Dpnt. de Ciència de la Computació i Intel·ligència Artificial
Dpto. de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Interpolación (I)

Tema 6

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación

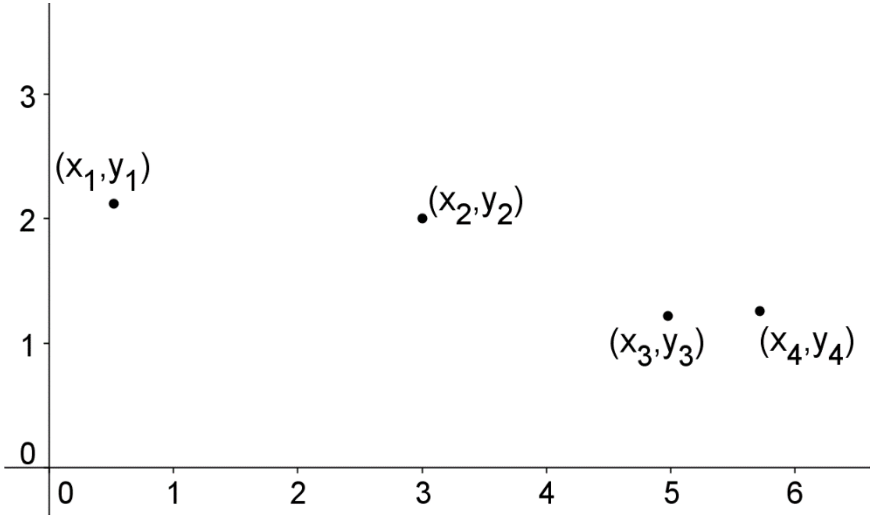
Interpolación de una función

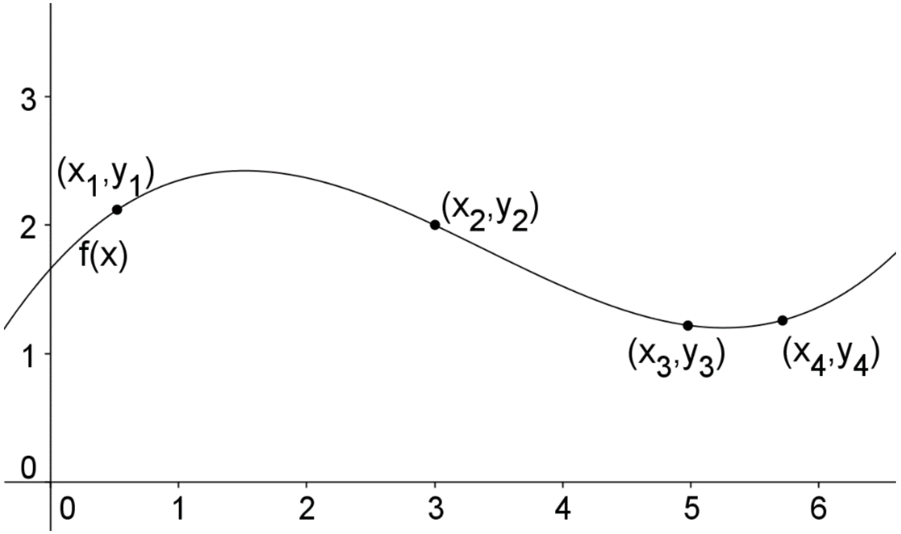
Consiste en la obtención de nuevos puntos intermedios para una función a partir de un conjunto limitado de puntos conocidos.

Más allá del concepto puramente analítico, las aplicaciones de la interpolación en informática son inmensas utilizándose por ejemplo en compresión de vídeo, cambio de frecuencia de muestreo en sonido, cambio de tamaño de imágenes, animación de parámetros en realidad virtual, etc.

Interpolación de una función

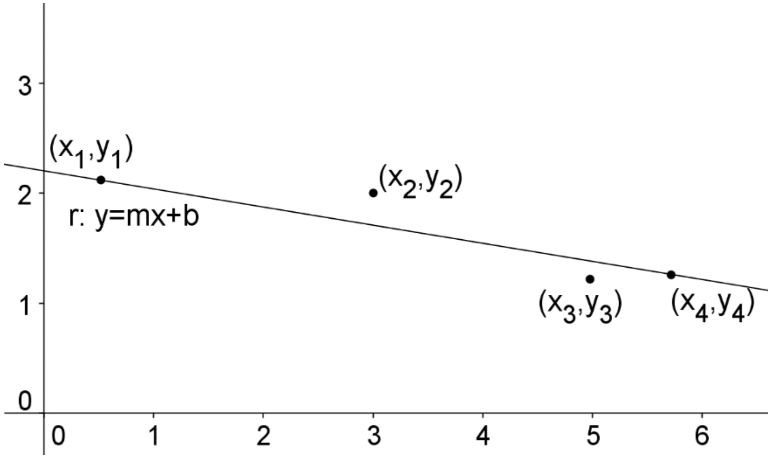
A partir de un conjunto de n puntos (x_k,y_k) llamamos interpolación $f(x)$ a la función que verifica: $f(x_k)=y_k$ para $k=1,\dots,n$





Interpolación de una función

La interpolación más sencilla sería conectar dos puntos con una recta, se trataría de una interpolación lineal y es poco precisa.



La interpolación mediante un polinomio será más precisa al poder ajustar sus curvas a la función que se pretende interpolar.

Teorema de la Aproximación de Weiestrass

Sea *f(x)* definida y continua en *[a,b]*. Para todo $\varepsilon>0$ existe un polinomio *P(x)* tal que

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \text{ para todo } x\in[a,b]$$

El teorema nos garantiza que siempre existirá un polinomio con el que poder interpolar cualquier función, con la precisión que queramos. El problema es encontrarlo.

