1 Nuestro proveedor de pilas nos cobra por una pequeña, dos medianas y una grande, 11.5 euros. En otra ocasión, dos pequeñas, tres medianas y dos grandes, nos costó 20.5 euros.

(a) *(0'50 puntos)* ¿Cuánto nos cuesta 5 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes?

(b) *(0'50 puntos)* ¿Cuánto vale una pequeña más una grande?

(c) *(1'50 puntos)* Si añadimos la condición de que una grande vale el doble de una mediana, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos de pilas?

Solución: Llamando x, y, z al precio de las pilas se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 11.5 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 20.5 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 11.5 \\ 2 & 3 & 2 & 20.5 \end{array}\right]$$

(a) Con la operación elemental $3F_1 + F_2$ se obtiene $[5\ 9\ 5\ 55]$. La solución es 55 euros.

(b) Con la operación elemental $2F_2 - 3F_1$ se obtiene $[1\ 0\ 1\ 6.5]$. La solución es 6'5 euros.

(c) El sistema se amplía

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 11.5 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 20.5 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

La solución es $x = 1.5$, $y = 2.5$, $z = 5$.

2 *(1 punto)* Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ -1 & a & b \end{bmatrix}$$

Comprobad que $PAP^{-1} = A^T$.

Solución: No hace falta hallar la inversa de P. Basta probar que P es invertible y que $PA = A^T P$. Que P es invertible se prueba hallando su determinante que es 1. Por otra parte

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = A^T P$$

3 *(1'5 puntos)* Hallad la inversa de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Sumando a cada fila la siguiente multiplicada por a (empezando por la tercera) se obtiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Hallad una descomposición LU de la matriz A *(1'25 puntos)* para resolver el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *(1'25 puntos)* donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solución: Una descomposición (tal como se hace en clase) es

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resolución $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 2 \\ -4 & -2 & 0 & | & -4 \\ 8 & 0 & 2 & | & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Resolución $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -5/4 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

(a) *(0'50 puntos)* Hallad sin cálculo alguno y justificando la respuesta un valor propio de A y un vector propio

(b) *(0'75 puntos)* Hallad todos los valores propios (ahora calculando)

(c) *(1 punto)* Hallad una base de cada subespacio propio

(d) *(0'25 puntos)* ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalízese.

Solución:

(a) Al sumar 15 todas las filas es obvio que 15 es un valor propio y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ un vector propio pues

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) El polinomio característico es $-\lambda^3 + 15\lambda^2$ y los valores propios son 0 (doble) y 15 (simple)

(c)
- Valor $\lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Valor $\lambda = 15$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -10 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) La matriz es diagonalizable, pues $P^{-1}AP = D$ siendo

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$