TEMA 4- SUBESPACIOS.

BASES Y DIMENSIÓN

- **Combinación lineal de vectores.**
- **Independencia lineal.**
- **Bases de un subespacio**
- **Subespacios Fila, Col, Null.**

ESPACIO VECTORIAL (EV)

Decimos que un conjunto C es un espacio vectorial si, dados dos elementos cualesquiera del mismo, al aplicarles las operaciones de **suma y producto escalar** se obtiene un elemento de dicho conjunto, y si además el conjunto tiene elemento nulo y elemento neutro.

Ej: El conjunto de vectores es un EV

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y un conjunto no vacío $\mathcal{U}$ cualquiera, consideramos dos operaciones definidas sobre él:

1. Ley de composición interna

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times \mathcal{U} & \xrightarrow{+} & \mathcal{U} \\ (u, v) & \longmapsto & u + v. \end{array}$$

2. Ley de composición externa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{U} & \xrightarrow{\bullet} & \mathcal{U} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u. \end{array}$$

ESPACIO VECTORIAL (R^n)

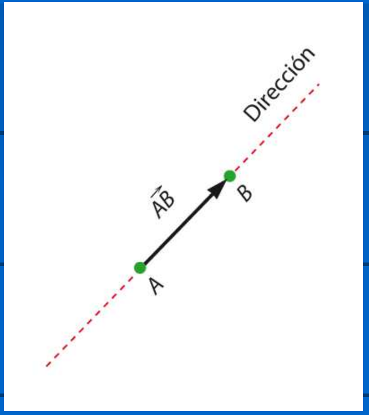
Estudiaremos sólo el espacio vectorial R^n formado por las n-tuplas o n-vectores denotados por **u = (u1, u2,…un).**

Dependiendo del valor de **n** tenemos diferentes espacios (R^2, R^3..):

Si n=2 → x = (x1,x2) es un vector de R^2

Si n=3 → x = (x1,x2,x3) es un vector de R^3, etc

VECTORES EN EL PLANO R2



VECTORES EN EL ESPACIO R3

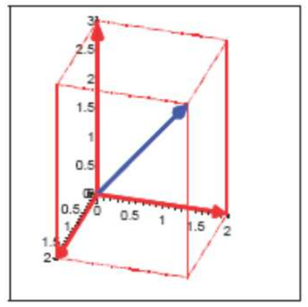


Figura 1: Componentes de un Vector

Propiedades de la suma de vectores:

- Asociativa: **$(u+v)+w = u+(v+w)$**
- Conmutativa: **$v+u=u+v$**.
- Existe elemento neutro, el vector 0 / **$0 + v = v$** para cualquier vector v.
- Para cada vector v existe elemento opuesto, –v / **$v + (-v) = 0$**.

Propiedades del producto de un vector por un escalar:

- Asociativa: **$\beta (\alpha v) = (\beta \alpha) v$**
- Distributivas:

  Respecto de la suma de escalares: **$(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$**

  Respecto de la suma de vectores: **$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$**
- Elemento unidad: el escalar 1/ **$1\cdot v = v$** para cualquier vector v

Por tanto, R^n es un espacio vectorial, ya que:

1. Contiene el vector nulo: (0,...0);

2. Contiene el vector opuesto: -x = (-x1,...-xn)

3. Suma de vectores es un vector (x1,...xn) + (y1,..yn) = (x1+y1,... xn+yn) , .

4. Multiplicación de vector por un escalar es un vector: k(x1...xn) = (kx1,...kxn)

Para comprobar que un conjunto de elementos constituye un espacio vectorial, se debe demostrar que dicho conjunto satisface los 4 axiomas anteriores.

Subespacio vectorial

Decimos que S es un Subespacio Vectorial de R^n si S es un subconjunto no vacío de R^n que verifica:

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) Si un vector está en S, tb lo están sus múltiplos.

$$\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{S}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S}, \alpha \in \mathbf{R}$$

c) Si dos vectores están en S, tb lo está la suma de ámbos.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$$

Ejemplo 1 de Subespacios vectoriales

Demostrar que el plano formado por los vectores de la forma (x,y,0) es un subespacio de R^3.

a) Contiene al vector (0,0,0)

b) Es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0) que es un elemento del plano.
- Producto por un escalar: λ, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0) que es un elemento del plano.

Ejemplo 2 **de Subespacios vectoriales**

¿El conjunto de los vectores de la forma (a,1) es un subespacio de R^2?

No, puesto que no contiene al (0,0).

Además la suma de 2 vectores de ese tipo no da un vector del conjunto,

Ej: $(x1,1)+(y1,1)=(x1+y1,2)$ no es de la forma (a,1).

