Situación: Tenemos un sistema de ecuaciones lineales (SL) que es complicado de resolver. Resolver un sistema significa averiguar si es consistente o compatible, es decir, si tiene al menos una solución, y si es así, determinar si es única y encontrarla.

Solución: Se aplican procedimientos para hacer la resolución más sencilla.

1º.- Búsqueda de la solución exacta:

Dado un SL se puede encontrar un SL escalonado equivalente a él con el mismo conjunto solución pero que será más sencillo de resolver.

Métodos sistemáticos Directos para encontrar la solución en SL escalonados:

Gauss y Gauss-Jordan: permiten la resolución de SL escalonados. Encuentran la solución exacta del SL, si existe.

2º.- Búsqueda de la solución aproximada:

Métodos sistemáticos **Iterativos**: Jacobi y Gauss-Seidel obtienen una aproximación a la solución del SL a partir de la construcción de una sucesión de vectores. A veces convergen a la solución exacta con mayor precisión que con los métodos directos.

Se resolverán los SL sobre el cuerpo R (coeficientes reales).

Pasos para resolver un SL con métodos directos:

- El SL se representa con estructura matricial Ax=b.
- Se obtiene matriz ampliada [A|b] y su forma escalonada/reducida [C\d] .
- Se discute el SL a partir de la matriz [C|d].
- Si es el caso, se resuelve el SL aplicando un método directo.

Pasos para resolver un SL con un método iterativo:

- El SL se representa con estructura matricial Ax=b.
- Se estudia si la matriz A es diagonal dominante.
- Se ordenan ecuaciones y variables.
- Se obtiene ecuación de recurrencia en el SL del método iterativo elegido.
- Se elige criterio de parada.

Una **solución** de un SL es una lista u = (s1, s2,…, sn) de números que hacen de cada ecuación un enunciado verdadero cuando los valores de *u* se sustituyen en su correspondiente xi. Se dice que *u* verifica las *m* ecuaciones del sistema. El conjunto de todas las soluciones posibles se llama conjunto solución del SL. Según este conjunto el SL puede ser:

> **Incompatible**: si no tiene solución.

> **Compatible**: si tiene al menos una solución.

o Determinado: si tiene una única solución.

o Indeterminado: si tiene más de una □ infinitas soluciones

Discutir un SL consiste en clasificarlo y resolverlo en buscar las soluciones, en el caso de que sea compatible.

RESOLUCIÓN DE SL CON MÉTODOS DIRECTOS:

- SL representado como Ax=b tiene [A|b] como matriz ampliada. Si en SL b = [0,…0] el SL se dice homogéneo.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

SISTEMA LINEAL

MATRIZ AMPLIADA [A|b]

- Se obtiene matriz escalonada/reducida de [A|b] que llamaremos [C|d] con la que resolveremos el problema

A TENER EN CUENTA

En una matriz M:

- Una fila o columna distinta de cero (no nula) es la que tiene ,al menos, una entrada (elemento) diferente de cero.

- Una entrada principal de una fila es la entrada diferente de cero que se encuentra más a la izquierda (en una fila distinta de cero).

- Si en la entrada principal hay un 1, lo llamaremos uno principal.

<u>MATRIZ ESCALONADA/REDUCIDA</u>: Una matriz rectangular A (mxn) está en **forma escalonada** por filas si :

(a) La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1 principal.

(b) Cada 1 principal de una fila está en una columna situada a la derecha del 1 principal de la fila precedente.

(c) Si hay filas sólo de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Si además:

(d) Una columna tiene un 1 principal y el resto de entradas de la columna son ceros, la matriz A está en forma **escalonada reducida**.

<u>OPERACIONES PARA ESCALONAR UNA MATRIZ</u>

Tipo-1: Intercambiar las filas i y j, se indica: $F_{i \leftrightarrow j}$

Tipo-2: Multiplicar la fila i por $\alpha \neq 0$, se indica: $F_i \leftarrow \alpha F_i$

Tipo-3: Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$, se indica: $F_i \leftarrow F_i + \alpha F_j = F_{ij}(\alpha)$.

ALGORITMO

1º.- Obtener el primer 1 principal:

Si el primer elemento de la 1ª fila (a11):

. No es cero -> Dividir la fila por dicho número (operación T-2).