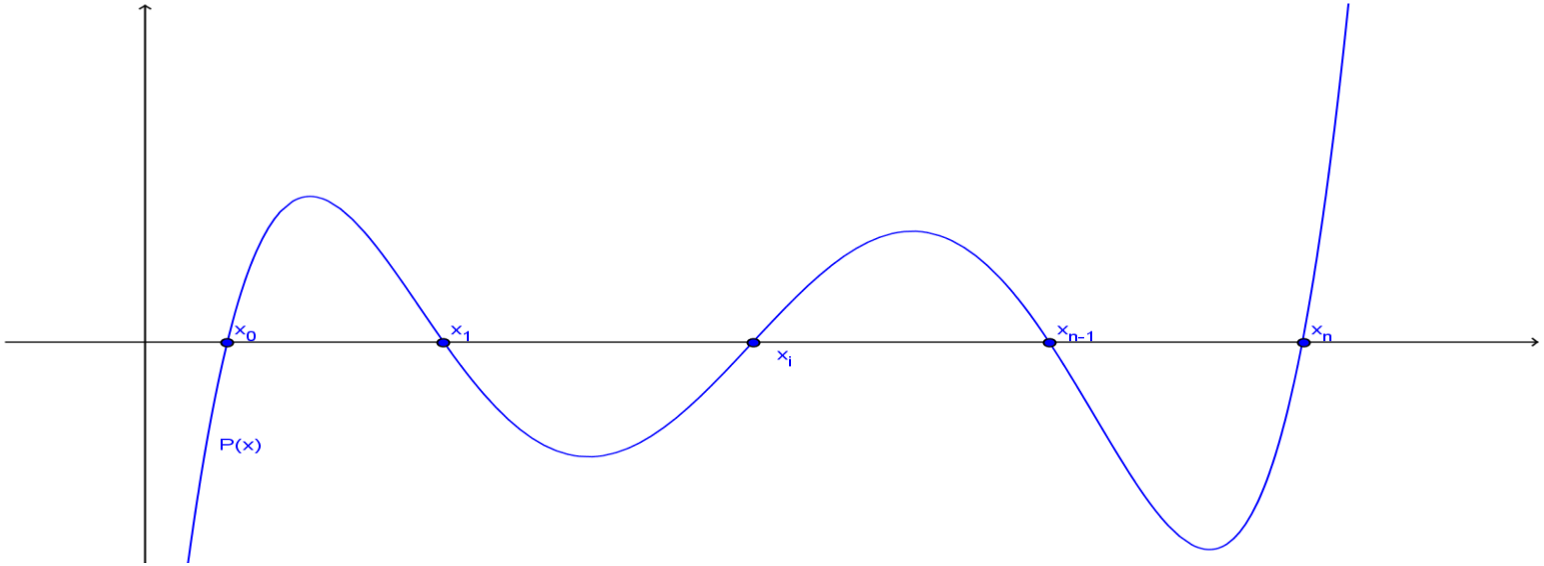
Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange

Polinomios de Lagrange

Para que un polinomio tenga una raíz en x_i debe tener un factor $(x\text{-}x_i)$ que se haga 0 al sustituir x por x_i.

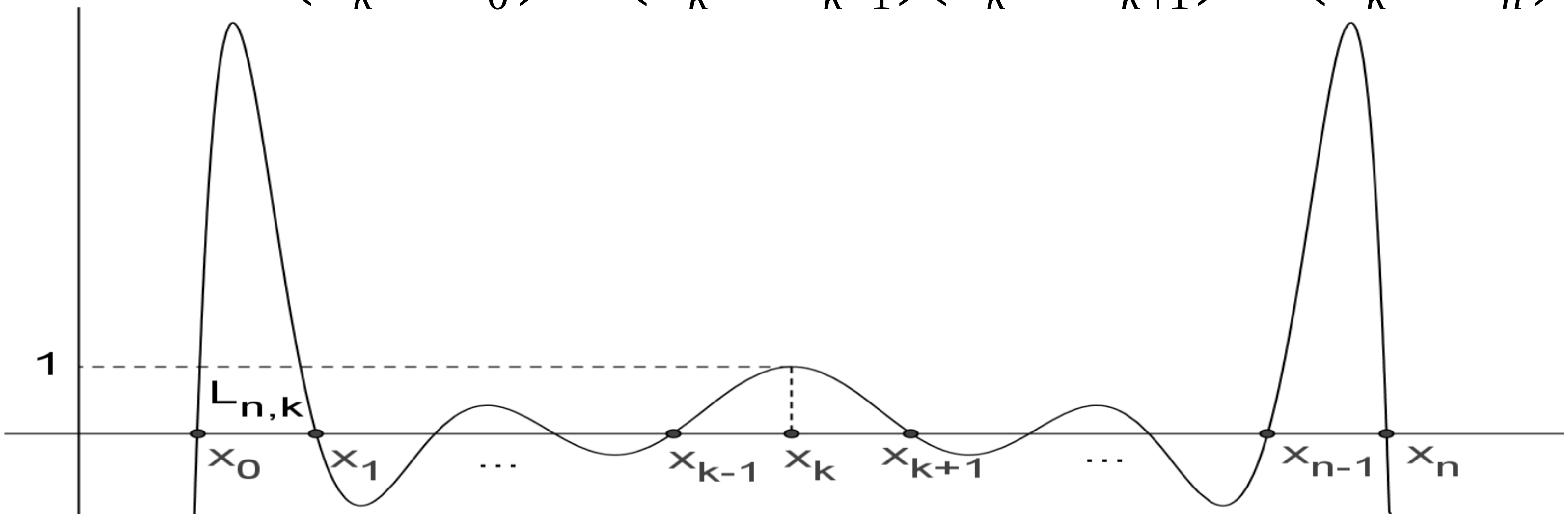
El polinomio con raíces en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ debe tener la forma $P(x) = (x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1)\ldots(x\text{-}x_n)$



