Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

☐	Grupo 01	- Lunes de 09:00 a 11: 00	(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)
☐	Grupo 02	- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00	(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)
☐	Grupo 03	- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00	(Prof. Vicent Francés, José Francisco)
☐	Grupo 04	- Martes de 15:00 a 17:00	(Prof. Salinas Serrano, José María)
☐	Grupo 05	- Martes de 9:00 a 11:00	(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)

Examen Final de Matemáticas II. Mayo 2016

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

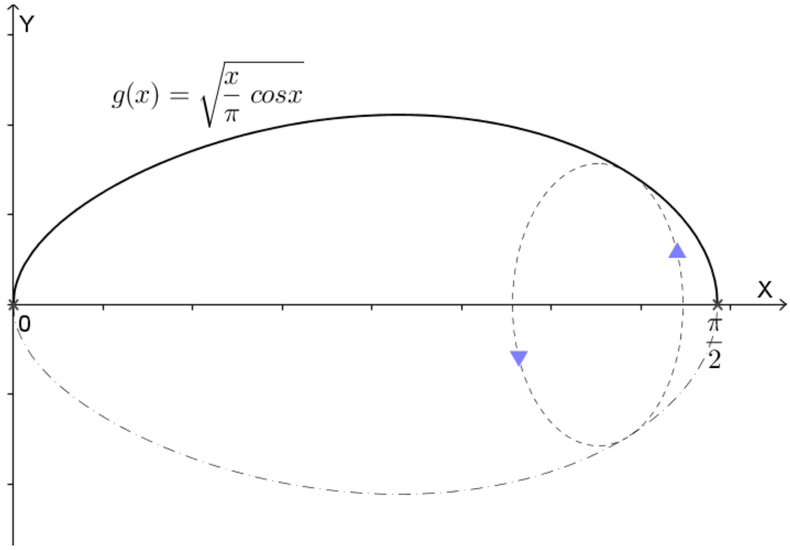
	Nota	
Ejercicio 1	2	
Ejercicio 2	1	
Ejercicio 3	2’5	
Ejercicio 4	2’5	
Ejercicio 5	2	
Total		

1. ***(2 puntos)*** Data la función $f(x) = \frac{x}{\pi}\cos x$:

a) ***(1,3 puntos)*** Demuestra, mediante integración por partes ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$) que

$$\int f(x)\,dx = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x}{\pi} + C$$

b) ***(0,7 puntos)*** Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la gráfica de $g(x)$ desde $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$ alrededor del eje de abscisas.



Recordemos, en primer lugar, la fórmula utilizada en la integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Si hacemos $u = \frac{x}{\pi}$ y $dv = \cos x\;\,dx$, tendremos $du = \frac{dx}{\pi}$ y $v = \int \cos x\,dx = \mathrm{sen}\,x$, y

$$\int \frac{x}{\pi}\cos x\;\,dx = \frac{x}{\pi}\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{\pi}\int \mathrm{sen}\,x\;\,dx = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x}{\pi} + C$$

El volumen pedido en b) viene dado por la expresión

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \pi\left[\frac{1}{\pi}(x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

2. ***(1 puntos)*** Se tienen los valores aproximados $A = 6 \pm 0{,}06$ y $B = 3 \pm 0{,}06$. Calcula $\frac{A}{B}$ indicando cuantos dígitos se puede considerar que son exactos.

$$\frac{A}{B} = \frac{6 \pm 1\%}{3 \pm 2\%} = 2 \pm 3\% = 2 \pm 0{,}06$$

Como el valor aproximado son 2 unidades, $m = 0$, ya que $2 = 2 \cdot 10^{m}$

Como la cota de su error absoluto es $0{,}06 \leq 0{,}5 = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$ entonces:

$$m - n + 1 = 0 \quad 0 - n + 1 = 0 \quad n = 1$$

Es decir, sólo un dígito (el 2) se puede considerar exacto.

