**1** Sean matrices $A$ y $B$ tales que $AB$ está definida, y se considera el vector de $\mathbb{R}^2, \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) (1 punto) Probad que la matriz $C = B^T A^T AB$ es simétrica

(b) (1 punto) Probad que la matriz $P = I_2 - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ cumple $P^2 = P$ y la matriz $Q = I_2 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ cumple $Q^{-1} = Q$

**Solución:**

(a) Hay que probar que $C^T = C$. Hagámoslo

$$C^T = (B^T A^T AB)^T = B^T A^T (A^T)^T (B^T)^T = B^T A^T AB = C$$

(b) Calculando

$$\begin{aligned} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se calcula $P^2$ para ver que se obtiene $P$. Para la ¡gualdad $Q^{-1} = Q$ no hace falta hallar la inversa, es mejor probar la igualdad $QQ = I$.

**2** Un fabricante produce tres artículos diferentes ( $A$, $B$ y $C$), cada uno de los cuales precisa para su elaboración tres materias primas ($M_1$,$M_2$, $M_3$). La siguiente tabla representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto:

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $M_2$ | 3 | 2 | 2 |
| $M_3$ | 1 | 2 | 4 |

Se dispone de 50 unidades de $M_1$, 70 de $M_2$ y 40 de $M_3$ y hay que determinar las cantidades de artículos A, B y C que produce dicho fabricante

(a) (1 punto) Plantea un sistema de ecuaciones que solucione el problema

(b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior

(c) (0'5 puntos) Si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, 500, 600 y 1000 euros y gasta en cada unidad de materia prima 50, 70 y 60 euros, respectivamente, determina el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos disponibles)

**Solución: Solución:**

(a) Llamando $x, y, z$ a las unidades producidas de $A, B, C$ respectivamente y, con ayuda de la tabla, surge el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 50 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 70 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 40 \end{array}\right\}$$

(b) La soluciónes $x = 18, y = 5, z = 3$

(c)
- Ingresos: $18 \cdot 500 + 5 \cdot 600 + 3 \cdot 1000 = 15000$.
- Gastos: $50 \cdot 50 + 70 \cdot 70 + 40 \cdot 60 = 9800$.
- **Beneficios** $15000 - 9800 = \mathbf{5200}$.

**3** Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 7 \\ 3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) (1'25 puntos) Hallad una factorización $LU$ de la matriz $A$

(b) (1'25 puntos) Usad dicha factorización para resolver el sistema

$$A\boldsymbol{x} = [-4 \ \ -4 \ \ -16]^T$$

**Solución:**

(a) Una factorización es

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Resolvemos el sistema $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

cuya solución es $\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ahora resolvemos el definitivo $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**4** Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (0'5 puntos) Hallad el polinomio característico

(b) (0'5 puntos) Hallad los valores propios

(c) (1'5 puntos) Hallad una base de cada subespacio propio

(d) (0'5 puntos) Dad dos matrices $P$ y $D$ (diagonal), tales que $P^{-1}AP = D$

**Solución:**

(a) $q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$

(b) Las raices (probando por Ruffini) son $-2$ (doble) y $4$ (simple)

(c)
- Para $\lambda = -2$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A+2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(-2) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Para $\lambda = 4$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(4) = \begin{bmatrix} 1/2\alpha \\ 1/2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Las matrices pueden ser

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$