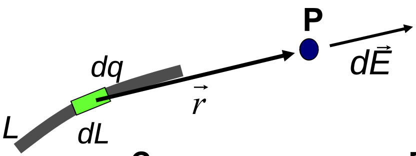
Tema 2: Distribuciones de carga. Capacidad y energía electrostática

1. Densidades de carga.
2. Ley de Gauss: aplicaciones.
3. Propiedades electrostáticas de los conductores.
4. Condensadores y dieléctricos.
5. Energía del campo eléctrico

Densidades de carga



Cargas

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Ppo. Superposición (sumatorio)

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$$

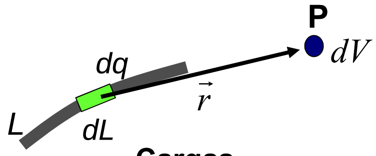
Distribución continua de cargas

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_\mathrm{r}$$

Ppo. Superposición (integración)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_\mathrm{r}$$

Densidades de carga



Cargas

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Ppo. Superposición (sumatorio)

$$V = \sum V_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

Distribución continua de cargas

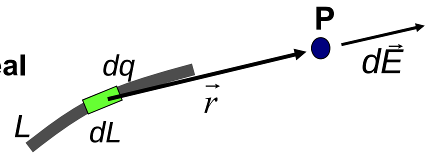
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Ppo. Superposición (integración)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Densidades de carga

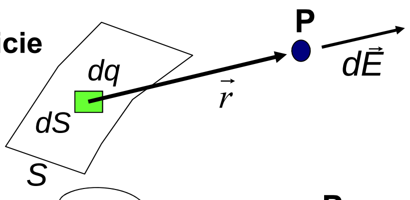
Lineal



Densidad lineal (C/m)

$$\lambda = \frac{dq}{dL} \qquad dq = \lambda\, dL$$

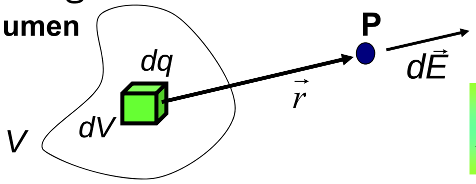
Superficie



Densidad superficial (C/m^2)

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad dq = \sigma\, dS$$

Volumen



Densidad volúmica (C/m^3)

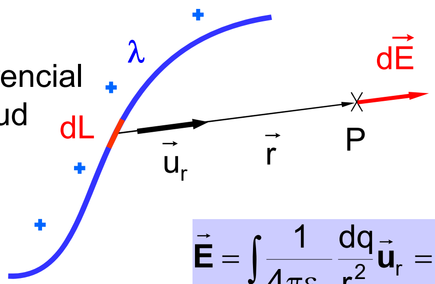
$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad dq = \rho\, dV$$

Densidades de carga

Distribución lineal de carga   λ: densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dL}$$

dL : diferencial de longitud



$$dq = \lambda dL$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dL}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$

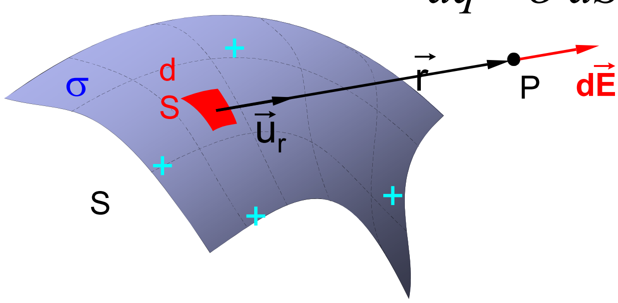
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dL}{r}$$

Densidades de carga

σ: densidad superficial de carga $\sigma = \frac{dq}{dS}$

$$dq = \sigma\, dS$$

dS : diferencial de área



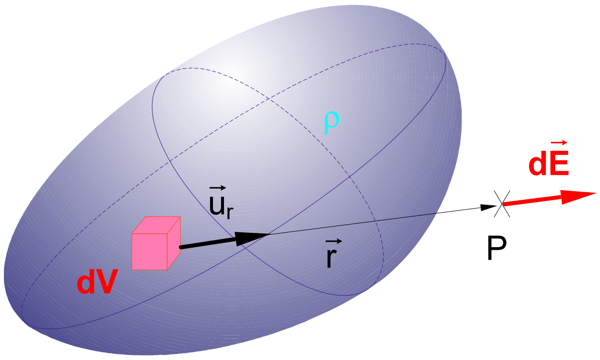
$$\vec{\mathbf{E}} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