3. ***(2,5 puntos)*** Se sabe que la función $f(x) = x^5 - x^2 + x + 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y tiene una única raíz real.

a) ***(0,75 puntos)*** Determina entre qué dos valores enteros, a y b, consecutivos $(b = a + 1)$ se satisfacen las hipótesis del teorema de Bolzano. Te puede ayudar considerar el valor 0 inicialmente como uno de los extremos del intervalo.

b) ***(1,75 puntos)*** Aplica el método de la bisección para obtener la raíz real de f con una cota del error absoluto inferior a 10^{-2}, tomando como intervalo inicial $[a, b]$.

Analizamos las tres primeras derivadas sucesivas de $f(x)$:

$$f'^{(x)} = 5x^4 - 2x + 1 \qquad f''(x) = 20x^3 - 2 \qquad f'''(x) = 60x^2$$

Si $f'''(x)$ es siempre positiva, y $x = \sqrt[3]{10}$ es la única raíz de $f''(x)$, quiere decir que el único punto crítico de $f'(x)$ es un mínimo, y que entonces $f'(x) \geq f\left(\sqrt[3]{10}\right) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que f(x) es creciente en toda la recta real.

Si $f(x)$ es creciente y $f(0) = 1$, es para valores de $x < 0$ para los que encontraremos un $f(x) < 0$.

Aun sin estas deducciones no nos cuesta mucho encontrar que para $a = -1$ y $b = 0$, $f(a)f(b) < 0$

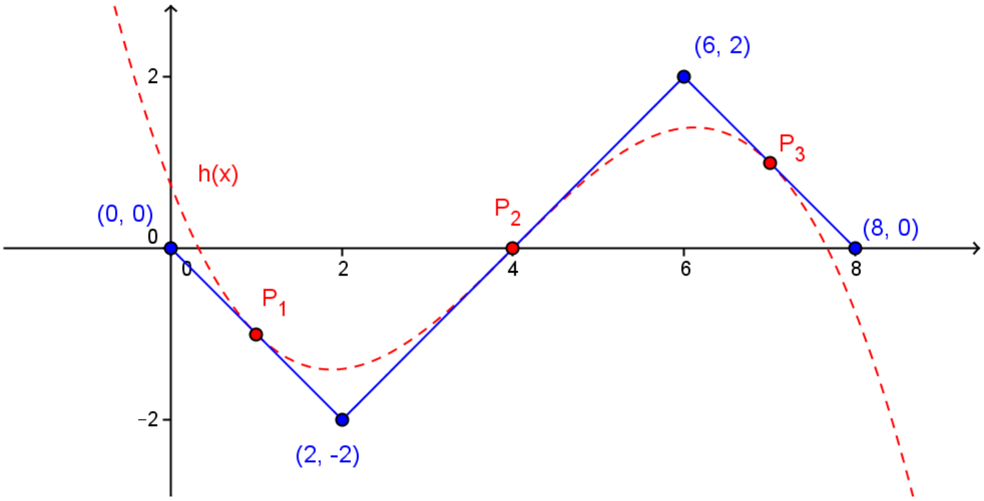
Por lo que el intervalo que buscamos, donde se cumple la premisa de Bolzano, es [-1,0].

Aplicaremos el método de la bisección a ese intervalo.

i	a_i	b_i	c_i	h_i	f(a_i)	f(b_i)	f(c_i)
1	-1	0	-0,5	0,5	-2	1	0,21875
2	-1	-0,5	-0,75	0,25	-2	0,21875	-0,5498047
3	-0,75	-0,5	-0,625	0,125	-0,5498047	0,21875	-0,1109924
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,0625	-0,1109924	0,21875	0,0647802
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	0,03125	-0,1109924	0,0647802	-0,0200826
6	-0,59375	-0,5625	-0,578125	0,015625	-0,0200826	0,0647802	0,0230649
7	-0,59375	-0,578125	-0,5859375	0,0078125	-0,0200826	0,0230649	0,001675