Combinación Lineal (**CL**) de Vectores n-dimensionales

Un vector **u** $\in$ $\mathbf{R}^n$ es combinación lineal de los vectores **u1, u2,...up** si:

existen escalares α**1**, α**2,...** α**p**, tales que: **u =** α**1u1 +** α**2u2 +...** α**pup**

Ejemplo 3

a) (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)

b) El vector (2,1,1) de R3 no es CL de los vectores (1,0,0) y (1,1,0)

(2,1,1) = a(1,0,0) + b(1,1,0)
No existen valores de a y b que haga que **1 = 0.a + 0.b**

Para demostrar que un vector "u" es CL de p vectores u1,…up :

Se **construye un sistema de ecuaciones** así:

$$\alpha 1u1 + \alpha 2u2 + \ldots + \alpha pup = u$$

Se estudia el SL $Ax = u$*, donde* **A se forma con los vectores columna** $\mathbf{U_i}$

1- **SCD** → vector **u** se puede obtener como CL de **forma única** de los otros vectores;

2- **SCI** → **u** se puede obtener como **CL** de **infinitas formas**.

3- **Incomp.** → **u** no se puede obtener como CL

Ejemplo 4

Demostrar si el vector **u = (4,5,4)** es **CL** de **(1,1,1), (1,-2,0), (3,-2,1)**

Se construye un SL que proviene de la siguiente ecuación paramétrica:

$$(4,5,4) = \alpha 1(1,1,1) + \alpha 2(1,-2,0) + \alpha 3(3,-2,1)$$

$$\begin{cases} \alpha 1 + \alpha 2 + 3\alpha 3 = 4 \\ \alpha 1 - 2\alpha 2 - 2\alpha 3 = 5 \\ \alpha 1 + \alpha 3 = 4 \end{cases} \rightarrow [A|u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

rref(A|u)=[1,0, 0, **3**;
0,1, 0, **-2**;
0,0, 1, **1**]

SCD → u es CL de los vectores

$$(4,5,4) = \mathbf{3}(1,1,1) \mathbf{-2}(1,-2,0) + \mathbf{1}(3,-2,1)$$

La última columna da los valores de **α1=3, α2=-2, α3=1**

Ejemplo 5

Demostrar si el vector **u = (25, 22, 8)** es **CL** de **v1=(3,4,2) y de v2=(5,3,2)**

$$(25,22,8) = \alpha\mathbf{1}(3,4,2) + \alpha\mathbf{2}(5,3,2)$$

$$\begin{aligned} 3\alpha 1 + 5\alpha 2 &= 25 \\ 4\alpha 1 + 3\alpha 2 &= 22 \\ 2\alpha 1 + 2\alpha 2 &= 8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 25 \\ 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el SL es Incompatible (al tener un 1 ppal en la última columnas) →
→ no hay forma de combinar v1 y v2 para obtener u

El vector u **NO** es CL de los vectores v1 y v2.

Envoltura lineal

LLamamos **Envoltura lineal** de un conjunto de vectores **u1,…,up** de R^n, y se denota **Env{u1,…,up }**, al conjunto de vectores que pueden obtenerse como **CL** de **u1,…,up** .

La envoltura podrá ser igual al propio conjunto $\mathbf{R^n}$, o ser un subconjunto de $\mathbf{R^n}$, en cuyo caso será un **subespacio de $\mathbf{R^n}$**

La envoltura lineal es un conjunto infinito de vectores

Teorema:

Dados los vectores u1,u2,…up de R^n

a) **0** ∈ **Env{u1,u2,…up}**

b) **u1** ∈ **Env{u1,u2,…up},** para i=1,…p

c) Si **u,v** ∈ **Env{u1…up}** entonces **u + v** ∈ **Env{u1,…up}.**

d) Si **u** ∈ **Env{u1,…up},** $\alpha \in R$, entonces **αu** ∈ **Env{u1,…up}**

Sistema o conjunto generador

Se dice que los vectores **u1…up** del espacio vectorial $\mathbf{R^n}$ forman un **sistema generador** de $\mathbf{R^n}$, si **todo** vector de $\mathbf{R^n}$ se puede escribir como **CL** de ellos, es decir, si su envoltura lineal es todo el espacio $\mathbf{R^n}$.

Por tanto, $\forall \mathbf{u} \in R^n$, existen escalares a1,..ap / u = a1 u1 + ... + apup

Ejemplo: Demostrar que S = {(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)} es un sistema generador de R^3

Hay que demostrar que 1) Env{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)} $\subseteq R^3$

2) $R^3 \subseteq$ Env{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)}

1) Es evidente ya que si los 3 vectores son de R^3 y si se cumplen la ley de composición interna y externa el resultado pertenecerá a R^3

2) Se debe probar que cualquier vector (a,b,c) de R^3 es CL de los 3 vectores generadores, para ello resolvemos el SL correspondiente así:

Ejemplo (cont)

Se escribe la matriz ampliada del SL:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right]$$

Obtenemos la matriz reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a+b-c)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (a-b+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (-a+b+c)/2 \end{array}\right]$$

Como el sistema es SCD → el conjunto de vectores genera todo R3

(a,b,c) = α (1,1,0) + β (1,0,1) +q (0,1,1)

Ejemplo de subespacio generado

1º.- Comprobar si los vectores (1,0,1) y (0,1,1) generan R^3

Sol: se plantea un SL :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$$

Para que este SL sea CD, debería tener un 0 en la posición 3:3

(recordar que si en la última columna hay algún 1 ppal es Incomp.)

