La derivada y sus aplicaciones (I)

Tema 2

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada

Noción de derivada

El concepto comenzó a plantearse en la época de la Grecia clásica (siglo III a.C.), pero se formalizó al converger, en el siglo XVII, matemáticos europeos en la resolución de 4 problemas:

- **El problema de la recta tangente.**
- **El problema de la velocidad y aceleración.**
- **El problema de máximos y mínimos.**
- **El problema del área.**

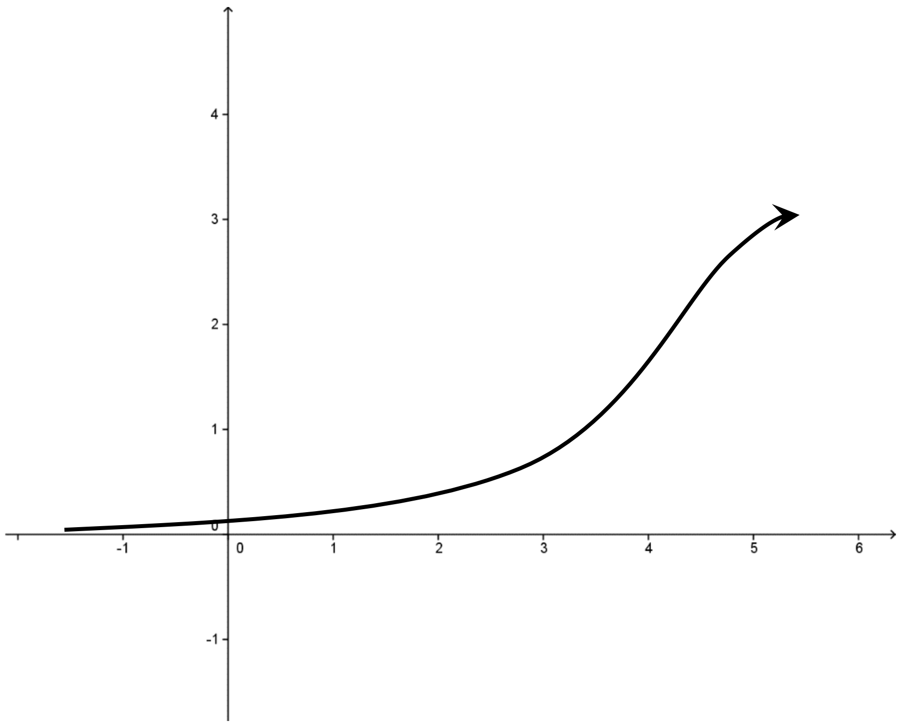
¿Cómo varía una función?

¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

¿Cómo varía una función?

¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

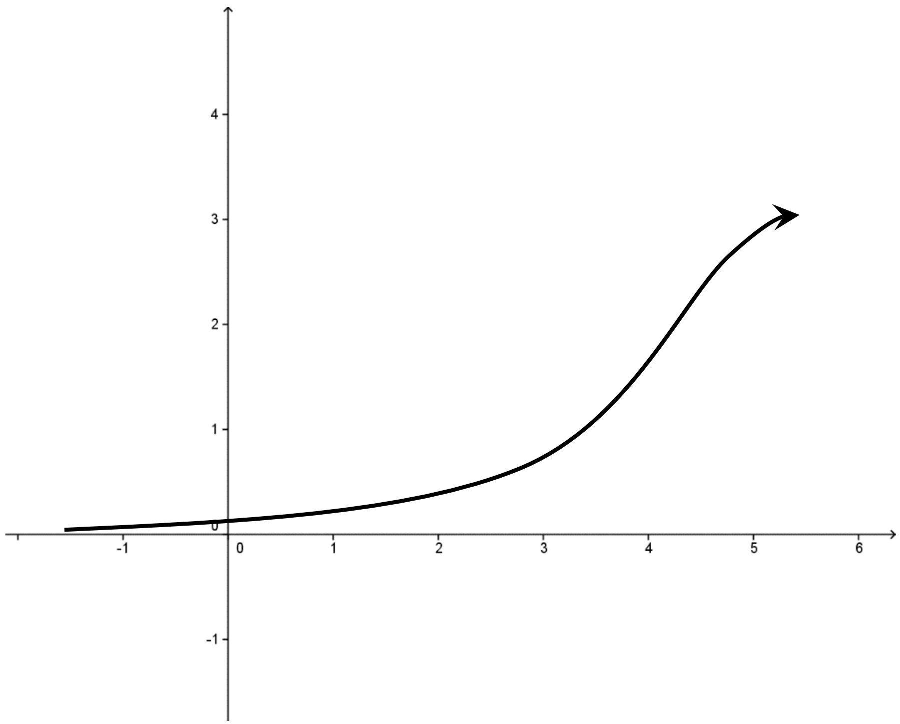
Analizaremos su representación gráfica:



¿Cómo varía una función?

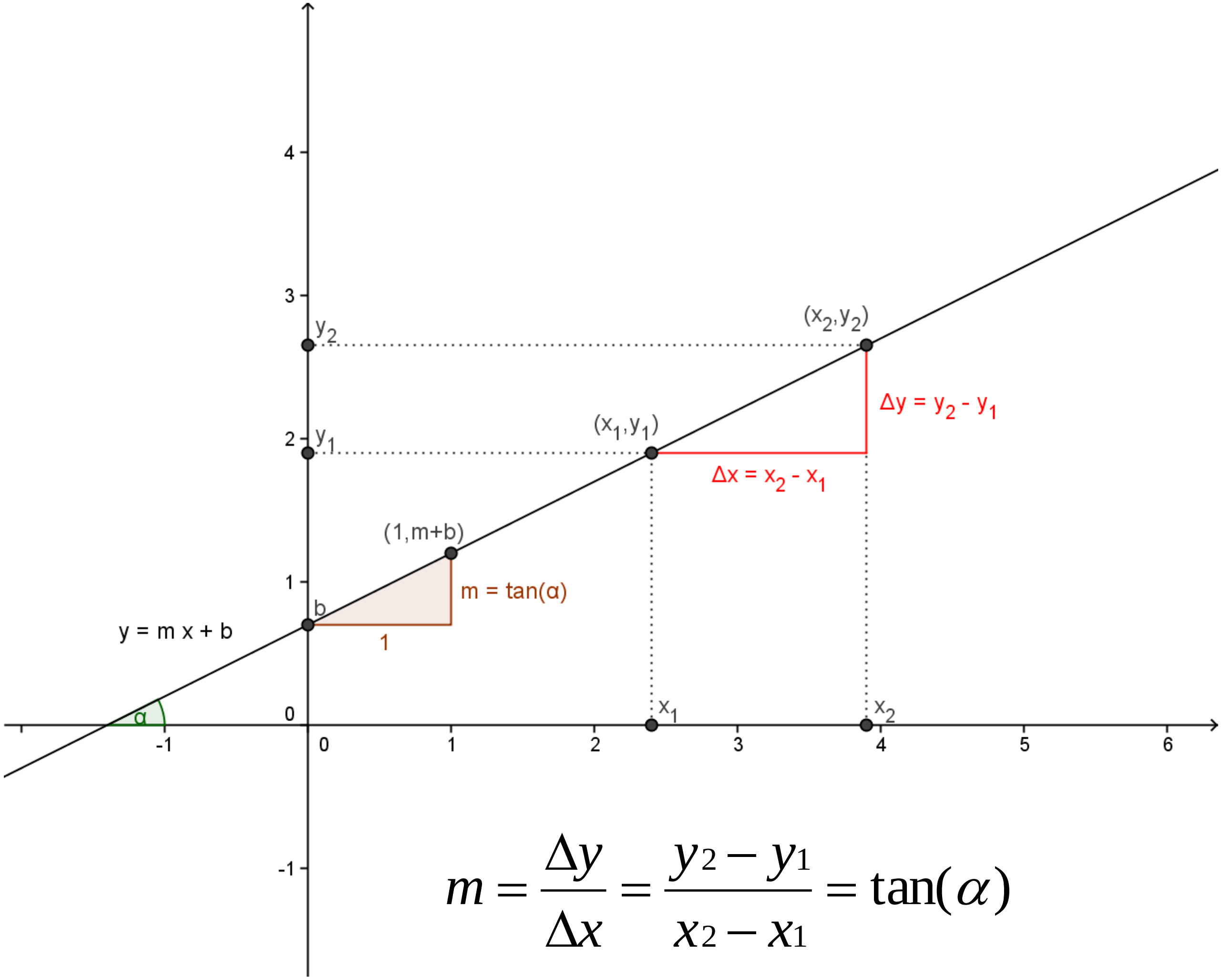
¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

Analizaremos su representación gráfica:



¿Cuánto varía *y* por cada unidad de *x*?

El concepto pendiente puede ayudar

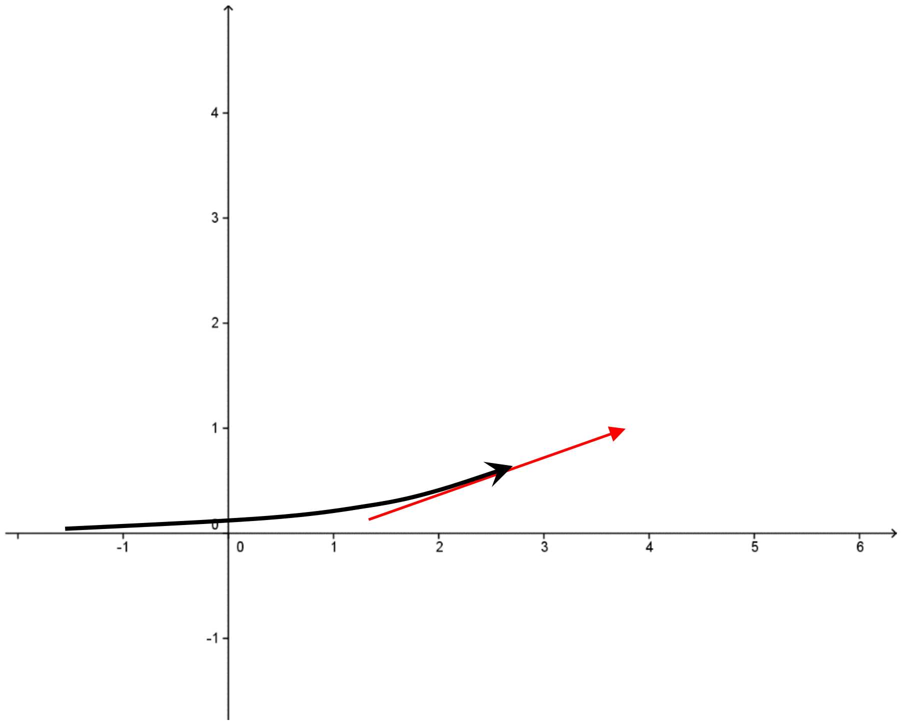


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$$

En una recta, *m* da cuánto varía *y* por cada unidad de *x*

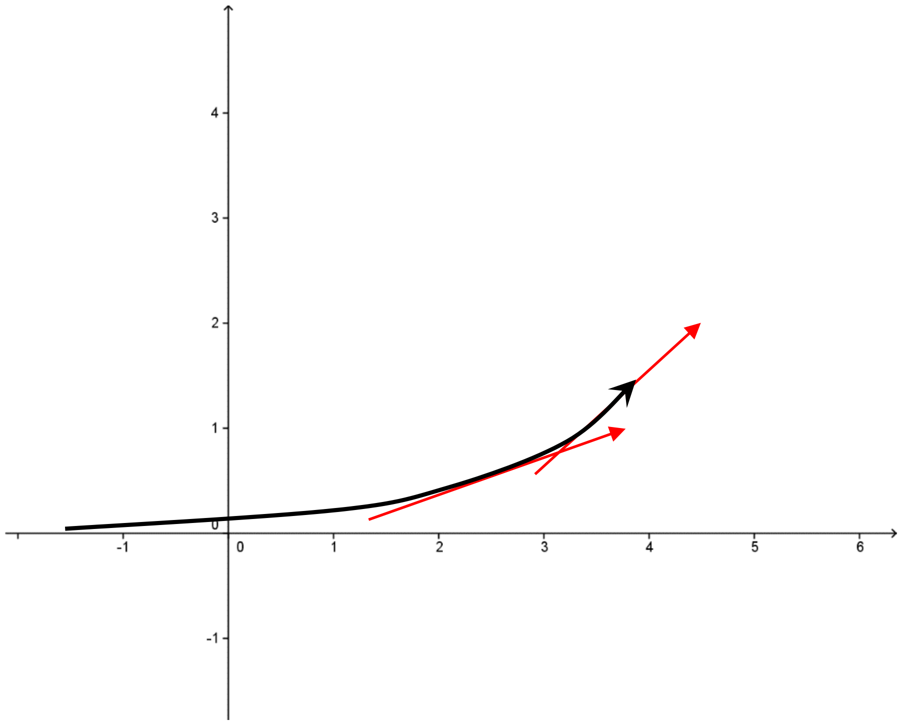
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva "crece" ("gira" si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



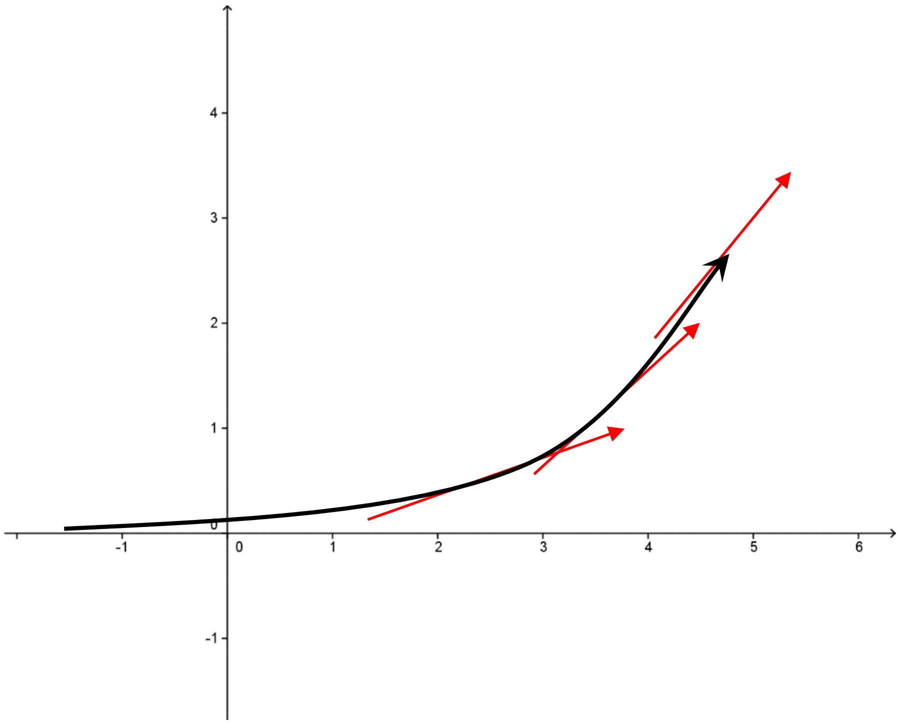
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva "crece" ("gira" si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