Polinomios de Lagrange

Dado los valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$ llamamos a $L_{n,k}(x)$ polinomio de Lagrage de grado n para k al polinomio que tiene n raíces en $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ y cumple que $L_{n,k}(x_k)=1$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$



Polinomio de Interpolación de Lagrange

Se llama polinomio de interpolación de Lagrange de grado *n* a

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Por ejemplo, conocidos *2* valores: x_0 y x_1,
y sus valores en *f(x)*: $f(x_0)$ y $f(x_1)$
podemos interpolar *f(x)* mediante el polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* $P_1(x)$

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} f(x_k) L_{1,k}(x) = f(x_0) L_{1,0}(x) + f(x_1) L_{1,1}(x)$$

$$L_{1,0}(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_{1,1}(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Es una interpolación lineal.

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Con *3* valores: x_0, x_1, x_2, $f(x_0)$, $f(x_1)$ y $f(x_2)$ la interpolación de Lagrange de grado *2* $P_2(x)$

$$\sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_{2,k}(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + $$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Comparación $P_1(x)$ con $P_2(x)$:

Los $L_{2,k}(x)$ incorporan una raíz más que los $L_{1,k}(X)$ y el polinomio $P_1(x)$ suma un término más que $P_2(x)$

$$P_1(x) = \boxed{f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}} + \boxed{f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$$

$$P_2(x) = \boxed{f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} + \boxed{f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$L_{1,0}(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}=\frac{(x-3)}{(2-3)}=-(x-3)$$

$$L_{1,1}(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(x-2)}{(3-2)}=(x-2)$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$L_{1,0}(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}=\frac{(x-3)}{(2-3)}=-(x-3)$$

$$L_{1,1}(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(x-2)}{(3-2)}=(x-2)$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$P_1(x)=f(x_0)L_{1,0}(x)+f(x_1)L_{1,1}(x)=$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

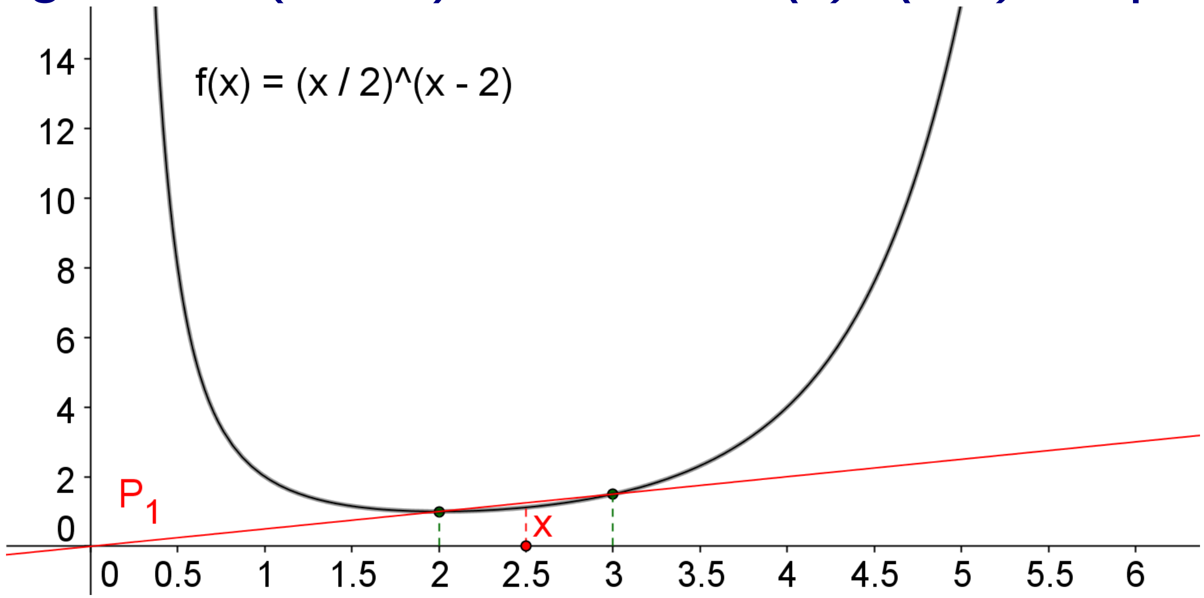
$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2}$$

$$P_1(5/2)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$



x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118 \qquad \Delta P_1(5/2)=0{,}148$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2} \qquad P_1(5/2)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x)$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + f(x_1)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + f(x_2)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + f(x_1)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + f(x_2)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

