



# ***Interpolación (III)***

## Tema 6



# ***Interpolación***

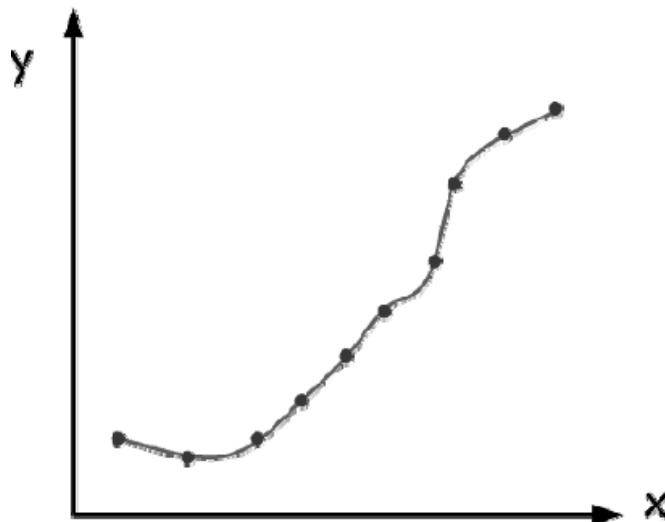
- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas
- Interpolación Hermite
- Splines
- Curvas paramétricas

## ***Curvas paramétricas***

Dados los datos  $(x_i, y_i)$  con  $i=0, \dots, n$ .

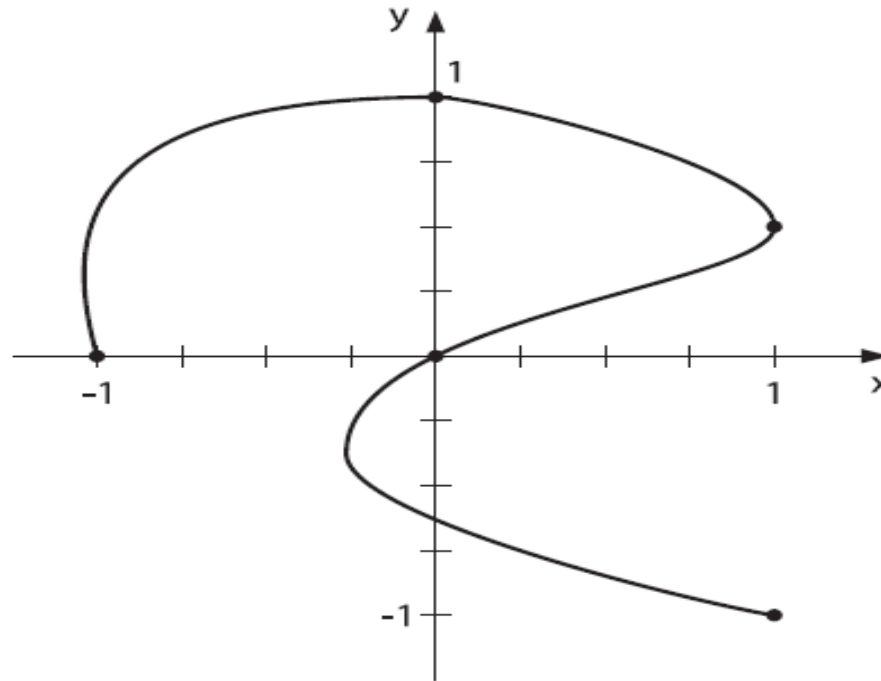
Hasta ahora se buscaba determinar una función  $f$  tal que  $f(x_i)=y_i$

Este enfoque es útil si entre los valores de  $x$  e  $y$  hay una relación como la de la figura siguiente:



## *Curvas paramétricas*

Pero si tenemos curvas como



El enfoque debe cambiar (no es una función)

## ***Curvas paramétricas***

Una forma alternativa sería expresar la relación entre  $x$  e  $y$  en forma paramétrica

$$\begin{aligned}x_i &= X(t_i) \\ y_i &= Y(t_i) \quad \text{con } i=0, \dots, n.\end{aligned}$$

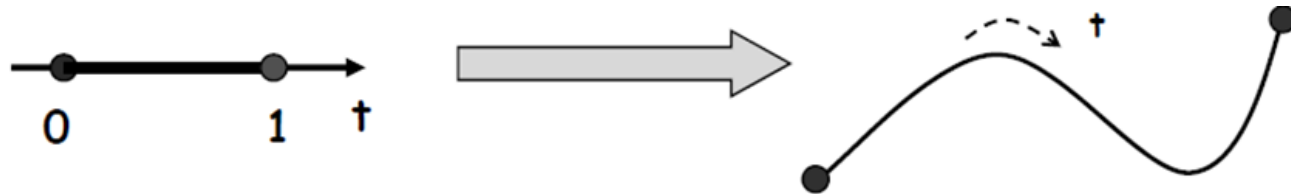
En este caso hay un parámetro  $t$  que por lo general se elige comprendido entre 0 y 1 de modo que para  $t_0$  corresponde a  $(x_0, y_0)$  y  $t_n$  corresponde a  $(x_n, y_n)$

# Curvas paramétricas

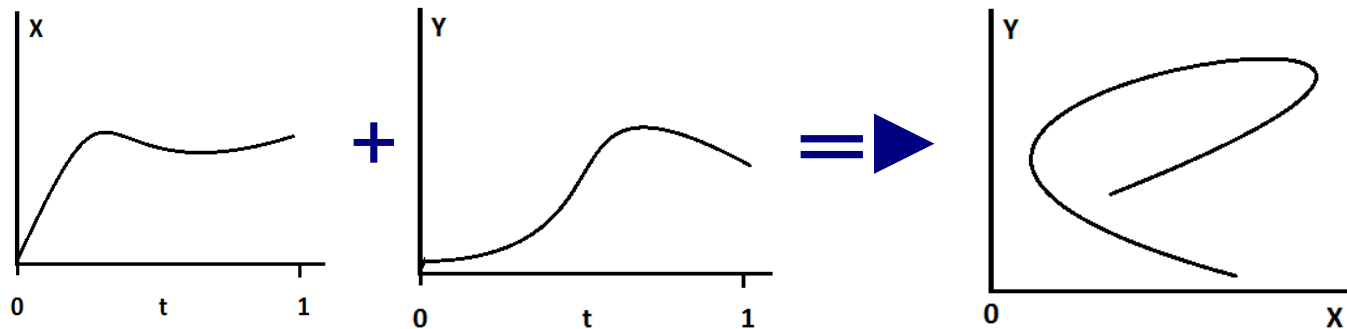
De esta forma tenemos una aplicación

$$f(t) \rightarrow (x, y)$$

tal que:



Se puede ver como dos funciones combinadas de las que ya sabíamos como tratar:



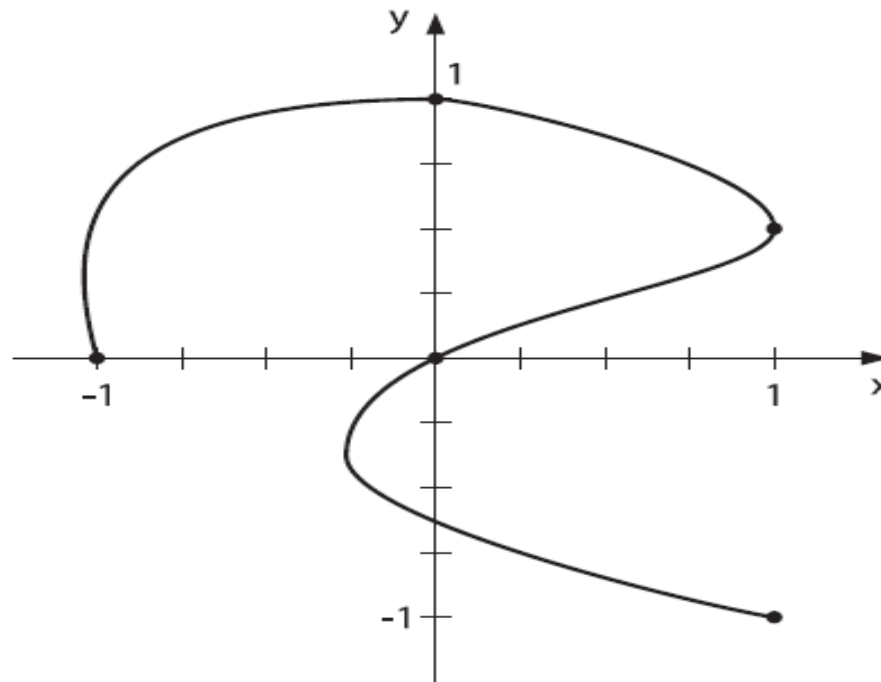
y así interpolar  $x$  e  $y$  por separado.

## ***Curvas paramétricas***

La utilidad de este enfoque surge cuando se trabaja en el diseño gráfico que involucran curvas y (extendiendo la idea a 3D) superficies. Se aplica en el estudio de trayectorias, diseño de objetos, etc.

## ***Curvas paramétricas. Ejemplo***

Se desea construir un par de polinomios de Lagrange para aproximar la siguiente curva, usando los puntos de muestreo indicados en la misma.

