T2: Matrices. Operaciones

- Suma, Producto.
- Matriz inversa.
- Matrices por Bloques

OBJETIVO

Estudiar el álgebra de matrices y uso a partir de sus propiedades

Grado en Ingeniería Informática
Universidad de Alicante

Prof: Mª Jesús Castel de Haro

CURSO 2016-2017

MATRIZ

Conjunto de escalares dispuestos en filas y columnas.
(pueden ser elementos de otro tipo)

>> Se denotan con letras mayúsculas: **A, B, C**, ...

>> Elementos: **aij** que se disponen en filas (i) y columnas (j) .

$$\mathbf{A = (aij) = [aij] =} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & a_{32} & a_{33} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i=1,...m

j = 1,...n

>> Dimensión, orden de A: **mxn**, es el nº de elementos de A

m: nº de **filas**; n: nº **columnas.**

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
FILA	Matriz que tiene una sola fila. Orden 1×n	$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
COLUMNA	Matriz que tiene una sola columna. Orden m×1	$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	Matriz que tiene distinto número de filas que de columna. Orden m×n, m≠n	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRASPUESTA	A matriz. La traspuesta de A, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, es la matriz que se obtiene cambiando, ordenadamente, las filas por las columnas.	$Si\ es\ A = (a_{ij})_{m\times n}$ $su\ traspuesta\ es\ A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

OPUESTA	A matriz. La matriz opuesta de A, -A, es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \; -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
NULA	Matriz con todos sus elementos cero.	$0_{3\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
CUADRADA	*Matriz con igual número de filas que de columnas, m = n. La matriz es de <u>orden n</u>.* <u>Diagonal principal</u> : $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ <u>Diagonal secundaria</u> : a_{ij} *con* $i+j = n+1$ <u>Traza</u> de una matriz cuadrada A (tr(A)): *suma de los elementos de la diagonal principal.*	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Diagonal principal : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ Diagonal secundaria : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

SIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. $A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-6} \\ \boxed{9} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta. $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ Necesariamente $a_{ii} = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
DIAGONAL	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
ESCALAR	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

IDENTIDAD	Matriz cuadrada con sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a *1*.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	Matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ T. superior $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ T. inferior
INVERSA	A tiene inversa, A^{-1}, si se verifica que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

OPERACIONES ENTRE MATRICES A y B

- **Suma A + B**
- **Producto** de un **escalar** por una **matriz**: α **A**
- **Producto** entre **matrices**: **AB**

Útiles para resolución de sistemas en los cuales las incógnitas son matrices.

Ejemplo-1

2X + Y = [3, 1; 0,-2]
X + 2Y = [1, 0; -2, 4]

Luego lo resolvemos…

SUMA DE MATRICES

$\mathbf{A} = (a_{ij})\ m\times n, \qquad \mathbf{B} = (b_{ij})\ m\times n \ \rightarrow$

$\mathbf{C} = \mathbf{A+B} = (cij)\ m\times n = \mathbf{(a_{ij}+b_{ij})}$

NECESARIO: A y B del mismo tamaño.

Ejemplo

Sean A (mxn), B(nxp), C(mxn)

Se pueden sumar: A + B ?

Se pueden sumar: A + C ?

$$A_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{(3x2)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C_{(2x3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Cierto o falso? **Para sumar dos matrices A y B :**

a) Deben ser del mismo tamaño.

b) Deben ser cuadradas.

c) Deben ser ambas vectores fila o columna

d) Una debe ser vector fila y otra vector columna

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

ASOCIATIVA: $(A + B) + C = A + (B + C)$

CONMUTATIVA: $A + B = B + A$

OPUESTO: $A + (-A) = O$

ELEMENTO NEUTRO: $A + O = O + A = A$

Gracias a la matriz opuesta se puede definir la resta de matrices

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo-2

Probar con

$$A_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{(3x2)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C_{(2x3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Cierto o falso? sobre la **resta** de matrices

a) $\boxed{\text{Las matrices deben ser del mismo tamaño.}}$

b) Las matrices deben ser cuadradas.

c) Las matrices deben ser ambas matriz-fila o matriz-columna.

d) Una matriz debe ser matriz-fila y la otra matriz-columna.