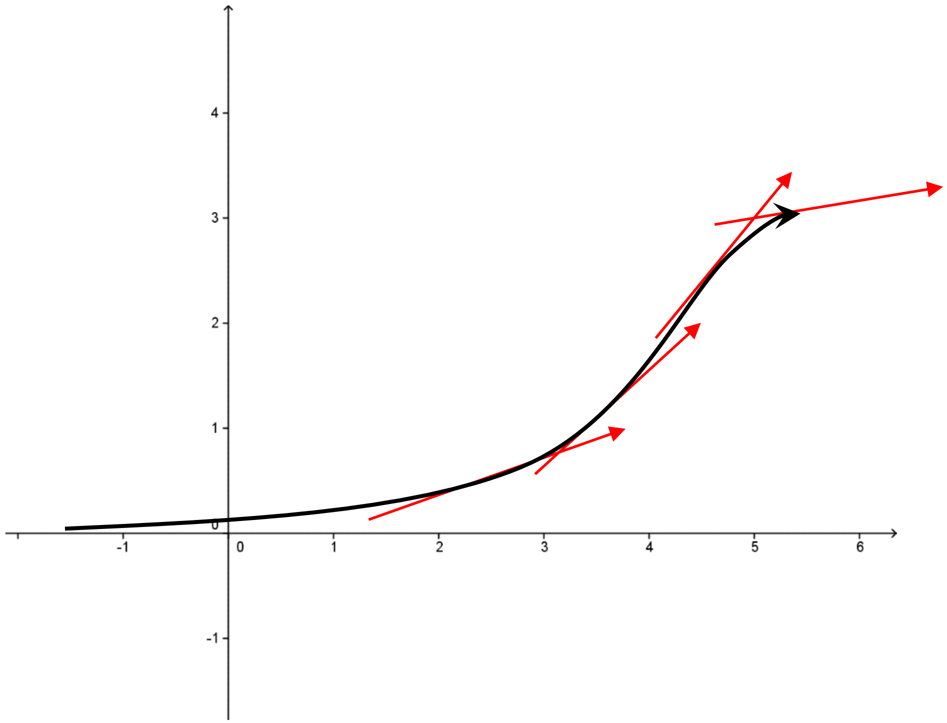
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva "crece" ("gira" si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:

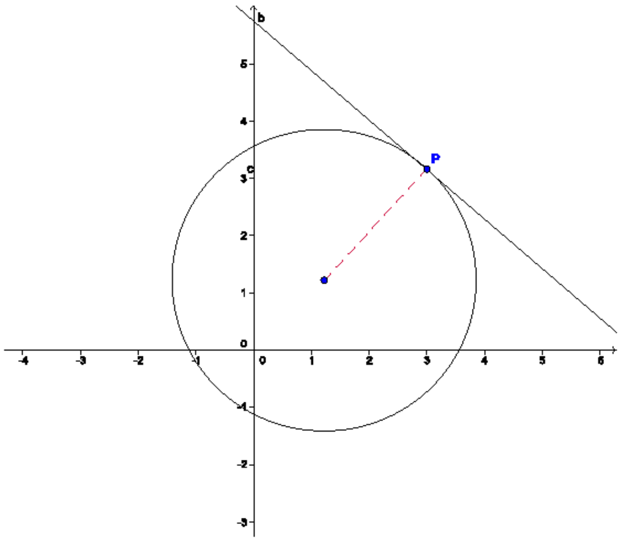


¿Las curvas tienen pendientes?

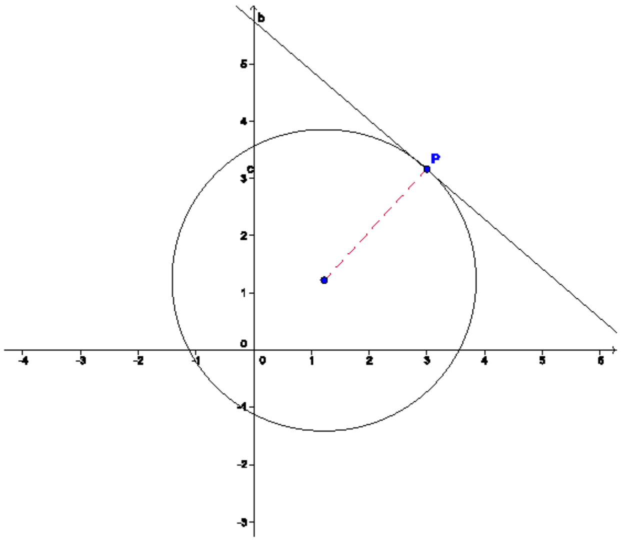
Podemos considerar que en cada punto, una curva "crece" ("gira" si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:

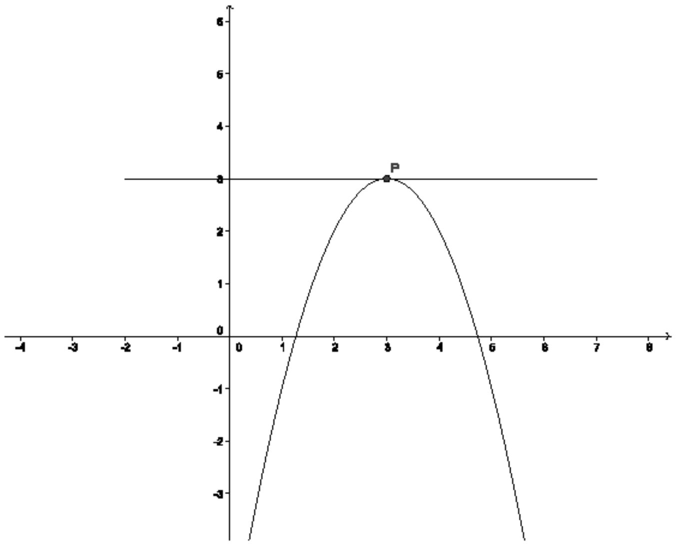


¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?

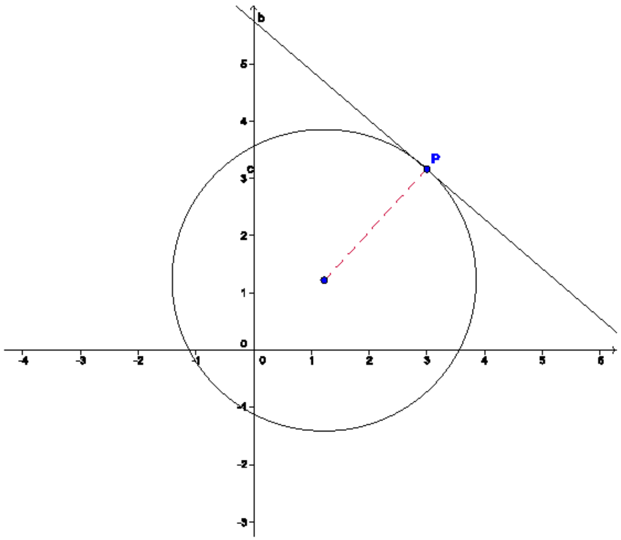


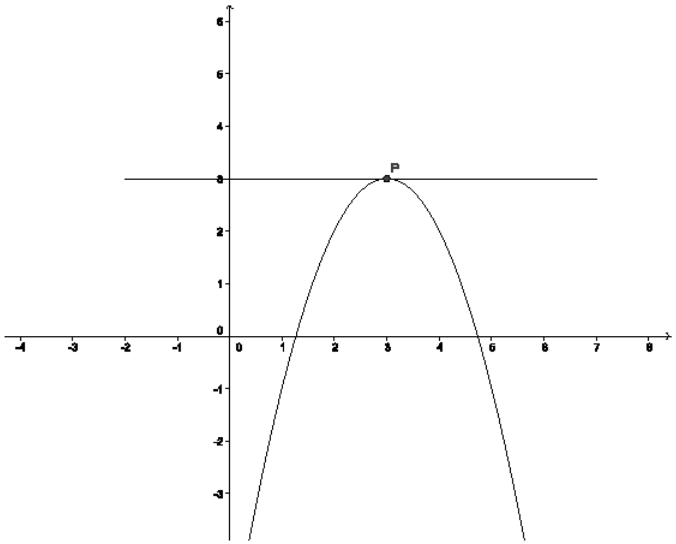
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?

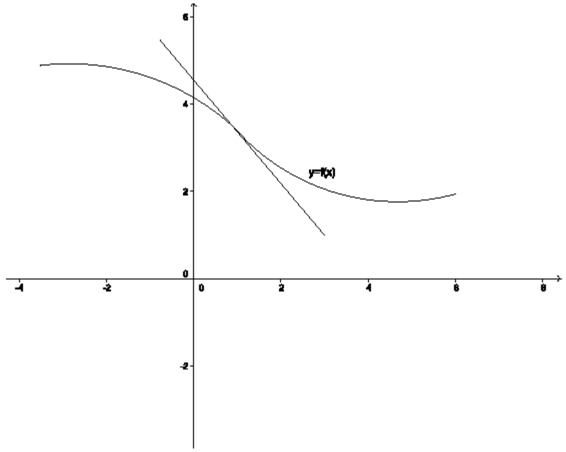




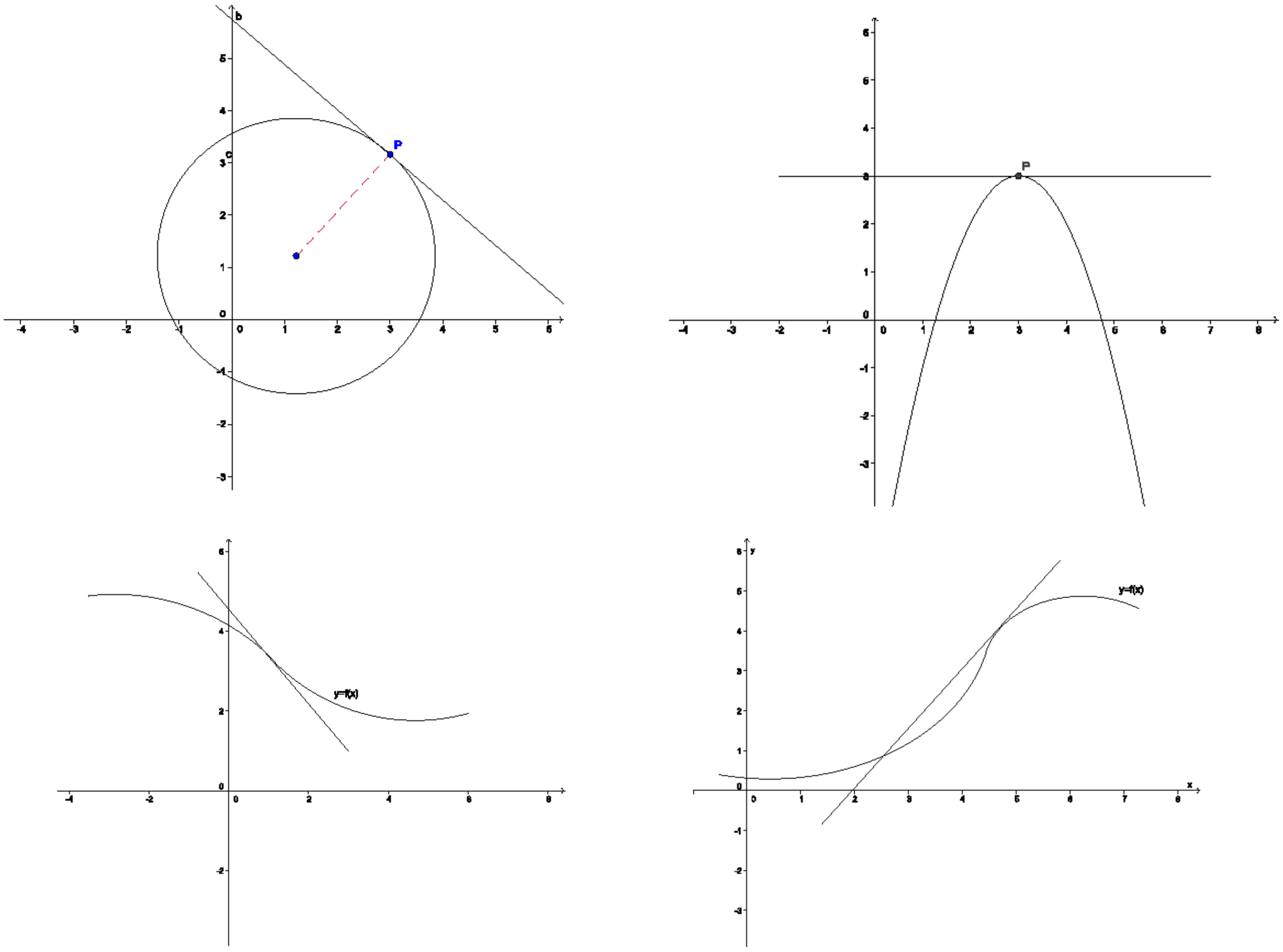
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



