmutativa)

(c) $A+O = A = O+A$ (Neutro para la suma)

(d) $A+(-A) = O = (-A)+A$ (existencia de elemento opuesto)

La demostración es elemental y se deja al alumno.
Gracias a la propiedad asociativa se puede escribir sin ambigüedad la expresión $A+B+C$ pudiendo prescindir de los paréntesis. También, gracias a la matriz opuesta, podemos definir la resta de matrices $A-B$ como $A+(-B)$, es decir la notación $A-B$ es una abreviación de $A+(-B)$.

Teorema 2.2: Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

Demostración: Veamos primero la igualdad de tamaños; si A y B son de tamaño $m\times n$ entonces $(A+B)^T$ es de tamaño $n\times m$ y A^T+B^T es de tamaño $n\times m$. El elemento (i,j) de $(A+B)^T$ es el elemento (j,i) de $A+B$ que es $a_{ji}+b_{ji}$; por otra parte el elemento (i,j) de A^T+B^T es la suma de los elementos correspondientes de A^T y B^T esto es, $a_{ji}+b_{ji}$. $\square$

Definición 2.11: Una matriz es **simétrica** si $A^T = A$ y es **antisimétrica** si $A = -A^T$.

De la definición se deduce que ambas son cuadradas; una matriz antisimétrica tiene nulos los elementos diagonales pues la igualdad $A = -A^T$ implica que $a_{ij} = -a_{ij}$ y para los diagonales $a_{ii} = -a_{ii}$ de forma que $a_{ii} = 0$.

Ejemplo 2.6: *Las matices*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

son simétricas, mientras que las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

son antisimétricas.

Notemos que una matriz diagonal es simétrica y que la matriz cuadrada nula (de cualquier tamaño) es a la vez simétrica y antisimétrica siendo la única matriz con esta propiedad.

2.3 Producto de un escalar por una matriz

Definición 2.12: Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cualquiera y α un escalar. El producto de α por A es la matriz denotada αA del mismo tamaño que A y definida

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

Las propiedades se recogen en el teorema siguiente

Teorema 2.3: Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$ y α y β escalares; entonces

(a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(c) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

(d) $1A = A$

Ahora podemos calcular expresiones como $2A - 3B + 4C$ o similares.

Ejemplo 2.7: *Simplifiquemos la siguiente expresión*

$$\begin{aligned} &4(2A - B) - 3(A + 2B) + 5(-A + B) \\ &= 8A - 4B - 3A - 6B - 5A + 5B \\ &= 0A - 5B \\ &= -5B. \end{aligned}$$

Calculemos ahora $2(3A - B) - 3(B - 2C) + 4[2(A + B + C) - (4A + 3C)]$ *siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} &2(3A - B) - 3(B - 2C) + 4[2(A + B + C) - (4A + 3C)] \\ &= 6A - 2B - 3B + 6C + 4[2A + 2B + 2C - 4A - 3C] \\ &= 6A - 5B + 6C - 8A + 8B - 4C \\ &= -2A + 3B + 2C \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 1 & -6 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que para cualquier matriz A y cualquier escalar α es

$$0A = O = \alpha O.$$

Teorema 2.4: Para cualquier matriz A y cualquier escalar α es

$$(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$$

.

2.4 Producto de matrices

Definición 2.13: Sean las matrices $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ y $B = [b_{kj}]_{n\times p}$. El producto AB es la matriz $C = [c_{ij}]$ de tamaño $m \times p$ de forma que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

De la definición se observa que para poder multiplicar dos matrices AB (en este orden), el número de columnas de A ha de coincidir con el número de filas de B. El elemento genérico c_{ij} se obtiene multiplicando en orden (primero con primero, segundo con segundo, etc) la $i-$ésima fila de A por la $j-$ésima columna de B.

$$\text{Fila } i \text{ de } A \rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \leftarrow \text{Columna } j \text{ de } B$$

Ejemplo 2.8: *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular AB, BC, CB y CA obteniendo

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} \\
BC &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\
CB &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
CA &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Obsérvese que $BC \neq CB$.

El producto de matrices según la definición no siempre está definido; aunque se pueda calcular AB puede no estar definido BA y, en el caso de estarlo, pueden ser distintas por no coincidir los tamaños, pero aún coincidiendo pueden ser distintas como pone de manifiesto el siguiente

Ejemplo 2.9: *Sean* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El producto de matrices no es, por tanto, *conmutativo* lo cuál no quiere decir que haya casos en que $AB = BA$. Se dice, en este caso, que **conmutan**. Tanto las matrices fila como las matrices columna se suelen representar (por analogía con los vectores) con letras minúsculas y en negrita. Sean

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v} = [u_1 \ u_2 \ \cdots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \in \mathbb{R}$$

mientras que

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [u_1 \ u_2 \ \cdots u_n] = \begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & \cdots & v_1 u_n \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & \cdots & v_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n u_1 & v_n u_2 & \cdots & v_n u_n \end{bmatrix}$$

Queda patente que el producto matricial no es conmutativo.

El producto de una matriz por una columna (en éste orden) da como resultado otra columna: $A_{m\times n} B_{n\times 1} = C_{m\times 1}$, mientras que el producto de fila por matriz (en éste orden) es otra fila:$A_{1\times m} B_{m\times n} = C_{1\times n}$. Los sistemas lineales se escriben a partir de ahora en forma matricial. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Si llamamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a la matriz de los coeficientes, y

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

a las matrices formadas por las incógnitas y términos independientes, el sistema se expresa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Aunque el producto de matrices no goza de la propiedad conmutativa, sí tiene otras que establecemos a continuación

Teorema 2.5: Si A, B y C son matrices de tamaño $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$ respectivamente, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

A partir de ahora podemos prescindir de los paréntesis y escribir ABC.

Teorema 2.6: Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, B y C de tamaño $n \times p$ y D de tamaño $p \times q$, entonces

(a) $A(B + C) = AB + AC$

(b) $(B + C)D = BD + CD$

El producto de matrices es distributivo respecto de la suma.

Con el producto matricial hay que llevar mucho cuidado en respetar el orden, pues sabemos que no es lo mismo (en general) AB que BA. Sin embargo con los escalares se puede hacer lo siguiente

Teorema 2.7: Si A y B son matrices de tamaño $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente, y α un escalar

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B).$$

Teorema 2.8: Si A y B son matrices de tamaño $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente, entonces

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Demostración: $(AB)^T$ es de tamaño $p \times m$. Por otra parte B^T es de tamaño $p \times n$ y A^T es $n \times m$ por lo que $B^T A^T$ es de tamaño $p \times m$. Una vez comprobada la igualdad de tamaños veamos que coinciden elemento a elemento.

- El elemento (i, j) de $(AB)^T$ es el (j, i) de AB que es

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

- El elemento (i, j) de $B^T A^T$ se obtiene multiplicando la fila i de B^T, que es la columna i de B, por la columna j de A^T (fila j de A); es decir

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn}$$

Como se observa son iguales. □

Teorema 2.9: Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$AO_{n\times p} = O_{m\times p} \quad \text{y} \quad O_{l\times m}A = O_{l\times n}.$$

Obsérvese que las matrices nulas que aparecen en el teorema no tienen que ser necesariamente iguales.
Para escalares si $ab = 0$, algunos de los números (a o b o ambos) es cero. Esto no ocurre con matrices como lo prueba el siguiente:

Ejemplo 2.10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El producto de dos matrices no nulas es la matriz nula.

El número 1 decimos que es el elemento neutro para el producto numérico pues al multiplicarlo por otro el producto es el mismo número, o sea, $1\alpha = \alpha = \alpha 1$. En matrices éste papel lo juega la *matriz identidad* definida a continuación

Definición 2.14: Se llama **matriz identidad** de tamaño $n \times n$ que se denota por I ó I_n a la matriz diagonal con elementos diagonales iguales a 1.

Así, las matrices identidad de tamaño 2×2 y 3×3 son

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.10: Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$I_m A = A = A I_n$$

Potencias de una matriz

Para una matriz cuadrada tiene sentido definir $A^2 = AA$ y en general para k entero no negativo:

$$A^K = \begin{cases} \overbrace{A \cdots A}^{k \text{ factores}}, & \text{si } k > 0 \\ I, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

El alumno suele incurrir en errores con el producto matricial, porque opera como si fueran números, y lo que ocurre con escalares, puede no ser cierto para matrices; por ejemplo, para escalares, sabemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y, sin embargo para matrices es (supuestas A y B cuadradas del mismo tamaño)es

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2.$$

que no es lo mismo que $A^2 + 2AB + B^2$, a menos que A y B conmuten. Otras fórmulas para matrices, distintas a las numéricas son (para A y B cuadradas del mismo tamaño)

(a) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

(b) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Sin embargo hay propiedades similares a las potencias numéricas como el siguiente teorema afirma

Teorema 2.11: Si A es una matriz cuadrada y r y s enteros no negativos, entonces

(a) $A^r A^s = A^{r+s}$

(b) $(A^r)^s = A^{rs}$.

Éste teorema nos proporciona una forma fácil de conseguir matrices que conmutan pues $A^r A^s = A^{r+s} = A^s A^r$; así cualquier matriz conmuta con cualquier potencia suya.

Ejemplo 2.11: *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *entonces* $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$ *y*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 34 \\ 34 & 55 \end{bmatrix}.$$

El cálculo de una potencia genérica suele ser complicado, pero a veces (pocas), observando la primeras potencias, se puede deducir la fórmula general.

Ejemplo 2.12: *Dada* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *tenemos que*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos pensar que $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*, y es verdad, pero habría que hacer una demostración por inducción.*

Como ejercicio, el alumno debe calcular $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k$.

Sin embargo es muy fácil el cálculo de la potencia de una matriz diagonal; en efecto, el alumno debe probar que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Es decir, se eleva cada elemento diagonal a la potencia dada. En capítulos posteriores veremos otra técnica para calcular potencias.

2.5 Matriz inversa

Dado un escalar $\alpha \neq 0$, existe su inverso, es decir existe β tal que $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$. El inverso es $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Buscamos algo similar en las matrices: dada una matriz A buscamos otra B tal que $AB = BA = I$. Desde luego, A ha de ser cuadrada. Veamos que B, si existe, es única.

Teorema 2.12: Sea A una matriz cuadrada. Existe a lo sumo una matriz cuadrada B tal que

$$AB = BA = I.$$

Demostración: Supongamos que existen dos matrices B_1 y B_2 tales que

$$AB_1 = B_1A = I \quad \text{y} \quad AB_2 = B_2A = I.$$

Aplicando las propiedades del producto:

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2.$$

Cuando existe B, como es única, se le llama inversa de A □

Definición 2.15: Una matriz cuadrada A es **invertible** si existe una matriz B tal que

$$AB_1 = B_1A = I.$$

Es decir, para una matriz A invertible, la inversa que se denota por A^{-1} es la única matriz que cumple

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

De momento no sabemos si una matriz dada es invertible y tampoco hallar la inversa en el caso de existir, pero de la definición sacamos algunas conclusiones:

(a) La matriz cuadrada nula no es invertible pues $OB = O$ por lo que $OB \neq I$

(b) La matriz identidad es invertible y su inversa es ella misma pues

$$II = II = I$$

(c) Una matriz cuadrada con una fila o columna nula, no es invertible. En efecto, supongamos que la $i-$ésima fila de A es nula, es decir, $a_{ik} = 0$ para todo k. El producto AB, para cualquier matriz B (del mismo tamaño), tiene como elemento (i, j)

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = 0.$$

Por tanto $c_{ij} = 0$, para todo j, esto es, la $i-$ésima fila del producto es nula y por tanto el producto no puede ser la matriz identidad. En el caso de tener la $i-$ésima columna nula, el producto BA tiene nula la $i-$ésima columna y, por la misma razón, no puede ser la identidad.

Algunas propiedades las da el siguiente

Teorema 2.13: Sean A y B matrices invertibles del mismo tamaño

(a) A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(c) Si $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}$

(d) AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN: Demostremos el último apartado. Para probar que AB es invertible buscamo otra C que cumpla $(AB)C = C(AB) = I$ y ésta matriz C es $B^{-1}A^{-1}$ pues

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I\\(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

$\square$

La definición de potencia de una matriz cuadrada se puede extender, para matrices invertibles, para exponentes enteros negativos haciendo

$$A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

Insistimos en que con las matrices no se opera como con los escalares; por ejemplo si $ab = ac$ y $a \neq 0$ se deduce que $b = c$, o si $ac = cb$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$. Esto no ocurre con matrices como se manifiesta en el siguiente

Ejemplo 2.13: *Sean las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz $A \neq O$ y sin embargo $B \neq C$.
Sean ahora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$AC = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = CB$$

Siendo $C \neq O$ es $A \neq B$.

El siguiente teorema nos dice cuando se pueden simplificar las matrices

Teorema 2.14: Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$, C de tamaño $n \times n$ invertible, y D y E matrices de tamaño $n \times p$

(a) Si $AC = BC$, entonces $A = B$

(b) Si $CD = CE$, entonces $D = E$.

Demostración: En la igualdad $AC = BC$, multiplicamos ambos miembros por la inversa de C

$$(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \to A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \to AI = BI \to A = B.$$

La segunda propiedad se demuestra de forma análoga. $\square$

Obsérvese que de la igualdad $AC = CB$ (caso de cuadradas) aunque C sea invertible no se puede deducir que $A = B$. Para simplificar, la matriz C debe aparecer en los dos miembros bien a la derecha , bien a la izquierda. Para terminar esta sección, notemos que las matrices **no se dividen**.

Supongamos que tenemos una ecuación matricial $AX = B$ donde las matrices tienen tamaños adecuados siendo A y B conocidas ¿Cómo hallamos X? Si A es cuadrada e invertible entonces $A^{-1}AX = A^{-1}B$ y por tanto $X = A^{-1}B$; esta es la forma de "dividir" matrices, usando la inversa para despejar, pero si A no es cuadrada o no es invertible entonces tendríamos que hallar X planteando un sistema de ecuaciones. Obsérvese que si la ecuación es $XA = B$ entonces la solución es $X = BA^{-1}$ que, en general, es distinta de $X = A^{-1}B$.

2.6 Matrices en bloques

A veces resulta conveniente considerar una matriz dividida en bloques (submatrices). Por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

se puede considerar dividida en 4 bloques de la forma

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & -2 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O_{3\times 1} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

El bloque A_{12} es la matriz nula de tamaño 3×1. Realmente la utilidad de las particiones en bloque es para matrices grandes que contienen muchos ceros pues las operaciones, en especial el producto y el cálculo de la inversa, se pueden acelerar.

Nos preguntamos ¿cuándo se pueden multiplicar dos matrices en bloques usando éstos como si fueran elementos y multiplicando con la consabida regla filas $\times$ columnas?. En primer lugar tenemos que pensar que particiones hay muchas; la matriz anterior que tiene 5 filas y 4 columnas, se dice que hemos hecho la partición $(3+2)\times(3+1)$; las filas se han dividido en dos bloques $(3+2)$ y las columnas en otros dos $(3+1)$. Supongamos que dos matrices A y B se pueden multiplicar, o sea, A de tamaño $m\times n$ y B de tamaño $n\times p$ ¿Cómo hemos de dividirlas en bloques para que se puedan multiplicar usando los bloques? Veamos un ejemplo: consideremos la matriz anterior A y otra matriz B de tamaño 4×6

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -2 & -4 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} B_{11} & O_{3\times 2} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right]$$

¿Podemos hacer el producto AB como sigue?

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{array}\right] \end{aligned}$$

La respuesta es SI. Para que el producto se pueda hacer la partición de las columnas de A debe coincidir con la de las filas de B. En nuestro ejemplo la partición de las columnas de A es $3+1$ y la de las filas de B es $3+1$. El producto, teniendo en cuenta que algunos bloques son nulos (a veces pondremos O para un bloque nulo sin especificar el tamaño), queda:

$$\begin{aligned} &AB \\ &= \left[\begin{array}{cc} A_{11} & O_{3\times 1} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} B_{11} & O_{3\times 2} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} A_{11}B_{11}+OB_{21} & A_{11}O+OB_{22} & A_{11}B_{13}+OB_{23} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}O+A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} A_{11}B_{11} & O & A_{11}B_{13} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 2.14: *La matriz siguiente es diagonal por bloques con la partición dada*

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{array}\right]$$

Probad que A es invertible si, y sólo si, lo son los bloques diagonales.

El bloque A_{22} es de tamaño 1×1, o sea, es un escalar (que vale 1.) Supongamos que tiene inversa B, la cuál expresamos por bloques. Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Como el producto debe ser la matriz I_3

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_1 \end{bmatrix}$$

Debe ser B_{11} la inversa de A_{11} y B_2 la inversa de A_{22}. Se tiene

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.15: *Supongamos que $A_{n\times}$ es triangular por bloques e invertible ¿Cómo se calcula la inversa por bloques? Hágase para*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde los bloques son: A_{11} de tamaño $p\times p$, A_{22} de tamaño $(n-p)\times(n-p)$, A_{21} de tamaño $(n-p)\times p$, y el bloque nulo de tamaño $p\times(n-p)$,

Procediendo como anteriormente, siendo B la inversa que se expresa en bloques

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

Para abreviar omitiremos el tamaño de los bloques; multiplicando e igualando

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{12}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{12}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Como $A_{11}B_{12} = O$ y A_{11} es invertible, debe ser nulo el bloque $B_{12} = O$ (demuéstrese!). Por otra parte el bloque B_{11} debe ser la inversa de A_{11}. Para no perdernos, tenemos que $B_{11} = A_{11}^{-1}$ y $B_{12} = O$. Falta calcular B_{21} y B_{22}. Sustituyendo los bloques ya calculados en la ecuación (2.2) se tiene

$$\begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & O \\ A_{12}A_{11}^{-1} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

Se deduce que $B_{22} = A_{22}^{-1}$ y que $B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{12}A_{11}^{-1}$ Por tanto

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{12}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

suponiendo que los bloque A_{11} y A_{22} son invertibles.

Productos especiales

Vamos a ver algunas particiones especiales que facilitan el cálculo del producto $A_{mn}B_{np}$

(a) A se considera un bloque (partición $m \times n$) y dividimos B por columnas, o sea la partición de B es $n \times (1+1+\cdots+1)$ que podemos representar por $B = \boldsymbol{b}_{:1}, \boldsymbol{b}_{:2}, \ldots, \boldsymbol{b}_{:p}$; cada columna tiene n elementos, o sea, cada columna es una matriz de tamaño $n \times 1$. El producto $A\boldsymbol{b}_{:j}$ es una matriz (columna) de tamaño $m \times 1$ que es, precisamente, la $j-$ésima columna de la matriz producto. Resumiendo

$$AB = A[\boldsymbol{b}_{:1}\ \boldsymbol{b}_{:2}\ \cdots\ \boldsymbol{b}_{:p}] = [\ A\boldsymbol{b}_{:1}\ A\boldsymbol{b}_{:2}\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_{:p}]$$

Ésta forma de multiplicar matrices (por columnas) nos será muy útil en el futuro. Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.16: *Calculad AB siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

El producto es

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & -4 & 19 \\ -3 & 0 & -4 & 11 \\ 11 & -10 & 28 & 3 \end{bmatrix}$$

Hagámoslo por columnas

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Dividimos la matriz A por filas: $(1+1+\cdots+1) \times n$ y consideramos B un sólo bloque $n \times p$

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:} \\ \boldsymbol{a}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:} \end{bmatrix}$$

El producto AB se puede realizar

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:} \\ \boldsymbol{a}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:}B \\ \boldsymbol{a}_{2:}B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:}B \end{bmatrix}$$

El producto $\boldsymbol{a}_{i:}B$ es la $i-$ésima fila del producto AB.

(c) Si expresamos A por filas y B por columnas tenemos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:} \\ \boldsymbol{a}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:} \end{bmatrix} [\boldsymbol{b}_{:1}\ \boldsymbol{b}_{:2}\ \cdots\ \boldsymbol{b}_{:p}]$$

Cada producto $\boldsymbol{a}_{i:}\boldsymbol{b}_{:j}$ es un escalar y la matriz producto queda

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:}\boldsymbol{b}_{:1} & \boldsymbol{a}_{1:}\boldsymbol{b}_{:2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1:}\boldsymbol{b}_{:p} \\ \boldsymbol{a}_{2:}\boldsymbol{b}_{:1} & \boldsymbol{a}_{2:}\boldsymbol{b}_{:2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2:}\boldsymbol{b}_{:p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:}\boldsymbol{b}_{:1} & \boldsymbol{a}_{m:}\boldsymbol{b}_{:2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{m:}\boldsymbol{b}_{:p} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_{i:}\boldsymbol{b}_{:j}]_{m\times p}.$$

que no es sino la definición que se dió del producto.

(d) Por último si expresamos A por columnas y B por filas tenemos

$$AB = [\boldsymbol{a}_{:1}\ \boldsymbol{a}_{:2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{:n}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{1:} \\ \boldsymbol{b}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{n:} \end{bmatrix}$$

Cada producto $\boldsymbol{a}_{:j}\boldsymbol{b}_{:j}$ es una **matriz** de tamaño $m \times p$ y el producto

$$AB = \boldsymbol{a}_{:1}\boldsymbol{b}_{1:} + \boldsymbol{a}_{:2}\boldsymbol{b}_{2:} + \cdots + \boldsymbol{a}_{:n}\boldsymbol{b}_{n:}$$

viene expresado como suma de matrices.

(e) Cuando una de las dos matrices es diagonal, el producto es muy sencillo

- Si $A_{n\times n}$ es diagonal, expresemos B por filas

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{1:} \\ \boldsymbol{b}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{n:} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{b}_{1:} \\ \lambda_2\boldsymbol{b}_{2:} \\ \vdots \\ \lambda_n\boldsymbol{b}_{n:} \end{bmatrix}$$

  Se multiplica cada fila de B por el correspondiente diagonal de A

- Si $B_{n\times n}$ es diagonal, expresemos A por columnas

$$[\boldsymbol{a}_{:1}\ \boldsymbol{a}_{:2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{:n}]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = [\lambda_1\boldsymbol{a}_{:1}\ \lambda_2\boldsymbol{a}_{:2}\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{a}_{:n}]$$

  Se multiplica cada columna de A por el correspondiente diagonal de B.

  Observación: el producto $\boldsymbol{a}_{:1}\lambda_i$, es el producto de una matriz $n\times 1$ por otra matriz 1×1, equivale a $\lambda_1\boldsymbol{a}_{:1}$ que es el producto de escalar por matriz.

