Grado Ingeniería Informática.
Matemáticas 2. Prácticas.

Práctica 3. Las integrales y sus Aplicaciones.

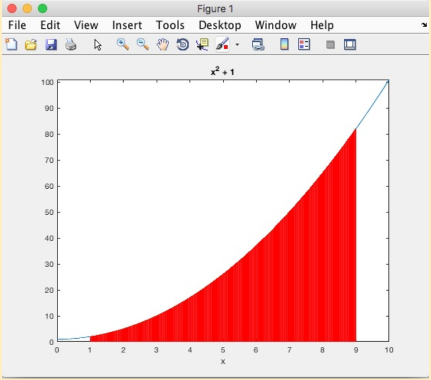
Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Alicante

15 de marzo de 2017

Integración como sumatorio

Definición de área bajo una curva

La siguiente figura muestra el área entre el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = 9$, y la curva $f(x) = x^2 + 1$.



Integración como sumatorio

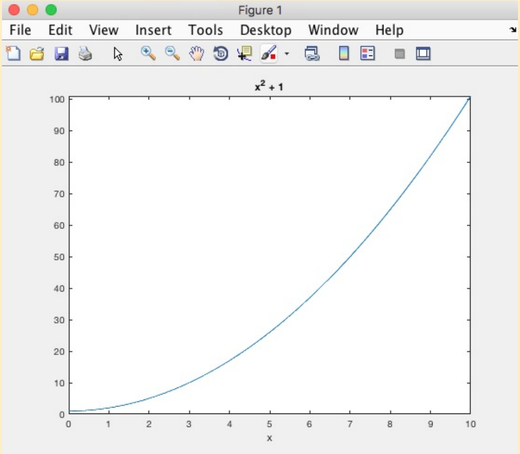
Ejemplo en Matlab.

Vamos a calcular el área dividiendo en rectángulos, de forma que la suma de las áreas de estos rectángulos será una aproximación del valor del área bajo la curva. Ejecuta los comandos

```
>> syms x;
>> f = @(x)x^2 + 1;
>> a = 1; b = 9; n = 1;
>> ezplot(f(x), [a - 1, b + 1]);
>> axis(double([a - 1 b + 1 0 f(b + 1)]));
>> hold on;
```

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Función



Integración como sumatorio

Ejemplo.Dibujar rectángulos.

Se dibuja el rectángulo mediante los comandos

$>> Ll = plot([a\ a], double([0\ f(a)]),' g');$

$>> Lt = plot([a\ b], double([f(a)\ f(a)]),' g');$

$>> Lr = plot([b\ b], double([0\ f(a)]),' g');$

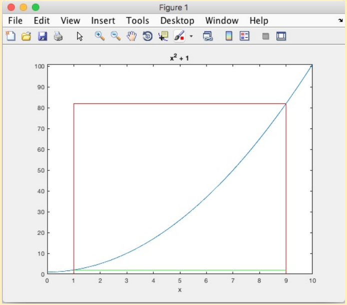
$>> Rl = plot([a\ a], double([0\ f(b)]),' r');$

$>> Rt = plot([a\ b], double([f(b)\ f(b)]),' r');$

$>> Rr = plot([b\ b], double([0\ f(b)]),' r');$

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.



Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.

Crea un script con los comandos anteriores y añade el siguiente código para crear un par de rectángulos por debajo de la función

$>> pause;$

$>> delete([Ll\ Lt\ Lr\ Rl\ Rt\ Rr]);$

$>> n = n * 2$

$>> xi = linspace(a, b, n + 1);$

Dibuja los rectángulos por debajo de la función

$>> for\ i = 1 : n$

$\quad Ll(i) = plot([xi(i)\ xi(i)], double([0\ f(xi(i))]),'g');$

$\quad Lt(i) = plot([xi(i)\ xi(i+1)], double([f(xi(i))\ f(xi(i))]),'g');$

$\quad Lr(i) = plot([xi(i+1)\ xi(i+1)], double([0\ f(xi(i))]),'g');$

$>> end$

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.

Añade el código necesario para representar dos rectángulos por encima de la función.

$for\ i = 1 : n$

$$Rl(i) = plot([xi(i)\ xi(i)], double([0\ f(xi(i+1))]),'r');$$

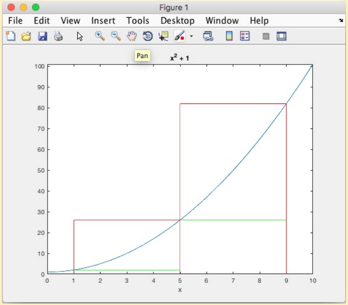
$$Rt(i) = plot([xi(i)\ xi(i+1)], double([f(xi(i+1))\ f(xi(i+1))]),'r');$$

$$Rr(i) = plot([xi(i+1)\ xi(i+1)], double([0\ f(xi(i+1))]),'r');$$

end

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.



Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.

Añade al script código para dividir el área en 2^k rectángulos, tanto superiores como inferiores

$$\begin{array}{l}
for\ \ k = 2:9 \\
\quad pause; delete([Ll\ \ Lt\ \ Lr\ \ Rl\ \ Rt\ \ Rr]); n = n*2; \\
\quad xi = linspace(a, b, n+1); \\
\quad for\ \ i = 1:n \\
\quad\quad Ll(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i)], double([0\ \ f(xi(i))]), 'g'); \\
\quad\quad Lt(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i+1)], double([f(xi(i))\ \ f(xi(i))]), 'g'); \\
\quad\quad Lr(i) = plot([xi(i+1)\ \ xi(i+1)], double([0\ \ f(xi(i))]), 'g'); \\
\quad end
\end{array}$$

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos. Cont.

$$\textit{for}\ \ i = 1:n$$

$$Rl(i) = plot([xi(i)\ xi(i)], double([0\ f(xi(i+1))]), 'r');$$

$$Rt(i) =$$

$$plot([xi(i)\ xi(i+1)], double([f(xi(i+1))\ f(xi(i+1))]), 'r');$$

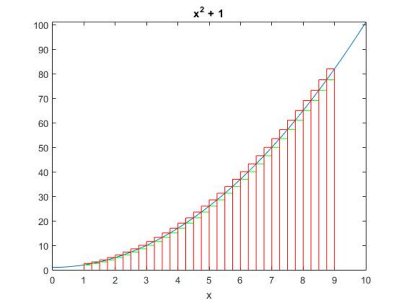
$$Rr(i) = plot([xi(i+1)\ xi(i+1)], double([0\ f(xi(i+1))]), 'r');$$

$$\textit{end}$$

$$\textit{end}$$

Proceso de suma

Ejemplo en Matlab. Dibujar rectángulos.



Suma Izquierda y Suma Derecha

Definición

Fíjate que para dibujar los rectángulos hemos elegido, para cada subintervalo, los valores del extremo izquierdo de $f(x)$ primero y los valores del extremo derecho de $f(x)$ a continuación. Las sumas de las áreas de esos rectángulos es lo que se denomina suma izquierda en un caso y suma derecha en el otro.

Suma Izquierda y Suma Derecha

Definición

Tomando cada intervalo de igual longitud $h = (b-a)/n$, con n número de intervalos definidos por $\{a = x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = b\}$, obtenemos:

Suma Izquierda

$$L_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Suma Derecha

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$$

Suma Izquierda y Suma Derecha

Ejemplo en Matlab

Prueba el siguiente script y comprueba como la suma izquierda y derecha se aproximan al mismo valor conforme se aumenta el número n de intervalos.

Suma Izquierda y Suma Derecha

Ejemplo en Matlab

```
syms x; f = @(x)x^2 + 1; a = 1; b = 9;
for k = 0 : 12
    n = 2^k;
    xi = linspace(a, b, n + 1);
    h = (b - a)/n;
    for i = 1 : n + 1
        yi(i) = f(xi(i));
    end
    Ln = h * sum(double(yi(1 : n)));
    Rn = h * sum(double(yi(2 : n + 1)));
    double([Ln Rn]); pause
end
```

Calculo de primitivas

Integracion simbolica

La integración simbólica se lleva a cabo mediante el comando *int(f)* o *int(f,x)*, donde f es la expresión simbólica o el nombre de una expresión simbólica y x la variable respecto a la que se integra.

Calculo de primitivas

Ejemplo

$$\int (2\cos x - 6x)dx$$

$>> syms\ x;$
$>> f = 2 * \cos(x) - 6 * x;$
$>> int(f)$
ans
$2 * \sin(x) - 3 * x^2$

Matlab no incluye la constante de integración.

Calculo de primitivas

Ejemplo

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$$

$>>$ *syms x a b*;
$>>$ $int(\sin(a*x)*\cos(b*x),x)$
ans
$-(b*\sin(a*x)*\sin(b*x)+a*\cos(a*x)*\cos(b*x))/(a^2-b^2)$

Se pueden introducir parámetros en las integrales y trabajar con ellos como si fueran constantes.