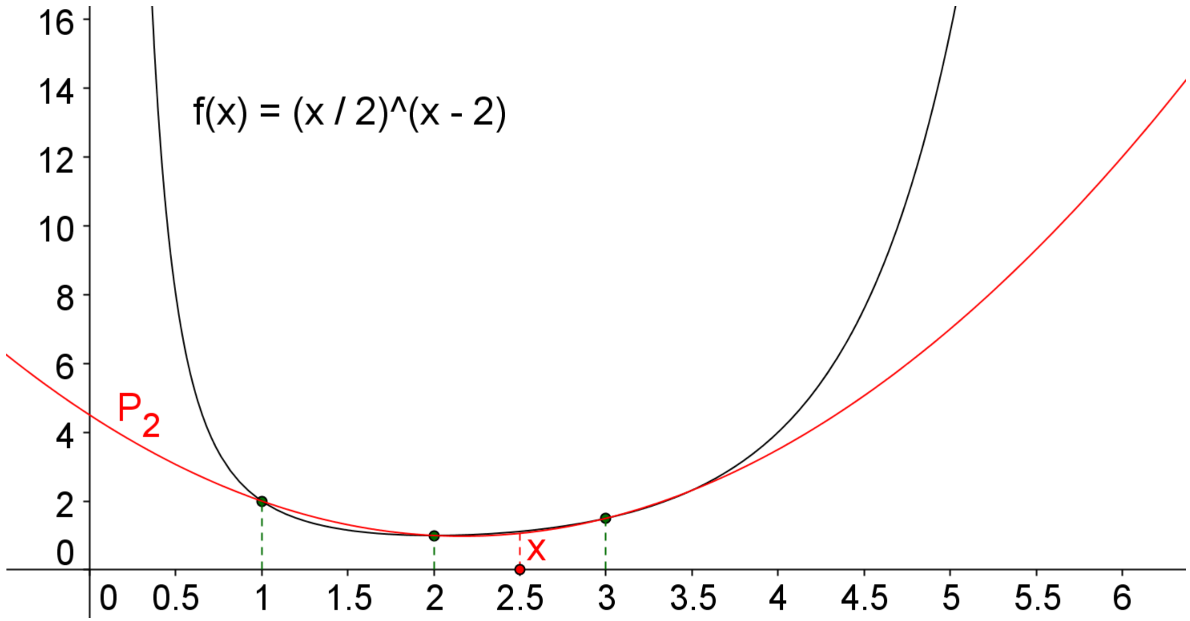
x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_2(5/2) = 2\frac{(1/2)(-1/2)}{2} + \frac{(3/2)(-1/2)}{-1} + \frac{3}{2}\frac{(3/2)(1/2)}{2}$$

$$P_2(5/2) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{8}{16} + \frac{9}{16} = 17/16 = 1{,}0625$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118 \qquad \Delta P_2(5/2)=0{,}0555$$

$$P_2(5/2)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{8}{16}+\frac{9}{16}=17/16=1{,}0625$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

$$L_{3,0}(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_{3,1}(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_{3,2}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_{3,2}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

$$L_{3,0}(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_{3,1}(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_{3,2}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_{3,2}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

Si sólo queremos aproximar un valor, lo mejor es, en vez de obtener el polinomio, establecer una matriz del cálculo.

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

x_i	$f(x_i)$	$L_{3,i}(x)$
$x_0 = 1$	2	$\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$
$x_1 = 2$	1	$\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$
$x_2 = 3$	$3/2$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$
$x_3 = 4$	4	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$P_3(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} f(x_k) L_{3,i}(x)$$

$$= f(x_0)L_{3,0}(x) + f(x_1)L_{3,1}(x) + f(x_2)L_{3,2}(x) + f(x_3)L_{3,3}(x)$$

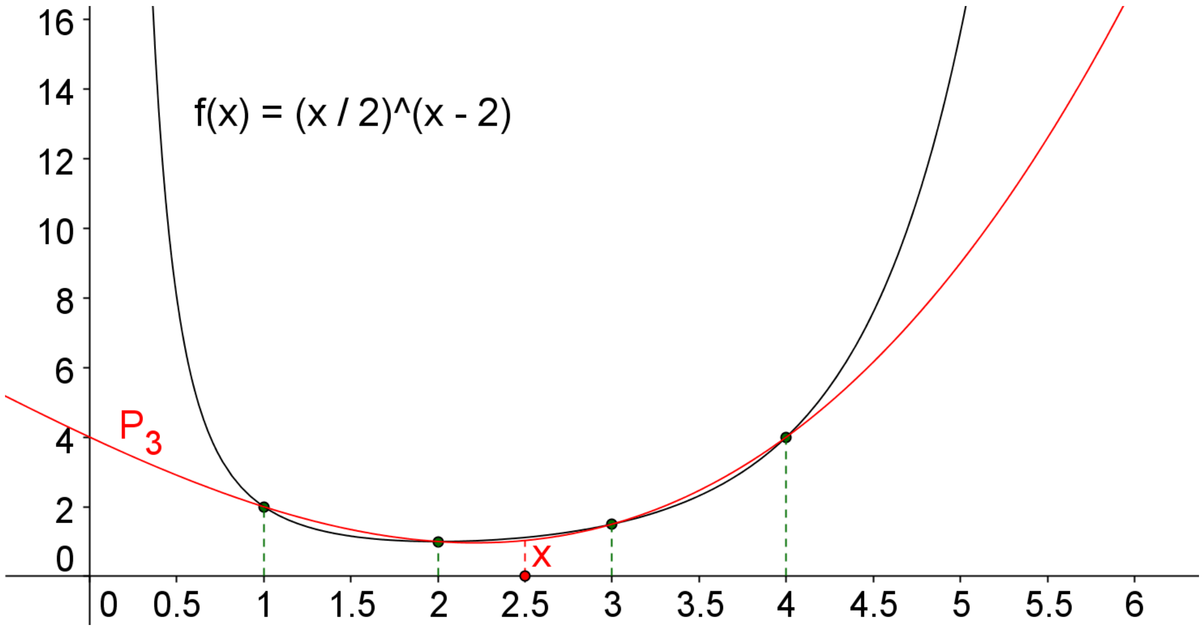
Ejemplo de Interpolación de Lagrange

x_i	$f(x_i)$	$L_{3,i}(x)$	$f(x_i)L_{3.i}(5/2)$
$x_0 = 1$	2	$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$	$2\cdot\frac{3/8}{-6} = -\frac{3}{24}$
$x_1 = 2$	1	$\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$	$1\cdot\frac{9/8}{2} = \frac{9}{16}$
$x_2 = 3$	$3/2$	$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{-9/8}{-2} = \frac{27}{32}$
$x_3 = 4$	4	$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$	$4\cdot\frac{-3/8}{6} = \frac{-3}{12}$

$$P_3(5/2) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_{3.i}(5/2) = -\frac{12}{96} + \frac{54}{96} + \frac{81}{96} - \frac{24}{96} = \frac{33}{32}$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$f(5/2) = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118$$

$$\Delta P_3(5/2) = 0{,}0868$$

$$P_3(5/2) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) L_{3,i}(5/2) = \frac{33}{32} = 1{,}03125$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