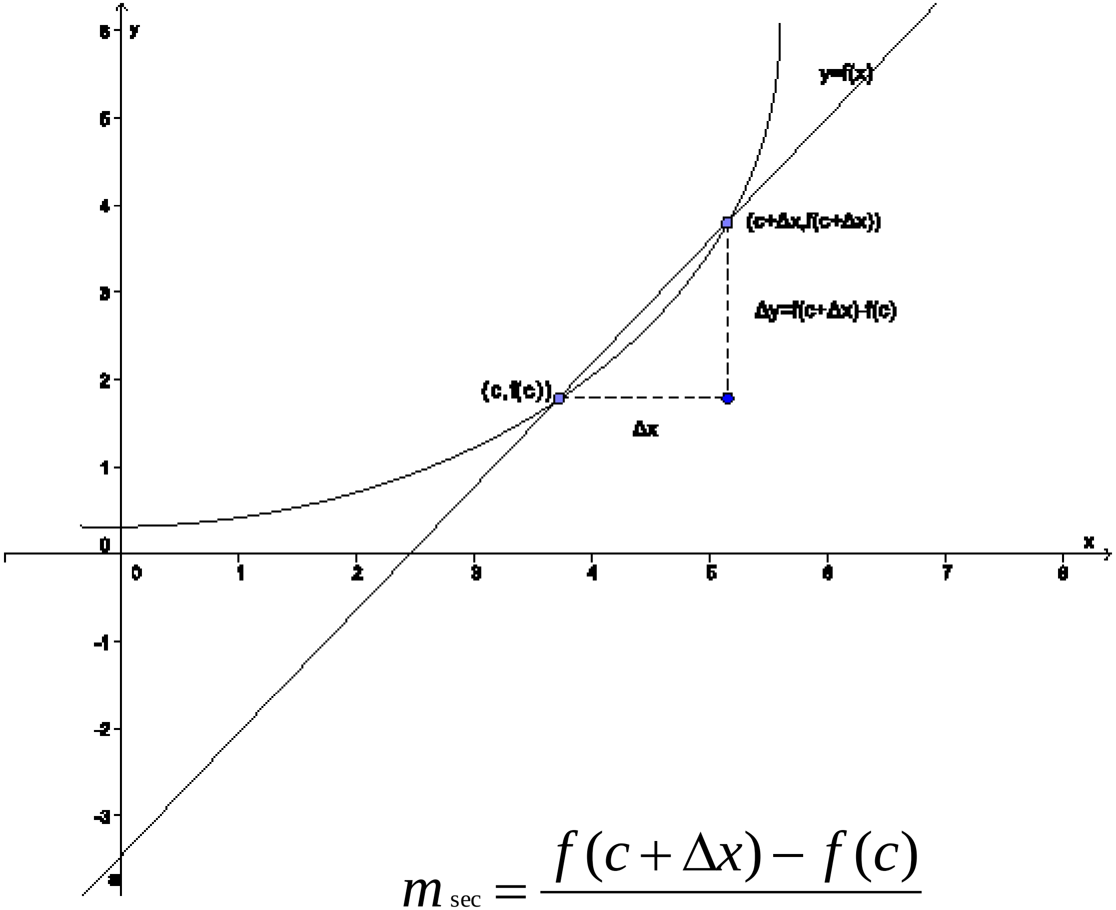




¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?

