Tema 5: Valores y vectores propios

MATEMÁTICAS 1
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CURSO 2016-2017

En diversos campos de la ingeniería y las matemáticas surge el problema de calcular los **valores escalares** λ y los **vectores x** $\neq$ **0** que cumplen la ecuación:

A matriz nxn

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

x: vector propio, autovector

λ**: valor propio, autovalor**

Sea A matriz nxn.

Diremos que un **escalar** $\lambda \in$ R es un **autovalor, valor propi**o de A si existe un **vector v** $\in$ **R**, v $\neq$ 0, tal que **$Av = \lambda v$**, en cuyo caso se dice que **v es un vector propio o autovector** asociado al **autovalor** λ

El conjunto de todos

los **autovectores asociados** a un **mismo autovalor** λ

se llama **autoespacio o subespacio propio,**

$E_A(\lambda)$

EJEMPLO-1

El escalar λ **= 3** es un **autovalor** de A con **autovector asociado v**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En efecto $Av = \lambda v$ $\Rightarrow$ $Av = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda v = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

v **no es el único** autovector asociado a λ **= 3** , hay infinitos vectores

Todos los que sean de la forma :

$$v = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \quad a \in R$$

El Subespacio generado por λ **= 3** será :

$$E_A(3) = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a \in R \right\}$$

CÁLCULO DE AUTOVALORES de una matriz A nxn

El sistema : $Ax = \lambda x$ Se puede escribir: $(A - \lambda I)x = 0$

Por otra parte, sabemos que para que un sistema Ax=0 tenga solución no trivial, la matriz A debe ser **no es invertible**, o lo que es lo mismo que su **determinante sea igual a 0.**

Por tanto, para que el sistema $(A - \lambda I)x = 0$ tenga solución no trivial, se debe cumplir que $\det(A - \lambda I) = 0$

Al calcular el determinante de $A - \lambda I$, obtendremos un polinomio de grado **n** en función de λ, que llamaremos **polinomio característico**, $q_A(\lambda)$.

Las **raíces de este polinomio** (obtenidas factorizando por **Ruffin**i), nos darán los autovalores o valores propios de A.

Como A **nxn** es de **grado n** ➔ hay **n** autovalores λ

Recordatorio: Factorización de un polinomio por Ruffini

Factoriza el polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$.

Los divisores enteros de 8 son $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$

	1	1	−6	−4	8
1		1	2	−4	−8
	1	2	−4	−8	$\boxed{0}$

Por tanto,

$p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$

Repetiremos el procedimiento con el polinomio cociente $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

	1	2	−4	−8
2		2	8	8
	1	4	4	$\boxed{0}$
−2		−2	−4	
	1	2	$\boxed{0}$	
−2		−2		
	1	$\boxed{0}$		

Por tanto,

$p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)^2$

Los ceros o raíces del polinomio $p(x)$ son $x = 1, 2, -2, -2$

EJEMPLO-2 Calcular los valores propios de las matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como A es de orden 2, habrá 2 autovalores
Como B es de orden 3, habrá 3 autovalores

$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$(2 - \lambda)(-6 - \lambda) - 9 = 0 \qquad \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$; Factorizando por Ruffini →

$$(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda 1 = -7 \\ \lambda 2 = 3 \end{array}}$$

$\boxed{\det(B - \lambda I) = 0}$

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$;
Factorizando Por Ruffini →

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda 1 = 0 \\ \lambda 2 = 2 \text{ (doble)} \end{array}}$$

Se llama **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i **ma(λ_i)**

a la multiplicidad que tiene λ_i como raíz de **$q_A(\lambda)$**

Ej: Si en la factorización del polinomio **$q_A(\lambda)$** aparece $(\lambda - \lambda i)^k \rightarrow$

la raíz λ_i tiene multiplicidad algebraica k

EJEMPLO-4

La multiplicidad algebraica de los valores propios de A : $\lambda 1 = -7$, $\lambda 2 = 3$ — **ma(−7) = 1**, **ma(3) = 1**

La multiplicidad algebraica de los valores propios de B : $\boxed{\begin{array}{l}\lambda 1 = 0 \\ \lambda 2 = 2\end{array}}$ — **ma(0) = 1**, **ma(2) = 2**

1.- La suma de los **n** valores propios de la matriz A es igual a su **traza**:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = \text{traza}(A) \text{ (suma de la diagonal)}$$

EJEMPLO-5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{l} \lambda 1 = -7 \\ \lambda 2 = \ \ 3 \end{array}}$$

$\lambda 1 + \lambda 2 = -7 + 3 = -4$

$\text{traza}(A) = 2 - 6 = -4$

2.- El producto de los **n** valores propios de A es igual a su **determinante**:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det(A)$$