Es decir, sólo aquellos vectores (a,b,c) tales que c – a – b = 0

son generados por dichos vectores.

Se expresa de la forma:

$$\mathrm{Env}\{(1,0,1),(0,1,1)\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c-a-b=0\}.$$

Por tanto, como la envoltura de los dos vectores no es la totalidad de R3 (sólo un subconjunto), estos no son un sistema generador de R3

Ejemplo de subespacio generado

¿Son los vectores (1,1) y (2,2) un sistema generador de R^2 ?

Sol: Discutiendo el sistema $\alpha\,(1,1) + \beta\,(2,2) = (u, v)$ así:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & u \\ 1 & 2 & v \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & u \\ 0 & 0 & v-u \end{array}\right]$$

Al igual que antes, este conjunto no es un sistema generador de todo R^2, ya que para que sea este sistema sea CD, v-u debería ser 0, es decir, v debería ser igual a u.

Por tanto, lo único que podemos afirmar es que su **envoltura lineal** es el conjunto de vectores (u,v) de R^2 tales que v=u, o dicho de otra forma, podemos decir que estos vectores generan un **subespacio de R^2**.

Ejemplo de subespacio generado

¿ Qué subespacio generan en R3 los vectores

$u_1=(1,0,0)$ y $u_2= (0,1,0)$?

Sol 1 : Una CL de ellos es : $\alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) = (\alpha, \beta,0)$

➔Los vectores u_1 y u_2 generan el subespacio:

$Env\{(1,0,0), (0,1,0)\} =\{(\alpha,\beta,0): \alpha,\beta$ de $R\}$ (expresión paramétrica del plano XY)

Sol 2: También podíamos haberlo planteado con el método anterior, discutiendo el sistema $\alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) = (a,b,c)$ así:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right\}$$

Y para que sea CD, c debe ser 0, y a y b cualquier valor

Ejemplo de comprobación de si un vector pertenece a un subespacio

En R^3, demostrar si u=(1,2,3) pertenece al subespacio generado por v=(4,5,6), w=(7,8,9) , es decir, si

$$u \in \text{Env}\{v,w\} = \text{Env}\{(4,5,6), (7,8,9)\}?$$

Comprobar si un vector **u pertenece al subespacio** que generan los vectores **v1, . . . ,vn**, es decir, si **u ∈ Env{v1,… ,vn},** es lo mismo que comprobar si u es CL de **v1,… ,vn ,** por lo que para conprobarlo se plantea su sistema de ecuaciones, y se comprueba si es compatible o incompatible.

$$\begin{aligned} 4\alpha + 7\beta &= 1 \\ 5\alpha + 8\beta &= 2 \\ 6\alpha + 9\beta &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es CD → u pertenece al subespacio **Env{v,w} →**
u se puede escribir como CL de v, w → u = 2 v + (-1) w.

Simplificación de los sistemas generadores

Algunas veces si eliminamos algún vector de un sistema generador su envoltura sigue siendo la misma, es decir, generan el mismo subespacio

¿Pero cuáles podemos eliminar? Los vectores que son CL de los demás.

Y recuerda que para comprobar si un vector **x** $\in$ $\mathbf{R}^n$ es CL de **m** vectores U_m se plantea el SL

$$\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \alpha_\mathbf{m} \cdot \overline{\mathbf{u}}_\mathbf{m}$$

Si el sistema es CD (con solución no trivial) → x es CL de los vectores de forma ÚNICA

Si el sistema es SCI → x es CL de los vectores de infinitas formas

Si el sistema es INCOMPATIBLE o sólo tiene la solución trivial → x <u>NO</u> es CL de los vectores

Aplicación del concepto de combinación lineal

Para hacer muñecas de tipo D y E se necesitan 3 componentes: A, B y C.

Para fabricar muñecas de tipo D se necesitan 3 de tipo A, 4 de B y 2 de C.

Para fabricar muñecas de tipo E se necesitan 5 de tipo A, 3 de B y 2 de C.

Si se han usado 130 A, 111 B y 64 C. ¿Cuántas muñecas de D y de E se han fabricado?