Densidades de carga

ρ: densidad volumétrica de carga $\rho = \frac{dq}{dV}$

$$dq = \rho\, dV$$



dV : diferencial de volumen

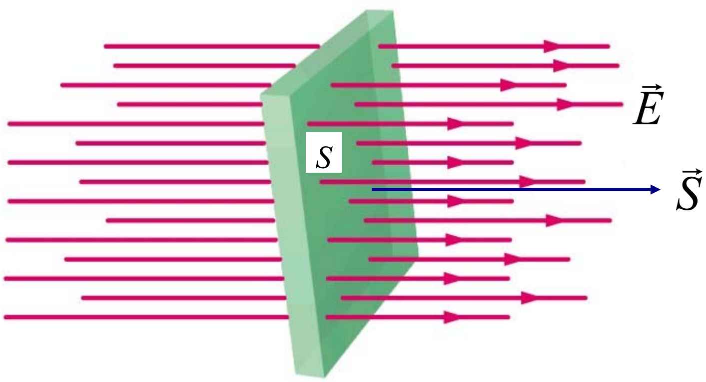
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

7

Flujo del campo eléctrico

Campo eléctrico uniforme y superficie plana perpendicular

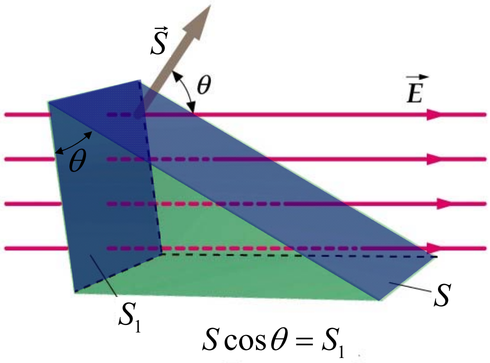


$$\Phi_E = ES$$

8

Flujo del campo eléctrico

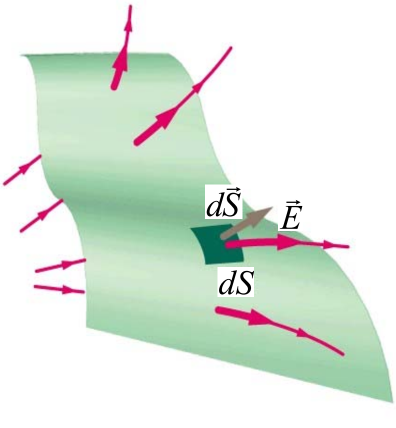
Campo eléctrico uniforme y superficie plana ***inclinada***



$$\Phi_E = ES_1 = ES\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S}}$$

Flujo del campo eléctrico

Caso más general:



$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

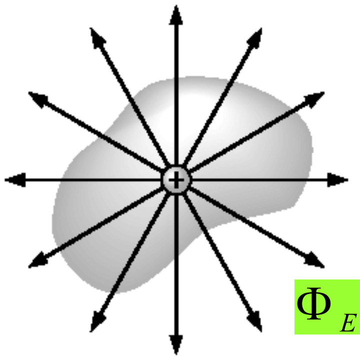
$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

Flujo del campo eléctrico

SUPERFICIE CERRADA (criterio de signos)**:**

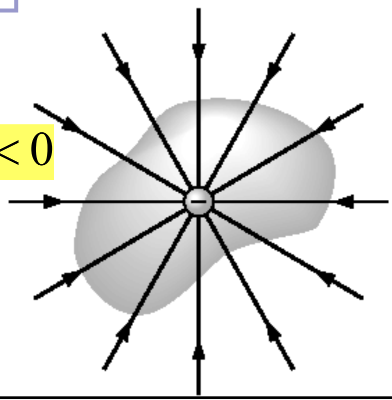
El flujo total puede ser positivo (**saliente**), negativo (**entrante**) o cero.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



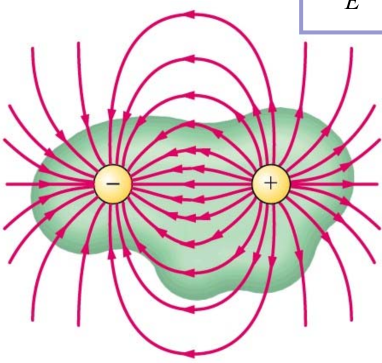
$\Phi_E > 0$

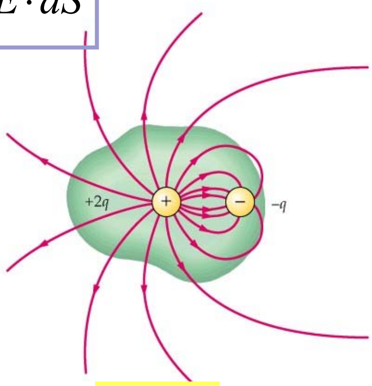
$\Phi_E < 0$



Flujo del campo eléctrico

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$





$\Phi_E = 0$

$\Phi_E > 0$

12

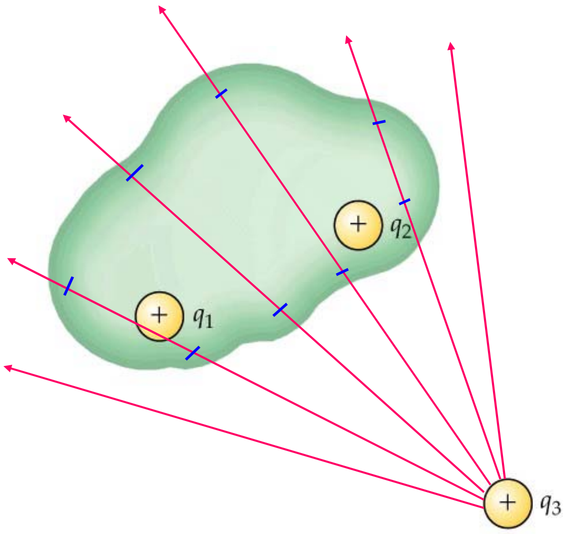
Ley de Gauss

"El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por la superficie".

