ESPACIO VECTORIAL

*Estructura matemática en la cual al aplicar las operaciones de **suma y producto por escalar** a dos elementos (vectores, matrices…..) del espacio se obtiene un elemento del espacio.*

***Ej**: La suma de 2 vectores es un vector y no un punto*

Dado cuerpo K (veremos R^n) y un conjunto no vacío U se definen 2 operaciones:

→ Ley composición interna suma: **U + U → U / (u,v) → u + v**

Conmutativa, Asociativa, Distributiva, E. Neutro y opuesto

→ Ley composición externa **producto por escalar: K x U → U / (α ,v) → α v**

Asociativa, Distributiva, E. Unidad

R^n es un espacio vectorial formado por **n-tuplas o n-vectores : $u = (u_1, u_2,\dots u_n)$**

Si n=2 → u = (u1,u2) es un vector de R2
Si n=3 → u = (u1,u2,u3) es un vector de R3, etc

Un **Subespacio Vectorial** de R^n es todo subconjunto no vacío $S \subseteq R^n$:

a) El vector nulo está en S, $0 \in S$

b) Si un vector está en S, tb lo están sus múltiplos. $\alpha u \in S$, $\forall u \in S$, $\alpha \in R$

c) Si dos vectores están en S, tb lo está la suma de ambos. $u + v \in S$, $\forall u, v \in S$

Ejemplo El plano XY de vectores (x,y,0) es subespacio de R3.
a) Contiene al vector (0,0,0), x=0, y=0
b) Es cerrado para la suma y producto por escalar:
• Suma: (x,y,0) + (x’,y’,0) = (x+x’, y+y’, 0), elemento del plano.
• Producto por un escalar: λ, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0), elemento del plano.

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES N-DIMENSIONALES

Un vector $v \in$ Rn es combinación lineal (CL) de los vectores u1, u2,…up, si existen escalares $\alpha 1, \alpha 2,\dots \alpha p$ / $v = \alpha 1u1 + \alpha 2u2 +\dots \alpha pup$

Para demostrar que un vector **v** es CL de p vectores $u_1,\dots u_p$, se construye un SL a partir de la ecuación paramétrica:

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 +\dots + \alpha_p u_p$

Si el sistema es **SCD** → v es **CL** de los vectores de forma **ÚNICA**

Si el sistema es **SCI** → v es **CL** de los vectores de **infinitas formas**

Si el sistema es **INCOMPATIBLE** → v **<u>NO</u> es CL** de los vectores

Teorema 4.1: Un SL **Ax = b** es **compatible,** si, y sólo si, **b** es **CL** de las **columnas de A**

SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Dado un conjunto de vectores $\mathbf{u_1,\ldots,u_p} \in R^n$, el conjunto de **todos** los vectores que pueden escribirse como **CL** de ellos se llama **Envoltura lineal** de dichos vectores. Se escribe : **Env{$u_1,\ldots,u_p$ }**

A los vectores de la envoltura $\mathbf{u_1,\ldots,u_p}$ se les llama: **vectores generadores / conjunto generador del espacio R^n**.

Teorema 4.2:

Dados los vectores $\mathbf{u_1,u_2,\ldots u_p}$ **de R^n**

a) **0** $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$}**

b) $\mathbf{u_1}$ $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$},** para i=1,…p

c) Si **u,v** $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$}** ➔ **u + v** $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$}.**

d) Si **u** $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$},** $\alpha \in R$, ➔ **αu** $\in$ **Env{$u_1,u_2,\ldots u_p$}**

Ej. Para comprobar **si u** $\in$ **Env{v1, . . . ,vn}** se plantea un SL y se comprueba si es compatible o incompatible.

Ej. Para demostrar que u $\in$ Env {v,w} = Env {(4,5,6), (7,8,9)}, siendo u = (1,2,3) se comprueba si u es CL de v, w: u = α v + β w.