Integrales definidas

Integrales definidas

Para calcular integrales definidas se utilizan variantes del comando *int*:

$$int(f, a, b) \text{ o } int(f, var, a, b)$$

Integrales definidas

Ejemplo Integral definida

$$\int_0^{\pi} (\sin(y) - 5y^2) dy$$

$>> syms\ \ y;$
$>> int(\sin(y) - 5 * y^{\wedge}2, 0, pi)$
ans
$2 - (5 * pi \wedge 3)/3$
$>> syms\ \ y\ \ a;$
$>> int(\sin(y) - a * y^{\wedge}2, y, 0, pi)$
ans
$2 - (a * pi \wedge 3)/3$

Integrales impropias

Ejemplo

$$\int_0^{\text{ínf}} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$>> syms\ x;$
$>> f = \sin(x)/x;$
$>> int(f, 0, inf)$
ans
$\pi/2$

Combina el concepto de integral y el de limite:

Integrales impropias

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$>> syms\ x;$
$>> int(1/x, 0, 1)$
ans
Inf

Aplicaciones geométricas

Área bajo una curva

El cálculo de la integral de una función no negativa en un intervalo $[a, b]$ se interpreta geometricamente como el área delimitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = a, x = b$.

Aplicaciones geométricas

Cálculo de volúmenes

Si cortamos un cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas, obtenemos una sección de área $A(x)$ en cada punto de abscisa x. Entonces, el volumen de ese cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje OX en los puntos de abscisas a y b, viene dado por:

$$\int_a^b A(x)\, dx$$

Aplicaciones geométricas

Ejemplo. Volumen limitado por un elipsoide

Dado el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Si cortamos el elipsoide por el plano $x=k$, la sección es la elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$, es decir

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-k^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-k^2)}=1$$

cuyos semiejes son $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2}$ y $\frac{c}{a}\sqrt{a^2-k^2}$.
El área de la elipse es:

$$A(k)=\pi\frac{bc}{a^2}(a^2-k^2)$$

Aplicaciones geométricas

Ejemplo en MatLab

$>> syms\ \ a\ \ b\ \ c\ \ x;$

$>> A = pi * (b * c/a^\wedge 2) * (a^\wedge 2 - x^\wedge 2);$

$>> V = int(A, x, -a, a)$

$V =$

$(4 * pi * b * c * a)/3$

Aplicaciones geométricas

Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de abscisas, se genera un sólido de revolución cuyo volumen viene dado por:

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx$$

Aplicaciones geométricas

Ejemplo en MatLab

Calcula el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la función $f(x) = \sqrt{x}$, la recta $x = 3$ y el eje de abcisas.

$>> syms\ x$

$>> f(x) = sqrt(x)$

$>> V = pi * int(f^\wedge 2, 0, 3)$

V

$(9 * pi)/2$

Ejercicios

Practica #1

Crea un script tal que para $f(x) = \sqrt{x}$ entre 1 y 2 calcule

1. L_4.
2. R_4.
3. Valor exacto de la integral.
4. Porcentaje de error.

Ejercicios

Práctica #2

Reutiliza el script de la Práctica #1 para calcular L_n y R_n de

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $[-2, 3]$ con $8, 16, 32 y 48$ rectángulos respectivamente·
2. $f(x) = sen(2x)$ en $[-1, 5]$ con $10, 40, 60 y 80$ rectángulos respectivamente·
3. $f(x) = -x^2 + 8x + 5$ en $[-2, 3]$ con $4, 12, 30 y 50$ rectángulos respectivamente·

Ejercicios

Práctica #3

Calcula:

1. $\int e^{4x} dx\cdot$
2. $\int x^5 \log x dx\cdot$
3. $\int \cos(\sin x) dx\cdot$

Ejercicios

Práctica #4

Sean $f(x) = x$ **y** $g(x) = (x+1)^2$**, calcula:**

1. $\int_0^2 (f+g)dx\cdot$
2. $\int_0^2 f\ dx + \int_0^2 g\ dx\cdot$
3. Compara los resultados.

Ejercicios

Práctica #5

Calcula:

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi} k\ f\ dx$ con $f(x) = \sin x$ y $k = 5\cdot$
2. $k \int_{-\pi/2}^{\pi} f\ dx\cdot$
3. Compara los resultados.

Ejercicios

Práctica #6

Calcula $\int_1^1 x^2 \ dx$.

Ejercicios

Práctica #7

Sea $f(x) = \cos x$**, calcula:**

1. $\int_{-\pi}^{\pi} f \ dx \cdot$
2. $k \int_{-\pi}^{0} f \ dx + k \int_{0}^{\pi} f \ dx \cdot$
3. Compara los resultados

Ejercicios

Práctica #8

Calcula $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2-5x+4}\ dx\cdot$

Ejercicios

Práctica #9

Calcula el volumen del sólido generado al girar $f(x) = \sqrt{x-1}$, la recta $x = 3$ y el eje de ordenadas·