DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA INFORMATICA Y COMPUTACIÓN

Examen MATEMÁTICA DISCRETA 8-6-1996

1.- (a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en Z_7.

Expresar el resultado mediante representantes de clase entre 0 y 6.¿Existe alguna solución en Z_5 ?

(b) Usar el Teorema de Fermat para calcular el resto de dividir 3^{47} entre 23.

2.- Determinar la cantidad de ordenadores que se pueda comprar de cada uno de los precios 290.00pts y 170.000pts si se dispone de un presupuesto de 7.800.000pts.

3.- La tabla siguiente es una lista de las actividades $a_1, a_2, ..., a_{11}$ de un proyecto y para cada una de ellas, el tiempo en días necesario y las actividades que deben completarse antes de poder iniciarse.

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo Necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	-	-	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Calcular el mínimo número de días en que puede completarse el proyecto. Identifica el camino crítico, explicando su significado. Explica razonadamente cuantos días se puede retrasar la actividad a_{10} sin afectar la duración total del proyecto.

4.- Consideramos un grafo ponderado con conjunto de vértices V={A,B,C,D,E,F}, y cuya matriz de pesos es:

$$\begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 6 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Calculamos el camino más corto de A a E y su peso, con la condición de que no contenga los vértices C y F como internos. El algoritmo que utilicéis debe aplicarse sobre la totalidad del grafo, es decir, no se permite eliminar vértices.

5.- (a) Dada la expresión en notación polaca directa:

$$\backslash - a \uparrow b\ 2 + c * 3\ d$$

Calcular la expresión original y escribir también en notación polaca inversa.

(b) Hallar el número de formas de repartir 15 ordenadores entre tres departamentos debiendo asignarse al menos tres a cada departamento.

Nota: Todos los problemas puntúan por igual. No olvidéis detallar y justificar correctamente cada pregunta. Una respuesta no justificada se considerará incorrecta.

EXÁMEN DE JUNIO DE 1996

① Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$

a)
$$\left.\begin{array}{l} \times 2 \rightarrow x + [2] y = [4] \\ [4] + [3] y = [4] \end{array}\right\}$$

$$\times 2 \rightarrow [2][x] + [4][y] = [8]$$
$$[4][x] + [3][y] = [4]$$
$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$[6][x] + [7]\cancel{[y]} = [12]$$
$$\boxed{[6][x] = \cancel{[12]}} \rightarrow \mathbb{Z}_7$$
$$[6][x] = [5]$$
$$\cancel{[6]}^{-1}\cancel{[6]}[x] = [5][6]^{-1}$$
$$[x] = [3\cancel{0}] \rightarrow \mathbb{Z}_7$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \underline{28} & 4 \\ ② & \end{array} \qquad \boxed{[x] = [2]}$$

• buscamos el m.c.d entre 6 y el 7

m.c.d (6,7)

$7 = 1 \cdot 6 + ①$

$6 = 6 \cdot 1 + 0$

• Betout

$\underline{1 = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6}$

$[1] = \cancel{[1][7]} + \cancel{[-1]}[6] \rightarrow \mathbb{Z}_7$

$[1] = [6][6]$

aplicamos el inverso

$[6]^{-1}\cancel{[1]} = [6]\cancel{[6]}\cancel{[6]^{-1}}$

$\boxed{[6]^{-1} = [6]}$

Ahora sustituimos en la ecuación principal

$[2][2] + [2][y] = [4]$

$[2][y] = [4] + [-2]$

$[2][y] = [4] + [5]$

$[2][y] = [9] \rightarrow \mathbb{Z}_7$

$\boxed{[2][y] = [2]}$

m.c.d.(2,7)

$7 = 3 \cdot 2 \cdot + ①$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 7 - 3 \cdot 2$

$[1] = \cancel{[7]} + [-3][2]$

$[2]^{-1}[1] = +[4]\cancel{[2]}\cancel{[2]^{-1}}$

$\boxed{[2]^{-1} = [4]}$

$[8] \rightarrow ①$

$\rightarrow \cancel{[4]}\cancel{[2]}[y] = \cancel{[2]}\cancel{[4]}$

$\boxed{[y] = [1]}$

b) Usar el Teorema de fermat para calcular el resto de dividir 3^{47} entre 23

$$\boxed{3^{47} \ (\bmod 23)}$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 23 \\ \hline \textcircled{4} & 1 \end{array}$$

$3^{23-1} \equiv (\bmod 23)$

$3^{22} \equiv 1 (\bmod 23) \to 3^{3} = 27 = (\bmod 23) = \boxed{4 (\bmod 23)}$

$$\begin{array}{r|l} 47 & 22 \\ 44 & 2 \\ \hline \textcircled{3} & \end{array}$$

$47 = 22 \times 2 + 3$

$3^{47} = 3^{22 \cdot 2 + 3} = 3^{22 \cdot 2} \cdot 3^{3}$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 22 \\ 22 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

② Determinar la cantidad de ordenadores que se pueden comprar de cada uno de los precios 290.000 pts y 170000pts si se dispone de 7.800.000pts.

$290.\cancel{000}x + 170.\cancel{000}y = 7.800.\cancel{000}$

$\downarrow \% 10.000$

$29x + 17y = 780$

$$\boxed{\begin{array}{l} 29 = \alpha . 1 \Rightarrow \alpha = 29 \\ 17 = B 1 \Rightarrow B = 17 \end{array}}$$

$29 = 1 \times 17 + 12$

$17 = 1 \times 12 + 5$

$12 = 2 \times 5 + 2$

$5 = 2 \times 2 + \textcircled{1}$

$2 = 2 \times 1 + 0$

$1 = 5 - 2 \times 2$

$= 5 - 2(12 - 2 \times 5)$

$= 5 - 2 \times 12 + 4 \times 5$

$= -2 \times 12 + 5 \times 5$

$= -2 \times 12 + 5(17 - 1 \times 12)$

$= -2 \times 12 + 5 \times 17 - 5 \times 12$

$= -7 \times 12 + 5 \times 17$

$= -7 \times (29 - 1 \times 17) + 5 \times 17$

$= -7 \times 29 + 7 \times 17 + 5 \times 17$

$= -7 \times 29 + 12 \times 17$

$(-7, 12) \to 29x + 17y = 1$

$(-5460, 9360) \to 29x + 17y = 780$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = -5460 + 17k \\ y = 9360 - 29k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{k = 322} \boxed{\begin{array}{c} \text{Solucion} \\ \left\} \begin{array}{l} x = 14 \\ y = 22 \end{array}\right. \end{array}}$$

$-5460 + 17k \geq 0$

$17k \geq 5460$

$\boxed{k \geq 321'2}$

$9360 - 29k \geq 0$

$-29k \geq -9360$

$k \leq \frac{9360}{29}$

$\boxed{k \leq 322'75}$

$321'2 \leq K \leq 322'75$

$\boxed{K} = \boxed{322}$

Transcrito by NiLLS