

Esercizi svolti da gente brava e spunti di teoria
per la prova scritta del corso di
Metodi e Modelli Matematici per la Fisica 2



a cura di
Alessandro Marcelli
2023

Contents

Note introduttive	iii
0.1 Ciancio alle bande	iii
0.2 Crediti	iii
0.3 Contatti	iii
1 Funzioni analitiche, prolungamenti ed espansioni asintotiche	1
1.1 Indicatore Logaritmico (Davide Bufalini)	1
1.2 Inversione e reciprocità locale (Davide Bufalini)	2
1.2.1 Funzione reciproca	2
1.2.2 Funzione inversa	3
1.2.3 Esempio: Numeri di Eulero	4
1.2.4 Esempio: Numeri di Bernoulli	4
1.3 Espansione di Mittag-Leffler (Davide Bufalini)	5
1.3.1 Esempio: cotangente	5
1.3.1.1 Calcolo dell'espansione	5
1.3.1.2 Verifica dell'espansione	5
1.3.2 Esempio: $\sin^{-2}(z)$	7
1.4 Sommerfeld-Watson (Davide Bufalini)	9
1.4.1 Esempio 1	9
1.5 Funzioni speciali (Alessandro Marcelli)	10
1.5.1 Funzione Gamma di Eulero	10
1.5.2 Funzione Digamma	10
1.5.3 Funzione beta di Eulero	10
1.5.4 Funzione zeta di Riemann generalizzata	10
1.6 Espansione di Weierstrass (Davide Bufalini)	10
1.7 Espansioni asintotiche (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)	11
1.7.1 Definizione molto generale (Alessandro Marcelli)	11
1.7.2 Metodo risolutivo generalizzato (Paolo Proia)	11
1.7.3 Esempio svolto con metodo generalizzato (Paolo Proia)	12
1.7.4 Esempio 1 (Davide Bufalini)	13
1.7.5 Esempio 2 (Davide Bufalini)	15
1.7.6 Esempio 3 (Davide Bufalini)	17
1.7.7 Metodo del punto di sella (Davide Bufalini)	19
1.7.8 Esempio 1	19
1.7.9 Esempio 2	22
2 Operatori Infinito-Dimensionali	25
2.1 Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)	25
2.1.1 Nozioni generali sugli spazi	25
2.1.1.1 Spazi vettoriali	25
2.1.1.2 Spazi metrici, normati ed euclidei	26
2.1.2 Operatori	26
2.1.2.1 Spettri per operatori Infinito-Dimensionali	27

2.1.2.2	Operatori integrali	28
2.1.2.3	Operatori differenziali reali	29
2.2	Operatori integrali (Davide Bufalini)	30
2.2.1	Esempio 1	30
2.2.2	Esempio 2	33
2.3	Operatori differenziali (Davide Bufalini)	35
2.3.1	Esempio 1: Operatore Differenziale del Ilo Ordine	35
2.3.2	Esempio 2	37
2.4	Operatori a blocchi (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)	39
2.4.1	Esempio 1 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Paolo Proia)	39
2.4.2	Esempio 2 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)	44
3	Equazioni Differenziali	49
3.1	Equazioni Differenziali Reali (Adriano Chialastri)	49
3.1.1	Messaggio dall'autore	49
3.1.2	Esempio 1: Problema di Cauchy	49
3.1.3	Esempio 2: Omogenea di Eulero	52
3.1.4	Esempio 3: Problema di Sturm-Liouville	53
3.1.5	Esempio 4: Problema di Cauchy non lineare	55
3.2	Equazioni Differenziali Complesse	58

Note introduttive

0.1 Ciancio alle bande

Questa ”dispensa” è una raccolta di materiale utile (almeno al momento della scrittura di questa introduzione) alla prova scritta dell’esame di Metodi e Modelli Matematici per la Fisica 2 del corso di laurea magistrale in Fisica dell’Università Tor Vergata.

L’intento iniziale era di semplicemente raccogliere esercizi svolti da gente brava che nel corso del tempo ho ~~sciacallato~~ raccolto durante la preparazione di questa prova scritta, come esercizio personale ai fini di comprenderli al meglio, modificandoli quel tanto che bastava per passare dal ”calcolo su foglio” a roba che sembra effettivamente una dispensa.

La cosa è poi come al solito deragliata, e quando possibile ho cercato di aggiungere dei minimi richiami di teoria qualora fossero assenti dagli appunti. Sul successo dell’operazione lascio il giudizio ai posteri, ammesso che ce ne saranno.