2.7 Aplicación: Grafos

Existen situaciones en las que es importante poder modelar las interrelaciones entre un conjunto finito de objetos como por ejemplo carreteras que conectan ciudades, enlaces de comunicación entre satélites, relaciones de amistad en una sociedad, relaciones depredador–presa en un ecosistema, etc. Los grafos son adecuados para estos propósitos y las matrices una herramienta útil para su estudio.
Un grafo se compone de un conjunto finito de puntos llamados vértices y un conjunto finito de líneas o arcos, cada uno de los cuales conecta dos vértices (no necesariamente distintos). Diremos que dos vértices son adyacentes si son los extremos de un arco. La figura 2.1 representa un grafo
Una **trayectoria** es una sucesión de arcos que conecta dos vértices y lla-

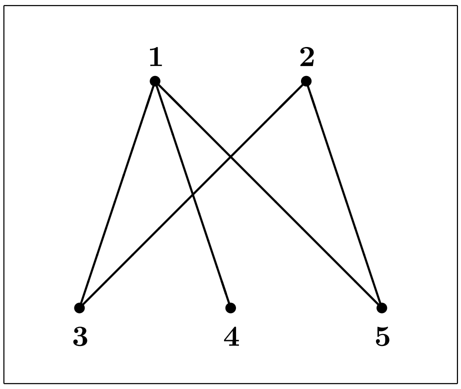


Figura 2.1: Representación de un grafo

maremos **longitud** de ésta al número de arcos que contiene.

En el grafo de la figura 2.1 para conectar el vértice 3 con el 2 se puede hacer con varias trayectorias: $3-1-5-2$ es de longitud 3 mientras que $3-1-5-1-5-2$ es de longitud 5 y $3-2$ es de longitud 1. Nos podemos preguntar:

¿Cuántas trayectorias de longitud k unen el vértice i con el j ?

Una potencia matricial nos va a resolver este problema

Definición 2.16: Sea G un grafo con n vértices. Se llama **matriz de adyacencia** del grafo G a la matriz cuadrada $A = [a_i]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si los vértices i y j están conectados} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia del grafo de la figura 2.1 es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz de adyacencia sólo contiene ceros y unos y es necesariamente simétrica.

Respondamos a la siguiente pregunta ¿cuántas trayectorias de longitud 2 unen el vértice 1 con el 2? En este caso se pueden contar porque son pocos vértices; hay dos que son: $1-3-2$, y $1-5-2$. Si calculamos A^2 obtenemos

$$A^2 = [a_{ij}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 3 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El elemento $a_{12}^{(2)} = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} + a_{14}a_{42} + a_{15}a_{52} \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Cada sumando consta de un producto de 2 números (0,1); el producto vale 1 sólo si ambos son 1 es decir si el vértice 1 y el k para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ están conectados y también el vértice k con el 2. Es decir, cada sumando no nulo es una trayectoria de longitud 2 y la suma (2 en este caso) es el número de trayectorias de longitud 2.

En general se tiene el teorema siguiente

Teorema 2.15: Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G y

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}],$$

entonces $a_{ij}^{(k)}$ es el número de trayectorias de longitud k que unen los vértices i y j.

Ejemplo 2.17: *Calculad el número de trayectorias de longitud* 4 *que unen los vértices* 3 *y* 4 *en el grafo representado en la figura 2.1.*

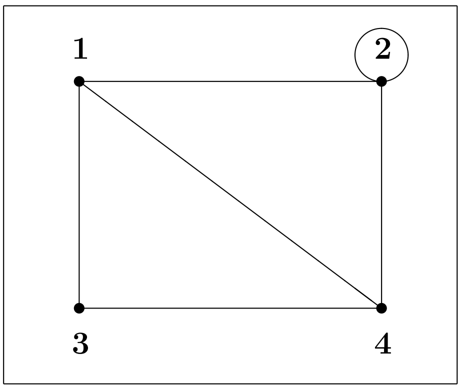
Si lo calculamos "a pelo" se obtienen cinco:

3–1–4–1–4, 3–1–5–1–4, 3–1–3–1–4, 3–2–5–1–4, 3–2–3–1–4

Calculando la cuarta potencia, el elemento $(3, 4)$ que es 5 da la solución.

$$A^4 = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \boxed{5} & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.18: *Calculad el número de trayectorias de longitud* 4 *que unen los vértices* 3 *y* 4 *en el grafo de la figura siguiente.*



La matriz de adyacencia y su cuarta potencia son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 18 & 18 & 11 & 17 \\ 18 & 21 & 14 & 18 \\ 11 & 14 & 10 & \boxed{11} \\ 17 & 18 & 11 & 18 \end{bmatrix}.$$

Por tanto hay 11 trayectorias de longitud 4 que unen los vértices 3 y 4.

2.8 Problemas resueltos

2.1 Hallar las matrices X que conmutan con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución: Llamemos $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a la matriz buscada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{bmatrix}.$$

Igualando término a término y resolviendo el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, se obtiene $c = 3b/2$ y $d = a + 3b/2$. La solución es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 3b/2 & a+3b/2 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que la solución también se puede expresar como (llamando $b' = b/2$)

$$\begin{bmatrix} a & 2b' \\ 3b' & a+3b' \end{bmatrix}, \quad a, b' \in \mathbb{R}.$$

o bien

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.2 Probad que toda matriz cuadrada se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Solución: La matriz $(A + A^T)$ es simétrica ya que

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

La matriz $(A - A^T)$ es antisimétrica ya que

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$$

Dado que $(A + A^T) + (A - A^T) = 2A$ se desprende que

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Si llamamos $S = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ (simétrica) y $W = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ (antisimétrica) se obtiene que $A = S + W$ La descomposición es única, pues si hubiera otra $A = S + W = S_1 + W_1$, tendríamos que $S - S_1 = W_1 - W$. Pero La matriz $S - S_1$ es simétrica y $W - W_1$ antisimétrica y la única matriz que cumple esto es la nula. Por tanto $S - S_1 = O$ y $W - W_1 = O$ por lo que $S = S_1$ y $W = W_1$ y, por tanto, la descomposición es única.

2.3 Hallad A^k para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Intuimos que

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Sin embargo no hemos demostrado que la matriz anterior sea en efecto la solución. Habría que probarlo por el método de inducción que no se contempla en el programa de la asignatura.

2.4 Sabiendo que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, hallad A^k para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Empecemos calculando A^2; al ser A simétrica y, por tanto también A^2, basta calcular el triángulo superior

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3 \\ \star & b^4+a^2b^2+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3 \\ \star & \star & c^4+a^2c^2+b^2c^2 \end{bmatrix}$$

Haciendo operaciones

$$\begin{aligned} a^4+(ab)^2+(ac)^2 &= a^2(a^2+b^2+c^2) = a^2 \\ a^3b+ab^3+abc^2 &= ab(a^2+b^2+c^2) = ab \\ a^3c+ab^2c+ac^3 &= ac(a^2+b^2+c^2) = ac \\ b^4+a^2b^2+b^2c^2 &= b^2(b^2+a^2+c^2) = b^2 \\ a^2bc+b^3c+bc^3 &= bc(a^2+b^2+c^2) = bc \\ c^4+a^2c^2+b^2c^2 &= c^2(c^2+a^2+b^2) = c^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} = A$$

Por tanto $A^2 = A$ y se deduce que $A^k = A, \forall k$. Las matrices con esta propiedad se llaman *idempotentes* por razones obvias; para más información sobre estas matrices véase el problema (2.10).

2.5 Probad que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible si, y sólo si, $ad-bc \neq 0$ y, en este caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Solución: Primero veremos que si una matriz tiene una fila o columna nula, entonces no es invertible. Por ejemplo, sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Como el producto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay+bz & ay+bt \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \forall x,y,z,t$$

no hay ninguna matriz B tal que $AB = I$.

(a) Condición suficiente. Si $ad-bc \neq 0$, la matriz es invertible. Partimos del hecho de que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc)I$$

Por lo tanto si $ad - bc \neq 0$ la inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(b) Falta probar que si A es invertible, $ab - bc \neq 0$ ó equivalentemente si $ab - bc = 0$ entonces A no es invertible. Supongamos en primer lugar que $a \neq 0$. Hagamos el producto

$$\begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -c/a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $B = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -c/a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible ya que $\frac{1}{a}\cdot 1 - \frac{-c}{a}\cdot 0 = \frac{1}{a} \neq 0$; la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible (una fila nula) y tenemos $BA = C$; si A fuera invertible lo sería el producto $C = BA$ que sabemos no lo es, por tanto A no es invertible.

Si $a = 0$ entonces $0 = ad - bc = -bc$ se deduce que b ó c es cero y tendríamos una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

que no es invertible (una columna nula).

2.6 Si $A^2 = O$ probar que A no es invertible distinguiendo dos casos $A = O$ y $A \neq O$. Generalizar el resultado.

Solución: Si $A = O$ claramente no es invertible; supongamos que $A \neq O$; si A fuese invertible, entonces multiplicando la igualdad $A^2 = O$ por A^{-1} se obtendría: $A^{-1}AA = A^{-1}O = O$, esto es, $A = O$ en contra de que A no es la matriz nula. Por tanto A no es invertible. Se puede generalizar fácilmente para $k = 2, 3, \ldots$: si $A^k = O$ entonces A no es invertible.

2.7 La traza de una matriz A cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $\mathrm{tr}(A)$, es decir

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Si A y B son matrices del mismo tamaño y α es un escalar, probad que:

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$

(c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.
\end{aligned}$$

(b) Evidente.

(c) Los elementos diagonales del producto AB (a la que llamamos C) son

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\
c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\
&\vdots \\
c_{nn} &= a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}
\end{aligned}$$

Por otra parte si $D = BA$ los elementos diagonales de D son

$$\begin{aligned}
d_{11} &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} \\
d_{22} &= b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} \\
&\vdots \\
d_{nn} &= b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}
\end{aligned}$$

Falta probar que la suma de los c_{ii} es igual que la suma de los d_{ii} con lo que termina la demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_{ii} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\
&+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\
&\vdots \\
&+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \\
&= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} \\
&+ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} \\
&\vdots \\
&+ b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{ii}
\end{aligned}$$

2.8 Sean A, B y C matrices cuadradas tales que $AB = I = CA$. Probar que las tres son invertibles y $B = C = A^{-1}$.

Solución: Partamos de $AB = I$. Si probamos que $BA = I$ entonces A y B son invertibles (inversas una de la otra).

$$BA = I(BA) = (CA)(BA) = C(AB)A = CIA = CA = I.$$

Por tanto $B = A^{-1}$. Hagamos lo mismo con AC (sabemos que $CA = I$)

$$AC = ACI = ACAB = A(CA)B = AB = I.$$

Luego $C = A^{-1}$. Como la inversa es única ha de ser $B = C$.

2.9 Sea $\boldsymbol{u}$ un vector (matriz $n \times 1$)

(a) Probad que la matriz $P = I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ es simétrica

(b) Si $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 1$, entonces $P^{-1} = P$

Solución: Obsérvese en primer lugar que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$ es un escalar (matriz 1×1) mientras que $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ es una matriz cuadrada $n \times n$.

(a)

$$\begin{aligned}
P^T &= (I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^T \\
&= I_n^T - 2(\boldsymbol{u}^T)^T\boldsymbol{u}^T \\
&= I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = P
\end{aligned}$$

Por tanto P es simétrica

(b) Hay que probar que $P^{-1} = P$ lo que equivale a $PP = P$ usando la igualdad $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 1$ (en realidad es $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = I_1$).

$$\begin{aligned} PP &= (I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) \\ &= I_n I_n - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) \\ &= I_n - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^T \\ &= I_n - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}I_1\boldsymbol{u}^T \\ &= I_n - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Las matrices tales que $PP = P$ se llaman involutivas (véase el problema 2.10)

2.10 Una matriz A se llama **involutiva** si $A^2 = I$ y se llama **idempotente** si $A^2 = A$.

(a) Probad que una matriz involutiva es invertible y, hallad su inversa.

(b) Obtened una matriz involutiva de tamaño 2×2 distinta de I

(c) I es la única matriz idempotente invertible

(d) Si A es idempotente, $A^k = A, \quad \forall k$

(e) A es idempotente si, y sólo si, $I - 2A$ es involutiva.

(f) Una matriz A es involutiva si, y sólo si, es de la forma $A = I - 2P$ para alguna matriz idempotente P.

Solución:

(a) Si $AA = I$ se deduce que A es la inversa de A (o sea, ella misma).

(b) Por ejemplo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) Desde luego I es idempotente e invertible. Supongamos que A es idempotente e invertible:

$$AA = A \to A^{-1}AA = A^{-1}A \to A = I.$$

Luego A es la matriz identidad.

(d) $A^3 = A^2A = AA = A, A^4 = A^2A^2 = AA = A$, etc.

(e) Si A es idempotente, $A^2 = A$ entonces, $(I-2A)^2 = I - 4A + 4A^2 = I$ lo que prueba que $I - 2A$ es involutiva. Recíprocamente si $I - 2A$ es involutiva, $(I-2A)^2 = I$, pero $(I-2A)^2 = I - 4A + 4A^2$ lo que implica que $O = -4A + 4A^2 \to A^2 = A$, luego A es idempotente

(f) Sea A involutiva, esto es $A^2 = I$. Poniendo $A = I - 2P$, la matriz P es $P = \frac{1}{2}(I - A)$. Entonces

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4}(I-A)^2 = \frac{1}{4}(I - 2A + A^2) \\ &= \frac{1}{4}(I - 2A + I) = \frac{1}{4}(2I - 2A) \\ &= \frac{1}{2}(I - A) = P \end{aligned}$$

la matriz P es, por tanto, idempotente.
Supongamos ahora que $A = I - 2P$ siendo P idempotente; entonces

$$A^2 = (I-2P)^2 = I - 4P + 4P^2 = I - 4P + 4P = I,$$

por lo que A es involutiva.

2.11 Sea A una matriz antisimétrica. Admitamos que $I + A$ es invertible (ver el problema 3.6) para probar que la matriz $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ cumple que $B^T B = I$ (las matrices con esta propiedad se llaman *ortogonales*).

Solución: Usaremos el hecho de que las matrices $I - A$ y $I + A$ conmutan (el producto en los dos sentidos es $I - A^2$). Calculemos primero B^T

$$\begin{aligned} B^T &= \left[(I-A)(I+A)^{-1}\right]^T \\ &= \left[(I+A)^T\right]^{-1}(I-A)^T \\ &= (I-A)^{-1}(I+A) \end{aligned}$$

Calculamos ahora $B^T B$

$$\begin{aligned} B^T B &= (I-A)^{-1}(I+A)(I-A)(I+A)^{-1} \\ &= (I-A)^{-1}(I-A)(I+A)(I+A)^{-1} \\ &= \left[(I-A)^{-1}(I-A)\right]\left[(I+A)(I+A)^{-1}\right] \\ &= I. \end{aligned}$$

2.12 Sean A y B matrices invertibles del mismo tamaño.

(a) Probad que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.

(b) Si $A + B$ es invertible, también lo es $A^{-1} + B^{-1}$.

(c) En el supuesto anterior, hallad $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

Solución:

(a) $A^{-1}(A+B)B^{-1} = (A^{-1}A+A^{-1}B)B^{-1} = (I+A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1}+A^{-1}$.

(b) Por el apartado (a), $B^{-1} + A^{-1}$ es el producto de tres matrices invertibles, luego es invertible.

(c) Del apartado (a), $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A$.

2.13 Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño.

(a) Probad que

(1) $A(I + BA) = (I + AB)A$

(2) $(I + BA)B = B(I + AB)$

(b) Si $I + AB$ es invertible probad que $I + BA$ también lo es y

$$(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A.$$

Solución:

(a) (1) $A(I + BA) = A + ABA = (I + AB)A$

(2) $(I + BA)B = B + BAB = B(I + AB)$

(b) Multipliquemos $I + BA$ por $I - B(I + AB)^{-1}A$ y usemos el resultado del apartado (a)

$$\begin{aligned}(I + BA)(I - B(I + AB)^{-1}A) &= \\ &= (I + BA) - (I + BA)B(I + AB)^{-1}A \\ &= (I + BA) - B(I + AB)(I + AB)^{-1}A \\ &= (I + BA) - BA = I.\end{aligned}$$

2.9 Problemas propuestos

2.14 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallad una matriz X para que

(a) $A + B + C + X = O$

(b) $2A - 3B + 2C - 4X = O$

(c) $3A - B + 2X - I = X - 3C + 3I$.

2.15 Siendo A, B, X e Y matrices del mismo tamaño, resolver los siguientes sistemas matriciales

(a) $\left.\begin{array}{rcrcl} 2X & - & 3Y & = & A \\ X & + & 2Y & = & B \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{rcrcl} 4X & + & 2Y & = & O \\ -X & - & 3Y & = & A - B \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcl} 3X & - & Y & = & 2A \\ X & - & 3Y & = & -B \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{rcrcl} 5X & - & Y & = & A + B \\ -2X & + & Y & = & A - B \end{array}\right\}$.

2.16 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculad (si se puede)

(a) AB (b) AC (c) $C^T B$

(d) $C^T A^T$ (e) B^2 (f) $(A + C^T)B$

2.17 Comprobad con las matrices del problema anterior que $(AB)^T = B^T A^T$.

2.18 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calculad

(a) $(A\boldsymbol{x})^T$ (b) $\boldsymbol{x}^T A^T$

(c) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ (d) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$

2.19 Escribid las siguientes matrices de orden 4×4

(a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ (b) $a_{ij} = j - i$

(c) $a_{ij} = (i-1)^j$ (d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } i = j \\ 1, \text{ si } i \neq j \end{cases}$

(e) $a_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i}, \text{ si } i \leq j \\ 0, \text{ si } i > j \end{cases}$ (f) $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$

(g) $a_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ si } i \leq j \\ 0, \text{ si } i > j \end{cases}$ (h) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } |i-j| \leq 1 \\ 0, \text{ si } |i-j| > 1 \end{cases}$

2.20 Sean las matrices

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Calculad

(a) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}$ (b) $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$

(c) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ (d) $\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T$

2.21 Dado el vector $\boldsymbol{u}$ (matriz $n \times 1$) probad que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \leftrightarrow \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 0$ (el alumno recordará que el escalar $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$ es el cuadrado de la norma o módulo del vector $\boldsymbol{u}$).

2.22 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, hállese una matriz B distinta de A, de O y de I, que conmute con A, esto es $AB = BA$.

2.23 Halla los valores de α para que conmuten las matrices A y B siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & \alpha \end{bmatrix}.$$

2.24 Hallar las matrices X que conmutan con A en los casos

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

2.25 Sea A de tamaño $n \times n$. Probad que las matrices $I_n - A$ y $Y_n + A$ conmutan.

2.26 Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, hallad todas la matrices $B_{2\times 2}$ tales que $AB = O$.

2.27 Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{bmatrix}$, hallad todas la matrices $B_{2\times 2}$ tales que $AB = O$.

2.28 Hallad todas las matrices que conmuten con $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

2.29 Hallad todas las matrices que son simultáneamente simétricas y antisimétricas.

2.30 Probad que la suma de dos matrices simétricas del mismo tamaño es una matriz simétrica ¿Y la diferencia?

2.31 Idéntico problema que el anterior para matrices antisimétricas.

2.32 Descomponed la siguiente matriz como suma de una simétrica y otra antisimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.33 Sean A y B cuadradas del mismo tamaño; probad que $AB = BA$ si, y sólo si, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

2.34 Sean A y B matrices cuadradas tal que $AB = O$.

(a) Probad que alguna de ellas no es invertible.

(b) Si una de ellas es invertible, la otra es O.

2.35 Sea una A matriz cuadrada tal que $A^2 - 2A + I = O$. Pruébese que es invertible y que $A^{-1} = 2I - A$.

2.36 Hallar la inversa de A (si existe) en función de sus potencias en los casos siguientes

(a) $A^3 - 3A^2 + I = O$

(b) $A^5 - A^4 + A^2 - I = O$

2.37 Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calculad A^2 y A^3.

(b) Calculad A^{2010} y A^{5870}.

2.38 Hallad A^k para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.39 Hallad A^{2012} para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

2.40 Hallad A^k para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.41 Probad que si A es simética, entonces cualquier potencia de A lo es.

2.42 Probad que si A es simética e invertible, entonces A^{-1} es simética.

2.43 Sabiendo que A y B son matrices invertibles, calculad la matriz X

(a) $BXA^2 = A^{-1}$

(b) $AXB = (AB)^2$

(c) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$.

2.44 Probad una matriz cuadrada con una fila (o columna) nula, no es invertible.

2.45 Probad que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ no es invertible.

2.46 Hallad la inversa de las siguientes matrices usando el problema 2.5

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$.

2.47 Sea A una matriz cuadrada.

(a) $A^2 = O$ probar que $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = I + A$.

(b) $A^3 = O$ probar que $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(c) Generalizar los resultados anteriores.

(d) Usando los apartados anteriores calculad B^{-1} siendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.48 Usando el problema anterior, calcular la inversa de B siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.49 Probad que el producto de dos matrices cuadradas del misma tamaño, triangulares superiores (inferiores) es otra matriz triangular superior (inferior).

2.50 Dad un ejemplo de dos matrices simétricas cuyo producto no sea simétrica ¿Cuándo el producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica?

2.51 Demostrad que no existen matrices A y B del mismo tamaño, tales que $AB - BA = I$ *(Sugerencia: utilizad la traza de na matriz.)*

2.52 Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo tamaño. Probad

(a) Si A y AB son invertibles, también lo es B.

(b) Si A, C y ABC son invertibles, también lo es B.

(c) Si AB y BA son invertibles, también lo son A y B.

2.53 Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo tamaño siendo A y B invertibles

(a) Si $AC = CA$ entonces $A^{-1}C = CA^{-1}$.

(b) Si A y B conmutan, también conmutan las inversas.

2.54 Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño.

(a) Si $AB = BA$ entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Si A y B son invertibles y $(AB)^2 = A^2B^2$ probad que $AB = BA$.

(c) Los apartados anteriores prueban, para matrices invertibles, que $(AB)^2 = A^2B^2 \iff AB = BA$. Pero si una o ambas matrices son no invertibles ¿qué ocurre? Encontrad dos matrices tales que $(AB)^2 = A^2B^2$ y $AB \neq BA$.

2.55

Sea $A_{n\times n}$ tal que $A^TA = A$. Probad que A es simétrica e idempotente.

2.56 Sea P una matriz idempotente y $\alpha \neq 1$. Probad que $I - \alpha P$ es invertible y

$$(I - \alpha P)^{-1} = I + \frac{\alpha}{1-\alpha}P.$$

2.57 Sea A una matriz tal que $A^2 = \alpha A$ con $\alpha \neq 0$. Probad que A es invertible si, y sólo si, $A = \alpha I$.