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

$$\alpha\, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha\, a11 & \alpha\, a12 & \alpha\, a13 \\ \alpha\, a21 & \alpha\, a22 & \alpha\, a23 \\ \alpha\, a31 & \alpha\, a32 & \alpha\, a33 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES: Teorema 2.3: Sean A, B matrices, α, β, escalares

α) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

χ) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

d) Elemento neutro: $1A = A$

Teorema 2.4: Sea A matriz y α escalar

$\alpha(A)^T = (\alpha A)^T$

Ejercicio

1.- Si **A=(2,0,0)** **y** **B=(3,1)**,

¿Cuál es la opción correcta para **2A - 4B**

a) (-8, 4)

b) (5, 0, 1)

c) (16, -4, 0)

d) Esta operación no se puede realizar

A (1x3), B (1x2) estas matrices no se pueden sumar ni restar pq no coinciden tamaños

Ejercicio $3A - B + 2X - I = X - 3C + 3I$

Si A, B y C son de tamaño **nxn**

¿ Cuál es el tamaño de **I** ?

?

¿ Cuál será el tamaño

de la matriz **X** ?

?

Despejar X

MATRICES TRASPUESTAS

A = (aij) m×n, **Traspuesta** de A : $\mathbf{A^T}$ = **(aji) n×m**

Propiedades de la matriz traspuesta

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

PRODUCTO DE MATRICES

Definición 3.13: Sean las matrices $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ y $B = [b_{kj}]_{n\times p}$. El producto AB es la matriz $C = [c_{ij}]$ de tamaño $m \times p$ de forma que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

NECESARIO: Columnas de A **igual** a filas de B

Ejercicio

Obtener la matriz C que resulta de multiplicar A (2x2) y B (2x3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CASO PARTICULAR:

Producto de **matrices fila** = **producto escalar**

Sean a= (a1,…an) y b=(b1,…bn).

El producto **escalar** de a y b, **a.b** es el **número**:

a.b = (a1b1+ a2b2+… anbn)

→ Es necesario que a y b tengan el **mismo número** de componentes

→ Se **multiplica** **(a1,…an). (b1,…bn)^T**

→ a.b = b.a (conmutativa)

CASO PARTICULAR:

Producto **matriz - vector**

Se puede escribir como una **combinación lineal** de las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \mathbf{c1} \begin{bmatrix} a11 \\ a21 \\ a31 \end{bmatrix} + \mathbf{c2} \begin{bmatrix} a12 \\ a22 \\ a32 \end{bmatrix} + \mathbf{c3} \begin{bmatrix} a13 \\ a23 \\ a33 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad ?$$

Útil para resolución de sistemas con programación paralela

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

→ El producto de matrices **no es conmutativo** $AB \neq BA$ (por lo general)

→ Si $AB = BA$ ➔ A y B **conmutan**

Teoremas 2.5 hasta 2.10: Sean A (mxn), B(nxp), C(pxq) matrices, α escalar

a) $(AB)C = ABC$

b) Distributiva/suma: $A(B + C) = AB + AC$

c) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

e) $AO_{nxp} = O_{mxp}$; $O_{lxm} A = O_{lxn}$

f) $I_m A = A = AI_n$

PRODUCTO DE MATRICES

Ejercicio

1º.- A(mxn) x B (nx1) = C — **Orden de C** ?

2º.- A (1xm) x B (mxn) = C — **Orden de C** ?

3º.- B (mxn) x A (1xm) = C — **Orden de C** ?

PRODUCTO DE MATRICES

Ejercicio

Sean A, B, C matrices n×n .

Comprueba si **A(B+C) =AB + AC**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Si **AB = 0**, entonces **¿A = 0 o B = 0?.**

A	B
1 2 3 6	-2 4 1 -2

→ ¿Cuál propiedad es cierta?

a) B^2 + BC = B(B+C) → **Siempre**
b) B^2 + BC = (B+C)B → **Depende de si es conmutable…**