Solución:

d= nº muñecas D

e= nº muñecas E

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 111 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Resolver el SL:

$$\begin{aligned} \mathbf{3}\,d + \mathbf{5}\,e &= 130 \\ \mathbf{4}\,d + \mathbf{3}\,e &= 111 \\ \mathbf{2}\,d + \mathbf{2}\,e &= 64 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & 130 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & 111 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 64 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 15 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 17 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d&=15 \\ e&=17 \end{aligned}}$$

Vemos que el SL es SCD (con solución no trivial) → Luego es **CL** de los vectores de forma única

b) Si se han usado 125 A, 110 B y 40 C.
¿Cuántas muñecas de D y de E se han fabricado?

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{4}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} \begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix} \begin{pmatrix}125\\110\\40\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{5} & 125\\\mathbf{4} & \mathbf{3} & 110\\\mathbf{2} & \mathbf{2} & 40\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & 0\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & 0\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}}$$

Como el SL es Incompatible (al tener un 1 ppal en la última columna)
→ no hay forma de combinar u y v para obtener b.

Luego no se puede saber las muñecas D y C que se fabrican

El vector **b NO** es **CL** de los vectores.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores **u1…up** de R^n es **linealmente independiente** si ninguno de sus elementos puede ser expresado como una **CL** de los restantes**.** En caso contrario diremos que son **linealmente dependientes**.

Para comprobarlo, resolveremos el SH: **a1u1+…apup = 0**, de modo que:

Los vectores serán **Linealmente Dependientes** si existen escalares a1,…ap **no todos nulos** que satisfagan el SH.

Si la única forma de que sea cierto **a1u1+…apup = 0** es que los escalares a1,…ap sean **nulos**, diremos que son **Independientes**

Con el siguiente ejemplo podemos ver que si el SH tiene solución no trivial es porque hay algún vector que es CL de los otros.

- P.e., si se cumple: -(4,5,4) + 3(1,1,1) -2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (0,0,0)

Despejando en la ecuación cualquiera de ellos, p.e. (4,5,4), quedarían así:

(4,5,4) = 3(1,1,1) -2(1,-2,0) + (3,-2,1), es decir, que ese vector se podría obtener a partir como una CL de los otros.

En resumen, para establecer la dependencia o independencia de un conjunto de vectores u1, ..., un, hacemos lo siguiente:

Paso 1.- Plantear la ecuación **a1u1+...anun = 0** que lleva a un **SH**

Paso 2.- Resolver el **SH**.

- si el SH tiene sólo solución trivial (vector nulo) o es Incompatible

  → los vectores son **LI**.

- si el SH tiene 1 solución no trivial (vector no nulo) o es indeterminado (múltiples soluciones) → son **LD**

Es más, con el SH no solo podemos saber si es LD o no, si no que en el caso de que sea LD por ser Comp. Indeterminado, las columnas de la matriz reducida que no tengan 1s principales nos dicen los vectores que son CL de los demás

Ejemplo 12

Estudiar si los vectores v1= (1,1,1) , v2=(1,0,1), v3=(0,1,1) son LD o LI

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = (0, 0, 0)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{rref} \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución $a = b = c = 0.$

Los escalares son todos nulos → vectores v1, v2, v3 son LI

Ejemplo 13

sobre dependencia lineal de vectores en R^n

Estudiar si **S1** = {**(4, 5, 4), (1,1,1), (1,-2, 0), (3,-2, 1)}** **es LD o LI**

⇕ Se estudian las soluciones de la ecuación Vectorial o del SH que forma:

a1 (4, 5, 4) + a2 (1, 1, 1) + a3 (1,-2, 0) + a4 (3,-2, 1) = (0, 0, 0)

4a1 + a2 + a3 + 3a4 = 0

5a1 + a2 - 2a3 - 2a4 = 0

4a1 + a2 + a4 = 0

Se resuelve el SH → rref ([A|0])

SH es SCI → a4 libre → ej: a4 = 1

a3 = -2a4 → a3= -2 ≠ 0 ;
a2 = 3a4 → a2 = 3 ≠ 0;
a1 =-1a4 → a1 = -1 ≠ 0

- (4, 5, 4) + 3(1, 1, 1) - 2(1,-2, 0) + (3,-2, 1) = (0, 0, 0) **Luego es LD**

En este caso, como la 4ª columna de la matriz reducida no tiene 1s principales, el vector 4º, el (3,-2,1) es el que es CL de los demás

Ejemplo 14

Probar que los vectores **(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0**) de R^4 son **LI**

Se estudian las soluciones del SH que forman:

a1 (1,1,0,0) + a2 (0,0,1, 1) + a3 (0,1,1,0) = (0, 0, 0, 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SH es SCD pero sólo tiene la solución trivial → a1=a2=a3=0

Luego S1 es LI

Ejercicios **sobre dependencia lineal de vectores en R^n**

Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son **LD o LI**.