2.58 Dad un ejemplo de dos matrices invertibles cuya suma no lo sea (aparte del caso $A + (-A)$).

2.59 Sea B de tamaño $m \times n$ tal que B^TB es invertible. Probad que es idempotente la matriz

$$A = I_m - B(B^TB)^{-1}B^T$$

2.60 Calculad AB utilizando la partición en bloques indicada.

(a) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$ (b) $B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(c) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$ (d) $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

(e) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (f) $B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

(g) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$ (h) $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

2.61 Calculad las potencias de las siguientes matrices utilizando la partición en bloques indicada.

(a) $A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$ (b) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(c) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (d) $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2.62 Si A y D son matrices invertibles, probad que $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ también lo es y

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

2.63 Si BC es una matriz invertible, probad que $\begin{bmatrix} O & B \\ C & I \end{bmatrix}$ también lo es y

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(BC)^{-1} & (BC)^{-1}B \\ C(BC)^{-1} & I - C(BC)^{-1}B \end{bmatrix}.$$

2.64 Si $I - BC$ es una matriz invertible, probad que $\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}$ también lo es y

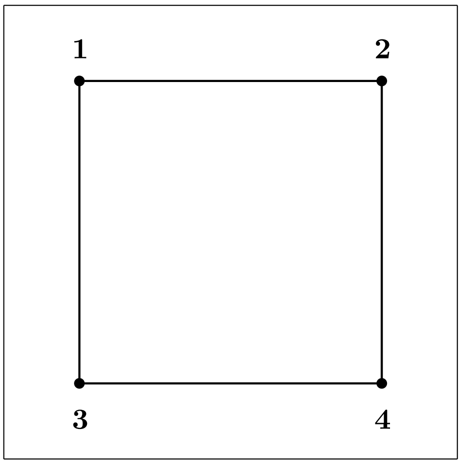
$$\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - BC)^{-1} & -(I - BC)^{-1}B \\ -C(I - BC)^{-1} & I + C(I - BC)^{-1}B \end{bmatrix}.$$

2.65 Calculad las inversas de la siguientes matrices utilizando los problemas 2.62, 2.63 y 2.64.

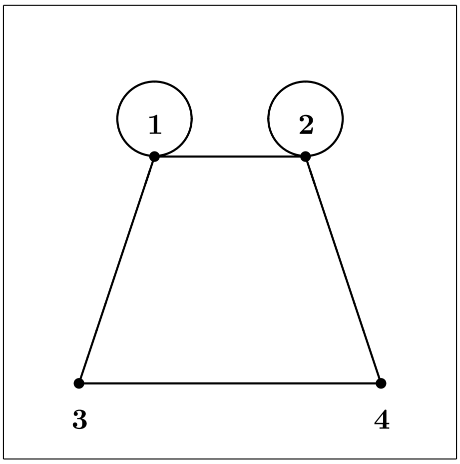
(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

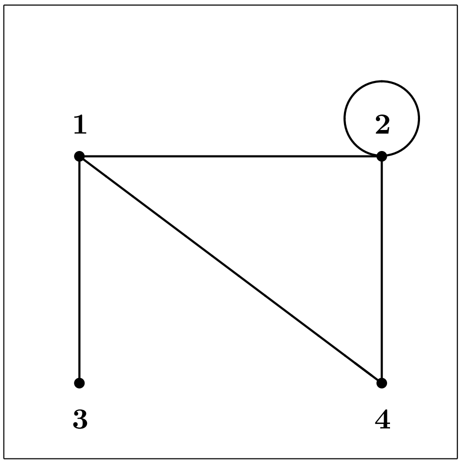
Sean los grafos siguientes



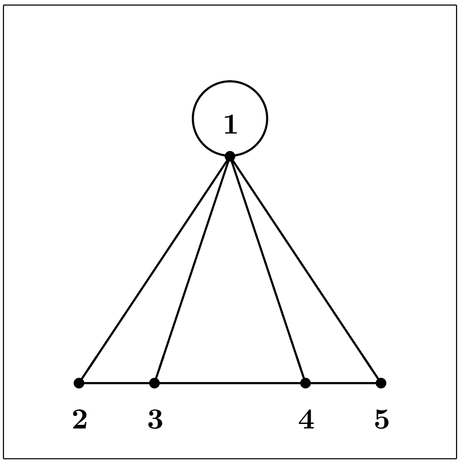
(**a**)



(**b**)



(**c**)



(**d**)

2.66 Hallad la matriz de adyacencia de cada grafo.

2.67 Hallad el número de trayectorias de longitud 3 y 4 que unen los vértices 1 y 4 del grafo (a).

2.68 Hallad el número de trayectorias de longitud 3 y 4 que unen los vértices 1 y 4 del grafo (b).

2.69 Hallad el número de trayectorias de longitud 3 y 4 que unen los vértices 1 y 4 del grafo (c).

2.70 Hallad el número de trayectorias de longitud 3 y 4 que unen los vértices 1 y 4 del grafo (d).

2.71 Dibuja un grafo para cada una de las matrices de adyacencia siguientes

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Capítulo 3
Matrices y Sistemas

En este capítulo se tratan los sistemas lineales como una ecuación matricial $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Se introducen las matrices elementales que conducen al algoritmo para el cálculo de la inversa. Finalmente se explora la factorización LU de una matriz y su aplicación.

Objetivos:

- *Conocimiento de las matrices elementales y su aplicación*
- *Habilidad en el cálculo de la matriz inversa*
- *Resolución de sistemas usando la factorización LU.*

3.1 Matrices elementales

Definición 3.1: Una matriz elemental es el resultado de aplicar una operación elemental por filas a la matriz unidad.

Se tienen, por tanto, tres tipos de matrices elementales

- $P_{ij}^{(k)}$ es la matriz que se obtiene aplicando a la matriz I_k la operación $F_i \leftrightarrow F_j$ (**matriz elemental de tipo I**).
- $E_i^{(k)}(\alpha)$ con $\alpha \neq 0$ es la matriz que se obtiene aplicando a la matriz I_k la operación $F_i \leftarrow \alpha F_i$ (**matriz elemental de tipo II**).
- $E_{ij}^{(k)}(\beta)$ es la matriz que se obtiene aplicando a la matriz I_k la operación $F_i \leftarrow F_i + \beta F_j$ (**matriz elemental de tipo III**).

La matriz I_k es elemental de los tres tipos. El exponente (k) no es una potencia sino que informa del tamaño de la matriz y, en algunos contextos, se puede omitir.

Ejemplo 3.1: *Veamos los tres casos*

$$P_{13}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2^{(3)}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{23}^{(3)}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veamos que ocurre cuando multiplicamos una matriz elemental por una matriz cualquiera (en este orden).

Ejemplo 3.2: *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La pre-multiplicamos por $E_{23}(-2)$, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -4 & -6 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El resultado es el mismo que se obtiene si aplicamos a la matriz A la misma operación por filas (en éste caso, restarle a la segunda, el doble de la tercera)

En general tenemos el siguiente:

Teorema 3.1: Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y E es una matriz elemental de tamaño $m \times m$ (de cualquier tipo), entonces la matriz EA es la que se obtiene al aplicar a A la misma operación elemental aplicada a I_m para obtener E.

Como consecuencia inmediata se deducen los siguientes resultados (demuéstrese)

- $P_{ij}P_{ij} = I$
- $E_i(\alpha)E_i(1/\alpha) = I$
- $E_{ij}(\beta)E_{ij}(-\beta) = I$

De estos resultados se deduce que una matriz elemental es invertible y, su inversa, es elemental del mismo tipo. Concretamente

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $E_i^{-1}(\alpha) = E_i(1/\alpha)$
- $E_{ij}^{-1}(\beta) = E_{ij}(-\beta)$

Así tenemos (comprobadlo!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Rango de una matriz

Cuando se aplican operaciones elementales para resolver un sistema se obtienen distintas matrices; de cualquiera de ellas se puede llegar a cualquier otra mediante operaciones elementales por filas lo que justifica la siguiente

Definición 3.2: Una matriz A es equivalente por filas a otra B y se indica $A \equiv_F B$ si existe un número finito de matrices elementales tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B$$

Es decir, B se obtiene aplicando a A un número finito de operaciones elementales. Se tiene el siguiente

Teorema 3.2: Se tienen las siguientes propiedades

(a) $A \equiv_F A$

(b) Si $A \equiv_F B$ es $B \equiv_F A$

(c) Si $A \equiv_F B$ y $B \equiv_F C$ entonces $A \equiv_F C$.

Obviamente toda matriz no nula es equivalente por filas a alguna matriz escalonada, pero una matriz puede tener varias formas escalonadas en función de cómo se elijan las operaciones elementales como pone de manifiesto el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.3:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow (-1/2)F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo con los siguientes cálculos se llega a otra forma escalonada distinta

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow (1/2)F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo se tiene el siguiente teorema cuya demostración se omite

Teorema 3.3: Toda matriz no nula es equivalente por filas a una única matriz reducida.

Al número de unos principales de la forma reducida (que es única) se le llama rango de la matriz

Definición 3.3: Se llama rango de la matriz A y se indica $\mathrm{rg}(A)$ al número de unos principales de su forma reducida.

Todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen el mismo rango. Además si A es de tamaño $m \times n$ entonces $\mathrm{rg}(A) \leq m$. En el próximo capítulo veremos que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ por lo que $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{mín}(m, n)$.
Hasta ahora hemos operado con filas, tal como hacíamos con sistemas de ecuaciones (las filas representan las ecuaciones) y, hemos visto el efecto que tiene el pre-multiplicar una matriz por una elemental ¿Qué pasa si multiplicamos por la derecha? Veámoslo

Ejemplo 3.4: *Sean dos matrices, una de ella elemental*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto AE afecta a las columnas; en efecto

$$AE = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A la primera columna de la matriz A del ejemplo anterior se le ha restado el doble de la segunda. La matriz elemental usada $E_{2,1}(-2)$, es el resultado de restar a la segunda fila de la matriz identidad el doble de la primera pero, si lo miramos por columnas, es el resultado de restarle a la primera columna el doble de la segunda. En resumen, el efecto de multiplicar una matriz A por una elemental es

- Pre-multiplicación EA: Se hace en las filas de A las mismas operaciones que se hacen en las filas de I para generar E
- Post-multiplicación AE: Se hace en las columnas de A las mismas operaciones por columnas que se hacen en I para generar E.

Si a una matriz se le aplican sucesivamente operaciones por filas y columnas, se obtiene una matriz (ya no hablamos de equivalencia por filas) de la forma

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_p$$

Ahora hablamos de equivalencia (sin más) y escribimos $A \equiv B$. Esta equivalencia cumple las propiedades del teorema 3.2 y no implica la otra. Más concretamente : si $A \equiv_F B$ entonces $A \equiv B$ (demuéstrese); el recíproco no es cierto como demuestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.5: *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *De A se llega a B operando con las columnas*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto $A \equiv B$; compruébese que $A \not\equiv_F B$.

Es fácil probar que toda matriz A de tamaño $m \times n$ no nula es equivalente a una matriz del tipo

$$\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

donde r es el rango de la matriz. ésta matriz sólo tiene unos y ceros y el alumno se convencerá de ésto con un ejemplo: primero se halla la forma reducida y después, operando con columnas, se anulan todos los elementos que no sean uno principal.

Teorema 3.4: Dos matrices A y B son equivalentes, $A \equiv B$ si, y sólo si, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Aunque que ya sabemos discutir y resolver sistemas, vamos a recordar un famoso teorema que los clasifica en función del rango.

3.2.1 Teorema de Rouché-Frobeniüs

El sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se transforma en el equivalente $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$. Si es compatible no puede haber uno principal en la última columna luego la matriz ampliada $[A\,|\,\boldsymbol{b}\,]$ tiene el mismo rango que A y el sistema es determinado si $\mathrm{rg}(A) = n$ o indeterminado si $\mathrm{rg}(A) < n$. Si el sistema es incompatible hay un uno principal en la última columna por lo que $\mathrm{rg}[A\,|\,\boldsymbol{b}\,] = \mathrm{rg}(A) + 1$. Resumiendo

Teorema 3.5 (Rouché-Frobeniüs): El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con A de tamaño $m \times n$ es compatible si, y sólo si, $\mathrm{rg}[A\,|\,\boldsymbol{b}\,] = \mathrm{rg}(A)$ y en éste caso

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{Determinado} \\ \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{Indeterminado.} \end{cases}$$

3.3 Cálculo de la inversa

Nótese que cuando a una matriz A se le aplica una sucesión finita de operaciones elementales, el resultado es una matriz B que puede expresarse como

$$B = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

siendo E_k la matriz elemental correspondiente a la $k-$ésima operación elemental aplicada a A. Llamando $P = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1$, siendo P invertible (porque es producto de invertibles) tenemos que $B = PA$. Si aplicamos a otra matriz C (del misma tamaño que A la misma sucesión de operaciones, C se transforma en PC (¿por qué?). En el caso de A cuadrada si A se transforma en $B = PA$, la matriz I se transformará en $PI = P$. Observemos el siguiente esquema siendo A cuadrada (que nos permitirá definir un algoritmo para hallar la inversa)

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ B \mid P\ ]$$

Supongamos que, para A cuadrada, A se transforma en la identidad (o sea $B = I$), entonces I se transforma en P siendo $I = PA$.

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid P\ ] \tag{3.1}$$

La igualdad $I = PA$ sugiere que P puede ser la inversa de A pero haría falta comprobar la otra igualdad, esto es, que también es $I = AP$. Después del siguiente teorema fundamental, se demostrará que, en efecto, P es la inversa de A.

Teorema 3.6 (Fundamental de las matrices invertibles): Sea A una matriz $n \times n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible.

(b) El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible determinado para todo $\boldsymbol{b}$.

(c) El sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene sólamente la solución trivial.

(d) $\text{rg}(A) = n$.

(e) A se transforma en I mediante operaciones elementales.

(f) A es producto de elementales.

La demostración se hará en forma cíclica:

(a)⇒(b)⇒(c) ⇒(d) ⇒(e)⇒(f)⇒(a)

DEMOSTRACIÓN:

(a)⇒(b) Ya vimos que si existe A^{-1}, la única solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ *(lo cuál no quiere decir que haya que calcular la inversa; la solución del sistema se puede hallar por Gauss, aconsejable, y se obtiene el mismo resultado que el producto A^{-1} por $\boldsymbol{b}$).*

(b)⇒(c) El sistema tiene solución única por (b) y como es homógeneo, la solución trivial es la única.

(c)⇒(d) El sistema homogéneo se transforma en el equivalente

$$\left.\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & 0 \\ & x_2 & & & = & 0 \\ & & \ddots & & = & 0 \\ & & & x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Por lo que $\text{rg}(A) = n$.

(d)⇒(e) La forma reducida tiene n unos principales, luego es la matriz I_n.

(e)⇒(f) Aplicando a la matriz A las operaciones pertinentes para obtener I se tiene que

$$I = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 A$$

Como las elementales son invertibles y su inversa es invertible

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} = A$$

Tenemos A expresada como producto de elementales.

(f)⇒(a) El producto de invertibles es invertible, por tanto, si A es producto de elementales, es invertible (aunque no elemental.)

□

El siguiente teorema nos permitirá un método para hallar la inversa (si existe)

Teorema 3.7: Sean A y B cuadradas del mismo tamaño. Si $AB = I$ o $BA = I$, entonces ambas son invertibles y, una es la inversa de la otra.

Demostración: Supongamos que $BA = I$. En el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, multiplicando por B tenemos

$$B(A\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \to (BA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \to I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Por la condición (b) del teorema (3.6), la matriz A es invertible y se deduce que $B = A^{-1}$ es también invertible y que $B^{-1} = A$. $\square$

La condición de ser A y B matrices cuadradas en el teorema anterior es crucial como pone de manifiesto el siguiente:

Ejemplo 3.6:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B no son invertibles pues no son cuadradas, aunque $AB = I$.

3.3.1 Método de Gauss-Jordan para la inversa

Dada una matriz cuadradada, usamos el esquema 3.1 de la página 91

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid P\ ]$$

Si no conseguimos transformar A en I es porque no es invertible. Si lo es, la matriz P es tal que $PA = I$ y, según el teorema anterior P es la inversa. El esquema queda así:

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid A^{-1}\ ]$$

O sea, si A se transfoma en I, la matriz I se transforma con las mismas operaciones en A^{-1}.

Ejemplo 3.7: *Para hallar la inversa (o deducir que no es invertible) de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ *formamos la matriz* $[\ A \mid I\ ]$ *y hacemos operaciones* *elementales:*

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow -1/2 F_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Podemos concluir que

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 9 & -3/2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right].$$

Veamos ahora que la siguiente matriz no es invertible

$$A = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Haciendo las operaciones pertinentes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftarrow 1/2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2+4F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3+2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3-3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

La fila $[\ 0\ 0\ 0\ ]$ *en la transformada de* A *delata que no es invertible pues* A *no se puede transformar en* I.

Para resolver la ecuación $AX = B$ con A invertible cuya solución es $X = A^{-1}B$ se puede hacer así: si A se tranforma en I sabemos que $I = PA$ siendo P la inversa de A; entonces B se transforma en $PB = A^{-1}B$ lo que se refleja en el siguiente esquema

$$[\ A \mid B\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid A^{-1}B\ ]$$

En el caso de un sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ la solución única se obtiene

$$[\ A \mid \boldsymbol{b}\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid A^{-1}\boldsymbol{b}\ ]$$

que no es sino el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo 3.8: *Expresad la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ *del ejemplo anterior, como producto de elementales*

En la obtención de la inversa obtuvimos las siguientes elementales

- A la operación $\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2-2F_1}$ le corresponde $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A la operación $\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}$ le corresponde $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A la peración $\xrightarrow{F_2 \leftarrow -1/2 F_2}$ le corresponde $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A la operación $\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2}$ le corresponde $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- A la operación $\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3}$ le corresponde $E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A la operación $\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_3}$ le corresponde $E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A la operación $\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2}$ le corresponde $E_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Como $I = E_6E_5E_4E_3E_2E_1A$, resulta que

$$A = (E_6E_5E_4E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A \;=\; & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4 Factorización LU

Imaginemos que tenemos que resolver sistemas con la misma matriz de coeficientes

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3, \ldots$$

Esta situación es frecuente en muchos campos; como la matriz A es la misma, la aplicación reiterada del método de Gauss supone un despilfarro de operaciones ya que la reducción de A se repite y ocasiona un gasto innecesario de operaciones y tiempo. Se podría calcular la inversa (si es invertible) una sóla vez y después obtener las soluciones como productos

$$\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_x = A^{-1}\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_3, \ldots$$

Pero hay una forma mejor de hacerlo (en casi ningún caso se requiere el cálculo de la inversa); supongamos que la matriz A se puede expresar de la siguiente forma (no siempre es posible): $A = LU$ siendo L una matriz cuadrada triangular inferior e invertible (esto es esencial) y U una matriz triangular superior (no necesariamente cuadrada). El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se puede expresar

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \to LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Llamando $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$, es decir, usamos unas incógnitas auxiliares $\boldsymbol{y}$, resolveremos el sistema en dos fases

- $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ que es un sistema determinado de inmediata resolución por sustitución progresiva.
- $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ que es un sistema triangular resoluble por sustitución regresiva (que puede ser compatible o no.)

Téngase en cuenta que la factorización LU se realiza una sóla vez (luego veremos como se consigue). Cada uno de los sistemas se hace en dos fases, dos sistemas que al ser triangulares tienen menos gasto de operaciones. Veamos un ejemplo y posteriormente abordaremos la cuestión de la factorización.

Ejemplo 3.9: *Compruébese que $A = LU$ siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolved el sistema siguiente usando la descomposición anterior

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = -8 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = -8 \\ x_1 & + & x_2 & & & = 3 \end{array}\right\}$$

Resolvemos en primer lugar $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2y_1 & + & & & & = -8 \\ -y_1 & + & 3y_2 & & & = -8 \\ y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = 3 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación se obtiene $y_1 = -4$, sustituyendo en la segunda se obtiene $y_2 = -4$ y sustituyendo ambos valores en la tercera se obtiene $y_3 = 3$. Ahora resolvemos el sistema $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = -4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = -4 \\ & & & & x_3 & = 3 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $x_3 = 3$; sustituimos en la segunda:

$$x_2 = -4 + 2x_3 = -4 + 6 = 2.$$

Por fin de la primera ecuación se deduce

$$x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 = -4 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1.$$

El sistema es compatible determinado con solución $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Obtención de las matrices L y U

La matriz U es la forma escalonada de A. Recordemos que en la obtención de U aparecen ciertas matrices elementales de forma que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = U.$$

Si en el proceso **no** se usan operaciones de tipo I (o sea, no hay intercambios de filas), entonces las matrices E_i son todas triangulares inferiores e invertibles. Despejando A se obtiene

$$A = (E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} U.$$

La matriz $L = (E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1)^{-1}$ es la matriz buscada pues es triangular inferior e invertible (la inversa de una triangular inferior es triangular inferior.) Sin embargo, la matriz L se puede conseguir sin necesidad de calcular la inversa del producto de las elementales; si A es de tamaño $m \times n$, la matriz L es $m \times m$ y U es $m \times n$; durante el proceso de obtener U se va construyendo la matriz L de la forma siguiente

(a) Inicialmente se pone $L = I_m$.

(b) Antes de obtener cada uno principal, se copia desde el candidato a uno principal (supongamos que es el $k-$ésimo) hasta el final de la columna en la $k-$ésima columna de la matriz L.

Ejemplo 3.10: *Obtened la factorización LU de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Busquemos la forma escalonada de A. Inicialmente tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El primer uno principal se consigue dividiendo la primera fila de A por 2; pero antes de hacerlo copiamos la primera columna de A desde el 2 hasta el final (es decir ,toda) en la primera columan de L y ahora dividimos por 2 la primera fila de A, quedando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora hacemos ceros en la primera columna de A (la matriz L no se modifica)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El candidato a segundo uno principal es el elemento $(2,2)$ que es 3; por tanto, antes de dividir por 3 la segunda fila copiamos desde el 3 hasta el final en la segunda columna de L

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Dividimos ahora la segunda fila por 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos ceros en la segunda columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Hemos terminado pues el elemento $(3,3)$ ya es uno principal (si por ejemplo fuera 7, pondríamos $L(3,3)=7$ y después dividiríamos la tercera fila por 7. La solución es

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.11: *Calculad una factorización LU de la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

Escalonamos la matriz A y resaltaremos los elementos a copiar

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2} & -4 & 2 & -6 \\ \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{2} & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftarrow(-1/2)F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftarrow F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\leftarrow F_3-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftarrow -F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\leftarrow F_3-3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\leftarrow 1/4F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La descomposición es

$$L=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.12: *Calculad una factorización LU de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz L inicialmente es I_5. Escalonemos A y copiemos los correspondientes bloques en L

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & -2 & 3 \\ \boxed{6} & -9 & -5 & 8 \\ \boxed{2} & -7 & -3 & 9 \\ \boxed{4} & -2 & -2 & -1 \\ \boxed{\text{-6}} & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow (1/2)F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hacemos ceros en la primera columna y queda

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{\text{-3}} & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{6} & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{\text{-9}} & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

Momentáneamente la matriz L es

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos escalonando A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & -9 & -3 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow 1/3F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & -9 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

Hacemos ceros en la segunda columna y queda

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{10} \end{bmatrix}$$

El tercer uno principal estará en la cuarta columna (el candidato es el 5), por lo que el bloque que se copia es el remarcado. La matriz L es (de momento)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 & 1 & 0 \\ -6 & -9 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos escalonando A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow 1/5 F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como no hay más unos principales, la matriz L está completada. La descomposición es

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 & 1 & 0 \\ -6 & -9 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

(a) La factorización LU existe si no se hacen intercambios de filas.

(b) Si hay que hacer intercambios de filas, entonces no existe la factorización aunque se puede conseguir una descomposición $PA = LU$ donde P es una matriz de permutación (la matriz identidad con alguna permutación de las filas) pero en este curso no tratamos esta cuestión.