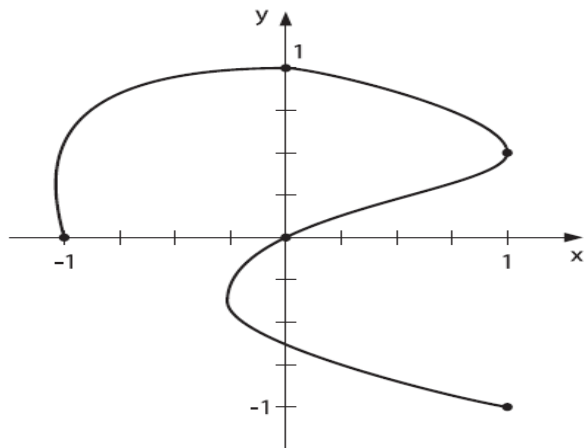




## Curvas paramétricas. Ejemplo

Elegimos los puntos  $t_i$  espaciados de forma equidistante en  $[0, 1]$ , obteniendo los siguientes datos:

$i$	0	1	2	3	4
$t_i$	0	0.25	0.5	0.75	1
$x_i$	-1	0	1	0	1
$y_i$	0	1	0.5	0	-1



## ***Curvas paramétricas***

Usando  $(0, -1)$ ,  $(0.25, 0)$ ,  $(0.5, 1)$ ,  $(0.75, 0)$  y  $(1, 1)$  para  $t$  y  $x$  se obtiene el polinomio de Lagrange

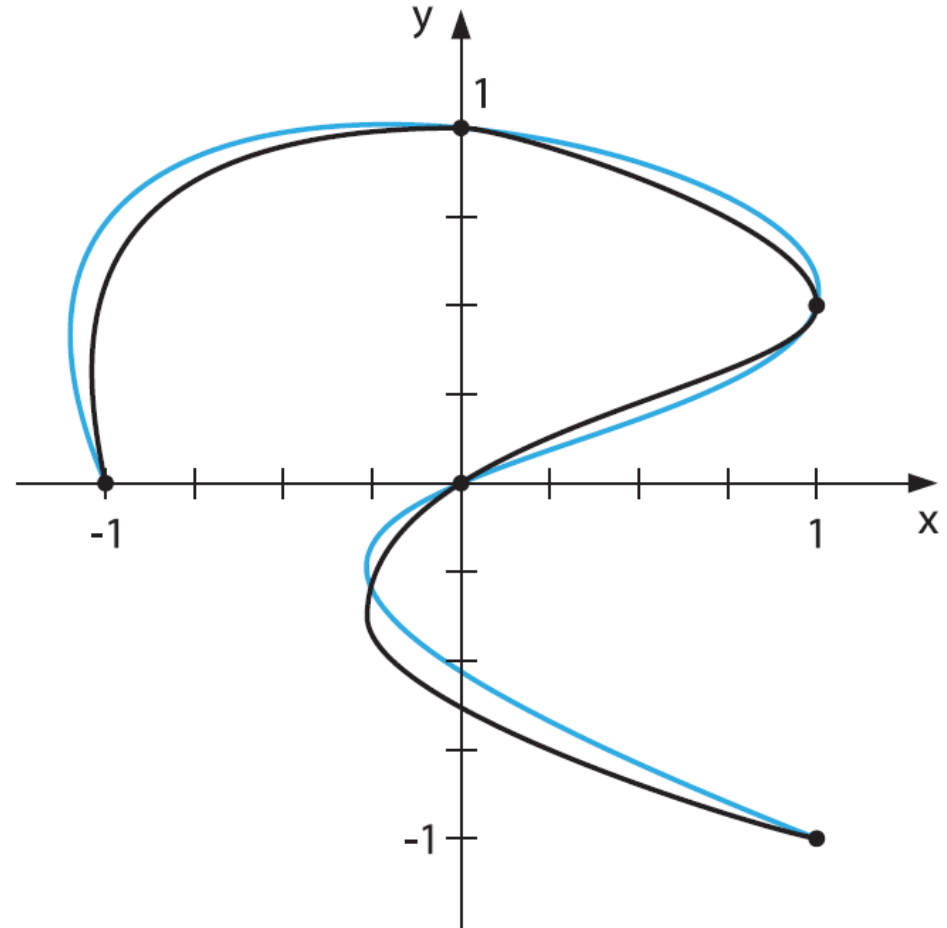
$$x(t) = \left( \left( \left( 64t - \frac{352}{3} \right) t + 60 \right) t - \frac{14}{3} \right) t - 1$$

Usando  $(0,0)$ ,  $(0.25,1)$ ,  $(0.5,0.5)$ ,  $(0.75,0)$  y  $(1,-1)$  para  $t$  e  $y$

$$y(t) = \left( \left( \left( -\frac{64}{3}t + 48 \right) t - \frac{116}{3} \right) + 11 \right) t.$$

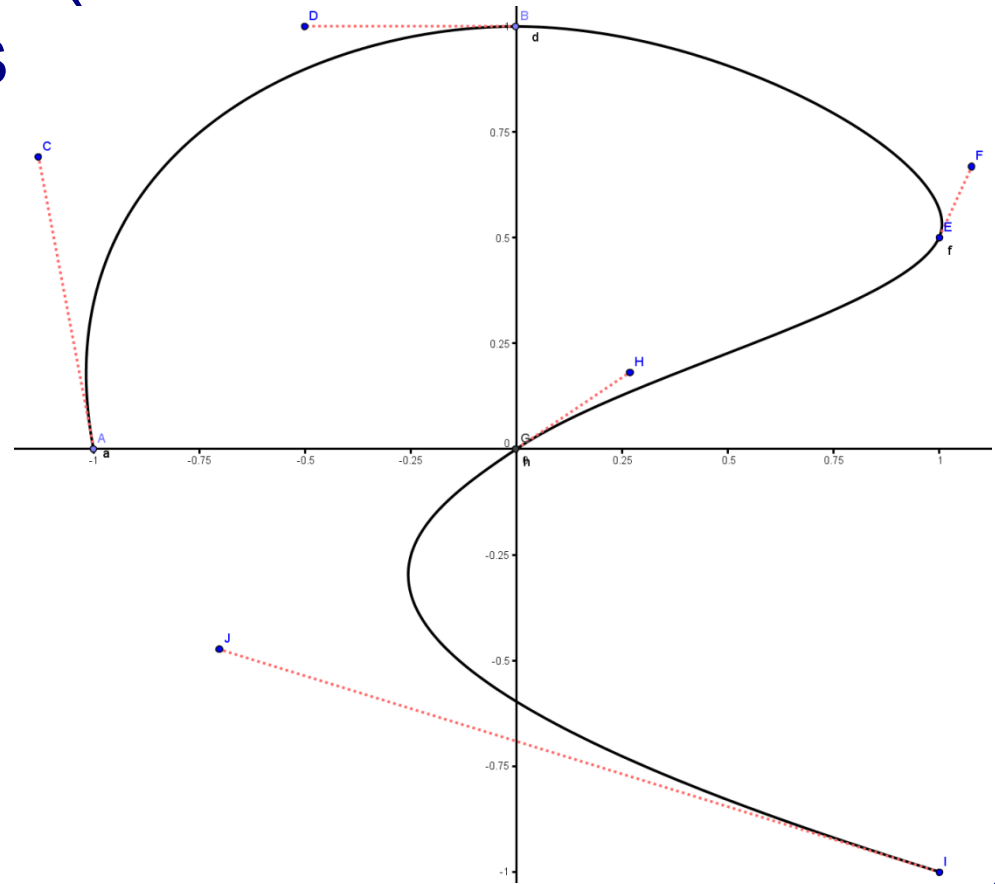
## *Curvas paramétricas*

Representando este sistema paramétrico, se obtiene la curva siguiente; a pesar de pasar por los puntos de muestreo es una aproximación relativamente imprecisa. Una aproximación mejor requeriría mas puntos de muestreo.



## *Curvas paramétricas*

Otra posibilidad es ajustar más a la curva interpolando por pates (de forma similar a como sucedía con los splines), por ejemplo dos a dos puntos consecutivos. En estos casos se suele controlar mediante otros dos puntos, las tangentes en los extremos para suavizar las uniones.

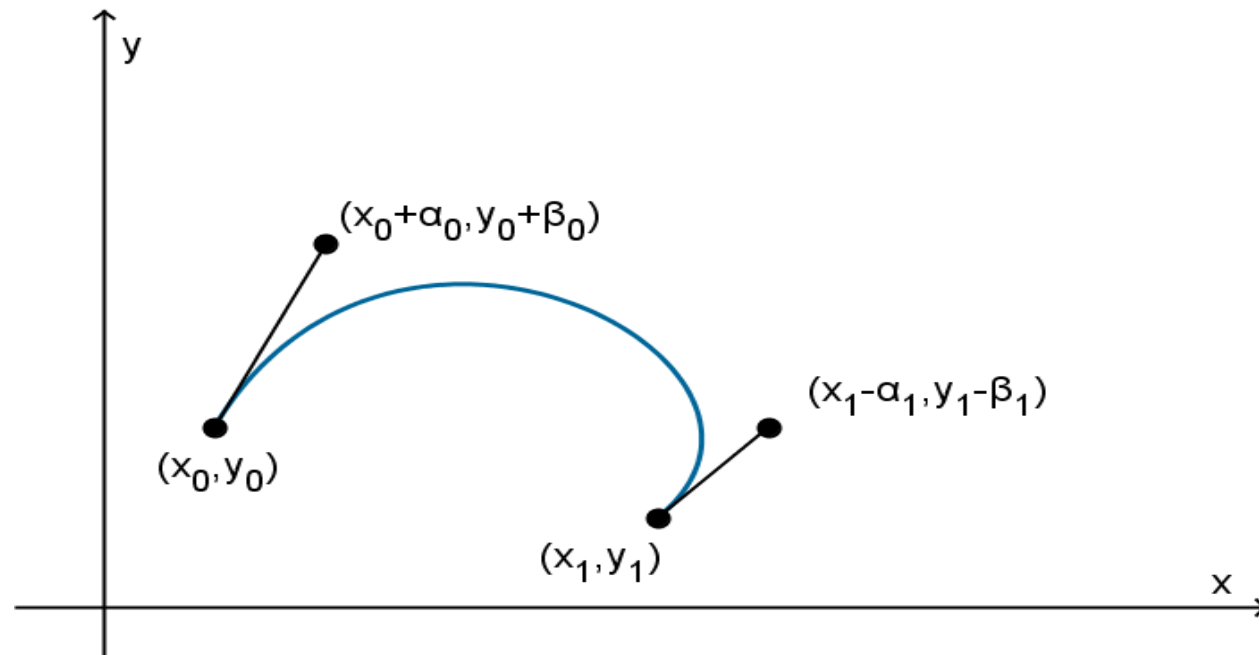


## Curvas paramétricas

Para ello se usa una interpolación de Hermite cúbica para  $x(t)$  e  $y(t)$  en  $[0, 1]$  que cumpla:

$$x(0)=x_0, x(1)=x_1, x'(0)=\alpha_0 \text{ y } x'(1)=\alpha_1$$

$$y(0)=y_0, y(1)=y_1, y'(0)=\beta_0 \text{ e } y'(1)=\beta_1$$



# ***Interpolación cúbica paramétrica de Hermite***

Los polinomios interpolados resultantes son los siguientes (si hacemos  $k=1$ ):

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + k(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 - [3(x_0 - x_1) + k(2\alpha_0 + \alpha_1)]t^2 + k\alpha_0 t + x_0$$

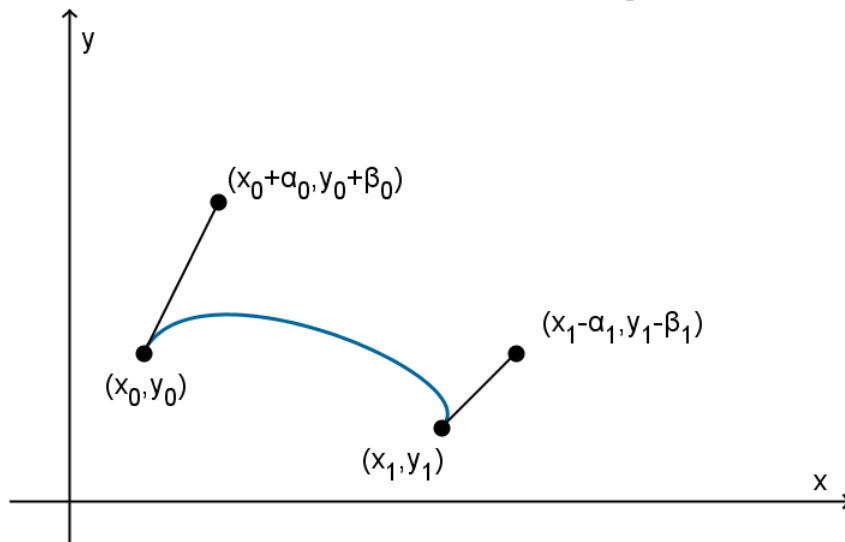
y:

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + k(\beta_0 + \beta_1)]t^3 - [3(y_0 - y_1) + k(2\beta_0 + \beta_1)]t^2 + k\beta_0 t + y_0$$

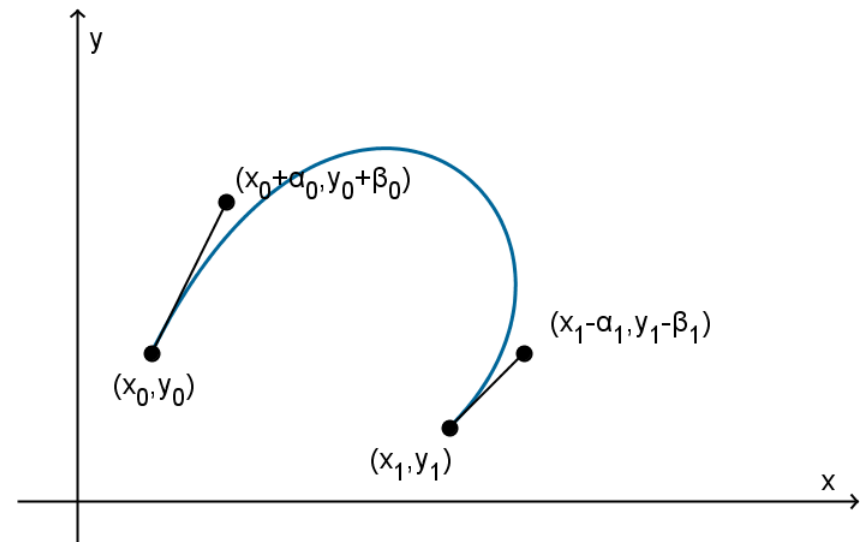
$k$  es un factor de escala que se añade para hacer más o menos partícipe en la curva el tamaño de los segmentos usados.

# Interpolación cúbica paramétrica de Hermite

El factor  $k$  indica cuánto hay que distanciar  $(x_i, y_i)$  e  $(x_i \pm \alpha_i, y_i \pm \beta_i)$  para alargar la curva  
A igual distanciamiento, un mayor  $k$  calcula una interpolación más curva:



$k=2$



$k=8$

# ***Interpolación***

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas
- Interpolación Hermite
- Splines
- Curvas paramétricas
- Curvas de Bézier

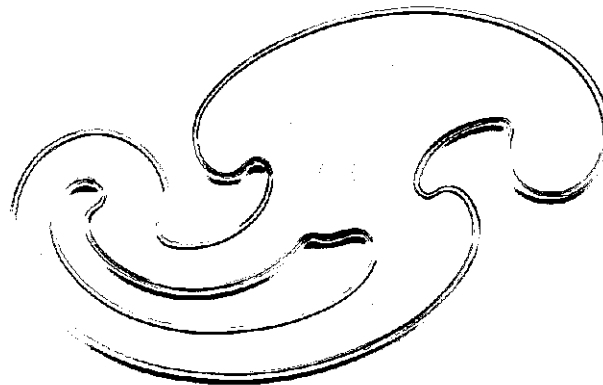
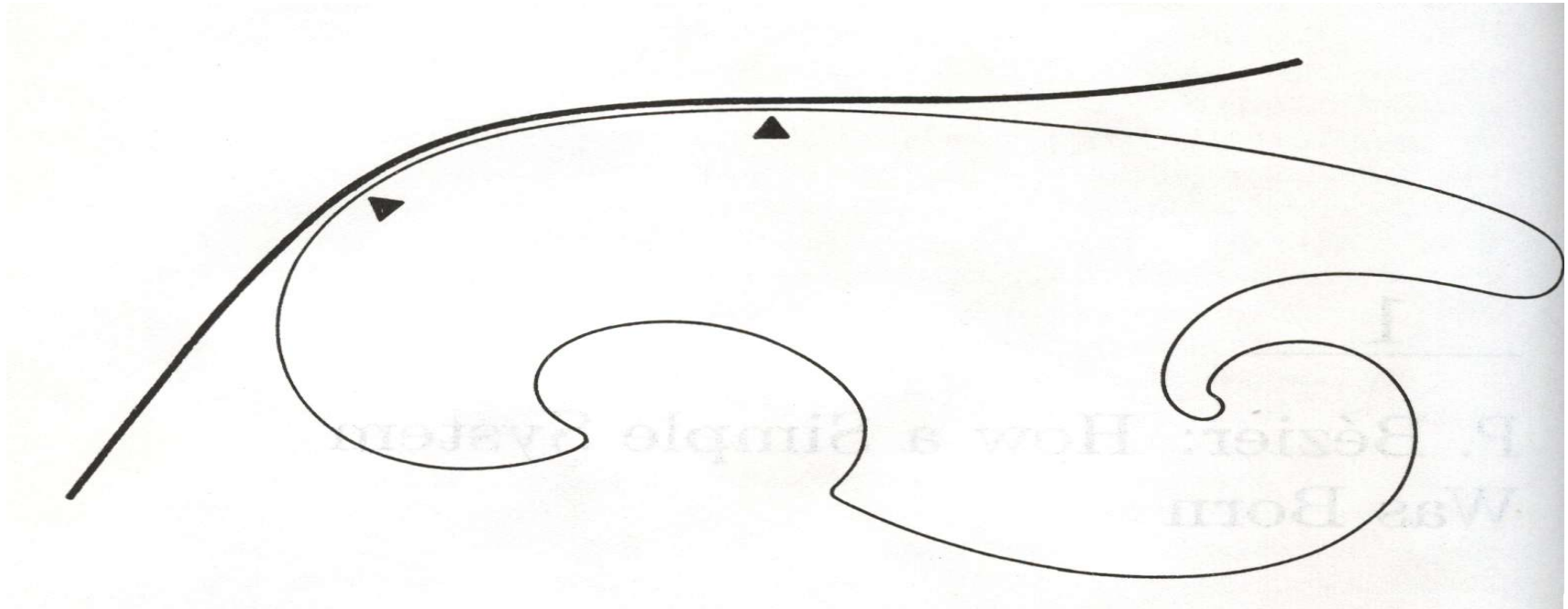


# ***Curvas de Bézier***

## ***Objetivo***

Construir formas (curvas y superficies)  
diversas de una manera fácil y exacta.

# ***Antes de las curvas de Bézier***



**Regla  
francesa**

## *Curvas de Bézier*

Las curvas de Bézier son un sistema que se desarrolló en 1960, para el trazado de dibujos técnicos, en el diseño aeronáutico y de automóviles, puesto que anterior a estas curvas, estas no tenían suavidad ya que se tenían que trazar por medio de reglas francesas.

## ***Curvas de Bézier***

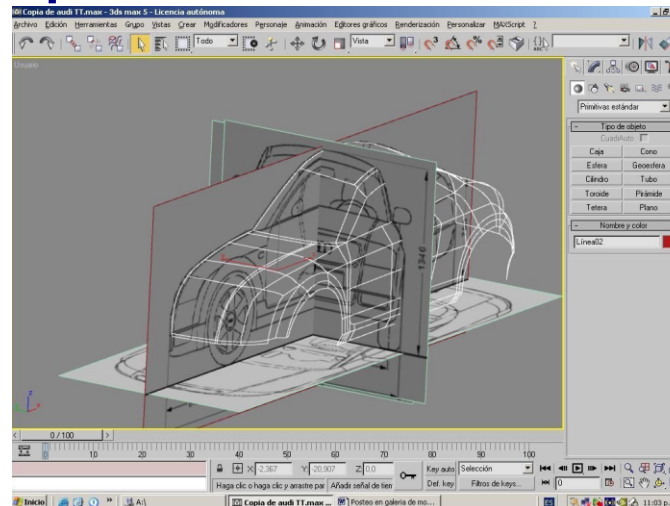
Su denominación es en honor a Pierre Bézier quien fue el creador de un método de descripción matemática de las curvas que se comenzó a utilizar con éxito en los programas de CAD.

## *Curvas de Bézier*

En 1959, De Casteljaou (Citroën), idea una formulación matemática para diseñar las formas curvas de los coches.

Posteriormente (1966), Bézier (Renault) llega a las mismas conclusiones, pero partiendo de otro desarrollo matemático.

Bézier fue el que publicó sus resultados.



## ***Curvas de Bézier. Idea intuitiva***

Se definen por una serie de  
**puntos de control.**

La curva siempre empieza en el primer punto de control, y termina en el último de ellos.

Los puntos intermedios “atraen” hacia si a la curva permitiéndonos darle forma:



## *Curvas de Bézier lineales*

Sólo dos puntos de control ( $P_0$  y  $P_1$ ).

Son líneas rectas.

Podemos recorrer la curva con un parámetro  $t \in [0, 1]$  que recorre la recta de  $P_0$  a  $P_1$ .





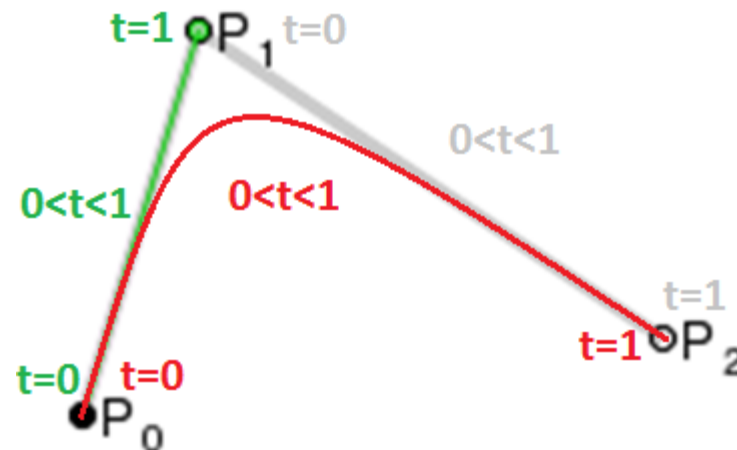
## Curvas de Bézier cuadráticas

Tres puntos de control ( $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$ ).