… con grado *4*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

x_i	$f(x_i)$	$L_{4,i}(x)$
$x_0 = 1$	2	$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}$
$x_1 = 2$	1	$\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$
$x_2 = 3$	$3/2$	$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$
$x_3 = 4$	4	$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$
$x_4 = 5$	$\frac{125}{8}$	$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$

… con grado *4*

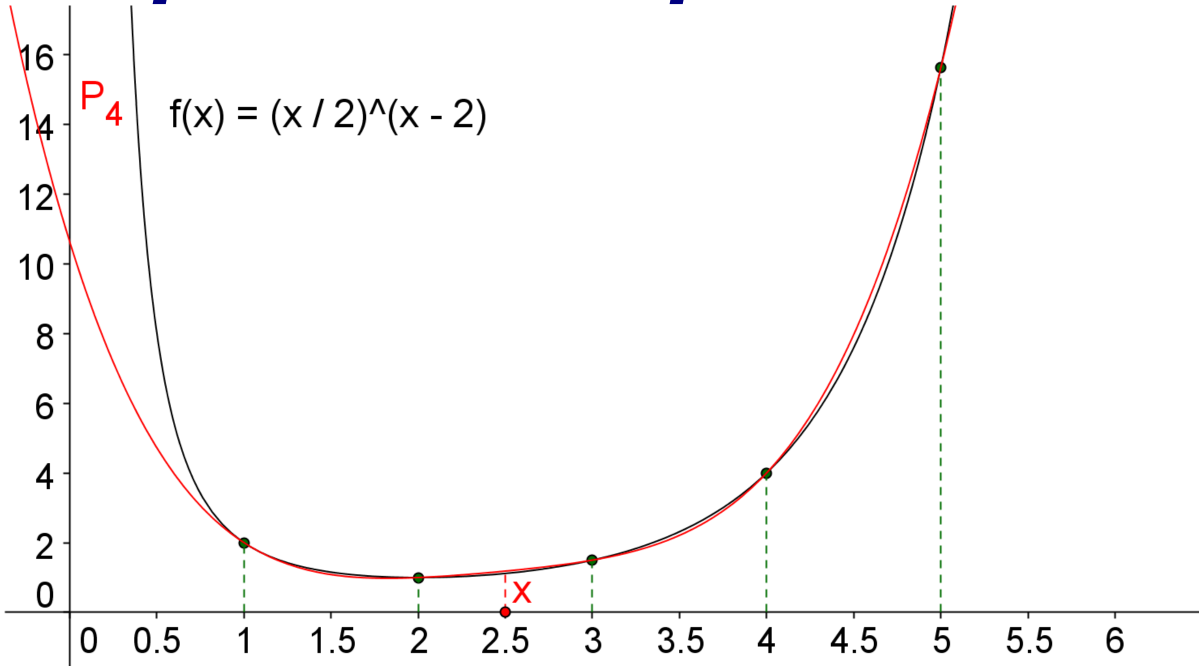
x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

x_i	$f(x_i)$	$L_{4,i}(x)$	$f(x_i)L_{4.i}(5/2)$
1	2	$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}$	$2\cdot\frac{-15/16}{24}=-\frac{15}{192}$
2	1	$\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$	$1\cdot\frac{-45/16}{-6}=\frac{15}{32}$
3	$3/2$	$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{45/16}{4}=\frac{135}{128}$
4	4	$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$	$4\cdot\frac{15/16}{-6}=-\frac{5}{8}$
5	$\frac{125}{8}$	$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$	$\frac{125}{8}\cdot\frac{9/16}{24}=\frac{375}{1024}$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

… con grado *4*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

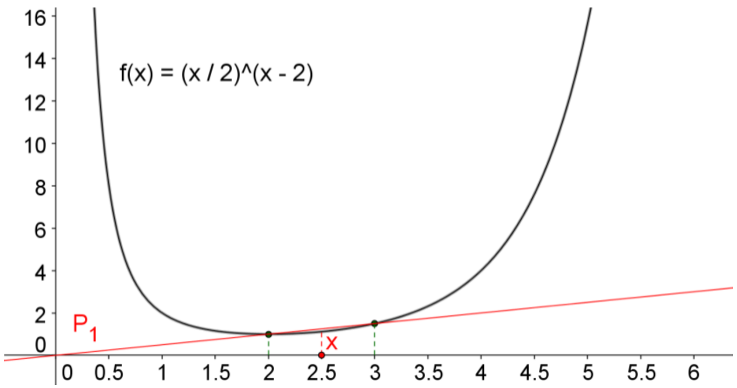
$$f(5/2) = 1{,}118 \qquad \Delta P_3(5/2) = 0{,}0684$$

$$P_4(5/2) = -\frac{15}{192} + \frac{15}{32} + \frac{135}{128} - \frac{5}{8} + \frac{375}{1024} =$$

