Resolución de ecuaciones de una variable (II)

Tema 5

Resolución de ecuaciones de una variable

- Antecedentes
- Teorema de Conservación del Signo y Bolzano
- Método de la Bisección
- Método de la Secante
- Método Regula Falsi
- Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

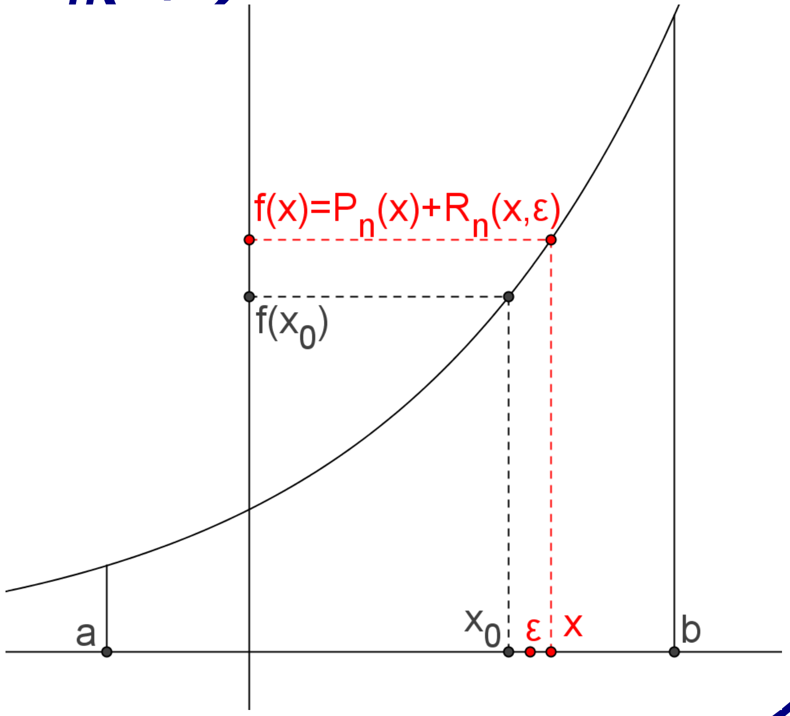
Sea *f* y sus $f^{(n+1)}$ derivadas continuas en *[a,b]*.
Si $x_0 \epsilon [a,b]$ entonces para todo $x \epsilon [a,b]$ existirá un ε entre x_0 y x tal que:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x,\varepsilon)$$

donde

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x,\varepsilon)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$



Teorema de Taylor

El polinomio ***$P_n(x)$*** se llama **polinomio de Taylor** de orden *n*:

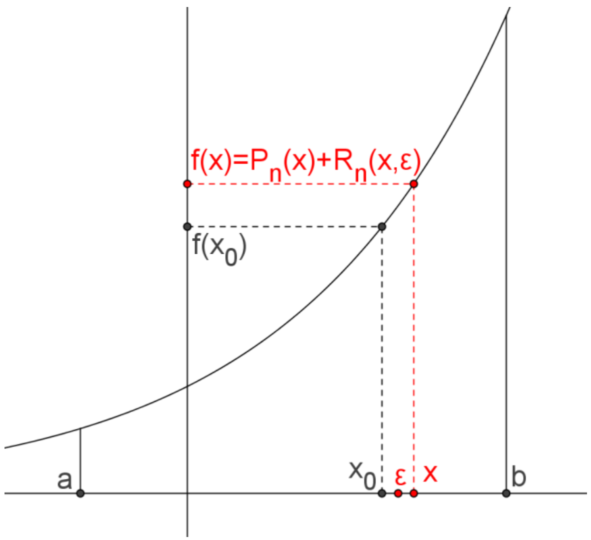
$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

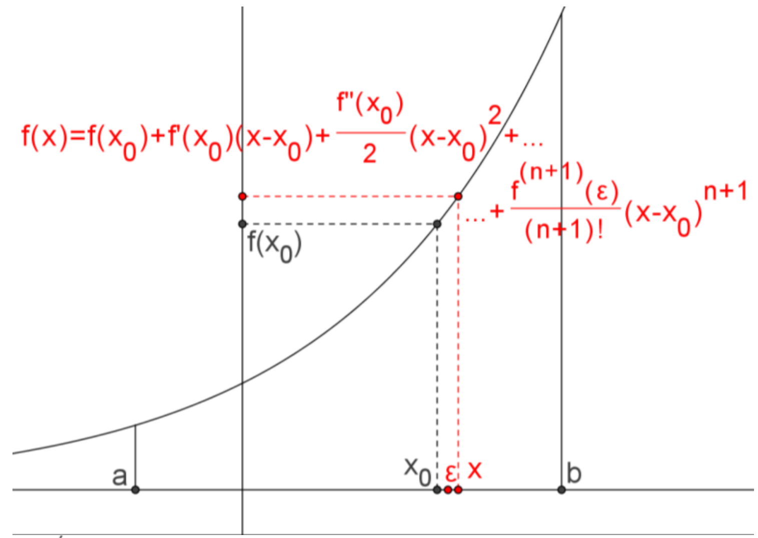
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

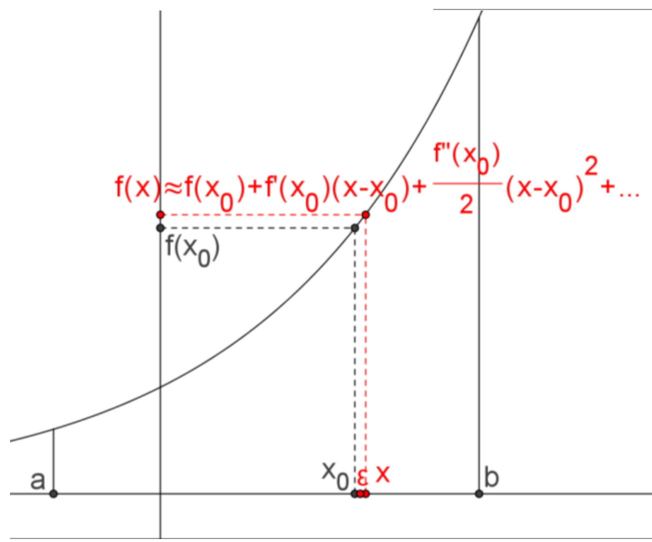
A ***$R_n(x,\varepsilon)$*** se le llama **resto de Taylor** o
error de truncamiento ya que **tiende a *0***
para valores de *x* próximos a x_0
conforme *n* tiende a ∞:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0}} R_n(x,\varepsilon) = 0$$

Teorema de Taylor







Polinomio de Taylor

Los polinomios de Taylor son entonces aproximaciones al valor de la función *f* en un punto *x* cercano a otro x_0 y se crean con valores de las sucesivas derivadas de *f* en x_0:

$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Delta f(x) = R_1(x,\varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \qquad \Delta f(x) = R_2(x,\varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \qquad \Delta f(x) = R_3(x,\varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \Delta f(x) = R_n(x,\varepsilon)$$

Polinomio de Taylor

***n* es el grado u orden del polinomio** y cuanto mayor es *n* mejor es la aproximación, disminuyendo el error *Δf(x)*:

$$R_1(x,\varepsilon) \geq R_2(x,\varepsilon) \geq R_3(x,\varepsilon) \geq \ldots \geq R_n(x,\varepsilon)$$

$$\left| f(x) - P_1(x) \right| \geq \left| f(x) - P_2(x) \right| \geq \ldots \geq \left| f(x) - P_n(x) \right|$$

