1 Suponed que A es una matriz de tamaño $m \times n$ con $m \neq n$; supongamos que $A^T A$ es invertible

(a) (0'5 puntos) ¿Cuál es el tamaño de las siguientes matrices?

$$B = A(A^T A)^{-1} A^T, \qquad C = A^T (A^T A)^{-1} A$$

(b) (1'5 puntos) Probad que B es simétrica

Solución:

(a) La matriz A^T es de tamaño $n \times m$, la matriz $A^T A$ es de tamaño $n \times n$, por lo que $B = A(A^T A)^{-1} A^T$ es cuadrada de tamaño $m \times m$, mientras que C no existe; no se puede hacer el producto $A^T (A^T A)^{-1} A$

(b) Hay que probar que $B^T = B$

$$\begin{aligned} B^T &= \left(A(A^T A)^{-1} A^T\right)^T \\ &= (A^T)^T \left((A^T A)^{-1}\right)^T A^T \\ &= A\left((A^T A)^T\right)^{-1} A^T \\ &= A(A^T A)^{-1} A^T = B. \end{aligned}$$

2 Una forma escalonada de una matriz A es la siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0'5 puntos) Consideremos los vectores fila no nulos de B; escribe V(verdadero) o F(falso)

(1) Forman una base del subespacio $\operatorname{Fil} A$ $\boxed{\text{V}}$

(2) Forman una base del subespacio $\operatorname{Fil} B$ $\boxed{\text{V}}$

(b) (0'5 puntos) Sea C la forma reducida de la matriz A; escribe V ó F

(1) Las filas de C forman una base para el subespacio $\operatorname{Nul} A$ $\boxed{\text{F}}$

(2) $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Nul} C$ $\boxed{\text{V}}$

(c) (1 puntos) Encontrar una base para el subespacio $\operatorname{Nul} A$. Hay que resolver el sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ o su equivalente $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Como el rango de A y B es 3, el sistema es indeterminado con 2 grados de libertad; conviene reducir la matriz (hallar C) para resolverlo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ 2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ 5\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así que $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Env}\{(-1, 2, 1, 0, 0), (-1, -3, 0, 5, 1)\}$

(d) (0'5 puntos) ¿Qué vectores conforman una base del subespacio $\operatorname{Col} A$? Son las columnas primera, segunda y cuarta de A (no de B ni de C), pues estas son las columnas que contienen los unos principales (en B ó en C).

3 Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(a, 0, b, a + b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) (0'5 puntos) Probad que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son bases de S

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 2), (2, 0, 1, 3)\}, \qquad \mathcal{D} = \{(1, 0, 0, 1), (2, 0, -1, 1)\}.$$

Los dos vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes y, obviamente, pertenecen a S por lo que forman una base; análogamente se razona con los vectores de $\mathcal{D}$.

(b) (1'5 puntos) Hallad la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$
Hay que expresar los vectores de $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{D}$; por lo tanto hay que hacer dos sistemas; en los apuntes de teoría figura la forma de hacerlos simultáneamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz pedida es

$$P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo que quiere decir es que si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ y $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\}$ entonces

$$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2, \qquad \boldsymbol{b}_2 = 4\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2.$$

4 Considerad la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallad los valores propios de A (1 punto) y la multiplicidad algebráica de ellos (0'5 puntos).

Solución: El polinomio característico es

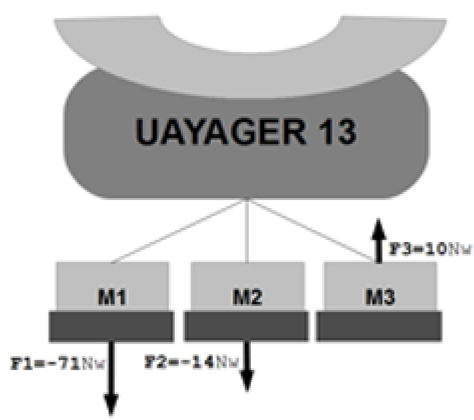
$$q_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12 = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 3).$$

Los valores propios son -2 doble y 3 simple.

5 (2 puntos) La Agencia Espacial de la Universidad de Alicante (AEUA) ha enviado la nave UAYAGER 13 a Raticulín. En el momento de Arraticulinizar (aterrizar en la superficie de Raticulín) es imprescindible que las fuerzas que se ejercen sobre los motores de la nave estén equilibradas para que el descenso sea suave hasta posarse. Nuestra misión consiste en calcular cuántos mililitros de combustible debemos enviar a cada motor para producir 3 fuerzas F_1', F_2' y F_3' que **contrarresten** las que actualmente hay sobre cada motor M_1, M_2 y M_3. En las especificaciones tenemos una tabla que nos indica las fuerzas que se producen al enviar un mililitro de combustible a cada motor:

	F sobre M_1	F sobre M_2	F sobre M_3
1 ml enviado a M_1	-2	2	3
1 ml enviado a M_2	45	3	-13
1 ml enviado a M_3	-9	-2	1

¿Cuántos mililitros de combustible debemos enviar a cada motor?



Nota 1: Las fuerzas resultantes aplicadas sobre cada motor deben ser las opuestas a las que está sufriendo actualmente para que su suma sea 0.
Nota 2: El planteamiento del sistema se valorará con un punto y su resolución con otro punto.

Solución: Llamando x, y ,z al número de mililitros de combustible enviados a los motores M_1, M_2 y M_3 surge el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 45y & - & 9z & = & 71 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 14 \\ 3x & - & 13y & + & z & = & -10 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por Gauss

$$\left[\begin{array}{rrrr} -2 & 45 & -9 & 71 \\ 2 & 3 & -2 & 14 \\ 3 & -13 & 1 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La solución es $x = 5$, $y = 2$, $z = 1$.