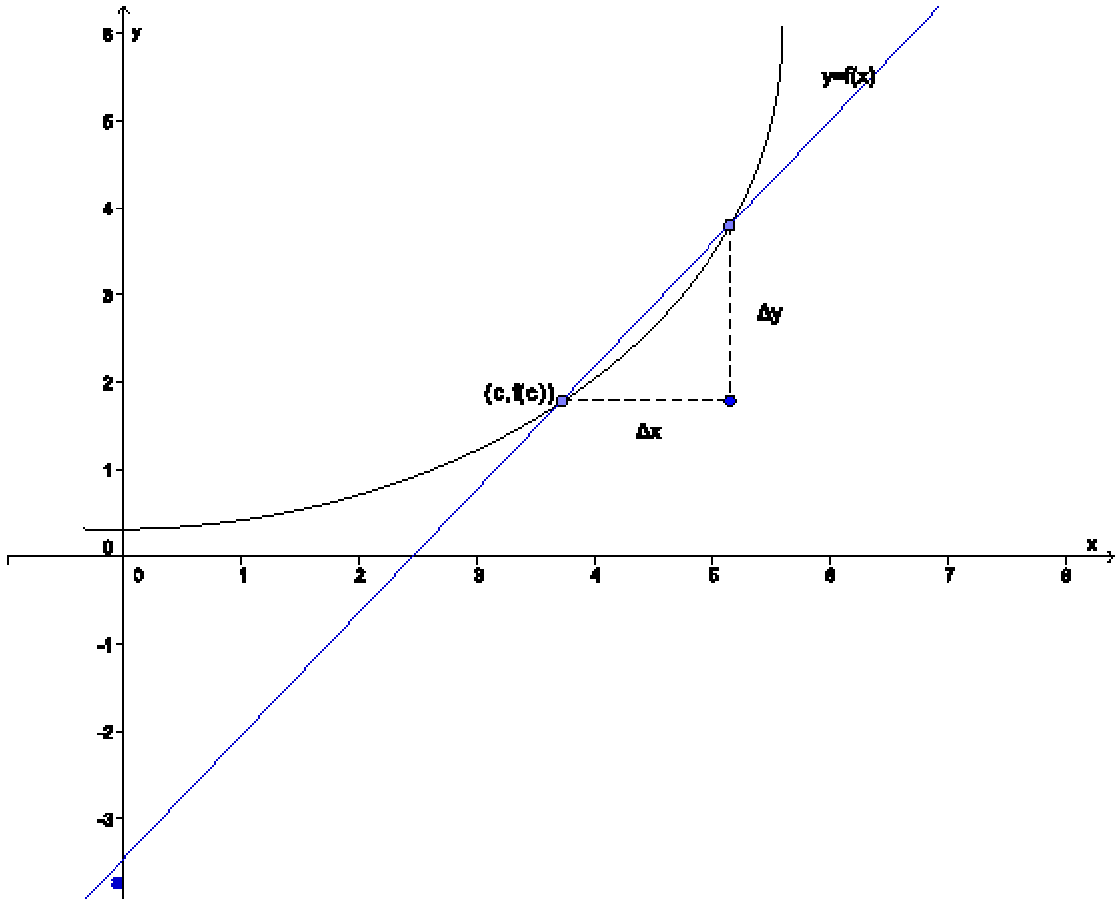


Definición a partir de la secante

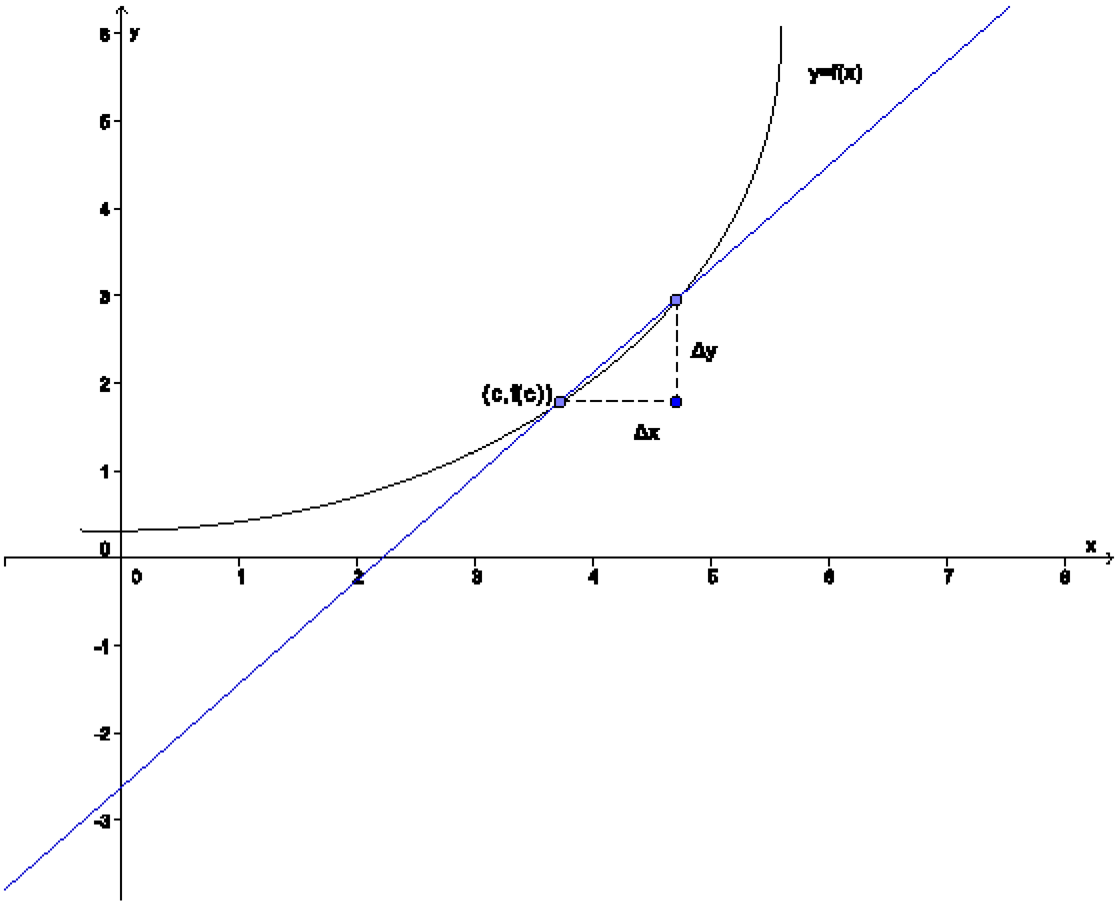


$$m_{\sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

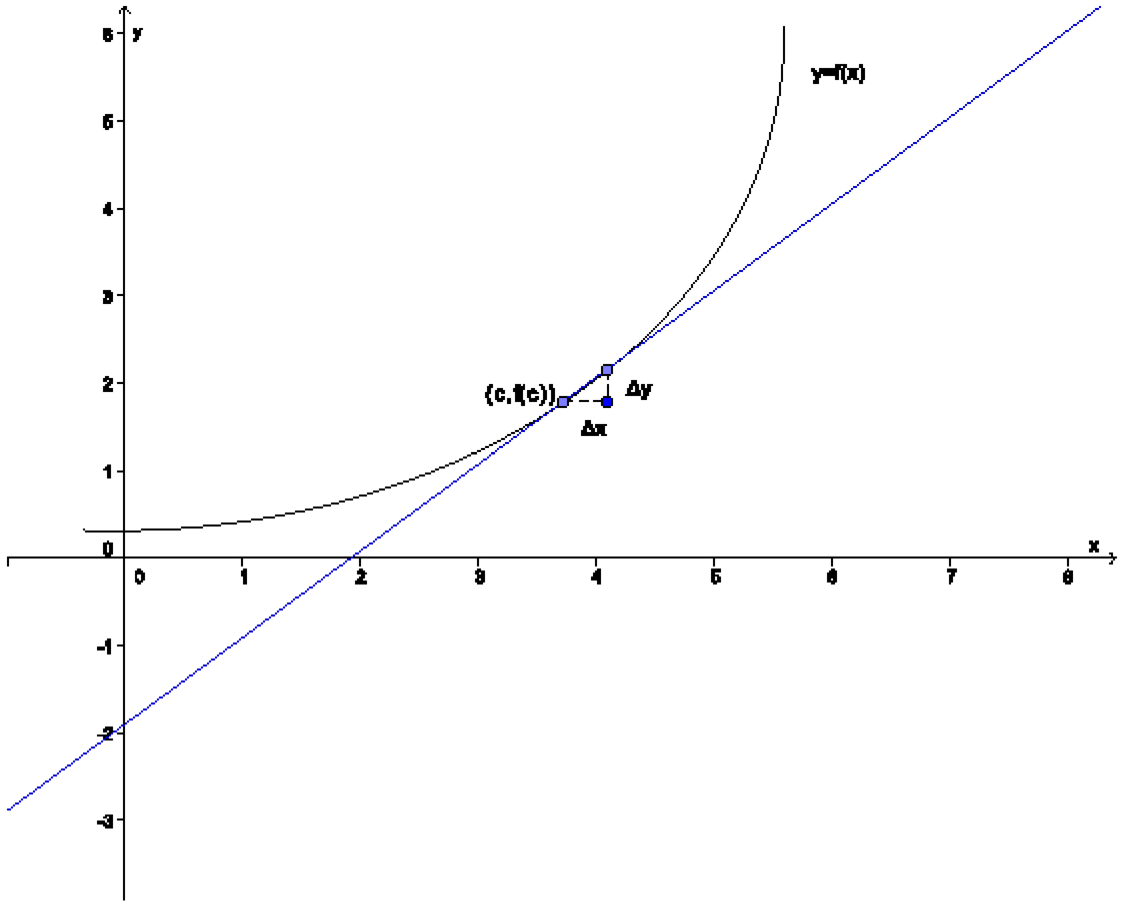
Cuanto más se reduce el incremento…



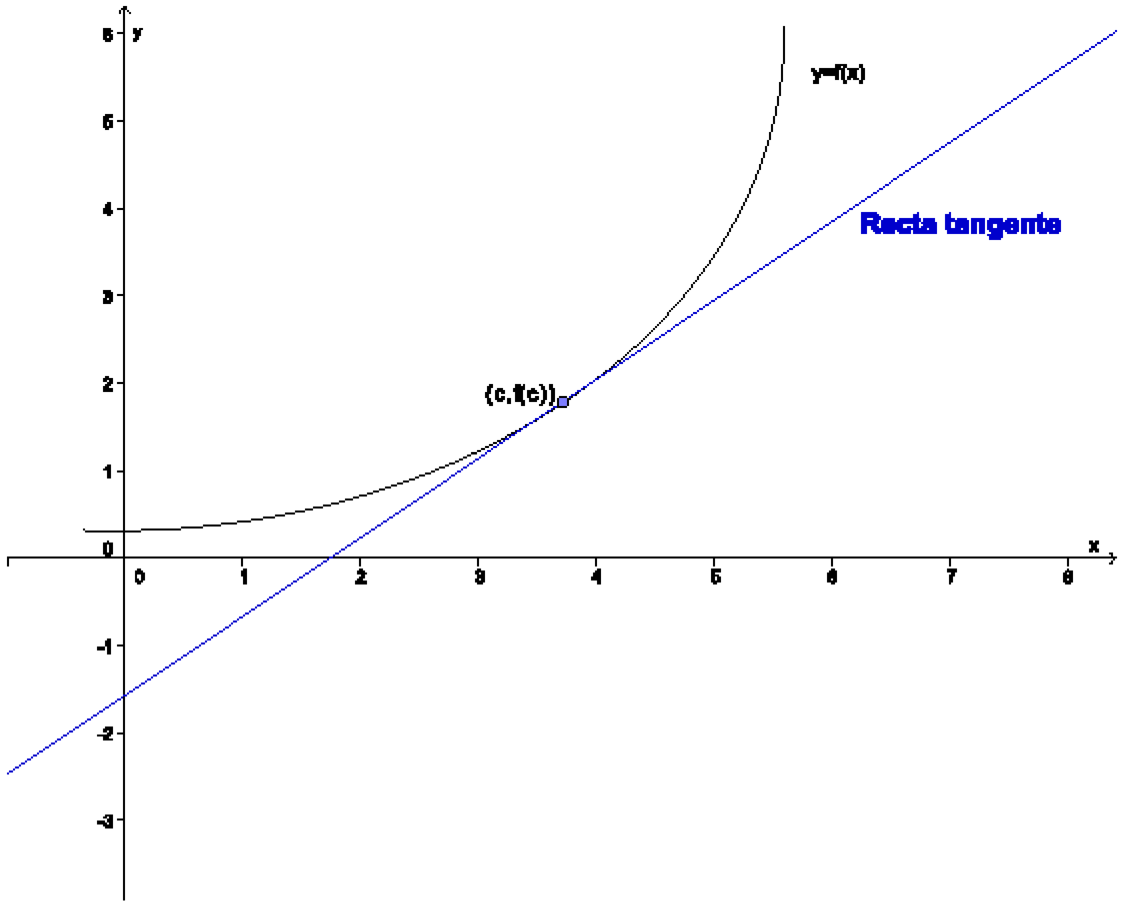
Cuanto más se reduce el incremento…



Cuanto más se reduce el incremento…



Cuanto más se reduce el incremento…



Cuando Δx tiende a ser 0 la secante tiende a ser tangente

Definición de Tangente

Si la función *f(x)* está definida en un intervalo abierto que contiene a *c* y además existe el

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

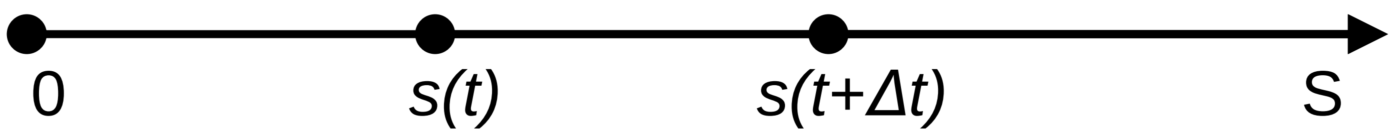
entonces la recta que pasa por *(c,f(c))* con pendiente *m* es la tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto *(c,f(c))*.

Velocidad media

Supuesta una función *s(t)* que nos diera el espacio recorrido en un tiempo *t*:

Velocidad media

Supuesta una función *s(t)* que nos diera el espacio recorrido en un tiempo *t*:

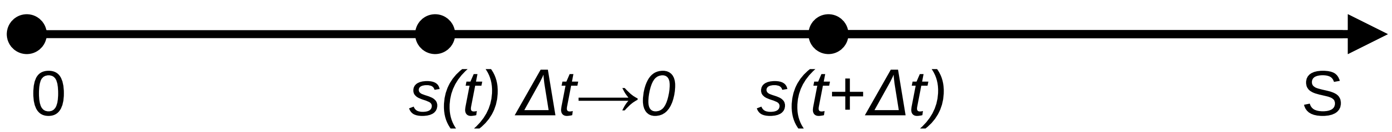


La velocidad media desde el instante *t* al *t+Δt* sería el espacio recorrido por unidad de tiempo en ese intervalo:

$$V_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

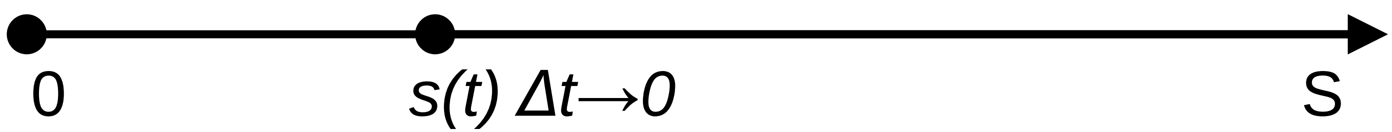
Velocidad instantánea

Si se va reduciendo *Δt* hasta el límite:



Velocidad instantánea

Si se va reduciendo Δt hasta el límite:



La velocidad calculada resultará instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Definición de Derivada

La derivada de *f* en *x* viene dada por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

siempre que exista este límite. Para todos los *x* para los que exista este límite *f'* es una función de *x*.

Notaciones:

$$f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad y' \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[y]$$

Aclaraciones sobre la derivada

- Si existe la derivada f ’(a), se dice que f es derivable en el punto a.
- Si no existe la derivada f ’(a), se dice que f no es derivable en a.
- Una función es derivable en (a, b) si existe la derivada para cada número que pertenece a ese intervalo.
- La derivada de una función es un límite.
- Para hallar la derivada se requiere que la función sea continua en el punto.

Interpretaciones de la derivada

- Geométrica:

  Pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = c$.

- Mecánica:

  Velocidad de una partícula cuya posición viene dada por $y = s(t)$ en el instante $t = c$.

- General:

  Razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = c$.

La derivada y sus aplicaciones (I)

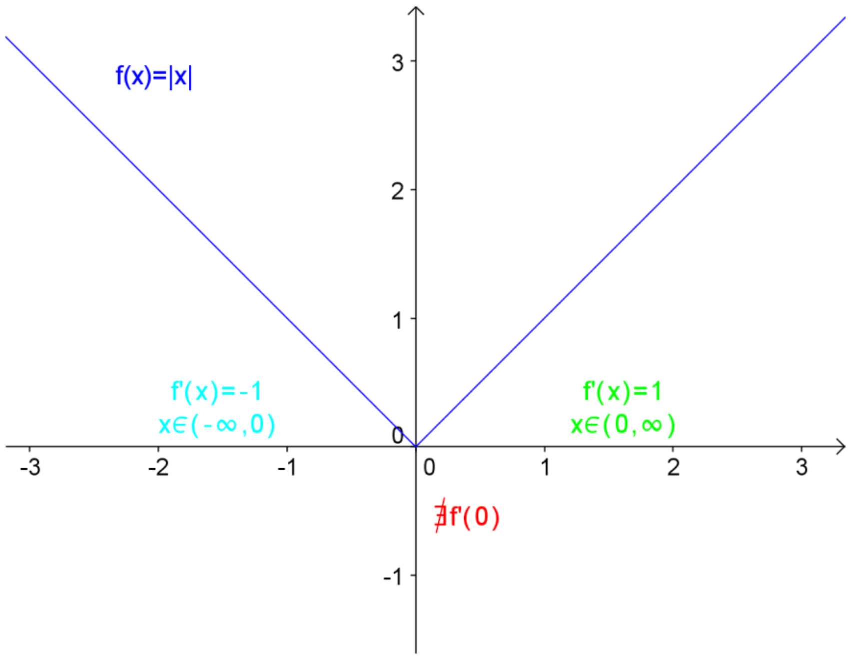
- Noción de derivada
- Características

Derivada y continuidad

- Teorema:

  Si *f* es derivable en *x*, entonces es continua en *x*.

Lo contrario no es cierto:



¿Por qué?

Por ejemplo la función valor absoluto es continua para cualquier valor de *x*, pero sólo es derivable para $x < 0$ y $x > 0$

$$x < 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$x > 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

y no es derivable para $x = 0$

Límites laterales

El valor absoluto no es derivable para *x = 0* porque sus límites laterales no coinciden:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

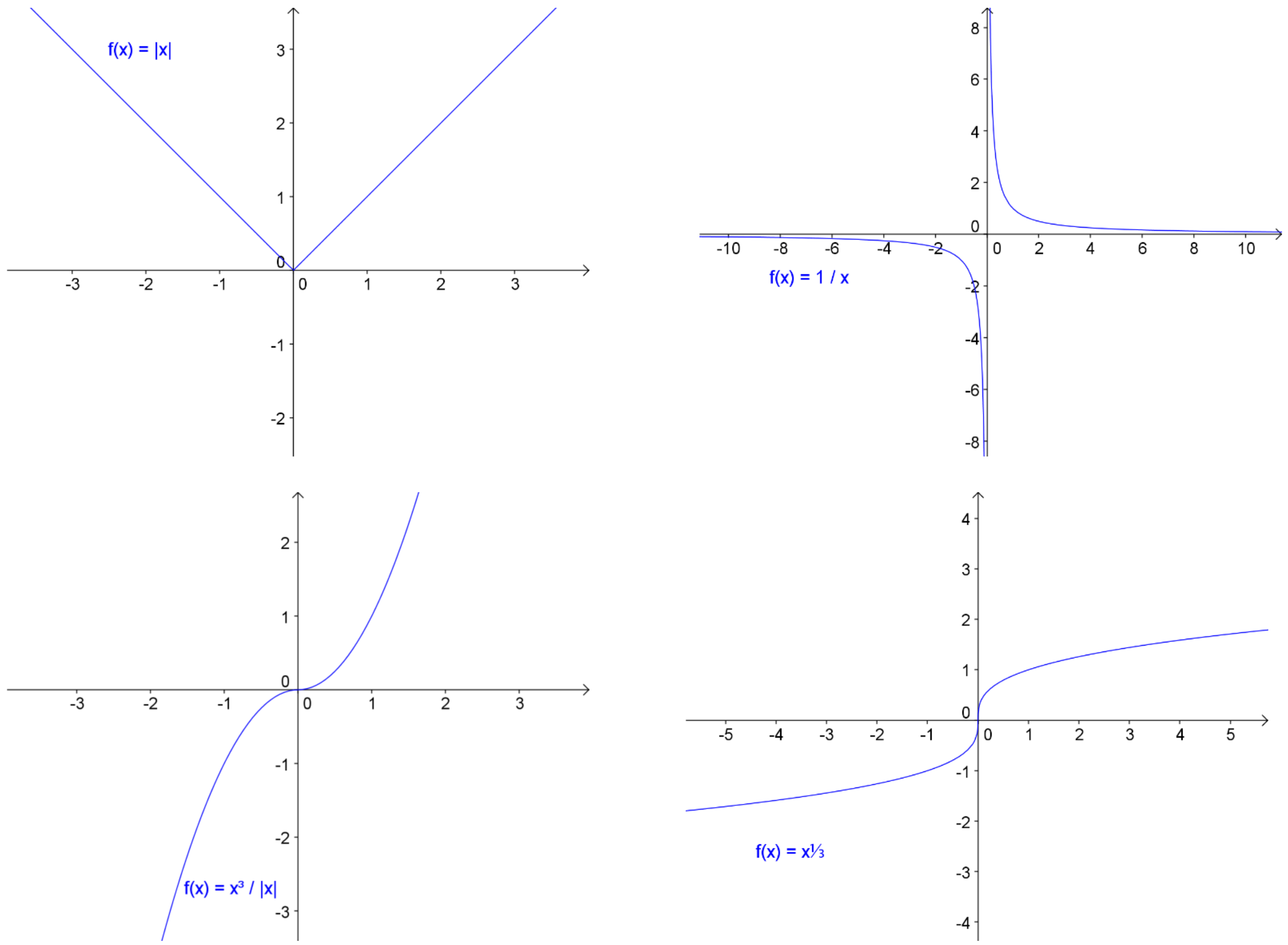
$$x = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

La derivada no está definida en *x = 0*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[|x|] = \frac{x}{|x|}$$

¿Cómo puede ser una función no derivable en un punto?



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación

Derivada de una constante

Aplicamos la definición de derivada a *f(x)*=*c*:

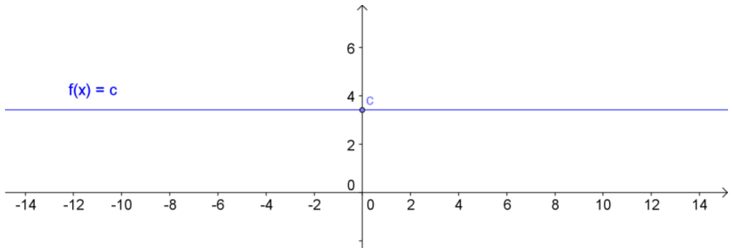
$$f'(x) = \frac{d}{dx}[c] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

- Regla de la constante

La derivada de una función constante es *0*.
Si *c* es un número real

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Ya que la pendiente en toda su gráfica es *0*:



Apliquemos ahora la definición de derivada a otro ejemplo, la función *$f(x)=ax^2$*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[ax^2] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a[(x+\Delta x)^2 - x^2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a[(x+\Delta x)+x][(x+\Delta x)-x]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a[(x+\Delta x)+x]\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a[(x+\Delta x)+x] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a(2x+\Delta x) = 2ax$$

Ejemplo de derivada de potencia por constante:

$$\frac{d}{dx}[ax^2] = 2ax$$

Reglas básicas

- Regla de la potencia:

  Si n es un número racional, entonces la función $f(x)=x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

- Regla del múltiplo constante

  Si f es una función derivable y c una número real, entonces cf también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Reglas de suma y diferencia

La suma (o diferencia) de dos funciones derivables *f* y *g* es derivable y

- Regla de la suma:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$

- Regla de la diferencia:

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$$

Regla del producto

El producto de dos funciones derivables *f* y *g* es derivable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Generalización al producto de varias funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] =$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Regla del cociente

El cociente de dos funciones derivables *f* y *g* es derivable para todos los valores de *x* en los que g(x) ≠ 0, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Apliquemos la definición esta vez a *f(x) = ln x*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} [\ln(1+\Delta x / x)^{1/\Delta x}]$$

Apliquemos la definición esta vez a *f(x) = ln x*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} [\ln(1+\Delta x / x)^{1/\Delta x}]$$

Sustituimos *u=Δx/x* (*u→0* en vez de *Δx→0*)

$$\lim_{u \to 0} [\ln(1+u)^{1/ux}] = \lim_{u \to 0} [(1/x)\ln(1+u)^{1/u}] = \frac{1}{x} \ln[\lim_{u \to 0} (1+u)^{1/u}]$$

Apliquemos la definición esta vez a *f(x) = ln x*

$$f'(x)=\frac{d}{dx}[\ln x]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}[\ln(1+\Delta x/x)^{1/\Delta x}]$$

Sustituimos *u=Δx/x* (*u→0* en vez de *Δx→0*)

$$\lim_{u\to 0}[\ln(1+u)^{1/ux}]=\lim_{u\to 0}[(1/x)\ln(1+u)^{1/u}]=\frac{1}{x}\ln[\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}]$$

Por definición $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}$

Entonces $\frac{d}{dx}[\ln x]=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena

Regla de la cadena

Si *y=f(u)* es una función derivable de *u* y a su vez *u=g(x)* es una función derivable de *x*, entonces *y=f(g(x))* es una función derivable de *x* tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Apliquemos regla de la cadena a *y = ln e^x^* suponiendo *u=e^x^*

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{de^x}[\ln e^x] \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$$

Como vimos anteriormente $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

Por lo que $\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$

Si además $\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] = 1$

Entonces $\frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x] = 1$ y $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

Regla general de la potencia

Aplicando la regla de la cadena se puede generalizar la regla de la potencia:

Si $y=[u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos

Tablas de derivadas

- Demostradas en ejemplos:
  - $f(x) = |x|$ $f'(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$
  - $f(x) = \ln x$ $f'(x) = 1/x$ si $x>0$
  - $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$
- Algunas trigonométricas:
  - $f(x) = \text{sen } x$ $f'(x) = \cos x$
  - $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\text{sen } x$
  - $f(x) = \tan x$ $f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x$ $f'(x) = \csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x$ $f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x$ $f'(x) = -\csc x \cot x$
- Reglas y tablas completas:
  - http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Derivadas

Tabla resumen

Reglas generales de derivación			
Producto por un número	$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$		
Suma	$\frac{d}{dx}[f+g] = f' + g'$	Diferencia	$\frac{d}{dx}[f-g] = f' - g'$
Producto	$\frac{d}{dx}[fg] = f'g + fg'$	Cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas			
Regla de la constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$	Regla simple de la potencia	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \ \frac{d}{dx}[x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas			
Seno	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = cos\ x$	Coseno	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -sen\ x$
Tangente	$\frac{d}{dx}[tan\ x] = sec^2\ x$	Cotangente	$\frac{d}{dx}[cot\ x] = -csc^2\ x$
Secante	$\frac{d}{dx}[sec\ x] = sec\ x\ tan\ x$	Cosecante	$\frac{d}{dx}[csc\ x] = -csc\ x\ cot\ x$
Regla de la cadena			
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\ u'$	Regla general de la potencia	$\frac{d}{dx}[u^n] = n\ u^{n-1}\ u'$

Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$

Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$

Consideraremos $u = (x^2 + 1)$
e $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2+1)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2+1)^2$$

Ejemplo 2

¿Dónde *f'(x)* es *0* y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Ejemplo 2

¿Dónde *f'(x)* es *0* y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-(1/3)} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Ejemplo 2

¿Dónde *f'(x)* es *0* y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-(1/3)} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$f'(x)=0$ si $4x=0$, es decir, si $x=0$
$f'(x)$ no existe si $x^2-1=0$, es decir, si $x=\pm 1$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de $f(x) = sen^3 4x$

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de *f(x)* = *sen³ 4x*

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Consideraremos
$y = u^3$, $u = \text{sen}\ t$ y $t = 4x$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de *f(x) = sen³ 4x*

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Consideraremos
y = u³, *u = sen t* y *t = 4x*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = 3(\text{sen}(t))^2 \cdot (\cos(t)) \cdot t'$$

$$f'(x) = 3(\text{sen}(4x))^2 (\cos(4x))4 = 12 \cdot \text{sen}^2 4x \cdot \cos 4x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2\ sen\ x + cos\ 2x$ en el punto $(\pi,1)$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a *f(x) = 2 sen x + cos 2x* en el punto *(π,1)*

Consideraremos
y = 2*u* + *t*, *u = sen x*, *t = cos s*, y *s = 2x*

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2\cos(x) + \left(\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}\right) = 2\cos(x) + (-\mathrm{sen}(s))\cdot s'$$

$$f'(x) = 2\cos x + (-\mathrm{sen}(2x))2 = 2\cos x - 2\mathrm{sen}2x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a *f(x) = 2 sen x + cos 2x* en el punto *(π,1)*

Consideraremos
y = 2*u* + *t*, *u = sen x*, *t = cos s*, y *s = 2x*

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2\cos(x) + \left(\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}\right) = 2\cos(x) + (-\text{sen}(s))\cdot s'$$

$$f'(x) = 2\cos x + (-\text{sen}(2x))2 = 2\cos x - 2\text{sen}2x$$

Pendiente en *(π,1)* $f'(\pi) = 2\cos\pi - 2\text{sen}2\pi = -2$

Recta con pendiente *-2* que pasa por *(π,1)*

$$y = mx + b = -2x + (1 + 2\pi)$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita

Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado siempre con funciones explícitas de la forma: $y=f(x)$

No siempre es posible obtener una expresión con la y despejada a la izquierda de la igualdad, y a la derecha una expresión dependiente únicamente de x, y tanto una parte como la otra de la igualdad prodrán depender de ambas variables: $\sigma(x,y)=\tau(x,y)$

Derivación implícita

Otras veces simplemente nos interesará más la forma implícita que la explícita, como estrategia para simplificar la derivada, o entender mejor el concepto a aplicar, etc.

Podemos derivar una expresión implícita derivando ambos lados de la igualdad, pero siendo conscientes de que derivamos ambos respecto a la misma variable, *x* por lo general.

Respecto a la variable apropiada

Si derivamos respecto a *x* son correctas las expresiones:

1. $\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$

2. $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\frac{dy}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}[xy^2] = \frac{d}{dx}[x]y^2 + x\frac{d}{dx}[y^2] = 1y^2 + x\left((2y)\frac{dy}{dx}\right) = y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$

Estrategia para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto a *x*.

2. Agrupar todos los términos en que aparezca *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.

3. Sacar factor común *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación.

4. Despejar *dy/dx*

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 1)

Derivar ambos lados de la ecuación respecto de *x*

$$\frac{d}{dx}[y^3+y^2-5y-x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3]+\frac{d}{dx}[y^2]-\frac{d}{dx}[5y]-\frac{d}{dx}[x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0$$

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 2)

Agrupar todos los términos en los que aparezca *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}=2x$$

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 3)

Sacar factor común *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x$$

Paso 4)

Despejar la derivada de *y* respecto a *x*.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior

Llamamos derivada de segundo orden a la derivada de la función derivada de una dada.

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) = f''(x)$$

La derivada tercera es la derivada de la función derivada segunda.

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^3 f}{dx}(x)$$

Y así sucesivamente se da origen a las derivadas de orden superior.

Ejemplo

Obtener todas las derivadas de orden superior de $f(x)=x^5$

$$f(x)=x^5$$

$$\frac{d(x^5)}{dx}=5x^4$$

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2}=\frac{d(5x^4)}{dx}=20x^3$$

$$\frac{d^3(x^5)}{dx^3}=\frac{d^2(5x^4)}{d^2x}=\frac{d(20x^3)}{dx}=60x^2$$

$$\frac{d^4(x^5)}{dx^4}=\frac{d^3(5x^4)}{d^3x}=\frac{d^2(20x^3)}{d^2x}=\frac{d(60x^2)}{dx}=120x$$

$$\frac{d^5(x^5)}{dx^5}=\frac{d^4(5x^4)}{d^4x}=\frac{d^3(20x^3)}{d^3x}=\frac{d^2(60x^2)}{d^2x}=\frac{d(120x)}{dx}=120$$

$$\frac{d^6(x^5)}{dx^6}=\frac{d^5(5x^4)}{d^5x}=\frac{d^4(20x^3)}{d^4x}=\frac{d^3(60x^2)}{d^3x}=\frac{d^2(120x)}{d^2x}=\frac{d(120)}{dx}=0$$

Y a partir de esta todas son 0.

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Derivadas parciales de funciones de varias variables.

DERIVADAS PARCIALES

Dada una función de dos variables $z = f(x, y)$

La derivada parcial de *f* respecto de *x* $f_x^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada de *f* como función de una sola variable *x*, dejando *y* constante.

La derivada parcial de *f* respecto de *y* $f_x^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada de *f* como función de una sola variable *y*, dejando *x* constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

EJEMPLO Derivadas parciales de *f(x,y)* en *(1,1)*:

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3x + y$$

EJEMPLO Derivadas parciales de *f(x,y)* en *(1,1)*:

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4$$

Para funciones de tres variables: $f(x,y,z)$

Se definen las tres derivadas parciales:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

como las derivadas respecto de *x*, *y* ó *z* respectivamente dejando las otras dos variables constantes.

Para funciones de *n* variables: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\; f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f'_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad f'_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad f'_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e_j = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad b_{i \neq j} = 0 \quad b_j = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(x + \lambda e_j\right) - f(x)}{\lambda}$$

NOTA:

Para funciones *f(x)* de una sola variable real:

Existe derivada *f '* IMPLICA que f es continua

Para funciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ de más de dos variables reales:
La existencia de las derivadas parciales **NO IMPLICA** la continuidad de *f*.

Existen funciones de varias variables:
- continuas que no tienen derivadas parciales.
- que tienen derivadas parciales y no son continuas.
- que no son continuas ni tienen derivadas parciales.
- que son continuas y tienen derivadas parciales.

MATRIZ JACOBIANA

Dado un conjunto de s funciones $f=(f_1, f_2, \ldots f_s)$, de q variables cada una, se define la matriz Jacobiana de f (Jf) como una matriz con s filas y q columnas, tal que en la fila i, columna j, tiene el elemento:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_q} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1:

Hallar la matriz Jacobiana en el punto a = (1,1,1) de la función:

$$f(x,y,z) = e^{x+y^3+z^2}$$

EJEMPLO 1:

Hallar la matriz Jacobiana en el punto a = (1,1,1) de la función:

$$f(x,y,z) = e^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^3+z^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{x+y^3+z^2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = e^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 3e^3 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2e^3$$

$$Jf(x,y,z) \qquad 1 \times 3$$

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x+y^3+x^2} & 3y^2 e^{x+y^3+z^2} & 2ze^{x+y^3+z^2} \end{bmatrix}$$

$$Jf(1,1,1) = \begin{bmatrix} e^3 & 3e^3 & 2e^3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2:

Hallar la matriz Jacobiana en el punto (1,2) de:

$$f(x,y) = (x^2y^3, e^{x^2+y^4}, \operatorname{sen}(2\pi y))$$

$$Jf(x,y) \quad 3\times 2$$

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 2xe^{x^2+y^4} & 4ye^{x^2+y^4} \\ 0 & 2\pi\cos(2\pi y) \end{bmatrix}$$

$$Jf(1,2) = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 2e^{17} & 32e^{17} \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2:

Hallar la matriz Jacobiana en el punto (1,2) de:

$$f(x,y) = (x^2y^3, e^{x^2+y^4}, \mathrm{sen}(2\pi y))$$

DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS:

Se obtienen derivando parcialmente respecto a una variable x_i (dejando las demás fijas) y volviendo derivar a la derivada que se obtiene, derivándola parcialmente respecto a otra variable x_j o la misma variable x_i (y dejando las demás fijas).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f'_{xx} = f''_{x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f'_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f'_{yy} = f''_{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f'_{xy}$$

Las derivadas de orden superior sobre derivadas de distinta variable **se llaman derivadas “iteradas”**

EJEMPLO:

Calculad las derivadas parciales primeras y segundas de f(x,y). Verificad que las derivadas iteradas son iguales con independencia del orden en que se deriven de las variables.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO:

Calculad las derivadas parciales primeras y segundas de f(x,y). Verificad que las derivadas iteradas son iguales con independencia del orden en que se deriven de las variables.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO:

Calculad las derivadas parciales primeras y segundas de f(x,y). Verificad que las derivadas iteradas son iguales con independencia del orden en que se deriven de las variables.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO:

Calculad las derivadas parciales primeras y segundas de f(x,y). Verificad que las derivadas iteradas son iguales con independencia del orden en que se deriven de las variables.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6y+9x^4)e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO:

Calculad las derivadas parciales primeras y segundas de f(x,y). Verificad que las derivadas iteradas son iguales con independencia del orden en que se deriven de las variables.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6y+9x^4)e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Derivadas parciales de funciones de varias variables.
- Valores extremos en un intervalo

Máximo y mínimo

Sea *f* una función definida sobre un intervalo *[a,b]* que contiene a *c*:

f(c) es un **máximo** de f en *[a,b]* si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

f(c) es un **mínimo** de f en *[a,b]* si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

Se conocen por **Valores extremos**

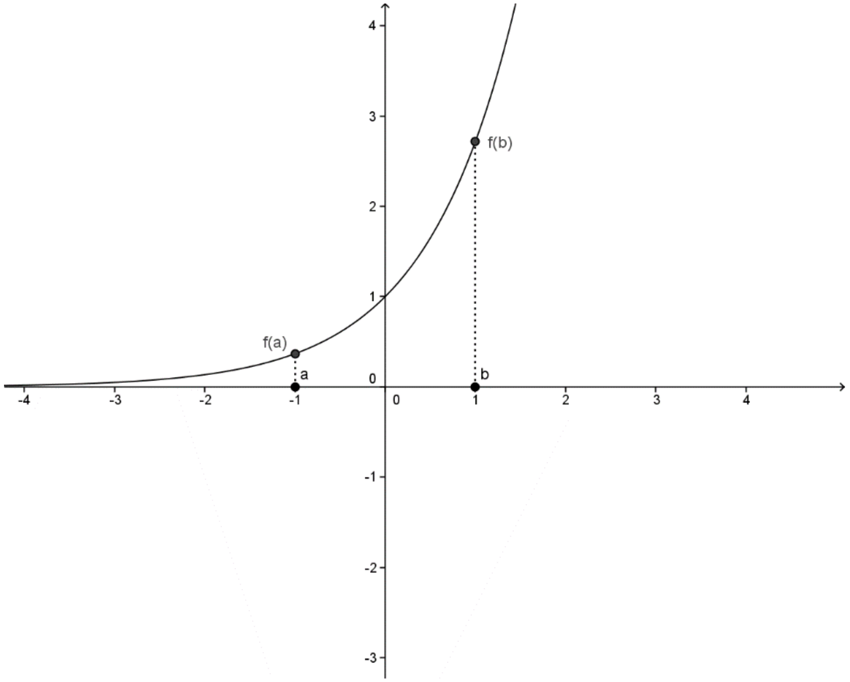
Máximo absoluto

Mínimo absoluto

Extremos terminales

En un intervalo cerrado [a,b] los valores extremos pueden coincidir en los valores terminales del intervalo:

$f(x)=e^x$ en *[-1,1]*



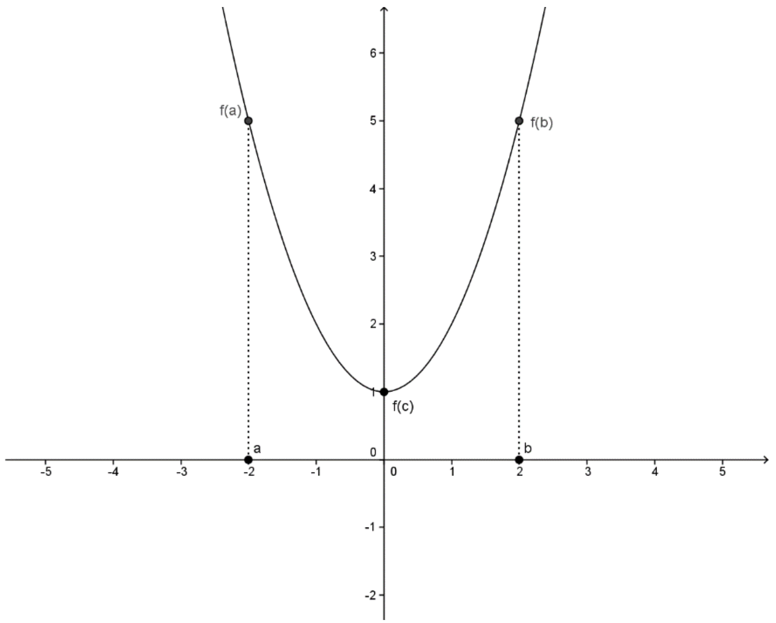
No puede ocurrir en un intervalo abierto

$f(x)=e^x$ en *(-1,1)*

Sin máximo o mínimo

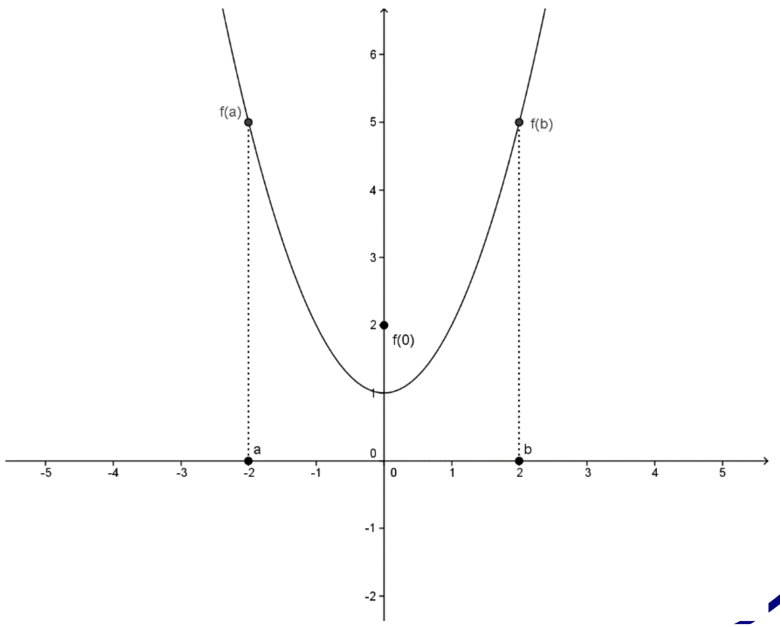
f(0) mínimo en *(-2,2)*:

$$f(x) = x^2 + 1$$



f(-2)=f(2) máximos en *[-2,2]*

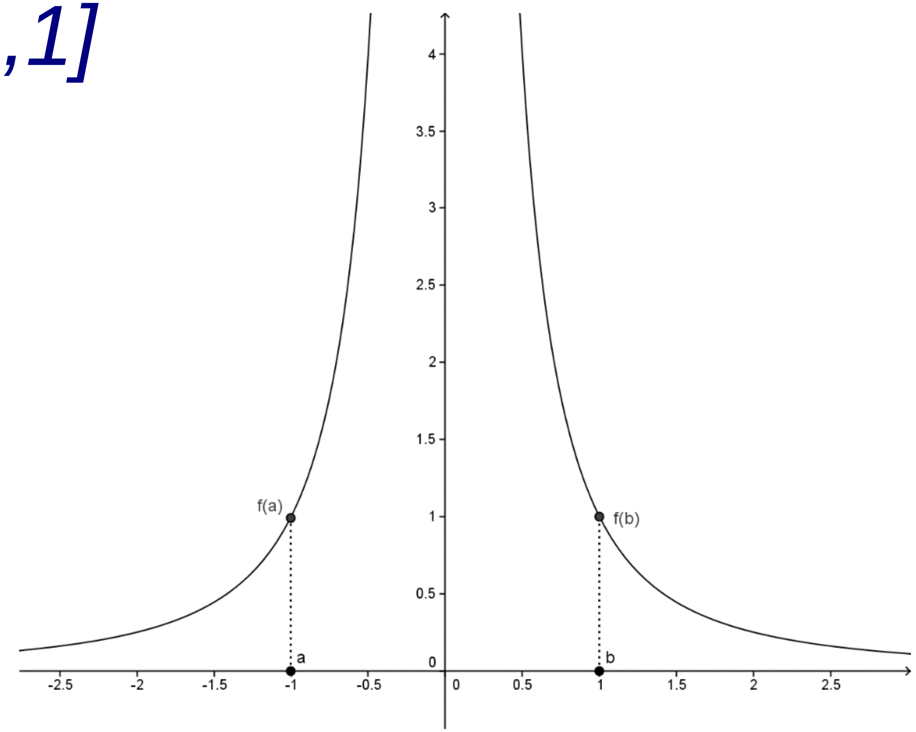
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



Falta de continuidad

Sin máximo en [-1,1]

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



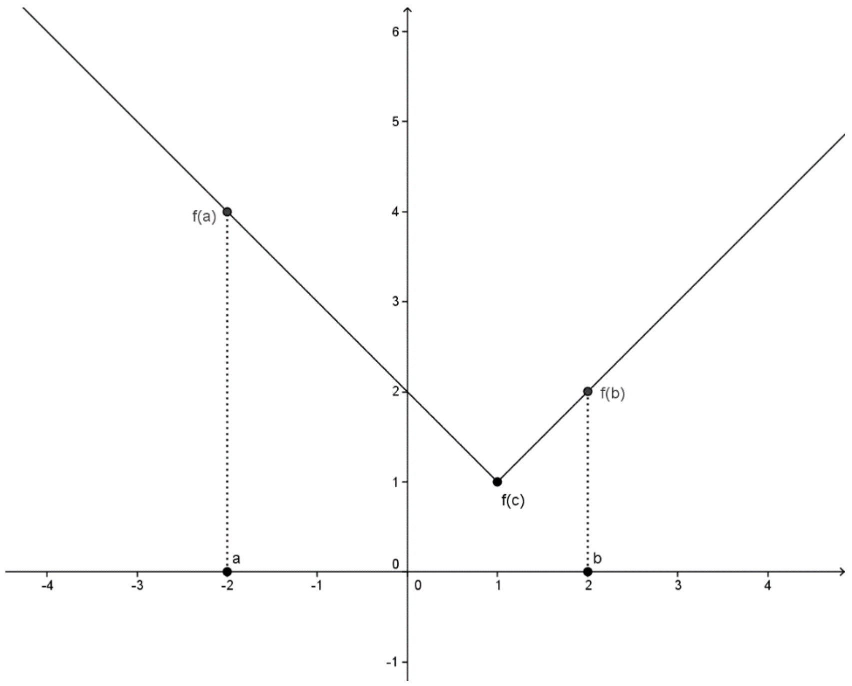
Mínimos en los puntos
terminales porque
el intervalo es cerrado

Teorema del Valor Extremo

Si *f* es continua en el intervalo cerrado *[a,b]*, entonces tiene un mínimo y un máximo en ese intervalo.

$$f(x) = |x-1| + 1$$

Máximo en el terminal *f(a)*
Y mínimo en el intermedio *f(c)*



No se exige derivabilidad

Máximos y mínimos relativos

Sea *f* una función definida sobre un intervalo abierto (a,b) que contiene a *c*:

Si *f(c)* es un máximo de *f* en *(a,b)* entonces *f(c)* es un **máximo relativo**

Si *f(c)* es un mínimo de *f* en *(a,b)* entonces *f(c)* es un **mínimo relativo**

Máximo local

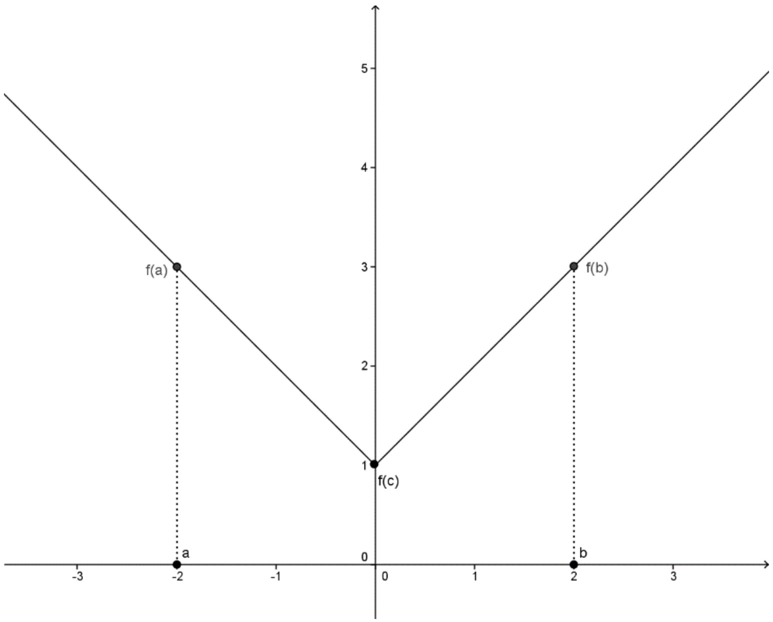
Mínimo local

Derivadas y extremos locales

Si la derivada existe es *0*:

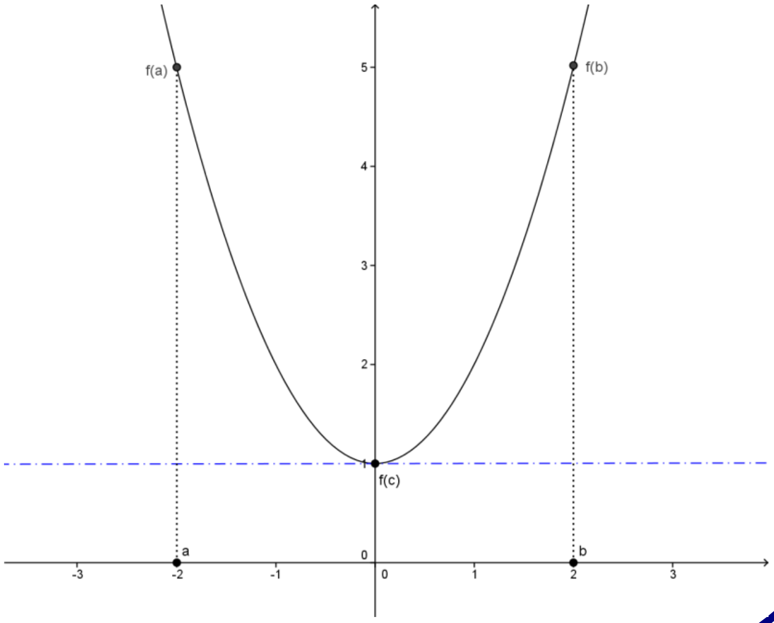
$$f(x) = |x| + 1$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$



$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$



Puntos críticos

Definición:

Sea *f* definida en *c*.
Si *f'(c)=0* o si *f* no es derivable en *c*, entonces *c* es un punto crítico de *f*.

Los extremos relativos ocurren sólo en los puntos críticos.

Teorema:

Si *f(c)* es un mínimo relativo o un máximo relativo en *(a,b)*, entonces *c* es un punto crítico de *f*.

Determinación de extremos en un intervalo cerrado [a,b]

1. Se buscan los punto críticos de f en (a,b). Usaremos la derivada.

2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a,b)

3. Se evalúa f en cada punto terminal del intervalo [a,b]: a y b.

4. El más pequeño de estos valores es el mínimo y el más grande es el máximo

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

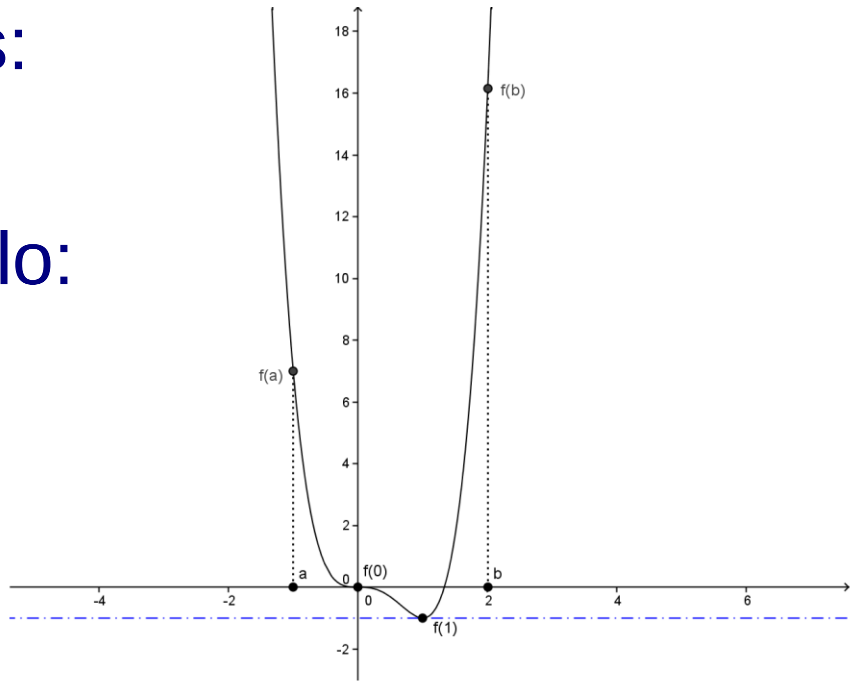
Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Valores en puntos críticos:

$f(0)=0$ y $f(1)=-1$

Y en extremos del intervalo:

$f(-1)=7$ y $f(2)=16$



Mínimo $f(1)=-1$

Máximo $f(2)=16$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x\,(x^2 - x - 2) = 12x\,(x + 1)\,(x - 2)$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x\,(x^2 - x - 2) = 12x\,(x + 1)\,(x - 2)$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Valores en críticos:

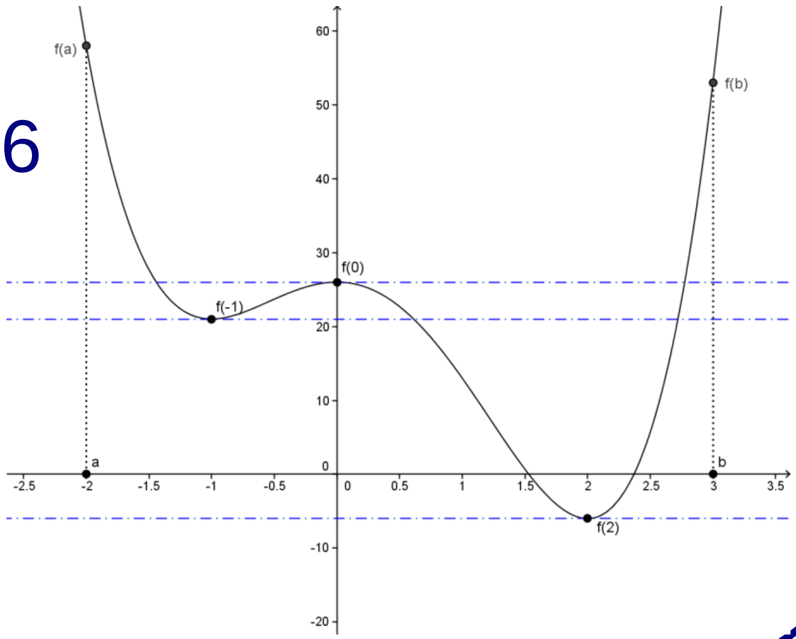
f(-1)=21 f(0)=26 y f(2)=-6

Y en terminales:

f(-2)=58 y f(3)=53

Mínimo f(2)=-6

Máximo f(-2)=58



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Derivadas parciales de funciones de varias variables.
- Valores extremos en un intervalo
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera Derivada)

Funciones crecientes y decrecientes

Una **función es creciente** sobre un intervalo si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$

Intuitivamente, pendiente positiva

Una **función es decreciente** sobre un intervalo si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$

Intuitivamente, pendiente negativa

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Teorema:

Sea *f* una función que es continua en el intervalo cerrado *[a,b]* y derivable en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces

1. Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es creciente en $[a,b]$.

2. Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es decreciente en $[a,b]$.

3. Si $f'(x)=0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es constante en $[a,b]$.

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Demostración:

Cojamos x_1 y x_2 en *[a,b]* tales que $x_1 < x_2$.

f es continua en *[a,b]* y derivable en *(a,b)*

Aplicamos Valor Medio*:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si $f'(c)>0$ y $x_2-x_1>0$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

Igualmente con signo contrario y obvio para 0

(*) El Teorema del Valor Medio se verá más adelante.

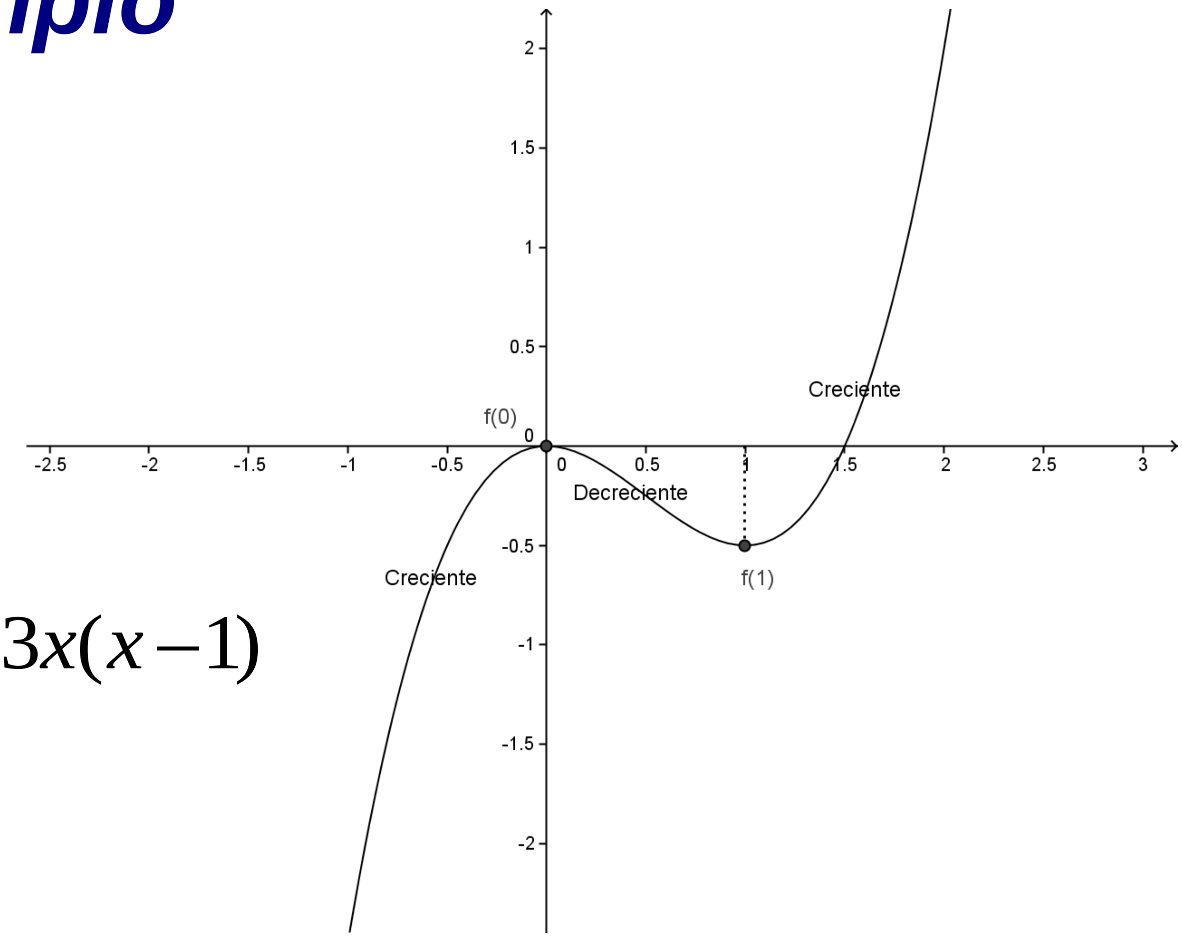
Estrategia

1. Localizar puntos críticos de f y utilizarlos para delimitar intervalos
2. Determinar el signo de f’ en cada intervalo
3. Aplicar el criterio para concluir si la función es creciente o decreciente

Ejemplo

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) = 6 > 0$	Creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$	Decreciente
$1 < x < \infty$	$x = 2$	$f'(2) = 6 > 0$	Creciente

Criterio de la primera derivada

Teorema:

Sea *c* un punto crítico de una función f continua en *(a,b)*, y derivable al menos los *x≠c*, entonces

1. Si *f'(x)* cambia de negativa a positiva en *c*, entonces *f* tiene un mínimo relativo en *f(c)*.

2. Si *f'(x)* cambia de positiva a negativa en *c*, entonces *f* tiene un máximo relativo en *f(c)*.

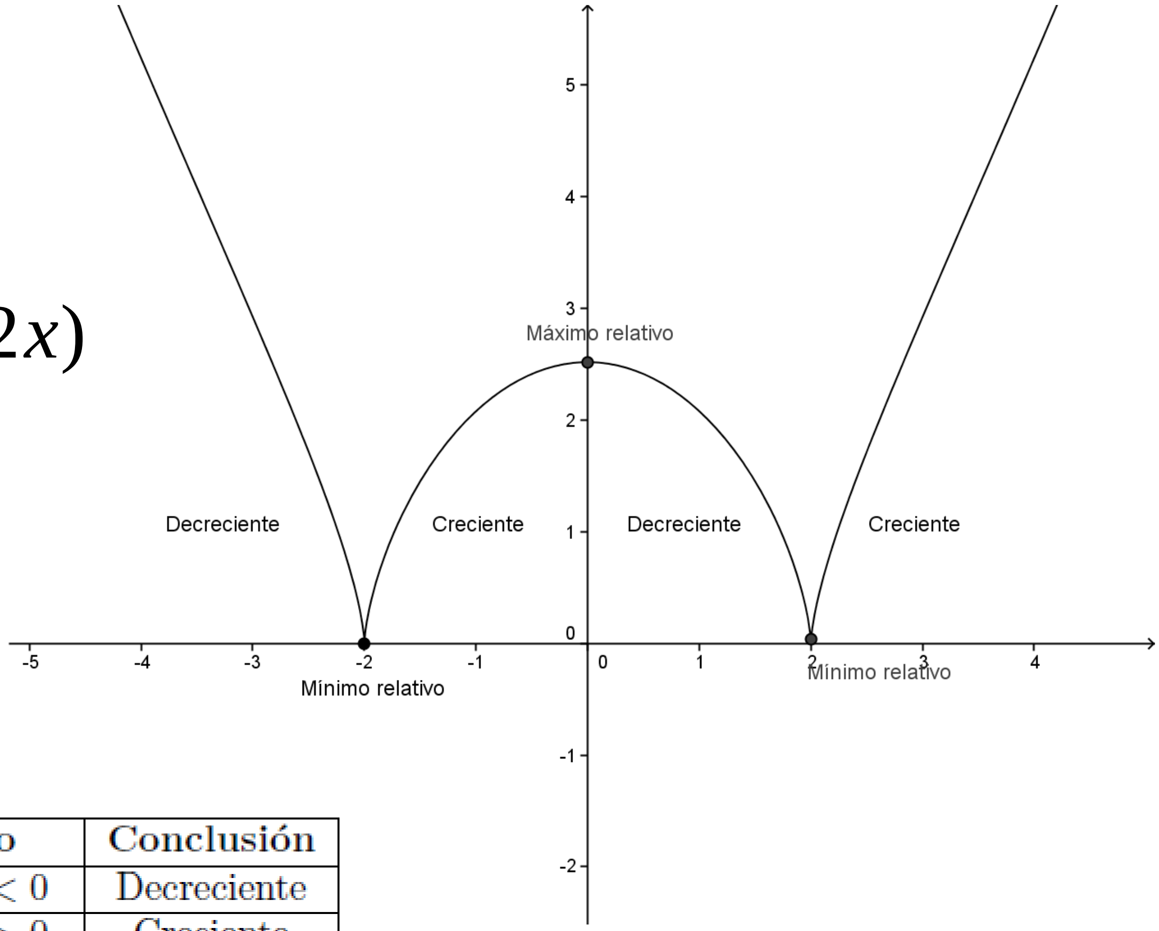
3. Si *f'(x)* es positiva en ambos lados de *c* o negativa en ambos lados de *c*, entonces *f(c)* no es ni mínimo ni máximo.

Ejemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$f'(-3) < 0$	Decreciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) > 0$	Creciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$f'(1) < 0$	Decreciente
$2 < x < \infty$	$x = 3$	$f'(3) > 0$	Creciente

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Derivadas parciales de funciones de varias variables.
- Valores extremos en un intervalo
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera Derivada)
- Concavidad (Segunda derivada)

Concavidad

Sea *f* derivable en un intervalo *(a,b)*.

Su gráfica es **cóncava hacia arriba** sobre el intervalo si *f'* es creciente en *(a,b)*

y **cóncava hacia abajo** si *f'* es decreciente en ese intervalo.

Quiere decir:

Cóncava hacia arriba (**convexa**) si la gráfica yace sobre todas sus tangentes.

Cóncava hacia abajo (sólo **cóncava**) si la gráfica subyace bajo todas sus tangentes.

Criterio de concavidad

Teorema:

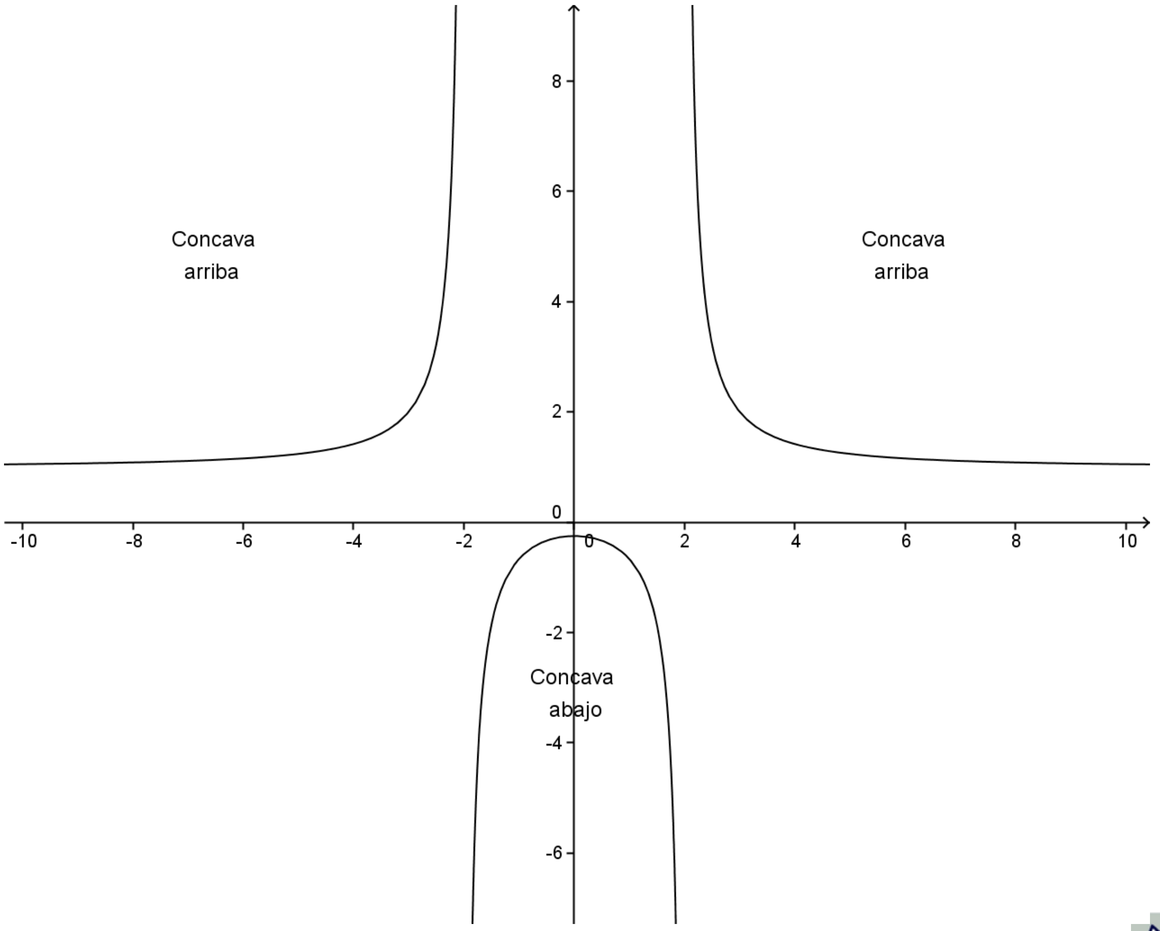
Sea f una función cuya segunda derivada existe en el intervalo abierto (a,b), entonces

1. Si $f''(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a,b).

2. Si $f''(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a,b).

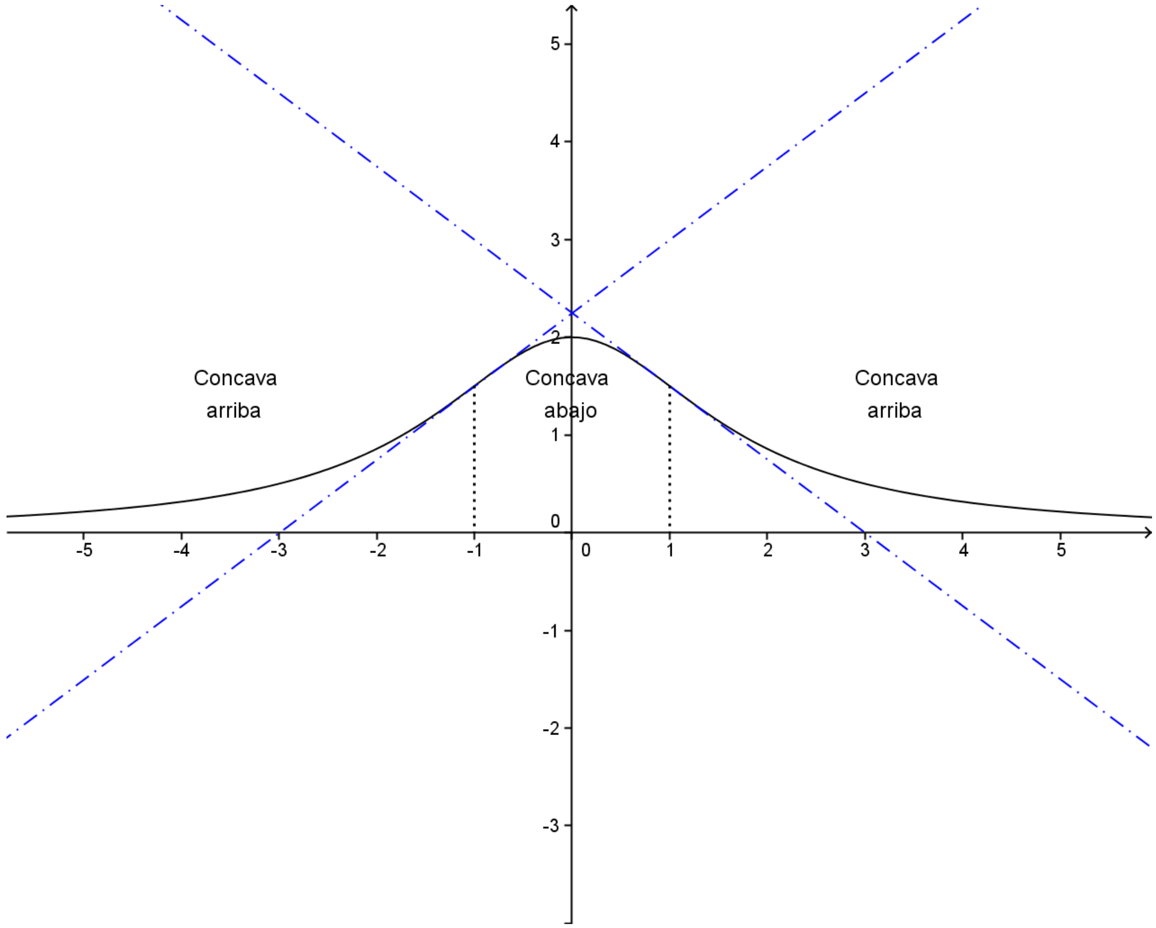
Ejemplo 1

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad f'(x)=\frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad f''(x)=\frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$



Ejemplo 2

$$f(x)=\frac{6}{x^2+3}\qquad f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}\qquad f''(x)=\frac{36(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2+3)^4}$$



Punto de inflexión

Sea *f* una función que es continua en un intervalo *(a,b)* y sea *c* un punto en ese intervalo.

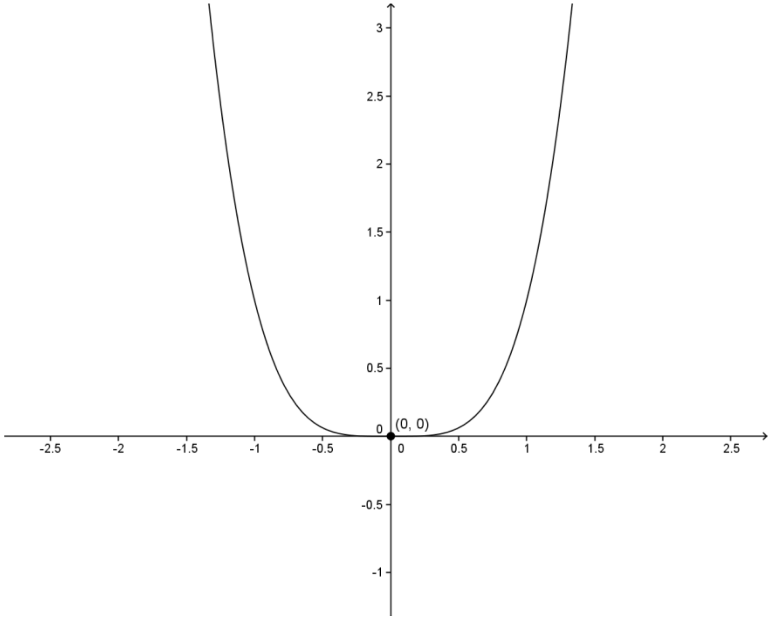
Si la gráfica de *f* tiene una recta tangente en este punto *(c,f(c))*, entonces este punto es un **punto de inflexión de la gráfica** de *f* si la concavidad de *f* cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en ese punto.

Punto de inflexión

Teorema:

Si *(c,f(c))* es un punto de inflexión de la gráfica de *f*, entonces $f''(c)=0$ o $f''(c)$ no existe en $x = c$

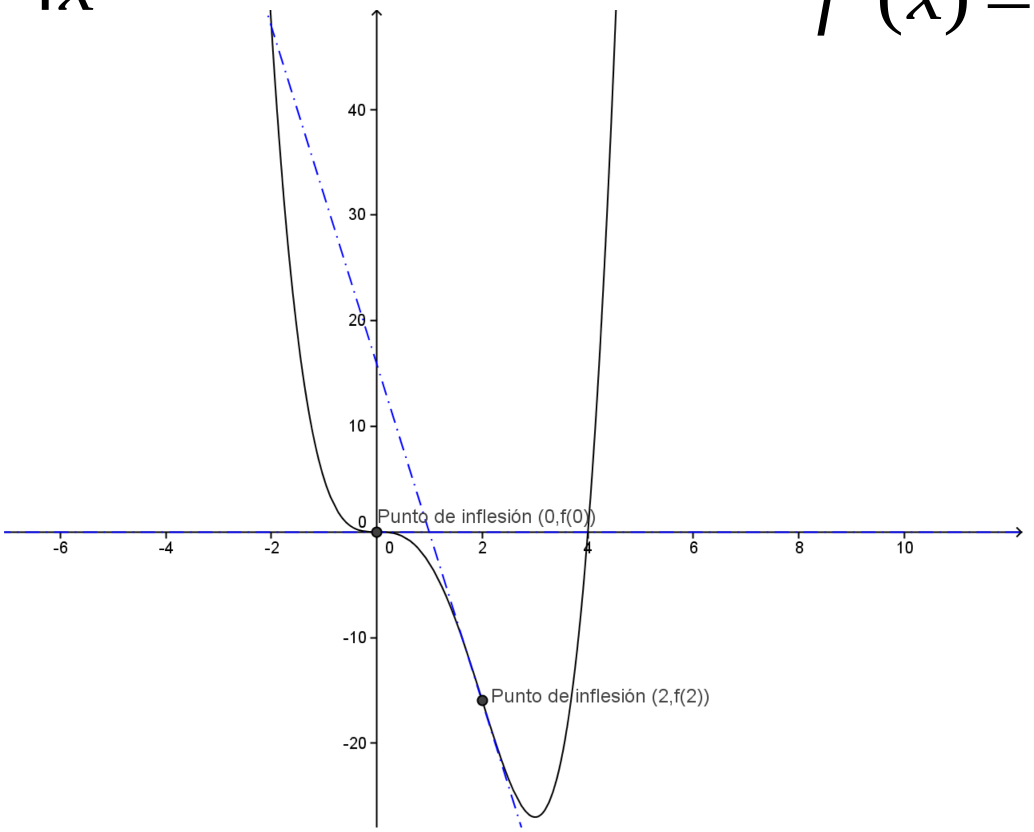
Lo contrario no es cierto:
Contra ejemplo $f(x)=x^4$



Ejemplo

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$



$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Criterio de la segunda derivada

Teorema:

Sea f una función tal que $f'(c)=0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo (a,b) que contiene a c, entonces

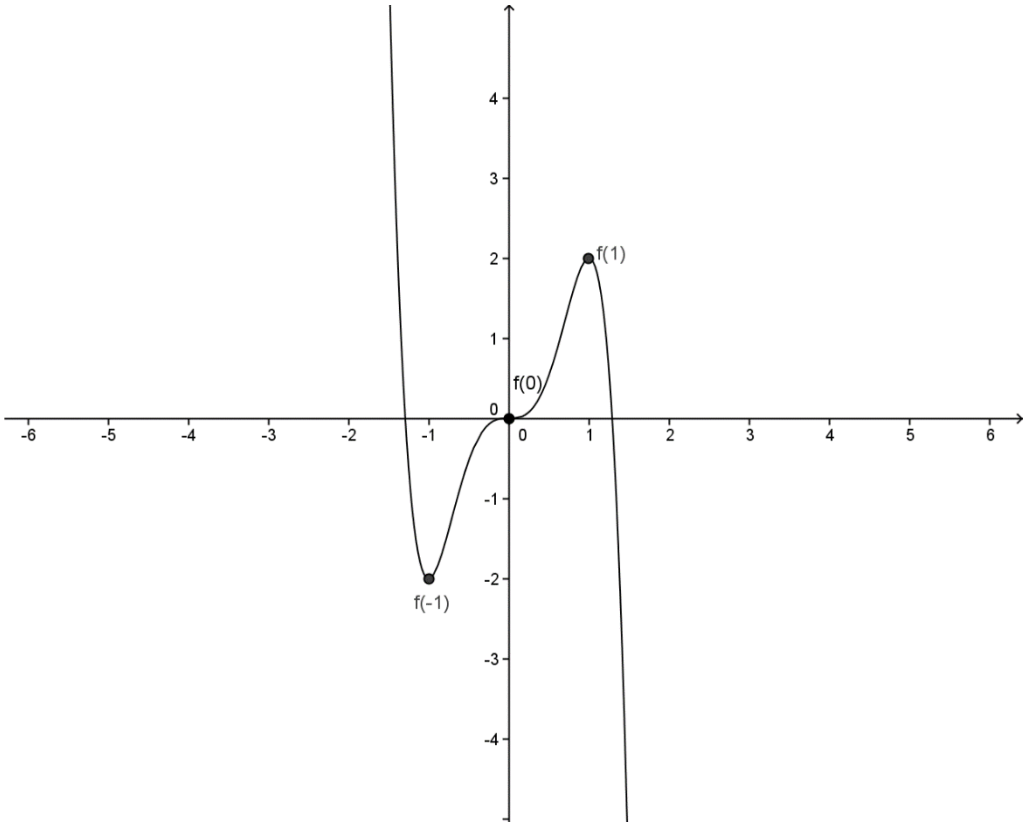
1. Si $f''(x)>0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

2. Si $f''(x)<0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

3. Si $f''(x)=0$, $f(c)$ puede o no ser un valor extremo. Se dice entonces que el criterio de la segunda derivada falla y sólo es aplicable el de la primera derivada.

Ejemplo

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3 \qquad f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$



$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$$