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ley de Gauss

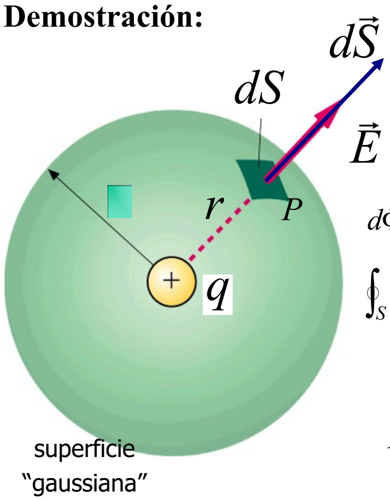


$$\Phi_E = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

Ley de Gauss

En Electrostática la Ley de Gauss es equivalente a la Ley de Coulomb.

Demostración:



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

- ***simetrías*** para definir la ***s. gauss***.

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \ldots(\vec{E}, d\vec{S} \text{ paralelo})\ldots = E\,dS$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\,dS = \ldots E \text{ constante} \ldots =$$

$$= E\oint_S dS = E\,4\pi r^2$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r}$$

15

Ley de Gauss

Aplicaciones

En **distribuciones continuas de carga** con **elevada simetría** la Ley de Gauss nos permite calcular fácilmente el **módulo del campo eléctrico**.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

escoger **superficie gaussiana apropiada** en cada caso:

- E constante
- $\vec{E}, d\vec{S}$ paralelos o perpendiculares entre sí

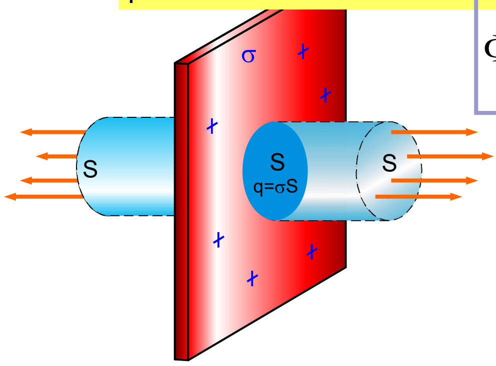
16

Ley de Gauss

Aplicaciones: plano indefinido cargado

σ uniforme

superficie gaussiana : cilindro perpendicular al plano



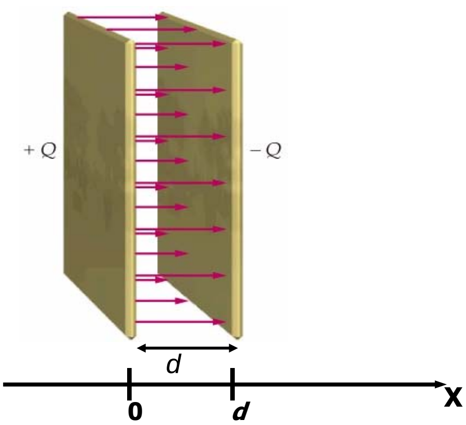
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \text{ (módulo)}$$

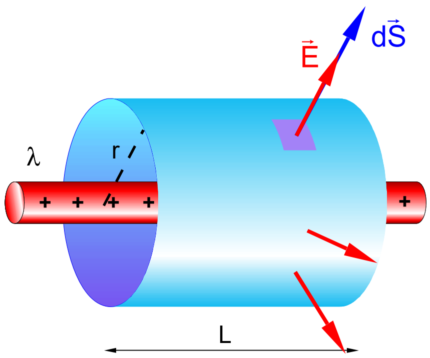
Ley de Gauss

ejercicio/ Campo creado por dos planos indefinidos cargados, separados una distancia ***d***, con igual densidad de carga pero de signo opuesto.



