Errores

Tema 4

Errores

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)

Error Absoluto

Sea *A* un número exacto
y *a* una aproximación de *A*,
el error absoluto Δ del
número aproximado *a*,
también denotado como Δa
es el valor absoluto de la diferencia
entre el correspondiente número exacto
y la aproximación:

$$\Delta \quad \text{ó} \quad \Delta a = |A - a|$$

Ejemplo 1

Determinar el error absoluto de la aproximación *3,14* de π:

Ejemplo 1

Determinar el error absoluto de la aproximación *3,14* de *π*:

- Número exacto: $A=\pi$
- Número aproximado: $a=3{,}14$
- Error absoluto de a: $\Delta a=|\pi-3{,}14|$

Ejemplo 1

Determinar el error absoluto de la aproximación *3,14* de *π*:

- Número exacto: $A=\pi$
- Número aproximado: $a=3{,}14$
- Error absoluto de a: $\Delta a=|\pi-3{,}14|$

No lo podemos expresar en forma decimal, pero sería algo así:

$|3{,}141592653\ldots - 3{,}14| \approx 0{,}001592653\ldots$

Ejemplo 2

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2,34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Cuál es el error absoluto de $f(x_a)$?

Ejemplo 2

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2,34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Cuál es el error absoluto de $f(x_a)$?

$$A=f(x_0)=0 \quad a=f(x_a)=10^{-5} \quad \Delta=|0-10^{-5}|=10^{-5}$$

Ejemplo 2

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2{,}34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Y cuál es el error absoluto de x_a?

Ejemplo 2

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2,34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Y cuál es el error absoluto de x_a?

$A=x_0 \quad a=2,34803 \qquad \Delta=|x_0-2,34803|$

El error absoluto Δx_a no se puede expresar de otra forma, ya que no se conoce x_0

Cota del Error Absoluto

Una cota Δ_a *del error absoluto* $\Delta a=|A-a|$ es cualquier número que delimite el error, es decir que no sea menor, de forma que satisfaga: $\Delta = |A-a| \leq \Delta_a$

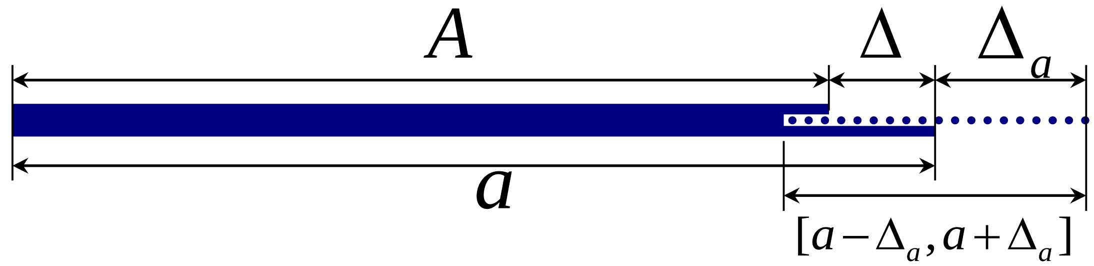
esa expresión define un intervalo alrededor de *a* donde se situará *A*

$$A \in [a-\Delta_a, a+\Delta_a]$$

es decir $a-\Delta_a \leq A \leq a+\Delta_a$

lo que se expresa como $A \approx a \pm \Delta_a$

Significado de $A = a \pm \Delta_a$



$$|A-a| = \Delta \leq \Delta_a$$

$$a-\Delta_a \leq A \leq a+\Delta_a \quad \Rightarrow \quad A = a \pm \Delta_a$$

Cuanto menor sea la cota Δ_a mejor: menor será el intervalo $[a-\Delta_a, a+\Delta_a]$ y más acotado queda el error Δ.

Ejemplo

Se aproxima el valor $A=1/3$ con $a=0,33$.

- ¿Es $\Delta_a=0,001$ una cota superior de su error absoluto?

Ejemplo

Se aproxima el valor $A=1/3$ con $a=0,33$.

- ¿Es $\Delta_a=0,001$ una cota superior de su error absoluto? NO porque

$$\Delta = |A-a| > \Delta_a \qquad |1/3-0,33| = 0,0033\widehat{3} > 0,001$$

- ¿Lo es $\Delta_a=0,004$?