Hacer ceros por debajo de él (operación T-3).

. Es cero -> Si hay una fila por debajo con algún elemento no nulo, intercambiar 1ª fila con ésta.

Si todos los elementos por debajo son cero pasar a siguiente columna.

2º.- Buscar el siguiente 1 principal en las siguientes filas y columna hasta agotar las filas.

<u>Discusión de un SL</u> con matriz escalonada/reducida [C|d]. Un SL es:

Incompatible (SI) (no tiene solución): Si en [C|d] aparece un 1 principal en la última columna o si alguna fila queda [0,0,…0 | b], $b \neq 0$.

Compatible indeterminado (SCI)- infinitas soluciones: Si en [C|d] no hay ecuaciones del tipo 0 = b y el nº de 1 principales es menor que nº de incógnitas.

Compatible determinado (SCD)- una solución: Si en [C|d] no hay ecuaciones del tipo 0 = b y el nº de 1 principales es igual que nº de incógnitas.

<u>Resolución de un SL</u> con matriz escalonada/reducida [C|d].

GAUSS: [C|d] escalonada. Resolver Cx=d aplicando sustitución regresiva.

GAUSS-JORDAN: [C|d] escalonada reducida. En cada fila no nula de [C|d] se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal.

<u>Proceso:</u>.

1º.- Representar el SL mediante Ax = b, obtener su matriz ampliada [A|b] y la matriz [C|d] escalonada /reducida por filas.

2º.- Discutir y resolver Cx = d mediante el estudio de [C|d],

3º.- Resolver el SL Cx = d por método directo.

4º.- Las soluciones del SL Cx = d serán las de Ax = b.

<u>EJEMPLO</u>

$$\begin{aligned} x2 - 4x3 &= 8 \\ 2x1 - 3x2 + 2x3 &= 1 \\ 5x1 - 8x2 + 7x3 &= 1 \end{aligned}$$

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discusión: Sistema incompatible

Solución: no tiene

<u>EJEMPLO</u>

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Discusión: Sistema compatible indeterminado.

Infinitas soluciones.

Resolución: Incógnitas libres: x3, x4 ya que no tienen 1 principal. Se les asigna un parámetro.

Incógnitas básicas: x1, x2 tienen 1 principal. Se escriben en función de las libres y se calculan por sustitución regresiva.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Es un tipo de SL que se caracteriza porque tiene sus términos independientes nulos.

En forma matricial se escribe: $Ax = 0$.

Un SH es siempre compatible (rango(A) = rango(A*)) ya que tiene al menos la solución (0, 0,..., 0) que se denomina solución trivial. Puesto que, en la práctica, esta solución carece de interés, suele decirse que un sistema homogéneo posee solución sólo si ésta es distinta de la trivial.

Como $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ es siempre una solución trivial sólo se tienen dos posibilidades:

- la solución trivial es la única solución o
- existe un número infinito de soluciones además de ésta.

Si un sistema homogéneo presenta una solución $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ distinta de la trivial entonces se cumple que también son soluciones todas las proporcionales a ella: $(k \cdot s_1, k \cdot s_2, \ldots, k \cdot s_n)$, $\forall k \in R$.

>> La ecuación homogénea $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si, y sólo si, la ecuación tiene por lo menos una variable libre.

Teorema : Un SH de *m* ecuaciones con *n* incógnitas siempre tiene **una solución no trivial** si **m < n**, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

EJEMPLO

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: $x = y = z = 0$

MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER UN SL Ax =b

Un método iterativo obtiene una solución aproximada de la solución de Ax = b construyendo una sucesión de vectores:

x1, x2, . . . , xm

A partir de un vector inicial arbitrario x0 (vector nulo).

Para ello repite un mismo proceso usando una ecuación de recurrencia (cada método tiene su ecuación).

A cada repetición del proceso se le llama ITERACIÓN.

Se establecen condiciones de parada, como: $\left\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\right\| < 10^{-k}$. o bien parar en un nº determinado de iteraciones

MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

Se aplica sólo a sistemas cuadrados (Nº incógnitas = Nº ecuaciones).

Para obtener la ecuación de recurrencia: Se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación i se despeja la incógnita i (aii<>0).