Ley de Gauss

Aplicaciones: carga lineal indefinida



$$\oint_{sup.cil.} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

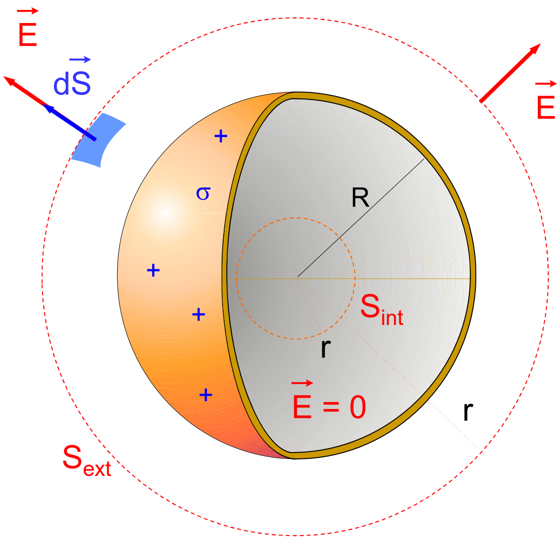
$$\vec{\mathbf{E}} // d\vec{\mathbf{S}}$$

$$E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \text{ (módulo)}$$

Ley de Gauss

Aplicaciones: corteza esférica cargada



$r < R$

$$r < R \rightarrow \Phi = 0 \rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{int} = 0 \rightarrow V = cte$$

$r \geq R$

$$r \geq R \rightarrow \int_{S_{ext}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Ley de Gauss

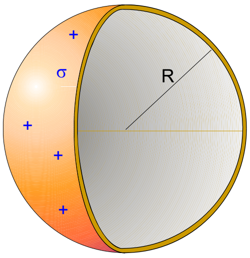
Aplicaciones: corteza esférica cargada

ejercicio/ Calcula la expresión del potencial eléctrico.

$$\boxed{V_P = -\int_{ref}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} \;\; (V_{ref}=0)}$$

$r < R$ $\quad V_{\text{int}} = -\int \vec{E}_{\text{int}}\cdot d\vec{l} = C_1$

$r \geq R$ $\quad V_{ext} = -\int \vec{E}_{ext}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$



Condiciones:

•origen de potenciales $\quad V_\infty = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

•continuidad en la frontera

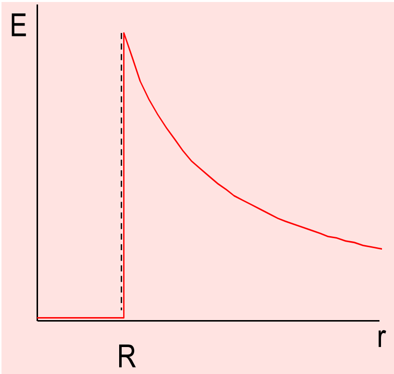
$$V_{\text{int}}(r=R) = V_{ext}(r=R) \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

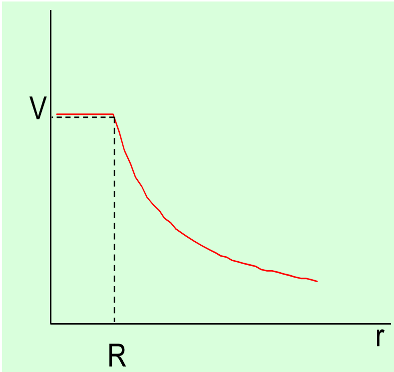
$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,;\, V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

21

Ley de Gauss

Aplicaciones: corteza esférica cargada (cont.)





$$\boxed{E_{\text{int}} = 0\,;\, E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

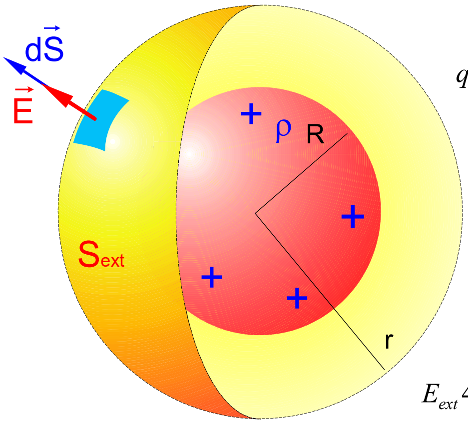
$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,;\, V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

22

Ley de Gauss

Aplicaciones: distribución esférica de carga

ρ uniforme, *esfera* radio R



$r < R$ $\qquad \oint_{S_{\text{int}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{\text{int}}\, 4\pi r^2;$

$$q_e = \int_{V_{\text{int}}} \rho\, dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{E_{\text{int}} = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}}$$

$r \geq R$ $\qquad \oint_{S_{ext}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{ext}\, 4\pi r^2$

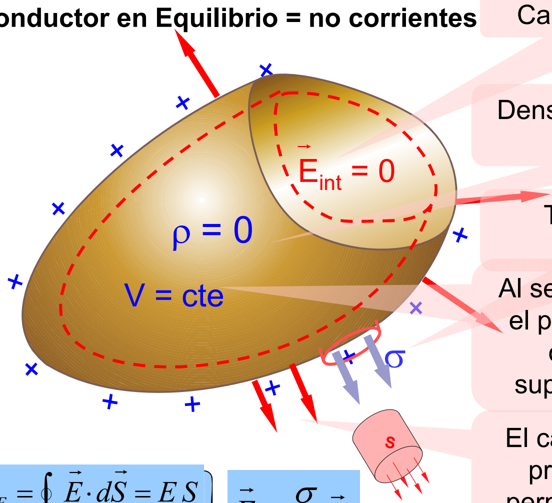
$$q_e = \int_{V_{ext}} \rho\, dV = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = Q_{total}$$

$$E_{ext}\, 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \boxed{E_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

23

Conductores en equilibrio electrostático

Conductor en Equilibrio = no corrientes



Campo nulo en el interior.