Ben lungi dall’essere un lavoro perfetto, ma sinceramente spero di non fare in tempo a renderlo tale (RIP Equazioni Differenziali in campo complesso).

0.2 Crediti

Nei titoli degli argomenti sono creditati i vari autori dei materiali raccolti. Qualora una sezione fosse composta da materiale di più persone, queste sono prima creditate nel titolo della sezione e poi nelle sottosezioni rilevanti. Se invece una sezione è farina del sacco di un solo autore, questo viene creditato solo nel titolo della sezione.

Detto in parole povere, ste dispense sono l’equivalente di un mixtape, e a parte che con il buon Paolo, non ho collaborato con gli altri due autori (dei quali ho però la benedizione a pubblicare queste dispense), mi sono limitato a fare l’amanuense con il loro lavoro. Ergo se avete cacciato soldi per avere sto documento vi hanno truffato.

0.3 Contatti

Qualora eventuali futuri ~~masochisti~~ utenti volessero contribuire a quest’accrocchio mi si può raggiungere all’indirizzo **marcelli.alessandro.92@gmail.com**

Chapter 1

Funzioni analitiche, prolungamenti ed espansioni asintotiche

1.1 Indicatore Logaritmico (Davide Bufalini)

Data una funzione $f(z)$ meromorfa, si definisce l'**indicatore logaritmico** come

$$L_f(z) = \frac{d}{dz} \ln(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (1.1)$$

$L_f(z)$ sarà dotata di poli semplici.

Facciamo alcune osservazioni:

1. Se $f(z)$ ha N poli e K zeri allora

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{l=1}^M r_l \quad (1.2)$$

Le quantità m_i e r_l sono rispettivamente le molteplicità dei poli e degli zeri di $f(z)$.

2. Per l'indicatore logaritmico vale la seguente relazione

$$\int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \text{Arg}(f(z)) \quad (1.3)$$

3. In generale vale che

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) \phi(z) = \sum_{i=1}^N m_i \phi(a_i) - \sum_{l=1}^M r_l \phi(b_l) \quad (1.4)$$

Dove a_i e b_l sono rispettivamente i poli e gli zeri di $\phi(z)$.

1.2 Inversione e reciprocità locale (Davide Bufalini)

Sia una $f(z)$ analitica con centro dello sviluppo in z_0 tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.5)$$

allora, preso un intorno di z_0 , vi si possono definire la reciproca della funzione $\frac{1}{f}$ e la sua inversa z^{-1} .

1.2.1 Funzione reciproca

Definiamo la reciproca come

$$\frac{1}{f} = \sum_k c_k (z - z_0)^k \quad (1.6)$$

Allora per definizione avremo, considerando la 1.5

$$\sum_k c_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n = 1 \quad (1.7)$$

\downarrow

$$\sum_{k,n} c_k a_n (z - z_0)^{n+k} = 1 \quad (1.8)$$

Riscriviamo la 1.8 come

$$\sum_{l=0}^{+\infty} d_l (z - z_0)^l = 1 \quad (1.9)$$

definendo

$$l = n + k \quad (1.10)$$

$$d_l = \sum_{n=0}^l c_{l-n} a_n \quad (1.11)$$

Vediamo come

$$1 = d_0 = c_0 a_0 \quad \rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{a_0} \quad (1.12)$$

$$0 = d_1 = c_0 a_1 + c_1 a_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} = -\frac{a_1}{a_0} c_0 \quad (1.13)$$

$$0 = d_2 = c_0 a_2 + c_1 a_1 + c_2 a_0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \dots = -\frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \quad (1.14)$$

\dots

Andiamo ora a scrivere

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}(z - z_0) + \frac{a_2}{a_0}(z - z_0)^2 + \dots} := \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - h(z)} \quad (1.15)$$

Siccome $|h(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, possiamo appoggiarci al concetto di serie geometrica

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0} \cdot (1 + h(z) + h^2(z) + \dots) \quad (1.16)$$

1.2.2 Funzione inversa

Iniziamo notando come $F(z_0) = a_0$, da cui troviamo che, definendo

$$g(w) = f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(w - w_0)^n \quad (1.17)$$

Si ottiene

$$g(w_0) = f^{-1}(w_0) = b_0 = z_0 \quad (1.18)$$

Possiamo quindi procedere in due modi:

1. Per serie:

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = w - w_0 \quad (1.19)$$

\downarrow

$$z - z_0 = g(w) - g(w_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(w - w_0)^n \quad (1.20)$$

\downarrow

$$w - w_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(w - w_0)^k \right)^n \quad (1.21)$$

2. Formula di Lagrange:

$$b_0 = g(w_0) = z_0 \quad (1.22)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right] \Big|_{z=z_0} \quad (1.23)$$

1.2.3 Esempio: Numeri di Eulero

Data la relazione

$$\frac{1}{\coth(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \quad (1.24)$$

$$E_{2n+1} = 0 \quad \forall n \quad (1.25)$$

$$E_n = \text{numeri di eulero} \quad (1.26)$$

1.2.4 Esempio: Numeri di Bernoulli

1.3 Espansione di Mittag-Leffler (Davide Bufalini)

Presa una $f(z)$ analitica nell'origine e con infiniti poli semplici che si accumulano all'infinito, vale la seguente approssimazione

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cdot \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \quad (1.27)$$

$$R_n = \text{Res}(f, z_n) \quad (1.28)$$

1.3.1 Esempio: cotangente

1.3.1.1 Calcolo dell'espansione

La funzione

$$f(z) = \cot(z) \quad (1.29)$$

ha poli in $z_n = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, ma **non** è analitica in $z = 0$.

Per eliminare la singolarità in 0 considero allora la funzione

$$f(z) = \cot(z) - \frac{1}{z} \quad (1.30)$$

I cui residui saranno

$$R_n = \lim_{z \rightarrow n\pi} \left[(z - n\pi) \cdot \frac{z \cot(z) - 1}{z} \right] = \dots = 1 \quad (1.31)$$

Applicando lo sviluppo ottengo

$$\cot(z) - \frac{1}{z} = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \quad (1.32)$$

↓

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n > 0} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} - \left(\frac{1}{-z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right] = \\ &= \dots = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n > 0} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.3.1.2 Verifica dell'espansione

Dimostrare la validità della relazione

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n > 0} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \quad (1.34)$$

Iniziamo dimostrando l'analiticità. Come abbiamo visto prima, dobbiamo prendere

$$f(z) = \cot(z) - \frac{1}{z} \quad (1.35)$$

Andiamo quindi a calcolarne il limite in 0

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} \cot(z) \frac{1}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z \cos(z)}{\sin(z)} - 1}{z} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z \sin(z)} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) \cdot [z - \tan(z)]}{z - \sin(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cot(z)}{z} \cdot (z - \tan(z)) = 1 \cdot 0 = 0
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Verificata l'analiticità, procediamo a studiare poli e residui della funzione.

Avremo dei poli semplici quando $\sin(z) = 0$, e quindi per $z_n = n\pi$, con $n = 0$ **escluso**, in quanto vi si annulla la funzione. Ne segue che i residui saranno

$$Res(f, z_n) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cdot \frac{z \cot(z) - 1}{z} \tag{1.37}$$

Facendo il cambio di variabile $u = z - n\pi$ otteniamo

$$Res(f, z_n) = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cot(u + n\pi) - 1}{u + n\pi} \tag{1.38}$$

Se però osserviamo un attimo il termine $\cot(u + n\pi)$ notiamo come lo si possa manipolare nel seguente modo

$$\cot(u + n\pi) = \frac{\cos(u + n\pi)}{\sin(u + n\pi)} = \frac{\cos(u) \cdot (-1)^n}{\sin(u) \cdot (-1)^n} = \frac{\cos(u)}{\sin(u)} = \cot(u) \tag{1.39}$$

Possiamo quindi riscrivere la 1.45 come

$$\begin{aligned}
 Res(f, z_n) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cot(u) - 1}{u + n\pi} \simeq \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cdot \frac{1}{u} - 1}{u + n\pi} = \\
 &= \frac{u + n\pi - u}{u + n\pi} \Big|_{u=0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Possiamo quindi applicare lo sviluppo

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\
 &= \sum_{n>0} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} - \left(\frac{1}{-z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right] = \\
 &= 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - (n\pi)^2}
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

E la tesi è così dimostrata.