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33.*

- ¿Es Δ_a*=0,001* una cota superior de su error absoluto? NO porque

$$\Delta = |A - a| > \Delta_a \qquad |1/3 - 0{,}33| = 0{,}0033\overset{\frown}{3} > 0{,}001$$

- ¿Lo es Δ_a*=0,004? Sí*

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a \qquad \Delta = 0{,}0033\overset{\frown}{3} \le 0{,}004$$

- *¿Y* $\Delta_a = 0{,}00334\overset{\frown}{3}$ *?*

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33.*

- ¿Es Δ_a*=0,001* una cota superior de su error absoluto? NO porque

$$\Delta = | A - a | > \Delta_a \qquad |1/3 - 0{,}33| = 0{,}0033\overset{\frown}{3} > 0{,}001$$

- ¿Lo es Δ_a*=0,004? Sí*

$$\Delta = | A - a | \le \Delta_a \qquad \Delta = 0{,}0033\overset{\frown}{3} \le 0{,}004$$

- *¿Y* $\Delta_a = 0{,}00334\overset{\frown}{3}$ *? Sí* $\quad 0{,}0033\overset{\frown}{3} \le 0{,}00334\overset{\frown}{3}$
- *¿Cual de las dos es mejor?*

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33.*

- ¿Es $\Delta_a=0{,}001$ una cota superior de su error absoluto? NO porque

$$\Delta = |A - a| > \Delta_a \qquad |1/3 - 0{,}33| = 0{,}0033\widehat{3} > 0{,}001$$

- ¿Lo es $\Delta_a=0{,}004$? *Sí*

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a \qquad \Delta = 0{,}0033\widehat{3} \le 0{,}004$$

- *¿Y* $\Delta_a = 0{,}00334\widehat{3}$ *? Sí* $\quad 0{,}0033\widehat{3} \le 0{,}00334\widehat{3}$
- *¿Cual de las dos es mejor?* $0{,}00334\widehat{3}$ porque $0{,}00334\widehat{3} \le 0{,}004$

Error Relativo

El error relativo *δ* de un número aproximado *a* es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto *A*:

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Error Relativo

El error relativo *δ* de un número aproximado *a* es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto *A*:

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Ejemplos:

A=5,35 a=5,4

A=624,05 a=624

Error Relativo

El error relativo *δ* de un número aproximado *a* es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto *A*:

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Ejemplos:

A=5,35 a=5,4 $\Delta = 0{,}05 \quad \delta = \frac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093$

A=624,05 a=624 $\Delta = 0{,}05 \quad \delta = \frac{0{,}05}{624{,}05} = 8{,}0122 \cdot 10^{-5}$

Cota del Error Relativo

Una cota δ_a *del error relativo* $\Delta a/|A|$ es cualquier número no menor que dicho error, es decir:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$$

Cota del Error Relativo

Una cota δ_a *del error relativo* $\Delta a/|A|$ es cualquier número no menor que dicho error, es decir:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$$

Además:

Si $\Delta = |A|\,\delta$ y $\delta \leq \delta_a$ entonces $\Delta \leq |A|\,\delta_a$

de donde $\Delta_a = |A|\,\delta_a$

La cota de error relativo por el valor absoluto del valor exacto es una cota del error absoluto

Relación entre cota relativa y absoluta

En la práctica, el valor *A* suele desconocerse, por lo que la relación que interesa usar es:

La cota de error relativo por el valor absoluto de la aproximación, que es en realidad una cota de error absoluto $\Delta_a = |a| \delta_a$

es decir, $a - |a|\delta_a \leq A \leq a + |a|\delta_a$, y $A = a(1 \pm \delta_a)$

lo que se expresa $A \approx a \pm \delta_a \%$ con δ_a en %.

Para ello hay que demostrar: $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$

Relación entre cota relativa y absoluta

A demostrar:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

Suponemos *A* y *a* positivos y $\Delta_a < a$.