Densidad volumétrica de carga nula.

Toda la carga está en la superficie.

Al ser nulo el campo eléctrico, el potencial electrostático es constante (Volumen y superficie equipotenciales).

El campo eléctrico en puntos próximos al conductor es perpendicular a la superficie.

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\, S \\ q_{enc} = \sigma\, S \end{array}\right\} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n$$

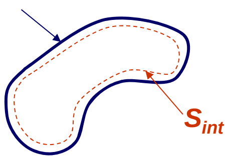
24

Conductores en equilibrio electrostático

1. En los conductores que alcanzan la situación de equilibrio, el campo eléctrico en su interior es cero.

Si ***E*** fuese diferente de cero, la carga libre en la dirección del campo no estaría en reposo. Por tanto no habría equilibrio.

2. La carga de un conductor se encuentra totalmente en la superficie del conductor.



De **1**, E=0 en $\mathbf{S_{int}} \Rightarrow \Phi=0 \Rightarrow q=0$ en S_{int}

$\Rightarrow$ q está en la superficie del conductor **S**

Conductores en equilibrio electrostático

3. La superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial

Si no fuera equipotencial, las ***q*** se moverían de los puntos de potencial alto a los de potencial bajo, hasta que el potencial sea el mismo en toda la superficie. Si esto sucede, el conductor no está en equilibrio. Por tanto, la superficie es equipotencial.

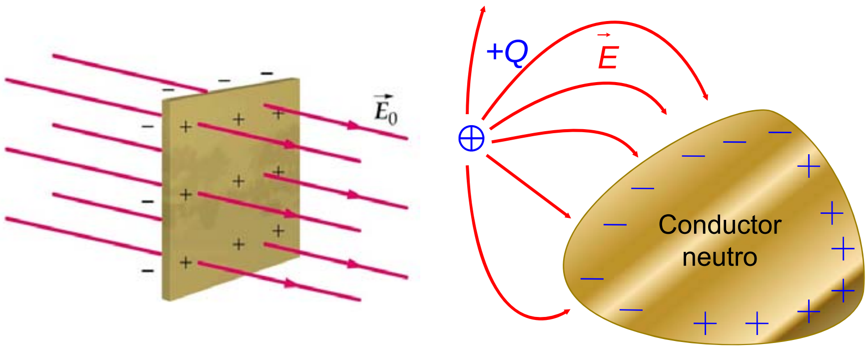
4. El campo eléctrico en puntos próximos a la superficie del conductor es perpendicular a la superficie y su valor es:

Como la superficie es equipotencial, y las líneas de fuerza son $\perp$ a estas superficies $\Rightarrow$ ***E*** es también $\perp$ a la superficie

$$\left.\begin{aligned} \Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,S \\ q_{enc} = \sigma\, S \end{aligned}\right\} \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n}$$

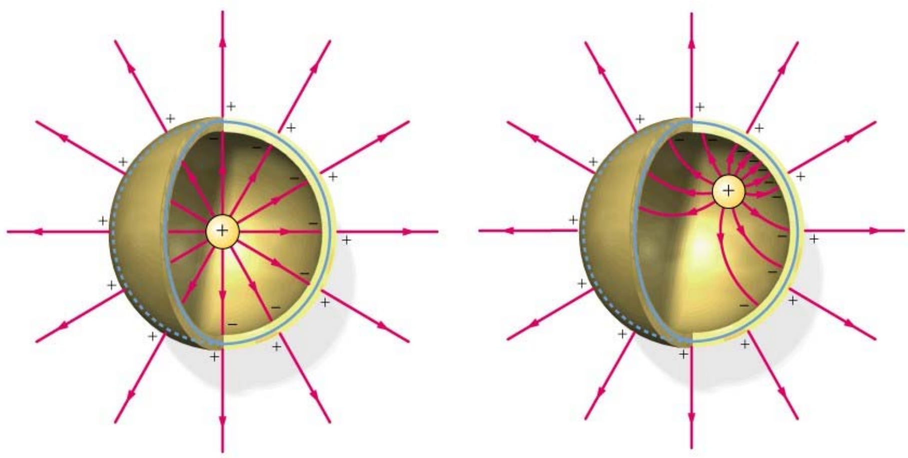
Prop. electrostáticas de los conductores

Fenómenos de influencia electrostática

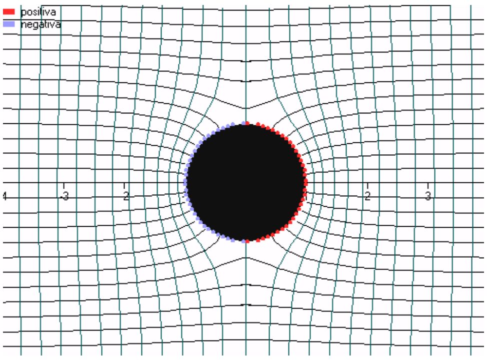


Prop. electrostáticas de los conductores

Fenómenos de influencia electrostática



Prop. electrostáticas de los conductores



Jaula de Faraday:

En un conductor cargado y en equilibrio electrostático, que posea una cavidad interior, la carga esta localizada sólo en la superficie exterior.