EJEMPLO-6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{l} \lambda 1 = -7 \\ \lambda 2 = \ \ 3 \end{array}}$$

$\lambda 1 \cdot \lambda 2 = -7 \cdot 3 = -21$

$\det(A) = -21$

En base a estas 2 propiedades, calcular los valores propios de una matriz de 2x2 se puede hacer resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \lambda 1 + \lambda 2 = \text{Suma de la diagonal} \\ \lambda 1 * \lambda 2 = \text{Determinante de la matriz} \end{cases}$$

EJEMPLO-7

Comprobar las propiedades 1) y 2) de los valores propios en B

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n$ = traza(B)

$\lambda 1 = 0$; $ma(\lambda 1) = 1$

$\lambda 2 = 2$; $ma(\lambda 2) = 2$

$\lambda 1 + \lambda 2 = 0 + 2.2 = 4$

traza(B) = 3 +   1 = 4

2) $\lambda_1 . \lambda_2 \dots . \lambda_n$ = det(B)

$\lambda 1 . \lambda 2 = 0.2.2 = 0$

det(B) = 0 - 2 + 4 + 4 - 6 - 0 = 0

3.- Los valores propios de una **matriz triangular** (superior o inferior) son los **elementos de su diagonal**. Su multiplicidad es el nº de veces que el valor propio aparece en la diagonal.

EJEMPLO-8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{aligned} \lambda 1 &= 1 \\ \lambda 2 &= 2 \\ \lambda 3 &= 3 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} ma(1) &= 1 \\ ma(2) &= 1 \\ ma(3) &= 1 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{aligned} \lambda 1 &= 1 \\ \lambda 2 &= 2 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} ma(1) &= 1 \\ ma(2) &= 2 \end{aligned}$$

4.- λ es valor propio de A sii **(A- λI)x=0** tiene **solución no trivial**

EJEMPLO-9

Comprobar la propiedad 3) en las matrices C y D

*3) Los valores propios de una **matriz triangular** son los elementos de su diagonal. Multiplicidad del valor propio es el nº de veces que aparecen en la diagonal.*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(C - \lambda I) = (3 - \lambda)(- \lambda)(2 - \lambda) \rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda 1=3}$, $\boldsymbol{\lambda 2=0}$, $\boldsymbol{\lambda 3=2}$

Diagonal de C : **3, 0, 2,**

ma(3)=ma(0)=ma(2)=1

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(D - \lambda I) = (4 - \lambda)^2(1 - \lambda) \rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda 1=4}$, $\boldsymbol{\lambda 2=1}$

Diagonal de D : **4, 2**;

ma(4)=2,

ma(1)=1

Ejercicio examen

4 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (0'5 puntos) Hallad el polinomio característico

(b) (0'5 puntos) Hallad los valores propios

Solución:

(a) $q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$

(b) Las raices (probando por Ruffini) son -2 (doble) y 4 (simple)

CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ A PARTIR DE SU POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Teorema 8.2 (Cayley-Hamilton): Si A es una matriz cuadrada, entonces $q_(A) = O$.

EJEMPLO-10 Se demuestra el resultado del Cayley-H con la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula $q_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

Se calcula $q_A(A) = A^2 - 2A - 3I =$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este resultado se usa para **calcular la inversa:**

$A^2 - 2A - 3I = O \quad =>$

$A(A - 2I) = 3I \quad =>$

$A(1/3(A - 2I)) = I \quad =>$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)).}$$

VECTORES PROPIOS: SUBESPACIO PROPIO ASOCIADO A UN AUTOVALOR

El conjunto de vectores propios asociados a un autovalor **λ**, o lo que es lo mismo, el **subespacio propio** asociado a un autovalor **λ** está formado por el conjunto de todas las soluciones del SL: **$Ax = \lambda x$,**

o lo que es lo mismo, el conjunto de las soluciones del SH: **$(A- \lambda I)x = 0$**

es decir, es el **espacio nulo** de la matriz **$(A- \lambda I)$**, o sea, **$Nul(A- \lambda I)$**

SubEspacio propio de A respecto de λ: $E_A(\lambda) = Nul(A- \lambda I)$

A la **dimensión** de **$E_A(\lambda)$** se le llama **multiplicidad geométrica** de **λ**, **$mg(\lambda)$**

- Un autovector está **asociado** a un **sólo** autovalor
- Un autovalor puede tener asociados **infinitos** autovectores

CÁLCULO de los VECTORES PROPIOS de una matriz A

Para cada valor propio o autovalor λ de la matriz A:

Resolver el SL: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ Cada SL se convierte en un SH, así: $(\mathbf{A} - \lambda\mathrm{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- Si es **compatible determinado** con solución no trivial, el vector solución será el vector propio asociado al valor propio.
- Si es **compatible indeterminado**, habrá infinitos vectores propios para ese λ . Para expresarlos usaremos la solución en forma vectorial del SH. Por ejemplo, si la solución fuese: $x = [x1, x2, x3]= [\alpha - \beta, \alpha, \beta]$, podemos expresarla como $x = \alpha [1, 1, 0] + \beta [-1, 0, 1]$.