PRODUCTO DE MATRICES

Cuestiones

1.- Para C = AB

a) es necesario que A y B sean cuadradas

b) Cada cij = aij x bij

c) AB = BA

d) El nº de columnas de A = nº de filas de B

2.- Si A (2x4) y B (4x3) entonces AB es de tamaño

a) 2 x 3

b) 3 x 2

c) 4 x 4

d) No se puede calcular AB

Cuestiones

3.- Si **A** es de tamaño **4x5** entonces:

a) B debe tener 4 filas y AB tendrá 4 columnas

b) B debe tener 5 columnas y AB será cuadrada

c) B debe tener 4 columnas y AB 5 filas

d) B debe tener 5 filas y AB 4 filas

Cuestiones

4.- ¿ Es cierto $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

NO

$(A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB$

POTENCIAS DE MATRICES

$$A^K = \begin{cases} \overbrace{A \cdots A}^{k \text{ factores}}, & \text{si } k > 0 \\ I, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ejercicio-1 potencias

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2 =$ $A^3 =$ $A^4 =$ $\Rightarrow$ $A^n =$

$\forall n \in N$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcular A^2 , A^3

b) Deducir A^n

c) Calcular A^{10}

a)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = A^2\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A^4 = A^3\,A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio-3 potencias

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcular A^n

b) Calcular $A^{350} - A^{250}$

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$ $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^{350} - A^{250} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3*350 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3*250 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{bmatrix}$

POTENCIAS DE MATRICES

CUIDADO! No es igual que la potencia de números $(a+b)^2 = a^2+b^2+ab+ba$

(a) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

(b) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Teorema 3.11: Sea A una matriz cuadrada, r y s enteros no negativos, entonces:

a) $A^r A^s = A^{r+s}$

b) $(A^r)^s = A^{rs}$

POTENCIAS DE UNA MATRIZ

Ejercicio

Una matriz A es **periódica** si $\mathbf{A^{n+1} = A}$, $\forall$n entero. Al menor **n** se le llama periodo.

a) Probar que la matriz A es periódica de periodo 3.

Para ello, calcular A^4 y ver si es igual a A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcular A^{2012}

INVERSA DE UNA MATRIZ

Una matriz **A** (nxn) es **invertible**

si existe otra matriz **B** (nxn)

tal que:

$$BA = AB = I$$

Donde I es la matriz identidad nxn.

B es la matriz inversa de A →

$$B = A^{-1}$$

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

Teorema: Si una matriz tiene inversa, la inversa es única

LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Ejercicio-1 inv

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Comprobar si B es la **inversa de A**

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

2º Por el método de Gauss-Jordan

3º Por determinantes y adjuntos

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

Ejercicio-2 inv

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si $AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

Ejercicio-3 inv

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AA^{-1} = I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \;??$$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

Ejercicio-4 inv

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AA^{-1} = I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \;??}$$

Una matriz **cuadrada nula no es invertible** pues OB =O, por lo que nunca puede ser OB=I

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

Ejercicio-5 inv

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AA^{-1} = I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \ ??}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz **identidad I es invertible** y su inversa es ella misma

$$II = II = I$$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1º Por la propia definición

Ejercicio-6 inv

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AA^{-1} = I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \;??}$$

Una matriz cuadrada con una **fila o columna nula, no es invertible**

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

2º Por el método Gauss-Jordan

Sean A (nxn), I (nxn)

Paso 1: Formar matriz **C = [A|I]** (nx2n)

Paso 2: Obtener la **reducida** A′ de A, aplicando OE/filas.

I se transformará en una matriz B (nxn)

$$[A|I] \Rightarrow [A'|B]$$

Paso 3: Se decide si A es invertible:

a) Si **A′ = I** ⇨ A invertible y entonces $\mathbf{B = A^{-1}}$

b) Si $\mathbf{A' \neq I}$ ⇨ A′ tiene una **fila de ceros**

⇨ A **no** es invertible ⇨ $\mathbf{A^{-1}}$ no existe

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

2º Por el método Gauss-Jordan

Ejercicio-1 inv-GJ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular A^{-1}

Paso 1: Formar matriz C = [A|I] (3x6)

$$C = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 1 & 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Obtener reducida A' de A, aplicando OE/filas

$$[A'|\ B] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 & -1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 & 0\ -1\ 1 \\ 0\ 0\ 1 & 1\ 1\ -1 \end{bmatrix}$$

Como A' = I
⇨ A invertible
⇨ $B = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

Teorema 3.13: Sean A y B matrices invertibles del mismo tamaño

(a) A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(c) Si $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}$

(d) AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La definición de potencia de una matriz cuadrada se extiende para matrices invertibles con exponentes enteros negativos:

$$\mathbf{A^{-k} = (A^{-1})^k}$$

APLICACIONES DE LA MATRIZ INVERSA

Como las matrices **no se pueden dividir** entre ellas se usa la inversa para **despejar matrices** en ecuaciones matriciales.