1.- S1 ={(1,-2,3), (2,-2,0) , (0,1,7)} en R^3

2.- S2 = {(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1), (2,-1,1,-1)} en R^4

3.- S3 = {(1,-2,3), (2,-2,0), (0,1,7)}

4.- S4 = {(1,-3,0), (3,0,4), (11,-6,12)}

5.- Probar que los vectores **(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0**) de R4 son **LI**

A tener en cuenta:

>> Un conjunto con un solo vector v es LI sii $v \neq 0$.

>> Un conjunto con 2 vectores es LD si uno de los vectores es múltiplo del otro.

>> Cualquier conjunto que tenga el vector nulo es LD.

Corolario IMPORTANTE:

Un conjunto de vectores LI en R^n contiene como máximo n vectores.

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Una **base B** de un espacio S es el menor conjunto (finito o infinito) de vectores **LI** que generan todo el espacio S (es decir, es un sistema generador de S en el que no sobra ningún vector)

Esto significa que para cualquier vector u de S existe una única manera de escribirlo como una CL de los elementos de la base B:

$$u = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

La dimensión de un espacio S es la cantidad de vectores de cualquiera de sus bases

Propiedades. Sea **B** base de **un espacio vectorial S /dim(S)=n**

- Todos los elementos de **B** pertenecen al espacio **S.**
- Todas las bases de **S** tienen n vectores.
- Cada vector de **S** se escribe, de forma única, como **CL** de los vectores de **B**
- Los elementos de **B** forman un sistema de vectores **LI**.
- Las bases no son únicas. Todo conjunto de n vectores LI en R^n es una base en R^n

! OjO !

- No confundir Sistema Generador con Base ya que si bien toda base es un sistema generador, la implicación inversa no es cierta.

- Mientras que en una base todos sus elementos han de ser LI, en un sistema generador sus elementos pueden ser LI o LD.

- Luego, dado cualquier sistema generador V (que no sea base) formado por **n** elementos, siempre podemos "simplificarlo" y **<u>hallar una base B</u>** para V con un número de elementos estrictamente menor que n.

BASE CANÓNICA

La base canónica (base natural, base estándar) de R^n está formada por:

$e1:(1,0,. . . ,0)$; $e2:(0,1,. . . ,0)$; ……. $En:(0,0,. . . ,1)$

Son vectores LI y es un sistema generador de R^n porque todo vector de R^n

se puede expresar como CL de ellos.

Ejemplo. Demostrar que $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3)\}$ es base de R^3

1. Son LI (demostrable al formar un SH con solución trivial).

2. Forman un sistema generador de R3 porque cualquier vector (a,b,c) se puede poner como CL de ellos. En efecto, dado (a,b,c), buscamos c1,c2,c3 /

$$(a,b,c)= c1\ (1,0,0)+ c2\ (1,1,0)+ c3\ (0,2,-3)$$

Y se obtiene este sistema que es SCD:

$$\begin{aligned} c1 + c2 \qquad\quad &= a \\ c2 + 2c3 &= b \\ -3c3 &= c \end{aligned}$$

Cálculo de la BASE de un subespacio a partir de un conjunto generador

Vamos a calcular una base para el subespacio generado por los vectores:

a) $\{(2,1,1,1),(1,1,1,1),(3,1,1,2),(0,1,2,1),(2,-1,1,-1)\}$ en $\mathbb{R}^4$

Como el Nº de vectores, 5, es mayor que el nº de componentes de cada vector 4 (R4), ya sabemos que los vectores dados son LD.

Para saber cuál de ellos es CL de los demás resolvemos el SH:

Ax=0 / x= (a1,a2,a3,a4,a5), columnas de A: vectores del conjunto

a1v1 + a2v2 + a3v3 + a4v4+ a5v5 = 0

(A|0)=[2,1,1,1; 1,1,1,1; 3,1,1,2; 0,1,2,1; 2,-1,1,-1; 0,0,0,0]^T

rref(A)=[1 0 0 0 5 0
0 1 0 0 -8 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 2 0]

Es decir, el sistema es Compatible Indeterminado ya que todas las filas tienen 1s ppales y hay más incógnitas que 1s ppales. Vamos a resolverlo....

Ejemplo **(...continuación)**

A=[2,1,1,1; 1,1,1,1; 3,1,1,2; 0,1,2,1; 2,-1,1,-1]T

rref(A)=[1 0 0 0 5
0 1 0 0 -8
0 0 1 0 0
0 0 0 1 2]

Luego la solución parametrizada del sistema sería:

a5 libre (pq su columna no tiene 1 ppal)
a4 =-2a5; a3=0; a2 =8a5; a1 =-5a5;

Y esto además nos sirve para obtener la base, ya que:

Las columnas de rref(A|0) que no tengan 1 principales, determinan los vectores que son CL de los demás.

