INVERSA de una MATRIZ como PRODUCTO de MATRICES ELEMENTALES

Una matriz A es invertible, existe A^{-1}, si, y solo si, A es el producto de k matrices elementales E_i

Se demuestra que si

$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I$ y $A E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$

entonces $\mathbf{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}}$ y por lo tanto $\mathbf{A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1}$

MATRIZ ELEMENTAL (ME) **e**s una matriz **nxn** que se obtiene al realizar una **<u>única</u> OE/fila** sobre la matriz identidad **I n×n**.

<u>TIPOS:</u>

1) P_{ij} se obtiene aplicando a la matriz **I** la OE/fila: **$Fi \leftrightarrow Fj$**

2) $E_i(\alpha)$ se obtiene aplicando a **I** la OE/fila: **$Fi \leftarrow \alpha\, Fi\ (\alpha \neq 0)$**

3) $E_{ij}(\beta)$ se obtiene aplicando a **I** la OE/fila: **$Fi \leftarrow Fi + \beta\, Fj$**

PRODUCTO EA: Sea A (mxn) y E (mxm) ME, la matriz EA es la misma que se obtiene si aplicamos a A la misma OE/ fila que se le aplica a **I** para obtener E

Si $E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = B$, se dice que B es equivalente por filas a A. Se representa $A \equiv_F B$.

RESULTADOS: Toda matriz A escalonada / reducida es equivalente por filas a A.

El número de 1's principales de la forma reducida es el rango de la matriz

PRODUCTO AE: Sea A (mxn) y E (mxm) ME entonces $A E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$

Si $E_k \dots E_1\, A\, Ec_1 \dots Ec_m = B$ se dice que A es equivalente a B: $A \equiv B$. Si $A \equiv_F B \rightarrow A \equiv B$, pero no viceversa

Si B = I, y $E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I$ y $A E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$, entonces $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$ ya que toda matriz elemental Ei es invertible

1º inversa de $Fi \leftrightarrow Fj$: $Fi \leftrightarrow Fj$

$P_{ij}^{(-1)} = P_{ij}$ ya que $P_{ij} P_{ij} = I$

2º Inversa de **$Fi \leftarrow \alpha\, Fi$** $(\alpha \neq 0)$: **$Fi \leftarrow (1/\alpha)\, Fi$** $(\alpha \neq 0)$

$E_i(\alpha)^{(-1)} = E_i(1/\alpha)$ ya que $E_i(\alpha)\, E_i(1/\alpha) = I$

3º Inversa de **$Fi \leftarrow Fi + \beta\, Fj$:** **$Fi \leftarrow Fi + (-\beta) Fj$**

$E_{ij}(\beta)^{(-1)} = E_{ij}(-\beta)$ ya que $E_{ij}(\beta)\, E_{ij}(-\beta) = I$

Como las ME son invertibles:

$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$ → $E_1 A = E_1E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$ → $E_2 E_1 A = E_2E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$

→ $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$ → $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = IA^{-1}$ → $A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS MATRICES INVERTIBLES

Sea A matriz nxn

1º.- A es invertible

2º.- El sistema Ax=b es Compatible determinado, para todo b.

3º.- El sistema Ax=0 tiene solamente la solución trivial.

4º.- rango(A)=n

5º.- A se transforma en I mediante operaciones elementales

6º.- A es producto de matrices elementales.

Factorización LU de la matriz A

Para resolver Ax = b, se descompone A = LU y se resuelven Ux = y, Ly = b

L : matriz (mxm) triangular inferior invertible.

U: matriz triangular superior (mxn) (es una escalonada de A)

Como **L es invertible** ⇨ **Ly = b** es **SCD**- La solución se calcula por **sustitución progresiva**.

Ux = y se calcula por **sustitución regresiva**

Obtención de las matrices L, U

1ª forma: a partir de las ME que han transformado A en una escalonada de A.

2ª forma: obtener L y U en cada paso de escalonar A.

3ª forma: a partir de la definición de L y U