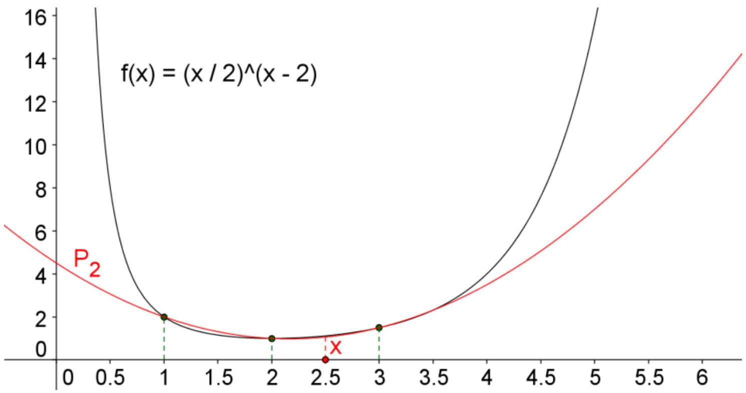
$$\frac{-240+1440+3240-1920+1125}{3072} = \frac{3645}{3072} = 1{,}1865$$

Ejemplo de Interpolación de Lagrange

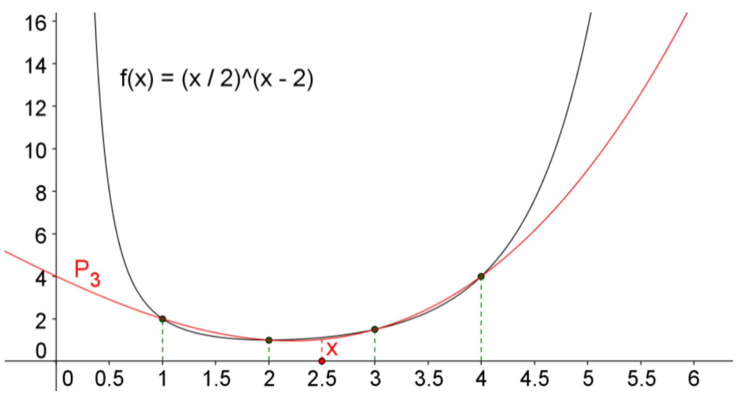
Los grados *3* y *4* no mejoran el error del grado *2* en *x=5/2*:



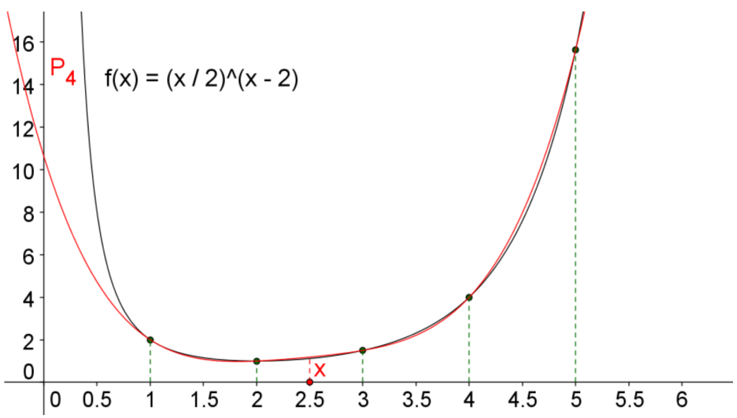
$$\Delta P_1(5/2) = 0{,}148$$



$$\Delta P_2(5/2) = 0{,}0555$$



$$\Delta P_3(5/2) = 0{,}0868$$



$$\Delta P_4(5/2) = 0{,}0684$$

Error de Interpolación de Lagrange

Si *f(x)* es una función interpolada con un polinomio $P_n(x)$ de Lagrange, entonces:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

donde ε es un número desconocido perteneciente al menor intervalo que contenga a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y x

es decir, $\varepsilon \in [mín(x_i, x), máx(x_i, x)]$

Interpolación de Lagrange

Problemas:

- No necesariamente gana precisión aumentando de orden.
- Es complicado su cálculo manual.

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación

Tablas de Interpolación

En el ejemplo hemos visto , calculando $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, que podemos aplicar tablas para calcular el valor de la interpolación en un *x* concreto, en el ejemplo $x=5/2$.

Cada vez que añadimos un punto (un grado más al polinomio de interpolación) podemos crear una nueva columna en la tabla a partir de la columna anterior, salvo el último elemento de la columna, el de la nueva fila, que se calcula completamente.

Tablas de Interpolación

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\dfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$

$$P_1(x) =$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Tablas de Interpolación

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\dfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$

$$P_1(x) = $$
$$= f(x_0)\boxed{\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}} + f(x_1)\boxed{\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{\boxed{(x-x_1)}(x-x_2)}{\boxed{(x_0-x_1)}(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{\boxed{(x-x_0)}(x-x_2)}{\boxed{(x_1-x_0)}(x_1-x_2)} +$$
$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Tablas de Interpolación

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Tablas de Interpolación

Calcular los $L_{3,i}(x)$ para el polinomio $P_3(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Si el calculo lo hacemos para un *x* en concreto, los $L_{n,i}$ se pueden calcular de los anteriores sin arrastrar la variable *x*, y el calculo se simplifica.

Tablas de Interpolación

Calcular los $L_{3,i}(x)$ para el polinomio $P_3(x)$:.