Si tenemos Ax = b, para despejar "x" se debe determinar 1º si A es invertible y si es así, operar con la inversa de A para obtener "x".

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

SIMPLIFICAR MATRICES

Ejercicio

1) Si **AC = CB**, entonces ¿ Es cierto que **A = B** ?

2) Si **AC = BC**, entonces ¿ Es cierto que **A = B** ?

Comprobarlo con las siguientes matrices

A = [1,1; -1,-1];   B = [2, 1 ; 1, 3];   C = [1, 3; 2, 1]

Teorema 2.14: Sean A y B matrices (mxn) y C (nxn) invertible. Sean D y E matrices (nxp)

a) Si AC = BC entonces A = B

b) Si CD = CE entonces D = E

Este teorema nos da las condiciones de cuándo podemos simplificar matrices

Matrices grandes y con muchos ceros se dividen en **bloques** (submatrices).

Es más eficiente el producto de matrices y cálculos de inversa

Una matriz A está **dividida en bloques** si se puede organizar como una matriz de submatrices:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline & & \cdots & \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pr} \end{array}\right].$$

> Los bloques se obtienen trazando imaginariamente rectas verticales y horizontales entre los elementos de la matriz A.

> Los bloques se designan por: **Aij** .

Ejemplo

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right].$$

A descompuesta en **2 x 3 bloques**:

2 filas y

3 columnas

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES **POR BLOQUES**

Definición 3.4 *Se define el producto de dos matrices A y B descompuestas en bloques como la matriz por bloques C que tiene en la posición (i,j) el bloque*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} B_{kj}$$

Multiplicación: bloque por bloque

Condición :
El nº de bloques columna de A = nº de bloques fila de B

*>> Los bloques deben respetar los **tamaños***
de la multiplicación
de matrices usual

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR BLOQUES

Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right],$$

(2 x 3) bloques
2 b.filas; 3 b.columnas

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

(3 x 2) bloques
3 b. filas; 2 b.columnas

$$P = A\,B = \left[\begin{array}{c|cc} 55 & 70 & 85 \\ 70 & 90 & 110 \\ 85 & 110 & 135 \\ \hline 100 & 130 & 160 \end{array}\right].$$

Donde:

- $P_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} + A_{13} * B_{31}$
- $P_{12} = A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22} + A_{13} * B_{32}$
- $P_{21} = A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} + A_{23} * B_{31}$
- $P_{22} = A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22} + A_{23} * B_{32}$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES **POR BLOQUES**

- $P_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} + A_{13} * B_{31}$
- $P_{12} = A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22} + A_{13} * B_{32}$
- $P_{21} = A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} + A_{23} * B_{31}$
- $P_{22} = A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22} + A_{23} * B_{32}$

Es importante tener en cuenta que para que se puede hacer el producto de esta forma, no sólo debe cumplirse que el número de bloques columna de A debe ser igual al número de bloques columna de B, si no que, además, los bloques deben ser construidos de forma que sean multiplicables entre sí, es decir, que para poder calcular por ejemplo P_{11} , con la expresión anterior $P_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} + A_{13} * B_{31}$, se debe cumplir que:

- A_{11} debe ser multiplicable por B_{11},
- A_{12} debe ser multiplicable por B_{21}
- A_{13} debe ser multiplicable por $B_{31,}$

Es decir, que:

El número de columnas de A_{11} debe ser igual al de filas de B_{11}
El número de columnas de A_{12} debe ser igual al de filas de B_{21}
El número de columnas de A_{13} debe ser igual al de filas de B_{31}

Y de manera análoga deberá suceder para calcular P_{12}, P_{21} y P_{31}.

PARTICIONES ESPECIALES DE MATRICES para el PRODUCTO AB, A(mxn), B(nxp)

a) A es un bloque (mxn).

