1 *(1'5 puntos)* Resolved la ecuación $C^{-1}(A+X)B = I_2$ siendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Se despeja $X = CB^{-1} - A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

2 Una matriz se llama *ortogonal* cuando su inversa es su traspuesta. Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ (matriz $n \times 1$) tal que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 1$ y se considera la matriz $P = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$

(a) *(0'5 puntos)* Probad que P es simétrica

(b) *(1 punto)* Probad que P es ortogonal

Solución: Hay que comprobar que $P^T = P$ (simétrica) y que $P^TP = I$ (ortogonal) ó bien, $PP = I$, ya que es simétrica

(a) $P^T = (I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^T = I^T - 2(\boldsymbol{u}^T)^T\boldsymbol{u}^T = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = P$

(b)

$$\begin{aligned} PP = (I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) &= I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) \\ &= I - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^T \\ &= I - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = I \end{aligned}$$

3 Existen dos marcas de cereales para el desayuno: Chussis digestive y Gauss fibra. La cantidad de calorías, proteinas, etc por porción se muestran en la siguiente tabla

Marca	Chussis	Gauss
Calorías	110	130
Proteinas (g)	4	3
Carbohidratos (g)	20	18
Grasa (g)	2	5

Se desea preparar una mezcla que contenga exactamente 295 calorías, 9 g de proteinas, 48 g de carbohidratos y 8 g de grasa.

(a) *(1 punto)* Escribid un sistema de ecuaciones para solucionar el problema

(b) *(1 punto)* Dad la solución, si existe (porciones da cada cereal, admitiéndose fracciones de porción)

Solución: Llamando x e y a las porciones de cereales Chussi y Gauss respectivamente, se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 110x & + & 130y & = & 295 \\ 4x & + & 3y & = & 9 \\ 20x & + & 18y & = & 48 \\ 2x & + & 5y & = & 8 \end{array}\right\}$$

Es sistema resulta ser determinado con $x = 3/2$ e $y = 1$. Luego hay que mezclar por cada porción de Gauss, una y media de Chussis.

4 Se considera el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) *(1 punto)* Encontrad una factorización LU de la matriz A

(b) *(1 punto)* Usad la factorización anterior para resolver el sistema lineal

Solución:

(a) Una factorización es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 3 & -17 & -15/13 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Se plantea el sistema $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 3 & -17 & -15/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se resuelve $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/13 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

5 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) *(0'5 puntos)* Hallad el polinomio característico

(b) *(0'5 puntos)* Hallad los valores propios

(c) *(1 punto)* Hallad una base para cada subespacio propio

(d) *(0'5 puntos)* Determinad una matriz diagonal semejante a la matriz A

(e) *(0'5 puntos)* Calcular una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$

Solución:

(a) El polinomio característico es $q_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$

(b) Los valores propios son $\lambda_1 = 0$ (simple) y $\lambda_2 = 2$ (doble)

(c) (1) $\lambda = 0$ Surge el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es $E_A(0) = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(2) $\lambda = 2$ Surge el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es $E_A(0) = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(d) Una matriz diagonal semejanta a A es $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(e) Puede ser la matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.