Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Alumno:	
Grupo teoría:	(de a)
DNI:	
Email:	
Aula del examen:	

Convocatoria de Junio. Teoría. Matemáticas II, 30-05-2013

Instrucciones generales:

Debes rellenar el cuadro de datos personales (nombre y apellidos, grupo, DNI, etc.) indicando tu grupo de teoría.

Debes usar únicamente las hojas grapadas que se os facilitan y no podrá haber por encima de la mesa, ni circulando cerca, ningún otro papel durante el examen. Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par), y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar). Dispones además de una hoja adicional para más operaciones, hacer referencias, aclaraciones, etc.

Pregunta	Máx	Nota
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	1	
6	1	
	Total:	

1. **(2 puntos)** Se quiere construir un centro deportivo que se compone de una sección rectangular con dos semicírculos a cada extremo. Si el perímetro debe ser el de una pista de atletismo de 500 metros. Encontrar las dimensiones que harán el área lo mayor posible.

Perímetro = $\pi r + x + x + \pi r = 500 \rightarrow \pi r + x = 250 \rightarrow x = 250 - \pi r$

Área(r, x) = $\pi r^2 + x\, 2\, r \rightarrow$ Área (r) = $\pi r^2 + 2\, r\, (250 - \pi r) = \pi r^2 + 500\, r - 2\pi r^2 = 500\, r - \pi r^2$

Área'(r) = $500 - 2\pi r = 0 \rightarrow 500 = 2\pi r \rightarrow$ $\mathbf{r} = 500/2\pi = \mathbf{250/\pi}$

$\mathbf{x} = 250 - \pi\, 250/\pi = \mathbf{0}$

Área''(r) = $-2\pi < 0 \rightarrow$ luego es un máximo.

2. **(2 puntos)** Dados los puntos de control p_0=(-1,0), p_1=(1,1), p_2=(2,3). Calcula la curva de Bezier mediante:
    a. La fórmula recursiva de De Casteljau
    b. Polinomios de Bernstein.

a.

(-1,0)		
	(1-t)(-1,0)+t(1,1)	
(1,1)		(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))
	(1-t)(1,1)+t(2,3)	
(2,3)		

(X(t),Y(t))=(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))=
=$(1-2t+t^2)$(-1,0)+$(t-t^2)$(1,1)+$(t-t^2)$(1,1)+t^2(2,3)

$X(t)=-(1-2t+t^2)+2(t-t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$

$Y(t)=2(t-t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$

b.

$(X(t),Y(t)) =(1-t)^2(-1,0)+2(1-t)t(1,1)+t^2(2,3)=(1-2t+t^2)(-1,0)+(2t-2t^2)(1,1)+t^2(2,3)$

$X(t)= -(1-2t+t^2)+(2t-2t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$

$Y(t)=(2t-2t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$

3. **(2 puntos)** Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 e^x$, el eje x y las rectas x=0 y x=1.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\int x\, e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = 1 & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\left[x e^x - \int e^x dx\right] = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x]_0^1 = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2 = 0{,}718281$$

Se ha utilizado dos veces la integración por partes.

4. **(2 puntos)** Aplicar el método de Newton para obtener una estimación del punto de corte de las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ con dos dígitos decimales exactos. Tomar 1 como valor inicial y redondea las operaciones a 8 decimales.

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{h}$
1	1	-0,04030231	1,84147098	-0,02188593
2	1,02188593	0,00012792	1,85309354	0,00006903
3	1,0218169			
4				
5				
6				
7				

$f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x)$ $\quad f'(x) = 1 + \mathrm{sen}(x)$

El resultado es una magnitud de orden unidades. Si exigimos exactitud a las décimas y centésimas (dos dígitos decimales exactos) tenemos tres dígitos exactos, por lo que: $m = 0$ $\quad n = 3$

Según el teorema de la acotación: $\Delta \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = 0{,}5^{-2} = 0{,}005$

Sólo se necesitan dos iteraciones porque $\mathrm{h} <= 0{,}005$ garantiza 3 dígitos exactos.

El resultado es 1,0218169 con los dígitos exactos 1,02

5. **(1 puntos)** De una función **f(x)** se conocen los datos que figuran a continuación

x_i	$f(x_i)$
1,0	**0,841**
1,1	**0,891**
1,2	**0,993**
1,3	**1,000**

Calcula el polinomio interpolador mediante diferencias divididas (redondea a 3 decimales).

1,0	0,841			
		0,05/0,1=0,5		
1,1	0,891		0,52/0,2=2,6	
		0,102/0,1=1,02		-7,35/0,3=-24,5
1,2	0,993		-0,95/0,2=-4,75	
		0,007/0,1=0,07		
1,3	1,000			

$$P(x) = 0,841 + 0,5(x-1) + 2,6(x-1)(x-1,1) - 24,5(x-1)(x-1,1)(x-1,2)$$
$$= -24'5\mathrm{x}^3 + 83,45\mathrm{x}^2 - 93,65\mathrm{x} + 35,541$$

6. (1 punto) Encontrar un valor c que satisfaga las condiciones del "Teorema del Valor Medio para la Derivabilidad" de la función $f(x) = \sqrt{x}$ para valores a=4 y b=9.

Según el teorema del valor medio, si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) entonces existe un c perteneciente a (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En nuestro caso a=4 y b=9 con lo que f(9)=3 y f(4) =2, $f'(c) = \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$

y como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ luego $\frac{1}{5} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ y $c = \frac{25}{4}$