(c) La primera columna de L es la primera columna de A salvo si esta es nula.

(d) En la mayoría de los textos los unos principales aparecen en la matriz L; esto se puede conseguir fácilmente de la siguiente forma: se divide cada columna de L por su elemento diagonal y se multiplica la correspondiente fila de U por dicho elemento. En el ejemplo anterior se tiene

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para probar que el producto no varía recordemos que dividir (o multiplicar) una columna por un número equivale a multiplicar la matriz por una matriz elemental (por la derecha). Así, si dividimos la columna j de L por α se obtiene la matriz $L_1 = LE_j(1/\alpha)$. Al multiplicar ahora la fila j de U por α se obtiene la matriz $U_1 = E_j(\alpha)U$. El producto es el mismo ya que

$$L_1U_1 = LE_j(1/\alpha)E_j(1/\alpha)U = LU$$

al ser las matrices $E_j(1/\alpha)$ y $E_j(\alpha)$ inversas una de la otra.

(e) Los programas como Octave, Matlab, etc que llevan incorporada la función LU, pueden no producir el mismo resultado que el nuestro pues usan pivoteo para minimizar los errores de redondeo y obtienen una factorización de la matriz PA (véase la observación (b)).

Por lo que hemos visto, si hay una factorización LU entonces hay infinitas pues podemos aplicar la observación (d); sin embargo fijados los unos principales (en L o en U), si A es cuadrada e invertible la descomposición LU es única como pone de manifiesto el siguiente

Teorema 3.8: Si A es una matriz invertible cuya forma escalonada se obtiene sin intercambio de filas, existe la descomposición LU y es única fijados los unos principales en la matriz U ó en L.

Demostración: Supongamos dos descomposiciones $L_1U_1 = L_2U_2$ y supongamos que la diagonal de U_1 y de U_2 está formada por unos. Entonces

$$L_1L_2^{-1} = U_2U_1^{-1}$$

Como el primer miembro de la matriz anterior es triangular inferior y el segundo triangular superior, al ser iguales, necesariamente, son iguales a una matriz diagonal.Es decir $U_2U_1^{-1} = D$. Pero la matriz $U_2U_1^{-1}$ tiene unos en la diagonal (¿por qué?) y al ser una matriz diagonal debe ser la matiz identidad; luego $U_2U_1^{-1} = I$ y por tanto $U_1 = U_2$. Se deduce también que $L_1L_2^{-1} = I$ y por tanto $L_1 = L_2$. La factorización es única. □

3.5 Revisión de los métodos iterativos

En el capítulo 1 se vieron los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel y vamos a estudiarlos ahora en forma matricial. Los métodos iterativos para resolver el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con A cuadrada, consisten en descomponer la matriz $A = C + D$ (eligiendo convenientemente C y D) y hacer las siguientes transformaciones

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \to (C + D)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \to D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - C\boldsymbol{x}$$

Eligiendo D invertible cuya inversa sea fácilmente calculable

$$\boldsymbol{x} = D^{-1}\boldsymbol{b} - D^{-1}C\boldsymbol{x}$$

Partiendo de una “solución” inicial $\boldsymbol{x}_0$ se genera una sucesión

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = D^{-1}\boldsymbol{b} - D^{-1}C\boldsymbol{x}_n$$

esperando que haya convergencia.

- Método de Jacobi. Se toma como matriz D la diagonal de A y como C la matriz $A - D$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dados A, $\boldsymbol{b}$ y la solución inicial $\boldsymbol{x}$, los cálculos con Octave se hacen

```
Octave> D=diag(diag(A)); C=A-D; D=inv(D);C=D*C;
```

```
Octave> x=D*b-C*x
```

Si partimos de la solución inicial nula y queremos iterar N veces

```
Octave> D=diag(diag(A)); C=A-D; D=inv(D);C=D*C;

Octave [m n]= size(A); x=zeros(n,1);

Octave> for i=1:N, x=D*b-C*x endfor
```

- Método de Gauss-Seidel. Se toma como matriz D el triángulo inferior

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

```
Octave> D=tril(A); C=A-D; D=inv(D);C=D*C;

Octave [m n]= size(A); x=zeros(n,1);

Octave> for i=1:N, x=D*b-C*x endfor
```

Resolvamos el sistema de solución única $(1,2,1)$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 1/2x_3 & = & 3/2 \\ 1/2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7/2 \\ 1/2x_1 & & & + & x_3 & = & 3/2 \end{array}\right\}$$

Usando el método de Jacobi:

```
Octave> A=[1 0 1/2;1/2 1 1 ;1/2 0 1];b=[3/2 7/2 3/2]';
Octave> D=diag(diag(A)); C=A-D; D=inv(D);C=D*C;
Octave [m n]= size(A); x=zeros(n,1);
Octave> for i=1:5, x=D*b-C*x endfor
```

Se obtienen las 5 primeras iteraciones

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$
1.5000	0.75000	1.1250	0.93750	1.0312
3.5000	1.25000	2.3750	1.81250	2.0938
1.5000	0.75000	1.1250	0.93750	1.0312

Usando ahora el de Gauss-Seidel

```
Octave> A=[1 0 1/2;1/2 1 1 ;1/2 0 1];b=[3/2 7/2 3/2]';
Octave> D=tril(A); C=A-D; D=inv(D);C=D*C;
Octave [m n]= size(A); x=zeros(n,1);
Octave> for i=1:5, x=D*b-C*x endfor
```

Se obtiene

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$
1.50000	1.12500	1.03125	1.00781	1.00195
2.75000	2.18750	2.04688	2.01172	2.00293
0.75000	0.93750	0.98438	0.99609	0.99902

3.6 Problemas resueltos

3.1 Hallad la inversa de la matriz A y expresar A y A^{-1} como producto de elementales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución: Transformemos A en la identidad usando operaciones elementales por filas y anotando la matrices elementales usadas en dicho proceso

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

La inversa es $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y los pasos seguidos son:

- En el primer paso hemos usado $\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1}$ que se corresponde con la matriz elemental $E_1 = E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

- En el segundo paso hemos usado $\xrightarrow{F_2 \leftarrow -F_2}$ que se corresponde con la matriz elemental $E_2 = E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- En el tercer paso hemos usado $\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 3F_2}$ que se corresponde con la matriz elemental $E_3 = E_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sabemos que $E_3E_2E_1A = I$. Se deduce que $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$ y $A^{-1} = E_3E_2E_1A$. De forma explícita:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.2 Consideremos la matriz A y su inversa A^{-1}

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & -4 \end{bmatrix}
$$

Sea B la matriz resultante de sumarle a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2

$$
\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = B
$$

La inversa de B es

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -7 & 19 & 6 \\ 5 & -14 & -4 \end{bmatrix}
$$

Comparad la inversa de B con la de A y explicad el resultado.

Solución: La inversa de B se obtiene de la de A restándole a la segunda columna el doble de la primera. La explicación es la siguiente

$$
B = E_{12}(2)A \to B^{-1} = A^{-1}E_{12}^{-1}(2) = A^{-1}E_{12}(-2)
$$

Como la matriz $E_{12}(-2)$ multiplica por la derecha afecta a las columnas de A^{-1}, restándole a la segunda columna el doble de la primera.

3.3 Multiplicad las matrices A y B de orden n

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x+n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x+n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & x+n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x+n-1 \end{bmatrix}$$

¿Quién es la inversa de A?

Solución: Efectuando el producto:

$$AB = \begin{bmatrix} x(x+n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(x+n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x(x+n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x(x+n) \end{bmatrix} = x(x+n)I_n$$

La inversa de A es $\dfrac{1}{x(x+n)}B$.

3.4 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos soluciones distintas del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

(a) Probad que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector $\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{u} + \alpha(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ es también solución de dicho sistema

(b) Probad que si $\alpha \neq \beta$ entonces $\boldsymbol{x}_\alpha \neq \boldsymbol{x}_\beta$

(c) ¿Qué se deduce de los apartados anteriores?

Solución:

(a) Como $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son soluciones se cumple que $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ y $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$. Entonces

$$A\boldsymbol{x}_\alpha = A\boldsymbol{u} + \alpha(A\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$$

(b) Usaremos la reducción al absurdo; supongamos que $\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\beta$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \alpha(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u} + \beta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\\
\alpha(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) &= \beta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\\
(\alpha - \beta)\boldsymbol{v} &= (\alpha - \beta)\boldsymbol{u}\\
(\alpha - \beta)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, necesariamente es $\alpha = \beta$ en contra de la hipótesis de que eran distintos

(c) Si un sistema lineal tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas.

3.5 Sea un sistema lineal compatible $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{u}$ una solución. Probad que cualquier otra solución es de la forma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_0$ siendo $\boldsymbol{u}_0$ solución del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Solución: Sea $\boldsymbol{v}$ otra solución y llamemos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$. Entonces $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_0$ y, hay que probar que $\boldsymbol{u}_0$ es solución del homogéneo

$$A\boldsymbol{u}_0 = A(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

3.6 Probad que si A es antisimétrica, entonces las matrices $I - A$ y $I + A$ son invertibles.

Solución: Sabemos por la teoría que una matriz es invertible si, y sólo si, el sistema homogéneo formado con dicha matriz sólo tiene la solución trivial.

(a) Matriz $I - A$. Planteamos el sistema $(I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
(I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} &\to A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\\
&\to \boldsymbol{x}^T A^T = \boldsymbol{x}^T\\
&\to -\boldsymbol{x}^T A = \boldsymbol{x}^T\\
&\to -\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\\
&\to -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\\
&\to \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 0.
\end{aligned}$$

Por el problema 2.21 se deduce que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y, por tanto, la matriz es invertible

(b) Matriz $I + A$. Se hace de forma análoga.

3.7 Problemas propuestos

3.7 Clasificar las siguientes matrices elementales y calculad sus inversas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.8 Encontrad una matriz elemental E tal que $B = EA$ en los siguientes casos

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3.9 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrad dos matrices elementales E_1 y E_2 tales que $B = E_2E_1A$.

(b) Probad que no existe ninguna matriz elemental E tal que $B = EA$.

3.10 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallad una matriz elemental E que cumpla:

(a) $EA = B$ (b) $EB = A$ (c) $EA = C$

(d) $EC = A$ (e) $EC = D$ (f) $ED = C$

3.11 Encontrad una sucesión de matrices elementales que transformen A en la identidad I.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.12 Escribid A y A^{-1} como producto de elementales para las matrices del problema anterior.

3.13 Considerad las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Probad que $A \equiv_F I_3$.

(b) Probad que $B \equiv_F I_3$.

(c) Deducid, como consecuencia de los apartados anteriores, que $A \equiv_F B$.

3.14 Considerad las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobad que $A \equiv_F B$.

(b) ¿Tienen A y B el mismo rango?

(c) ¿Son equivalentes? ($A \equiv B$)

3.15 Averiguad si $A \equiv B$ y $A \equiv_F B$ para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.16 Probad que las matrices A y B son equivalentes por filas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 5 & 6 \\ 3 & -13 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3.17 Obtened la forma escalonada reducida de las siguientes matrices

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & - \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3.18 Hallar el rango de las matrices del problema anterior.

3.19 ¿Qué condición debe verificar α para que $\mathrm{rg}(A + \alpha B) < 2$? siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.20 Comprobad con los problemas anteriores que tener el mismo rango (ser equivalentes) no implica ser equivalentes por filas.

3.21 Consideremos el producto de dos matrices

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & s & p \end{bmatrix}$$

Comprobad que los siguientes producto son iguales

(a) $\begin{bmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ w & s & p \\ t & u & v \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ t/2 & u/2 & v/2 \\ w & s & p \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b-c & c \\ d & e-f & f \\ g & h-i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w+t & s+u & p+v \end{bmatrix}$

Dad una explicación para el hecho anterior.

3.22 Calcula el rango de las siguientes matrices en función de k

(a) $\begin{bmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

3.23 Hallad la inversa de las matrices dadas por el método de Gauss-Jordan

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3.24 Expresad las matrices del problema anterior como producto de elementales.

3.25 Hallad la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.26 Dada la matriz cuadrada $A_{n\times n}$ definida

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Hallad la inversa para $n = 3, 4$ y conjeturar la inversa para cualquier n.

3.27 Hállese la inversa de A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos una operación elemental ¿cómo queda afectada la inversa? Hágase para los casos

(a) $P_{23}A$ (b) $E_2(-3)A$ (c) $E_{32}(-2)A$

3.28 Sean una matriz y su inversa

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & s & t \end{bmatrix}$$

Escribid la inversa de las matrices

$$B = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-2g & e-2h & f-2i \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

3.29 Comprobad la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

3.30 Hallad la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.31 Generalizad el problema 3.30 para la matriz de orden n

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3.32 Resolver los siguientes sistemas usando la matriz inversa (si existe)

(a) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

3.33 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar la matriz X en los siguientes casos

(a) $(ABX)^{-1} = A$

(b) $(A+B)X = B - I$

(c) $(A+B)X = B^{-1}X$

(d) $BXA^2 = A^{-1}$

(e) $AXB = (BA)^2$

(f) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$.

3.34 Discutir los siguientes sistemas en función del parámetro a y resolvedlos en caso de compatibilidad

(a) $\left.\begin{array}{rcrcr} ax_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & = & 2 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcr} ax_1 & - & 3ax_2 & = & 1 \\ 2ax_1 & + & (6a+1)x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2ax_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 2 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ a^2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & a^2+1 \end{array}\right\}$

3.35 Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y suponed que $\boldsymbol{b}_1 = A\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{b}_2 = A\boldsymbol{x}_2$. Si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ ¿podemos afirmar que el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible? En caso afirmativo dad una solución.

3.36 Dado un sistema lineal compatible $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, siendo A de tamaño $m \times n$ probad que el sistema B$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ es equivalente al anterior para cualquier matriz no singular B de tamaño $m \times m$.

3.37 Resolved los siguientes sistemas de dos formas: por el método de Gauss y usando la factorización LU dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$

3.38 Encontrad una factorización LU de la matriz A

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

3.39 Resolved los siguientes sistemas $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ usando una factorización LU de la matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Capítulo 4

Subespacios. Bases y dimensión

En la mayoría de los textos de Álgebra lineal se estudian los espacios vectoriales y en particular el espacio $\mathbb{R}^n$ formado por las $n-$tuplas ya conocidas. Un espacio vectorial es un conjunto de elementos, llamados vectores (pueden ser polinomios, matrices, etc.), donde se han definido dos operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) que cumplen ciertas propiedades (véase el teorema (1.1) de la página 6). Un subconjunto de un espacio vectorial que cumpla los axiomas (un espacio dentro de otro) se llama subespacio. En este capítulo no restringimos al estudio de éstos y, en particular, a los subespacios que una matriz A define. Acabamos el capítulo estudiando el cambio de base.

Objetivos:

- *Concepto de subespacio*
- *Cálculo de bases de un subespacio*
- *Subespacios que una matriz define:* $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Col} A$ *y* $\operatorname{Fil} A$.

4.1 Combinaciones lineales

Un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal (C.L.) de los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ tales que

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p.$$

Ejemplo 4.1: *Como* $3(1,1,1) - 2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (4,5,4)$ *el vector* $(4,5,4)$ *es C.L de los vectores* $(1,1,1), (1,-2,0)$ *y* $(3,-2,1)$

Para averiguar si un vector es C.L de otros, se hace un sistema lineal; en el ejemplo anterior buscamos tres incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para que

$$(4,5,4) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-2,0) + \alpha_3(3,-2,1)$$

lo que conduce al sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = 4 \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & 2\alpha_3 & = 5 \\ \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = 4 \end{array}\right\}$$

que en forma matricial queda

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 1 & -2 & -2 & | & 5 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \end{array}\right]$$

Por tanto se ponen los vectores en columnas y el vector presuntamente C.L. como última columna; en función de la compatibilidad del sistema, el vector será o no C.L. de los otros y se podrá poner como C. L de forma única (sistema determinado) o de infinitas formas (indeterminado). De lo visto se deduce el

Teorema 4.1: El sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible si, y sólo si, $\boldsymbol{b}$ es C.L de las columnas de A.

Definición 4.1: Se llama envoltura lineal de los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p$ de $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las C.L de dichos vectores. Lo indicaremos como $\text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$ y a los vectores $\boldsymbol{u}_i$ los llamamos generadores.

El siguiente teorema queda a cargo del alumno

Teorema 4.2: Dados los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p$ de $\mathbb{R}^n$

(a) $\boldsymbol{0} \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$.

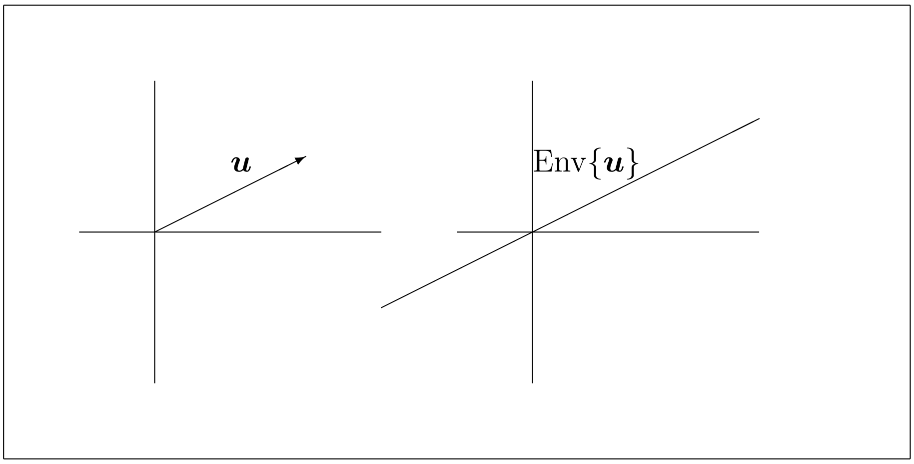
(b) $\boldsymbol{u}_i \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$ para $i = 1, 2, \dots p$.

(c) Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$ entonces $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$.

(d) Si $\boldsymbol{u} \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha\boldsymbol{u} \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\}$$

Evidentemente $\mathrm{Env}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$; en cualquier otro caso la envoltura es un conjunto de infinitos vectores; por ejemplo $\mathrm{Env}\{\boldsymbol{u}\} = \{\alpha\boldsymbol{u}\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$, son los múltiplos de $\boldsymbol{u}$ (se llama recta vectorial) que se puede representar como se ve en la figura



Un conjunto de vectores puede generar todo $\mathbb{R}^n$ o una parte (posteriormente lo llamaremos subespacio). Veamos dos ejemplos

Ejemplo 4.2: *¿Es* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Env}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$*? Como se trata de una igualdad entre conjuntos, hay que probar las dos inclusiones siguientes*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\subseteq \mathrm{Env}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}\\ \mathbb{R}^3 &\supseteq \mathrm{Env}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}\,.\end{aligned}$$

La segunda está clara; respecto a la primera hay que probar que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ *es C. L de los tres vectores; tomamos un vector genérico* (a,b,c) *y planteamos el sistema*

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & a\\ 1 & 0 & 1 & | & b\\ 0 & 1 & 1 & | & c\end{array}\right]$$

Haciendo operaciones se llega a

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & (a+b-c)/2\\ 0 & 1 & 0 & | & (a-b+c)/2\\ 0 & 0 & 1 & | & (-a+b+c)/2\end{array}\right]$$

lo que prueba que el sistema es C.D. para cualesquiera valores de a, b *y* c*; por tanto afirmamos que los tres vectores generan todo* $\mathbb{R}^3$ *(más tarde diremos que forman una* base*).*

Veamos que los vectores $(1,0,1)$ *y* $(0,1,1)$ *no generan* $\mathbb{R}^3$. *Procedemos como anteriormente y planteamos el sistema*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\textit{Op. Elem.}} \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$$

El sistema es compatible cuando $c-a-b=0$*; por tanto sólo aquellos vectores* $(a,b,c)\colon c-a-b=0$ *son generados por dichos vectores. Se expresa de la forma*

$$\operatorname{Env}\{(1,0,1),(0,1,1)\} = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\colon c-a-b=0\}.$$

Recordemos que los vectores se pueden expresar como columnas (matrices) por lo que podemos escribir

$$\operatorname{Env}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\colon c-a-b=0\right\}.$$

Veamos que, en ciertas ocasiones, algunos vectores generadores *sobran* en el sentido que la envoltura no queda afectada al suprimirlos; concretamente: si un vector es C.L. del resto se puede "suprimir" como demuestra el siguiente teorema

Teorema 4.3: Si $\boldsymbol{u}\in\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$, entonces

$$\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\} = \operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$$

Demostración:

(a) La inclusión $\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}\subseteq\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$ es clara ya que

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_p\boldsymbol{u}_p = 0\boldsymbol{u}+\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_p\boldsymbol{u}_p.$$

(b) Veamos ahora $\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}\subseteq\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$
Dado $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$, entonces

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_p\boldsymbol{u}_p.$$

Como partimos de que $\boldsymbol{u}\in\operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$, será

$$\boldsymbol{u} = \beta_1\boldsymbol{u}_1+\beta_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\beta_p\boldsymbol{u}_p$$

esto es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \alpha(\beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_p\boldsymbol{u}_p) + \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{u}_p \\ &= (\alpha\beta_1 + \alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha\beta_2 + \alpha_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha\beta_p + \alpha_p)\boldsymbol{u}_p\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$.

□

Así por ejemplo, $\mathrm{Env}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\} = \mathrm{Env}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ pues el vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ es C.L, de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

4.2 Independencia lineal

En el ejemplo 4.1 hemos visto que

$$(4,5,4) = 3(1,1,1) - 2(1,-2,0) + (3,-2,1)$$

El vector $(4,5,4)$ *depende* linealmente de los otros; sin embargo el vector $(1,1,1)$ no es C.L. de $(1,0,1), (0,1,1)$ (pruébese); en el primer caso se obtiene entre los cuatro vectores una relación de la forma

$$-(4,5,4) + 3(1,1,1) - 2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (0,0,0)$$

Una C.L. que dá el vector nulo sin ser nulos los escalares. En el segundo caso la única forma de igualar una C.L al vector nulo es la C.L. nula, es decir con todos los escalares nulos:

$$0(1,1,1) + 0(1,0,1) + 0(0,1,1) = (0,0,0)$$

Esto justifica la siguiente

Definición 4.2: Los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ de $\mathbb{R}^n$ son **linealmente dependientes (L.D.)** si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, *no todos nulos*, tales que

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}.$$

En caso contrario el conjunto de vectores se llama **linealmente independiente (L.I.)** y la única C.L. que da el vector nulo es la que tiene nulos todos los escalares.

Un conjunto que contenga el vector nulo es L.D. (pruébese). Para establecer la dependencia o independencia de un conjunto de vectores damos el siguiente

Teorema 4.4: Dado un sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces las columnas de A forman un conjunto L.D si, y sólo si, el sistema es indeterminado.

Ejemplo 4.3: *Probad que los vectores* $(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *son L.I. Se plantea el sistema*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es determinado, la única solución es la trivial, por lo que son L.I.