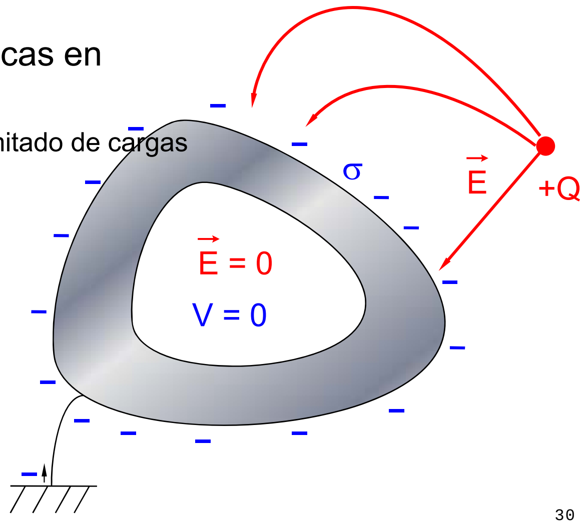
29

Prop. electrostáticas de los conductores

Fenómenos de influencia electrostática: Pantalla hacia dentro

Tierra (características en electrostática):

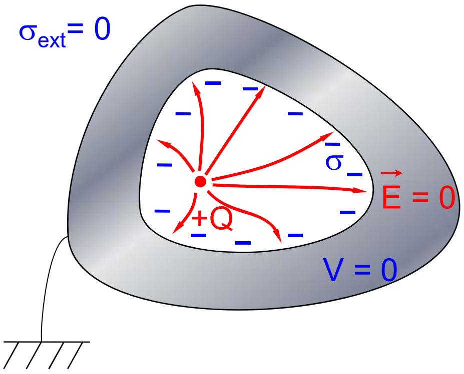
- suministrador ilimitado de cargas
- potencial V = 0



30

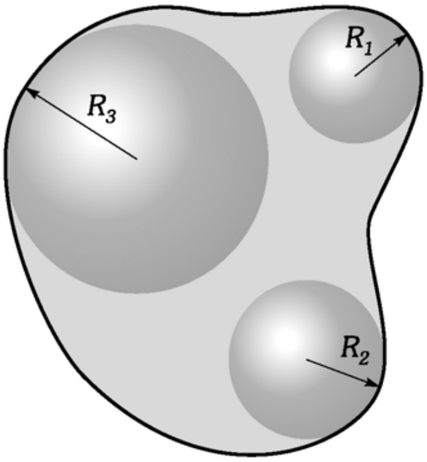
Prop. electrostáticas de los conductores

Fenómenos de influencia electrostática: Pantalla hacia fuera



Prop. electrostáticas de los conductores

- Efecto punta: El campo eléctrico es mayor cerca de las zonas de menor radio de curvatura



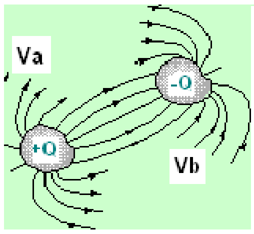
- RUPTURA DEL DIELÉCTRICO

  Aire: $E \sim 3$ MV/m

CONDENSADORES

Condensador

dispositivo formado por dos conductores próximos con cargas de la misma magnitud y signo contrario este sistema es un dispositivo para almacenar carga y energía.

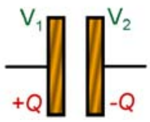


Capacidad

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}}} \qquad \left[\frac{C}{V} = \text{Faradio}\right]$$

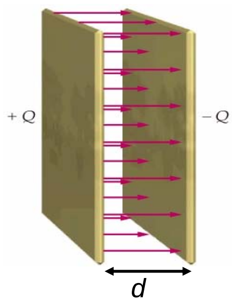
"cociente entre la carga de cualquiera de los conductores y la diferencia de potencial existente entre ellos."

Símbolo :



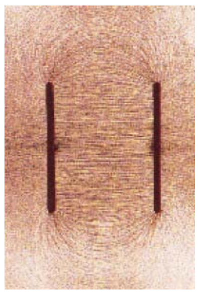
CONDENSADORES

Condensador de placas plano-paralelas



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

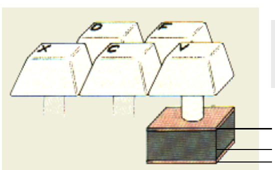
$$V = Ed$$



$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

La capacidad no depende de ***Q*** ni de ***V***

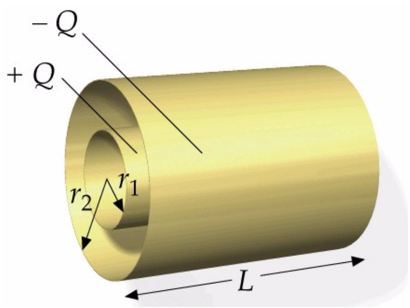
Por lo general ***C*** depende del tamaño, forma, geometría de los condensadores y del medio aislante que los separa



