Tema 5a: Repaso de Determinantes

Tema 5a: Repaso de Determinantes

Conceptos previos:

- **Permutación** de un conjunto : Cada posible ordenación de los elementos del conjunto. Cada dos elementos colocados en orden contrario al orden original se dice que están en **inversión.**
- **Índice** de una permutación: Número de inversiones que tiene.
- Una **permutación** es **par** si tiene índice par e **impar** si tiene índice impar.
- Si un conjunto tiene n elementos, existen **n!** permutaciones del conjunto.

Ejemplo 18: Consideremos el conjunto $A=\{1,2,3\}$. En el siguiente cuadro se pueden ver todas las permutaciones y su paridad:

Permutación	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)
Nº de inversiones	0	1	1	2	2	3
Paridad	Par	Impar	Impar	Par	Par	Impar

Tema 5a: Repaso de Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada A de orden n (det A o |A|)

Es un número real igual a la suma de todos los productos de n factores que se pueden efectuar tomando un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna, precedido por un signo que es positivo si la permutación correspondiente a los subíndices de las columnas es par y negativo si es impar.

Determinante de una matriz de orden 2:

El determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo 19:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$

b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

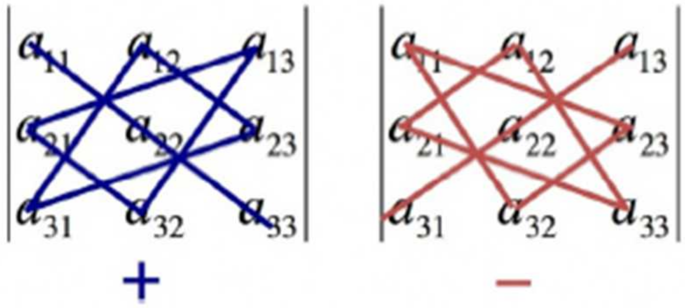
Tema 5a: Repaso de Determinantes

Determinante de una matriz de orden 3:

El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esta última expresión se puede recordar fácilmente con la llamada **regla de Sarrus**, que gráficamente se puede interpretar con el siguiente diagrama:



Ejemplo 20: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot6 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot1\cdot5 - 5\cdot4\cdot(-2) - 0\cdot(-2)\cdot6 - 3\cdot1\cdot(-1) =$

$= 72 - 4 + 0 + 40 - 0 + 3 = 111$

Tema 5a: Repaso de Determinantes

Otra forma de calcular el determinante

- $\text{menor}(i, j)$ de $A = \det M_{ij}(A)$

Donde Mij(A) es la matriz que resulta de quitar de A la fila i y la columna j

- $\text{cofactor}(i, j)$ de $A : C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det M_{ij}(A).$

Teorema de Laplace (útil para matrices de orden >3):

Permite calcular un determinante de orden **n** a partir de **n** determinantes de orden **n-1**.

Si elegimos la fila o columna que más ceros tenga, el sumatorio se simplifica mucho

Teorema 5.1: Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Entonces

(a) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$, para i=1,2, . . . n.

(b) $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$, para j=1,2, . . . n.

Ejemplo

$$
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{5+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-3)(-1)^{5+3}(-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-6) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}.
$$

El último lo resolvemos por Sarrus, y sale -28, por lo que el valor final es 168 (-6 * -28)

Tema 5a: Repaso de Determinantes

Propiedades de los determinantes

1. Si a una línea se le suma una línea proporcional o una combinación lineal de otras paralelas, el determinante no varía.

Esto es especialmente útil porque, mediante operaciones elementales tipo 3, podemos hacer ceros en todos los elementos menos uno de una columna, con la garantía de que el determinante no varía. De esta forma, aplicar después Laplace es muy sencillo.

Ejemplo 5.3: *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hagamos ceros en la primera columna $(F_3 + 4F_1$ y $F_5 + 2F_1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -22 & -16 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -9 & -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -3 & -5 \\ -22 & -16 & -16 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ -10 & -9 & -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 9 & -3 & -5 \\ -22 & 32 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & 15 & -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ -22 & 32 & -9 \\ -10 & 15 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -(-100) = 100.$$

Y si además de hacer ceros en una columna, lo que hacemos es convertirla en una matriz triangular, el cálculo del determinante se simplifica mucho más…

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2'=2F_1+F_2 \\ F_3'=-2F_1+F_3 \\ F_3'=F_1+F_4}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_3'=3F_2+F_3 \\ F_4'=-3F_2+F_4}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} \overset{F_4'=F_3+F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 4 = -4$$

Teorema 5.4: Si $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Y evidentemente esto también es válido para una matriz diagonal

Tema 5a: Repaso de Determinantes

… Más propiedades de los determinantes

a) $|A| = |A^t|$. Es decir, el determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden.

b) Si todos los elementos de una línea de A son nulos, entonces, $|A| = 0$.

c) Si intercambiamos entre sí dos líneas paralelas de una matriz, el determinante cambia de signo.

d) Si una matriz tiene dos líneas iguales o proporcionales, su determinante es cero.

e) Si una línea es combinación lineal de otras paralelas, el determinante es cero.

f) Si se multiplican los elementos de una línea por un número, el determinante queda multiplicado por ese número, es decir, si B es la matriz que resulta de multiplicar A por λ, entonces $|B| = \lambda |A|$.

g) Si se multiplica una matriz A, de dimensión n, por un número λ, su determinante queda multiplicado por λ^n, es decir, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

h) Si todos los elementos de una línea de un determinante (por ejemplo la j-ésima) son de la forma $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, entonces el determinante es igual a la suma de dos determinantes, cuyas columnas coinciden con las del determinante dado, excepto la j-ésima que lleva respectivamente cada uno de los dos sumandos. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & b_{1j}+c_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & b_{nj}+c_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & b_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & b_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & .. & c_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & c_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tema 5a: Repaso de Determinantes

… Más propiedades de los determinantes

j) El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes, es decir, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

k) En general, la propiedad anterior no es cierta para la suma, es decir, $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

Teorema 5.10: Las matrices elementales tienen determinante no nulo, concretamente

(a) $\det E_i(\alpha) = \alpha$

(b) $\det E_{ij}(\beta) = 1$

(c) $\det P_{ij} = -1$.

Teorema 5.13: Una matriz A es invertible si, y sólo si, $\det A \neq 0$.

Teorema 5.15: Si la matriz A es invertible, entonces $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Tema 5a: Repaso de Determinantes

Inversa y Regla de Cramer

Dos de las muchas aplicaciones de los determinantes son la de calcular la matriz inversa de una matriz y la resolución de un sistema lineal $Ax = b$ con matriz A invertible mediante la regla de Cramer.

Puesto que el método de Gauss es más eficiente para ambos cálculos, en este curso no repasaremos el uso de determinantes para estos cálculos (ver libro de teoría quien esté interesado).

Por otra parte, sí que haremos uso de los determinantes en el siguiente tema para calcular los valor y vectores propios de una matriz