Teorema 4.5: Los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_, \dots \boldsymbol{u}_p$ son L.D. si, y sólo si, al menos uno de ellos es C.L de los restantes.

Demostración: Supongamos que un vector, por ejemplo $\boldsymbol{u}_1$, es C.L. de los demás; tendremos

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p$$

La C.L. $-\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}$ por lo que son L.D ya que un escalar al menos (el de $\boldsymbol{u}_1$) no es nulo. Recíprocamente, si el conjunto es L.D, existe una C.L de la forma

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}$$

donde algún escalar es no nulo; supongamos por comodidad que es α_1 (se haría igual con cualquier otro), lo que permite despejar $\boldsymbol{u}_1$

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{u}_2 - \cdots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1}\boldsymbol{u}_p$$

y tenemos que un vector es C.L de los restantes. □

Para terminar esta sección vamos a ver un teorema que posteriormente nos permitirá probar que todas las bases tienen el mismo número de vectores. El teorema afirma que un conjunto de vectores de cierta envoltura lineal, mayor en número que el de generadores es linealmente dependiente.

Teorema 4.6: Sean $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_p$ y $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_q$ vectores de $\mathbb{R}^n$, tales que

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_q \in \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_p.\}$$

Si $q > p$, entonces los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_q$ son L.D.

DEMOSTRACIÓN: Formamos las siguientes matrices poniendo los vectores en columna

$$U = [\,\boldsymbol{u}_1\, \boldsymbol{u}_2\, \cdots\, \boldsymbol{u}_p\,] \text{ y } V = [\,\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2, \cdots\, \boldsymbol{v}_q\,]$$

Como cada vector $\boldsymbol{v}_j$ es C.L de los vectores $\boldsymbol{u}_i$, existe un vector $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^p$ tal que $U\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{v}_j$ (¿por qué?) con lo que llamando $A = [\,\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_q\,]$ se tiene que $UA = V$.

Ahora formamos el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ que es de p ecuaciones con q incógnitas por lo que es indeterminado (más incógnitas que ecuaciones); es decir existe $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $A\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$. Multiplicando por U se tiene $UA\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, es decir, $V\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. El sistema $V\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ es indeterminado y de acuerdo con el teorema 4.4 las columnas de V (los vectores $\boldsymbol{v}_j$) son L.D.

Llamemos $\boldsymbol{e}_j$ al vector de $\mathbb{R}^n$ que es la j-sima columna de la matriz identidad. Es fácil ver que $\text{Env}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots \boldsymbol{e}_n\} = \mathbb{R}^n$ por lo que n vectores generan $\mathbb{R}^n$ y de acuerdo a lo visto anteriormente, un número de vectores mayor que n son automáticamente L.D. Por ejemplo 4 vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ son L.D. $\square$

4.3 Subespacios

Definición 4.3: Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio si cumple las tres propiedades siguientes

(a) $\boldsymbol{0} \in S$

(b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in S$ para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$

(c) $\alpha\boldsymbol{u} \in S$ para todo $\boldsymbol{u} \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Compruébese que el subconjunto $\{\boldsymbol{0}\}$ es subespacio (llamado trivial) y también $\mathbb{R}^n$ al que podemos llamar el *espacio*.

Ejemplo 4.4: *Comprobad que el conjunto* $S = \{(x, y, z) \colon x - y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ *es subespacio.*

(a) El vector $(0, 0, 0)$ *pertenece obviamente a* S

(b) Dados dos vectores de S, $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$ *y* $\boldsymbol{v} = (x', y', z')$ *se cumple que*

$$x - y + z = 0, \qquad x' - y' + z' = 0.$$

Entonces $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x + x', y + y', z + z')$ *está en* S *pues*

$$(x + x') - (y + y') + (z + z') = (x - y + z) + (x' - y' + z') = 0 + 0 = 0.$$

(c) $\alpha\boldsymbol{u} = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ *que pertenece a* S *pues*

$$\alpha x - \alpha y + \alpha z = \alpha(x - y + z) = \alpha O = 0.$$

El conjunto $S = \{(x, y, z) \colon x - y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ no es subespacio (compruébese).

La envoltura lineal es subespacio como lo demuestra el teorema siguiente

Teorema 4.7: Dados los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p$ de $\mathbb{R}^n$, el conjunto

$$S = \operatorname{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p\}$$

es subespacio.

DEMOSTRACIÓN:

(a) $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{u}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_p \in S$

(b) Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$. Entonces

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{u}_p, \quad \boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_p\boldsymbol{u}_p$$

El vector suma es

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha_p + \beta_p)\boldsymbol{u}_p \in S.$$

(c) $\alpha\boldsymbol{u} = (\alpha\alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha\alpha_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_p)\boldsymbol{u}_p \in S.$

Por tanto un conjunto de vectores generan un subespacio. □
Una matriz $A_{m\times n}$ proporciona varios subespacios notables que pasamos a definir

(a) Subespacio $\operatorname{Col} A$. Las columnas de A son n vectores de $\mathbb{R}^m$; pongamos $A = [\,\boldsymbol{a}_{:1}\,\boldsymbol{a}_{:2}\,\cdots\,\boldsymbol{a}_{:n}\,]$, entonces se define

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Env}\{\boldsymbol{a}_{:1}, \boldsymbol{a}_{:2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{:n}\}$$

que es subespacio de $\mathbb{R}^m$ por ser una envoltura.

(b) Subespacio $\operatorname{Fil} A$. Las filas de A son m vectores de $\mathbb{R}^n$; pongamos

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1:} \\ \boldsymbol{a}_{2:} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m:} \end{bmatrix}$$

y definimos $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Env}\{\boldsymbol{a}_{1:}, \boldsymbol{a}_{2:}, \cdots, \boldsymbol{a}_{m:}\}$ que es subespacio de $\mathbb{R}^n$ por ser una envoltura. Nótese que si $A \equiv_F B$ entonces las filas de B son vectores combinación lineal de la de A, por lo que generan el mismo subespacio (demuéstrese), es decir, $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Fil} B$, pero no ocurre así con el subespacio columna; en general $\operatorname{Col} A \neq \operatorname{Col} B$.

(c) Subespacio nulo. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se define así:

$$\operatorname{Nul} A = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}\colon A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_m\}.$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) Como $A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m$ es $\mathbf{0}_m \in \operatorname{Nul} A$ (es la solución trivial).

(2) Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \operatorname{Nul} A$ es que $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_m$ y $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_m$ por lo que $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_m + \mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m$.

(3) Si $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Nul} A$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ es $A(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha(A\boldsymbol{u}) = \alpha\mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m$.

El subespacio nulo se llama a veces núcleo de la matriz; en algunos libros puede venir como $\operatorname{Nuc} A$ o $\ker A$. Hacemos la misma observación que para el subespacio $\operatorname{Fil} A$, si $A \equiv_F B$, la forma reducida es la misma y, en consecuencia, $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Nul} B$. □

4.3.1 Bases y dimensión

Definición 4.4: Sea S un subespacio. Un conjunto de vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p$ de S es una **base** de S si cumple

(a) El conjunto $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p$ es generador de S.

(b) El conjunto $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p$ es L.I.

Una base (hay muchas) de $\mathbb{R}^n$ es la formada por los vectores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n$ definidos anteriormente; se le llama la base **canónica**.

Ejemplo 4.5: *Probad que los siguientes vectores forman una base de* $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

¿Cómo hallar bases? Veamos algunos ejemplos

(a) Base del subespacio $\operatorname{Col} A$.

Ejemplo 4.6: *Sea la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. *Hay cuatro columnas (vectores de* $\mathbb{R}^2$*); por definición, los cuatro son generadores pero sabemos que en* $\mathbb{R}^2$ *tres o más vectores son L.D. Una base estará formada por, como máximo, dos columnas ¿quienes? Hagamos operaciones elementales por filas*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Op.Elem.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Las columnas que tienen uno principal, primera y tercera (de A*) forman una base*

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Base del subespacio $\operatorname{Fil} A$. Se procede como antes y las filas que contengan uno principal (de A o cualquier matriz equivalente por filas) forman una base. Para la matriz anterior

$$\operatorname{Fil} A = \operatorname{Env}\{(1,1,2,-1),(1,0,3,1)\} = \operatorname{Env}\{(1,0,3,1),(0,1,-1,2)\}.$$

(c) Base de $\operatorname{Nul} A$. Se resuelve el sistema homogéneo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Op.Elem.}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es, en forma paramétrica

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo que prueba que

$$\operatorname{Nul} A = \operatorname{Env}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Como son L.I (compruébese) forman una base.

El siguiente teorema afirma que todas las bases tienen el mismo número de vectores

Teorema 4.8: Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces todas las bases tienen el mismo número de vectores.

DEMOSTRACIÓN: Sean dos bases

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_p\}, \quad \mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_q\}.$$

Apliquemos el teorema 4.6. Considerando como generadores a los vectores $\boldsymbol{u}_i$ y dado que los vectores $\boldsymbol{v}_j$ son L.I, necesariamente es $q \leq p$. Si ahora consideramos generadores a los vectores $\boldsymbol{v}_j$, razonando como antes ha de ser $p \leq q$, por lo que se deduce que $p = q$. □

A este número común de vectores se le asocia un nombre especial

Definición 4.5: Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se llama **dimensión** de S al número de vectores de cualquier base.

El subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$ no tiene bases porque el vector $\mathbf{0}$ considerado como conjunto es L.D. ya que, por ejemplo, $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ es una C.L con escalar no nulo; entonces se define $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$. Por otra parte ya vimos que los vectores

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, $\dim \mathbb{R}^n = n$. Esta base se llama base **canónica.**

Ejemplo 4.7: *Probad que el conjunto de $\mathbb{R}^4$ definido*

$$S = \{(a, b, a + 3b, -a + 2b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

es subespacio y hallad una base y la dimensión.

Se pueden probar las tres condiciones de subespacio pero vamos a hacerlo de otra forma: si a los vectores de S los llamamos (x, y, z, t) se cumple que $z = x + 3y$ y $t = -x + 2y$ luego S se puede expresar

$$S = \left\{(x, y, z, t) \colon \begin{array}{c} z = x + 3y \\ t = -x + 2y \end{array}\right\} = \left\{(x, y, z, t) \colon \begin{array}{c} x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \end{array}\right\}.$$

El conjunto S es por tanto, el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo, concretamente el subespacio nulo de una matriz

$$S = \operatorname{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

así que tiene estructura de subespacio. Ahora, para hallar la base, no hace falta resolver el sistema;

$$(a, b, a + 3b, -a + 2b) = a(1, 0, 1, -1) + b(0, 1, 3, 2).$$

de lo que se deduce que $S = \operatorname{Env}\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 3, 2)\}$. Como los dos vectores son L.I. (compruébese) forman una base. La dimensión de S es 2.

Coordenadas

Teorema 4.9: Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U}$ una base de S, existe una única forma de escribir cada vector de S como C.L. de los vectores de $\mathcal{U}$.

A los escalares de la C.L. los llamamos coordenadas

Definición 4.6: Si $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_p\}$ es una base de un subespacio (de dimensión p), se llaman **coordenadas** de un vector $\boldsymbol{u} \in S$ a la $p-$tupla

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}.$$

tal que $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p$.

Naturalmente si se cambia de base las coordenadas cambian.

Ejemplo 4.8: *En el ejemplo 4.7 hallar las coordenadas del vector* $\boldsymbol{u} = (2, 3, 11, 4)$ *en la base* $\mathcal{U} = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 3, 2)\}$. *Hay que resolver el sistema*

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\textit{Op. Elem.}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Cambio de base

Sean dos bases $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ y $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ de un subespacio S. Pongamos cada vector de $\mathcal{U}$ en la base $\mathcal{V}$.

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}_1 & = & a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{p1}\boldsymbol{v}_p \\ \boldsymbol{u}_2 & = & a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{p2}\boldsymbol{v}_p \\ \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \boldsymbol{u}_p & = & a_{1p}\boldsymbol{v}_1 + a_{2p}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{pp}\boldsymbol{v}_p \end{array}$$

Ahora formamos una matriz poniendo las coordenadas en columna; esta matriz se llama de cambio de base de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$.

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{C}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{u}_1) & \mathcal{C}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & \mathcal{C}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{u}_p) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

Esta matriz es invertible; en efecto: si no lo fuera una columna sería C.L. de las restantes (pues el rango sería $< n$) y el vector $\boldsymbol{u}_j$ correspondiente sería la misma C.L. de los restantes vectores $\boldsymbol{u}_i$ en contradicción con que forman base. Su inversa es la matriz de cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$.

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P^{-1}_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}.$$

Se obtiene el siguiente resultado: Dadas dos bases $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de un subespacio y, dado un vector cualquiera $\boldsymbol{x}$ de S, entonces

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}) \tag{4.1}$$

Si consideramos el subespacio $\mathbb{R}^n$ es particularmente útil la base canónica $\mathcal{C}$, porque un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene en esta base como coordenadas los mismos escalares x_i

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Observación: nótese que los vectores de las bases están en un cierto orden; si cambimos los vectores de orden, la matriz cambia (una permutación de las columnas.)

Se puede probar que en $\mathbb{R}^n$ dadas tres bases $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ se cumple

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{W}}P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{U}}$$

Particularmente interesante es cuando tomamos la base canónica

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{V}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}}$$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 4.9: *Hallad las coordenadas del vector* $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *en la base*

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -2), \quad \boldsymbol{u}_2 = (3, -1, 2), \quad \boldsymbol{u}_3 = (-2, -1, 1)\}.$$

De acuerdo a (4.1) se tiene

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}) = P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{x}) = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{x}).$$

Así que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28/11 \\ -1/11 \\ -21/11 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.10: *Hallad la matriz de cambio $P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}$ para las dos bases de $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \\ \mathcal{V} &= \{(1,1,1),(-1,1,1),(0,2,1)\} \end{aligned}$$

Se ponen los vectores en columnas y aplicando

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{V}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}}$$

tenemos

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Relación entre las dimensiones de $\operatorname{Col} A$, $\operatorname{Fil} A$ y $\operatorname{Nul} A$

En el ejemplo 4.6 se vió que $\dim \operatorname{Col} A = \operatorname{rg}(A) = 2$. En la forma reducida hay 2 unos principales y al hacer el sistema homogéneo hay 2 incógnitas principales y $4 - 2 = 2$ incógnitas no principales; el número de estas es la dimensión del subespacio $\operatorname{Nul} A$ pues da el número de parámetros en la solución paramétrica. Podemos afirmar: si A es de tamaño $m \times n$

$$\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Fil} A = \operatorname{rg}(A), \quad \dim \operatorname{Nul} A = n - \operatorname{rg}(A).$$

También es fácil ver que $\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A)$; en efecto

$$\operatorname{rg}(A^T) = \dim \operatorname{Col}(A^T) = \dim \operatorname{Fil} A = \operatorname{rg}(A).$$

Finalmente vemos otra caracterización de las matrices invertibles:

Teorema 4.10: Si A es de tamaño $n \times n$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible

(b) Las columnas (filas) de A generan $\mathbb{R}^n$

(c) Las columnas (filas) de A forman una base de $\mathbb{R}^n$

(d) Las columnas (filas) de A son vectores L.I.

Vamos a ver como consecuencia el siguiente teorema

Teorema 4.11: Si A es una matriz cualquiera $m \times n$, entonces $A^T A$ es invertible si, y sólo si, $\operatorname{rg} A = n$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $A^T A$ es cuadrada de tamaño $n \times n$. Entonces

$$\operatorname{rg}(A^T A) + \dim \operatorname{Nul}(A^T A) = n = \operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Nul}(A)$$

Viendo que $\dim \operatorname{Nul}(A^T A) = \dim \operatorname{Nul}(A)$ habremos probado que $\operatorname{rg}(A^T A) = \operatorname{rg}(A)$ y la matriz $A^T A$ es invertible si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A^T A) = n$ y por tanto se sigue la conclusión del teorema.

Veamos que los subespacios $\operatorname{Nul}(A^T A)$ y $\operatorname{Nul} A$ son iguales (y por tanto tienen la misma dimensión) usando el método de la doble inclusión

(a) Si $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Nul} A$ entonces $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando por A^T se sigue que $A^T A\boldsymbol{x} = A^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por tanto $\operatorname{Nul} A \subseteq \operatorname{Nul} A^T A$

(b) Si $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Nul} A^T A$ entonces $A^T A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando por $\boldsymbol{x}^T$ se sigue que $\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Pero

$$\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^T (A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

Recordando que $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (véase el problema 2.21), se deduce que $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y entonces $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Nul} A$. Deducimos que $\operatorname{Nul} A^T A \subseteq \operatorname{Nul} A$.

□

4.4 Problemas resueltos

4.1 Probad que si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es un conjunto L.I también lo es el conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\}$.

Solución: Hay que probar que la única combinación lineal de dichos vectores nula es la que tiene todos los escalares nulos

$$\alpha\boldsymbol{u} + \beta(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + \gamma(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\boldsymbol{u}) + (\beta+\gamma)\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

Por hipótesis, los vectores $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ son L.I de donde surge el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

4.2 Probad que la intersección de subespacios es subespacio.

Solución: Sean E y F dos subespacios; para el conjunto $E \cap F$ probaremos la tres condiciones de subespacio

- Como $\mathbf{0} \in E$ y $\mathbf{0} \in F$, se deduce que $\mathbf{0} \in E \cap F$
- Sean $\boldsymbol{u} \in E \cap F$ y $\boldsymbol{v} \in E \cap F$. Dado que $\boldsymbol{u} \in E$ y $\boldsymbol{v} \in E$ se deduce que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$. De la misma forma se deduce que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in F$ por lo que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E \cap F$
- Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{u} \in E \cap F$. Como $\boldsymbol{u} \in E$ y $\boldsymbol{u} \in F$ se deduce que $\alpha\boldsymbol{u} \in E$ y $\alpha\boldsymbol{u} \in F$. Por tanto $\alpha\boldsymbol{u} \in E \cap F$

4.3 Hallad la intersección de los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(x, 0, y)\colon x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{y} \quad F = \{(x, y, 0)\colon x - 2y = 0\}.$$

Solución: Sea un vector $(a, b, c) \in E \cap F$; se deduce que $b = 0$ y $a - 2b = 0$ y, de aquí, $a = 0$. Resumiendo $E \cap F = \{(0, 0, c)\colon c \in \mathbb{R}\}$. Una base la forma el vector $(0, 0, 1)$.

4.4 Probad que la unión de subespacios sólo es subespacio cuando uno de ellos contenga al otro.

Solución: Sean E y F dos subespacios. Si uno de ellos contiene al otro, la unión es el continente que es subespacio. Supongamos que ninguno contiene al otro; entonces podemos encontrar un vector de cada uno que no pertenece al otro (¿por qué?). Sean pues $\boldsymbol{u} \in E$ pero $\boldsymbol{u} \notin F$ y $\boldsymbol{v} \in F$ pero $\boldsymbol{v} \notin E$; el vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ debería estar en la unión si esta fuera subespacio, pero esto es imposible: si $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E \cup F$ entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$ ó $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in F$ y en ambos casos llegamos a una contradicción. En efecto

- Si $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$ entonces se deduce que $\boldsymbol{v} \in E$ en contra de la hipótesis inicial
- Si $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in F$ entonces se deduce que $\boldsymbol{u} \in F$ en contra de la hipótesis inicial

4.5 En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio

$$S = \{(x,y,z,t)\colon x-y=z-t\}$$

Consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\\ \mathcal{D} &= \{(2,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}\end{aligned}$$

(a) Probad que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son dos bases de S

(b) Hallad las matrices de cambio $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ y $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Solución:

(a) Los vectores dados son de S y tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{D}$ son conjuntos L.I. por lo que son base.

(b) La matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ se obtiene expresando los vectores de $\mathcal{D}$ en la base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}(2,1,1,0) &= \alpha_1(1,1,0,0)+\alpha_2(1,0,1,0)+\alpha_3(-1,0,0,1)\\ (0,1,0,1) &= \beta_1(1,1,0,0)+\beta_2(1,0,1,0)+\beta_3(-1,0,0,1)\\ (0,0,1,1) &= \gamma_1(1,1,0,0)+\gamma_2(1,0,1,0)+\gamma_3(-1,0,0,1)\end{aligned}$$

La matriz será

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix}$$

Para hallar los escalares hay que resolver tres sistemas que se puede hacer simultáneamente; se forma una matriz colocando los vectores de $\mathcal{B}$ y después los de $\mathcal{D}$ en columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma reducida de la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio es la formada por la tres primeras filas y tres últimas columnas

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.5 Problemas

4.6 Averiguad si el vector $(1,3,-1)$ es C.L de los vectores $(1,2,1),(1,4,0)$ y $(1,1,-1)$.

4.7 En cada caso averiguad si el vector $\boldsymbol{b}$ es C.L de $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$.

(a) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}.$

(c) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

4.8 Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 6, -2)$ y $\boldsymbol{v} = (3, -1, 0)$ averiguad los vectores que están en Env$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$

(a) (4,5,-2)

(b) (-1,13,-4)

(c) (0,0,0)

(d) (-2,7,2)

4.9 Averiguad los conjuntos siguientes que generan $\mathbb{R}^3$

(a) $\{(-1, 2, 1), (1, 0, -1), (1, 3, 4)\}$

(b) $\{(1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$

(c) $\{(-1, 2, 1), (1, 0, -1), (0, 2, 0)\}$

(d) $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$

4.10 Probad que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Env}\big\{(3, 1, 3), (1, 0, 1), (a^2 - 1, 2, -2)\big\}$$

4.11 Averiguad si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

(a) $(-1, 2, 1), (1, 0, -1), (1, 3, 4)$

(b) $(-2, 4, 0), (1, 1, 3), (1, 2, 4)$

(c) $(1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$

(d) $(1, 0, 1), (2, 1, -1), (8, 3, -1)$.

4.12 Probad que si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente también lo es el conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\}$.

4.13 Probad que si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es un conjunto L.I también lo son los conjuntos $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\}$, y $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$.

4.14 Si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es un conjunto L.D ¿qué se puede decir del conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$? Póngase un ejemplo.

4.15 Dados los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Para qu valores de α est $\boldsymbol{v}$ en Env$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$?.

4.16 Comprobad si el conjunto dado es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

(a) $S = \{(x, y, 0) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$

(b) $S = \{(x, y, z) \colon x + y + z = 1\}$

(c) $S = \{(x, y, z) \colon x - y + 2z = 0\}$

(d) $S = \{(x, y, 0) \colon x + y = 0\}$

(e) $S = \{(a, 0, a - 1) \colon a \in \mathbb{R}\}$

4.17 Comprobad si el conjunto dado es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(a) $S = \{(x, y, z, t) \colon x - 2y = 4z, 2x - y = t\}$

(b) $S = \{(a, b, a + b, 2a - b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$

(c) $S = \{(a + b, a - b, 2a + 3b, 0) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$

(d) $S = \{(a, 0, a - 1, 0) \colon a \in \mathbb{R}\}$

4.18 Encontrad una base de los subespacios de los problemas anteriores.

4.19 Hallad la intersección de los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(x, y, 0) \colon x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{y} \quad F = \{(x, y, 0) \colon x + y = 0\}.$$

4.20 Hallad la intersección de los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$E = \{(a, 0, b, c) \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad \text{y} \quad F = \{(a, b, c, d) \colon a + b - c - d = 0\}.$$

4.21 Comprobad que los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

forman una base de $\mathbb{R}^3$. Obtened las coordenadas en dicha base de los vectores

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

4.22 Sea $S = \text{Env}\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Hallad las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

(a) $(1,1,1,1)$

(b) $(2,-3,2,-3)$

(c) (a,b,a,b)

(d) $(1,3,1,4)$

4.23 Dados los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobad que $\boldsymbol{u}_3$ es CL. de los vectores $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$.