Como $\Delta \leq \Delta_a$ y $a - \Delta_a \leq A$ entonces

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a} \leq \frac{\Delta_a}{a} \quad \Rightarrow \quad \delta_a = \frac{\Delta_a}{a}$$

A demostrar en otros casos …

Ejemplos de cotas $\delta_a=\Delta_a/|a|$

$$A = 5{,}35 \qquad \Delta = |A - a| = |5{,}35 - 5{,}4| = 0{,}05$$

$$a = 5{,}4 \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093\ldots$$

1. $\Delta_a = 0{,}06$

2. $\Delta_a = 0{,}051$

3. $\Delta_a = 0{,}054$

Ejemplos de cotas $\delta_a = \Delta_a / |a|$

$$A = 5{,}35 \qquad \Delta = |A - a| = |5{,}35 - 5{,}4| = 0{,}05$$

$$a = 5{,}4 \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093\ldots$$

1. $\Delta_a = 0{,}06 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}06}{5{,}4} = 0{,}011\widehat{1} \geq \delta$
2. $\Delta_a = 0{,}051 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}051}{5{,}4} = 0{,}009\widehat{4} \geq \delta$
3. $\Delta_a = 0{,}054 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}054}{5{,}4} = 0{,}01 \geq \delta$

Errores

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)
- Dígitos significativos y dígitos exactos

Descomposición decimal

Un número real positivo *A* puede expresarse como la siguiente suma finita o infinita:

$$A = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots$$

donde $m \in \mathbf{Z} \quad \alpha_i \in \{0,1,2,\ldots,9\} \quad \alpha_m \neq 0$

A ésta suma se le llama **forma decimal** y se dice entonces que **α_i son dígitos**, que α_m es el dígito más significativo y que *m* es la potencia de*10* más elevada para *A*

Aproximación decimal

Se llama **aproximación en forma decimal** de un número real positivo *A* a la siguiente forma decimal con suma **finita**:

$$a = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0)$$

Ejemplo,

forma decimal de *A=π*

y de su aproximación *3,142*:

$$\pi = 3{,}1415\ldots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \ldots$$

$$a = 3{,}142 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

Dígitos significativos

- Cualquier dígito α_i no nulo es significativo
- Cualquier dígito $\alpha_i=0$ es significativo
si son significativos α_{i+1} y α_{i-1}
- El resto de dígitos cero: (DISCUSIÓN)
  - En la forma decimal no existen por definición $\alpha_i=0$ anteriores al dígito más significativo $\alpha_m\neq 0$

$$0{,}04030 = 4\cdot 10^{-2} + 0\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} + 0\cdot 10^{-5}$$

  - Los ceros posteriores al último $\alpha_i\neq 0$ se considerarán significativos si interesan, dependiendo de la precisión del aparato de cálculo o captura, la interpretación, la expresión, etc. $600 = 6\cdot 10^{2} + 0\cdot 10^{1}$

Dígitos exactos

Son dígitos exactos de una aproximación *a* en forma decimal el máximo número *n* de dígitos significativos

$$\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_{m-n+1}$$

tales que cumplen

$$\Delta = | A - a | \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

Se dice entonces que *a* tiene los *n* primeros dígitos exactos.

Dígitos exactos

Interpretación de la condición:

$$\Delta = | A - a | \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

La aproximación *a* tiene los *n* primeros dígitos exactos si el error absoluto de *a* no excede de media unidad situada en el *n-ésimo* lugar contando de izquierda a derecha, y esos *n* primeros dígitos exactos son:

$$\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_{m-n+1}$$

Ejemplo

Si $A=3{,}25$ y $a=3{,}29$

¿Cuántos dígitos exactos tiene a?

Ejemplo

Si *A=3,25* y *a=3,29*
¿Cuántos dígitos exactos tiene *a*?

Buscamos las expresiones con un solo dígito 5 que acoten, lo más ajustado posible, el error absoluto:

$$\Delta = | A - a | = 0{,}04 \qquad a = 3 \cdot 10^{m=0} + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

$$0{,}005 < 0{,}04 \le 0{,}05$$

Se calcula el valor de n para las dos cotas

Ejemplo

Si *A=3,25* y *a=3,29*

¿Cuántos dígitos exactos tiene *a*?

$$\Delta = |A - a| = 0{,}04 \qquad a = 3 \cdot 10^{m=0} + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

$$0{,}005 < 0{,}04 \leq 0{,}05$$

$$\Delta > (1/2) \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}005 \qquad \Delta \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}05$$

$$-2 = m - n + 1 \Rightarrow n = 3 \qquad -1 = m - n + 1 \Rightarrow n = 2$$

por abajo *n=3* por arriba *n=2*

Ejemplo

Si *A=3,25* y *a=3,29*

¿Cuántos dígitos exactos tiene *a*?