Es decir, como la columna 5 no tiene un 1 ppal, el vector 5º, el (2,-1,1,-1) es CL del resto → lo quitamos

Base de R4 = {(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1)}

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz A mxn

Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{mxn} = [v1_m, v2_m, \ldots vn_m]$

El subespacio Columna (Col A): Es el subespacio generado por las **columnas de A,** es decir, es el conjunto de vectores x que se pueden obtener como CL de las columnas de A : $\mathbf{x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n}$

Ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots \alpha_n a_{1n}$$

$$x_2 = \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots \alpha_n a_{2n}$$

$$x_m = \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \ldots \alpha_n a_{mn}$$

Si $A = [a_{:1}, \ldots a_{:n}]$ son las columnas de A →

$\text{Col } A = \text{Env}\{a_{:1}, \ldots a_{:n}\}$

Ejemplo 16 **BASE Y DIMENSIÓN del subespacio Col**

Hallar base y dimensión del subespacio Col A donde:

A =[1, 1, 2, -1; 1, 0, 3, 1]

Sol: **Las 4 columnas de A forman 4 vectores de R^2**

(1,1),(1,0), (2,3),(-1,1) → son LD (ya que 4>2**)**

La base estará formada, como mucho, por 2 vectores LI (n=2).

Para saber los que tenemos que quitar simplemente buscamos los vectores que son CL de los otros a través del SH correspondiente:

(A|0) =[1, 1, 2, -1, 0; 1, 0, 3, 1, 0] →

>> rref(A)= [1, 0, 3, 1, 0;
0, 1, -1, -2, 0]

Los vectores 3º y 4º son CL (por no tener 1s principales sus columnas), por tanto, la base de ColA está formada por los dos primeros vectores

Base: {(1,1); (1,0)}
Dim Col A = 2

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz A mxn

Dada la matriz $A= [a_{ij}]_{mxn} = [v1_n; v2_{n,} ; ...; vm_n]$

El subespacio Fila (Fil A): Es el subespacio generado por las **filas de A,** es decir, es el conjunto de vectores x que se pueden obtener como CL de las filas de A : $\mathbf{x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ \alpha_m v_m}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1:} \\ a_{2:} \\ \vdots \\ a_{m:} \end{bmatrix}$$

Si A = [a1: ; a2: ;...am:]

Fil A = Env{a1:, a2:,...am:}

Para calcular la base de Fil A simplemente buscamos los vectores fila que son CL de los demás (con el correspondiente SH), y los eliminamos. Los que queden formarán la base.

Ejemplo 17

Calcular una Base del subespacio Fil X,

donde X =[1,1,2,-1; 1,0,3,1]

Para saber si los dos vectores fila son LD o LI hacemos el habitual SH:

$$(A|0)= \begin{bmatrix} 1, 1, 0 \\ 1, 0, 0 \\ 2, 3, 0 \\ 2, 1, 0 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, -1, 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es Compatible Determinado con solución trivial, y por tanto los dos vectores son LI, y por tanto no eliminamos ninguno.

Base Fil A = {(1,1,2,-1), (1,0,3,1)}

Dim Fil A = 2

El subespacio nulo: Nul A

Está formado por el conjunto de las soluciones del SH: $Ax = 0$

$$\mathrm{Nul}\, A = \{u \in \mathbb{R}: Au = 0_m\}.$$

En notación de conjuntos:

Nul A = {x/ x está en R^n y Ax = 0}

*El subespacio nulo se llama **núcleo** de la matriz*

- **El subespacio nulo de una matriz A mxn es un subespacio de R^n, es decir, el conjunto de todas las soluciones de un sistema Ax = 0 de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas es un subespacio de R^n**

Ejemplo 18

Subespacio Nul de una matriz

A = [1,-3,-2; -5,9,1] **u = [5,3,-2]^T**

Determinar si u pertenece al subespacio nulo de A

Solución

Hay que probar que u satisface Au = 0, y para eso sólo hay que calcular

Au = [1,-3,-2; -5,9,1] [5;3;-2]^T y comprobar si el resultado es [0;0]

Y como el producto es igual a [0;0] → **u está en Nul A.**

Ejemplo 19 Hallar base y dimensión del subespacio Nul A donde:

A =[1,-3,0,3; 2,1,-3,2; 0,7,-3,-4]

Sol: Nul A = soluciones del SH: Ax=0

rref([A 0])= [1, 0, -9/7, 9/7, 0;
0, 1, -3/7, -4/7, 0;
0, 0, 0, 0, 0]

Nº 1 principales < Nº vectores
→ vectores LD

x1 - 9/7x3 + 9/7x4 = 0;

x2 – 3/7x3 – 4/7x4 = 0;

0 = 0

→

Ecuaciones paramétricas

x1 = 9/7x3 - 9/7x4;

x2 = 3/7x3 + 4/7x4

Luego x = (x1, x2, x3, x4) = (9/7x3 - 9/7x4, 3/7x3 + 4/7x4, x3, x4) =

Luego Nul A = α (9/7,3/7,1,0) + β (-9/7, 4/7,0,1)

Por tanto, BASE de Nul A = {(9/7, 3/7, 1, 0), (-9/7, 4/7, 0, 1)}, ya que a partir de estos vectores generamos el espacio Nul A

COORDENADAS de un VECTOR en una BASE

Sea V un espacio vectorial y S una base de V

Ya sabemos que si **S** es una base para el espacio vectorial **V** de **dim n**, cada vector **v** $\in$ V se puede escribir de forma única como **CL** de los vectores de la base S: **v = c1v1 + c2v2 +... cnvn**, ci $\in$ R.