El valor de la función en *x* coincide con la serie infinita llamada **Serie de Taylor**:

$$f(x) = \sum_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Polinomio de Taylor

Si x_0=0 entonces $P_n(x)$ se llama **polinomio de Maclaurin**:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Y da lugar a la **Serie de Maclaurin**: $f(x) = \sum_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f^{I}(x) = -\mathrm{sen}(x)$$
$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{III}(x) = \mathrm{sen}(x)$$
$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f^{I}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{III}(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

$$P_2(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f^{I}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{III}(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_2(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$P_4(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

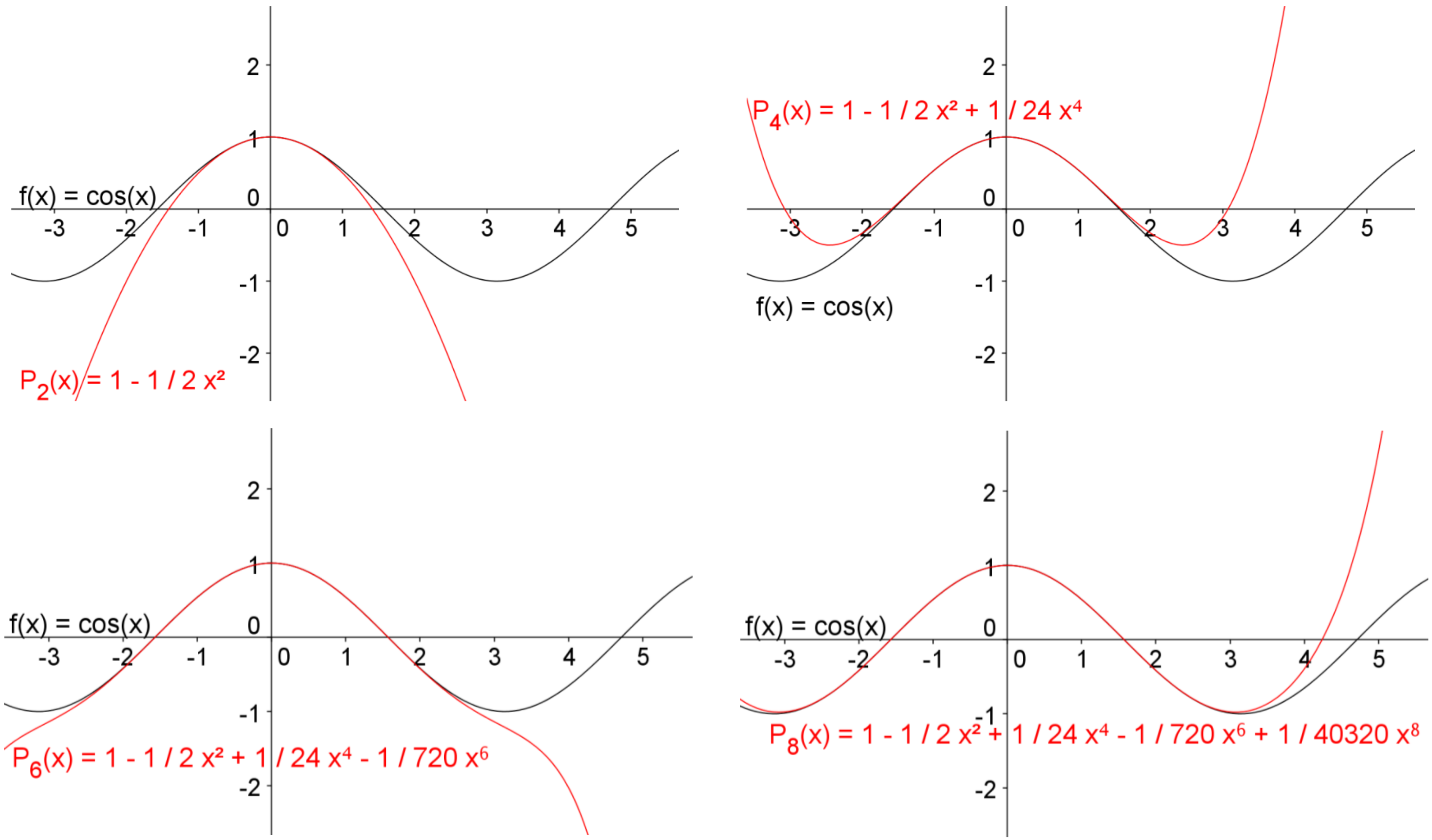
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos(1) \approx P_2(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\cos(1) \approx P_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{24 - 12 + 1}{24} = \frac{13}{24}$$

Ejemplo gráfico

Polinomios de Maclaurin de orden *2*, *4, 6 y 8* para *cos(x)*:



Resolución de ecuaciones de una variable

- Antecedentes
- Teorema de Conservación del Signo y Bolzano
- Método de la Bisección
- Método de la Secante
- Método Regula Falsi
- Teorema de Taylor
- Método de Newton

Método de Newton

Supongamos que nos encontramos en *a* a una pequeña distancia *h* de *x* tal que:

$x=a-h$

Si nos aproximamos a *x* por el polinomio de Taylor de primer orden tenemos que:

$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$

es decir

$f(x) \approx f(a)+f'(a)(a-h-a) = f(a)-hf'(a)$

Si *x* es la raíz que buscamos, entonces

$f(x)=0$ y $h \approx f(a)/f'(a)$

Método de Newton

En el método de Newton usaremos un solo punto de partida a_0 en vez de los extremos *a* y *b* de un intervalo. En cada paso nos aproximaremos un incremento *h* cuyo cálculo acabamos de obtener del polinomio de Taylor de primer orden:

$a_{i+1}=a_i-h$ $h=f(a_i)/f'(a_i)$ $a_{i+1}=a_i-f(a_i)/f'(a_i)$

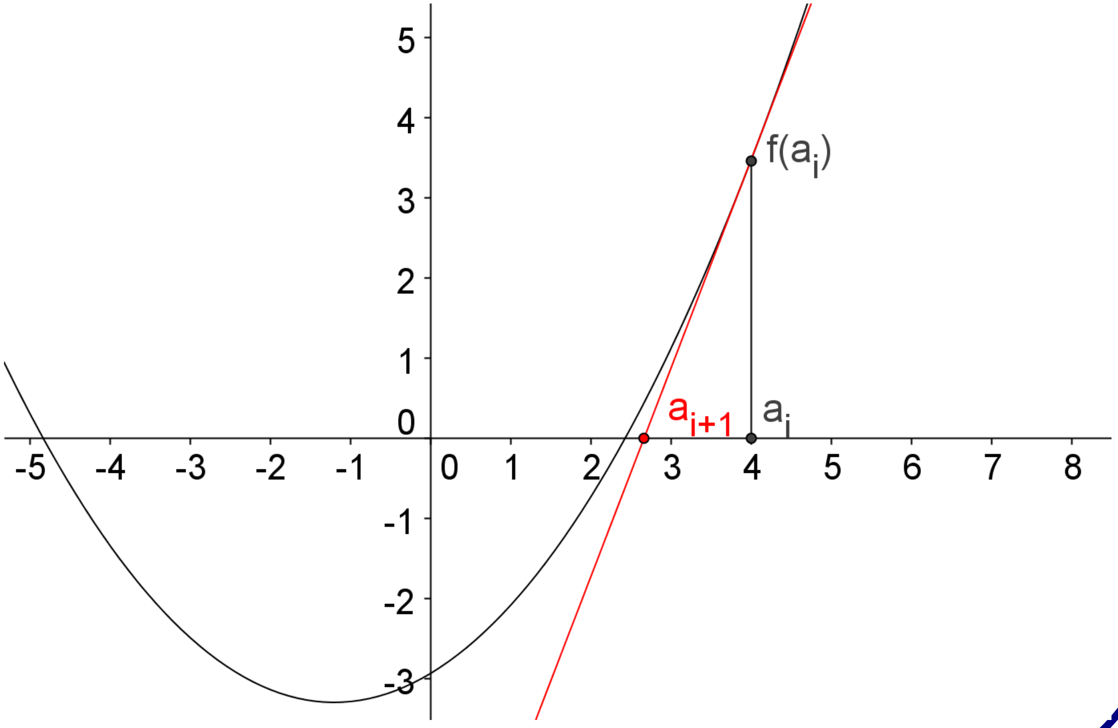
Método de Newton

Resulta similar al método de la secante pero usando la pendiente de la tangente, f'(x), en vez de la pendiente de la secante:

$$\frac{y - f(a_i)}{x - a_i} = f'(a_i)$$

$$\frac{0 - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} = f'(a_i)$$

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$$



Método de Newton

Algoritmo del método de búsqueda de raíces por Newton:

```
BúsquedaPorNewton (f(x),a,ε,Δ,n)
      f'(x)::=df(x)/dx
      i:=0
      repetir
            i:=i+1
            h:=f(a)/f'(a)
            c:=a-h
            a:=c
      hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Ejemplo 1 Método de Newton

Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$
con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

	=n		Δ=			ε=	
i	**a**	**b**	**c**	**h**	**f(a)**	**f(b)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo 1 Método de Newton

Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$
con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

	=n	Δ=			ε=	
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo 1 Método de Newton

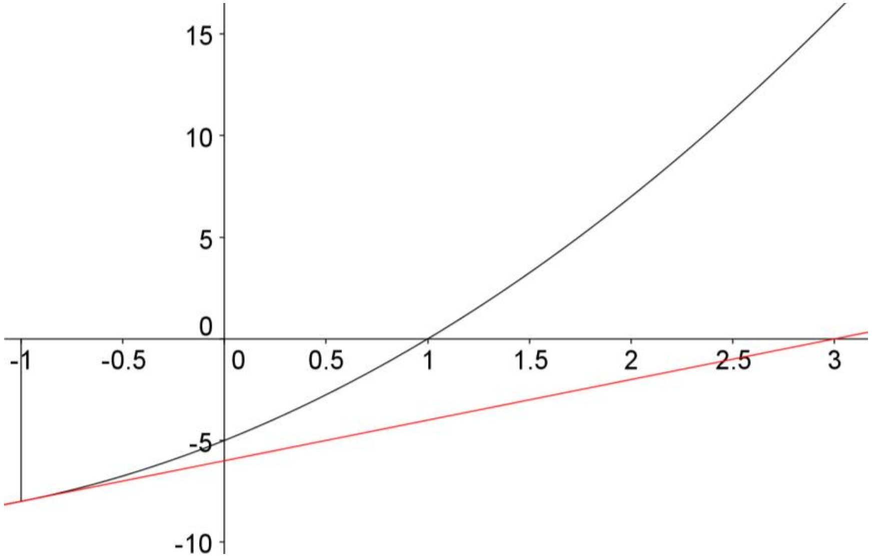
Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$

con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01* $f'(x) = 2x + 4$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo 1 Método de Newton



Ejemplo 1 Método de Newton

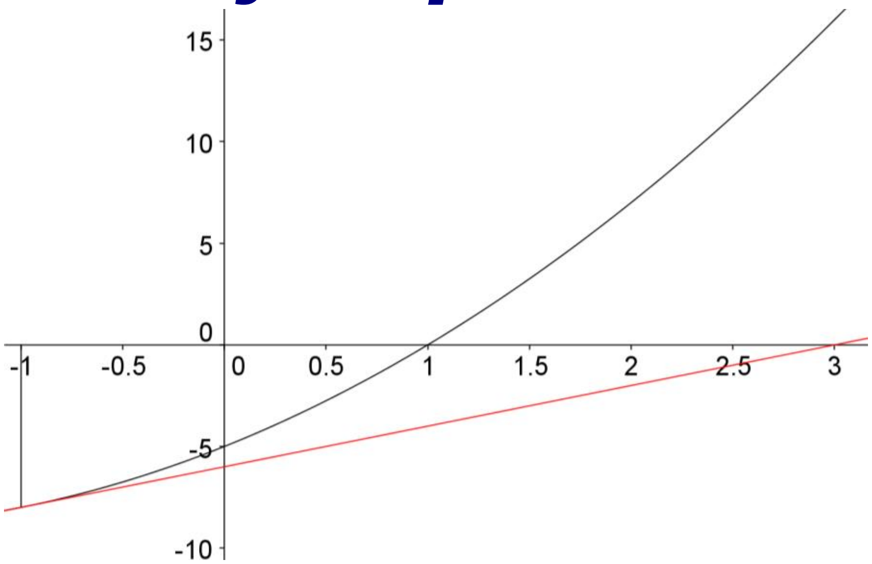
Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$

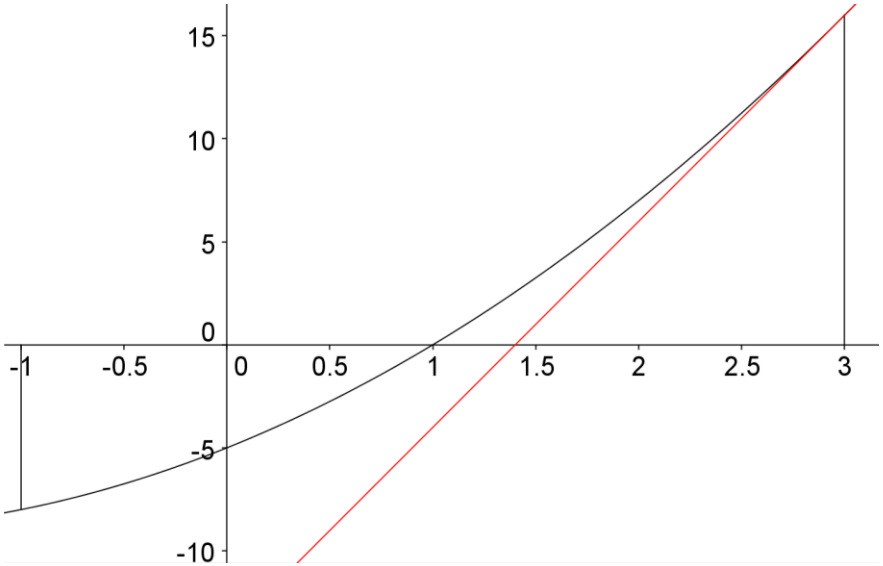
con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01* $f'(x) = 2x + 4$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo Método de Newton





Ejemplo 1 Método de Newton

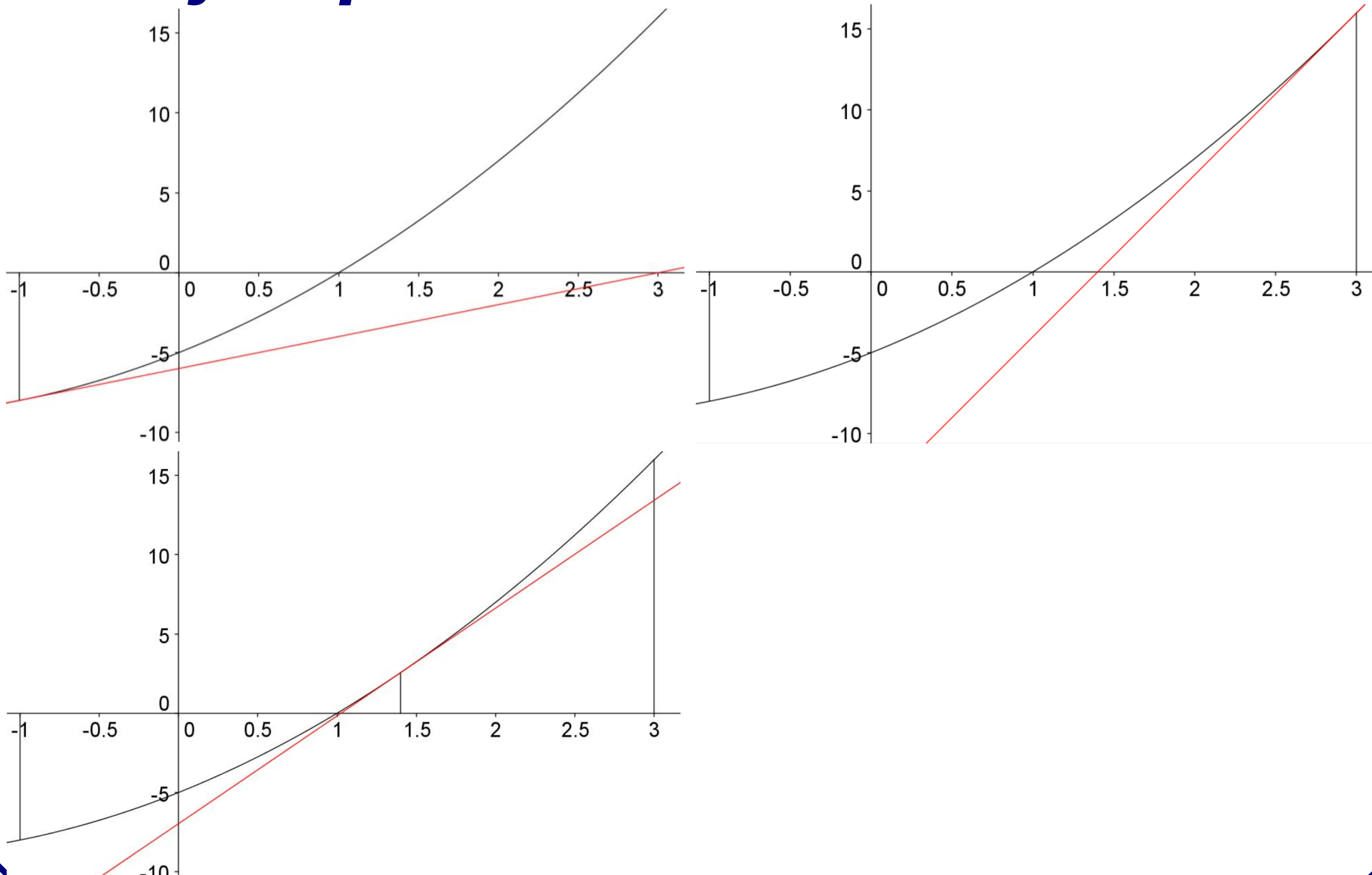
Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$

con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01* $f'(x) = 2x + 4$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56
3	1,4	1,02	0,38	2,56	6,8	0,14

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo Método de Newton



Ejemplo 1 Método de Newton

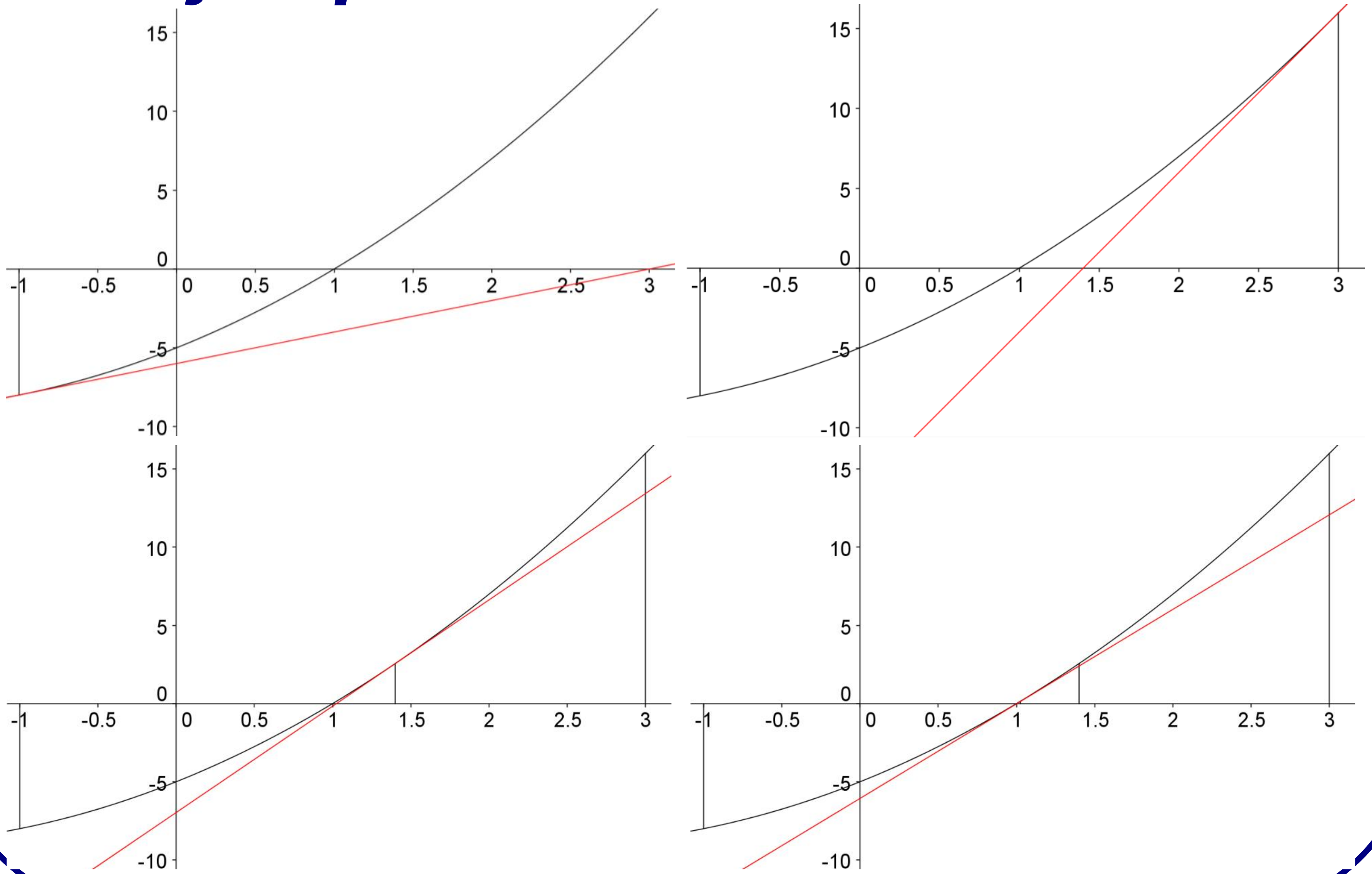
Buscar una raíz desde *a=-1* en: $f(x) = x^2 + 4x - 5$

con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01* $f'(x) = 2x + 4$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56
3	1,4	1,02	0,38	2,56	6,8	0,14
4	1,02	1	0,02	0,14	6,05	0

Cálculos redondeados a 2 decimales

Ejemplo Método de Newton



Ejemplo 2 Método de Newton

Considerando cero cualquier valor $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$
buscar una raíz de: $f(x) = 3x + sen(x) - e^{x}$

					ε=	
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo 2 Método de Newton

Considerando cero cualquier valor $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$

buscar una raíz de: $f(x) = 3x + sen(x) - e^x$

Partimos de *a=0* $f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$

					ε=	0,0001
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo 2 Método de Newton

Considerando cero cualquier valor $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$

buscar una raíz de: $f(x) = 3x + sen(x) - e^{x}$

Partimos de *a=0* $f'(x) = 3 + \cos(x) - e^{x}$

					ε=	0,0001
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	0	0,333333	-0,333333	-1	3	-0,068418

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo 2 Método de Newton

Considerando cero cualquier valor $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$

buscar una raíz de: $f(x) = 3x + sen(x) - e^x$