(b) Obtened una base de $S = \text{Env}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

(c) Comprobad que el vector

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \in S$$

y obtened las coordenadas de $\boldsymbol{u}$ en la base del apartado (b).

4.24 Hallar una base de los subespacios columna, fila y nulo de las siguentes matrices así como el rango de cada una de ellas

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

4.25 Sean las dos bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,0),(-1,0,1)\}$$
$$\mathcal{D} = \{(1,2,3),(0,-1,2),(1,1,1)\}$$

(a) Hallad las matrices de cambio de una a la otra

(b) Hallad las matrices de cambio de la base canónica a la base $\mathcal{B}$

(c) Hallad las coordenadas del vector $(1,-2,5)$ en la base $\mathcal{B}$.

4.26 Sean los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Probad que son una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

(b) Hallad la matriz de cambio a la canónica.

(c) Hallad la matriz de cambio de la canónica a $\mathcal{B}$.

(d) Hallad las coordenadas del vector (a,b,c) en $\mathcal{B}$.

4.27 En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio

$$S = \{(x,y,z,t) \colon x+y=z+t\}$$

Probad que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son dos bases de S.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,2,2,1)\} \\ \mathcal{D} &= \{(0,1,1,0),(1,2,1,2),(2,2,1,3)\} \end{aligned}$$

Hallad las matrices de cambio $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ y $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$.

4.28 En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio

$$S = \{(a,2a,b,a+b) \colon a,b \in \mathbb{R}\}$$

Probad que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son dos bases de S.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,2,1,3),(0,0,1,1)\} \\ \mathcal{D} &= \{(2,4,1,3),(1,2,2,3)\} \end{aligned}$$

Hallad las matrices de cambio $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ y $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Capítulo 5
Determinantes

5.1 Introducción

El determinante es un número que se asocia a una matriz cuadrada y que tiene mucha utilidad; la propiedad más interesante de esta herramienta es la caracterización de las matrices invertibles cuyo determinante, veremos, es no nulo. También se usan para calcular la inversa, para resolver sistemas (regla de Cramer), etc aunque insistimos una vez más, que el método de Gauss para calcular la inversa o resolver sistemas es preferible al uso de determinantes pues tiene menos coste computacional.

El determinante se puede definir de varias formas; una de ellas es definirlo con axiomas pero, en este curso, vamos a hacerlo usando un método inductivo: para una matriz de tamaño $n \times n$ el determinante viene en función de los determinantes de ciertas matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, los cuales, a su vez, vendrán en función de determinantes de $(n-2) \times (n-2)$, etc. Basta dar de forma explícita el determinante de una matriz 1×1 y la regla para expresar un determinante $n \times n$ en función de los de orden $(n-1) \times (n-1)$.

Objetivos:

- *Conocer los determinantes y sus propiedades*
- *Destreza en el cálculo de determinantes*
- *Aplicación de los determinantes en el cálculo de la matriz inversa y resolución de sistemas (regla de Cramer).*

Dada una matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ se denota por $M_{ij}(A)$ a la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ resultante de suprimir en A la fila $-i-$ y la columna $-j-$. Para una matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} M_{11}(A) &= [a_{22}], & M_{12}(A) &= [a_{21}], \\ M_{21}(A) &= [a_{12}], & M_{22}(A) &= [a_{11}]. \end{aligned}$$

Definamos ahora el determinante

Definición 5.1: Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$, se llama **determinante** de A, y se escribe $\det A$, al número definido de la siguiente forma

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det M(1,j)(A), & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Para abreviar la notación vamos a definir

- **menor**(i,j) de $A = \det M_{ij}(A)$
- **cofactor**(i,j) de $A : \mathcal{C}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det M_{ij}(A)$.

Con esta notación el determinante queda

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathcal{C}_{1j}(A).$$

Como se observa, se multiplica cada elemento de la primera fila por su cofactor (posteriormente veremos que se puede utilizar cualquier fila o columna.)

Se suele poner también $|A|$ en lugar de $\det A$. Para $n = 1$ es $\det[a_{11} = a_{11}]$. De acuerdo a la definición, el alumno puede comprobar que el determinate, para órdenes 2 y 3 se calcula de la siguiente forma

(a) $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(b) $n = 3$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Para $n = 3$ la fórmula anterior se llama regla de **Sarrus** y se puede memorizar de forma gráfica. Para $n > 3$ no tenemos reglas prácticas, pero por la definición, se pueden reducir al cálculo de órdenes menores hasta llegar a $n = 3$ (ó $n = 2$ que ya sabemos calcular. La definición dada en función de los cofactores de la primera fila es la extensión de **Laplace** pero se puede hacer con cualquier fila o columna.

Teorema 5.1: Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Entonces

(a) $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{C}_{ij}(A)$, para i=1,2, ...n.

(b) $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathcal{C}_{ij}(A)$, para j=1,2, ...n.

Por la extensión de Laplace, para calcular un determinante de orden n hay que calcular n determinantes de orden $n-1$, lo que se simplifica eligiendo la fila o columna que más ceros tenga.

Ejemplo 5.1:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= (-3)(-1)^{5+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (-3)(-1)^{5+3}(-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (-6) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Éste último se calcula por Sarrus y vale -28 por lo que el inicial vale $(-6)(-28) = 168$. En el primer paso hemos desarrollado por la quinta fila y después por la segunda columna. Por desgracia, no todas las matrices tienen tantos ceros, pero gracias a las propiedades de la siguiente sección, podremos conseguirlos a base de operaciones elementales con lo que no habrá determinante que se nos resista.

5.2 Propiedades de los determinantes

Teorema 5.2: Si una fila o columna de la matriz cuadrada A es nula, entonces $\det A = 0$.

Para demostrarlo basta desarrollar el determinante por los cofactores de la línea que sea nula.

Teorema 5.3: $\det A = \det A^T$ para cualquier matriz cuadrada.

La demostración no es tan fácil como la anterior; se deja para el alumno como actividad complementaria. Como consecuencia de ésta propiedad, cualquier otra que valga para filas, valdrá para columnas y viceversa.

Teorema 5.4: Si $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Si A es diagonal, es también triangular (de ambos tipos), luego su determinante es el producto de los elementos diagonales; en particular el determinante de la matriz identidad es $\det I = 1$. El siguiente teorema extiende el anterior a matrices triangulares *por bloques*

Teorema 5.5: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} B & D \\ O_{q\times p} & C \end{bmatrix}.$$

donde B es de tamaño $p\times p$ y C de tamaño $q\times q$, entonces $\det A = \det B \det C$.

Veamos el siguiente

Ejemplo 5.2:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \cdot 14 = 154.$$

Teorema 5.6: Si la matriz cuadrada A tiene dos filas (columnas) iguales, entonces $\det A = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Hagámoslo para $n = 3$ lo que dará una idea para demostralo en general (a cargo del alumno).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = a\,\mathcal{C}_{11} - b\,\mathcal{C}_{12} + c\,\mathcal{C}_{13}.$$

Hemos desarrollado por la primera fila. Si lo hacemos por la segunda

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -a\,\mathcal{C}_{21} + b\,\mathcal{C}_{22} - c\,\mathcal{C}_{23}.$$

Los siguientes cofactores son iguales $\mathcal{C}_{11} = \mathcal{C}_{21}$, $\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{22}$, y $\mathcal{C}_{13} = \mathcal{C}_{23}$ por lo que

$$a\,\mathcal{C}_{11} - b\,\mathcal{C}_{12} + c\,\mathcal{C}_{13} = -a\,\mathcal{C}_{11} + b\,\mathcal{C}_{12} - c\,\mathcal{C}_{13}$$

es decir, $\det A = -\det A$ lo que implica que $\det A = 0$. □

Si desarrollamos una línea por los cofactores de otra paralela distinta, el resultado es 0; concretamente

Teorema 5.7: Si A es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces

- Para filas
$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk}\mathcal{C}_{qk} = \begin{cases} \det A, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

- Para columnas
$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp}\mathcal{C}_{kq} = \begin{cases} \det A, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

El teorema anterior nos será útil para calcular la inversa con determinantes.

En general $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ como pone de manifiesto el ejemplo siguiente

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 44.$$

Sin embargo

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 + 14 = 25.$$

El siguiente teorema nos dice cuando se descompone un determinante en suma de otros dos

Teorema 5.8:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El anterior teorema dice que si la primera fila se descompone en suma de dos y los demás elementos no varían, el determinante primero es suma de los otros dos; es válido también para cualquier fila o columna.

Veamos ahora el determinante del producto de una matriz elemental por otra A.

Teorema 5.9: Si A es de tamaño $n \times n$, entonces

(a) $\det(E_i(\alpha)A) = \alpha \det A$, para $i = 1, 2, \ldots n$,

(b) $\det(E_{ij}(\beta)A) = \det A, \forall i, j$,

(c) $\det(P_{ij}A) = -\det A, \forall i, j$.

DEMOSTRACIÓN:

(a) La matriz $E_i(\alpha)A$ es la misma A con la fila i-ésima multiplicada por α; desarrollando por la fila $-i-$ tenemos

$$\det\left(E_i(\alpha)A\right) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})\mathcal{C}_{ik}(E_{ik}(\alpha)A).$$

Pero los cofactores ik de la matriz $E_{ik}(\alpha)A$ son los mismos que los de A por lo que

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})\mathcal{C}_{ik}(E_{ik}(\alpha)A) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathcal{C}_{ik}(A) = \alpha\det A.$$

(b) La $i-$ésima fila de $E_{ij}(\beta)A$ es la suma de la $i-$ésima fila de A y la $j-$ésima fila de A multiplicada por β; aplicando el teorema 5.8 se tiene

$$\det\left(E_{ij}(\beta)A\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+\beta a_{jk})\mathcal{C}_{ik}(E_{ij}(\beta)A).$$

Los cofactores ik de la matriz $E_{ij}(\beta)A$ son los mismos que los de A por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+\beta a_{jk})\mathcal{C}_{ik}(E_{ij}(\beta)A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathcal{C}_{ik}(A) + \beta\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathcal{C}_{ik}(A)\\ &= \det A + \beta 0 = \det A.\end{aligned}$$

Hemos aplicado que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathcal{C}_{ik}(A) = 0$ pues se ha desarrollado la fila j por los cofactores de la fila i.

(c) Se deja como ejercicio.

□

Dado que $\det A = \det A^T$ y con el teorema anterior se tienen los siguientes resultados

(a) Si una fila (columna) se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número

(b) Si a una fila(columna) se le suma un múltiplo de otra fila (columna), el determinante no varía.

(c) Si enuna matriz se intercambian dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.

La propiedad b nos permite hacer ceros (aplicando operaciones elementales de tipo 3), sin que varíe el determinante. Eligiendo fila o columna, anulamos todos los elementos (salvo uno) y reducimos el determinante de orden n a un único determinante de orden $n-1$.

Ejemplo 5.3: *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hagamos ceros en la primera columna ($F_3 + 4F_1$ y $F_5 + 2F_1$)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -22 & -16 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -9 & -8 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -3 & -5 \\ -22 & -16 & -16 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ -10 & -9 & -8 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -4 & 9 & -3 & -5 \\ -22 & 32 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & 15 & -8 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ -22 & 32 & -9 \\ -10 & 15 & -6 \end{vmatrix} \\
&= -(-100) = 100.
\end{aligned}$$

Al final hemos aplicado la regla de Sarrus.

Es fácil deducir el determinante de las matrices elementales

Teorema 5.10: Las matrices elementales tienen determinante no nulo, concretamente

(a) $\det E_i(\alpha) = \alpha$

(b) $\det E_{ij}(\beta) = 1$

(c) $\det P_{ij} = -1$.

Se deducen también los siguientes teoremas

Teorema 5.11: Si la matriz cuadrada A tiene una fila (columna) que es combinación lineal de otras, entonces $\det A = 0$.

Teorema 5.12: Si las filas (columnas) de A son linealmente dependientes, entonces $\det A = 0$.

El siguiente teorema caracteriza las matrices invertibles

Teorema 5.13: Una matriz A es invertible si, y sólo si, $\det A \neq 0$.

Demostración: Si R es la forma escalonada reducida de A, entonces existen matrices elementales tales que

$$R = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

Aplicando los teoremas 5.9 y 5.10 se tiene que

$$\det R = \det E_k \det E_{k-1} \cdots \det E_1 \det A.$$

Como las matrices elementales tienen un determinante no nulo, entonces $\det R \neq 0$ si, y sólo si, $\det A \neq 0$ y sabemos que A es invertible si, y sólo si,

$R = I_n$ cuyo determinante es 1. □

Ya estamos en condiciones de calcular cualquier determinante. Vamos a ver ahora que el determinante del producto es el producto de los determinantes

Teorema 5.14 (Binet-Cauchy): Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Se deduce del teorema anterior que $\det(AB) = \det(BA)$

Teorema 5.15: Si la matriz A es invertible, entonces $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

DEMOSTRACIÓN: Como $AA^{-1} = I$ y aplicando el teorema de Binet-Cauchy $\det A \det A^{-1} = \det I = 1$ de donde se deduce el resultado. □

5.3 Inversa y regla de Cramer

Dos de las aplicaciones de los determinantes son la de calcular la matriz inversa y la resolución de un sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con matriz A invertible (aunque insistimos que el método de Gauss es más eficiente para ambos cálculos).

Definición 5.2: Sea A una matriz cuadrada. Se llama **matriz adjunta**, que se denota por $\operatorname{Adj} A$, a la matriz cuyo elemento (i, j) es el cofactor (j, i) de A.

Para obtener $\operatorname{Adj} A$ por tanto, hay que sustituir cada elemento de A por su cofactor y despues trasponer la matriz (o viceversa); veamos un ejemplo

Ejemplo 5.4: *Hallad la adjunta de*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Los cofactores son

$$\mathcal{C}_{11}(A) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \mathcal{C}_{12}(A) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\mathcal{C}_{13}(A) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad \mathcal{C}_{21}(A) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathcal{C}_{22}(A) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \mathcal{C}_{23}(A) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\mathcal{C}_{31}(A) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad \mathcal{C}_{32}(A) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\mathcal{C}_{33}(A) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

La matriz adjunta es

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los cálculos de pueden acelerar de la siguiente forma

- Se traspone A.
- Se sustituye cada elemento por su menor.
- Se cambian alternadamente los signos, empezando por $(1,1)$ que no se cambia, el $(1,2)$ sí se cambia, etc. Se puede asimilar a un tablero de ajedrez donde las casillas blancas representan cambio y las negras no cambio:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 5.4 el determinate de A es $\det A = 5$. Calculemos el producto $A\,\mathrm{Adj}(A)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I.$$

En este ejemplo el producto de la matriz por su adjunta es la matriz identidad multiplicada por 5 que es el determinante; ésto no es casualidad, el siguiente teorema lo confirma y nos da la forma de calcular la inversa

Teorema 5.16: Sea A una matriz cuadrada, entonces

$$A\,\mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A)A = (\det A)I_n.$$

Si además A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Adj}(A).$$

La inversa de la matriz del ejemplo 5.4 es

$$\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para terminar el capítulo veamos la celebérrima regla de Cramer para resolver sistemas con matriz de coeficientes invertible, (por lo que es compatible determinado).

Teorema 5.17 (Regla de Cramer): Sea $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineal con A invertible. Sea, para cada $i = 1, 2, \ldots n$, B_i la matriz resultado de sustituir en A la $i-$ésima columna por $\boldsymbol{b}$. Entonces la solución única está dada por

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

Ejemplo 5.5: *Resolved el sistema por la regla de Cramer*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 3z & = & 9 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & 8 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 20 \end{array}\right\}$$

Empezamos calculando el determinante de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -63.$$

La solución es: para hallar x,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 20 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-63} = \frac{-63}{-63} = 1.$$

Para calcular y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 9 & 3 \\ -3 & 8 & 1 \\ 2 & 20 & 4 \end{vmatrix}}{-63} = \frac{-126}{-63} = 2.$$

Y por fin hallamos z

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 9 \\ -3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 20 \end{vmatrix}}{-63} = \frac{-189}{-63} = 3.$$

5.4 Problemas resueltos

5.1 Pruébese que ninguna matriz cuadrada de orden impar puede satisfacer la ecuación $A^2 = -I$ ¿Y de orden par? ¿Cuánto vale, en este caso, su determinante?

Solución: Si el orden de A es un número n impar y $A^2 = -I$ se deduce que $(\det A)^2 = \det(-I) = (-1)^n = -1$ lo que es imposible. En cambio si n es par entonces $(\det A)^2 = 1$ y por tanto $\det A = \pm 1$.

5.2 Sea P una matriz invertible verificando que $P^{-1} = P^T$.

(a) Demuéstrese que $(I + P)^T = P^T(I + P)$.

(b) Pruébese que $\det P = \pm 1$.

(c) Si $\det P = -1$, pruébese que $I + P$ no es invertible.

Solución: Partimos de la igualdad $PP^T = P^T P = I$

(a) $(I+P)^T = I^T + P^T = I + P^T$; por otro lado $P^T(I+P) = P^T + P^T P = P^T + I$, luego son iguales

(b) $\det PP^T = (\det P)^2$ y como $PP^T = I$ entonces $\det P = \pm 1$

(c) Aplicaremos el apartado (a).

$$\det(I+P) = \det(I+P)^T = \det P^T \det(I+P) = -\det(I+P)$$

de donde se deduce que $\det(I+P) = 0$ y, por tanto, la matriz $I+P$ no es invertible.

5.3 Calculad el siguiente determinante (llamado de Vandermonde)

$$v = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Solución: Restamos a cada columna (excepto la primera) la anterior multiplicada por a

$$v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab & b^3-ab^2 \\ 1 & c-a & c^2-ac & c^3-ac^2 \\ 1 & d-a & d^2-ad & d^3-ad^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila

$$v = \begin{vmatrix} b-a & b^2-ab & b^3-ab^2 \\ c-a & c^2-ac & c^3-ac^2 \\ d-a & d^2-ad & d^3-ad^2 \end{vmatrix}$$

Sacando factores

$$v = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

El determinante que queda es de Vandermonde de orden inferior y se resuelve de la misma forma. La solución es

$$v = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

5.4 Hallad el determinante de orden n

$$d_n = \begin{vmatrix} x+a & x & \cdots & x & x \\ x & x+a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+a & x \\ x & x & \cdots & x & x+a \end{vmatrix}$$

Solución: Si sumamos a la primera fila, todas las demás se obtiene

$$\begin{aligned} d_n &= \begin{vmatrix} nx+a & nx+a & \cdots & nx+a & nx+a \\ x & x+a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+a & x \\ x & x & \cdots & x & x+a \end{vmatrix} \\ &= (nx+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & x+a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+a & x \\ x & x & \cdots & x & x+a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Restamos la primera columna a las demás obteniéndose una matriz triangular

$$d_n = (nx+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & \cdots & a & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a^{n-1}(nx+a)$$

La solución es $d_n = a^{n-1}(nx+a)$.

5.5 Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Probad

(a) $\det A = 0$ si, y sólo si, $\det(\operatorname{Adj}(A)) = 0$.

(b) $\det(\operatorname{Adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$.

Solución: Usaremos la relación $A \cdot \operatorname{Adj} A = (\det A)I$

(a) Supongamos que $\det A = 0$ lo que implica que A no es invertible; tendríamos la igualdad $A \cdot \operatorname{Adj} A = O$ y si $\operatorname{Adj} A$ fuera invertible sería $A = O$ pero en este caso $\operatorname{Adj} A = O$ pues todos los cofactores son nulos. Por tanto si $\det A = 0$ (es decir que A no es invertible) entonces $\det \operatorname{Adj} A = 0$ (la matriz $\operatorname{Adj} A$ tampoco es invertible.

Recíprocamente si $\det \operatorname{Adj} A = 0$ la matriz A no es invertible pues si lo fuera se tendría que $\operatorname{Adj} A = (\det A)A^{-1}$ y entonces sería invertible.

Resumiendo $\det A = 0$ si, y sólo si, $\det(\operatorname{Adj}(A)) = 0$

(b) $\det A \cdot \det \operatorname{Adj} A) = (\det A)^n$. Si $\det A \neq 0$ entonces $\det \operatorname{Adj} A = (\det A)^{n-1}$. Si $\det A = 0$ por el apartado anterior es $\det \operatorname{Adj} A = 0$ y se sigue cumpliendo la igualdad. En cualquier caso es

$$\det(\operatorname{Adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

5.6 Hallad un polinomio de grado 3 que pase por los puntos

$$A(1,1), B(2,17), C(3,65), D(4,163)$$

Solución: Sea el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sustituyendo x por 1,2 3 y 4, se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 17 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 65 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 163 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes es de Vandermonde y su determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12$$

El sistema es compatible determinado. Resolviendo por Cramer se obtiene

$$a = 3, b = -2, c = 1, d = -1$$

El polinomio es $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

5.5 Problemas

5.7 Calculad los determinantes desarrollando por los cofactores de la primera fila

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

5.8 Calculad aplicando la regla de Sarrus los determinantes del problema anterior.

5.9 Calculad los siguentes determinantes de orden 4 ó 5 desarrollando por la fila o columna que más ceros tenga.

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5.10 Calculad por el método que se quiera los siguientes determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

5.11 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$, calculad (aplicando las propiedades oportunas) los siguientes determinantes

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+d & h+e & i+f \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & 2b+a & c \\ d & 2e+d & f \\ g & 2h+g & i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a+2d & h+b+2e & i+c+2f \end{vmatrix}.$

5.12 Calculad el siguiente determinante llamado de Vandermonde (véase el problema 5.3)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

5.13 Calculad la matriz adjunta y, en su caso, la inversa de las siguientes

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} x+a & x \\ x & x+a \end{bmatrix}$

5.14 Probad sin desarrollar el determinante que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+p & p+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

5.15 Si se aplica una operación elemental a una matriz cuadrada A ¿cómo es la inversa respecto de la de A? (veánse los problemas precedentes).

5.16 Hallad los determinantes de orden n

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(b) La matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n definida

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

5.17 Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, tales que $AB + BA = O$. Si n es impar, pruébese que una de las dos no es invertible.

5.18 ¿Cuánto vale $\det(\alpha I_n)$? ¿Y $\det(\alpha A_{n\times n})$?

5.19 Sean A y P matrices cuadradas del mismo tamaño; probad que

$$\det(P^{-1}AP) = \det A$$

5.20 Sean A y B matrices cuadradas invertibles. Pruébese que $\det A = \det B$ si, y sólo si, $A = UB$, con U tal que $\det U = 1$.

