GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA | SOLUCIÓN | **EXAMEN** DE MATEMÁTICAS-1
UNIVERSIDAD DE ALICANTE | | Enero 2016

Álgebra

Ejercicio 1. (2 ptos.) Matrices y Operaciones.

a) Marcar como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones.

Sean A, B matrices cuadradas nxn, I la matriz identidad de orden n.

a.1) Cualquier matriz cuadrada tiene inversa. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

a.2) Para que una matriz no tenga inversa es suficiente que su forma reducida tenga una fila de ceros. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

a.3) La matriz inversa de una matriz C (nxn) es C^{-1} si se cumple $CI= C^{-1}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

a.4) La matriz C^{-1} es inversa de la matriz C (nxn) si, y sólo si, $CC^{-1} = I$. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) Justifica tus respuestas con las matrices A y B siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Marcar cada proposición como verdadera o falsa sobre la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.1) Está en forma escalonada por fila. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c.2) Está en forma reducida. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

c.3) No está en forma escalonada porque la fila 1 tiene un elemento distinto de 1 el c_{24}. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

c.4) No está en forma escalonada porque el 1 principal de la última fila debería estar en la columna 3. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

Solución a) b)

La proposición a.1) es F ya que A y B son cuadradas y la matriz A no tiene inversa y la matriz B sí que la tiene, luego no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

La proposición a.2) es V pues A no tiene inversa porque su reducida tiene una fila de ceros y por lo tanto no puede existir A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$.

La proposición a.3) es F puesto que C I = C.

La proposición a.4) es V por definición de matriz inversa de una matriz. $BB^{-1} = I$.

Álgebra

Ejercicio 2. (2,5 ptos.) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La alacena de ingredientes mágicos de una hechicera contiene 13 onzas de tréboles y la misma cantidad de hojas de mandrágora. La alacena se repone siempre y cuando la hechicera termina todo lo que tiene. Una poción de amor requiere 4 onzas de tréboles y 2 hojas de mandrágora. Una receta para curar el resfriado requiere 7 onzas de tréboles y 10 hojas de mandrágora.

a) **Plantea** el sistema de ecuaciones lineales usando matrices.

b) Demuestra si el vector **u** (2x1) cuyos elementos se corresponden con la cantidad que hay en la alacena de tréboles y de mandrágora es **combinación lineal** del vector u_1 (2x1) formado por las cantidades requeridas para la poción de amor y del vector u_2 (2x1) formado por las cantidades requeridas para la receta del resfriado. Si es el caso, escribe la ecuación de la combinación lineal, si no lo es, explícalo.

c) A partir de los resultados obtenidos en b) indica la **cantidad** de la poción de amor y del remedio para el resfriado que debe combinar la hechicera para usar toda la reserva de su alacena.

d) Si la hechicera repone la alacena con 26 onzas de trébol y 26 hojas de mandrágora comprobar si el vector $u' = (26,26)^T \in$ **Env{u_1, u_2}.**

Solución

a) x: poción de amor; y: receta resfriado.

$$4x + 7y = 13$$
$$2x + 10y = 13$$

b) El vector u es CL de los vectores $u_1 = (4,2)^T$ $u_2 = (7,10)^T$ ya que $u = (13,13)^T = 1.5(4,2)^T + 1(7,10)^T$

$$[A|u] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 2 & 10 & 13 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) El vector $u' \in \text{Env}\{u_1, u_2\}$.

$$[A|u'] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 26 \\ 2 & 10 & 26 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}[A|u'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Álgebra

Ejercicio 3. (2,5 ptos.) Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la factorización LU

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales Ax = b:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar una factorización LU de la matriz A.
b) Usad la factorización anterior para resolver el sistema lineal dado.

Solución

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5/2 & 0 \\ 4 & 5 & 20 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -11/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, 3, -4)^T$

Álgebra

Ejercicio 4. (3 ptos.) Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Hallad el **polinomio característico** de A.

b) Hallad los **valores propios** de A indicando la multiplicidad algebraica de cada uno.

c) Hallad una **base** para cada subespacio propio indicando su dimensión.

d) A partir de los resultados obtenidos en b) y c) estudiar si la matriz **A es diagonalizable** teniendo en cuenta la **multiplicidad** de sus valores propios y si es el caso, obtener una matriz diagonal D tal que **D = P^{-1}A P.**

Solución

(a) $q_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0$

(b) $\lambda_1 = 3$ (doble), $ma(\lambda_1) = 2$; $\lambda_2 = -2$, $ma(\lambda_2) = 1$

(c) Para $\lambda_1 = 3 \rightarrow$ Env{(1,0,0), (0,-4,1)}, $mg(\lambda_1) = 2$.

Para $\lambda_2 = -2 \rightarrow$ Env{(1,1,1)},), $mg(\lambda_2) = 1$.

(d) A es diagonalizable porque para cada λ se verifica que $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$