0.3 mm

CONDENSADORES

Condensador cilíndrico

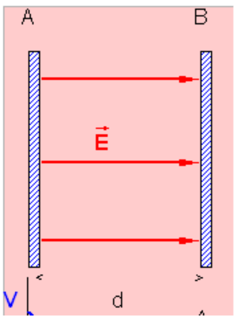


$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$$

35

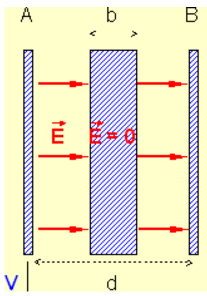
CONDENSADORES

ejercicio/ Capacidad de un condensador con lámina metálica en su interior



$$C_{ANTES} = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_{DESPUÉS} = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{E(d-b)} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b)} = \frac{\varepsilon_0 S}{(d-b)}$$

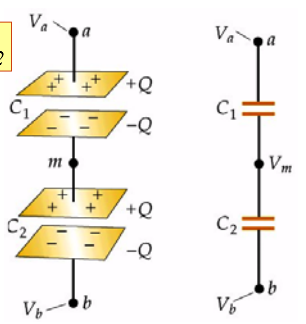


36

CONDENSADORES

Asociación de condensadores: EN SERIE

$$\boxed{Q_1 = Q_2}$$



$$V_a - V_m = V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_m - V_b = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V = V_2 + V_1$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

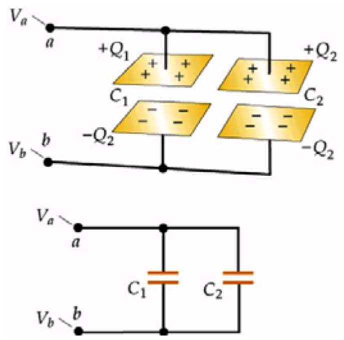
$$\boxed{C_{eq} = \frac{Q}{V_a - V_b}}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$

CONDENSADORES

Asociación de condensadores: EN PARALELO



$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

$$\Delta V = V_a - V_b$$

$$\boxed{Q = Q_1 + Q_2}$$

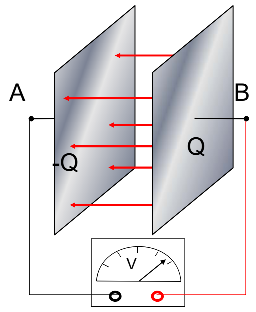
$$\boxed{\frac{Q}{V_a - V_b} = C_1 + C_2}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

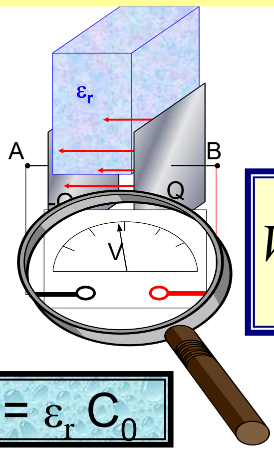
$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i}$$

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

DIELÉCTRICO HOMOGÉNEO ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR



$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$



$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

$$C = \varepsilon_r C_0$$

La capacidad del condensador aumenta

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

CONSTANTES DIELÉCTRICAS

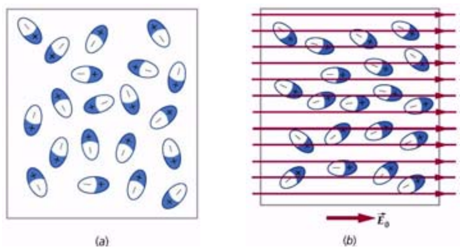
Material dieléctrico	Constante dieléctrica
Aire	1.00059
Aceite de transformador	2.24
Poli estireno	2.55
Papel	3.7
Baquelita	4.9
Vidrio (Pyrex)	5.6
Porcelana	7
Agua (20º)	80

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

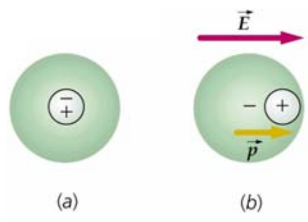
Sustancia Polarizada

Los dipolos eléctricos se alinean de manera espontánea o debido a la acción de un campo eléctrico.