Teorema 5.3
Si u $\in$ Env {u1,…up } ➔ Env{u, u1,…up} = Env{u1,…up}

Para determinar si los vectores $\mathbf{v_1,\ldots v_n}$ <u>**generan**</u> un Espacio vectorial **V** hacer:

Paso1: **Seleccionar** un vector arbitrario de V.

Paso2: Determinar si **v es CL** de los vectores $\mathbf{v_1,\ldots v_n}$.

Si lo es, entonces **$v_1, \ldots, v_n$ generan a V; Si no**, **$v_1, \ldots, v_n$ no generan** a V

Def: Los vectores $\mathbf{u_1\ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Independiente** LI si existen escalares $a_1,\ldots a_p$ <u>**todos nulos**</u> / $\mathbf{a_1u_1+\ldots a_pu_p = 0}$

Def: Los vectores $\mathbf{u_1\ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Dependiente** LD si existen escalares $a_1,\ldots a_p$ <u>**no todos nulos**</u> / $\mathbf{a_1u_1+\ldots a_pu_p = 0}$

Determinar si los vectores ui son LI/LD

Paso 1.- Plantear la ecuación $\mathbf{a_1u_1+\ldots a_nu_n = 0}$ que lleva a un **SH**

Paso 2.- Resolver el **SH**.

- si el SH tiene sólo solución trivial (**SCD**) → los vectores son **LI**.
- si el SH tiene solución no trivial (**SCI**) → son **LD**

Teorema 4.4

Sea Ax = 0, las columnas de A forman un conjunto LD sii SH es SCI

Si A es una matriz cuyas columnas son los vectores u1…un
- Las columnas de A son LI sii todas ellas tienen 1º principales.
- Las columnas de A son LD sii alguna columna no tiene 1º principales.

Corolario:
Un conjunto de vectores LI en R^n contiene a lo más n vectores.

Ej. Los vectores (2,-3,4), (4,7,-6) , (18, -11, 4) y (2,-6,3) son LD ya que forman un conjunto de 4 vectores de 3 componentes (R^3)

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

<u>Def</u>: Una **base B** es el menor conjunto de vectores **LI** que generan todo el espacio **S**.
Cualquier vector **u** se escribe como una **CL** de los elementos de la **base B**: $\mathbf{u = a_1v_1 + ... + a_nv_n}$,
a_k : escalares; v_k (k = 1, ..., n) : elementos de la base B.

Si S admite una base B ={v1,…vn} → dim(S) = n

<u>Propiedades</u>. Sea **B** base de **S, espacio vectorial /dim(S)=n**

- → *Todos los elementos de **B** pertenecen al espacio **S.***
- → *Todas las bases de **S** tienen n-vectores.*
- → *Cada vector de **S** se escribe, de forma única, como **CL** de los vectores de **B***
- → *Los elementos de **B** forman un sistema de vectores **LI**.*
- → *Las bases no son únicas. Todo conjunto de n vectores **LI** en R^n es una base en R^n*
- → *Una base tiene el **mínimo** número de vectores LI que generan todos los vectores del espacio S.*
- → *Todas las bases de S tienen el mismo nº de vectores.*

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA una matriz A = [aij] mxn

SUBESPACIO COLUMNA : Col A

Si A = [a:1,…a:n] son las columnas de A →
Col A = Env{a:1,…a:n}

La base Col A está formada por los vectores de las columnas de la reducida de A que tienen 1’s principales

SUBESPACIO FILA : Fil A

Si A = [a1: ; a2: ;…am:] son las filas de A →
Fil A = Env{a1:, a2:,…am:}

La base Fil A está formada por los vectores de las filas de la reducida de A que tienen 1’s principales

SUBESPACIO NULO : Nul A

El espacio nulo Nul A es el conjunto de todas las soluciones del SH: Ax = 0.

Nul A = {x/ $x \in R^n$, Ax = 0}

*El subespacio nulo se llama **núcleo** de la matriz*