Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Martes de 11:00 a 13: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:30 a 17:30**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**

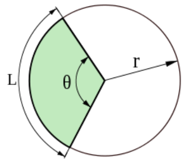
Examen Final de Matemáticas II. Junio 2014

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

		Nota
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**1,5**	
Ejercicio 4	**1,5**	
Ejercicio 5	**2**	
Ejercicio 6	**1**	
Total		

1. *(2 puntos)* Un pedazo de pizza, en forma de sector circular, tiene un perímetro de a cm. ¿Cuál debería de ser el radio de la pizza para crear el pedazo de mayor área posible?



Área del sector circular: $A(\theta) = \frac{\theta r^2}{2}$ Longitud del arco de circunferencia: L = θr.

El sector circular puede ser de un ángulo θ que varía de 0 a 2π radianes. El perímetro a del sector circular incluye dos veces el radio, más la longitud del arco de circunferencia correspondiente:

$$a = 2r + \theta r = (2 + \theta)r$$

De donde podemos determinar la longitud del radio en función del ángulo:

$$r(\theta) = \frac{a}{2 + \theta}$$

El área del sector es $\mathrm{A} = \frac{\theta}{2}\mathrm{r}^2$ y en función del ángulo quedaría:

$$A(\theta) = \frac{\theta R(\theta)^2}{2} = \frac{a^2\theta}{2(2+\theta)^2}$$

Para determinar con qué ángulo se hace máxima, comprobemos dónde su derivada se hace 0:

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2(2+\theta)^2 - (a^2\theta)2(2+\theta)}{(2+\theta)^4}\right) = \frac{a^2(2+\theta) - 2a^2\theta}{2(2+\theta)^3} = 0$$

Como el denominador siempre será positivo, el cero solo se dará en el numerador:

$$2a^2 + a^2\theta - 2a^2\theta = 0$$

$$2a^2 - a^2\theta = 0 \qquad \theta = 2$$

El área máxima siempre se dará con el ángulo de 2 radianes, por lo que el radio que deberá tener la pizza es:

$$r = R(2) = \frac{a}{2+2} = a/4$$

2. *(2 puntos)* Dado el spline cúbico interpolador de los puntos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,a)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si\ \ 0 \le x \ < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si\ \ 1 \le x \ \le 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural, es decir $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$

Recuerda también que $S_{i+1}'(x_{i+1}) = S_i'(x_{i+1})$ y $S_{i+1}''(x_{i+1}) = S_i''(x_{i+1})$

$S'_0(x) = 2 - 3x^2$

$S''_0(x) = -6x$

$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$

$S'_1(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2 = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$

$S''_1(x) = 2c + 6d(x-1) = 2c + 6dx - 6d$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = S_0'(1) = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = S_0''(1)/2 = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$ $\qquad a = S_1(2) = -1$

3. Los termistores (resistencias térmicas) se utilizan para medir la temperatura de los cuerpos y se basan en la variación de la resistencia eléctrica con la temperatura.
   Los fabricantes proporcionan una curva de calibración de la resistencia (variable x) frente a la temperatura (variable y) de forma que si se mide la resistencia se puede encontrar la temperatura. Un fabricante de termistores ofrece los siguientes datos de calibración:

Resistencia (KΩ)	Temperatura (ºC)
1,100	25
0,900	30
0,650	40
0,450	50

   a) *(1 punto)* Calcula el polinomio interpolador del grado correspondiente usando el método de diferencias divididas.
   b) *(0,5 puntos)* Si se mide una resistencia de 1 KΩ, ¿a qué temperatura se encuentra el termistor?