Partimos de *a=0* $f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$

					ε=	0,0001
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	0	0,333333	-0,333333	-1	3	-0,068418
2	0,333333	0,360171	-0,026837	-0,068418	2,549345	-0,000628

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo 2 Método de Newton

Considerando cero cualquier valor $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$

buscar una raíz de: $f(x) = 3x + sen(x) - e^x$

Partimos de *a=0* $f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$

					ε=	0,0001
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	0	0,333333	-0,333333	-1	3	-0,068418
2	0,333333	0,360171	-0,026837	-0,068418	2,549345	-0,000628
3	0,360171	**0,360422**	-0,000251	-0,000628	2,502263	0

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$
para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$

		Δ=				
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0* **FALLO**

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	0		**error**	1,38	0	

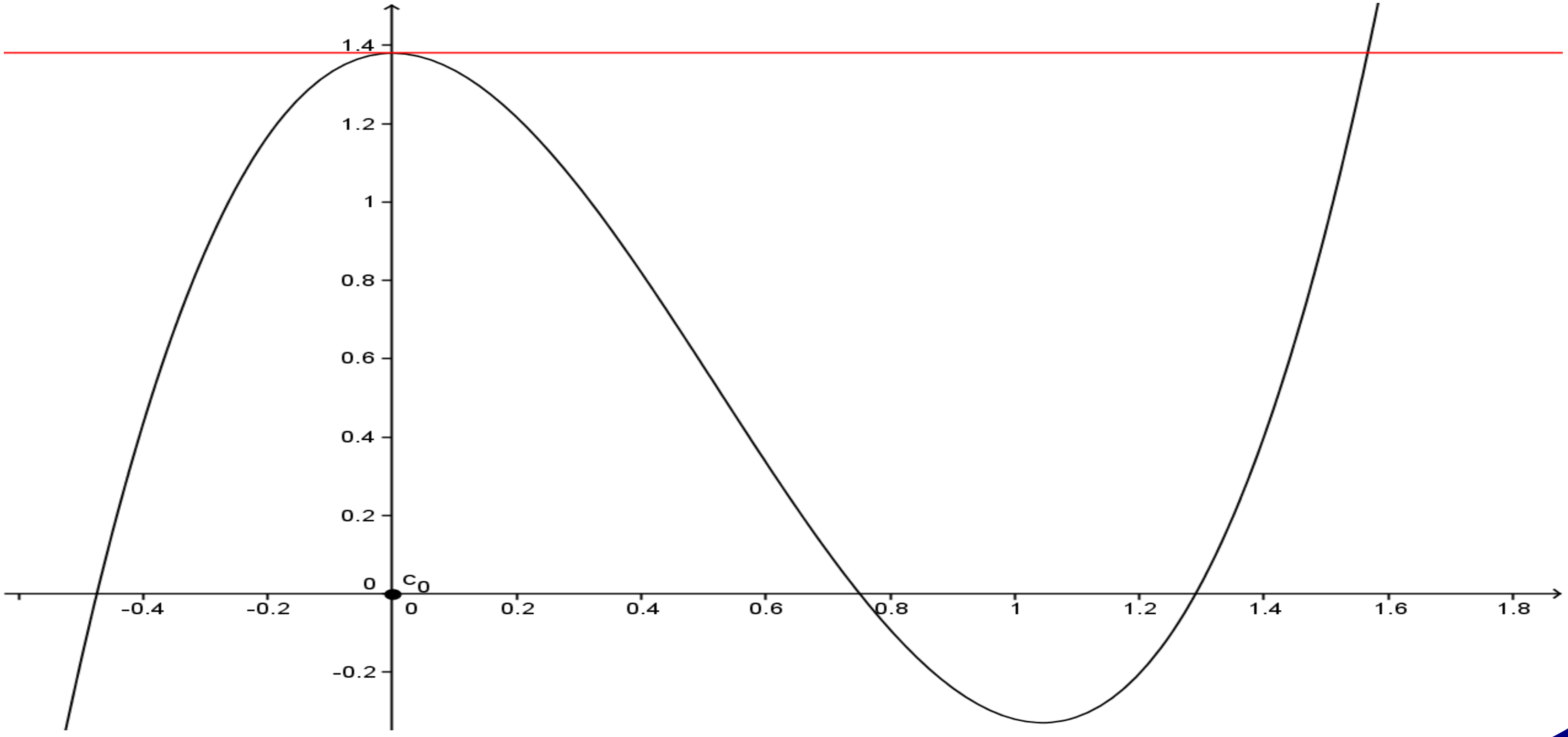
Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0* **FALLO**



Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216

Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216
2	0,2	1	-0,8	1,216	-1,52	-0,32

Cálculos redondeados a 3 decimales

Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

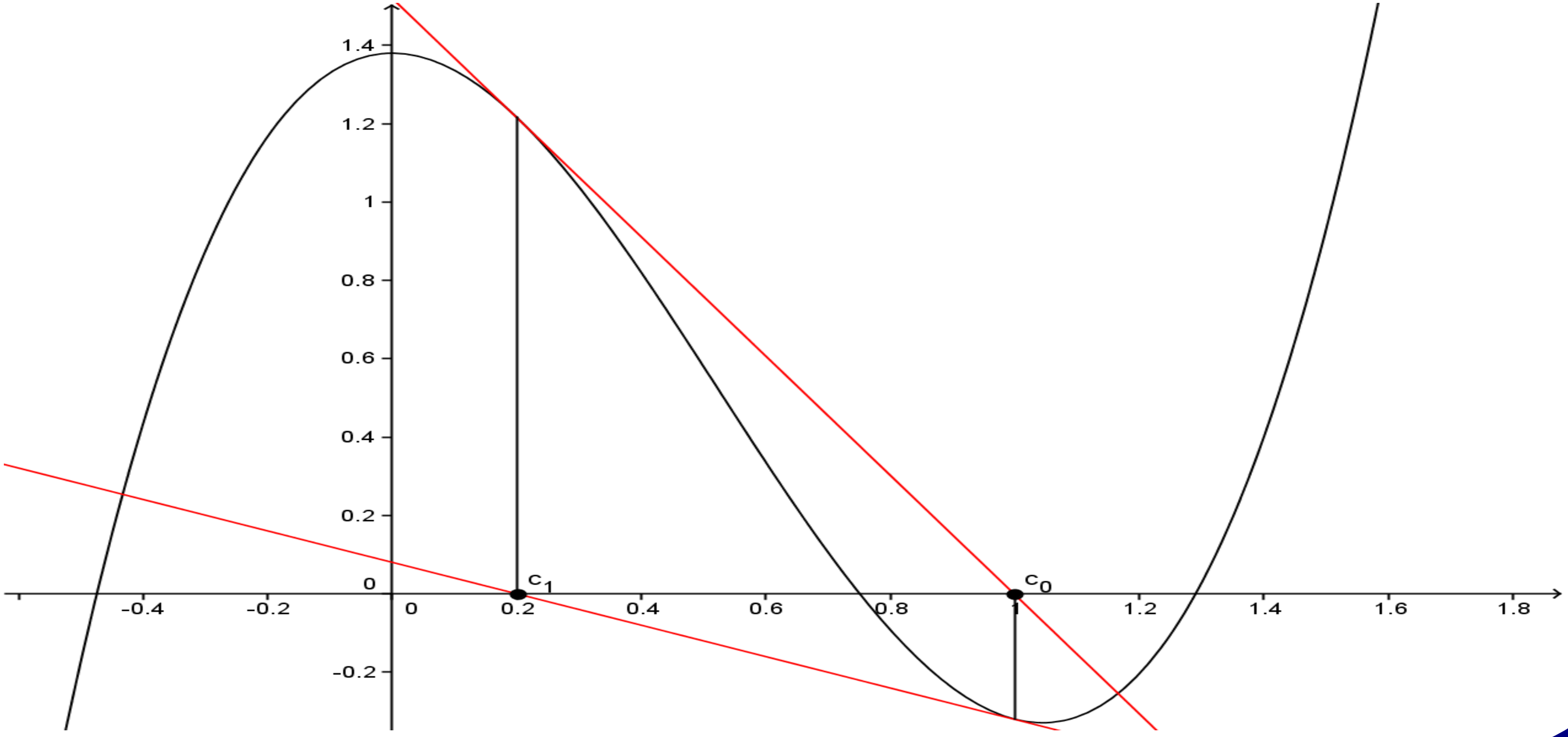
Partimos de *a=1* **FALLO 2**

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216
2	0,2	1	-0,8	1,216	-1,52	-0,32
3	1		**ciclo**			

Cálculos redondeados a 3 decimales

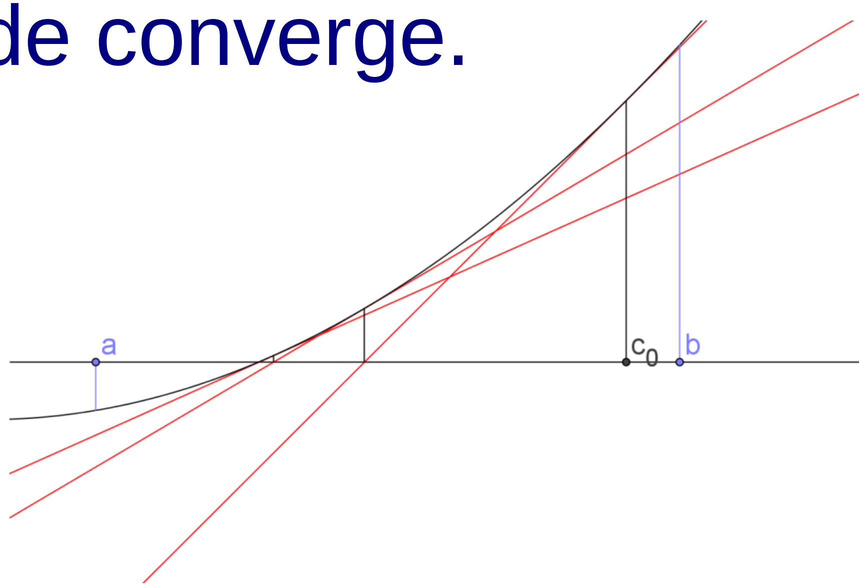
Ejemplo 3 Método de Newton

Buscar una raíz con error absoluto *Δ ≤ 1·10*$^{-3}$
para: $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38 \quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$
Partimos de *a=1* **FALLO 2**



Teorema de la convergencia del método de Newton

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b)<0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ mantienen su signo sin anularse en ningún momento en $[a,b]$, entonces si el punto inicial $c_0 \epsilon [a,b]$ escogido cumple que $f(c_0)\cdot f''(c_0)>0$, el método de converge.



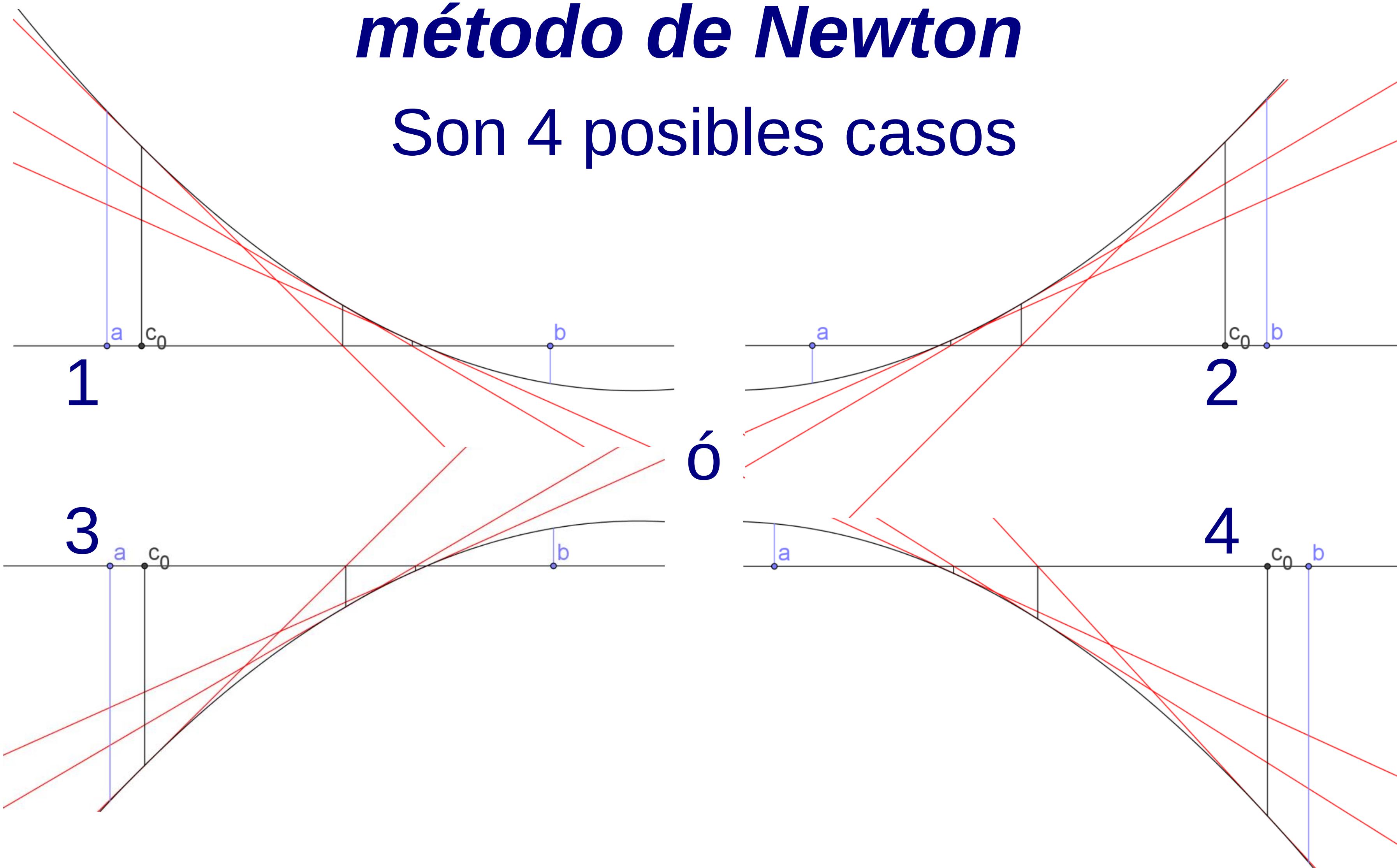
Teorema de la convergencia del método de Newton

Interpretación:

1. Con $f(a) \cdot f(b) < 0$ se asegura que hay una raíz.
2. Que $f'(x)$ y $f''(x)$ no sean nulos asegura que no hay inflexiones, máximos o mínimos.
3. Si además $f'(x)$ y $f''(x)$ tienen siempre el mismo signo hacen que la gráfica sea toda creciente o toda decreciente y toda con el mismo tipo de concavidad (hacia arriba o hacia abajo).
4. Escoger c_0 para que $f(c_0) \cdot f''(c_0) > 0$ asegura que los siguientes $f(c_i)$ tendrán el mismo signo que $f(c_0)$ y serán cada vez más pequeños hasta hacerse $f(c_i) = 0$.

Teorema de la convergencia del método de Newton

Son 4 posibles casos



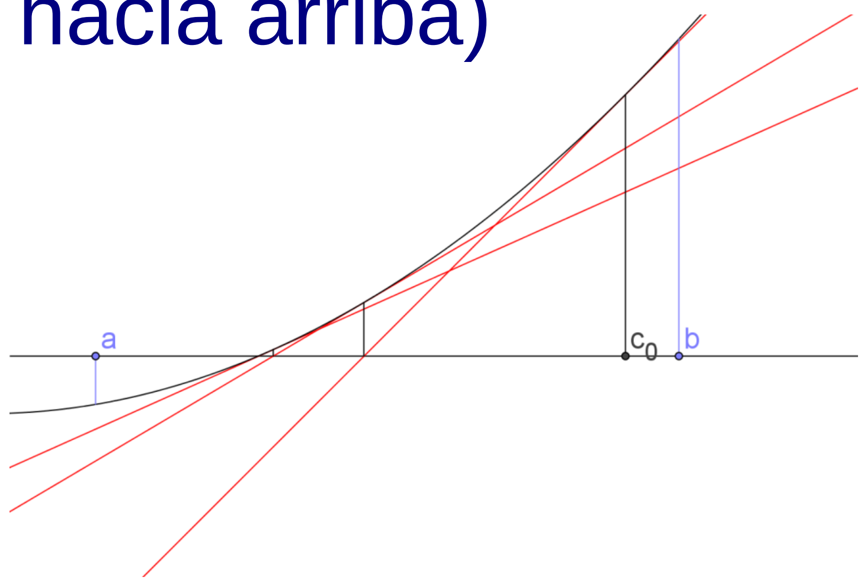
Teorema de la convergencia del método de Newton

Demostración para caso 2:

Supuesto:

- $f(a)<0$ y $f(b)>0$ (Hay una raíz en $[a,b]$)
- $f'(x)>0$ (la función es creciente en $[a,b]$)
- $f'''(x)>0$ (y cóncava hacia arriba)

Escogemos c tal que $f(c_0)>0$, es decir, del mismo signo que $f''(c_0)$



Teorema de la convergencia del método de Newton