Dado un vector v del espacio V, llamamos coordenadas de v (con respecto a la base S), C_S(v), a los escalares ci (i=1...n)

[c1; c2;...cn] es el vector de las coordenadas de v respecto a la base S

Dado un espacio V y una base B del mismo, cualquier vector del espacio V tiene un único vector de coordenadas, que lo identifica.

Ejemplo1

Hallar las coordenadas del vector v = (2,3,11,4) en la base

S = {(1,0,1,-1), (0,1,3,2)}

1º: Hay que expresar **v** como CL de los vectores de **S**

v = c1u1 + c2u2 (tenemos que poner vectores en columnas)

A =[1, 0, 1, -1; 0, 1, 3, 2; 2, 3, 11,4]^T
=

[1, 0, 2;
0, 1, 3;
1, 3, 11;
-1, 2, 4] →

>> rref(A)= [1, 0, 2;
0, 1, 3;
0, 0, 0;
0, 0, 0]

La Solución del sistema
c1=2; c2=3;

Luego, las coordenadas de v en la base S son:
C_S(v) = (2,3)

OjO: No confundir el vector con sus coordenadas; *el vector es* ***v****=(2,3,11,4), y las coordenadas (2,3) indican cómo expresar* ***v*** *en CL de la base S → v = 2u1 + 3u2*

COORDENADAS de un VECTOR en una BASE

OJO: El vector $C_S(v)$ depende del orden de los vectores en S.

Hallar las coordenadas del vector anterior $v = (2,3,11,4)$ en la misma base, pero invirtiendo el orden de sus vectores $S' = \{ (0,1,3,2), (1,0,1,-1)\}$

```
A =  [ 0,  1, 2;
       1,  0,  3;
       3,  1, 11;
       2, -1   4 ] →

  >> rref(A)= [1,  0,  3;
               0,  1,  2;
               0,  0,  0;
               0,  0,  0]
```

La Solución del sistema
c1=3; c2=2;
coordenadas de v
en la base S'
$C_{S'}(v) = (3,2)$

Vemos que el vector de coordenadas es diferente

Ejemplo2 ¿Y si la base es la base canónica?

Hallar las coordenadas del vector v = (2,-1,3) en la base canónica

S = {e1,e2,e3)}, donde e1=(1,0,0), e2=(0,1,0), e3=(0,0,1)

$$v = c1e1 + c2e2 + c3e3$$

```
A =[1, 0, 0,  2;
    0, 1, 0,-1;
    0, 0, 1,  3] =


  >> rrref(A)= [1,  0,  0,  2;
                0,  1,  0, -1;
                0,  0,  1,  3 ]
```

Las coordenadas de v en la base S = vector v
$C_S(v) = (2,-1,3)$

Vemos que el vector de coordenadas de un vector v respecto de la base canónica, es el propio vector v.

Ejemplo3: Obtener un vector en función de sus coordenadas

Si **u** es un vector que tiene como coordenadas **(5, −6)** respecto de la base **{(1,2) (3,4)}**

¿Cuáles son los componenets del vector u?

Según la definición de coordenadas:

$$\mathbf{u} = 5\,(1,2) + (-6)\,(3,4)$$

Luego el vector **u = (−13, −14).**

CAMBIO DE BASE

Un vector expresado en función de una base B se puede expresar en función de nueva base B’

A cada vector, con coordenadas en B, se le asigna un nuevo vector de coordenadas en B’ mediante una matriz: **Matriz de cambio de base**

En un espacio vectorial **V**, dadas dos bases **B** y **B’** , se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de **B a B’** a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base **B** expresados en función de la base **B’**.

Ejemplo1 de cambio de base

Sean en R2 las bases :

$B = \{ (2,3), (1,-1) \}$ y

$B' = \{ (1,0), (0,1) \}$ (base canónica)

Vamos a construir la **matriz de cambio de base de B a B'.**

Podemos hacerlo de 2 formas:

1ª forma: Expresamos los vectores de B como CL de los vectores de B'.

$(2,3) = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{3}(0,1) \rightarrow$ coordenadas $(2, 3)$

$(-1,1) = \mathbf{1}(1,0) - \mathbf{1}(0,1) \rightarrow$ coordenadas $(1,-1)$

Ponemos estas coordenadas en las columnas de una matriz →

tenemos la matriz de cambio de base de B a B':

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

CAMBIO DE BASE

2ªForma: Procedimiento para calcular la matriz de cambio de base $P_{V \leftarrow U}$ de la base U = {u1,…up} a la base V = {v1,…vp}:

Paso 1. Calcular el vector de coordenadas de **uj** con respecto a la base V.