ALGORITMO

Dado el sistema, una solución inicial $x^{(0)}$ y prefijados $k, N \in \mathbb{N}$

- Para $i = 1, 2, \ldots$ calcular $x^{(i)}$ en función de $x^{(i-1)}$

$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}} \\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i-1)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i-1)} - a_{n2}x_2^{(i-1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i-1)}}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

- Detener el proceso cuando $\left\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\right\| < 10^{-k}$ ó $i > N$.

EJEMPLO

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Ecuación recurrencia

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7} \qquad x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

1º iteración:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(0)}}{5}$$

6 primeras iteraciones

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	0'714	0'914	0'976	0'9934	0'998	0'999
$x_2^{(i)}$	0	1'400	1'829	1'949	1'985	1'996	1'999

La solución converge a (1,2)

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Para calcular la componente $x_j^{(i)}$ se usan (j -1) valores de la iteración actual (i) y (n –j) de la iteración anterior

ALGORITMO

$$
\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}} \\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i)} - a_{n2}x_2^{(i)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_j^{(i)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(i)} - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1}^{(i)} - a_{j,j+1}x_{j+1}^{(i-1)} - \cdots - a_{jn}x_n^{(i-1)}}{a_{jj}}}$$

EJEMPLO

$$
\begin{aligned}
7x_1 &- x_2 = 5 \\
3x_1 &- 5x_2 = -7
\end{aligned}
$$

1º iteración:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(1)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

2º iteración:

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + x_2^{(1)}}{7} = \frac{5 + 1'829}{7} \approx 0'976$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3x_1^{(2)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'976}{5} \approx 1'985$$

5 primeras iteraciones

i	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'976$	$0'998$	$1'000$	$1'000$
$x_2^{(i)}$	0	$1'829$	$1'985$	$1'999$	$2'000$	$2'000$

La solución converge a (1,2) más rápido que Jacobi

CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS

Un método iterativo converge a la solución del SL si la matriz de coeficientes original del SL es diagonalmente dominante (DD)

Definición 1.10: Una matriz de tamaño $n \times n$ se llama diagonalmente dominante cuando para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{jj}| > |a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jj-1}| + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|.$$

EJEMPLO

Matrices DD $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Si la matriz no es DD se reordenan las incógnitas/ecuaciones del SL inicial de manera que la nueva matriz de coeficientes sea DD

EJEMPLO

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 12y & - & z & = & -2 \\ 11x & - & 4y & + & 3z & = & -3 \\ -3x & - & 2y & - & 12z & = & -2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 11 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rrcrcrcr} & 12y & + & 3x & - & z & = & -2 \\ - & 4y & + & 11x & + & 3z & = & -3 \\ - & 2y & - & 3x & - & 12z & = & -2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 3 \\ -2 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

EJERCICIO-1

Un hechicero utiliza 4 ingredientes A, B, C y D para elaborar un brebaje mágico. Una unidad de cada ingrediente consigue los efectos que se muestran en la siguiente tabla con sus cantidades correspondientes. Sean -x, y, z, t- las cantidades respectivas de cada uno de los ingredientes y –u,v,r,w- las unidades de cada efecto en el brebaje.

	A	B	C	D
amore	1	1	1	2
énfasis	1	2	1	3
locura	1	3	2	1
pasión	2	2	1	1

? Calcula la cantidad de cada ingrediente necesaria para que el brebaje contenga 30 unidades de amore, 43 de énfasis, 32 de locura y 25 de pasión.

EJERCICIO-2 a) Calcular las matrices ampliada [A|b], escalonada [C|d] y reducida [C'|d']. b) Discutir el SL según [C'|d'].
c) Resolverlo con [C|d]. d) Resolverlo con [C'|d']

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 1 \\
3x - 2y - 4z &= -3 \\
5x - y - z &= 4
\end{aligned}
$$

EJERCICIO-3 a) Calcular las matrices ampliada [A|b], escalonada [C|d] y reducida [C'|d']. b) Discutir el SL según [C'|d'].
c) Resolverlo con [C|d]. d) Resolverlo con [C'|d']

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 5x - y - 3z &= -7 \\ 4x + 3y + z &= 2 \end{aligned}$$