1.3.2 Esempio: $\sin^{-2}(z)$

Utilizziamo l'integrale (di Cauchy? Chiedere)

$$I_n = \oint_{Q_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z) \sin^2(\zeta)} \quad (1.42)$$

Studiando i poli otteniamo

$$\zeta_0 = z \quad \text{polo semplice} \quad (1.43)$$

$$\zeta_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{poli doppi} \quad (1.44)$$

Siccome $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) + \text{Res}(f(\zeta), z) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) + \frac{1}{\sin^2(z)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Da cui otteniamo

$$\frac{1}{\sin^2(\zeta)} = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) \quad (1.46)$$

Dato che

$$\text{Res}(f(\zeta), n\pi) = \lim_{\zeta \rightarrow n\pi} \frac{d}{d\zeta} \frac{(\zeta - n\pi)^2}{(\zeta - z) \sin^2(\zeta)} \quad (1.47)$$

\downarrow

$$\begin{cases} u = \zeta - n\pi \\ \zeta = u + n\pi \end{cases}$$

\downarrow

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \sin^2(u + n\pi)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z)(-1)^{2n} \sin^2(u)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \left(u - \frac{u^3}{3!} + \dots\right)^2} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \left(u - \frac{u^3}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{1}{(u + n\pi - z) \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{1}{(u + n\pi - z) \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{\left(1 + \frac{u^2}{3!} - \dots\right)^2}{(u + n\pi - z)} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{\left(1 + \frac{u^2}{3} + \dots\right)}{(u + n\pi - z)} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}u + \dots\right)(u + n\pi - z) - \left(1 + \frac{u^2}{3}\right)}{(u + n\pi - z)^2} \Bigg|_{u=0} = -\frac{1}{(n\pi - z)^2} \end{aligned} \quad (1.48)$$

La 1.45 diventa

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n\pi - z)^2} \quad (1.49)$$

1.4 Sommerfeld-Watson (Davide Bufalini)

Utile strumento per il calcolo delle somme di serie. Sia una funzione $g(z)$ analitica ovunque tranne che in singolarità polari isolate z_k e sia

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |zq(z)| = 0 \quad (1.50)$$

Allora valgono le seguenti relazioni

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n g(n) = -\pi \sum_k \text{Res} \left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)}, z = z_k \right) \quad (1.51)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = -\pi \sum_k \text{Res} (g(z) \cot(\pi z), z = z_k) \quad (1.52)$$

1.4.1 Esempio 1

Calcolare la somma della serie

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.53)$$

Iniziamo notando che possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = 2S(a) + \frac{1}{a^2} \quad (1.54)$$

Ponendo

$$g(z) = \frac{1}{n^2 + a^2} \quad (1.55)$$

Otteniamo

$$z^2 + a^2 = 0 \quad (1.56)$$

$$\downarrow$$

$$z_p = \pm ia \quad (1.57)$$

E possiamo quindi applicare SW

$$\lim_{z \rightarrow \pm ia} \frac{z \pm ia}{z^2 + a^2} \cdot \frac{1}{\sin(\pi z)} = \dots = -\frac{1}{2a \sinh(\pi a)} \quad (1.58)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\pi \text{Res} \left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)}, z_p \right) = -\frac{\pi}{2a \sinh(\pi a)}$$

$$\downarrow$$

$$S(a) = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a \sinh(\pi a)} \quad (1.59)$$

1.5 Funzioni speciali (Alessandro Marcelli)

1.5.1 Funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = \dots = \text{Integrale Euleriano di II tipo} \quad (1.60)$$

$$= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \quad (1.61)$$

Gode della proprietà

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.62)$$

↓

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.63)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \xi\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \xi\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi\xi)} \quad (1.64)$$

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (1.65)$$

$$\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)} \quad (1.66)$$

In campo complesso si può prolungare tramite il cammino di Hankel, e si arriva ad ottenere

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (1.67)$$

1.5.2 Funzione Digamma

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \quad (1.68)$$

1.5.3 Funzione beta di Eulero

$$B(p, q) = \int_0^1 dt t^{p-1} (1-t)^{q-1} = \dots = \text{Integrale Euleriano di I tipo} \quad (1.69)$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.70)$$

1.5.4 Funzione zeta di Riemann generalizzata

Sono stanco capo.