$$\Delta = |A - a| = 0{,}04 \qquad a = 3\cdot 10^{m=0} + 2\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$$

$$\cancel{0{,}005} < 0{,}04 \leq 0{,}05$$

$$\cancel{\Delta > (1/2)\cdot 10^{m-n+1} = 0{,}005}$$

$$\cancel{-2 = m - n + 1 \Rightarrow n = 3}$$

~~por abajo *n=3*~~

No

$$\Delta \leq (1/2)\cdot 10^{m-n+1} = 0{,}05$$

$$-1 = m - n + 1 \Rightarrow n = 2$$

por arriba *n=2*

Sí

Ejemplos

¿Y si $A=3{,}25$ y $a=3{,}31$?

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$0{,}05 < 0{,}06 \le 0{,}5$$

$$0{,}5 \cdot 10^{-1} < 0{,}06 \le 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

$$-1 = m - n + 1 \qquad 0 = m - n + 1$$

$$m = 0 \quad n = 2 \qquad m = 0 \quad n = 1$$

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0{,}05} < 0{,}06 \le 0{,}5$$

n=1

$$\cancel{0{,}5 \cdot 10^{-1}} < 0{,}06 \le 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0{,}05} < 0{,}06 \leq 0{,}5$$

$$\cancel{0{,}5 \cdot 10^{-1} < 0{,}06 \leq} 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5$$

$$\cancel{0,5 \cdot 10^{-1} < 0,06 \leq 0,5 \cdot 10^{0}}$$

n=1

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5 = 0,5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$m = 0 \quad 0 = m - n + 1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31?*

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5$$

$$0,5 \cdot 10^{-1} < 0,06 \leq 0,5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29?*

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5 = 0,5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$m = 0 \quad 0 = m - n + 1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

$$\cancel{0,005} < 0,05 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1}$$

n=2

$$m = 2 \quad 1 = m - n + 1$$

¿Y si A=700,8 y a=700?

Ejemplos

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0{,}05} < 0{,}06 \le 0{,}5$$

$$\cancel{0{,}5 \cdot 10^{-1}} < 0{,}06 \le 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

$$\cancel{0{,}05} < 0{,}06 \le 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$m = 0 \quad 0 = m - n + 1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

$$\cancel{0{,}005} < 0{,}05 \le 0{,}05 = 0{,}5 \cdot 10^{-1}$$

n=2

$$m = 0 \quad -1 = m - n + 1$$

¿Y si A=700,8 y a=700?

$$\cancel{0{,}5} < 0{,}8 \le 5 = 0{,}5 \cdot 10^{1}$$

n=2

$$m = 2 \quad 1 = m - n + 1$$

Errores

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)
- Dígitos significativos y dígitos exactos
- Relación entre error relativo y dígitos exactos

Teorema de la acotación

Si un número aproximado *a>0* tiene *n* dígitos exactos, su error relativo satisface

$$\delta \leq \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

donde β_m es el primer dígito significativo (dígito más significativo) de *a*.

Teorema de la acotación

Demostración.
Partiendo de la definición de dígitos exactos

$$\Delta = |A - a| \leq (1/2)\cdot 10^{m-n+1}$$

que implica $A \geq a - (1/2)\cdot 10^{m-n+1}$

Se pone $\beta_m 10^m$ por *a* y sigue la desigualdad

$$A \geq \beta_m \cdot 10^m - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot 10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^m\left(2\beta_m - \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

tal que $A \geq \frac{1}{2}10^m b$ donde $b = 2\beta_m - \frac{1}{10^{n-1}}$

Teorema de la acotación

Teniendo en cuenta que $\beta_m \epsilon \{1,2,\ldots,9\}$ ($\beta_m \neq 0$) entonces $b \geq \beta_m$ para cualquier n

$$b = 2\beta_m - \frac{1}{10^{n-1}} \geq \beta_m$$

	$2\beta_m - 1$	$2\beta_m - 1/10$	$\cdots$	$2\beta_m - 1/10^{n-1}$
$\beta_m = 1 \leq$	1	1,9	$\cdots$	$2 - 1/10^{n-1}$
$\beta_m = 2 \leq$	3	3,9	$\cdots$	$4 - 1/10^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\beta_m = 9 \leq$	17	17,9	$\ldots$	$18 - 1/10^{n-1}$