5.21 Sea A una matriz cuadrada tal que $AA^T = I$ ¿cuánto vale su determinante?

5.22 Sea A una matriz cuadrada tal que $AA^T = A$ ¿cuánto vale su determinante?

5.23 Sea A una matriz cuadrada tal que $A^7 = O$ ¿es A invertible?

5.24 Si $\det A = a \neq 0$ y $\det B = b \neq 0$, calculad los siguientes números

(a) $\det(AB)$ (b) $\det(3A)$ (c) $\det B^T)$

(d) $\det A^{-2}$ (e) $\det(3A^2)$ (f) $\det(AB^TA^T)$

(g) $\det(B^{-2}AB^3)$ (h) $\det(A+B)$ (i) $\det(-B^{-3})$.

5.25 Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Calculad $\operatorname{Adj}(A)$, A^{-1}, $\operatorname{Adj}(A^{-1})$ y $(\operatorname{Adj}(A))^{-1}$; compararlas. (Ver el problema siguiente).

(b) Calculad $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}(A))$ y compararla con A. (Ver el problema siguiente).

5.26 Sea A una matriz cuadrada de tamaño n invertible. Probad

(a) $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}(A)) = (\det A)^{n-2}A$

(b) $\operatorname{Adj}(A^{-1}) = (\operatorname{Adj}(A))^{-1}$.

5.27 Resolved los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 7y & = & 3 \\ 2x & + & 6y & = & 1 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 7 \\ -3x_1 & & & + & x_3 & = & -8 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}\right\}$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -7 \end{array}\right\}$$

Capítulo 6
Valores y vectores propios

El problemas de la diagonalización de matrices cuadradas, que veremos en el próximo capítulo, se basa en el cálculo de ciertos escalares y vectores llamados propios, que abordamos en esta sección. Es uno de los problemas fundamentales del Álgebra lineal y tiene mucha aplicación en otros campos. El buscador *Google* usa estos valores y vectores para optimizar la presentación de la páginas; a fin de cuentas, cualquier buscador encuentra páginas que contengan un determinado texto, pero si, como suele pasar, hay millones de aquellas ¿en qué orden se presentan?

Objetivos:

- *Entender los conceptos de valor y vector propio de una matriz cuadrada*
- *Saber calcular los valores y vectores propios de las matrices propuestas en los ejercicios.*

Todas las matrices con las que vamos a trabajar son cuadradas aunque no se diga de forma explícita.

6.1 Valores y vectores propios de una matriz cuadrada

Definición 6.1: Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor **propio** de la matriz cuadrada A si $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ para algún vector no nulo $\boldsymbol{u}$ que se llama vector **propio** asociado al valor propio λ.

Sabemos que la matriz A define una transformación lineal T_A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Cuando la imagen de un vector no nulo $T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ es un múltiplo del mismo ($= \lambda\boldsymbol{u}$), el vector es vector propio y el escalar (λ) es un valor propio.

Nótese que el vector nulo no es propio por definición, pero el escalar sí puede ser nulo. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 6.1: *Puesto que se cumple la siguiente igualdad*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el número 2 *es un valor propio de la matriz y el vector* $(0, 1, 1)$ *es un vector propio asociado a él.*

Ejemplo 6.2: *Puesto que se cumple la siguiente igualdad*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el número 0 *es un valor propio de la matriz y el vector* $(1, -1, 0)$ *es un vector propio asociado a él.*

Nos preguntamos como se pueden encontrar los valores propios (si es que existen) y, en caso afirmativo, cómo encontrar todos los vectores asociados a él. La igualdad $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$ es equivalente a $(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. ésta última representa un sistema de ecuaciones homogéneo con matriz de coeficientes $A_\lambda I$ y, puesto que buscamos soluciones no nulas, la matriz debe ser no invertible (véase el teorema 3.6) lo que equivale a que su determinante es nulo. El determinante sale en función de λ y es un polinomio de grado n que se llama polinomio característico que denotaremoas por $q_A(\lambda)$; su término de mayor grado es $\pm\lambda^n$, el siguiente (salvo el signo) es la traza de la matriz (que es la suma de la diagonal principal) y el término independiente es el determinante; exactamente es

$$q_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \operatorname{tr}(A) + \cdots + \det(A).$$

Los pasos a seguir para calcular los valores propios son

(a) Formar la matriz $A - \lambda I$ (basta restar λ a los elementos diagonales.)

(b) Calcular el determinante, con lo que se obtiene el polinomio característico $q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

(c) Resolver la ecuación $q_A(\lambda) = 0$.

Es sabido que todo polinomio de grado n tiene n raices complejas o no; nosotros sólo buscamos las raices (valores propios) reales. En la práctica, para polinomios de grado 3 o mayor, usaremos la regla de Ruffini.

Ejemplo 6.3: *Calcular los valores propios de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda = \lambda(-\lambda^2+4\lambda-4) = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Las soluciones son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$; en este ejemplo nos ha sido fácil resolver la ecuación y no ha hecho falta recurrir a Ruffini; el valor 2 se dice que es doble (aparece dos veces) y a esto lo llamamos **multiplicidad algebraica** que es la multiplicidad que tiene como raíz del polinomio (si en la factorización del polinomio aparece $(\lambda - \alpha)^k$, la raíz α tiene de multiplicidad algebraica k).

En otras matrices aparecen raices complejas:

Ejemplo 6.4: *Calcular los valores propios de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

que no tiene raices reales.

6.2 Subespacio propio

Obtenidos los valores reales ¿cómo se obtienen los vectores propios asociados? Del sistema $(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, se deduce que los vectores propios son las soluciones del sistema (excluido el nulo). Todos ellos junto al nulo forman el conjunto $E_A(\lambda)$ que es subespacio, precisamente es

$$E_A(\lambda) = \mathrm{Nul}(A - \lambda I).$$

Se llama **subespacio propio** asociado a λ y, a su dimensión, se le llama **multiplicidad geométrica** de λ.

Ejemplo 6.5: *Hállense los vectores propios de la matriz del ejemplo 6.3.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como tenemos dos valores propios (uno simple y otro doble) tenemos que resolver 2 sistemas de ecuaciones.

(a) Subespacio $E_A(0)$: sustituimos λ por 0 en $A-\lambda I$ y resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $(\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1, -2, 1)$. Una base la forma el vector $(1, -2, 1)$ y la multiplicidad geométrica del valor $\lambda = 0$ es 1.

(b) Subespacio $E_A(2)$: sustituimos λ por 2 en $A-\lambda I$ y resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $(0, \alpha, \alpha) = \alpha(0, 1, 1)$. Una base la forma el vector $(0, 1, 1)$ y la multiplicidad geométrica del valor $\lambda = 2$ es 1.

Conviene hacer (para el futuro) una tabla que recoja los valores y sus multiplicidades; para el ejemplo anterior

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
0	1	1
2	2	1

En el caso de una matriz triangular, sus valores propios son los elementos diagonales como lo prueba el siguiente

Teorema 6.1: Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada triangular, entonces los valores propios de A son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

DEMOSTRACIÓN:

$$q_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

de donde se deduce el resultado. □

Obsérvese que la multiplicidad algebráica de ellos es el número de veces que aparezcan en la diagonal.

Teorema de Cayley-Hamilton

Si formamos un polinomio matricial, sustituyendo en el característico, λ por A, entonces el resultado es la matriz nula; ésto es el teorema siguiente

Teorema 6.2 (Cayley-Hamilton): Si A es una matriz cuadrada, entonces $q_(A) = O$.

Comprobémoslo con un ejemplo

Ejemplo 6.6: *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, *el polinomio característico es* $\lambda^2 - 2\lambda - 3$. *Sustituyendo*

$$A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando éste hecho, podemos hallar la inversa de A en función de sus potencias

$$A^2 - 2A - 3I = O \to A(A - 2I) = 3I \to A\left(\frac{1}{3}(A - 2I)\right) = I$$

por tanto la inversa es $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I))$.

6.3 Problemas resueltos

6.1 Probad que 0 es valor propio de A si, y sólo si, A no es invertible.

Solución: Los valores propios son los que hacen que la matriz $A - \lambda I$ no sea invertible.

- Si 0 es un valor propio de A la matriz $A - 0 \cdot I = A$ no es invertible
- Si A no es invertible, entonces $A - 0 \cdot I$ no es invertible por lo que 0 es valor propio.

6.2 Probad que A y A^T tienen los mismos valores propios ¿Tienen los mismos vectores propios?

Solución:

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$

Las matrices A y A^T tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos valores propios. Sin embargo NO tienen los mismos vectores propios como lo prueba el siguiente ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Los valores propios de A y de A^T son 1 y 2 (compruébese!); un vector propio de A para $\lambda = 1$ es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ como se comprueba fácilmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo no es vector propio de A^T pues

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6.3 Sea A una matriz cuadrada.

(a) Probad que si los elementos de las filas de A suman la misma cantidad r, entonces r es valor propio.

(b) Probad que si los elementos de las columnas de A suman la misma cantidad r, entonces r es valor propio.

Solución:

(a) Multipliquemos A por el vector $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = r\boldsymbol{u}$$

Se deduce que r es valor propio y $\boldsymbol{u}$ vector propio.

(b) La traspuesta de A cumple que sus filas suman r, luego r es valor propio de A^T y por tanto de A según el ptroblema anterior.

6.4 Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuéstrese que si λ es un valor propio de A, entonces $\lambda \in \{0, 1\}$.

Solución: $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ para algún $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Multiplicamos por A

$$A^2\boldsymbol{u} = A(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda A\boldsymbol{u} = \lambda^2\boldsymbol{u}$$

Como $A^2 = A$ es $A^2\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. Se deduce que $\lambda^2\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ y como $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ debe ser $\lambda^2 = \lambda$; de aquí que λ sea 0 ó 1.

6.4 Problemas

6.5 Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -6 & 10 & -6 \\ -5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Probad que los siguientes vectores son propios de A y decid a que valor propio están asociados.

(a) (1,1,0) (b) (-1,0,1) (c) (0,1,1)

(d) (-3,6,5) (e) (3,5,2) (f) (-4,-3,1)

6.6 Comprobad que $\boldsymbol{u}$ es vector propio de A y obtened el valor propio correspondiente

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6.7 Comprobad que λ es valor propio de A y obtened el subespacio propio correspondiente.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 2$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1$ (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 4$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1$ (f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 2$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3$ (h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3$

6.8 Hallad los valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.9 Hallad los valores propios, una base de cada subespacio propio y las multiplicidades algebráicas y geométricas de dichos valores para las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ (h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ (j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(k) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (l) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(m) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (n) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6.10 Comprobad para las matrices del problema 6.9 que la suma de los valores propios es la traza de la matriz y el producto de ellos es el determinante.

6.11 Compruébese lo afirmado en el problema 6.3 para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.12 Sea A una matriz cuadrada y $\boldsymbol{u}$ un vector propio asociado al valor propio λ. Probar que

(a) $\alpha\lambda$ es valor propio de αA con vector propio $\boldsymbol{u}$.

(b) Si A es invertible, entonces $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1} con vector propio $\boldsymbol{u}$.

(c) λ^k es valor propio de A^k con vector propio $\boldsymbol{u}$.

(d) $1+\lambda$ es valor propio de $I+A$ con vector propio $\boldsymbol{u}$.

6.13 Sea λ un valor propio de A. Dado el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k,$$

se considera la matriz

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_kA^k.$$

Probad que $p(\lambda)$ es valor propio de $p(A)$.

6.14 Considérese el polinomio

$$p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

(a) Pruébese que el polinomio característico de A es $p(x)$.

(b) Si λ es un valor propio de A, entonces $\boldsymbol{v} = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$ es un vector propio de A.

(c) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector propio asociado al valor λ, pruébese que $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$ siendo $\boldsymbol{v} = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$ y α un escalar que hay que determinar.

(d) Dedúzcase que la multiplicidad geométrica de λ es 1.

6.15 Sean A y B matrices de tamaños respectivos $m \times m$ y $n \times n$. Consideremos la matriz por bloques

$$C = \begin{bmatrix} A & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B \end{bmatrix}$$

(a) Probad que $q_C(\lambda) = q_A(\lambda) \cdot q_B(\lambda)$

(b) Si $\boldsymbol{a}$ es un vector propio de A y $\boldsymbol{b}$ es un vector propio de B, entonces los vectores

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{o}_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{o}_m \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

son vectores propios de C.

(c) ¿Qué forma tienen los vectores de C?

6.16 Verificar el teorema de Cayley-Hamilton para las matrices

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6.17 Utilizar el teorema de Cayley-Hamilton para calcular A^2, A^3, A^4, A^{-1} y A^{-2} para las matrices del problema 6.16

Capítulo 7

Diagonalización de matrices

Dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango, pero NO los mismos valores propios; sin embargo hay matrices que tienen los mismos valopres propios, y otras propiedades en común (rango, determinante, traza); se dicen semejantes. En este capítulo se define la semejanza de matrices, analizando las propiedades comunes y se profundiza en el estudio de las matrices semejantes a una diagonal, llamadas diagonalizables.

Objetivos:

- *Entender el concepto de semejanza de matrices.*
- *Saber diagonalizar, si es posible, las matrices con valores propios reales.*

7.1 Matrices semejantes

Definición 7.1: Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Se dice que A es *semejante* (no se confunda el término semejanza con el de equivalencia) a B, y se escribe $A \sim B$ si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Es fácil probar el siguiente teorema

Teorema 7.1: Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo tamaño. Se cumple

(a) $A \sim A$.

(b) Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$.

(c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Demostración: Hagamos la segunda

$$A \sim B \rightarrow B = P^{-1}AP \rightarrow A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ.$$

siendo $Q = P^{-1}$ y por tanto invertible. $\square$

Algunas de las propiedades que comparten las matrices semejantes entre si las recoge el siguiente

Teorema 7.2: Si $A \sim B$ entonces

(a) A y B tienen el mismo polinomio característico.

(b) A y B tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

(c) $\det A = \det B$.

(d) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

(e) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

Demostración:

- (a)

$$\begin{aligned} q_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P \\ &= \det(A - \lambda I) = q_A(\lambda). \end{aligned}$$

- (e) Para obtener B se multiplica A por dos matrices invertibles (y por tanto producto de elementales); cuando se multiplica por la izquierda (por P^{-1}) equivale a hacer en A ciertas operaciones elementales por filas; cuando se hace por la derecha (multiplicar por P) equivale a hacer en A ciertas operaciones elementales por columnas; por tanto $A \equiv B$ (aunque no por filas) y en consecuencia tienen el mismo rango.

□

Dos matrices pueden tener las cinco propiedades anteriores y no ser semejantes como prueba el siguiente:

Ejemplo 7.1: *Sean las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tienen el mismo polinomio característico, los mismos valores propios, el mismo determinante, la misma traza y el mismo rango pero NO son semejantes pues si existiera la matriz P sería $B = P^{-1}AP$, o lo que es lo mismo, $A = PBP^{-1}$. Como la matriz B es la identidad queda $A = PBP^{-1} = PP^{-1} = I$ lo que constituye una contradicción pues A no es la matriz identidad.

Sin embargo el teorema 7.2 puede ser útil para probar que dos matrices NO son semejantes. Por ejemplo las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

aunque tienen el mismo determinante y rango, no tienen la misma traza, así que no pueden ser semejantes.

7.2 Matrices diagonalizables

Las matrices mas sencillas son las diagonales; cuando una matriz A es semejante a una diagonal D, en muchos contextos se puede trabajar con D en lugar de hacerlo con A; en estos casos se dice que la matriz A es diagonalizable.

Definición 7.2: Una matriz cuadrada es **diagonalizable** cuando $A \sim D$ para alguna matriz diagonal D.

Obsérvese que la igualdad $P^{-1}AP = D$ equivale a $AP = PD$; ésta última es más operativa para comprobar la primera igualdad pues se evita el cálculo de la inversa.

Ejemplo 7.2: *Sean las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que P es invertible y

$$AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = PD$$

luego $P^{-1}AP = D$. La matriz es diagonalizable pues es semejante a la matriz diagonal D.

Vamos a ver ahora la relación de todo esto con los valores y vectores propios y decidir cuándo una matriz es o no diagonalizable.

Teorema 7.3: Una matriz cuadrada A es diagonalizable si, y sólo si, $\mathbb{R}^n$ admite una base formada por vectores propios de A.

DEMOSTRACIÓN: Si A, de tamaño $n \times n$ es diagonalizable existe una matriz invertible (expresada en columnas)

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

y una matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

que cumplen $AP = PD$. Es decir

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{u}_1 & \lambda_2\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

de lo que se deduce que $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i\boldsymbol{u}_i$ para $i = 1, 2, \ldots n$.
Dado que los vectores $\boldsymbol{u}_i$ no son nulos (si alguno lo fuera, P no sería invertible), cada valor λ_i es propio y $\boldsymbol{u}_i$ es vector propio asociado al mismo y, por

el teorema 4.10 el conjunto $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios.

Recíprocamente supongamos que $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A. Encontramos entonces escalares λ_i tales que

$$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots n.$$

Formamos con los escalares una matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

y la matriz P cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{u}_i$

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

Se cumple $AP = PD$ y, por tanto, A es diagonalizable. □

El teorema anterior nos dice que la matriz diagonal está formada por valores propios y las columnas de la matriz P son vectores propios; si no tenemos n valores propios reales (distintos o no), la matriz no es diagonalizable y, si obtenemos n valores propios reales, hemos de conseguir n vectores propios linealmente independientes para formar la matriz P.

Teorema 7.4: Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ son valores propios distintos dos a dos y que $\boldsymbol{u}_i$ es vector propio asociado a λ_i. Entonces los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN: Se hará por inducción sobre el número p de vectores. Para $p = 1$ es evidente porque un vector propio es un conjunto L.I. Supongamos ahora se cumple para cualquier conjunto de $p = k$ vectores y lo probaremos para $k + 1$ vectores.

Sean $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}$ vectores propios correspondientes a valores propios distintos dos a dos y, supongamos que son L.D (encontraremos una contradicción); sabemos que al menos un vector es C.L. de los demás; uno de ellos es el vector $\boldsymbol{u}_{k+1}$ ¿por qué? Así que

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k. \tag{7.1}$$

Multiplicando por A ambos miembros obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} &= A\boldsymbol{u}_{k+1}\\ &= A(\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{u}_k)\\ &= \alpha_1 A\boldsymbol{u}_1+\alpha_2 A\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k A\boldsymbol{u}_k\\ &= \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\boldsymbol{u}_k. \qquad (7.2)\end{aligned}$$

Multiplicando la expresión 7.1 por λ_{k+1} obtenemos

$$\lambda_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} = \alpha_1\lambda_{k+1}\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\lambda_{k+1}\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_{k+1}\boldsymbol{u}_k \qquad (7.3)$$

Restando las expresiones 7.3 y 7.2 se obtiene

$$\mathbf{0} = \alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\boldsymbol{u}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\boldsymbol{u}_k$$

y como por hipótesis, los vectores $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ son L.I debe ser

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1}) = \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1}) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1}) = 0$$

y como los valores propios son distintos dos a dos, necesariamente $\alpha_i = 0$ para $i = 1,2,\ldots,k$. Pero entonces de la expresión 7.1 se deduce que $\boldsymbol{u}_{k+1} = \mathbf{0}$ en contradicción con que es un vector propio. □

Ejemplo 7.3: *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

- Polinomio característico.

$$\begin{aligned} q_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+2+2-(3-\lambda)-2(2-\lambda)-2(2-\lambda)\\ &= -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5.\end{aligned}$$

  Valores propios: se resuelve la ecuación $-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5 = 0$. Las posibles raices enteras son divisores del término independiente que es 5; probaremos el 1 aplicando la regla de Ruffini:

	-1	7	-11	5
1		-1	6	-5
	-1	6	-5	0

El polinomio queda factorizado parcialmente

$$q_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 5).$$

El factor de segundo grado se descompone con la fórmula conocida y queda

$$q_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

Hay dos valores propios distintos, uno doble (1) y otro simple (5).

- Subespacios propios

  (a) $E_A(1)$. Se resuelve el sistema homogéneo $(A - I) = \mathbf{0}$

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  La solución es

  $$(-2\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-2, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1).$$

  Es decir $E_A(1) = \mathrm{Env}\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

  (b) $E_A(5)$. Se resuelve el sistema homogéneo $(A - 5I) = \mathbf{0}$

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  La solución es $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1)$.
  Es decir $E_A(5) = \mathrm{Env}\{(1, 1, 1)\}$.

- Formamos la siguiente tabla

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
1	2	2
5	1	1

- Tenemos 3 vectores propios y son independientes (hay que comprobarlo); luego forman una base de $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, la matriz A es diagonalizable; las matrices P y D pueden ser (no son únicas)

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

  Se puede comprobar que $AP = PD$.

En el ejemplo precedente, los tres vectores han salido L.I; el teorema 7.4 afirma que los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son L.I, pero en el ejemplo anterior dos de los vectores corresponden al mismo valor y, aunque ellos son L.I no hay garantía de que en otro ejemplo los tres vectores sean L.I. Sin embargo, esto es verdad como lo demuestra el siguiente teorema

Teorema 7.5: Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ los valores propios distinto de A. Si $\mathcal{U}_i$ es una base del subespacio propio $E_A(\lambda_i)$, para $i = 1, 2, \dots, p$, entonces los vectores del conjunto

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_p$$

son linealmente independientes.

Por tanto reuniendo todas las bases de todos los subespacios propios se obtienen vectores L.I; si son exactamente n la matriz es diagonalizable y, si son menos, la matriz no es diagonalizable. Veamos ahora otro teorema que afirma que la multiplicidad geométrica no es mayor que la algebráica.

Teorema 7.6: Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Si λ_0 es un valor propio con multiplicidad algebráica m_0, entonces

$$1 \leq \dim E_A(\lambda) \leq m_0.$$

Demostración: Sea $p = \dim E_A(\lambda_0)$ la multiplicidad geométrica y se demostrará que $p \leq m_0$. Consideremos una base de $E_A(\lambda_0)$ formada por p

vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_p\}$. Formamos una matriz Q invertible cuyas p primeras columnas son los vectores anteriores

$$Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_p & \boldsymbol{v}_{p+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$$

Expresemos Q y su inversa en bloques

$$Q = \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

Los tamaños son: $Q_{n\times n}, U_{n\times p}, V_{n\times n-p}, C_{p\times n}, D_{n-p\times n}$.

Como las columnas de U son vectores propios de A tenemos que $AU = \lambda_0 U$. También

$$\begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_{n-p} \end{bmatrix} = I_n = Q^{-1}Q = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CU & CV \\ DU & DV \end{bmatrix}$$

Obtenemos que $CU = I_p$, $CV = O$, $DU = O$ y $DV = I_{n-p}$. Por tanto

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAU & CAV \\ DAU & DAV \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_0 CU & CAV \\ \lambda_0 DU & DAV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_p & CAV \\ O & DAV \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\det(Q^{-1}AQ - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p \det(DAV - \lambda I)$$

La última expresión es el polinomio característico de $Q^{-1}AQ$ que es el mismo que el de la matriz A. Por tanto el polinomio de A es

$$q_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^p \det(DAV - \lambda I)$$

lo que prueba que λ_0 es un valor propio con multiplicidad algebraica de, al menos, p con lo que $p \leq m_0$ $\square$

Con ayuda del teorema 7.6 ya podemos decidir, en función de las multiplicidades, si una matriz es o no diagonalizable:

Teorema 7.7: Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ los valores propios distintos con multiplicidades algebráicas respectivas $m_1, m_2, \dots, m_p$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(a) A es diagonalizable.