1.6 Espansione di Weierstrass (Davide Bufalini)

Presa una $f(z)$ con infiniti zeri z_j numerabili di ordine α_j che si accumulano all'infinito (e mai allo zero???) allora vale lo sviluppo

$$f(z) = f(0) e^{z \frac{f'(0)}{f(0)}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \frac{z}{z_n}} \quad (1.71)$$

1.7 Espansioni asintotiche (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)

1.7.1 Definizione molto generale (Alessandro Marcelli)

Lo sviluppo in serie può essere esteso anche al caso in cui la funzione oggetto di studio $f(z)$ non sia analitica in z_0 , trovando uno sviluppo $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ che approssima "bene" il comportamento della funzione in un intorno di z_0 , ovvero che valgono le due seguenti proprietà:

1. il resto della serie $R_N(z) = f(z) - S_N(z)$ è tale che $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|R_N(z)|}{|f_N(z)|} = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$
2. la serie fornisce una buona approssimazione di $f(z)$ solo in determinate regioni del piano complesso

1.7.2 Metodo risolutivo generalizzato (Paolo Proia)

Nel nostro caso ci interessiamo della famiglia di funzioni integrali del tipo

$$F(x) = \int_a^b dt e^{x\phi(t)} g(t) \quad (1.72)$$

1. Trovare massimo per $\phi(t)$ (chiamiamo t_0)
2. Espandere $g(t)$ intorno a t_0 per 2 o 3 termini
3. Prendere nota dell'esponente dell'ultimo termine (definiamo come n)
4. Parametrizzare come

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.73)$$

e se necessario espandere $\phi(t)$ intorno a t_0 fino ad ordine n

5. Trovare cambio di variabile da t a τ , imponendo

$$t - t_0 = h(\tau) = \sum_i^{n+1} c_i \tau^i \quad (1.74)$$

6. Sostituiamo nella 1.73 tenendo i termini fino a τ^{n+1}
7. Imporre l'uguaglianza tra i coefficienti con la stessa potenza di τ a dx e sx, trovando così $h(\tau)$
8. Essendo $h(\tau) = t + \text{cost.}$ abbiamo che $\dot{h}d\tau = dt$ e abbiamo così terminato il cambio di variabile
9. Sostituiamo nella 1.72

$$\phi(t) = \phi(t_0) - \tau^2 \quad (1.75)$$

$$dt = \dot{h}d\tau \quad (1.76)$$

$$g(t) \rightarrow g(h(\tau)) \quad (1.77)$$

Nella 1.77 usiamo direttamente l'espansione in serie del punto 2

10. Svolgiamo il prodotto $\dot{h}g(h(\tau))$ e teniamo i primi due termini il cui integrale è non nullo

NOTA BENE: qualora una delle due funzioni sia una trigonometrica elevata a potenza conviene sviluppare solo la trigonometrica e mettere a potenza lo sviluppo, e fare altri magheggi quali utilizzare le relazioni trigonometriche per fare il meno conti possibile.

1.7.3 Esempio svolto con metodo generalizzato (Paolo Proia)

Sia la seguente funzione integrale

$$I(t) = \int_1^{+\infty} dt e^{-x \frac{t^2}{2}} t^x \frac{1}{t^2 + 1} = \int_1^{+\infty} dt e^{-x \frac{t^2}{2}} e^{x \ln(t)} \frac{1}{t^2 + 1} = \int_1^{+\infty} dt e^{x(\ln(t) - \frac{t^2}{2})} \frac{1}{t^2 + 1} \quad (1.78)$$

$$\phi(t) = \ln(t) - \frac{t^2}{2} \quad (1.79)$$

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \quad (1.80)$$

1. Trovare massimo per $\phi(y)$ (chiamiamo y_0)

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{t} - t = \frac{1 - t^2}{t} = 0 \rightarrow t = \pm 1 \quad (1.81)$$

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 = -\frac{t^2 + 1}{t^2} \quad (1.82)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{2}{t^3} \quad (1.83)$$

Escludiamo il risultato negativo, siccome $\phi(t)$ non è definito in quel punto. Abbiamo quindi

$$t_0 = +1 \quad ; \quad \phi_0 = -\frac{1}{2} \quad (1.84)$$

2. Espandiamo $g(t)$ intorno a t_0

$$g(t) \simeq g(t_0) + g'(t_0) \cdot (t - t_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t - 1) = 1 - \frac{t}{2} \quad (1.85)$$

3. Notiamo come ci siamo fermati per $n = 1$

4. Parametrizziamo

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} + 0 \cdot (t - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (t - 1)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2(t - t_0)^3 = -\frac{1}{2} - (t - 1)^2 + \frac{1}{3}(t - t_0)^3 = -\tau^2 \quad (1.86)$$