Se divide **B por columnas/** la partición de B es B = $b_{:1}$, $b_{:2}$,...$b_{:p}$,

donde cada columna es una matriz (nx1).

El producto **$Ab_{:j}$ es una matriz** (mx1) que coincide con

la **j-ésima columna** de la matriz producto AB.

$$\mathbf{AB = A[b_{:1}\ \ b_{:2} \ldots\ b_{:p}] = [Ab_{:1}\ Ab_{:2} \ldots\ Ab_{:p}]}$$

PARTICIONES ESPECIALES DE MATRICES
para el PRODUCTO AB, A(mxn), B(nxp)

b) Se divide la matriz **A por filas/** $A = [a1:,a2:,\ldots am:]^T$
El producto $AB= [a1:,a2:,\ldots am:]^T \quad B = [a1:B, a2:B,\ldots am:B]^T$

El producto ai:B es la **fila i-ésima** del producto AB

c) Se expresa **A por filas y B por columnas**.
$[a1:,a2:,\ldots am:]^T [b:1, b:2,\ldots b:p]$.
Cada producto ai:bj: es un escalar y la matriz producto es:
AB = [a1:b:1, a1:b:2,.....a1:b:p; ..... am:b:1, a1:b:2,.....am:b:p] = [ai:b:j]mxp

d) Se expresa **A por columnas y B por filas**.
$AB = [a:1,a:2,\ldots a:n]^T [b1:, b2:,\ldots bn:]$.
Cada producto a:ib:j es una matriz mxp y el producto que es:
AB = [a:1b1: + a:2b2: +...+ a:nbn:] viene expresado como suma de matrices.

PARTICIONES ESPECIALES DE MATRICES para el PRODUCTO AB, A(mxn), B(nxp)

e) Si una de las dos **matrices es diagonal,** el producto es más sencillo.

- Si A es diagonal nxn, se expresa B por fila:

AB = [a11,0,...0; 0,a22,...0; 0,...0,ann][b1:,b2:,...bn:]^T = [a11b1:; a22b2:;...annbn:]^T

Se multiplica cada fila de B por el elemento diagonal correspondiente de A.

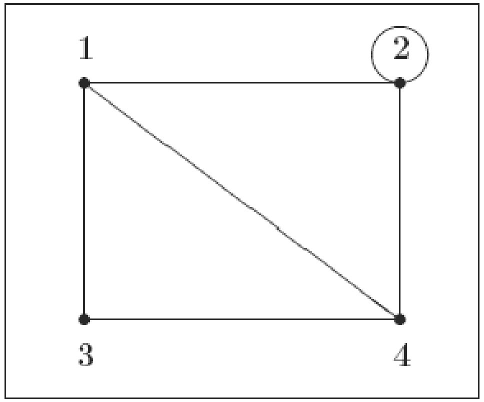
- Si B es diagonal nxn, se expresa A por columnas:

AB = [a:1, a:2,...a:n] [b11,0,...0; 0,b22,...0; 0,...0,bnn] = [b11a:1; b22a:2;...bnna:n]

Se multiplica cada columna de A por el elemento diagonal correspondiente de B

APLICACIONES DE MATRICES: GRAFOS

Ejemplo 2.18: *Calculad el número de trayectorias de longitud 4 que unen los vértices 3 y 4 en el grafo de la figura siguiente.*



Matriz de adyacencia del grafo G a la matriz cuadrada A = [ai] tal que:

- aij =1; si los vértices i y j están conectados
- aij=0; en caso contrario

Una matriz de adyacencia sólo contiene ceros y unos y es necesariamente simétrica.

Teorema. Si A es la matriz de adyacencia de un grafo y $A^k = [a^{(k)}_{ij}]$ entonces:

- El nº de trayectorias de longitud k que unen los vértices i y j es igual a $\mathbf{a^{(k)}_{ij}}$

La matriz de adyacencia y su cuarta potencia son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 18 & 18 & 11 & 17 \\ 18 & 21 & 14 & 18 \\ 11 & 14 & 10 & \boxed{11} \\ 17 & 18 & 11 & 18 \end{bmatrix}.$$

Por tanto hay 11 trayectorias de longitud 4 que unen los vértices 3 y 4.