Teorema de la acotación

Si $A \geq \frac{1}{2} 10^m b$

y $b = 2\beta_m - \frac{1}{10^{n-1}} \geq \beta_m$ entonces $A \geq \frac{1}{2} 10^m \beta_m$

y con la definición de dígitos exactos

$$\Delta = | A - a | \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

tenemos que el error relativo es

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{(1/2) \cdot 10^{m-n+1}}{(1/2) \cdot 10^m \beta_m} = \frac{1}{\beta_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

y lo obtenido es una cota de error relativo

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

Ejemplo práctico 1

Se pretende aproximar $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$
¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,1%*?

Ejemplo práctico 1

Se pretende aproximar √2 =*1,4142135623…*
¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,1%*?

- Calculamos el primer dígito: $\beta_m=\beta_0=1$
- Queremos que: $\delta_a=0{,}001$
- Aplicamos el Teorema de la Acotación:

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad 0{,}001=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad 10^{-3}=10^{1-n}$$

- Y despejamos *n*: $-3=1-n$ $\qquad$ *n=4*

Ejemplo práctico 2

Se pretende aproximar e =*2.718281828…*
¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,05%*?

Ejemplo práctico 2

Se pretende aproximar e =*2.718281828…*
¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,05%*?

- Calculamos el primer dígito: $\beta_m=\beta_0=2$
- Queremos que: $\delta_a=0,0005$
- Aplicamos el Teorema de la Acotación:

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} 0{,}0005 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} 0{,}5\cdot 10^{-3} = 0{,}5\cdot 10^{1-n}$$

- Y despejamos *n*: $-3 = 1 - n$ $\quad$ $n=4$

Errores

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)
- Dígitos significativos y dígitos exactos
- Relación entre error relativo y dígitos exactos
- Errores de redondeo

Error de redondeo

Llamamos **redondeo** o número redondeado al número ***b*** obtenido a partir de otro número exacto o aproximado ***a*** reduciendo su número de dígitos significativos.

Se define entonces **error de redondeo** como

$$\varepsilon = | b - a |$$

El error de redondeo, como lo hemos definido, es un error absoluto. Es posible también calcular el error relativo de redondeo.

Regla del redondeo

Pasos para redondear un número a *n* dígitos significativos haciendo mínimo su error

$$\varepsilon = | b - a |$$

1. Nos quedamos sólo con todos los *n* primeros dígitos significativos

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + ... + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0)$$

2. Si el dígito β_{m-n} eliminado es:
   - <*5* no hacer nada más. (caso $\beta_{m-n} \in \{0,1,2,3,4\}$)
   - ≥*5* entonces: (caso $\beta_{m-n} \in \{5,6,7,8,9\}$)
     1. Sumar una unidad al último dígito β_{m-n+1}
     2. Si el dígito $\beta_{m-n+1}+1=10$, volver a poner *b* en su forma decimal correcta ($\beta_i \in \{0,1,\ldots,9\}$).

Ejemplos

Redondear a=9.997 a 3 dígitos significativos:

Ejemplos

Redondear a=9.997 a 3 dígitos significativos:

$$b = 9\cdot 10^{0} + 9\cdot 10^{-1} + (9+1)\cdot 10^{-2} = 10$$

$$b = 10 = 1\cdot 10^{1} + 0\cdot 10^{0} + 0\cdot 10^{-1} = 10{,}0$$

Redondear e =*2.718281828*… a *3* dígitos:

Redondear e =*2.718281828*… a *4* dígitos:

Ejemplos

Redondear a=9.997 a 3 dígitos significativos:

$$b = 9 \cdot 10^{0} + 9 \cdot 10^{-1} + (9+1) \cdot 10^{-2} = 10$$

$$b = 10 = 1 \cdot 10^{1} + 0 \cdot 10^{0} + 0 \cdot 10^{-1} = 10{,}0$$

Redondear e =*2.718281828*… a *3* dígitos:

$$b = 2{,}72$$

Redondear e =*2.718281828*… a *4* dígitos:

$$b = 2{,}718$$

Calcula una cota de error relativo de redondeo a los ejemplos anteriores

Aplica Teorema de la Acotación: $\delta_b = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