Suponiendo que la raíz c_r está a h de nuestra aproximación c_0, sustituimos $c_r=c_0+h$ en un polinomio y resto de Taylor de grado *1*:

$f(x)=P_1(x)+R_1(x,\varepsilon)$

$$f(x)=f(c_0)+f'(c_0)(x-c_0)+\frac{f''(\varepsilon)}{2}(x-c_0)^2$$

haciendo $f(c_r)=0$

$$0=f(c_0)+f'(c_0)(c_r-c_0)+\frac{f''(\varepsilon)}{2}(c_0+h-c_0)^2$$

como f”(x)>0 $$\frac{f''(\varepsilon)}{2}h^2>0$$

y entonces $$f(c_0)+f'(c_0)(c_r-c_0)<0$$

Teorema de la convergencia del método de Newton

Si $f(c_0) + f'(c_0)(c_r - c_0) < 0$

entonces $c_r < c_0 - \dfrac{f(c_0)}{f'(c_0)} = c_1 < c_0$

es decir, c_1 se ha quedado entre c_r y c_0

Si seguimos aplicando (el método) $c_{i+1} = c_i - \dfrac{f(c_i)}{f'(c_i)}$

entonces $c_r < \ldots < c_{i+1} < c_i < \ldots < c_1 < c_0$

de donde podemos concluir que converge: $\lim_{i \to \infty} c_i = c_r$

Resolución de ecuaciones de una variable

- Antecedentes
- Teorema de Conservación del Signo y Bolzano
- Método de la Bisección
- Método de la Secante
- Método Regula Falsi
- Teorema de Taylor
- Método de Newton
- Análisis de error y convergencia

Teorema de la acotación del error

Sea c_r una raiz de $f(x)$ y c_i su aproximación, ambos c_r y $c_i \in [a,b]$,

y $m>0$ el mínimo $|f'(x)|$ para $x \in [a,b]$, es decir $|f'(x)| \geq m > 0$,

entonces

$$\Delta c_i = |c_r - c_i| \leq \frac{|f(c_i)|}{m}$$

Teorema de la acotación del error

Demostración:

Por el teorema del valor medio

$$f'(c) = \frac{f(c_i) - f(c_r)}{c_i - c_r} \qquad c_i - c_r = \frac{f(c_i) - f(c_r)}{f'(c)}$$

como $f(c_r)=0$ y $|f'(c)| \geq m$, entonces

$$|c_i - c_r| = \frac{|f(c_i)|}{|f'(c)|} \qquad |c_r - c_i| \leq \frac{|f(c_i)|}{m}$$

Ejemplo de la acotación del error

Supongamos que tenemos $a=3.14$ una aproximación de la raíz de $f(x)=tan(x)$ con un valor calculado de $f(a)=-0,0016$.

$f'(x)=1/cos^2(x)$ es positivo para cualquier x y $f''(x)=2(tan^3(x)+tan(x))$ es *0* para $x=\pi$, es decir, $f'(x)$ tiene un mínimo en $x=\pi$.

Por lo tanto $m=f'(\pi)=1$ y $|f'(x)|\geq m$.

En consecuencia:

$$|c_r - c_i| \leq \frac{|f(c_i)|}{m} \qquad |A-a| \leq \frac{|f(a)|}{m} = \frac{0,0016}{1} = 0,0016 = \Delta_a$$

Orden de convergencia

Para determinar qué sucesión *{c_i}* converge con más "velocidad" a su c_r analizaremos qué relación guardan los errores de dos términos consecutivos, por ejemplo: $|c_r - c_{i+1}| \le M|c_r - c_i|$

Evidentemente, si converge es porque *0<M<1*

Podríamos relajar la restricción a sólo *M>0* si introducimos en la expresión un *q* tal que:

$$|c_r - c_{i+1}| \le M|c_r - c_i|^q \qquad \frac{|c_r - c_{i+1}|}{|c_r - c_i|^q} \le M$$

Orden de convergencia

Se le llama **orden de convergencia** al valor de ***q*** que hace que para un valor de *M>0* se cumpla

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\left|c_r - c_{i+1}\right|}{\left|c_r - c_i\right|^q} = M$$

Orden de convergencia

Como ya se comentó, el orden del método de la Bisección es lineal o de orden *1*, es decir *q=1*.

$$|c_r - c_i| \le h_i$$

$$|c_r - c_{i+1}| \le h_{i+1}$$

$$h_{i+1} = \frac{h_i}{2} \qquad h_i = 2h_{i+1}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|c_r - c_{i+1}|}{|c_r - c_i|^q} = M$$

con *q=1* da *0<M=1/2*

$$\frac{\lim\limits_{i\to\infty}|c_r - c_{i+1}|}{\lim\limits_{i\to\infty}|c_r - c_i|} = \frac{\lim\limits_{i\to\infty} h_{i+1}}{\lim\limits_{i\to\infty} 2h_{i+1}} = \frac{1}{2}$$