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_3(x) = f(x_0)L_{3,0}(x) + f(x_1)L_{3,1}(x) + f(x_2)L_{3,2}(x) + f(x_3)L_{3,3}(x)$$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en x=$5/2$ a partir del polinomio de interpolación de grado 1 para $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_1(x) = f(x_0)L_{1,0}(x) + f(x_1)L_{1,1}(x)$$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir del polinomio de interpolación de grado 1 para $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_1(x)=2(-1/2)+1(3/2)=1/2$$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3/2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_1(x)=1/2 \qquad P_2(x)=f(x_0)L_{2,0}+f(x_1)L_{2,1}+f(x_2)L_{2,2}$$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3/2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
3	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{8}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x-x_1)(x_3-x_2)}$

$P_1(x)=1/2$ $\quad P_2(x)=2(-1/8)+1(3/4)+(3/2)(3/8)=17/16$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
3	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{8}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x-x_1)(x_3-x_2)}$

$$P_3(x)=f(x_0)L_{3,0}(x)+f(x_1)L_{3,1}(x)+f(x_2)L_{3,2}(x)+f(x_3)L_{3,3}(x)$$

Ejemplo de Tabla de Interpolación

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(5/2)$
1	2	$-1/2$	$-1/8$	$-1/16$
2	1	$3/2$	$3/4$	$9/16$
3	$3/2$		$3/8$	$9/16$
x_3	4			$-1/16$

$$P_1(x)=2(-1/2)+1(3/2)=1/2$$

$$P_2(x)=2(-1/8)+1(3/4)+(3/2)(3/8)=17/16$$

$$P_3(x)=2(-1/16)+1(9/16)+(3/2)(9/16)+4(-1/16)=33/32$$

Tablas de Interpolación

Otras construcciones de tablas son posibles (Neville, Aitken, etc.)

A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado. Además en este caso nos gustaría el poder aumentar el orden del polinomio interpolador a voluntad y parar cuando el error sea suficientemente pequeño. Para estos propósitos el algoritmo de Neville está especialmente indicado.

Tablas de Interpolación

Algoritmo de Neville:

Sea $p_{i,j}(x)$ el valor en x del polinomio de grado j-i que pasa por los puntos (x_k,y_k) con $k=i,i+1,\ldots,j$

$p_{i,j}(x)$ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$p_{i,i}(x) = y_i \quad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x-x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

de forma que $p_{0,n}(x)$ es el valor del polinomio de Lagrange $P_n(x)$ en x.

Tabla de Interpolación de Neville

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{i,i}(x) = y_i \quad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\, p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\, p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Tabla de Interpolación de Neville

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x - x_2)\,p_{1,1}(x) + (x_1 - x)\,p_{2,2}(x)}{x_1 - x_2}$$

$$p_{i,i}(x) = y_i \quad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Tabla de Interpolación de Neville

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x - x_2)\,p_{1,1}(x) + (x_1 - x)\,p_{2,2}(x)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{(x - x_2)\,y_1 + (x_1 - x)\,y_2}{x_1 - x_2}$$

$$p_{i,i}(x) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Tabla de Interpolación de Neville

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x - x_2)\,p_{1,1}(x) + (x_1 - x)\,p_{2,2}(x)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{(x - x_2)\,y_1 + (x_1 - x)\,y_2}{x_1 - x_2}$$

Como se puede ver,

se trata de una recta pasa por los puntos

(x_1, y_1) y (x_2, y_2)

Pirámide de Neville

Los valores de $P_n(x)$ están en la diagonal superior:

x_i	$y_i = f(x_i)$			
x_0	$p_{0,0}(x) = y_0$			
		$p_{0,1}(x)$		
x_1	$p_{1,1}(x) = y_1$		$p_{0,2}(x)$	
		$p_{1,2}(x)$		$p_{0,3}(x)$
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$		$p_{1,3}(x)$	
		$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Pirámide de Neville

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ con $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
x_0	$p_{0,0}(x) = y_0$			
		$p_{0,1}(x)$		
x_1	$p_{1,1}(x) = y_1$		$p_{0,2}(x)$	
		$p_{1,2}(x)$		$p_{0,3}(x)$
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$		$p_{1,3}(x)$	
		$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Pirámide de Neville

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ con $x_0=1$ y $x_1=2$

$$P_1(x)=\frac{1}{2}$$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
$x_0 = 1$	$p_{0,0}(x) = 2$	$p_{0,1}(x) = \frac{1}{2}$	$p_{0,2}(x)$	$p_{0,3}(x)$
$x_1 = 2$	$p_{1,1}(x) = 1$	$p_{1,2}(x)$	$p_{1,3}(x)$	
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$	$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x-x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

Pirámide de Neville

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3$

$$P_1(x)=\frac{1}{2} \qquad P_2(x)=\frac{17}{16}$$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
$x_0 = 1$	$p_{0,0}(x)=2$	$p_{0,1}(x)=\frac{1}{2}$	$p_{0,2}(x)=\frac{17}{16}$	$p_{0,3}(x)$
$x_1 = 2$	$p_{1,1}(x)=1$	$p_{1,2}(x)=\frac{5}{4}$	$p_{1,3}(x)$	
$x_2 = 3$	$p_{2,2}(x)=\frac{3}{2}$	$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x)$			

$$p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_j)\,p_{i,j-1}(x)+(x_i-x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i-x_j}$$

Pirámide de Neville

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_1(x)=\frac{1}{2} \qquad P_2(x)=\frac{17}{16} \qquad P_3(x)=\frac{33}{32}$$

x_i	$y_i=f(x_i)$			
$x_0=1$	$p_{0,0}(x)=2$	$p_{0,1}(x)=\frac{1}{2}$	$p_{0,2}(x)=\frac{17}{16}$	$p_{0,3}(x)=\frac{33}{32}$
$x_1=2$	$p_{1,1}(x)=1$	$p_{1,2}(x)=\frac{5}{4}$	$p_{1,3}(x)=1$	
$x_2=3$	$p_{2,2}(x)=\frac{3}{2}$	$p_{2,3}(x)=\frac{1}{4}$		
$x_3=4$	$p_{3,3}(x)=4$			

$$p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_j)p_{i,j-1}(x)+(x_i-x)p_{i+1,j}(x)}{x_i-x_j}$$

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas

Diferencias divididas

Si con las tablas de los métodos anteriores intentamos obtener una expresión genérica del polinomio $P_n(x)$, es decir, en función de x, esta nos va a resultar compleja y difícil de manejar.