Se construyen dos curvas lineales de Bézier entre  $P_0$ - $P_1$  y  $P_1$ - $P_2$ .

Se construye una tercera curva de Bézier recursivamente de las dos anteriores.

El parámetro  $t$  recorre esta tercera curva de  $P_0$  a  $P_2$  con un “efecto gravitatorio” ejercido por  $P_1$ .





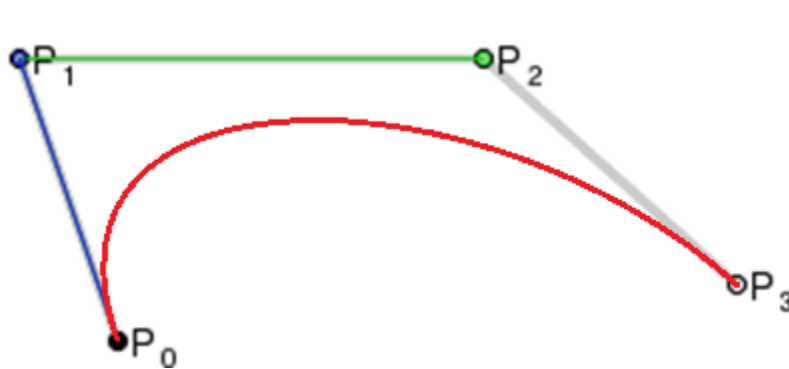
## ***Curvas de Bézier cúbicas o más***

Cuatro puntos de control ( $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ ).

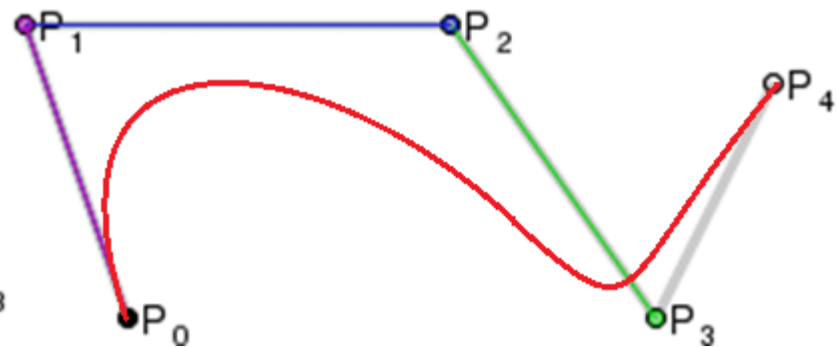
Son las más utilizadas.

Se aplica el mismo principio de inducción, partiendo inicialmente de tres curvas de Bezier lineales.

Así se pueden generar curvas de cualquier grado.



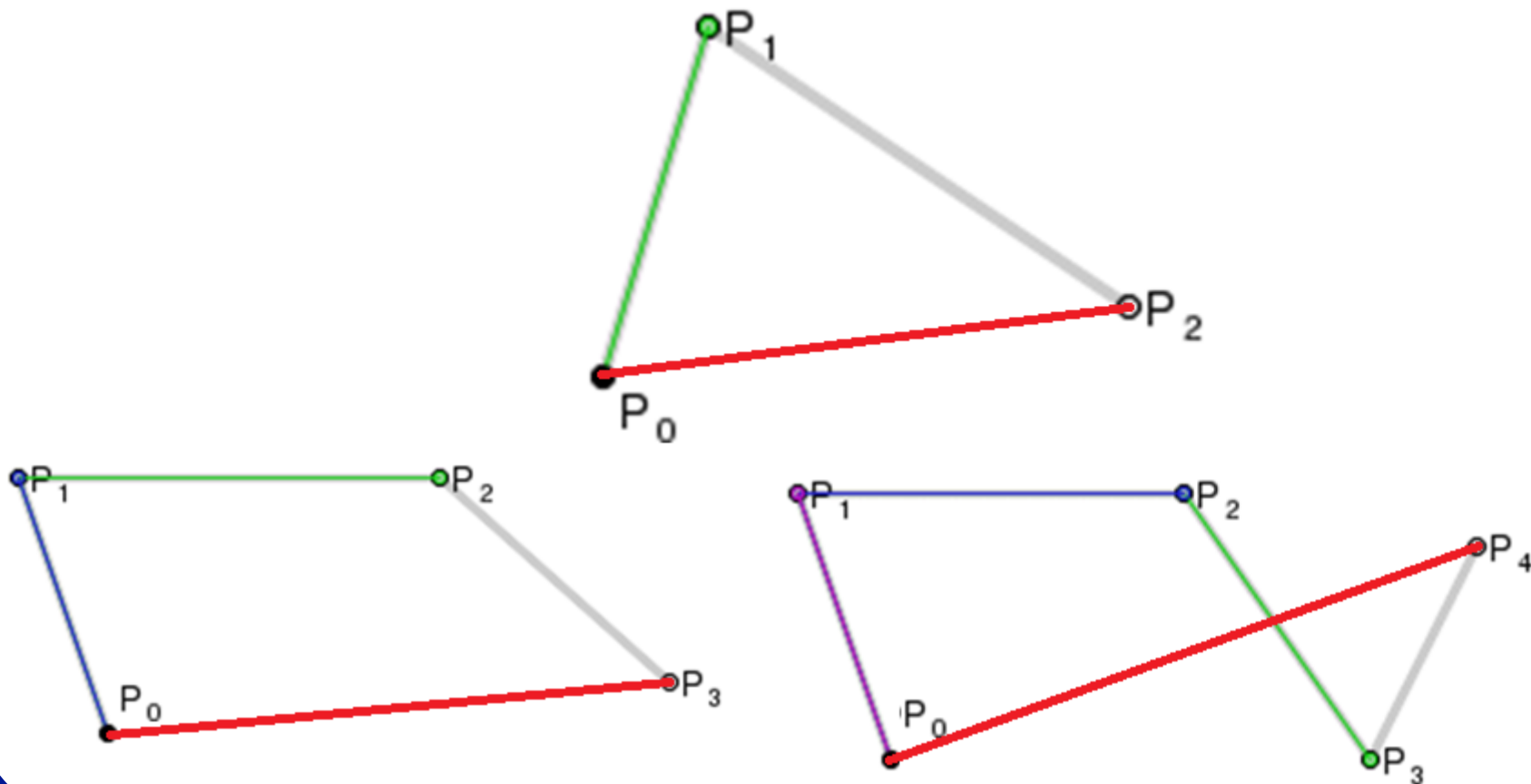
Grado 3



Grado 4

# ***Polígono de Bézier***

Los puntos de control para una curva de Bézier forman lo que se llama Polígono de Bézier:



## ***Polinomios de Bernstein***

Partimos de la siguiente expresión cuyo valor es la unidad:

$$1=(t+(1-t))^n$$

Si desarrollamos esa expresión según el teorema del binomio de Newton obtenemos el siguiente sumatorio:

$$(t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = 1$$

Llamaremos polinomios de Bernstein de grado  $n$  a cada uno de los términos de sumatorio:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} \quad \text{para } i=0, 1, \dots, n$$

## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein de grado 1:

## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

**Polinomios de Bernstein de grado 1:**

$$B_0^1(t) = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = \frac{1!}{0!1!} (1-t) = (1-t)$$

$$B_1^1(t) = \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = \frac{1!}{1!0!} t = t$$

## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein de grado 2:

## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein de grado 2:

$$B_0^2(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = \frac{2!}{0!2!} (1-t)^2 = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = \frac{2!}{1!1!} t(1-t) = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = \frac{2!}{2!0!} t^2 = t^2$$

## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein de grado 3:



## ***Ejemplo Polinomios de Bernstein***

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

**Polinomios de Bernstein de grado 3:**

$$B_0^3(t) = \binom{3}{0} t^0 (1-t)^{3-0} = \frac{3!}{0!3!} (1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \binom{3}{1} t^1 (1-t)^{3-1} = \frac{3!}{1!2!} t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = \binom{3}{2} t^2 (1-t)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} t^2 (1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3} t^3 (1-t)^{3-3} = \frac{3!}{3!0!} t^3 = t^3$$

# Propiedades de los Polinomios de Bernstein

La suma de todos los polinomios de Bernstein de un mismo grado para cualquier valor de  $t$  entre  $0$  y  $1$  es por definición  $1$ .

Bernstein de grado 1			
t	1-t	t	Suma
0	1	0	1
0,2	0,8	0,2	1
0,4	0,6	0,4	1
0,6	0,4	0,6	1
0,8	0,2	0,8	1
1	0	1	1

Bernstein de grado 2				
t	(1-t) <sup>2</sup>	2t(1-t)	t <sup>2</sup>	Suma
0	1	0	0	1
0,2	0,64	0,32	0,04	1
0,4	0,36	0,48	0,16	1
0,6	0,16	0,48	0,36	1
0,8	0,04	0,32	0,64	1
1	0	0	1	1

Bernstein de grado 3					
t	(1-t) <sup>3</sup>	3t(1-t) <sup>2</sup>	3t <sup>2</sup> (1-t)	t <sup>3</sup>	suma
0	1	0	0	0	1
0,2	0,512	0,384	0,096	0,008	1
0,4	0,216	0,432	0,288	0,064	1
0,6	0,064	0,288	0,432	0,216	1
0,8	0,008	0,096	0,384	0,512	1
1	0	0	0	1	1

# ***Propiedades de los Polinomios de Bernstein***

Además:

1. Son linealmente independientes.

2. Son simétricos:

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$$

3. Sus únicas raíces son 0 y 1.

4. Son positivos en todo el intervalo  $(0, 1)$ .

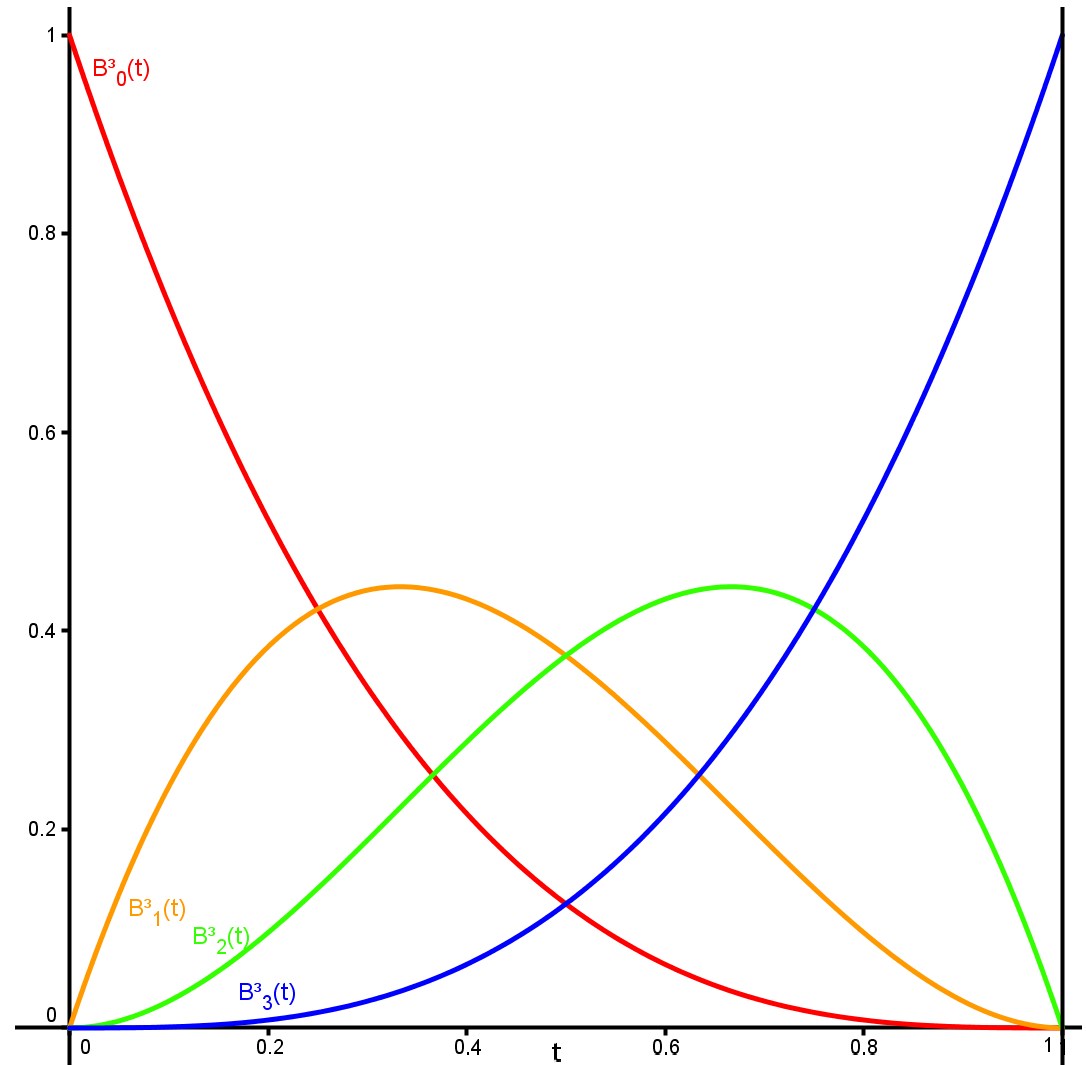
5. Satisfacen la relación de recurrencia:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

donde  $B_i^n(t) = 0$  si  $i < 0$  ó  $i > n$

# ***Ejemplo Polinomios de Bernstein de grado 3***

Como la suma de los polinomios siempre suma 1 y sus valores son positivos en el intervalo  $(1,0)$ , podemos usarlo para ponderar la participación de los puntos de control en una curva de Bézier ...



# ***Curva de Bézier***

## ***Formulación con polinomios de Bernstein***

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

Donde los  $P_i$  son los puntos de control o vértices del polígono de Bézier.

Al evaluar cada polinomio de Bernstein para un valor de  $t$ , el resultado es un escalar, que se aplica como peso a cada punto de control.

# ***Peso de los polinomios de Bernstein (grados 1, 2 y 3) para distintos valores de $t$***

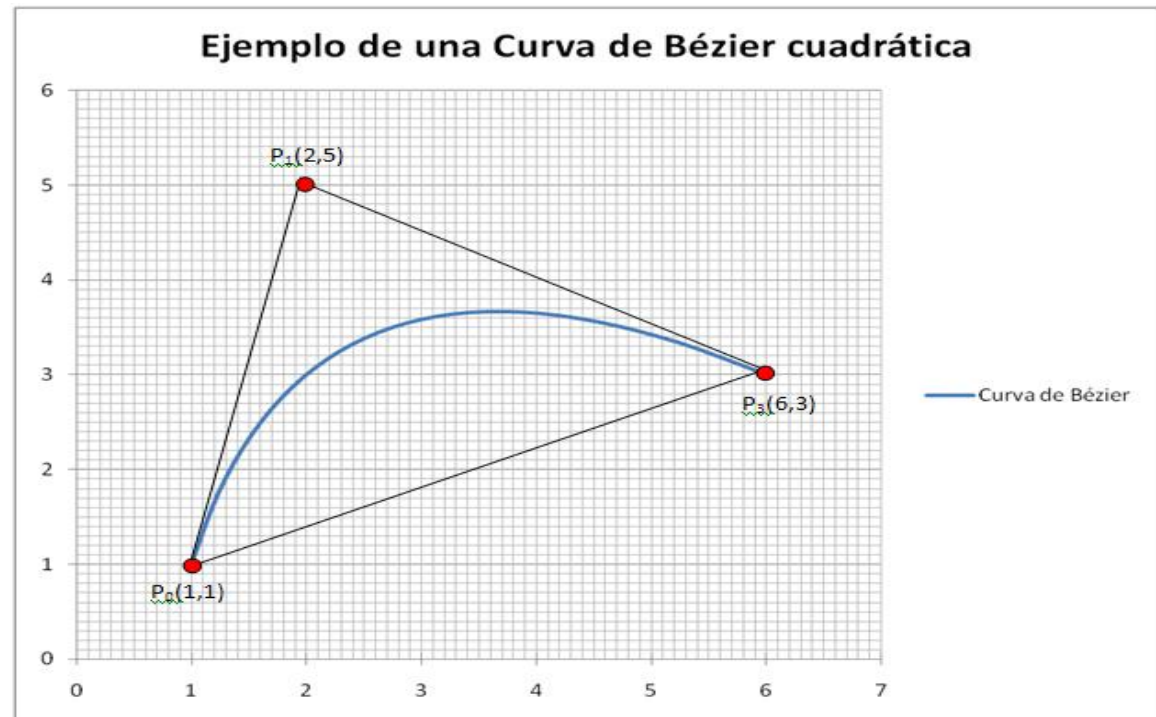
Al evaluar cada polinomio de Bernstein para un valor de  $t$ , el resultado es un escalar, que se aplica como peso a cada punto de control.

$t$	Bernstein de grado 1		Bernstein de grado 2			Bernstein de grado 3			
	$1-t$	$t$	$(1-t)^2$	$2t(1-t)$	$t^2$	$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	$t^3$
0	100%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	0%
0,2	80%	20%	64%	32%	4%	51%	38%	10%	1%
0,4	60%	40%	36%	48%	16%	22%	43%	29%	6%
0,6	40%	60%	16%	48%	36%	6%	29%	43%	22%
0,8	20%	80%	4%	32%	64%	1%	10%	38%	51%
1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	100%
	$P_0$	$P_1$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$

## Ejemplo. Curva de Bézier de 3 puntos

$$P_1=(1,1) \quad P_2=(2,5) \quad P_3(6,3)$$

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) P_i = B_0^2(t) P_0 + B_1^2(t) P_1 + B_2^2(t) P_2$$





## Ejemplo. Curva de Bézier de 3 puntos

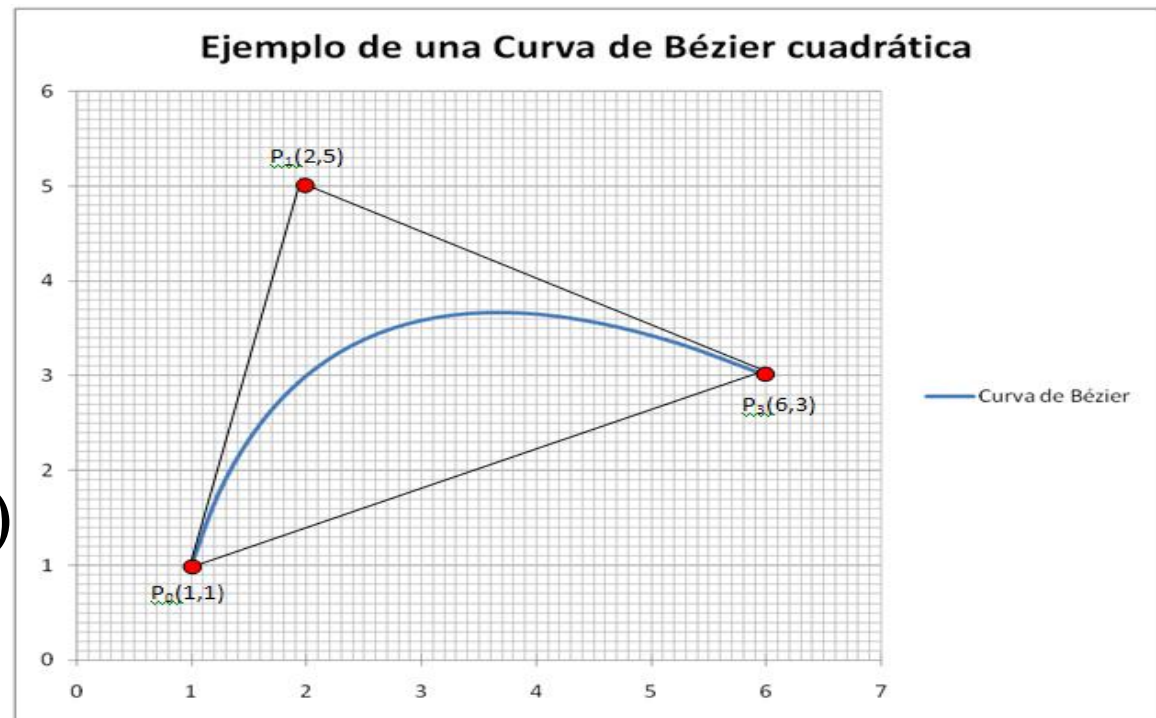
$$P_1=(1,1) \quad P_2=(2,5) \quad P_3(6,3)$$

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) P_i = B_0^2(t) P_0 + B_1^2(t) P_1 + B_2^2(t) P_2$$

$$(x(t), y(t)) = (1-t)^2 (1,1) + (2t-2t^2)(2,5) + t^2 (6,3)$$

$$x(t) = (3t^2 + 2t + 1)$$

$$y(t) = (-6t^2 + 8t + 1)$$





## ***Recursividad en las Curvas de Bézier***

Aprovechando la propiedad de recursividad que tenían los polinomios de Bernstein podemos deducir otra formulación para las curvas de Bezier que llamamos **Formulación de De Casteljau**:

La curva de Bezier de grado  $n$  es  $b(t) = b_n^0(t)$

donde  $b_0^i(t) = P_i$  son los puntos de control y

$$b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# ***Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou***

$$b_0^0(t) = P_0$$

$$b_0^1(t) = P_1$$

$$b_0^i(t) = P_i \qquad b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# ***Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou***

$$\begin{aligned} b_0^0(t) &= P_0 & (1-t) \\ & \searrow & \nearrow \\ & b_1^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \\ & \nearrow & \searrow \\ b_0^1(t) &= P_1 & t \end{aligned}$$

$$b_0^i(t) = P_i \qquad b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# ***Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou***

$$b_0^0(t) = P_0 \xrightarrow{(1-t)} b_1^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$b_0^1(t) = P_1 \xrightarrow{t}$$

$$b_0^2(t) = P_2$$

$$b_0^i(t) = P_i$$

$$b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# ***Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou***

$$b_0^0(t) = P_0 \xrightarrow{(1-t)} b_1^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$b_0^1(t) = P_1 \xrightarrow[t(1-t)]{} b_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$b_0^2(t) = P_2 \xrightarrow{t}$$

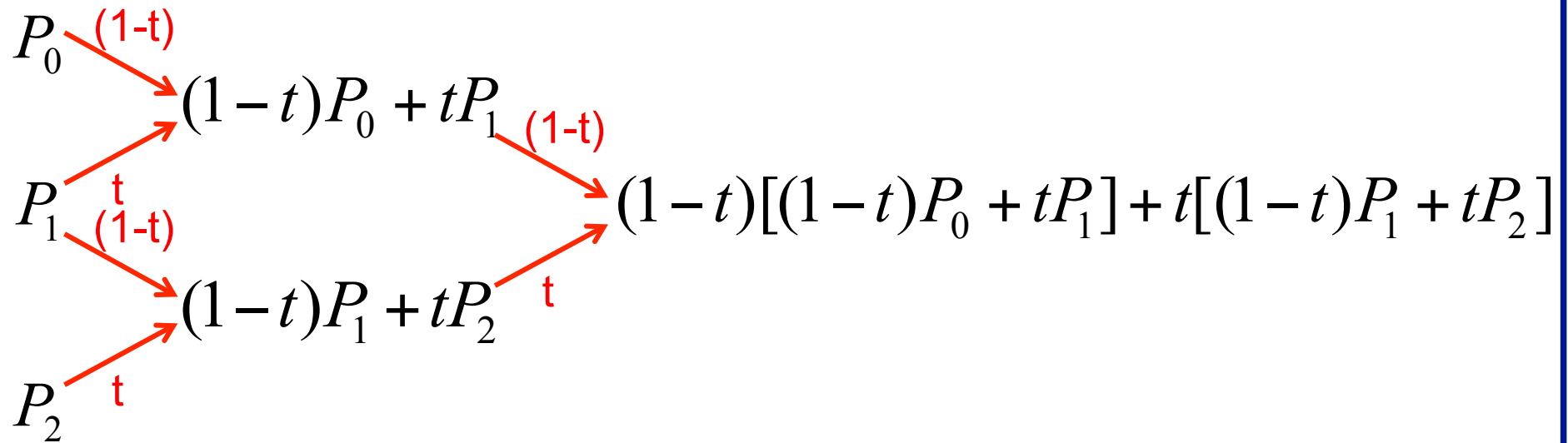
$$b_0^i(t) = P_i \qquad b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou

$$\begin{aligned}
 b_0^0(t) &= P_0 & \xrightarrow{(1-t)} & b_1^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1 & \xrightarrow{(1-t)} & b_2^0(t) = \\
 & & \xrightarrow{t} & & \xrightarrow{t} & \\
 b_0^1(t) &= P_1 & \xrightarrow{(1-t)} & & \xrightarrow{t} & (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] \\
 & & \xrightarrow{t} & b_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2 & \xrightarrow{t} & + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\
 b_0^2(t) &= P_2 & \xrightarrow{t} & & & 
 \end{aligned}$$

$$b_0^i(t) = P_i \quad b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

# Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljaou



Primera columna: Puntos de control.

Segunda columna: Curvas de Bézier lineales.

Tercera columna: Curvas de Bézier cuadráticas.

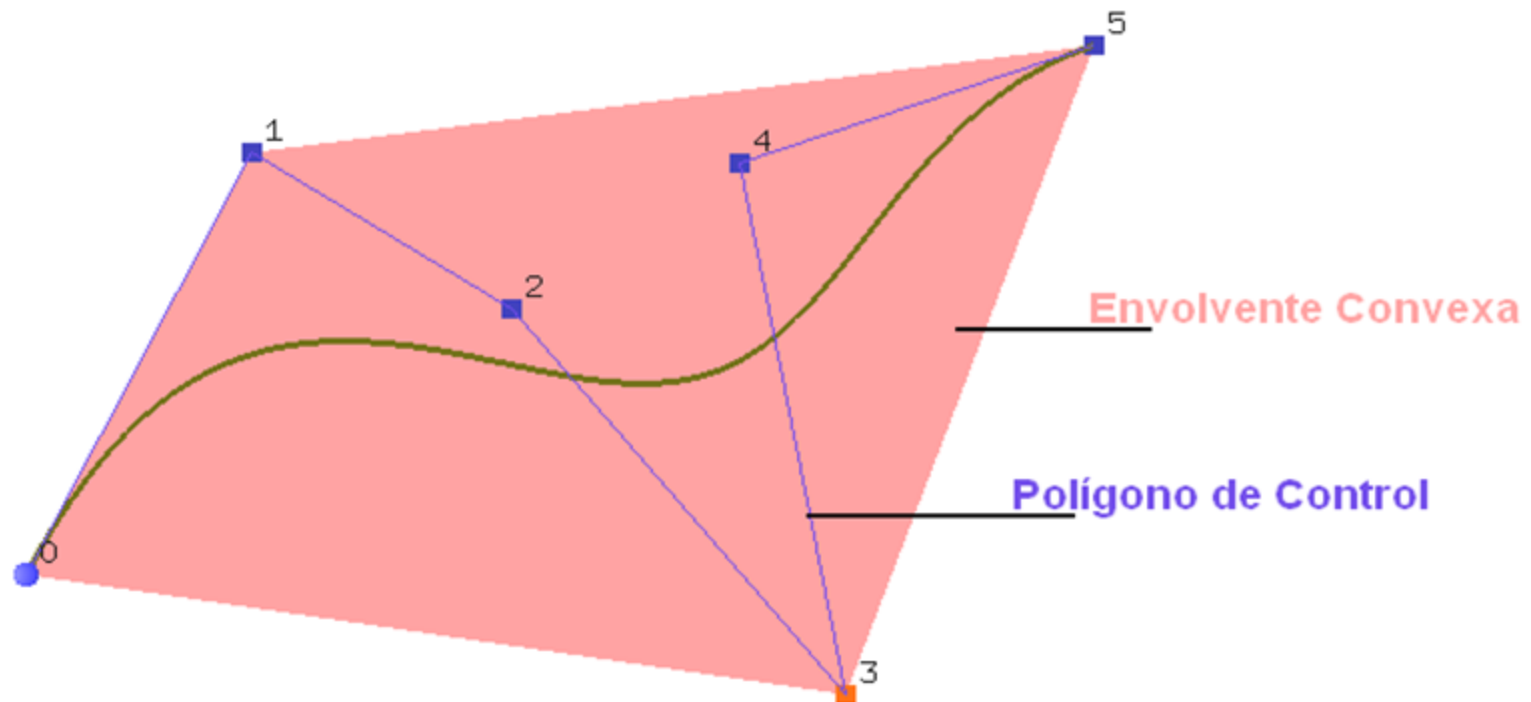
Cuarta columna: Curvas de Bézier cúbicas.

Es una forma recursiva de construir las curvas.

# Curvas de Bézier. Propiedades (I)

Interpola sólo los puntos de control inicial y final.

La curva no escapa de la **envolvente convexa**.