➔ expresar **uj** como **CL** de los vectores de **V**:

uj = a1jv1 + a2jv2 +… anjvn, j = 1,…p

Los valores de a1j, a2j,…anj se determinan con Gauss-Jordan reduciendo por filas la matriz aumentada de este sistema ➔ **[V U]**

Paso 2. La matriz $P_{V \leftarrow U}$ de cambio de base U a la base V es la matriz **P** que queda en la parte derecha de la reducida **[I P]**

Ejemplo1 (cont) **de cambio de base**

Sean en R2 las bases :

B = { (2,3), (1,–1) } y

B′ = { (1,0), (0, 1) } (base canónica)

Vamos a construir la **matriz de cambio de base de B a B′.**

Ejemplo 2ª forma: Construimos la matriz **[B′ B]** y calculamos su **reducida**.

[B′ B] = [1, 0, 2, 1;
0, 1, 3, -1]

rref([B′ B]) = [I C] ➔ la matriz [C] 2x2
es la matriz de cambio de base de B′ a B

B = { (2,3), (1,–1) }
B′ = { (1,0), (0, 1) }

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn/ done n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. La matriz de cambio de una base B a la misma base B, es la matriz identidad.

3. Toda matriz de cambio de base es invertible (determinante no nulo).
   ➔ La matriz de cambio de U a V ($P_{V \leftarrow U}$) es la inversa de la matriz de cambio de V a U ($P_{U \leftarrow V}$).

$$\boxed{\text{Es decir, } P_{V \leftarrow U} = (P_{U \leftarrow V})^{-1}}$$

Resultado: Dadas dos bases U y V de un subespacio y dado un vector cualquiera x de V. Entonces:

$$\boxed{C_V(x) = P_{V \leftarrow U}\, C_U(x)}$$

$$\boxed{P_{V \leftarrow U} = P_{V \leftarrow C}\, P_{C \leftarrow U} = (P_{C \leftarrow V})^{-1}\, P_{C \leftarrow U}}$$

Ejemplo2 de cambio de base

Hallar la matriz de cambio de base P $_{V \leftarrow U}$ para las dos bases de R3

$$\mathcal{U} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$
$$\mathcal{V} = \{(1,1,1),(-1,1,1),(0,2,1)\}$$

Se ponen los vectores en columnas y aplicamos:

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{V}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}}$$

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo3 de cambio de base

Hallar las coordenadas del vector x = (1,2,3) de R3 en la base:

U = { u1 = (1,0,-2), u2 = (3,-1,2), u3 = (-2,-1,1) }

$$C_{\mathcal{U}}(x) = P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{C}} C_{\mathcal{C}}(x) = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{U}} C_{\mathcal{C}}(x).$$

$$C_{\mathcal{U}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28/11 \\ -1/11 \\ -21/11 \end{bmatrix}.$$

Dadas 3 bases en Rn: U, V, W se cumple: $P_{V \leftarrow U} = P_{V \leftarrow W} P_{W \leftarrow U}$

Si una de esas bases es la canónica, W = C queda:

$$P_{V \leftarrow U} = P_{V \leftarrow C} P_{C \leftarrow U} = (P_{C \leftarrow V})^{-1} P_{C \leftarrow U}$$

Ejercicio.

En R4 se considera el subespacio S = {(x; y; z; t) : x - y = z – t}

Consideramos los siguientes conjuntos:

B = {(1; 1; 0; 0); (1; 0; 1; 0); (-1; 0; 0; 1)}
D = {(2; 1; 1; 0); (0; 1; 0; 1); (0; 0; 1; 1)}

(a) Probad que B y D son dos bases de S

(b) Hallad las matrices de cambio $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ y $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Solución:

(a) Los vectores dados son de S y tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{D}$ son conjuntos L.I. por lo que son base.

(b) La matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ se obtiene expresando los vectores de $\mathcal{D}$ en la base $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$(2,1,1,0) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,1,0) + \alpha_3(-1,0,0,1)$$
$$(0,1,0,1) = \beta_1(1,1,0,0) + \beta_2(1,0,1,0) + \beta_3(-1,0,0,1)$$
$$(0,0,1,1) = \gamma_1(1,1,0,0) + \gamma_2(1,0,1,0) + \gamma_3(-1,0,0,1)$$

Para hallar los escalares hay que resolver tres sistemas que se puede hacer simultáneamente; se forma una matriz colocando los vectores de $\mathcal{B}$ y después los de $\mathcal{D}$ en columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma reducida de la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio es la formada por la tres primeras filas y tres últimas columnas

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$