El siguiente método permite obtener la expresión explícita del polinomio de interpolación, y por eso resulta el más útil cuando luego se pretende derivar, integrar u operar en general con el polinomio.

Diferencias divididas

En el método de Diferencias divididas, el polinomio se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

donde

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i) \\
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\
&\vdots \\
f[x_i, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0, x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular *$P_n(x)$* para *$n=3$*:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$\boxed{f[x_0, x_1]}$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0,x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1,x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2,x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0, x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	...	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$				
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f(x_2)$				
		$f[x_2, x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	...	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\ldots,x_i$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \qquad f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]-f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \qquad f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

Los valores para calcular $P_n(x)$ son los de la diagonal superior:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	...	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		

Los valores para calcular $P_n(x)$ son los de la diagonal superior:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$
$x_0=1$	
$x_1=2$	
$x_2=3$	
$x_3=4$	

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$	
$x_0=1$	2	$\left(\dfrac{1-2}{2-1}\right)=-1$
$x_1=2$	1	$\left(\dfrac{3/2-1}{3-2}\right)=\dfrac{1}{2}$
$x_2=3$	$\dfrac{3}{2}$	$\left(\dfrac{4-3/2}{4-3}\right)=\dfrac{5}{2}$
$x_3=4$	4	

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=5/2, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$		
$x_0=1$	2	$\left(\frac{1-2}{2-1}\right)=-1$	$\left(\frac{1/2+1}{3-1}\right)=\frac{3}{4}$
$x_1=2$	1	$\left(\frac{3/2-1}{3-2}\right)=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5/2-1/2}{4-2}\right)=1$
$x_2=3$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{4-3/2}{4-3}\right)=\frac{5}{2}$	
$x_3=4$	4		

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]-f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=$5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$			
$x_0=1$	2	$\left(\frac{1-2}{2-1}\right)=-1$	$\left(\frac{1/2+1}{3-1}\right)=\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1-3/4}{4-1}\right)=\frac{1}{12}$
$x_1=2$	1	$\left(\frac{3/2-1}{3-2}\right)=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5/2-1/2}{4-2}\right)=1$	
$x_2=3$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{4-3/2}{4-3}\right)=\frac{5}{2}$		
$x_3=4$	4			

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=5/2, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	2			
$x_1 = 2$	1	-1		
$x_2 = 3$	$3/2$	$1/2$	$3/4$	
$x_3 = 4$	4	$5/2$	1	$1/12$

$$P_1(x) = 2 - 1(x - 1)$$

$$P_1(5/2) = 2 - (5/2 - 1) = 1/2$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	2			
		-1		
$x_1 = 2$	1		$3/4$	
		$1/2$		$1/12$
$x_2 = 3$	$3/2$		1	
		$5/2$		
$x_3 = 4$	4			

$$P_2(x) = \boxed{2 - 1(x-1)} + (3/4)(x-1)(x-2)$$

$$P_2(x) = \boxed{P_1(x)} + (3/4)(x-1)(x-2)$$

$$P_2(5/2) = 1/2 + (3/4)(3/2)(1/2) = 8/16 + 9/16 = 17/16$$

Ejemplo 1 de Diferencias divididas

Para *$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$*, x=*5/2*, *$x_0=1$*, *$x_1=2$*, *$x_2=3$* y *$x_3=4$*

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	2			
$x_1 = 2$	1	-1		
$x_2 = 3$	$3/2$	$1/2$	$3/4$	
$x_3 = 4$	4	$5/2$	1	$1/12$

$$P_3(x) = \boxed{2 - 1(x-1) + (3/4)(x-1)(x-2)} + (1/12)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P_3(x) = \boxed{P_2(x)} + (1/12)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P_3(5/2) = 17/16 + (1/12)(3/2)(1/2)(-1/2) = 17/16 - 1/32 = 33/32$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
-1	15	
		-7
0	8	
		-3
3	-1	

$$f[x_0, x_1] = \frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{-1-8}{3-0}$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15		
		-7	
0	8		1
		-3	
3	-1		

$$f[x_0, x_1] = \frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{-1-8}{3-0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-3+7}{3+1}$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
-1	15		
0	8	-7	
3	-1	-3	1

$$f[x_0,x_1]=\frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{-1-8}{3-0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-3+7}{3+1}$$

$$P_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_2(x)=15-7(x+1)+1(x+1)(x-0)=x^2-6x+8$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		
3	-1			
5	-5			

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		
3	-1			
		-2		
5	-5			

$$f[x_2, x_3] = \frac{-5+1}{5-3}$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		
3	-1		$1/5$	
		-2		
5	-5			

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2+3}{5-0}$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		$-2/15$
3	-1		$1/5$	
		-2		
5	-5			

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1/5 - 1}{5 + 1}$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		$-2/15$
3	-1		$1/5$	
		-2		
5	-5			

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = x^2 - 6x + 8 - 2/15(x+1)x(x-3) =$$

$$= x^2 - 6x + 8 - 2/15(x^3 + 2x^2 - 3x)$$

Ejemplo 2 de Diferencias divididas

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		$-2/15$
3	-1		$1/5$	
		-2		
5	-5			

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = \frac{-2x^3}{15} + \frac{3x^2}{5} - \frac{28x}{5} + 8$$