5. Troviamo cambio di variabile da t a τ , fermandoci al terzo ordine, essendo lo sviluppo in t al 3o ordine

$$t - t_0 = t - 1 = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + O(\tau^4) \quad (1.87)$$

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} - (c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^2 + \frac{1}{3}(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^3 \quad (1.88)$$

6. Andiamo quindi a sostituire

$$\begin{aligned} \phi(t) + \frac{1}{2} &= -(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^2 + \frac{1}{3}(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^3 = \dots = \\ &= -c_1^2\tau^2 - 2c_1c_2\tau^3 + \frac{1}{3}c_1^3\tau^3 \end{aligned} \quad (1.89)$$

7. Andiamo ora a confrontare

$$\phi(t) + \frac{1}{2} = -\tau^2 \quad (1.90)$$

$$\phi(t) + \frac{1}{2} = -c_1^2\tau^2 - 2c_1c_2\tau^3 + \frac{1}{3}c_1^3\tau^3 \quad (1.91)$$

Ne segue che

$$-c_1^2 \tau^2 = -\tau^2 \rightarrow c_1 = 1 \quad (1.92)$$

$$-2c_1 c_2 \tau^3 + \frac{1}{3} c_1^3 \tau^3 = 0 \rightarrow -2c_2 + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{6} \quad (1.93)$$

Abbiamo così trovato

$$t - 1 = h(\tau) = \tau + \frac{1}{6} \tau^2 \quad (1.94)$$

8. Sostuiamo e troviamo

$$t - 1 = \tau + \frac{1}{6} \tau^2 \rightarrow d(t - 1) = dt = \left(1 + \frac{1}{3} \tau\right) d\tau \quad (1.95)$$

9. Sostituiamo infine nella nostra funzione integrale

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(1 + \frac{1}{3} \tau\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{6} \tau - \frac{1}{6} \tau^2\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \tau\right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \tau\right) \end{aligned} \quad (1.96)$$

10. abbiamo quindi

$$I(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau \right) \quad (1.97)$$

1.7.4 Esempio 1 (Davide Bufalini)

Calcolare per $x \rightarrow +\infty$ i primi due termini dell'espansione per la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt e^{x \cos(t)} \sin^3(t) \quad (1.98)$$

Partiamo dal **termine Leading**. Siccome abbiamo

$$\phi(t) = \cos(t) \quad (1.99)$$

$$g(t) = \sin^3(t) \quad (1.100)$$

Andiamo a cercarne il punto di massimo, che troviamo in

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\sin(t) \quad (1.101)$$

↓

$$\sin(t) = 0$$

↓

$$t_0 = 0 \quad (1.102)$$

Andiamo quindi a sviluppare

$$\phi(t) \simeq 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \quad (1.103)$$

$$g(t) \simeq \left(t - \frac{t^3}{6}\right)^3 \simeq t^3 \quad \text{termine leading} \quad (1.104)$$

E otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt e^{x(1-\frac{t^2}{2})} t^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} dt e^x e^{-x\frac{t^2}{2}} t^3 \end{aligned} \quad (1.105)$$

Applicando la sostituzione

$$y = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad t^2 = 2y \quad (1.106)$$

$$dy = t dt \quad (1.107)$$

Possiamo arrivare ad ottenere il termine cercato

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy e^x e^{-xy} 2y = \\ &= 2e^x \int_0^{+\infty} dy e^{-xy} y = \\ &= 2e^x \frac{\Gamma(2)}{x^2} = \frac{2e^x}{x^2} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Per quanto riguarda il termine **Sub-leading**, andiamo a parametrizzare la $\phi(t)$ nel seguente modo

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.109)$$

\downarrow

$$\cos(t) - 1 = -\tau^2$$

\downarrow

$$t = \arccos(i - \tau^2) \quad (1.110)$$

\downarrow

$$dt = -\frac{d\tau}{\sqrt{1 - (1 - \tau^2)^2}} \cdot (-2\tau) = \frac{2\tau d\tau}{\sqrt{2\tau^2 - \tau^4}} = \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} \quad (1.111)$$

Andiamo così a trovare i primi due termini dell'espansione

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{1 - \cos^2(t)})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{1 - (1 - \tau^2)^2})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{2\tau^2 - \tau^4})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\tau\sqrt{2 - \tau^2})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} 2d\tau e^{x(1-\tau^2)} \tau^3 (2 - \tau^2) = \\ &= 2e^x \left[2 \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^3 - \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^5 \right] = \\ &= 2e^x \left[2 \frac{\Gamma(2)}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)}{x^3} \right] = \\ &= \frac{2e^x}{x^2} - \frac{2e^x 2!}{2x^3} = \\ &= \frac{2e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3} \end{aligned} \quad (1.112)$$