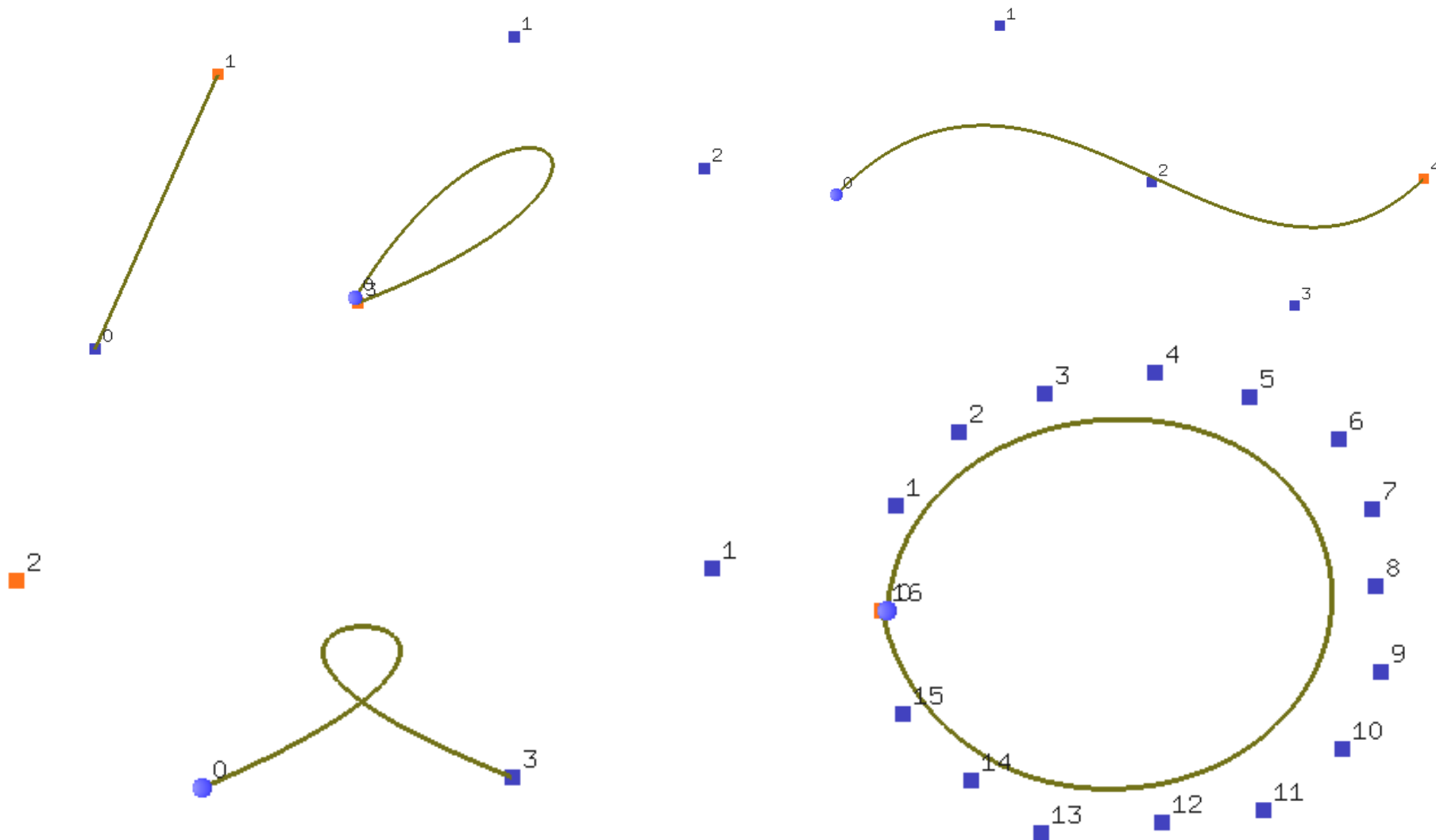




## ***Curvas de Bézier. Propiedades (II)***

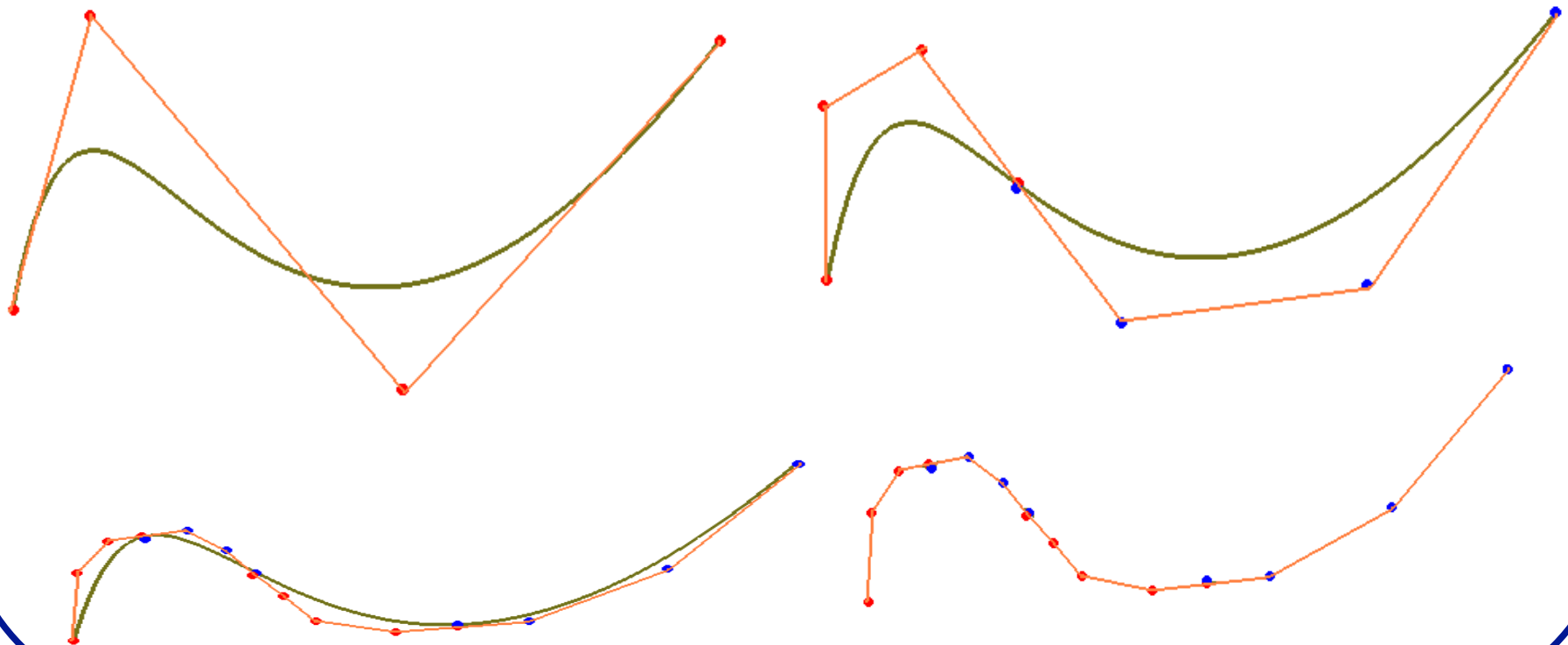
- **Invarianza afín:** Puedo aplicar transformaciones afines sin tener que recalcular todo.
- La curva de Bézier con  $n+1$  puntos de control es un polinomio de grado  $n$ .
- La modificación de un punto de control afecta a toda la curva (la curva es una suma ponderada de los puntos de control).
- Las curvas sólo pueden ser enteramente rectas o enteramente curvas.

# Curvas de Bézier



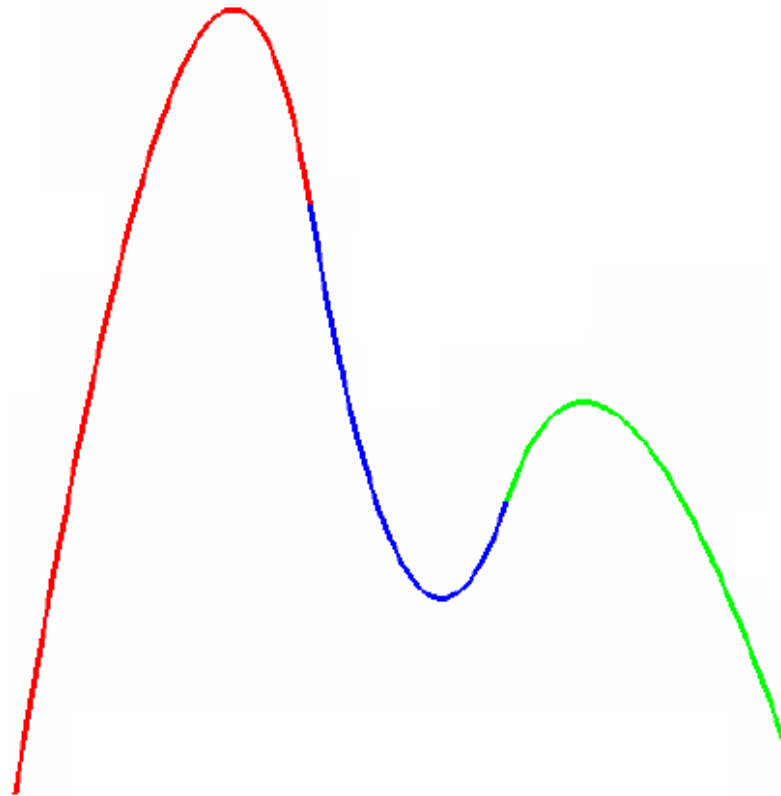
# Curvas de Bézier

En la práctica, las curvas de Bézier no se pintan, sino que se aproximan mediante segmentos (o triángulos, si estamos en 3D). Para ello necesitamos ir dividiendo la curva en curvas más pequeñas, hasta que tengamos una composición de curvas muy pequeñas, cada una de las cuales se puede aproximar por un segmento.



## ***Curvas de Bézier a trozos***

Normalmente no se usan curvas de Bézier de grado  $> 3$ .  
Para generar figuras más complejas, se pueden unir varias curvas de grado pequeño, obteniendo una curva formada por trozos.



## ***Curvas de Bezier a trozos. Continuidad***

Es fundamental controlar cómo queremos que se unan nuestros trozos.

**Continuidad  $C^0$ :** nos basta con que el último punto de control de una curva  $S_i$  sea igual al primer punto de control de la siguiente curva  $S_{i+1}$ .

Genera uniones bruscas y con picos.

**Continuidad  $C^1$ :** en este caso no sólo deben coincidir los puntos de los extremos, sino también sus derivadas laterales.

Genera uniones suaves.

**Continuidad  $G^1$ :** en este caso no es estrictamente necesario que las derivadas coincidan, sino sólo que sean proporcionales.

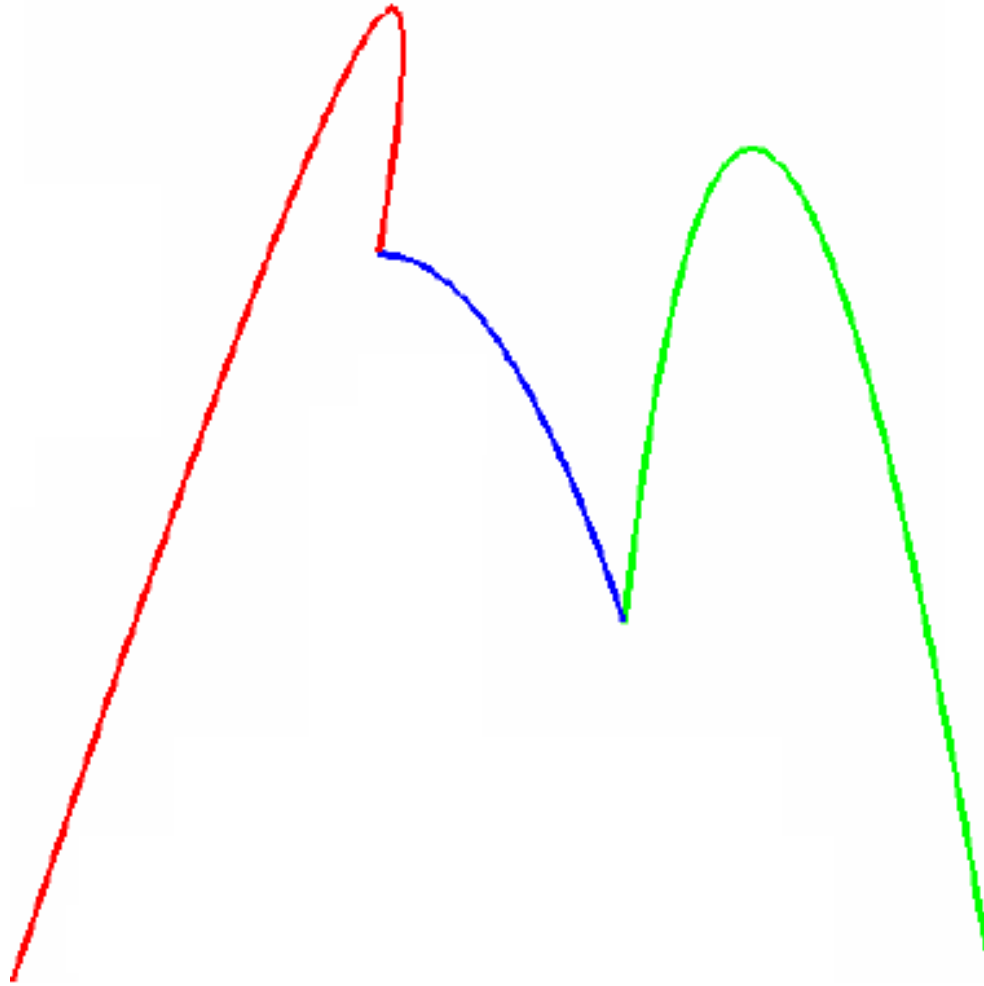
Menos restrictivo que  $C^1$ , y en muchos casos suficiente.

