Tema 6: Diagonalización de matrices

MATEMÁTICAS 1
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CURSO 2016-2017

Recuerda

RESUMEN PARA CÁLCULAR VALORES y VECTORES PROPIOS de una matriz A

1º Para obtener los **valores propios (λ) y su multiplicidad algebraica:**

Formar la matriz **$(A - \lambda I)$**

Resolver la ecuación del polinomio característico: $\mathbf{q_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0}$

2º Para obtener los **vectores propios de cada** valor propio o autovalor λ:

Resolver el SL: $\mathbf{Ax = \lambda x}$

Cada SL se convierte en un SH, así: $\mathbf{(A - \lambda I)x = 0}$

- Si es **compatible determinado** con solución no trivial, el vector solución será el vector propio asociado al valor propio.
- Si es **compatible indeterminado**, habrá infinitos vectores propios para ese λ. Para expresarlos usaremos la solución en forma vectorial del SH. Por ejemplo, si la solución fuese: $x = [x1, x2, x3]= [\alpha - \beta, \alpha, \beta]$, podemos expresarla como $x = \alpha [1, 1, 0] + \beta [-1, 0, 1]$.

  Como todos estos vectores x forman el **subespacio propio asociado** a ese valor propio, podemos decir que: $E_A(\lambda) = \{Env\{(1,1,0), (-1,0,1)\}\}$,

  por lo que la **base** de este subespacio será $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$.

Cuando se tiene que trabajar con grandes matrices es mucho más fácil si están escritas lo más "sencillas" posible...

Las **matrices diagonales** son fáciles de manejar y permiten almacenamiento más económico.

Dada una matriz **A (nxn)** se trata de ver si existe otra matriz **semejante** a ella que sea **diagonal.**

Def. Dos matrices **A** y **B** cuadradas **nxn** son **semejantes (A ~ B)** cuando existe una matriz cuadrada **P** de orden **n** tal que: $\mathbf{A=PBP^{-1}}$ (P matriz de paso)

También lo podemos expresar así: $\mathbf{B=P^{-1}AP}$

O así: $\mathbf{PB = AP}$

Si **B** es una matriz **diagonal** se dice que **A es diagonalizable**

EJEMPLO-1

Comprobar que las matrices A y D son semejantes

A y D son semejantes si existe P / $A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1º comprobamos que P es invertible

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2º $A = PDP^{-1}$

$D = P^{-1}A\,P$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

También podríamos haberlo demostrado sin calcular P^{-1}, comprobando que $AP = PD$.

En este caso podemos afirmar que A y D son semejantes, y puesto que D es una matriz diagonal, también podemos afirmar que A es diagonalizable

Teorema 7.2: Si $A \sim B$ entonces

(a) A y B tienen el mismo polinomio característico.

(b) A y B tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

(c) $\det A = \det B$.

(d) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. La **traza** de una matriz = suma de su diagonal = suma de sus valores propios

(e) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. El **rango** de una matriz es el nº de filas o columnas linealmente independientes

***OJO:* Dos matrices pueden cumplir los 5 postulados y no ser semejantes, pero si no cumplen alguna no serán semejantes**

Comprobar si A y D cumplen las consecuencias del teorema: 7.2

EJEMPLO-2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Veamos que las matrices A y D, que ya hemos demostrado en el ejemplo 1 que eran semejantes, cumplen los 5 postulados:

a) $q_A(\lambda) = q_D(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$

b) $\lambda_A = \lambda_D$ $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$

c) $\det(A)=\det(D) = 6$

d) $tr(A)=tr(D) = 6$

e) $rg(A)= rg(D) = 3$

EJEMPLO-3

Comprobar si A y B si son semejantes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$q_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3$

$q_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ polinomios diferentes luego A y B **no** son semejantes

(*) Lo podríamos haber demostrado sin necesidad de calcular sus polinomios característicos, ya que la traza de A (que es 1) es distinta a la traza de B (que es 2).

EJEMPLO-4

Comprobar si A y B cumplen las consecuencias del teorema: 7.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) A y B tienen el mismo polinomio característico $q_A(\lambda) = q_B(\lambda) \rightarrow$ OK

b) A y B tienen los mismos valores propios, $\lambda_A = \lambda_B \rightarrow$ OK

c) det(A)=det(B) = 1

d) tr(A)=tr(B) = 2

d) rg(A)= rg(B) = 2

¿ A y B son semejantes ?

NO, pues si lo fueran existiría **P/ B =$\mathbf{P^{-1}}$ A P**

Pero como **B = I** ⇨ **I =$\mathbf{P^{-1}}$AP** ⇨ **A = P $\mathbf{P^{-1}}$ = I**

Contradicción, pues **A no es I**

OJO: *Dos matrices pueden cumplir los 5 postulados del teorema 7.2 y no ser semejantes.*

Comprobar si A es diagonalizable

EJEMPLO-5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hay que probar que P es invertible y que $D=P^{-1}AP \Leftrightarrow AP = PD$

Hay que probar, que **$A=PDP^{-1}$** , o lo que es lo mismo, que **AP=PD**

$$AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = PD$$

Para **diagonalizar** una matriz A nxn tenemos que **calcular** las matrices P y D nxn

Recuerda: Una matriz **A nxn** es **diagonalizable** si existe una matriz **P** nxn, invertible, tal que, $\mathbf{A = PDP^{-1}}$, donde D es una matriz diagonal
Y por tanto: $\mathbf{D = P^{-1}AP}$

Construcción de la **matriz diagonal D**:

Paso 1. Calcular los **valores propios** de A

Paso 2. Cada **elemento de la diagonal** de **D** es cada **autovalor** (valor propio) de A.

Construcción de la **matriz de paso P**:

Paso 3. Calcular los **vectores propios** de A (deben ser **n** y formar una **base**)

Paso 4. Cada **columna de P** es cada **autovector** (vector propio) asociado a cada autovalor.

Recuerda que para que **P sea invertible** todas las **columnas de P deben ser LI.**

Diagonalizar, si es posible, la matriz A

EJEMPLO-6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1º Calcular los valores propios

$$\mathbf{q_A(\lambda) = 0}$$

$$\mathbf{q_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2} \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = -2 \text{ (doble)}$$

ma(1) = 1

ma(-2) = 2

2º Construir D: valores propios de A en la diagonal de D (mismo orden que los valores propios en P)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO-6

Diagonalizar, si es posible, la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3º Calcular los vectores propios: 3 vectores que deben ser LI

Para λ**1 = 1** Se resuelve (A-1I)x=0

rref(A-I)= [1,0,-1;0,1,1;0,0,0]; x1=x3; x2=-x3; x3 $\Rightarrow$ x = x3(1,-1,1)

$E_A(\lambda 1)$ = Env{v1=(1, -1, 1)} $\Rightarrow$ **base** para **λ1** $\Rightarrow$ **v1=[1,-1,1]^T** ➡ mg(1) = 1

Para λ**2 = -2** Se resuelve (A-(-2)I)x=0

rref(A-(-2)I)= [1,1,1;0,0,0;0,0,0];
x1=-x2-x3; x2; x3 $\Rightarrow$ x = x2(-1,1,0) + x3(-1,0,1)

$E_A(\lambda 2)$ = Env{v2=(-1, 1,0),v3=(-1,0,1)} $\Rightarrow$ **base** para **λ2, v2 y v3** ➡ mg(-2) = 2

Se puede comprobar que v1, v2, v3 son LI

EJEMPLO-6

Diagonalizar, si es posible, la matriz A

4º Construir P: vectores propios de A en columnas de P (en cualquier orden)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifica que P es invertible

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este paso se debe verificar que AP = PD (o $A=PDP^{-1}$)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices diagonizables

Sea **A nxn**, entonces:

a) A es **diagonalizable** **sii** tiene **n autovectores LI.**

b) Si **A** tiene todos sus **autovalores distintos → A es diagonalizable** *(al revés no tiene por qué, es decir, puede ser diagonizable aun teniendo autovolores repetidos)*

c) A es **diagonalizab**le **sii** para cada λ se verifica que **ma(**λ**) = mg(**λ**)**

d) A es **diagonalizable** **sii** $\mathbf{R^n}$ admite una **base** formada por vectores propios de A, o lo que es lo mismo, si sus vectores propios son linealmente independientes.

Recuerda

ma(λ**) :** Multiplicidad algebraica de λ, es la cantidad de veces que λ es raíz del polinomio.

mg(λ**) :** Multiplicidad geométrica de λ, es igual a la dimensión del subespacio propio asociado a λ, es decir, a la dimensión de $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$

Estudiar si A es diagonalizable teniendo en cuenta sus valores propios

EJEMPLO-7

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como A es triangular superior => Los valores propios son los elementos de la diagonal

$\lambda 1 = 5$ $\quad\quad$ $\lambda 2 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda 3 = -2$

Como A es 3x3 y tiene 3 valores propios distintos => A es diagonalizable

Estudiar si A es diagonalizable estudiando las multiplicidades de los valores propios

EJEMPLO-8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1º Calcular los valores propios

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5.$$

Autovalores λ_1 =1 (doble), λ_2 = 5

ma(λ_1)=2 ma(λ_2)=1

EJEMPLO-8

Estudiar si A es diagonalizable estudiando las multiplicidades de los valores propios

2º Calcular los vectores propios

Para λ**1 = 1** Se resuelve (A-1I)x=0

rref(A-I)= [1,2,1;0,0,0;0,0,0];
x1=-2x2-x3; x2; x3 $\Rightarrow$ x=[x1,x2,x3] = x2(-2,1,0) + x3(-1,0,1)

$$E_A(1) = \text{Env}\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}.$$

mg(λ_1)=2

Para λ**2 = 5** Se resuelve (A-5I)x=0

rref(A-5I)= [1,0,-1;0,1,-1;0,0,0];
x1=x3; x2=x3; x3 $\Rightarrow$ x=[x1,x2,x3] = x3(1,1,1)

$$E_A(5) = \text{Env}\{(1,1,1)\}$$

mg(λ_2)=1

EJEMPLO-8

Estudiar si A es diagonalizable estudiando las multilplicidades de los valores propios

*c) A es **diagonalizab**le sii para cada λ se verifica que **ma(λ) = mg(λ)***

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
1	2	2
5	1	1

A es **diagonalizab**le ya que se cumple el postulado c)

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $\mathbf{A} \sim \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$

EJEMPLO-9

Estudiar si A es diagonalizable estudiando las multiplicidades de los valores propios

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad q_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

Para λ**1 = -1** Se resuelve (A+I)x=0

rref(A+I)= [1,0,0;0,1,1;0,0,0]; x1=0; x2=-x3; x3 $\Rightarrow$ x= x3(0,-1,1)

E_A(λ1) = Env{v1=(0, -1, 1)} $\Rightarrow$ **base** para **λ1** $\Rightarrow$ **$v1=[0,-1,1]^T$**

Para λ**2 = 1** Se resuelve (A-I)x=0

rref(A-I)= [1,0,-2;0,1,1;0,0,0]; x1=2x3; x2=-x3; x3 $\Rightarrow$ x= x3(2,-1,1)

E_A(λ2) = Env{v2=(2, -1, 1)} $\Rightarrow$ **base** para **λ2** $\Rightarrow$ **$v2=[2,-1,1]^T$**

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
-1	1	1
1	2	1

Como las multiplicidades no coinciden

$\Downarrow$

A no es diagonalizable

MATRIZ DIAGONALIZABLE EN FUNCIÓN DE LAS MULTIPLICIDADES

Teorema 7.7: Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los valores propios distintos con multiplicidades algebráicas respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(a) A es diagonalizable.

(b) $n = \dim E_A(\lambda_1) + \dim E_A(\lambda_2) + \cdots + \dim E_A(\lambda_p)$.

(c) $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ y $\dim E_A(\lambda_i) = m_i$ para $i = 1, 2, \ldots p$.

Es decir, si la suma de las multiplicidades geométricas es igual a la suma de las multiplicidades algebraicas, la matriz es diagonalizable.

En el ejemplo anterior, las sumas de las multiplicidades no coinciden ya que:

$$\mathrm{ma}(\lambda_1) + \mathrm{ma}(\lambda_2) = 3$$
$$\mathrm{mg}(\lambda_1) + \mathrm{mg}(\lambda_2) = 2$$

4 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

(d) (0'5 puntos) Dad dos matrices P y D (diagonal), tales que $P^{-1}AP = D$

Solución

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$