1.7.5 Esempio 2 (Davide Bufalini)

Calcoliamo i termini **Leading** e **Subleading** per la funzione

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x \cosh(t)} \quad (1.113)$$

Iniziamo individuando le nostre funzioni

$$\phi(t) = -\cosh(t) \quad (1.114)$$

$$g(t) = 1 \quad (1.115)$$

↓

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \sinh(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t_0 = 0 \quad (1.116)$$

Iniziamo col termine **Leading**. Sviluppando intorno a t_0 otteniamo

$$\phi(t) \simeq -\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \quad (1.117)$$

↓

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x} e^{-x \frac{t^2}{2}} = e^{-x} \frac{2\pi}{x} \quad (1.118)$$

Per quanto riguarda il termine **Subleading** andiamo a parametrizzare

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.119)$$

↓

$$\cosh(t) - (-1) = -\tau^2 \quad (1.120)$$

Siccome abbiamo

$$dt = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau \quad (1.121)$$

Dobbiamo trovare una espressione per $t(\tau)$ per il calcolo dello Jacobiano.

Siccome abbiamo $t_0 = 0$ andiamo a sviluppare per t piccoli

$$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots \quad (1.122)$$

↓

$$\chi + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots = \chi + \tau^2$$

↓

$$\frac{t^2}{2} \left(1 + \frac{t^2}{12} \right) = \tau^2 \quad (1.123)$$

↓

$$t^2 = \frac{2\tau^2}{1 + \frac{t^2}{12}} = 2\tau^2 \left(1 - \frac{t^2}{12} + \left(\frac{t^2}{12} \right)^2 + \dots \right) \simeq 2\tau^2 - 2\tau^2 \frac{t^2}{12} \quad (1.124)$$

↓

$$t^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{6} \right) = 2\tau^2$$

↓

$$t^2 = \frac{2\tau^2}{1 + \frac{\tau^2}{6}}$$

↓

$$t = \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{6}}} \simeq \sqrt{2}\tau \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{6} \right) = \sqrt{2}\tau \left(1 - \frac{\tau^2}{12} \right) \quad (1.125)$$

Dunque otteniamo

$$t = \sqrt{2}\tau - \frac{\sqrt{2}}{12}\tau^3 \quad (1.126)$$

↓

$$dt = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\tau^2 \right) d\tau \quad (1.127)$$

Possiamo quindi finalmente sostituire

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}x} = \\ &= e^{-x} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\tau^2 \right) = \\ &= e^{-x} \sqrt{2} \left[\int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} - \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \frac{1}{4}\tau^2 \right] = \\ &= e^{-x} \sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right] = \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} - \frac{1}{8x} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[1 - \frac{1}{8x} \right] \end{aligned} \quad (1.128)$$

1.7.6 Esempio 3 (Davide Bufalini)

Data la funzione

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} dt e^{-\frac{x}{\sin(t)}} (1 + \cot(t)) \quad (1.129)$$

se ne calcoli l'espansione.

Iniziamo trovando il punto di sella

$$\phi(t) = -\frac{1}{\sin(t)} \quad (1.130)$$

↓

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = 0 \quad (1.131)$$

↓

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \quad (1.132)$$

Siccome il punto cade su uno degli estremi, ci basta considerare $t(\tau) \sim o(\tau^2)$ Parametizziamo

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.133)$$

↓

$$-\frac{1}{\sin(t)} - \left(-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = -\tau^2$$

↓

$$-\frac{1}{\sin(t)} = 1 + \tau^2$$

↓

$$\sin(t) = -\frac{1}{1 + \tau^2} = 1 - \tau^2 + \tau^4 + \dots$$

↓

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \tau^2 + o(\tau^3) \quad (1.134)$$

Espandendo τ si ha che

$$t - \frac{\pi}{2} = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \dots \quad (1.135)$$

Sostituendo nella 1.134

$$\frac{1}{2} (c_1\tau + c_2\tau^2)^2 = \tau^2 \quad (1.136)$$

↓

$$c_1^2\tau^2 + 2c_1c_2\tau^3 + c_2^2\tau^4 = 2\tau^2$$

↓

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad (1.137)$$

Sostituendo nella 1.135 otteniamo

$$t - \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\tau + o(\tau^3) \quad (1.138)$$