**Continuidad  $C^2$ :** deben coincidir también las derivadas segundas.

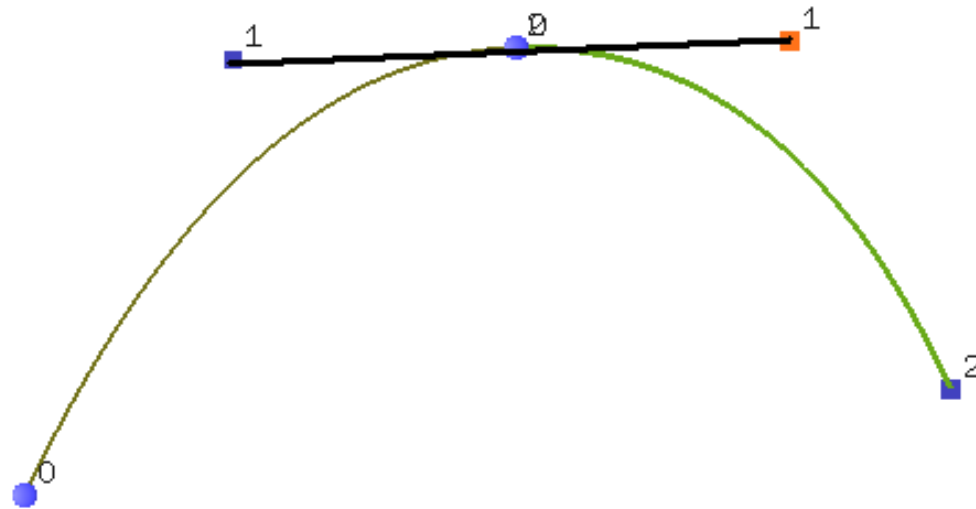
A veces es deseable en 3D.

***Se verá más claro con ejemplos***

# *Curvas de Bézier a Trozos: $C^0$*



# Curvas de Bézier a Trozos: $C^1$

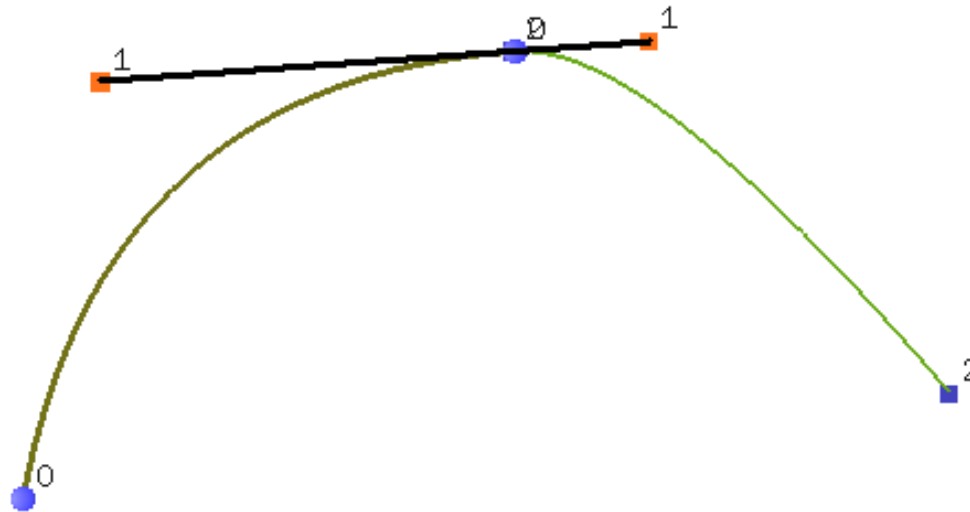


Gráficamente, además de coincidir el extremo de ambas curvas ( $P_i$ ), este extremo y los dos puntos adyacentes  $P_{i-1}$  y  $P_{i+1}$  deben estar en la misma recta.

Además, se cumple:

$$\text{Distancia } (P_{i-1}, P_i) = \text{Distancia } (P_i, P_{i+1})$$

## *Curvas de Bézier a Trozos: $G^1$*



Además de coincidir el extremo de ambas curvas ( $P_i$ ), este extremo y los dos puntos adyacentes ( $P_{i-1}$  y  $P_{i+1}$ ) deben estar en la **misma recta** (igual que en  $C^1$ ).

No es necesario que las distancias sean iguales.



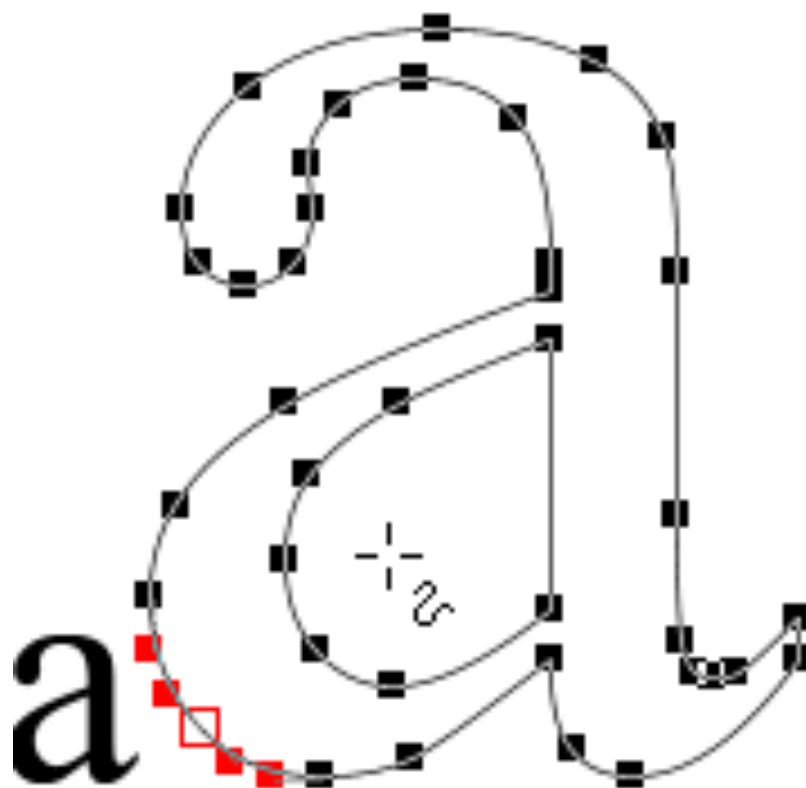
# ***Curvas de Bézier a trozos. Propiedades***

**Envolvente convexa fuerte:** seguimos teniendo la curva confinada.

**Control local:** al mover un punto modificamos sólo una curva (o a lo sumo dos, si se trata de un punto de unión); esto no ocurría en Bézier simple.

Se pueden combinar **curvas y rectas** en una única figura continua.

Podemos modelar figuras muy complejas.

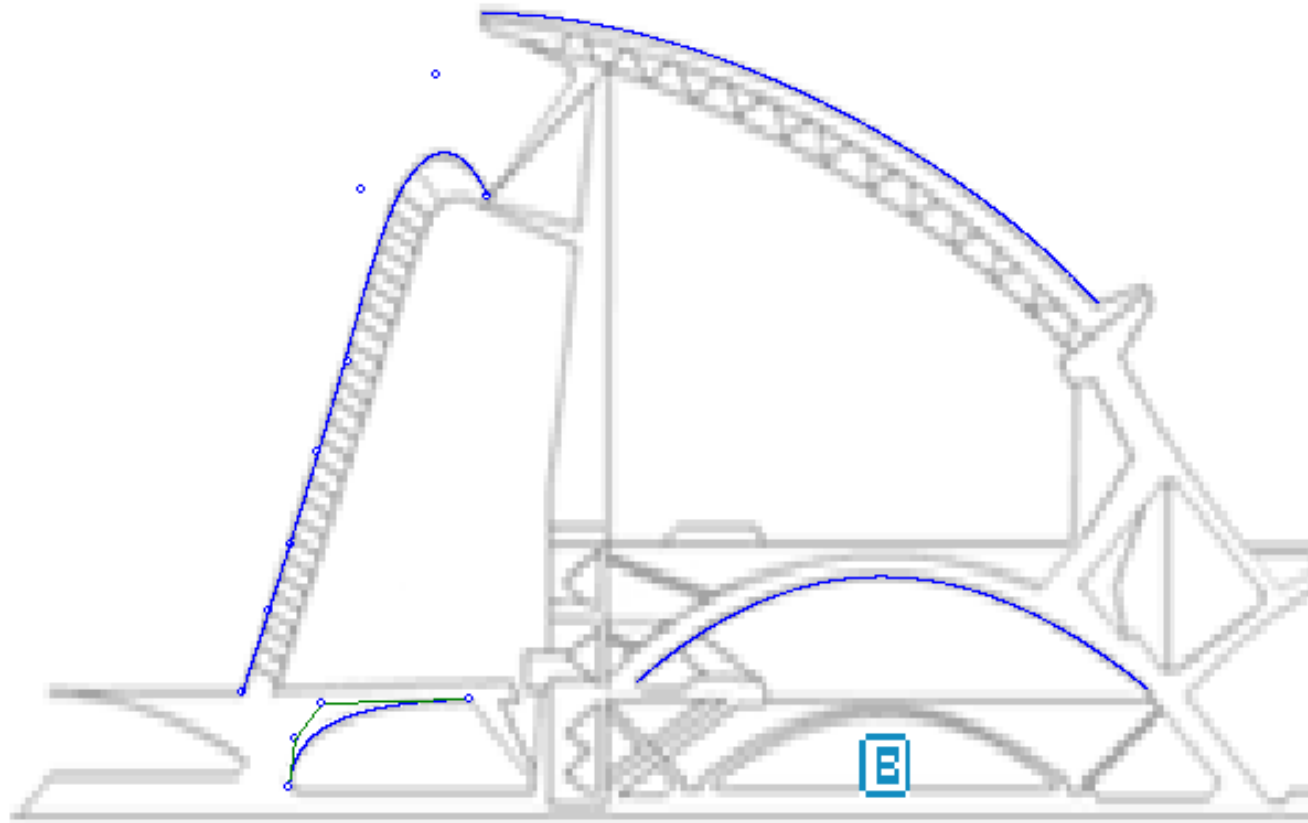


PostScript type



Bitmap type

# ***Curvas de Bézier en el “Museu de les Arts i les Ciències” de Valencia***



# Curiosidad

La interpolación cúbica paramétrica de Hermite con factor de escala  $k=3$ , coincide con la curva de Bézier de grado 3:

