Integración y aplicaciones (II)

Tema 3

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias

Integrales impropias

De primera especie:

Si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe para todo b≥a

y existe $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ entonces la integral

impropia que se denota $\int_a^\infty f(x)dx$ se dice

que converge, y de lo contrario, que diverge.

Ídem para el $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

Integrales impropias

De segunda especie:

Si el integrando de una integral definida no esta definido en algún punto *c* del intervalo de integración *[a,b],* entonces se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge si lo hacen $\lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)dx$ y $\lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)dx$ y si no la integral impropia diverge.

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right] = 1$$

Converge

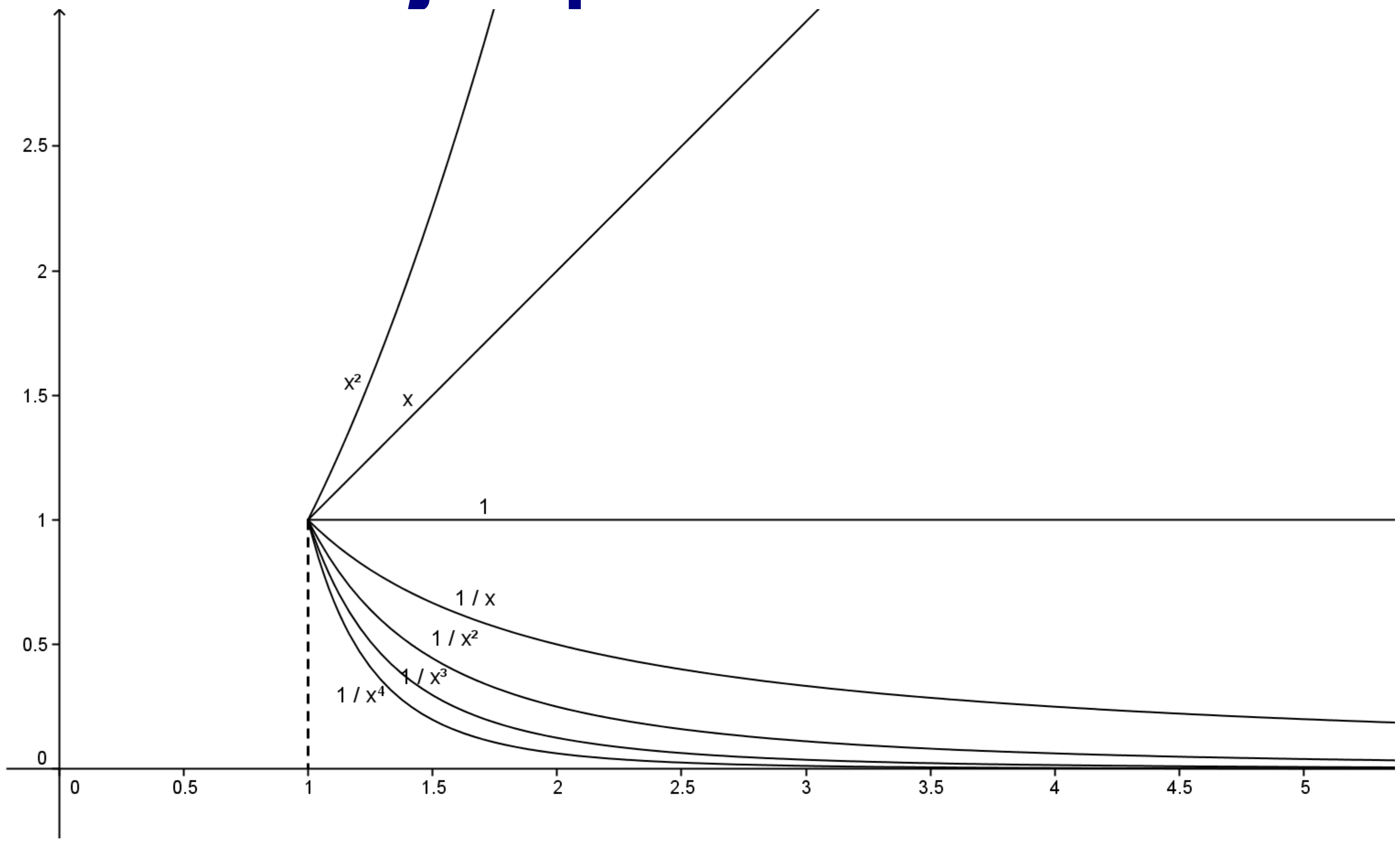
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(b)\right] = \infty$$

Diverge

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$



$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$$

Diverge si n≤1
y converge para n>1 a $\frac{1}{n-1}$

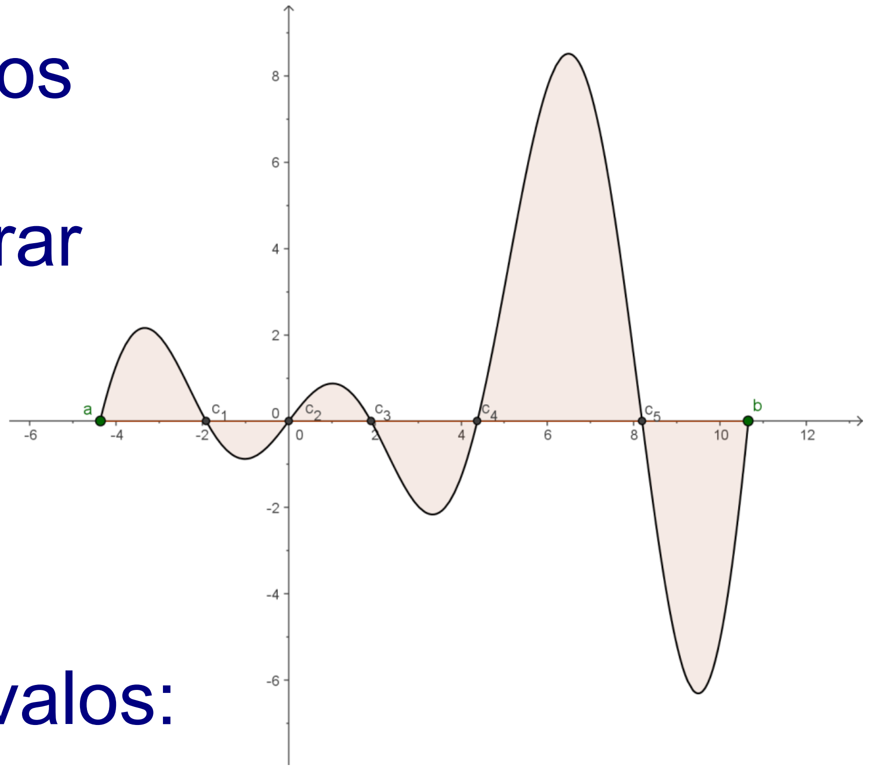
Integración y aplicaciones

- El problema del área (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias
- Aplicaciones en áreas, longitudes y volúmenes de revolución

Áreas

Áreas comprendidas en la curva y el eje *x*:

Se deben buscar los puntos de corte de la función con el eje *x* para integrar por intervalos:
$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$



Se suman las partes en valor absoluto de la integral por intervalos:

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$$

Ejemplo

Área comprendida entre x^4-$5x^2$+4 y el eje x en $[-2,2]$

Ejemplo

Área comprendida entre *x^4-5x^2+4* y el eje *x* en *[-2,2]*

$$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4$$

$$(x^2)=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$x=\begin{matrix}\pm\sqrt{4}=\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}\\ \pm\sqrt{1}=\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\end{matrix}$$

Al ser función par:

$$A=2\left(\left|\int_0^1(x^4-5x^2+4)dx\right|+\left|\int_1^2(x^4-5x^2+4)dx\right|\right)=$$

$$=2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_1^2\right|\right)=$$

Ejemplo

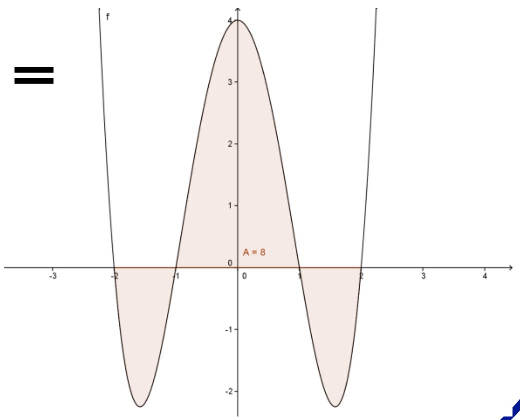
Área comprendida entre x^4-$5x^2$+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$A = 2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_1^2\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_0^1\right| + \left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_1^2\right|\right)$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|38 - 0\right| + \left|\left[96 - 200 + 120\right] - 38\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}(38 + |16 - 38|) = \frac{2 \cdot 60}{15} = 8$$

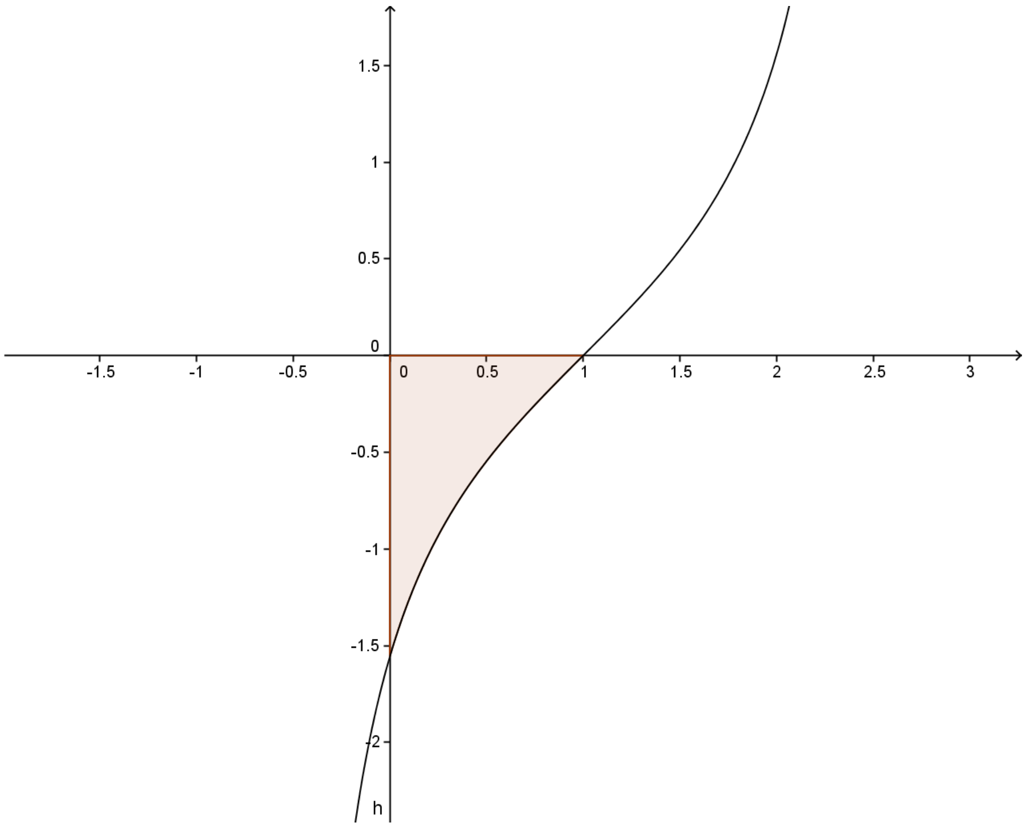


Áreas

Área comprendida entre la curva y los dos ejes:

Se busca b más próximo a *0* tal que *f(b)=0* y:

$$A = \left| \int_0^b f(x)dx \right|$$



Ejemplo

Área comprendida entre $f(x)=\tan(x-1)$ y ambos ejes

Ejemplo

Área comprendida entre *f(x)=tan(x-1)* y ambos ejes

$$\tan(x-1)=0$$

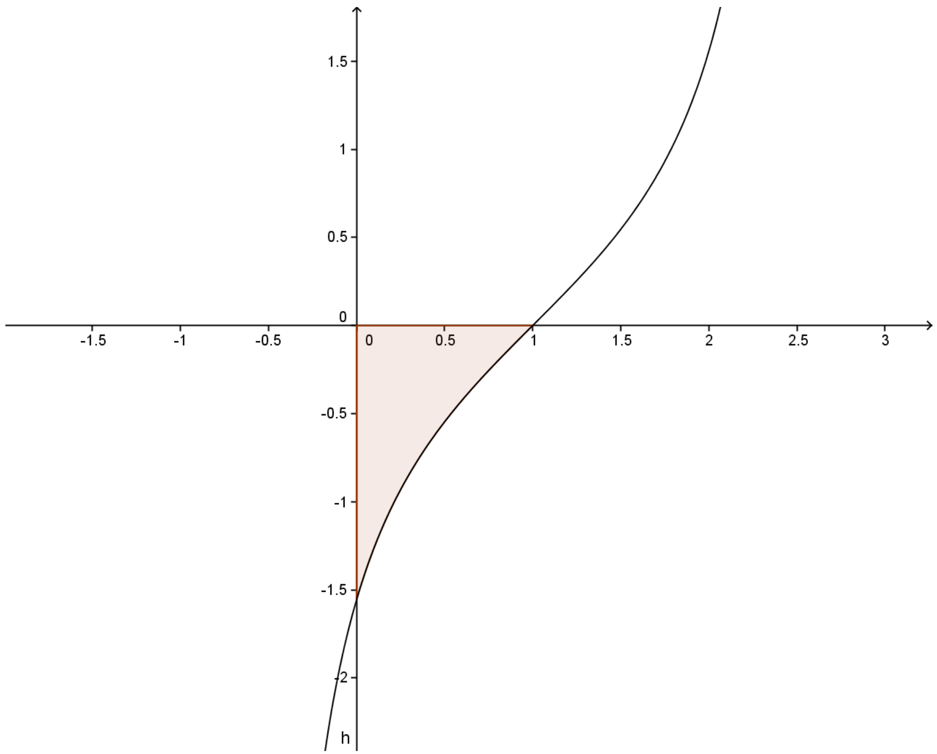
Corte con el eje *y* en *x=1*

$$A=\left|\int_0^1 \tan(x-1)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[-\ln(\cos(x-1))\right]_0^1\right|$$

$$=\left|\left[0+\ln(\cos(-1))\right]\right|$$

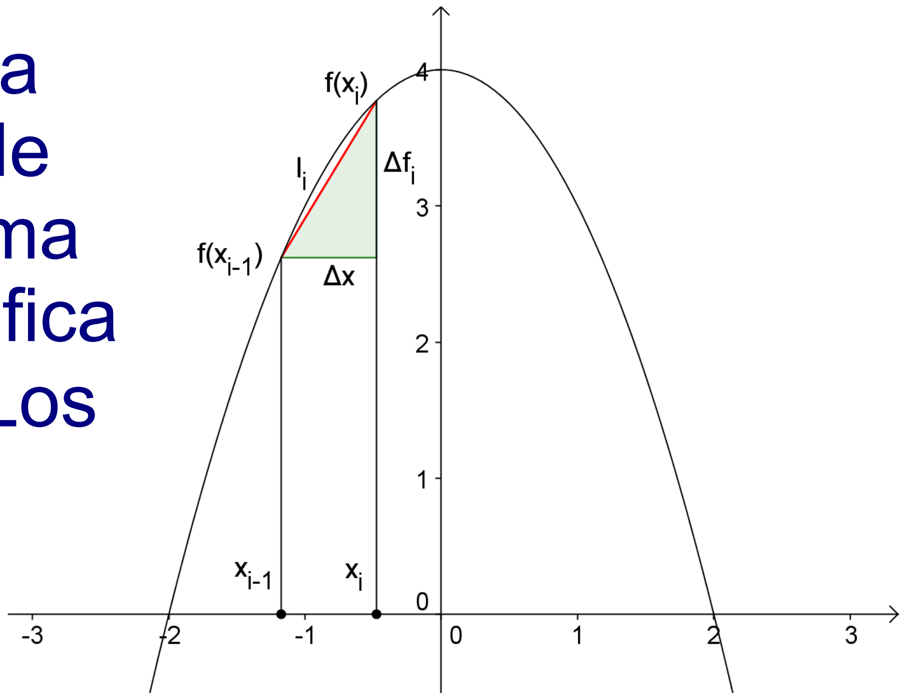
$$=-\ln(\cos(1))$$



Longitud de una gráfica

Dividimos el intervalo *[a,b]* en *n* subintervalos donde *f(x)* es continua y de igual longitud $\Delta x=(b-a)/n$

En cada subintervalo, una hipotenusa l_i que va de $f(x_{i-1})$ a $f(x_i)$ se aproxima a la longitud de la gráfica en ese subintervalo. Los catetos son Δx y $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$



$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^2} = \sqrt{\Delta x^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

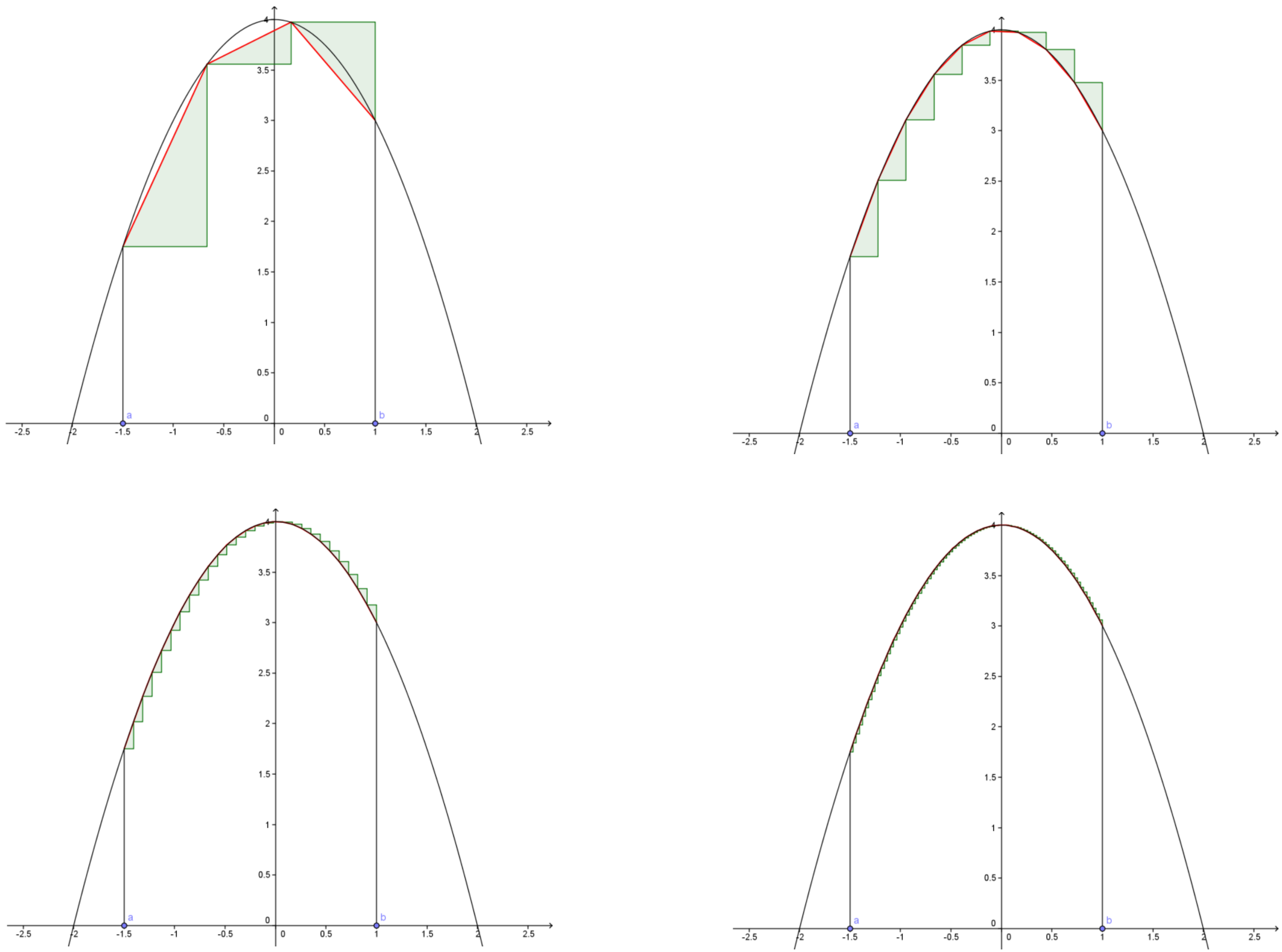
Longitud de una gráfica

$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{\Delta f_i^2 \cdot \Delta x^2}{\Delta x^2}} =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 (1 + \frac{\Delta f_i^2}{\Delta x^2})} = \sqrt{(1 + \frac{\Delta f_i^2}{\Delta x^2})}\Delta x =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Longitud de una gráfica



Longitud de una gráfica

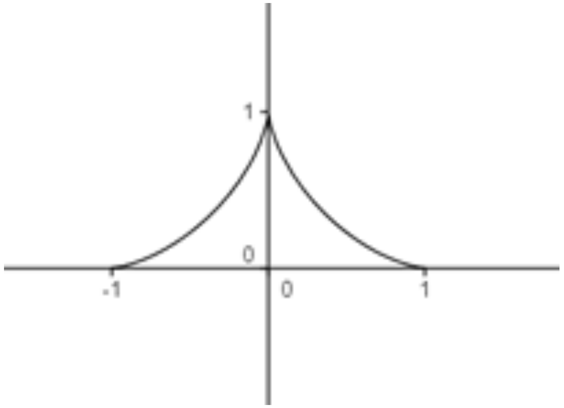
$$L = \sum_{n\to\infty} l_i = \sum_{n\to\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \right)^2} \Delta x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \right)^2} dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

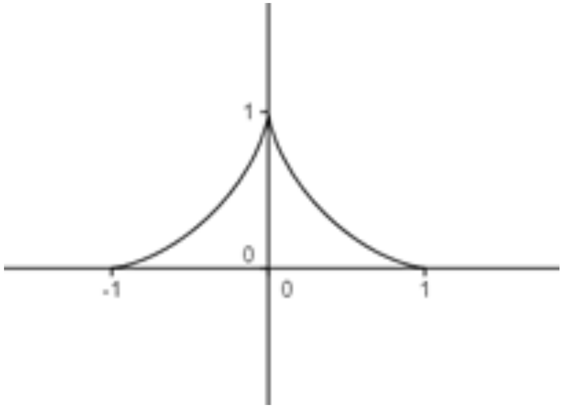
Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



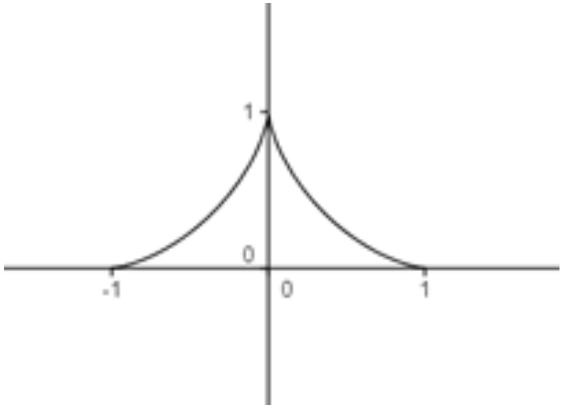
Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$



Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

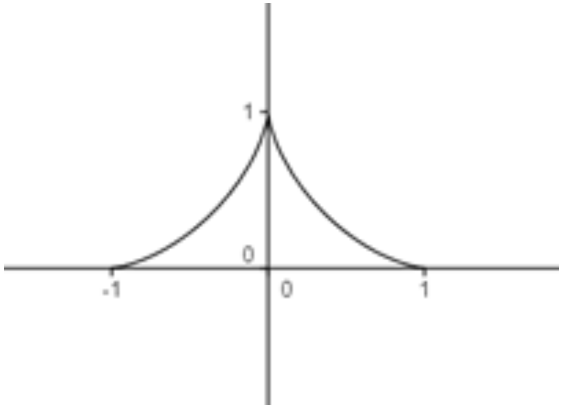
$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3}$$

$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$

Ejemplo

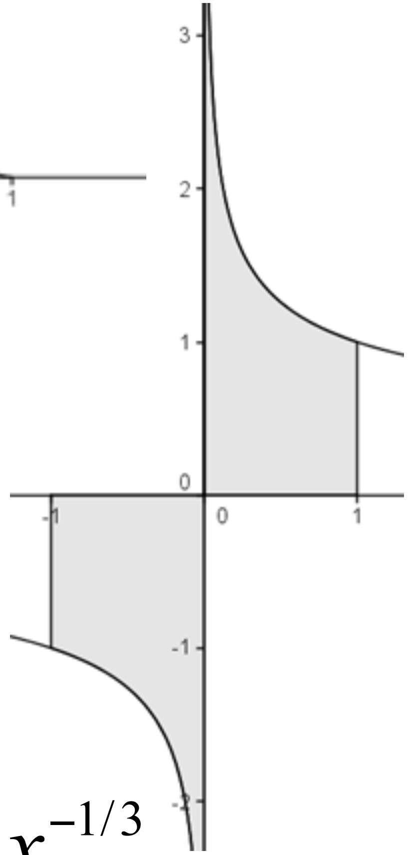
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$

Longitud
de -1 a 1 $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$



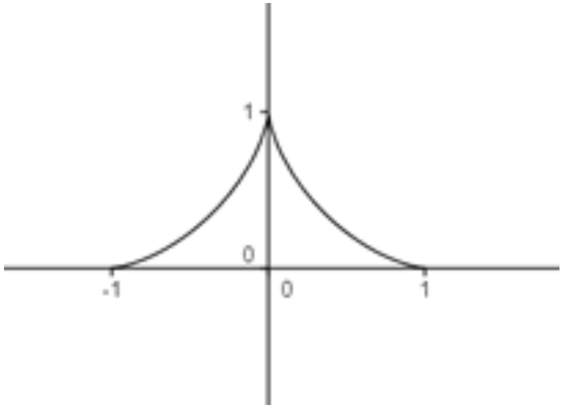
Ojo con el integrando y qué
signos dan los intervalos

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x^{-2/3} - 1} = \sqrt{x^{-2/3}} = x^{-1/3}$$

Ejemplo

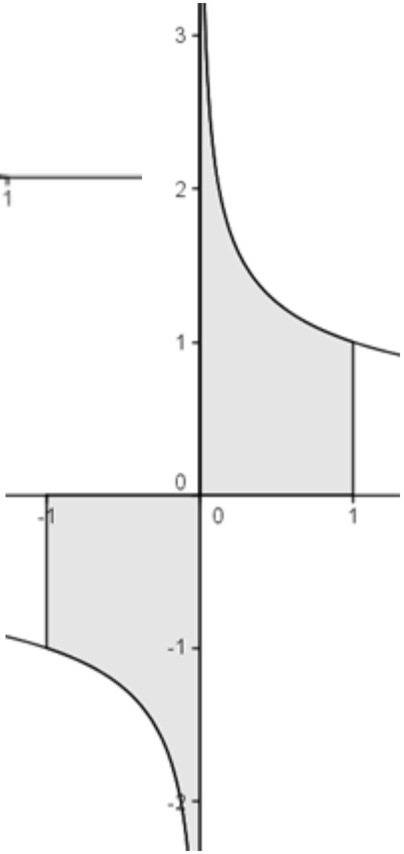
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$

Longitud de -1 a 1

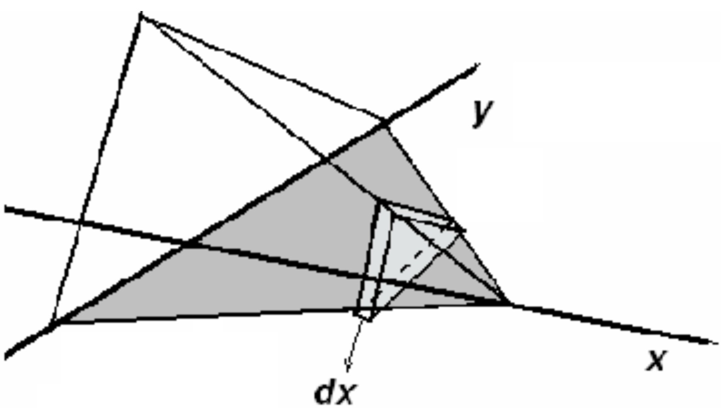


$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\int_0^1 x^{-1/3} =$$

$$= 2\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_0^1 = 3x^{2/3}\Big]_0^1 = 3 - 0 = 3$$

Volumen por secciones planas

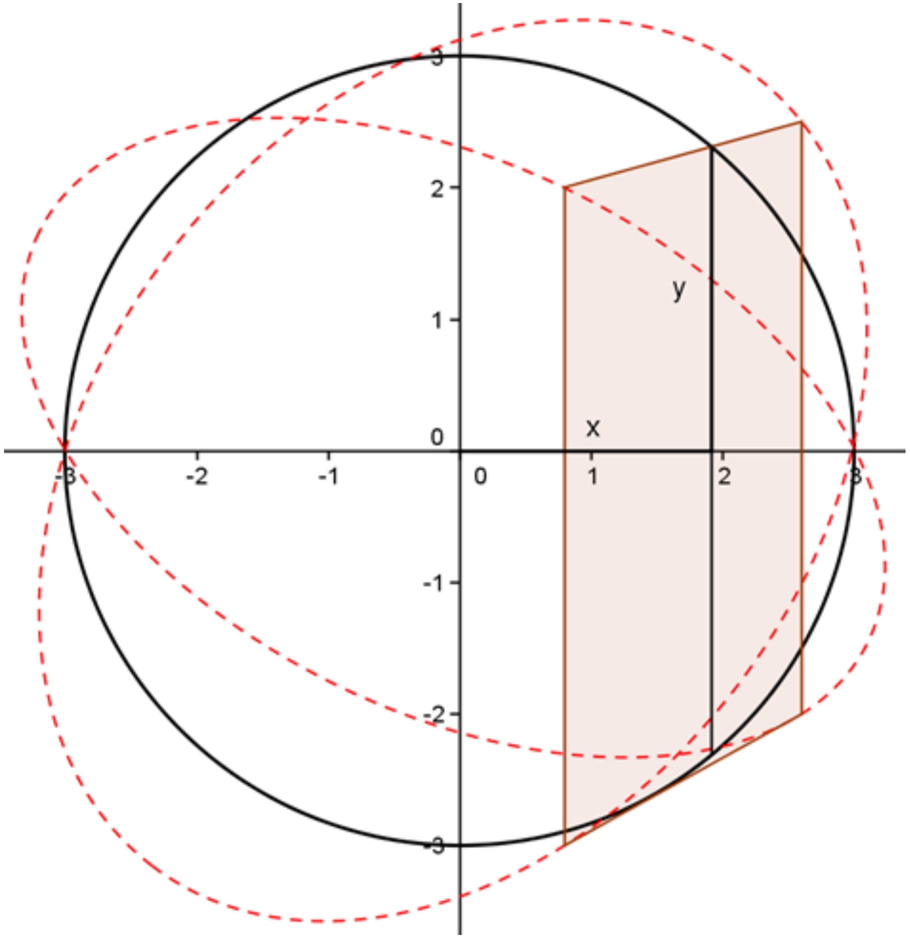
El volumen de un sólido que se extiende de *x=a* a *x=b* (intervalo *[a,b]*) y cuya área de la sección en un punto *x* venga dada por una función *A(x)* se calcula con la integral:



$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje *x* son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por *x* en una circunferencia de radio *3* y centro en el origen de coordenadas.



Ejemplo

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje x son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por x en una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas.

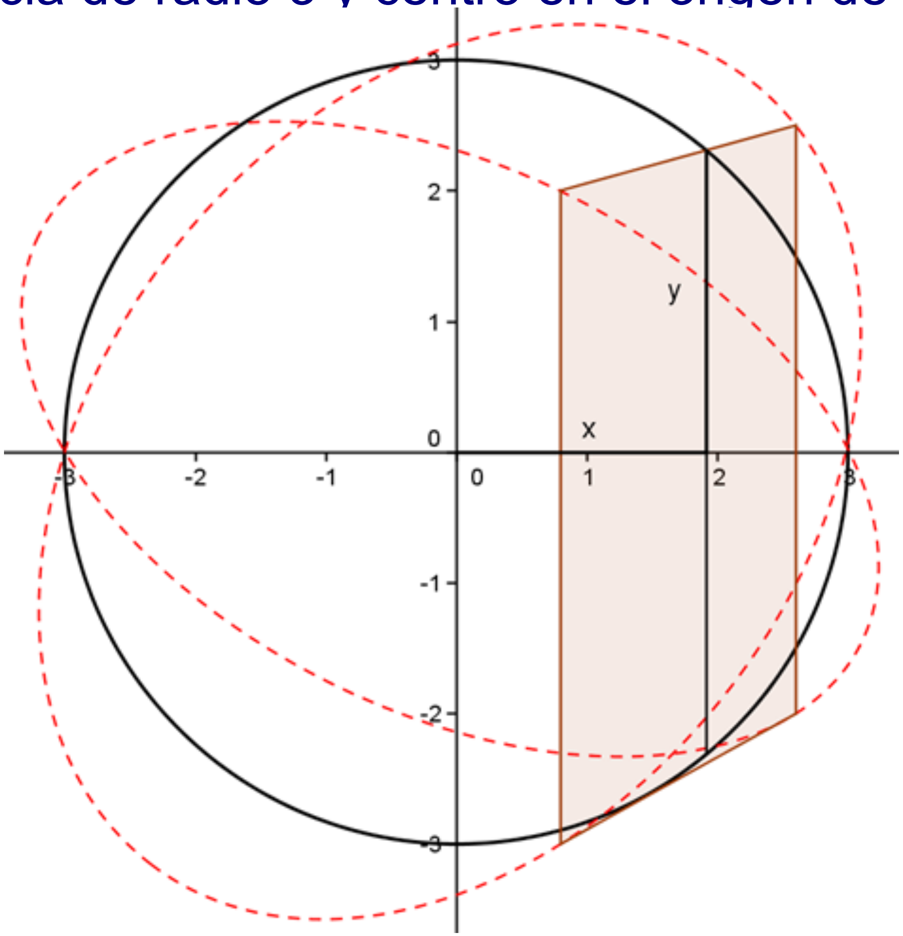
$$y^2 + x^2 = 3^2$$

$$A(x) = (2y)^2 = 4(9 - x^2)$$

$$V = 2\int_0^3 A(x)dx =$$

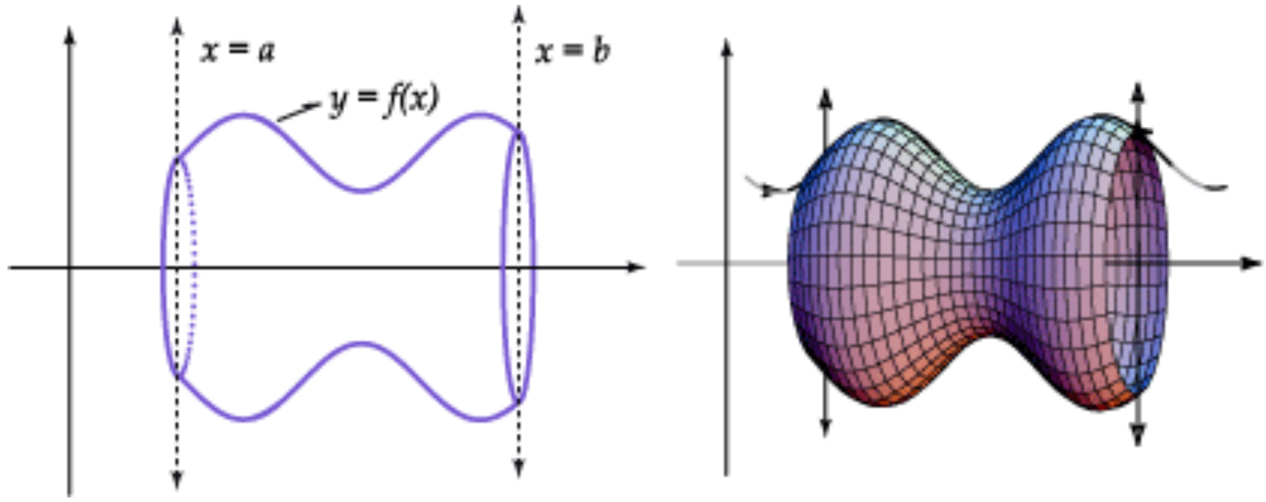
$$= 8\int_0^3 (9 - x^2)dx =$$

$$= 8\left.\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^3 = 144$$



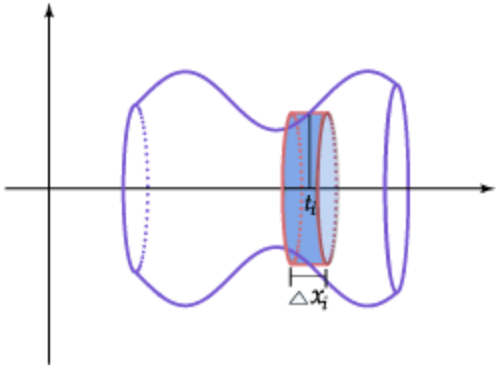
Volumen de revolución

El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a,b]$



Volumen de revolución

Se subdivide *[a,b]* en *n* intervalos donde *f(x)* es continua y con ancho *Δx=(b-a)/n*.



f(x) es el radio de la base del disco e *Δx* su altura. El volumen de cada disco será:

$$v_i = (\pi \cdot f(x_i)^2) \cdot \Delta x$$

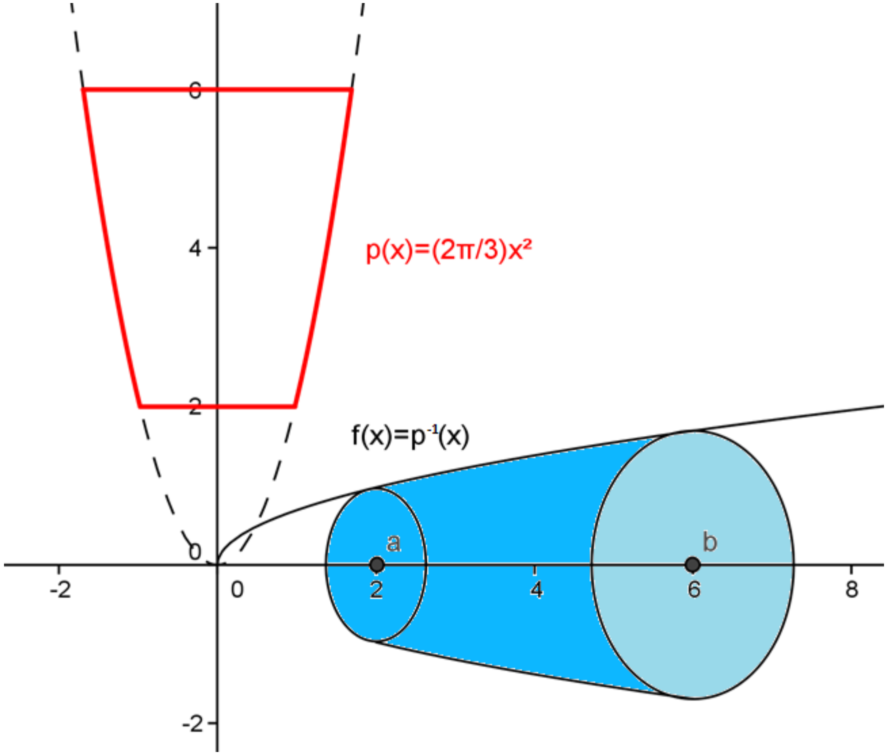
Volumen de revolución

La suma de los volúmenes de los discos se se aproximará al volumen de la figura cuando $n \to \infty$. El volumen de la figura de revolución es entonces la integral:

$$V = \sum_{n \to \infty} \left(\pi \cdot f(x_i)^2 \Delta x\right) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Ejemplo

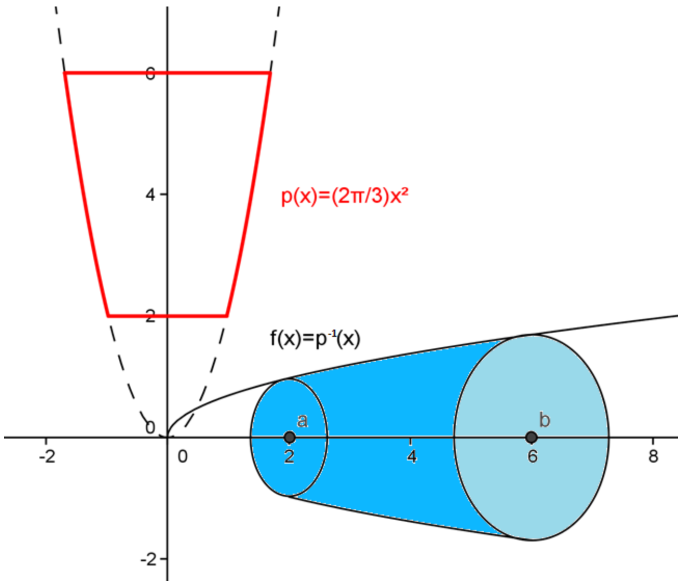
Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio $P(x)=(2\pi/3)x^2$ y las rectas $y=2$ e $y=6$:



Ejemplo

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio *P(x)=(2π/3)x²* y las rectas *y*=2 e *y=6*:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2\pi}}$$



$$V = \pi \int_2^6 f(x)^2 dx = \pi \int_2^6 \frac{3x}{2\pi} dx =$$

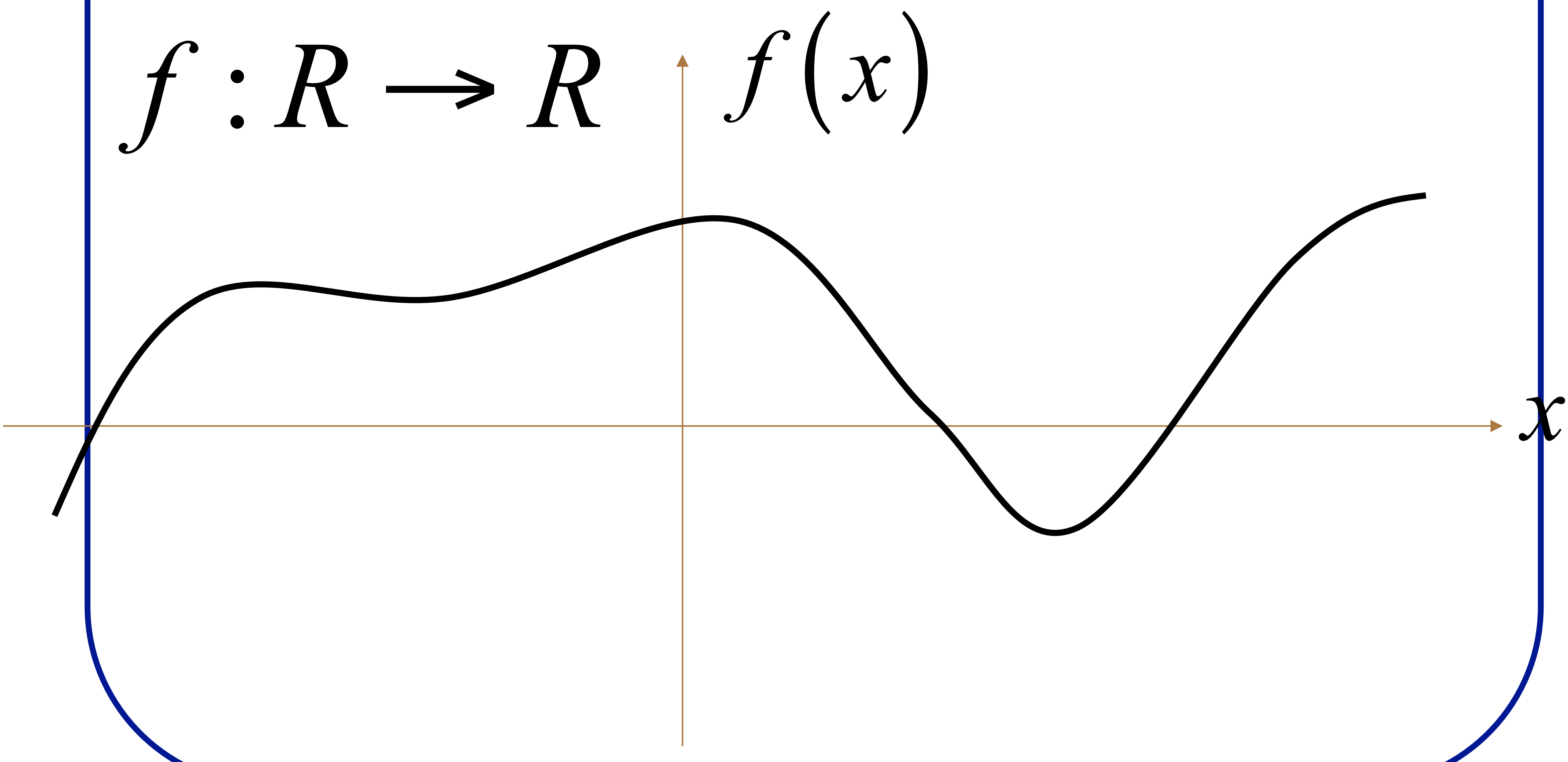
$$\int_2^6 \frac{3x}{2} dx = \left.\frac{3x^2}{4}\right]_2^6 = \frac{108}{4} - \frac{12}{4} = 24$$

Integración y aplicaciones

- El problema del área (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias
- Aplicaciones en áreas, longitudes y volúmenes de revolución
- Integrales múltiples

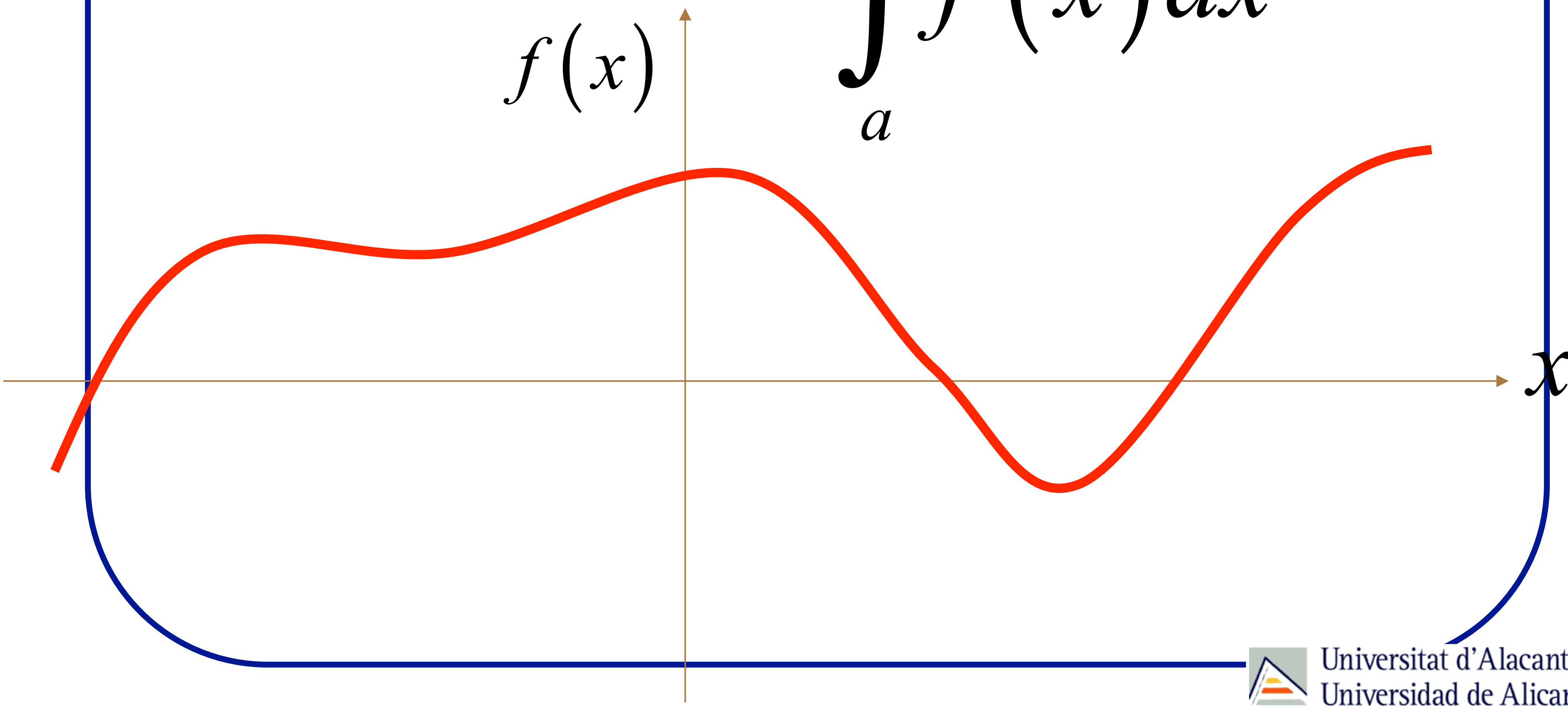
Integrales dobles

$$f : R \rightarrow R$$



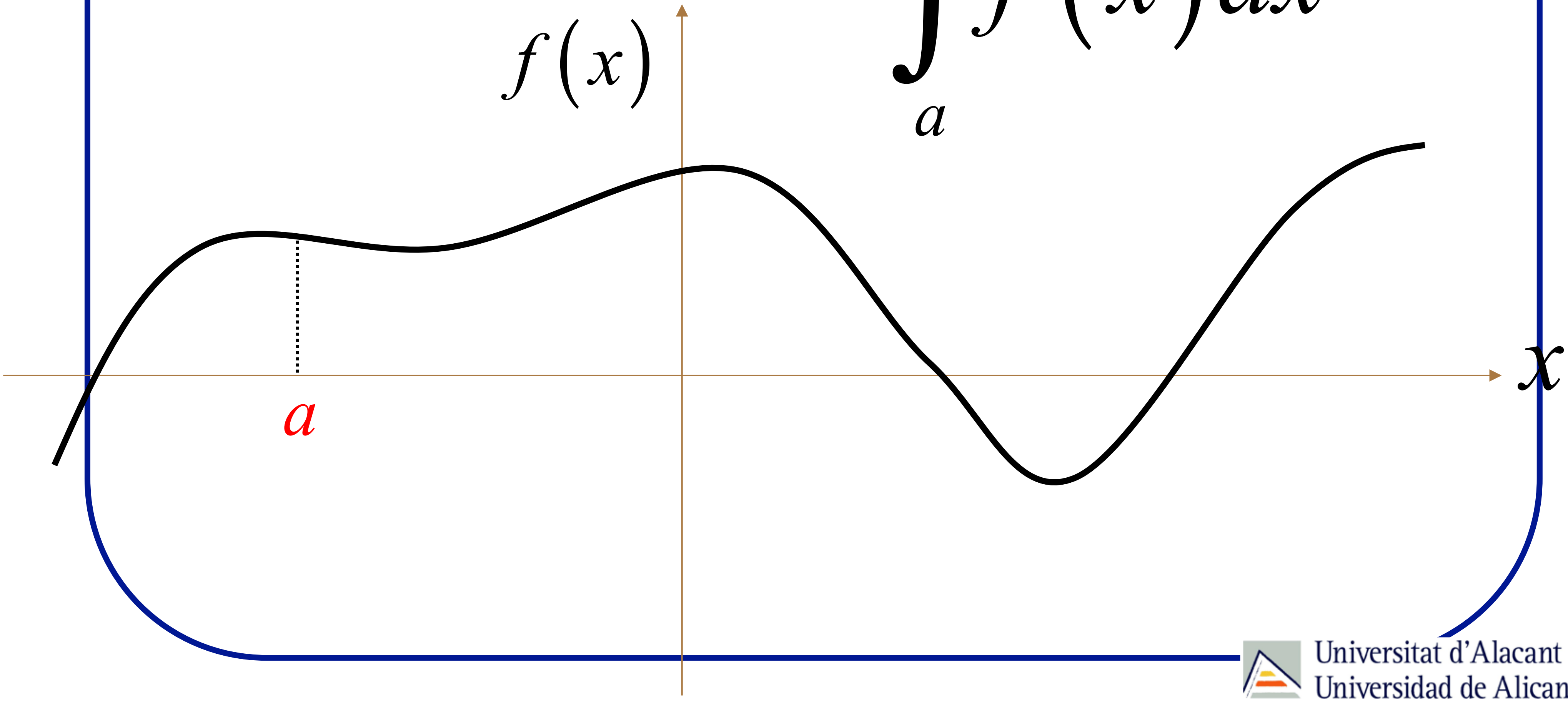
Integrales dobles

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



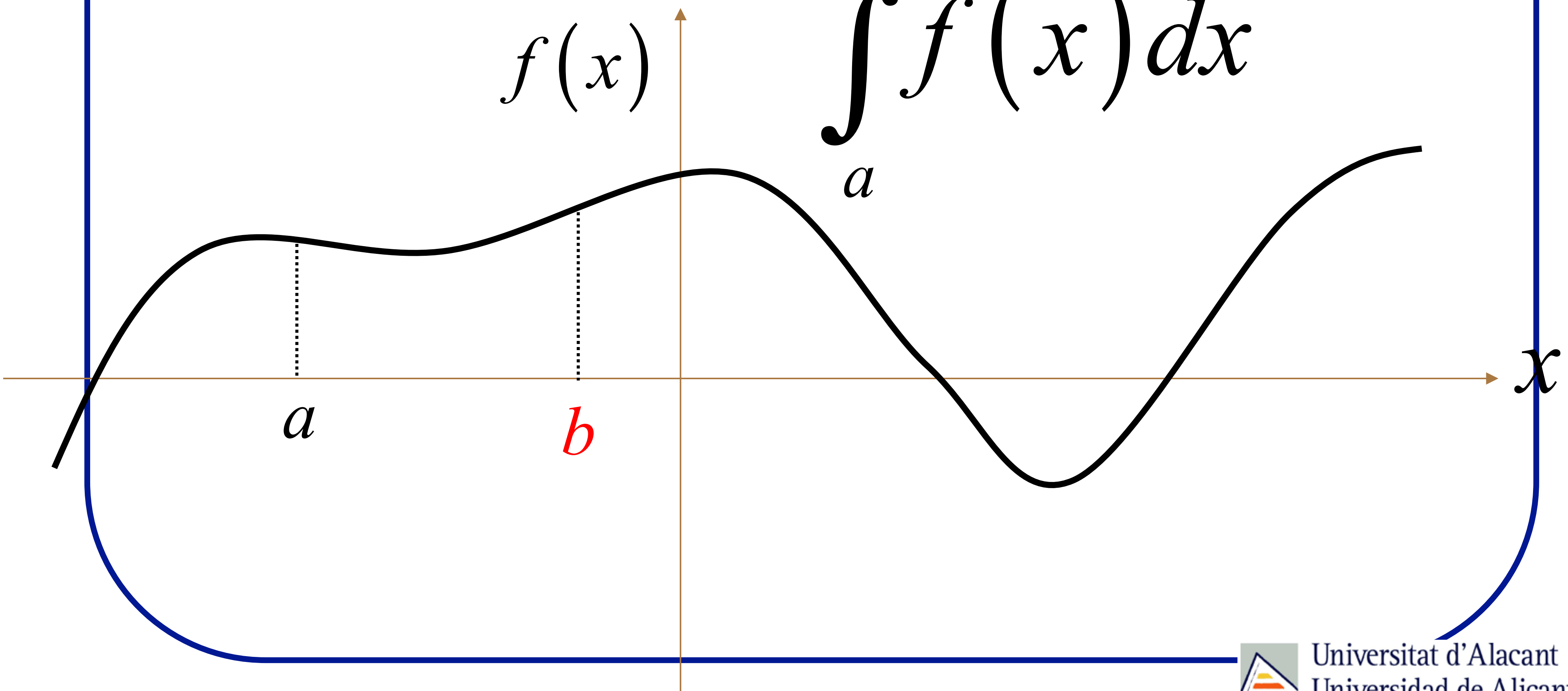
Integrales dobles

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



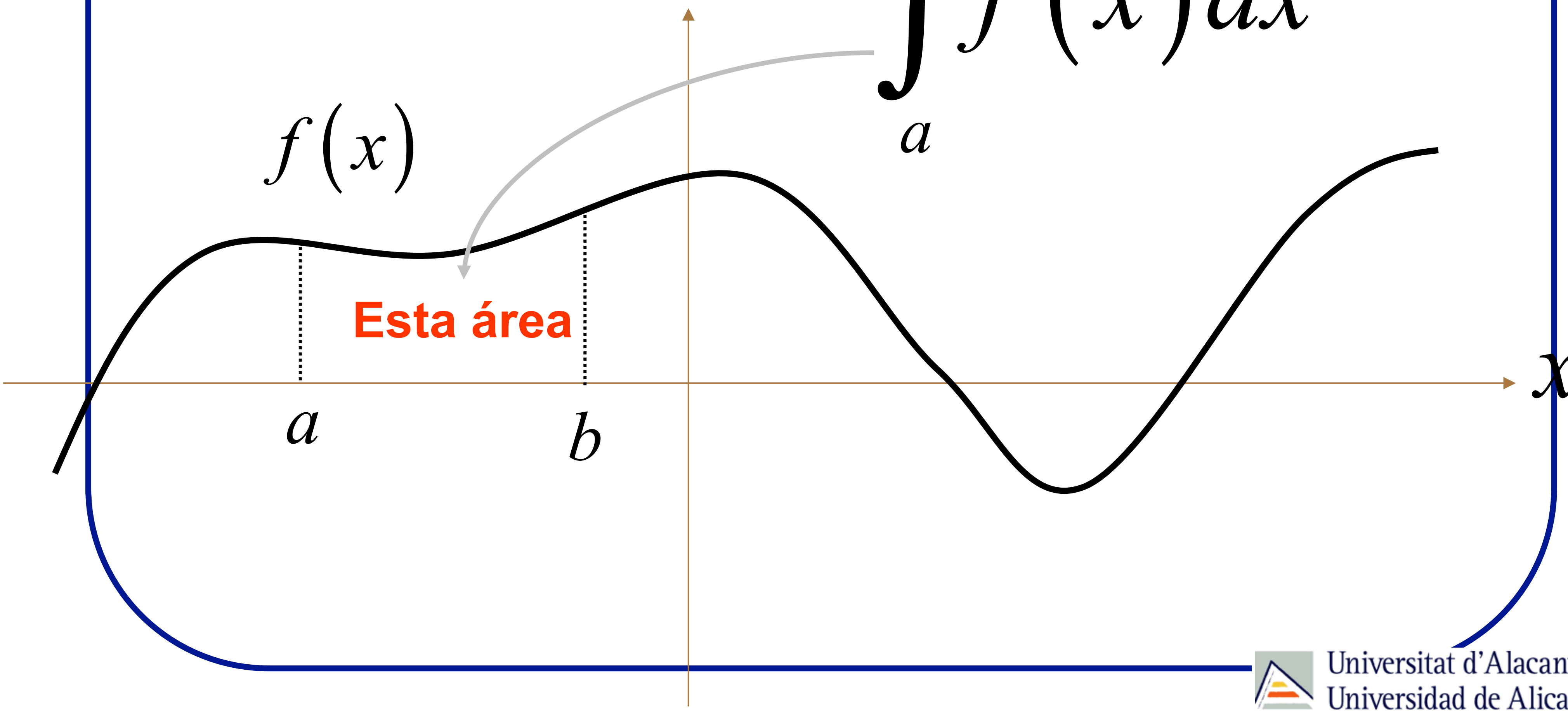
Integrales dobles

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

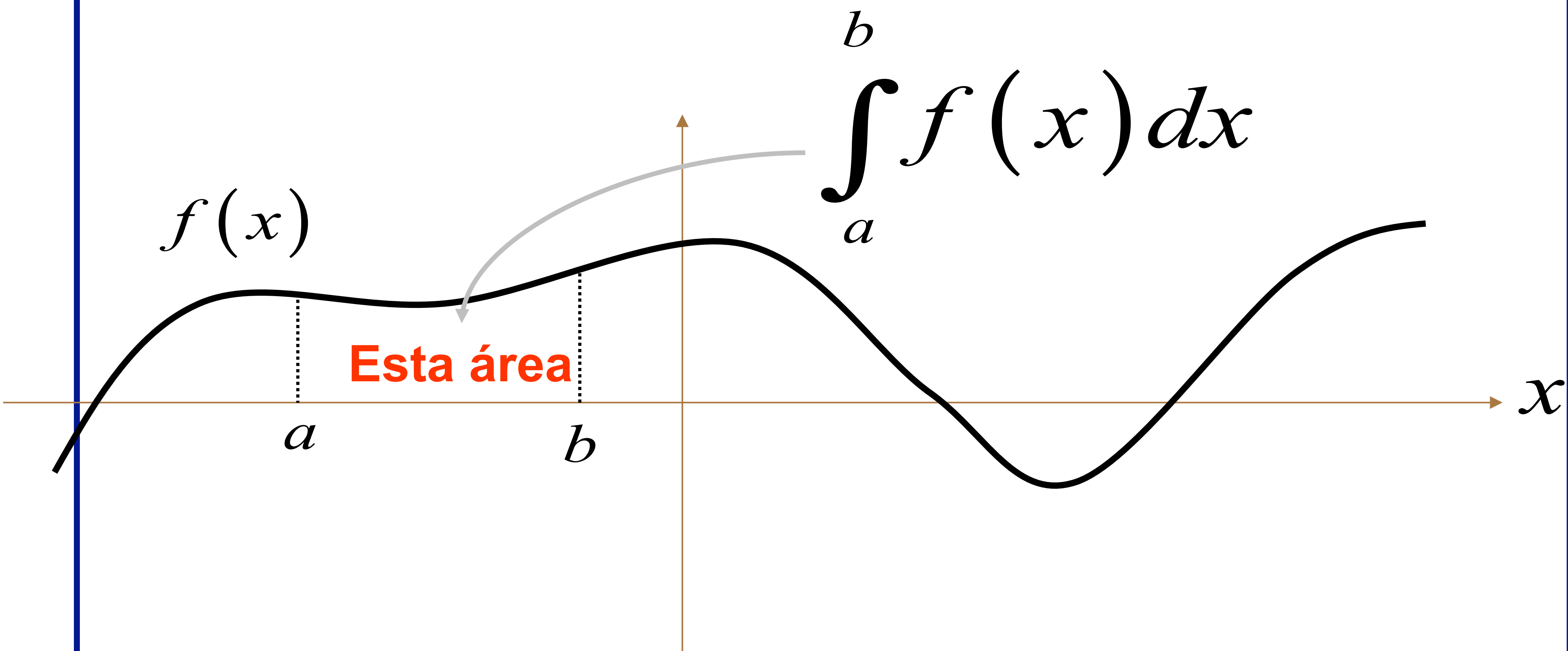


Integrales dobles

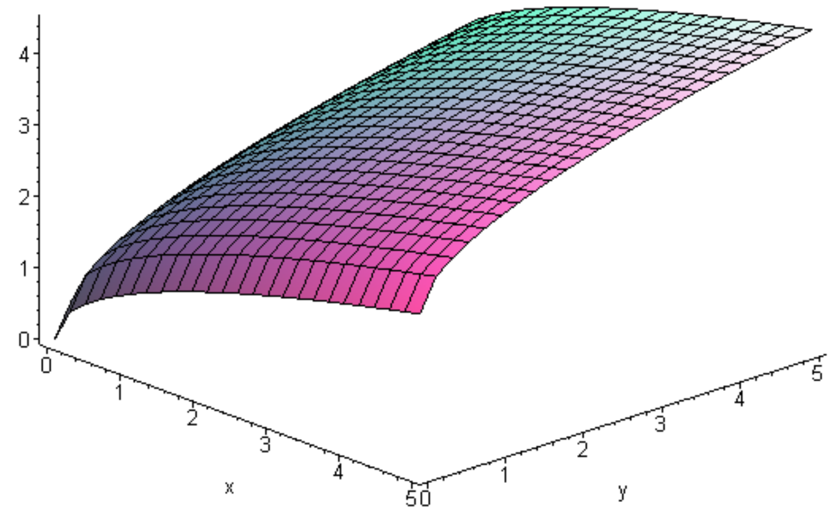
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Integrales dobles



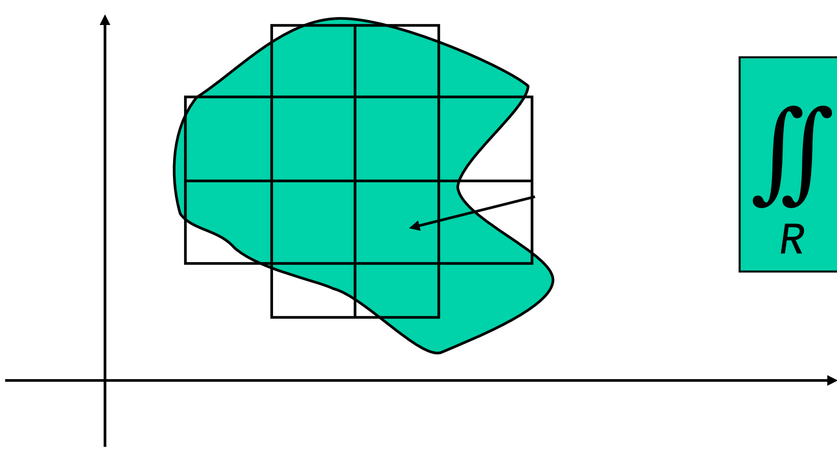
$$\phi(x,y): D \subset R^2 \to R$$



La gráfica de un campo escalar en dos dimensiones es una superficie.

Integrales dobles

Sea f, continua en una región R del plano xy . Usando líneas paralelas a los ejes para aproximar R por medio de n rectángulos de área ΔA. Sea (x_j, y_j) un punto del j-esimo rectángulo, entonces la integral doble de f sobre R es:



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\, \Delta A$$

Integrales dobles

La integral doble de f sobre la región R, está dada por el valor común de las dos integrales iteradas.

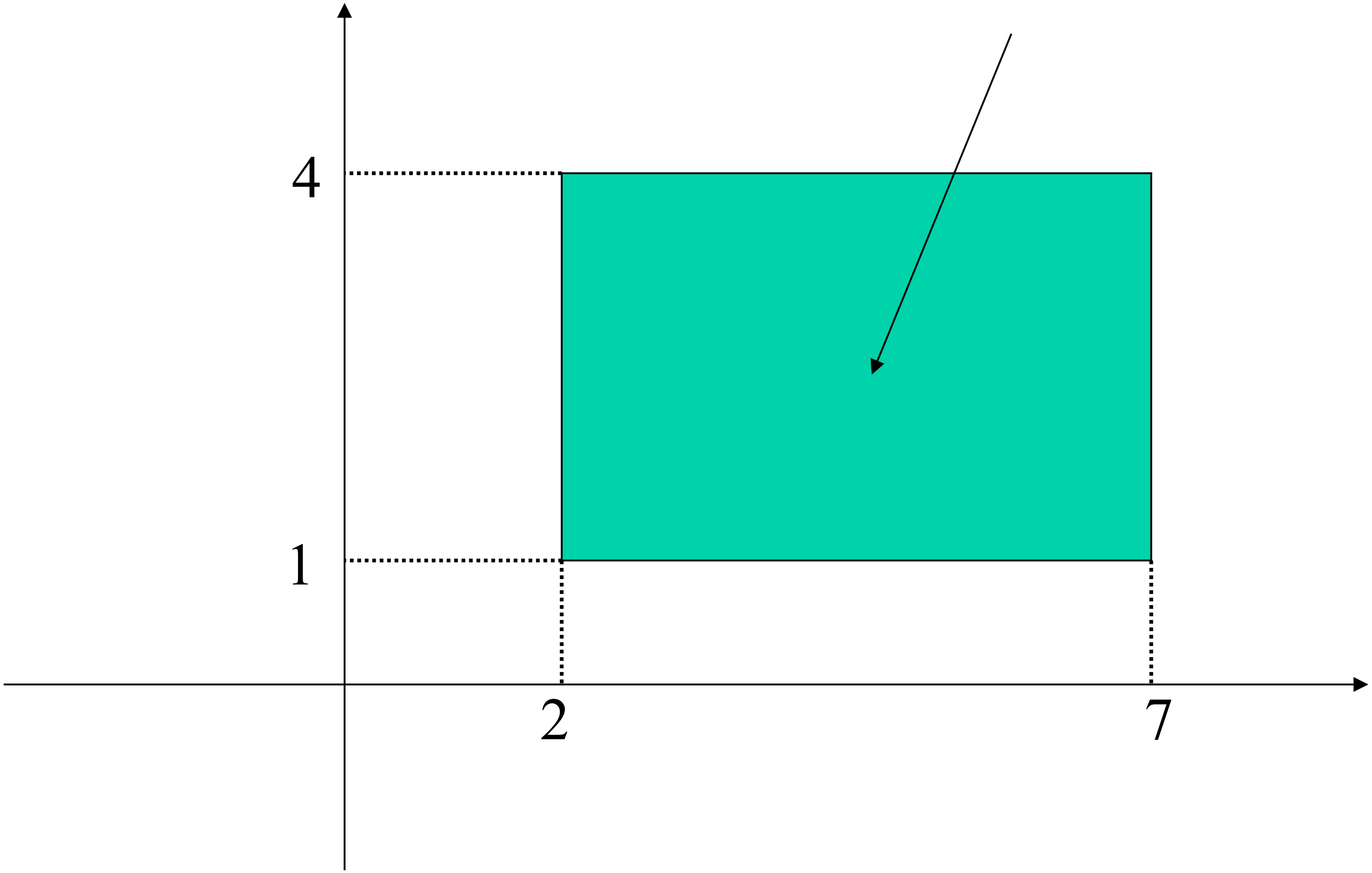
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Donde a, b, c y d son los límites de integración de la región R.

Para resolver la integral doble, se mantiene fija una variable y se integra con respecto a la otra variable.

Integrales dobles. Ejemplo

¿Cuál es el área de este rectángulo?



Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint\limits_{\text{Rectángulo}} dx\,dy =$$

$$= \int_2^7 \left\{ \int_1^4 dy \right\} dx = \int_2^7 \left\{ y \Big|_1^4 \right\} dx = \int_2^7 3\,dx$$

$$= 3\left\{ x \Big|_2^7 \right\} = 3(5) = 15$$

Integrales dobles. Propiedades

a) $\iint_R K.f(x, y)dA = K\iint_R f(x, y)dA$

b) $\iint_R f(x, y) \pm g(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dA \pm \iint_R g(x, y)dA$

c) Si $f(x, y) > 0, \forall\ (x, y) \in R,\ \iint_R f(x, y)dA > 0$

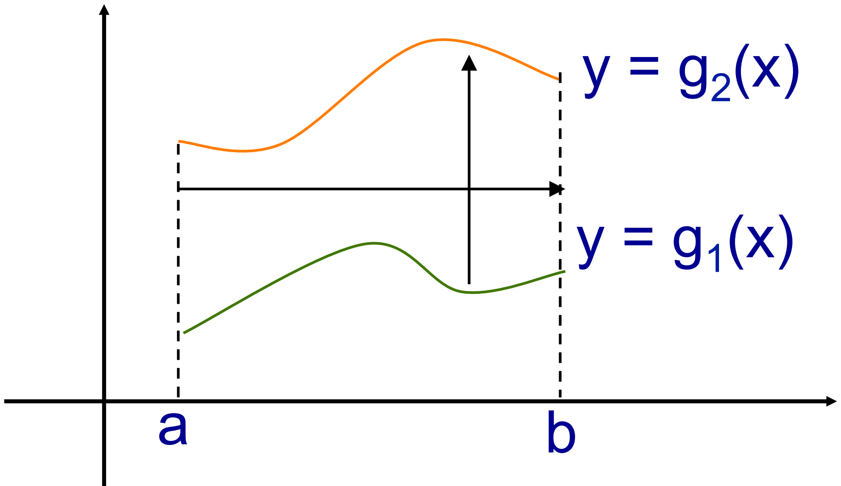
d) Si $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 no se sobreponen

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA$$

Integrales dobles. Límites de integración

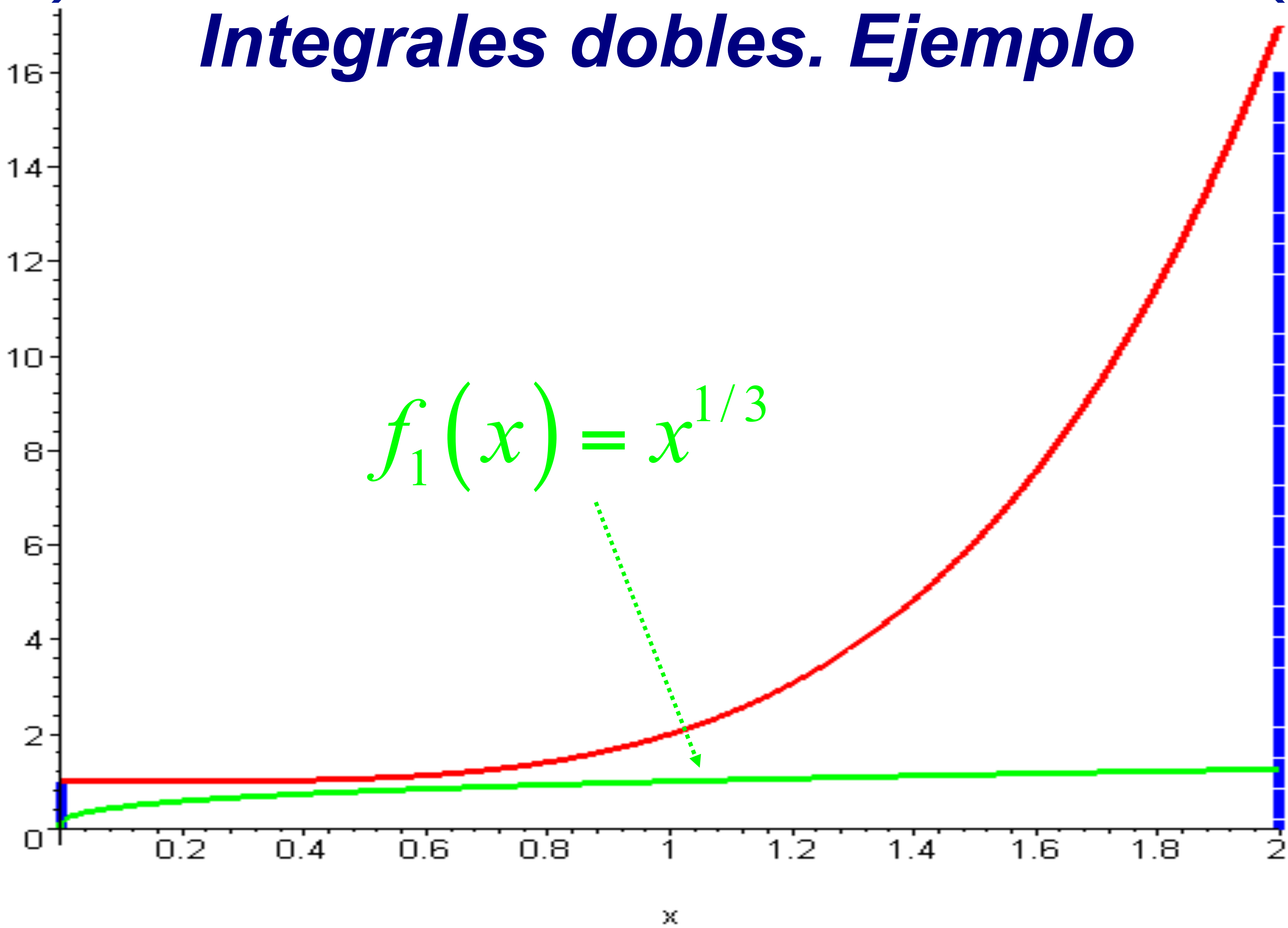
Secciones transversales verticales: La región R está limitada por las gráficas de g_1 y g_2 en el intervalo [a, b]. Si R es descrita por

$$R: \quad a \le x \le b \;, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$$



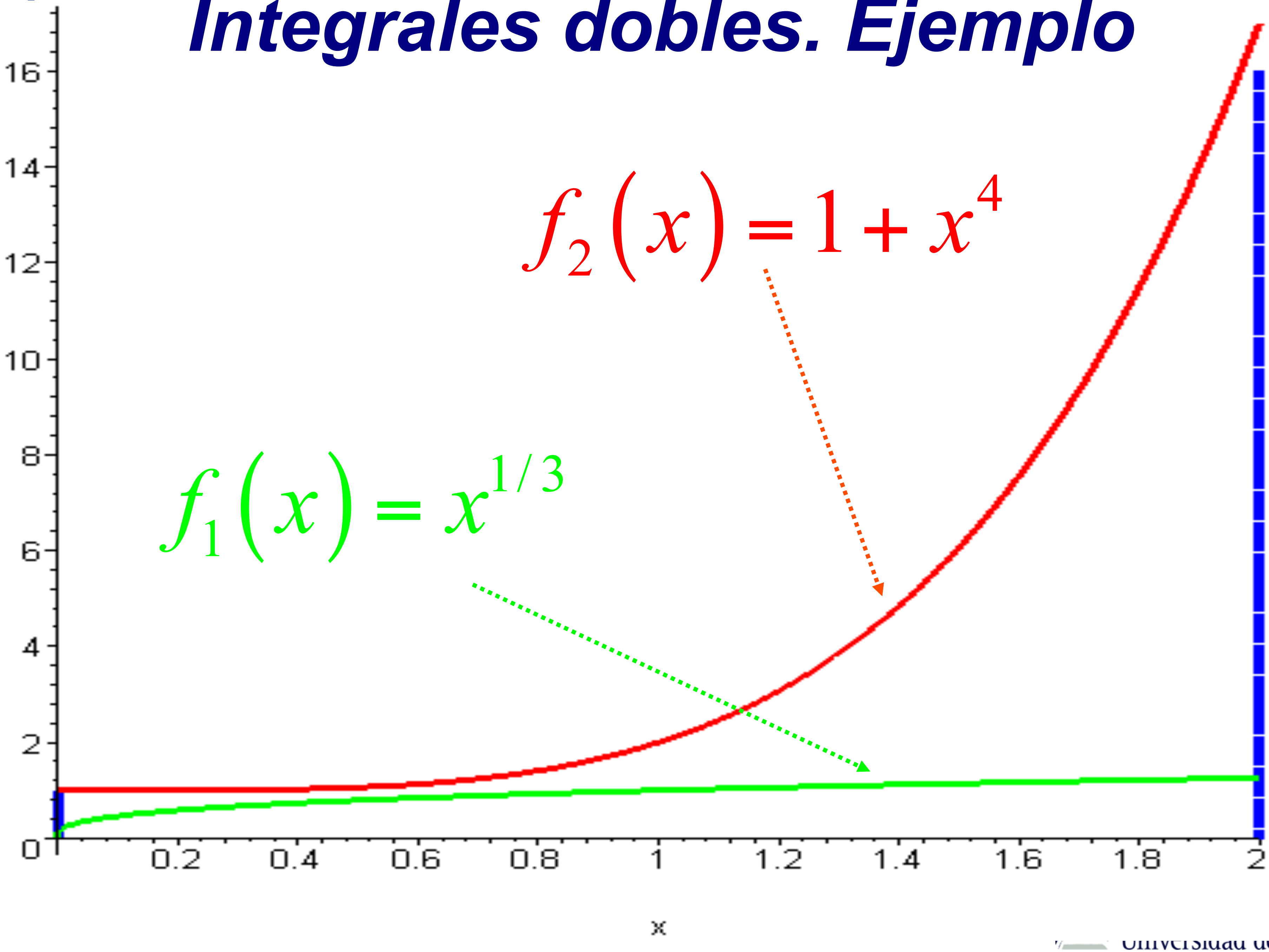
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

Integrales dobles. Ejemplo



$$f_1(x) = x^{1/3}$$

Integrales dobles. Ejemplo



Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Figura}} dxdy =$$

$$= \int_0^2 \left\{ \int_{x^{1/3}}^{1+x^4} dy \right\} dx =$$

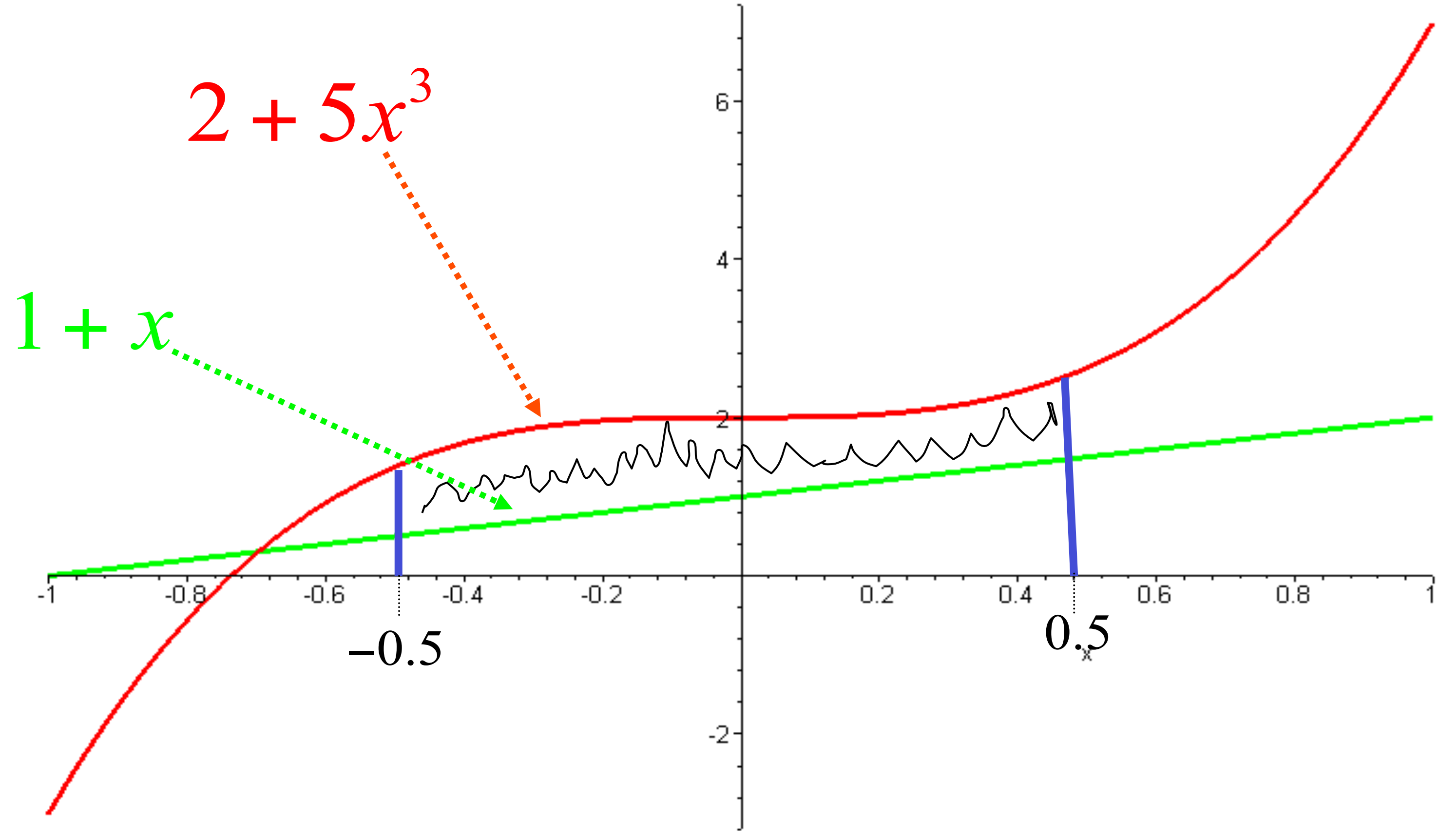
$$= \int_0^2 \left(1 + x^4 - x^{1/3} \right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{1}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^{4/3} \right) \Bigg|_0^2 = 2 + \frac{32}{5} - \frac{6}{4} 2^{1/3} =$$