Redondear a=9.997 a 3 dígitos significativos:

$b = 10,0$

Redondear e =*2.718281828*… a *3* dígitos:

$b = 2,72$

Redondear e =*2.718281828*… a *4* dígitos:

$b = 2,718$

Calcula una cota de error relativo de redondeo a los ejemplos anteriores

Aplica Teorema de la Acotación: $\delta_b = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

Redondear a=9.995 a 3 dígitos significativos:

$$b = 10{,}0 \qquad (\varepsilon/|a|) \le \delta_b = (1/1)\cdot 10^{-2} = 0{,}01 = 1\%$$

Redondear e =*2.718281828*… a *3* dígitos:

$$b = 2{,}72 \qquad (\varepsilon/|e|) \le \delta_b = (1/2)\cdot 10^{-2} = 0{,}005 = 0{,}5\%$$

Redondear e =*2.718281828*… a *4* dígitos:

$$b = 2{,}718 \qquad (\varepsilon/|e|) \le \delta_b = (1/2)\cdot 10^{-3} = 0{,}0005 = 0{,}05\%$$

Aproximación redondeada

Una cota del error absoluto del redondeo *b* de una aproximación *a* a un valor exacto *A* es la suma del error absoluto de la aproximación y el error absoluto de redondeo:

$$|A-b|=|A-a+a-b|\leq|A-a|+|b-a|=\Delta+\varepsilon$$

$$|A-b|\leq\Delta+\varepsilon$$

Errores

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)
- Dígitos significativos y dígitos exactos
- Relación entre error relativo y dígitos exactos
- Errores de redondeo
- Operaciones con errores

Error absoluto de la suma

La suma de los errores absolutos es cota del error absoluto de la suma de aproximaciones:

- Valor exacto $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$
- Aproximación $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S - s = A_1 - a_1 + A_2 - a_2 + \ldots + A_n - a_n$$

$$S - s = (\pm\Delta a_1) + (\pm\Delta a_2) + \ldots + (\pm\Delta a_n)$$

$$|S - s| \leq |\pm\Delta a_1| + |\pm\Delta a_2| + \ldots + |\pm\Delta a_n|$$

$$\Delta s \leq \Delta_s = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n$$

Error absoluto de la resta

Como *-a* aproxima a *–A* con el mismo error absoluto que *a* aproxima a *A*:

$$|A - a| = \Delta a$$

$$|(-A) - (-a)| = |-(A - a)| = |A - a| = \Delta a$$

Entonces la suma de errores también resulta una cota para la resta:

$$S = A_1 - A_2 = A_1 + (-A_2)$$

$$s = a_1 - a_2 = a_1 + (-a_2)$$

$$\Delta s \leq \Delta_r = \Delta a_1 + \Delta a_2$$

Error relativo de la suma

El máximo de las cotas de error relativo de los términos de una suma acota al error relativo de esa suma si todos los términos son del mismo signo:

- Valor exacto $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$
- Aproximación $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- Si $\Delta_s = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n$

  entonces $\Delta_s \le \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}$

$$\delta s = \frac{\Delta s}{|S|} \le \frac{\Delta_s}{|S|} \le \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|}$$

Error relativo de la suma

$$\delta s = \frac{\Delta s}{|S|} \le \frac{\Delta_s}{|S|} \le \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} =$$

$$= \frac{|A_1|\delta_{a_1} + |A_2|\delta_{a_2} + \ldots + |A_n|\delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} \le$$

$$\le \delta^* \frac{|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} = \delta^*$$

donde $\delta^* = \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n})$

Conclusión: $\delta s \le \delta_s = \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n})$

Error absoluto de una función

El error absoluto de una función tiende al error absoluto de su variable por el valor absoluto de su derivada cuando el error absoluto de la variable tiende a cero:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f \to \Delta x \,|\, f'|$$

Demostración:

- Suponemos *a* una aproximación a *x* y su error absoluto $\Delta x = |x - a|$
- Por definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x \pm \Delta x)}{\pm \Delta x}$$

Error absoluto de una función

El error absoluto de una función tiende al error absoluto de su variable por el valor absoluto de su derivada cuando el error absoluto de la variable tiende a cero.