La aproximación a la raíz calculada es $-0{,}5859375 \pm 0{,}0078125$

4. ***(2,5 puntos)*** Obtén el polinomio interpolador de Hermite $h(x)$ que pasa por los puntos medios, P_1, P_2 y P_3, de los tres segmentos de la línea poligonal abierta delimitada por los puntos $(0,0)$, $(2,-2)$, $(6,2)$ y $(8,0)$. Considera que la derivada del polinomio interpolador $h(x)$ en las abscisas de los puntos P_1, P_2 y P_3 coincide con la pendiente de cada uno de los segmentos.



$$P_1=(x_0,y_0)=\left(\frac{0+2}{2},\frac{0-2}{2}\right)=(1,-1)=(z_0,f[z_0])=(z_1,f[z_1]) \qquad f[z_0,z_1]=\frac{-2-0}{2-0}=-1$$
$$P_2=(x_1,y_1)=\left(\frac{2+6}{2},\frac{-2+2}{2}\right)=(4,0)=(z_2,f[z_2])=(z_3,f[z_3]) \qquad f[z_2,z_3]=\frac{2+2}{6-2}=1$$
$$P_3=(x_2,y_2)=\left(\frac{6+8}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(7,1)=(z_4,f[z_4])=(z_5,f[z_5]) \qquad f[z_4,z_5]=\frac{0-2}{8-6}=-1$$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_i,z_{i+1}]$	$f[z_i,z_{i+1},z_{i+2}]$	$f[z_i,\dots,z_{i+3}]$	$f[z_i,\dots,z_{i+4}]$	$f[z_i,\dots,z_{i+5}]$
1	-1					
		-1	$\frac{1/3+1}{4-1}=\frac{4}{9}$			
1	-1			$\frac{2/9-4/9}{4-1}=\frac{-2}{27}$		
		$\frac{0+1}{4-1}=\frac{1}{3}$	$\frac{1-1/3}{4-1}=\frac{2}{9}$		0	
4	0			$\frac{-2/9-2/9}{7-1}=\frac{-2}{27}$		0
		1	$\frac{1/3-1}{7-4}=\frac{-2}{9}$		0	
4	0			$\frac{-4/9+2/9}{7-4}=\frac{-2}{27}$		
		$\frac{1-0}{7-4}=\frac{1}{3}$	$\frac{-1-1/3}{7-4}=\frac{-4}{9}$			
7	1					
		-1				
7	1					

$$\boldsymbol{h(x)=-1-(x-1)+\frac{4}{9}(x-1)^2-\frac{2}{27}(x-1)^2(x-4)}=-\frac{2}{27}x^3+\frac{8}{9}x^2-\frac{23}{9}x+\frac{20}{27}$$

$$h(x)=-1-(x-1)+0,\overset{\frown}{4}\,(x-1)^2-0,\overset{\frown}{074}\,(x-1)^2(x-4)=-0,\overset{\frown}{074}\,x^3+0,\overset{\frown}{8}\,x^2-2,\overset{\frown}{5}\,x+0,\overset{\frown}{740}$$

5. ***(2 puntos)*** Dado el spline cúbico interpolador de los puntos:

$(x_0, y_0) = (0,1)$, $(x_1, y_1) = (1,2)$ y $(x_2, y_2) = (2, a)$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si\ \ 0 \le x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si\ \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural, es decir $S_0''(x_0) = S_1''(x_n) = 0$

Recuerda también que $S_1'(x_1) = S_0'(x_1)$ y $S_1''(x_1) = S_0''(x_1)$

$S_0'(x) = 2 - 3x^2$

$S_0''(x) = -6x$

$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$

$S_1'(x) = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$

$S_1''(x) = 2c + 6dx - 6d$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$ $\quad\quad a = -1$