  Como todos estos vectores x forman el subespacio propio asociado a ese valor propio, podemos decir que, $E_A(\lambda) = \{Env\{(1,1,0), (-1,0,1)\}\}$, por lo que la base de este subespacio será $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$.

OjO: No calcular los valores propios de una matriz en su reducida ya que no siempre los autovalores son iguales.

EJEMPLO-11

Calcular vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

1º.- Se calculan los valores propios.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Valores propios

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1;}$ $\boldsymbol{\lambda_2 = 2;}$

2º.- Se calculan los vectores propios para cada valor propio

Para $\lambda_1 = -1$, se resuelve: $Ax = \lambda_1 x \rightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\mathbf{(A - \lambda_1 I)x} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es Compatible Indeterminado (ya que su *rref* tiene un solo 1 ppal y 2 incógnitas), con solución $X_1 = X_2$, e.d, $x = (x_1, x_1)$

Si p.ej. damos a x_1 el valor 1 ➔ $\mathbf{x = (1\ 1)}$ es vector propio asociado a $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

EJEMPLO-12

Para el vector propio: $\lambda_2 = 2$, se resuelve: $Ax = \lambda_2 x \rightarrow (A - \lambda_2 I)x = 0$

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Igual que antes, es SCI, con solución $X_2=0,4 * X_1$,

$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ 0,4*x1 \end{bmatrix}$$

Si $x_1=5$, p. ej. $\rightarrow$ $x = [5;2]$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = 2$

EJEMPLO-13

Si los valores propios de A son: λ_1 **= 1,** λ_2 **= 2;** λ_3 **= 3**
encontrar el **subespacio** propio correspondiente a cada uno

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular el Subespacio propio para λ_1 = 1

Se **resuelve** el sistema $(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI → Vector solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ donde:
$x_1 = -\alpha/\mathbf{2}$; $x_2 = \alpha/\mathbf{2}$; $x_3 = \alpha$

$x = \alpha(-1/2, 1/2, 1)$

$\mathbf{E_A(\lambda_1)}$ = Env{(-1/2, 1/2, 1)} = **Env{(-1,1,2)}**

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_1) = 1}$

EJEMPLO-14

Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema $(A - \lambda_2 I)x = 0$

SCI → Vector solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ donde:
$x_1 = -\alpha/2$; $x2 = \alpha/4$; $x_3 = \alpha$

$x = \alpha(-1/2, 1/4, 1)$

$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{(-1/2, 1/4, 1)\} = \mathbf{Env\{(-2,1,4)\}}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_2) = 1}$

EJEMPLO-15

Subespacio propio para $\lambda_3 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema $(A - \lambda_3 I)x = 0$

SCI → Vector solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ donde:
$x_1 = -\alpha/4$; $x_2 = \alpha/4$; $x_3 = \alpha$

$x = \alpha(-1/4, 1/4, 1)$

$\mathbf{E_A(\lambda 3)} = \mathrm{Env}\{(-1/4, 1/4, 1)\} = \mathbf{Env\{(-1,1,4)\}}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_3) = 1}$

EJERCICIO

Calcular los **valores y vectores propios** de A (3x3).

Encontrar una **base** para el subespacio propio asociado a cada autovalor.

Indicar la **multiplicidad** de cada autovalor y de cada subespacio

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores propios $\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \text{ (doble)} \end{array}}$

a) Subespacio $\mathbf{E_A(0)}$ → resolver SH $(A - \lambda_1 I)\, x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EA(λ_1) = Env{(a, -2a, a)}.

Una base la forma el vector (1, -2, 1)

mg(λ_1) = 1

b) Subespacio $\mathbf{E_A(2)}$**:** resolver SH: $(A - \lambda_2 I)\, x2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{EA(\lambda_2) = Env\{(0, a, a)\}}$ $= a(0, 1, 1)$.

Una base la forma el vector $(0, 1, 1)$

$mg(\lambda_2) = 1$

Ejercicio examen (continuación del de la pag 14)

4 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) (1'5 puntos) Hallad una base de cada subespacio propio

- Para $\lambda = -2$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A+2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(-2) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio examen (continuación)

Para $\lambda = 4$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(4) = \begin{bmatrix} 1/2\alpha \\ 1/2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$