- Si calculamos su valor absoluto:

$$|f'(x)| = \left| \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x \pm \Delta x)}{\pm \Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f(x) - f(a)|}{\Delta x}$$

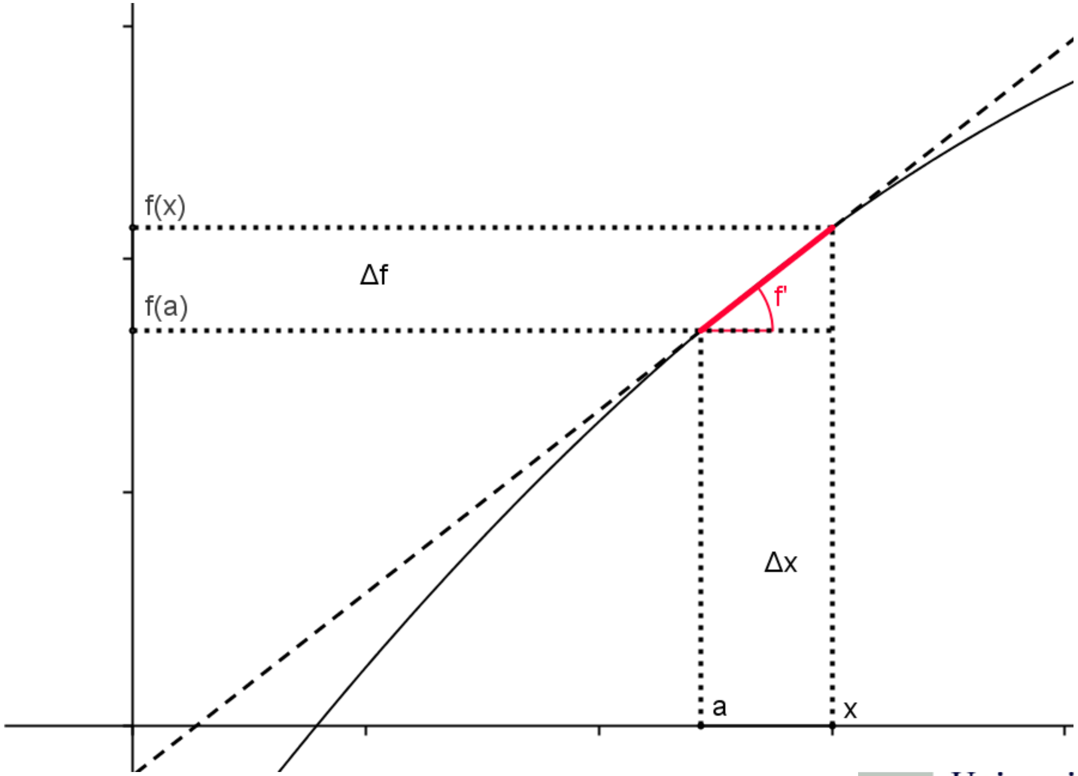
$$|f'(x)| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad |f'| \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \Delta f \approx \Delta x\, |f'|$$

Error absoluto de una función

El error absoluto de una función tiende al error absoluto de su variable por el valor absoluto de su derivada cuando el error absoluto de la variable tiende a cero.

Interpretación:

$$\Delta f \approx \Delta x \,| f'|$$



Error absoluto de un logaritmo

El error absoluto del logaritmo natural tiende al error relativo de su variable cuando el error absoluto de esta variable tiende a *0*.

$$f(x) = \ln(x) \qquad \Delta f(x) \approx \Delta x \cdot \left| f'(x) \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Delta \ln(x) \approx \frac{\Delta x}{|x|} = \delta x$$

El error absoluto del logaritmo natural tiene como cota la cota del error relativo de *x*.

$$\Delta \ln(x) \approx \frac{\Delta x}{|x|} \leq \frac{\Delta_x}{|x|} = \delta_x \qquad \delta_x = \Delta_{\ln(x)}$$

Error absoluto de un raíz

El error absoluto de una raíz cuadrada tiende al error absoluto de su variable partido dos veces el valor de la función, cuando el error absoluto de esta variable tiende a *0*.