Orden de convergencia

El orden de convergencia **Newton es cuadrático**, es decir de orden *q=2*, para raíces simples:

Volvemos al polinomio y resto de Taylor de grado *1*
$f(x)=P_1(x)+R_1(x,\varepsilon)$

$$f(c_r)=f(c_i)+f'(c_i)(c_r-c_i)+\frac{f''(\varepsilon)}{2}(c_r-c_i)^2=0$$

$$f'(c_i)(c_r-c_i)+f(c_i)=-\frac{f''(\varepsilon)}{2}(c_r-c_i)^2$$

$$c_r-c_i+\frac{f(c_i)}{f'(c_i)}=-\frac{f''(\varepsilon)}{2f'(c_i)}(c_r-c_i)^2$$

Orden de convergencia

El orden de convergencia **Newton es cuadrático**, es decir de orden *q=2*, para raíces simples:

Volvemos al polinomio y resto de Taylor de grado *1*

$f(x)=P_1(x)+R_1(x,\varepsilon)$

$$c_r - c_i + \frac{f(c_i)}{f'(c_i)} = -\frac{f''(\varepsilon)}{2f'(c_i)}(c_r - c_i)^2$$

$$c_r - c_{i+1} = -\frac{f''(\varepsilon)}{2f'(c_i)}(c_r - c_i)^2$$

$$\frac{c_r - c_{i+1}}{(c_r - c_i)^2} = -\frac{f''(\varepsilon)}{2f'(c_i)}$$

Orden de convergencia

El orden de convergencia **Newton es cuadrático**, es decir de orden *q=2*, para raíces simples:

Volvemos al polinomio y resto de Taylor de grado *1*

$f(x)=P_1(x)+R_1(x,\varepsilon)$

$$\frac{c_r - c_{i+1}}{(c_r - c_i)^2} = -\frac{f''(\varepsilon)}{2f'(c_i)}$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{|c_r - c_{i+1}|}{|c_r - c_i|^q} = \lim_{i\to\infty}\frac{|c_r - c_{i+1}|}{|c_r - c_i|^2} = \lim_{i\to\infty}\frac{|f''(\varepsilon)|}{2|f'(c_i)|} = M$$

q=2 y *M>0* si $f''(\varepsilon)\neq 0$ y $f'(c_i)\neq 0$

Orden de convergencia

El orden de convergencia **Newton es cuadrático**, es decir de orden $q=2$, para raíces simples:

Recordemos que ε está entre c_r y c_i, y c_i muy próximo a c_r por lo que $f''(\varepsilon)$ y $f'(c_i)$ también serán próximos a $f''(c_r)$ y $f'(c_r)$

Así, $f'(c_r)$ ó $f''(c_r)$ no deben anularse. Se anulan si la multiplicidad de la raíz no es *1* (raíz simple). Para raíces múltiples (multiplicidad mayor de *1*), la convergencia se reduce a lineal.

Resolución de ecuaciones de una variable

- Antecedentes
- Teorema de Conservación del Signo y Bolzano
- Método de la Bisección
- Método de la Secante
- Método Regula Falsi
- Teorema de Taylor
- Método de Newton
- Análisis de error y convergencia
- Método de Newton modificado

Método de Newton modificado

Como se ha visto, el método de Newton, que en general converge cuadráticamente, si la raíz no es simple solo se garantiza la convergencia lineal.

Para mejorar la convergencia cuando el cero buscado tiene multiplicidad *>1*, se puede usar el método de Newton modificado:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,f'(x_i)}{\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)\,f''(x_i)}$$

Método de Newton modificado

El método de Newton modificado implica en el cálculo a la segunda derivada además de a la primera. Otra variante que implica también a la segunda derivada es el método de Halley:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2f(x_i)f'(x_i)}{2\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

En realidad, el método de Newton y Halley son casos particulares para el grado *1* y *2* del método genérico de Householder que permite implicar en el cálculo de cada x_i a las derivadas sucesivas hasta el grado que se desee.

Método de Newton modificado

Algoritmo para Newton modificado quedaría así:

```
BúsquedaPorNewtonmodificado (f(x),a,ε,Δ,n)
    f'(x)::=df(x)/dx
    f''(x)::=df'(x)/dx
    i:=0
    repetir
        i:=i+1
        h:=(f(a)f'(a))/((f'(a))²-(f(a)f''(a)))
        c:=a-h
        a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Ejemplo Método de Newton modificado

Buscar con tres iteraciones máximo una raíz a partir de *1,5* de: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

	=n						
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f’(a)**	**f''(a)**	**f(c)**

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo Método de Newton modificado

Buscar con tres iteraciones máximo una raíz a partir de *1,5* de: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ $\qquad f''(x) = 6x - 8$

3	=n						
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f''(a)**	**f(c)**
1	1,5	1,894737	-0,394737	0,375	-1,25	1	0,020994

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo Método de Newton modificado

Buscar con tres iteraciones máximo una raíz a partir de *1,5* de: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ $\qquad f''(x) = 6x - 8$

3	=n						
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f''(a)**	**f(c)**
1	1,5	1,894737	-0,394737	0,375	-1,25	1	0,020994
2	1,894737	1,996918	-0,102181	0,020994	-0,387812	3,368421	0,000019

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo Método de Newton modificado

Buscar con tres iteraciones máximo una raíz a partir de *1,5* de: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \qquad f''(x) = 6x - 8$$

3	=n						
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f''(a)**	**f(c)**
1	1,5	1,894737	-0,394737	0,375	-1,25	1	0,020994
2	1,894737	1,996918	-0,102181	0,020994	-0,387812	3,368421	0,000019
3	1,996918	**1,999998**	-0,003079	0,000019	-0,012298	3,98151	0

Cálculos redondeados a 6 decimales

Ejemplo Método de Newton modificado

Buscar con tres iteraciones máximo una raíz a partir de *1,5* de: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

La solución encontrada $x \approx 2$ coincide con una raíz doble (multiplicidad 2) si interpretamos que las tres raíces del polinomio son: $x_1=0$ $x_2=2$ $x_3=2$