(b) $n = \dim E_A(\lambda_1) + \dim E_A(\lambda_2) + \cdots + \dim E_A(\lambda_p)$.

(c) $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ y $\dim E_A(\lambda_i) = m_i$ para $i = 1, 2, \dots p$.

Es decir, si las multiplicidades geométricas suman n la matriz es diagonalizable; en este caso las multiplicidades algebráicas coinciden con las geméricas. Con la tabla de multiplicidades se decide sin dificultad si la matriz es diagonalizable. Veamos un ejemplo de matriz no diagonalizable:

Ejemplo 7.4: *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- El polinomio característico es

$$q_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

- Como el valor -1 es simple, sin hacer cálculos deducimos que la multiplicidad geométrica es 1 (pues no puede ser mayor). Para el valor doble 1, tenemos que resolver el sistema $(A-I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  La solución es $(2\alpha, -\alpha, \alpha) = \alpha(2, -1, 1)$.

- La tabla queda de la siguiente manera

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
-1	1	1
1	2	1

  Como las multiplicidades geométricas no suman 3 la matriz no es diagonalizable.

Método de las potencias

El cálculo de los valores propios usando el polinomio característico no es práctico pues no se pueden resolver las ecuaciones algebraicas de grado 5 o mayor (teorema de Abel). Se usan métodos numéricos (semejantes a los iterativos para sistemas de ecuaciones) que calculan aproximaciones de los valore propios; uno de los más conocidos es el método de las potencias.

Supongamos que A es diagonalizable y tiene un valor propio estrictamente dominante (es mayor en valor absoluto que el resto). O sea, los valores son

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_1| \cdots \geq |\lambda_n|$$

Los correspondientes vectores propios $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$. Un vector cualquier se puede expresar

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

Entonces

$$A^k\boldsymbol{x} = c_1(\lambda_1)^k\boldsymbol{u}_1 + c_2(\lambda_2)^k\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n(\lambda_n)^k\boldsymbol{u}_n, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Supongamos ahora que $c_1 \neq 0$ y dividamos por $(\lambda_1)^k$

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k}A^k\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{u}_n, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Haciendo tender $k \to \infty$ las fracciones $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}$ para $i > 1$ tienden a cero por lo que

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k}A^k\boldsymbol{x} \to c_1\boldsymbol{u}_1, \quad \text{cuando } k \to \infty$$

Para k grande, $A^k\boldsymbol{x} \approx (\lambda_1)^k c_1\boldsymbol{u}_1$; es decir las iteraciones sucesivas se aproximan a un vector propio múltiplo de $\boldsymbol{u}$ aunque, desgraciadamente las entradas de $A^k\boldsymbol{x}$ pueden crecer mucho como se verá en el siguiente ejemplo, pero posteriormente salvaremos este inconveniente con un sistema de escalado.

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ y comencemos con el vector $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Los valores propios (véase el ejemplo 7.5) son 1 y 2 siendo el segundo estrictamente dominante siendo un vector propio $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Los cálculos son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}} &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_2 = A^2\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_3 = A^3\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -14 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -21 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En la siguiente tabla se observan más iteraciones

k	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{x}_k$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -14 \\ -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -34 \\ -21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -74 \\ -45 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -154 \\ -93 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -314 \\ -189 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -634 \\ -381 \end{bmatrix}$

Como se observa las entradas de $A^k\boldsymbol{x}$ crecen demasiado; el vector $A^7\boldsymbol{x}$ es casi un vector propio; dividiendo por -126 se obtiene $\begin{bmatrix} 5'0317 \\ 3'0238 \end{bmatrix}$ que es una aproximación del vector propio $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ antes citado.

Para evitar que que obtengan vectores con componentes muy grandes se usa una técnica de escalado; dividamos cada vector obtenido por su mayor componente en valor absoluto de modo que el vector tendrá 1 como mayor entrada (en valor absoluto)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ dividimos por } \mu_1 = -4 \to \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'75 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0'75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3'5 \\ 2'25 \end{bmatrix}, \mu_2 = 3'5, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'64286 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_3 &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0'64286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2'4286 \\ 1'5 \end{bmatrix}, \mu_3 = 2'4286, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'61765 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Otras iteraciones son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0'60811 \end{bmatrix}, \quad \mu_4 = 2'1765 \\
\boldsymbol{x}_5 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0'60390 \end{bmatrix}, \quad \mu_5 = 2'0811 \\
\boldsymbol{x}_6 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0'60191 \end{bmatrix}, \quad \mu_6 = 2'0390 \\
\boldsymbol{x}_7 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0'60095 \end{bmatrix}, \quad \mu_7 = 2'0191
\end{aligned}$$

La sucesión se aproxima al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0'6 \end{bmatrix}$ que es propio (multiplicado por 5 se obtiene $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$) y la sucesión $\{\mu_k\}$ se aproxima al valor propio dominante que es 2. Veamos el algoritmo

Algoritmo para estimar el valor propio dominante

- Seleccionar un vector inicial $\boldsymbol{x}_0$ cuya entrada mayor sea 1
- Para $k = 0, 1, 2, \ldots$
  (a) Calcular $A\boldsymbol{x}_k$
  (b) Sea μ_k la mayor componente en valor absoluto de $A\boldsymbol{x}_k$
  (c) Calcular $\boldsymbol{x}_{k+1} = (1/\mu_k)A\boldsymbol{x}_k$
- Para la mayoría de las elecciones de $\boldsymbol{x}_0$ la sucesión $\{\mu_k\}$ se aproxima al valor propio dominante y la sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}$ se aproxima a un vector propio

El algoritmo funciona incluso para matrices no diagonalizables y, con adaptaciones, sirve para calcular todos los valores propios, no sólo el estrictamente dominante.

7.3 Aplicaciones

Potencias de matrices diagonalizables

En el capítulo 2 aprendimos a calcular potencias de una matriz cuadrada pero para pocos casos; se calculaban las primeras potencias hasta descubrir una ley de formación, pero en la mayoría de los casos esta no era evidente. Gracias a la diagonalización vamos a ver una técnica para calcular cualquier potencia de una matriz diagonalizable.

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ diagonalizable. Sabemos que existen dos matrices, una P invertible y otra D diagonal, tales que $P^{-1}AP = D$ lo que equivale a $A = PDP^{-1}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\overbrace{\cdots}^{k}(PDP^{-1}) \\
&= PD(P^{-1}P)(D)(P^{-1}P)D\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} \\
&= PD\overbrace{\cdots}^{k}DP^{-1} \\
&= PD^kP^{-1}
\end{aligned}
$$

Elevar una matriz diagonal a una potencia es trivial

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Con esto, el problema de la potencia está resuelto. Veamos un

Ejemplo 7.5: *Calcular A^k para la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Las primeras potencias son

$$A^2 = \begin{bmatrix} -14 & 30 \\ -9 & 19 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -34 & 70 \\ -21 & 43 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} -74 & 150 \\ -45 & 91 \end{bmatrix}$$

No hay evidencia de formación de las potencias en función de k. Apliquemos la técnica anterior

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 10 \\ -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

Los subespacios propios son

$$E_A(1) = \mathrm{Env}\{(2,1)\}, \qquad E_A(2) = \mathrm{Env}\{(5,3)\}$$

Tenemos las matrices

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Efectuando los cálculos

$$A^k = \begin{bmatrix} 6 - 5\cdot 2^k & -10 + 10\cdot 2^k \\ 3 - 3\cdot 2^k & -5 + 6\cdot 2^k \end{bmatrix}.$$

Relaciones de recurrencia lineal

Consideremos la sucesión $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ donde dados los dos primeros términos 0 y 1, los demás, a partir del tercero, son la suma de los dos anteriores. Esta sucesión, llamada de *Fibonacci* es un caso particular de lo que se llama relaciones de recurrencia lineal (en este caso de segundo orden). La sucesión de Fibonacci se puede definir de la siguiente manera

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2$$

En general las relaciones de recurrencia lineal se definen como sigue

Definición 7.3: Sea $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ una sucesión definida

(a) $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots x_{k-1} = a_{k-1}$, donde $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$ son escalares constantes

(b) Para $n \geq k, \quad x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$, donde $c_0, c_1, \ldots c_{k-1}$ son escalares constantes

Si $c_k \neq 0$ la ecuación (b) se llama relación de recurrencia lineal de orden k y las igualdades de (a) se conocen como las condiciones iniciales de la recurrencia.

Veamos un ejemplo y volveremos después con los números de Fibonacci.

Consideremos la recurrencia definida: $x_1 = 1, x_2 = 5$ y $x_n = 5_{n-1} - 6x_{n-2}$. Los cinco primeros términos son $1, 5, 19, 65, 211$. Para hallar un término concreto, pongamos x_{100}, tendríamos que usar la recurrencia 98 veces resultando el cálculo bastante tedioso; sería mejor disponer de una fórmula que nos diese de forma explícita el término x_n en función de n, que es lo que vamos a hacer a continuación.

Consideremos los vectores $\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ para $x \geq 2$. De esta forma tenemos

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 19 \end{bmatrix}, \cdots$$

Si consideramos la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, se observa que

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}_{n-1}$$

Entonces, la relación entre los términos se puede expresar

$$\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{x}_{n-1} = A^2\boldsymbol{x}_{n-2} = \cdots = A^{n-2}\boldsymbol{x}_2 = A^{n-2}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la potencia $n-2$ de A tendremos una fórmula explícita para $\boldsymbol{x}_n$ y por tanto para el término x_n y lo haremos usando la técnica de diagonalizar la matriz A. El polinomio característico es

$$q_A(\lambda) = (5-\lambda)(-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Los valores propios son 2 y 3, ambos simples y los subespacios propios son

$$E_A(2) = \mathrm{Env}\{(2,1)\}\,, \quad E_A(2) = \mathrm{Env}\{(3,1)\}\,.$$

Así tenemos dos matrices

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que satisfacen $P^{-1}AP = D$ o lo que es lo mismo $A = PDP^{-1}$. Entonces

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto se obtiene

$$A^k = \begin{bmatrix} -2^{k+1} + 3^{k+1} & 6\cdot 2^k - 6\cdot 3^k \\ -2^k + 3^k & 3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$A^{n-2} = \begin{bmatrix} -2^{n-1} + 3^{n-1} & 6\cdot 2^{n-2} - 6\cdot 3^{n-2} \\ -2^{n-2} + 3^{n-2} & 3\cdot 2^{n-2} - 2\cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

Y por último

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n-1} + 3^{n-1} & 6\cdot 2^{n-2} - 6\cdot 3^{n-2} \\ -2^{n-2} + 3^{n-2} & 3\cdot 2^{n-2} - 2\cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deducimos de aqui

$$\begin{aligned} x_n &= -5\cdot 2^{n-1} + 5\cdot 3^{n-1} + 6\cdot 2^{n-2} - 6\cdot 3^{n-2} \\ &= -5\cdot 2^{n-1} + 5\cdot 3^{n-1} + 3\cdot 2^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1} \\ &= 3\cdot 3^{n-1} - 2\cdot 2^{n-1} \\ &= 3^n - 2^n \end{aligned}$$

Hagamos algunas observaciones

(a) El polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Si expresamos la recurrencia en la forma $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2}$ observamos que los coeficientes $1, -5, 6$ son los mismos que los del polinomio.

(b) La solución, $(3^n - 2^n)$, viene como combinación lineal de potencias de los valores propios. Esto es verdad si los valores propios son distintos y, sabiendo esto, podríamos haber ahorrado trabajo en el cálculo de x_n poniendo: $x_n = a3^n + b2^n$ y calculando a y b con las condiciones iniciales

$$n = 1, x_1 = 1 = a \cdot 3^1 + b \cdot 2^1 \to 3a + 2b = 1$$
$$n = 2, x_2 = 5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 2^2 \to 9a + 4b = 5$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = 1$ y $b = -1$ y, por tanto,

$$x_n = 3^n - 2^n.$$

Resolvamos ahora la sucesión de Fibonnaci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Puesta en la forma $f_n - f_{n-1} - f_{n-2}$, el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda - 1$. Los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

El término general será

$$f_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Imponiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 0 &= f_0 = a + b \\ 1 &= f_1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = 1/\sqrt{5}$, $b = -1/\sqrt{5}$. La solución es

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Es sorprendente que el término general venga en función del número irracional $\sqrt{5}$, siendo enteros todos los elementos de la sucesión. La fórmula anterior se conoce como *fórmula de Binet.*

El método usado vale para cualquier relación de recurrencia de orden dos cuyos valores propios sean distintos. Para el caso de un valor propio doble tenemos el siguiente

Teorema 7.8: Dada la recurrencia $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, sean λ_1 y λ_2 las raices del polinomio $\lambda^2 - a\lambda - b$ (valores propios). Entonces

(a) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$

(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $x_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$

En cualquier caso, los escalares α y β se calculan con las condiciones iniciales.

Ejemplo 7.6: *Resolved la recurrencia* $x_0 = 1$, $x_1 = 6$, $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$

El polinomio es $\lambda^2 - 6\lambda + 9$ cuya única raiz es 3 (doble). El término general es $x_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$; las condiciones iniciales nos permiten hallar α y β.

$$1 = x_0 = \alpha 3^0 + \beta \cdot 0 \cdot 3^0 \to 1 = \alpha$$
$$6 = x_1 = \alpha 3^1 + \beta \cdot 1 \cdot 3^1 \to 6 = 3\alpha + 3\beta$$

Resolviendo se obtiene $\alpha = \beta = 1$ por lo que

$$x_n = 3^n + n3^3 = (1+n)3^n.$$

Estos resultados se pueden extender a relaciones de recurrencia de orden superior según el siguiente:

Teorema 7.9: Sea $x_n = a_{m-1}x_{n-1} + a_{m-2}x_{n-2} + \cdots + a_0 x_{n-m}$ una relación de recurrencia de orden m y supongamos que el polinomio característico asociado

$$\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - a_o$$

se factoriza como

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

donde $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & c_{11}\lambda_1^n + c_{12}n\lambda_1^n + c_{13}n^2\lambda_1^n + \cdots + c_{1m_1}n^{m_1-1}\lambda_1^n \\ & + & c_{21}\lambda_2^n + c_{22}n\lambda_2^n + c_{23}n^2\lambda_2^n + \cdots + c_{2m_2}n^{m_2-1}\lambda_2^n \\ & + & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & + & c_{k1}\lambda_k^n + c_{k2}n\lambda_k^n + c_{k3}n^2\lambda_k^n + \cdots + c_{km_k}n^{m_k-1}\lambda_k^n \end{array}$$

Los m escalares $\{c_{ij}\}$ que aparecen como coeficientes de las potencias de los valores propios se calculan con las condiciones iniciales.

Ejemplo 7.7: *Resolved la recurrencia siguiente y comprobad la solución hallando 5 términos más.*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2; \quad x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \text{ para } n \geq 3.$$

El polinomio es $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$ que se factoriza como $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Según el teorema anterior

$$x_n = a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n = a + (b + cn)2^n.$$

Imponiendo las condiciones iniciales

(a) $n = 0, x_0 = 0 = a + b$

(b) $n = 1, x_1 = 1 = a + (b + c)2$

(c) $n = 2, x_2 = 2 = a + (b + 2c)4$

Se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 2c & = & 1 \\ a & + & 4b & + & 8c & = & 2 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $a = -2$, $b = 2$, $c = -1/2$. Por tanto:

$$x_n = -2 + \left(2 - \frac{n}{2}\right) 2^n = -2 + (4 - n)2^{n-1}.$$

Los primeros términos son: $0, 1, 2, 2, -2, -18, -66, -194$ que corroboran la fórmula conseguida.

7.4 Problemas resueltos

7.1 Probad que si A es diagonalizable e invertible, también lo es A^{-1}.

Solución: Existen matrices P invertible y D diagonal tales que $P^{-1}AP = D$. Como A es invertible (y, por tanto, también D)

$$D^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

Se deduce que A^{-1} es diagonalizable y además los vectores propios son los mismos y los valores propios son los inversos de los de A.

7.2 Una matriz de llama *nilpotente* si $A^k = O$ para algún natural $k \geq 1$.

(a) Probad que una matriz cuadrada triangular con elementos diagonales nulos es nilpotente.

(b) El valor 0 es el único valor propio de una matriz nilpotente.

Solución:

(a) Veámoslo para una matriz A de tamaño 4×4. El alumno deberá demostrarlo para una matriz cualquiera.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elevando al cuadrado se anula una diagonal (paralela a la principal)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el cálculo

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cuarta potencia es la matriz nula.

(b) Una matriz nilpotente no es invertible (¿por qué?) por lo que 0 es un valor propio (véase el problema 6.3). Sea λ un valor propio de A; sabemos que $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ para algún vector no nulo $\boldsymbol{u}$.

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \rightarrow A^k\boldsymbol{u} = \lambda^k\boldsymbol{u}$$

Como $A^k = O$ tenemos que $\mathbf{0} = \lambda^k\boldsymbol{u}$ y como $\boldsymbol{u}$ no es nulo, debe serlo el escalar. Así que $\lambda^k = 0$ y por tanto $\lambda = 0$

7.3 Sean A y B cuadradas del mismo tamaño con A invertible.

(a) Probad que AB es semejante a BA

(b) Las matrices AB y BA tienen, por el apartado anterior, los mismos valores propios. Dad un ejemplo para probar que no tiene necesariamente los mismos vectores propios

(c) Probad que si $\boldsymbol{u}$ es un vector propio de AB correspondiente al valor λ entonces $B\boldsymbol{u}$ es un vector propio de BA correspondiente al mismo valor λ.

Solución:

(a) Se desprende de la identidad $A^{-1}(AB)A = BA$

(b) Se deja para el alumno

(c) Sea $AB\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. Llamando $y = B\boldsymbol{u}$ se tiene

$$BA\boldsymbol{y} = BA(B\boldsymbol{u}) = B(AB\boldsymbol{u}) = B(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda(B\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{y}.$$

7.4 En la página 183 se calculó el valor propio dominante (2) y un vector propio correspondiente de la matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

(a) ¿Cuáles son los valore propios de la matriz $A - 2I$?

(b) Usad el método de las potencias para hallar el otro valor propio (que es 1)

Solución:

(a) Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda - \alpha$ es un valor propio de $A - \alpha I$. En efecto

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \to (A - \alpha I)\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{u}$$

Como se ve eñ vector $\boldsymbol{u}$ es propio para ambas matrices

(b) Si A tiene dos valors propios λ_1 y λ_2, según el apartado anterior la matriz $A - 2I$ tiene como valores propios $\lambda_1 - 2$ y $\lambda_2 - 2$; en nuestro caso conocido $\lambda_1 = 2$ los valor propios son 0 y $\lambda_2 - 2$ y, este último es estrictamente dominante por lo que podemos aplicar el método de las potencias a la matriz $A - 2I = A = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ Calculando

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \mu_1 = -6, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0'5 \end{bmatrix}, \mu_2 = -1, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0'5 \end{bmatrix}, \mu_3 = -1, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix}$$

Vemos que $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3 = \cdots$; en este caso se obtiene la solución exacta en 2 iteraciones. Hemos obtenido -1 como valor propio de $A - 2I$ y, por tanto, el valor propio de A es $-1 + 2 = 1$; además, un vector propio es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0'5 \end{bmatrix}$ o, si se prefiere $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7.5 Si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ probad que los valores propios de la matriz $(A - \alpha I)^{-1}$ son

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha}, \frac{1}{\lambda_2 - \alpha}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n - \alpha}.$$

Solución: Hagámoslo para un valor genérico λ. Supongamos que $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{u}$$

multiplicando por la inversa de $(A - \alpha I)$

$$\boldsymbol{u} = (A - \alpha I)^{-1}(\lambda - \alpha)\boldsymbol{u}$$

$$\rightarrow (A - \alpha I)^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\lambda - \alpha}\boldsymbol{u}$$

Lo que prueba que $\dfrac{1}{\lambda - \alpha}$ es un valor propio de $(A - \alpha I)^{-1}$ siendo $\boldsymbol{u}$ un vector propio.

7.6 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Diagonalizar la matriz A.

(b) Calcular A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución:

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Loa valores propios son 1 y 4, ambos simples.

- Para $\lambda = 1$ tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El subespacio propio correspondiente es $E_A(1) = \text{Env}\{(1, 1)\}$

Para $\lambda = 4$ tenemos

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El subespacio propio correspondiente es $E_A(4) = \text{Env}\{(5/2, 1)\} = \text{Env}\{(5, 2)\}$.

A es diagonalizable y se tiene la igualdad

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Despejando A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Entonces

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Haciendo los cálculos se tiene finalmente

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 + 5 \cdot 4^k & 5 - 5 \cdot 4^k \\ -2 + 2 \cdot 4^k & 5 - 2 \cdot 4^k \end{bmatrix}.$$

7.5 Problemas

7.7 Suponiendo que $A \sim B$, probad que

(a) $A^T \sim B^T$.

(b) $\alpha A \sim \alpha B$ para cualquier escalar α.

(c) $A^k \sim B^k$ para cualquier entero $k \geq 1$.

(d) $A^{-1} \sim B^{-1}$ (para invertibles).

7.8 En cada caso, probad que las matrices A y B no son semejantes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

7.9 Dadas A y P, comprobad que las matrices A y $P^{-1}AP$ (que son semejantes) tienen el mismo rango, el mismo determinante, el mismo polinomio característico y la misma traza.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7.10 En cada caso, averiguad si la matriz A es diagonalizable. En caso afirmativo hallad una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(k) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (l) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(m) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (n) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7.11 Calculad A^k para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{bmatrix}.$$

7.12 Calculad una matriz cuyo cuadrado sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 72 \\ -9 & -23 \end{bmatrix}$$

(Sugerencia: si $A = P^{-1}DP$, entonces $A^2 = P^{-1}D^2P$.)

7.13 Calculad una matriz cuyo cubo sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -21 & 0 \\ 14 & -22 & 0 \\ -49 & 49 & -8 \end{bmatrix}.$$

7.14 En relación con el problema 6.15 ¿cómo se puede diagonalizar la matriz C suponiendo que son diagonalizables A y B?

$$C = \begin{bmatrix} A & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B \end{bmatrix}$$

7.15 Diagonalizar la matriz siguiente, usando el problema anterior

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7.16 Resolved las siguientes recurrencias

(a) $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$

(b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$

(c) $x_0 = 1$, $x_1 = 6$, $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$

(d) $x_0 = 4$, $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} - \dfrac{1}{4}x_{n-2}$

(e) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$

7.17 Calculad una aproximación del valor propio dominante y el correspondiente vector propio para las siguientes matrices usando el método de las potencias

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$