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \Delta f(x) \approx \Delta x \cdot \left| f'(x) \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \Delta\sqrt{x} \approx \frac{\Delta x}{2\left|\sqrt{x}\right|}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{(23 \pm 1{,}09)} \approx \sqrt{23} \pm \left(1{,}09 \times \frac{1}{2\left|\sqrt{23}\right|} \right) \approx$$

$$\approx \pm(4{,}796 \pm 0{,}11364) \approx \pm(4{,}796 \pm 2{,}37\%)$$

Error relativo del producto

El error relativo del producto está acotado por la suma de los errores relativos de los factores:

- Valor exacto $P = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$
- Aproximación $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

$$\ln(p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_n)$$

$$\Delta_{\ln(p)} \leq \Delta_{\ln(a_1)} + \Delta_{\ln(a_2)} + \ldots + \Delta_{\ln(a_n)}$$

$$\delta_p \leq \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_n}$$

Error relativo del cociente

El error relativo del cociente está acotado por la suma de los errores relativos del dividendo y el divisor:

- Valor exacto $C = A_1 / A_2$
- Aproximación $c = a_1 / a_2$

$$\ln(c) = \ln(a_1) - \ln(a_2)$$

$$\Delta_{\ln(c)} \leq \Delta_{\ln(a_1)} + \Delta_{\ln(a_2)}$$

$$\delta_c \leq \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$$

Ejemplo 1

Si $A_1 = 5 \pm 0{,}25$,
$A_2 = 2 \pm 0{,}1$,
$A_3 = 4 \pm 0{,}2$,

Calcula $$\frac{A_3\,(A_1 + A_2)}{A_3 - A_2}$$

Ejemplo 1

Si $A_1=5 \pm 0,25$,
$A_2=2 \pm 0,1$,
$A_3=4 \pm 0,2$,

Calcula $\dfrac{A_3\,(A_1 + A_2)}{A_3 - A_2}$

$$\frac{(4 \pm 0,2)[(5 \pm 0,25) + (2 \pm 0,1)]}{(4 \pm 0,2) - (2 \pm 0,1)} = \frac{(4 \pm 0,2)(7 \pm 0,35)}{(2 \pm 0,3)} =$$

$$= \frac{(4 \pm 5\%)(7 \pm 5\%)}{(2 \pm 15\%)} = \frac{(28 \pm 10\%)}{(2 \pm 15\%)} = 14 \pm 25\% = 14 \pm 3,5$$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$
Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$
Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$
Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

$AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$

$4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$

$B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$
Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$$A = 1 \pm 2\%$$
$$B = -5 \pm 1\%$$
$$C = 6 \pm 0{,}5\%$$

$$AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$$
$$4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$$
$$B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$$
$$B^2 - 4AC = 1 \pm 1{,}1$$
$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(\frac{1{,}1}{2\left|\sqrt{1}\right|}\right) = 1 \pm 0{,}55$$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$
Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$$A = 1 \pm 2\% \qquad AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$$

$$B = -5 \pm 1\% \qquad 4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$$

$$C = 6 \pm 0{,}5\% \qquad B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$$

$$B^2 - 4AC = 1 \pm 1{,}1$$

$$2A = 2 \pm 2\% \qquad \sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(\frac{1{,}1}{2\left|\sqrt{1}\right|}\right) = 1 \pm 0{,}55$$

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2\mathrm{A}} = \frac{6 \pm 0{,}60}{2 \pm 0{,}04} = \frac{6 \pm 10\%}{2 \pm 2\%} = 3 \pm 12\% = 3 \pm 0{,}36$$

Ejemplo 2

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$$A = 1 \pm 2\% \qquad AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$$

$$B = -5 \pm 1\% \qquad 4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$$

$$C = 6 \pm 0{,}5\% \qquad B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$$

$$B^2 - 4AC = 1 \pm 1{,}1$$

$$2A = 2 \pm 2\% \qquad \sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(\frac{1{,}1}{2\left|\sqrt{1}\right|}\right) = 1 \pm 0{,}55$$

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2\mathrm{A}} = \frac{6 \pm 0{,}60}{2 \pm 0{,}04} = \frac{6 \pm 10\%}{2 \pm 2\%} = 3 \pm 12\% = 3 \pm 0{,}36$$

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2\mathrm{A}} = \frac{4 \pm 0{,}60}{2 \pm 0{,}04} = \frac{4 \pm 15\%}{2 \pm 2\%} = 2 \pm 17\% = 2 \pm 0{,}34$$