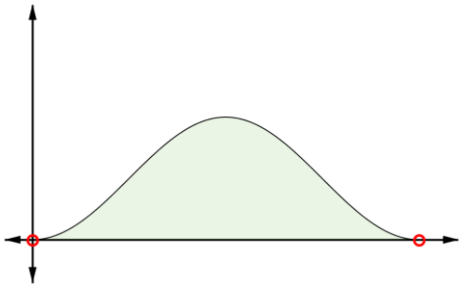
   Advertencia: usad fracciones o redondead a 3 decimales.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
1,1	25			
		$\frac{30-25}{0{,}9-1{,}1}=-25$		
0,9	30		$\frac{25-40}{0{,}65-1{,}1}=\frac{100}{3}=33{,}333$	
		$\frac{40-30}{0{,}65-0{,}9}=-40$		$\frac{\frac{200}{9}-\frac{100}{3}}{0{,}45-1{,}1}=\frac{2000}{117}=17{,}094$
0,65	40		$\frac{40-50}{0{,}45-0{,}9}=\frac{200}{9}=22{,}222$	
		$\frac{50-40}{0{,}450-0{,}650}=-50$		
0,45	50			

$$\boldsymbol{P(x)=}$$
$$\boldsymbol{=25\ -25(x-1,1)+\frac{100}{3}(x-1,1)(x-0,9)+\frac{2000}{117}(x-1,1)(x-0,9)(x-0,65)}$$

$$P(1\ k\Omega)=25-25(-0{,}1)+\frac{100}{3}(-0{,}1)(0{,}1)+\frac{2000}{117}(-0{,}1)(0{,}1)(0{,}35)=$$
$$=25+2{,}5-\frac{1}{3}-\frac{7}{117}=27+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{7}{117}=27+\frac{351-234-7}{702}=27+\frac{110}{702}=\mathbf{27,157\ ºC}$$

4. Una curva viene definida por la expresión $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2x$.



a) *(0,5 puntos)* Calcula los puntos de corte con el eje x en el intervalo $[0, \pi]$
b) *(1 punto)* ¿Cuál es el área comprendida entra la curva y el eje de abscisas (eje x)?

y=0 si $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} cos\, 2x$ solo sí $cos\, 2x = 1$

de donde $2x = acos\, 1 \begin{cases} 2x = 0 & x = 0 \\ 2x = 2\pi & x = \pi \end{cases}$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2x \ dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos\, 2x \ dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{sen\, 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{sen\, 2\pi}{2} - \frac{sen\, 0}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0 - 0) = \frac{\pi}{2}$$

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} - cos\, x\pi$.
   a) *(0,5 puntos)* Comprueba que el intervalo $[0, 1]$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano.
   b) *(1 punto)* Utilizando el método de Regula Falsi o Falsa Posición con 3 iteraciones, encontrar una solución a la ecuación $\sqrt{x} - cos\, x\pi = 0$. Opera redondeando a 4 decimales.
   c) *(0,5 puntos)* ¿Cuántos dígitos exactos tiene la solución en la tercera iteración?

$f(0) = \sqrt{0} - cos\, 0 = 0 - 1 = -1 \qquad f(1) = \sqrt{1} - cos\, \pi = 1 - (-1) = 2$

$$f(0)f(1) < 0$$

$c = a - h \qquad h = f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

a	*b*	*c*	*h*	*f(a)*	*f(b)*	*f(c)*
0	1	0,3333	$-0{,}3333$	-1	2	0,0772
0,3333	0	0,3094	0,0239	0,0772	-1	-0,0074
0,3094	0,3333	**0,3115**	-0,0021	-0,0074	0,0772	-0,0001

$$0{,}3115 \pm 0{,}0021$$

$$0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1=m} + 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0{,}0021 \leq 0{,}005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1=-2}$$

$$-1 - n + 1 = -2 \quad n = 2$$

0,31

6. *(1 punto)* Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\sqrt{B - AC}$ y su cota de error relativo.

$$\sqrt{B - (8 \pm 1\%)(0{,}25 \pm 4\%)} = \sqrt{B - (2 \pm 5\%)} = \sqrt{(3 \pm 0{,}06) - (2 \pm 0'1)} = \sqrt{1 \pm 0{,}16}$$

$$f(x \pm \Delta) = f(x) \pm \Delta \cdot f'(x) \quad \left\| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\| \quad f(1 \pm 0{,}16) = \sqrt{1} \pm 0{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 \pm 0{,}08 =$$

$$= 1 \pm 8\%$$