Molécula polar



Molécula no polar

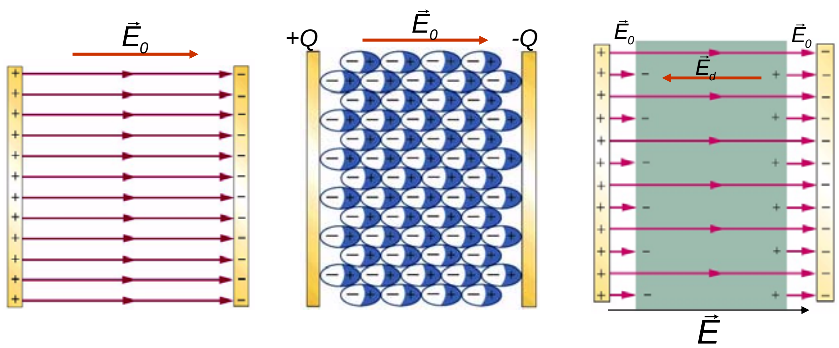


$$\vec{p} = qd\,\vec{u}_p \qquad \vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

41

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

DIELÉCTRICO HOMOGÉNEO ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR



$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

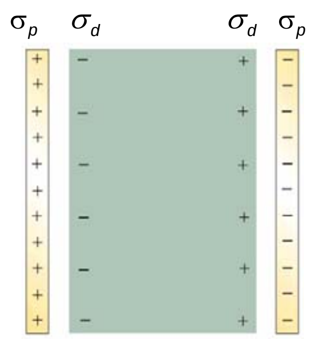
Permitividad eléctrica relativa del dieléctrico

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

42

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

DIELÉCTRICO HOMOGÉNEO ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR



$$E_0 = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \qquad E_d = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = E_0 - E_d = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_d = \sigma_p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \Rightarrow \sigma_d \leq \sigma_p$$

Si no hay dieléctrico: $\varepsilon_r = 1$, $\sigma_d = 0$

Si hay un conductor: $\varepsilon_r = \infty$, $\sigma_d = \sigma_f$

43

PROPIEDADES ELECTROSTÁTICAS DE LOS DIELÉCTRICOS

La capacidad del condensador aumenta $\quad C = \varepsilon_r C_0$

La diferencia de potencial y el campo eléctrico disminuyen

$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Densidad superficial de carga del dieléctrico $\quad \sigma_d = \sigma_p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

44

CAMPO Y POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA *q* PUNTUAL DENTRO DE UN DIELÉCTRICO

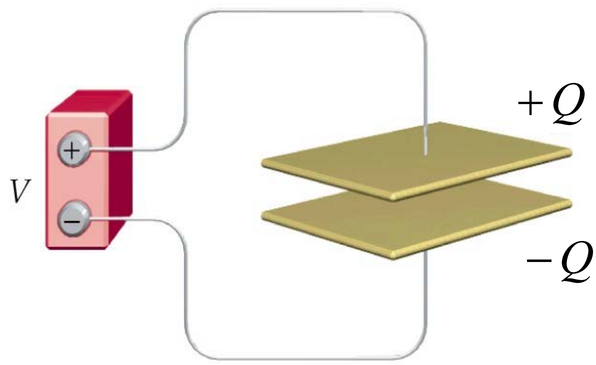
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)\vec{u}_r$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

- Durante la carga de un condensador, se transfiere carga desde la batería hasta las placas. La batería (generador) realiza un trabajo en el proceso.
- Parte de este trabajo queda almacenado en forma de energía potencial electrostática, *U*.



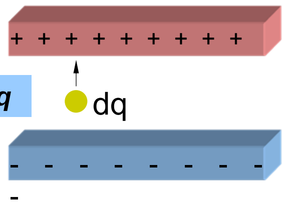
ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

Condensador de capacidad ***C***, con carga ***q***

$$V = \frac{q}{C}$$

Agregamos un ***dq***



$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

$$U_Q - U_0 = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

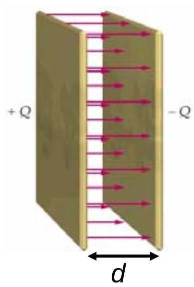
ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

Para un condensador de láminas planas y paralelas

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\Delta V = Ed$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(Ad)\varepsilon_0 E^2$$



DENSIDAD DE ENERGÍA

Energía por unidad de volumen (V) entre las placas del condensador

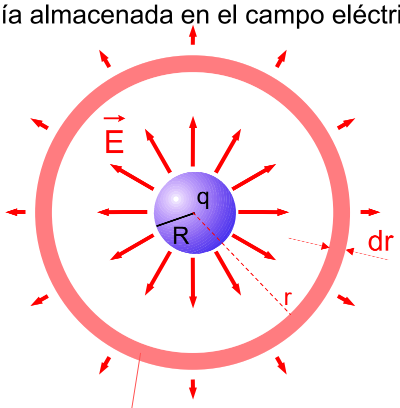
$$u_E = \frac{U}{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$U = \int_{\mathbf{V}} u_E\, d\mathbf{V}$$

Energía eléctrica almacenada en un volumen ***V*** donde existe un campo eléctrico ***E***

ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

ejercicio/ Tenemos una esfera metálica con carga neta *q*. Determina la energía almacenada en el campo eléctrico generado por la esfera.



$dV = 4\pi r^2 dr$

$$dU = u_E\, dV =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$U = \int_R^\infty \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

¿A qué distancia R´ del centro de la esfera estará almacenada la mitad de la energía total?

49