$$= 6.51$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_D 4xy^2\,dxdy$$



Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{D}\left[4xy^{2}\right]dxdy$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{D}\left[4xy^{2}\right]dxdy =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5}\left\{\int_{1+x}^{2+5x^{3}}\left[4xy^{2}\right]dy\right\}dx$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\int_{1+x}^{2+5x^3} \left[4xy^2\right] dy$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\int_{1+x}^{2+5x^3} \left[4xy^2\right] dy =$$

$$= 4x\int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\int_{1+x}^{2+5x^3}\left[4xy^2\right]dy =$$

$$= 4x\int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy =$$

$$= 4x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1+x}^{2+5x^3}$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\int_{1+x}^{2+5x^3} \left[4xy^2\right] dy =$$

$$4x\int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy =$$

$$4x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1+x}^{2+5x^3} =$$

$$4x\left[\frac{1}{3}\left(2+5x^3\right)^3 - \frac{1}{3}(1+x)^3\right]$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\int_{1+x}^{2+5x^3} \left[4xy^2\right] dy =$$

$$= 4x\int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy =$$

$$= 4x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1+x}^{2+5x^3} =$$

$$= 4x\left[\frac{1}{3}\left(2+5x^3\right)^3 - \frac{1}{3}\left(1+x\right)^3\right] =$$

$$= 4x\left(\frac{125}{3}x^9 + 50x^6 + \frac{59}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{7}{3}\right)$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{D}\left[4xy^{2}\right]dxdy =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5}\left\{\int_{1+x}^{2+5x^{3}}\left[4xy^{2}\right]dy\right\}dx =$$

$$= 4\int_{-0.5}^{0.5}\left\{\frac{125}{3}x^{10} + 50x^{7} + \frac{59}{3}x^{4} - x^{3} - x^{2} + \frac{7}{3}x\right\}dx$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint\limits_{D}\left[4xy^2\right]dxdy =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5}\left\{\int_{1+x}^{2+5x^3}\left[4xy^2\right]dy\right\}dx =$$

$$= 4\int_{-0.5}^{0.5}\left\{\frac{125}{3}x^{10} + 50x^7 + \frac{59}{3}x^4 - x^3 - x^2 + \frac{7}{3}x\right\}dx$$

$$= \frac{500}{3}\int_{-0.5}^{0.5}x^{10}dx + 200\int_{-0.5}^{0.5}x^7dx + \frac{236}{3}\int_{-0.5}^{0.5}x^4dx$$

$$- 4\int_{-0.5}^{0.5}x^3dx - 4\int_{-0.5}^{0.5}x^2dx + \frac{28}{3}\int_{-0.5}^{0.5}xdx$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_D \left[4xy^2\right] dxdy =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} \left\{ \int_{1+x}^{2+5x^3} \left[4xy^2\right] dy \right\} dx =$$

$$= 4\int_{-0.5}^{0.5} \left\{ \frac{125}{3}x^{10} + 50x^7 + \frac{59}{3}x^4 - x^3 - x^2 + \frac{7}{3}x \right\} dx$$

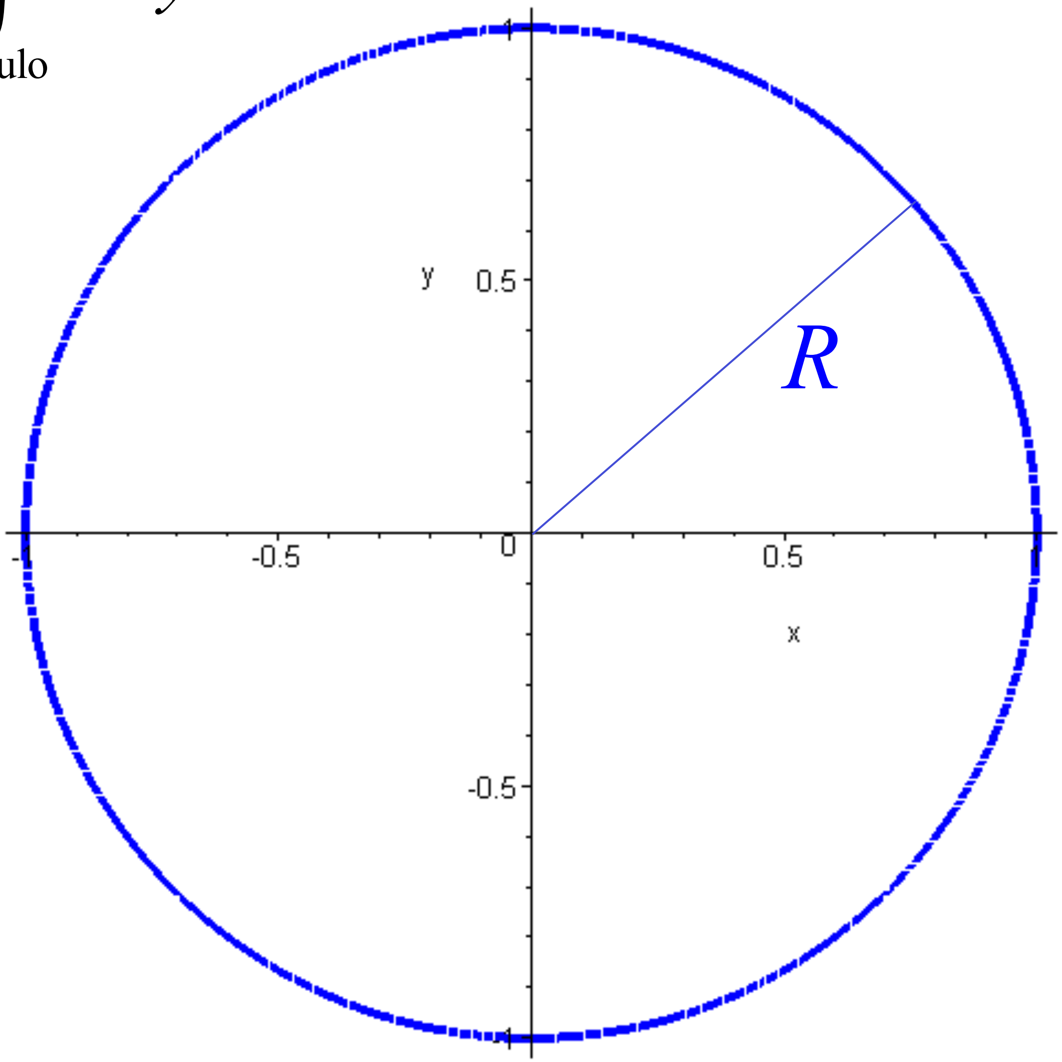
$$= \frac{500}{3}\int_{-0.5}^{0.5} x^{10}dx + 200\int_{-0.5}^{0.5} x^7 dx + \frac{236}{3}\int_{-0.5}^{0.5} x^4 dx$$

$$- 4\int_{-0.5}^{0.5} x^3 dx - 4\int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx + \frac{28}{3}\int_{-0.5}^{0.5} x dx =$$

$$= 28081/42240$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy$$



Integrales dobles. Ejemplo

La integral múltiple se calcula mediante una integral iterada:

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy\right] dx$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy\right]dx$$

$$\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy\right]dx$$

$$\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2-x^2}$$

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy\right]dx$$

$$\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R}$$

Integrales dobles. Ejemplo

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy\right]dx$$

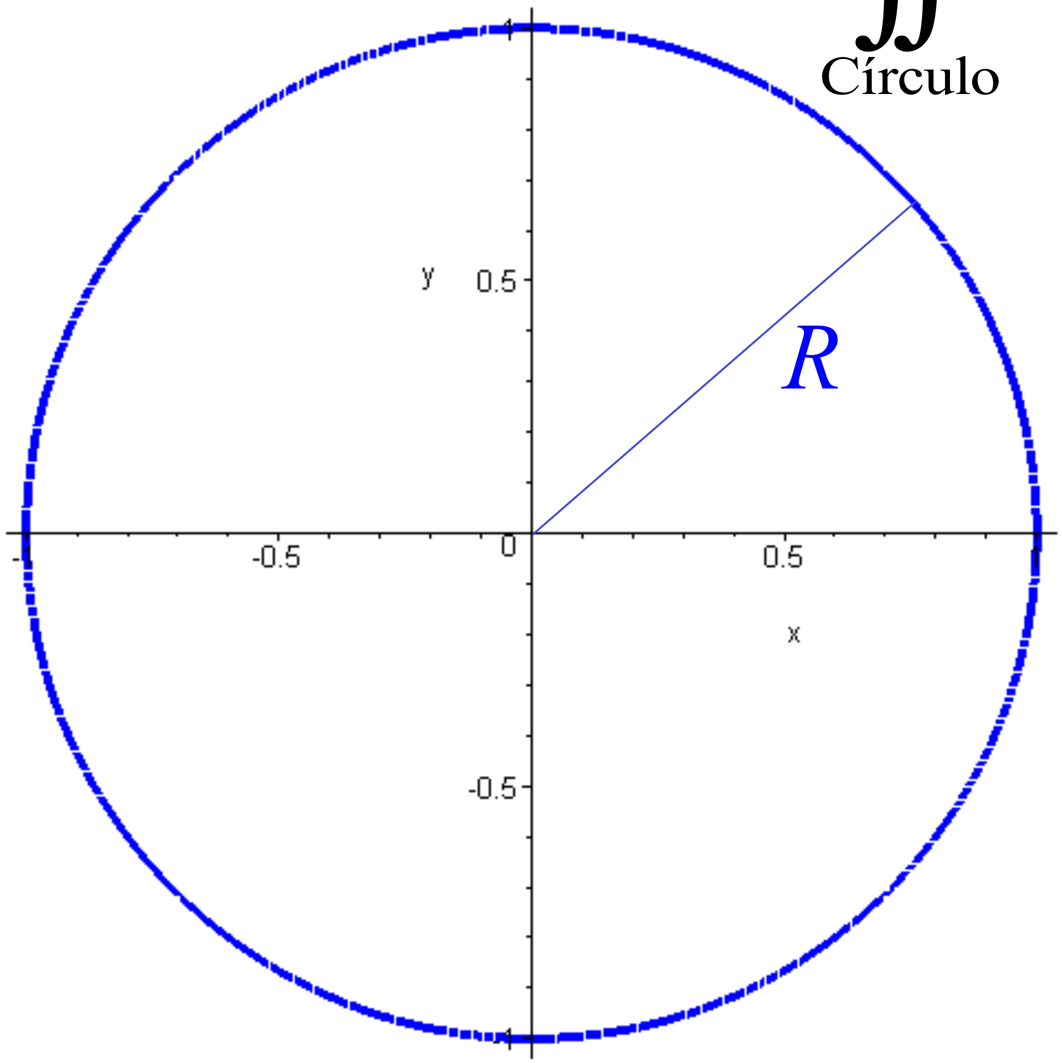
$$\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R} = \pi R^2$$

Integrales dobles. Ejemplo

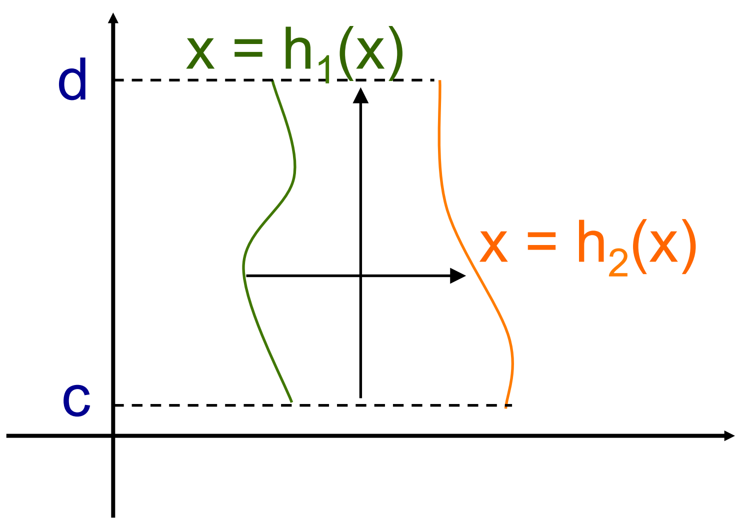
$$\iint_{\text{Círculo}} dxdy = \pi R^2$$



Integrales dobles. Límites de integración

Secciones transversales horizontales: La región R está limitada por las gráficas de h_1 y h_2 en el intervalo [c, d]. Si R es descrita por

$$R: \quad c \le y \le d \;, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$