↓

$$dt = \sqrt{2}d\tau \quad (1.139)$$

Sviluppiamo ora $g(t)$ intorno a t_0

$$g(t) = 1 + \cot(t) = 1 - \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sim 1 - \sqrt{2}\tau + o(\tau^3) \quad (1.140)$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra funzione integrale come

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{2} d\tau \, e^{-x(1+\tau^2)} (1 - \sqrt{2}\tau) = \\ &= \sqrt{2} e^{-x} \int_0^{+\infty} d\tau \, e^{-\tau^2} (1 - \sqrt{2}\tau) = \\ &= e^{-x} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{1}{x} \right] \end{aligned} \quad (1.141)$$

1.7.7 Metodo del punto di sella (Davide Bufalini)

Abbiamo finora visto integrali sulla retta reale. Qualora si abbia una generica curva $\gamma \in \mathbb{C}$ il procedimento si complica leggermente.

Presa una funzione integrale della forma

$$I(x) = \int_{\gamma} dt e^{x\phi(t)} g(t) \quad (1.142)$$

Qualora $\phi(t)$ e $g(t)$ siano analitiche in un dominio D e si abbia $\gamma \subseteq D$ abbiamo un problema. Infatti, riscrivendo la $\phi(t)$ nella seguente forma

$$\phi(t) = u(t) + iv(t) \quad (1.143)$$

All'interno del dominio non è detto che $v(t)$ sia costante, il che ci impedisce di restringerci al caso reale. Inoltre, per $t \in \gamma$ il termine $e^{iv(t)}$ oscilla fortemente, portando la $I(x)$ ad essere mediata a 0.

Cerchiamo un modo per rendere costante la $v(t)$ e rendere massima la $u(t)$, in modo da rispettare il comportamento asintotico. Il procedimento si snoda nei seguenti passaggi

1. Riscriviamo la $\phi(t)$ come

$$\phi(t) = \phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.144)$$

Possiamo farlo in più modi

- (a) Coordinate cartesiane, sostituendo $t = x + iy$
- (b) Coordinate polari, sostituendo $t = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i \arctan(\frac{x}{y})}$

2. Cerchiamo il punto di sella t_0 di $\phi(t)$ tale

$$\phi(t_0) = 0 \quad (1.145)$$

$$\ddot{\phi}(t_0) : \ddot{u}(t_0) < 0 \quad (1.146)$$

3. Cerchiamo quindi i percorsi a fase costante passanti per t_0 , ovvero ponendo $v(t) = v(t_0)$, da cui segue $Im(\phi(t))m = Im(\phi(t_0))$. Una volta trovati questi cammini, vediamo se è possibile deformare la curva γ su un cammino a fase costante γ^* dove $\ddot{u}(t_0) < 0$

4. Una volta trovato uesto cammino, risolviamo con i metodi noti per il caso reale

1.7.8 Esempio 1

Calcoliamo il termine leading per l'espansione asintotica della funzione integrale

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} dy e^{-x[2y^2 - (y-i)^2]} \frac{1}{y^2 + 2} \quad (1.147)$$

$$g(y) = \frac{1}{y^2 + 2} \quad (1.148)$$

$$\phi(y) = 2y^2 - (y - i)^2 \quad (1.149)$$

Iniziamo trovando il punto di sella di $\phi(y)$, e calcoliamo preliminarmente

$$\phi(y) = (y - i)^2 - 2y^2 = y^2 - 2iy - 1 - 2y^2 = -y^2 - 2iy - 1 \quad (1.150)$$

$$\dot{\phi}(y) = 2y + 2i \quad (1.151)$$

$$\ddot{\phi}(y) = 2 \quad (1.152)$$

Troviamo quindi che

$$2y + 2i = 0 \quad (1.153)$$

$$\downarrow$$

$$y_0 = -i \quad (1.154)$$

$$\downarrow$$

$$y_0 = (0, -1) \quad (1.155)$$

Passiamo in coordinate cartesiane sostituendo $y = a + ib$

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \phi(a, b) = -(a + ib)^2 - 2i(a + ib) - 1 = \\ &= -a^2 - 2iab + b^2 - 2ia + 2b - 1 = \\ &= (b^2 - a^2 + 2b - 1) - 2ia(b + 1) \end{aligned} \quad (1.156)$$

Da cui abbiamo che

$$u(a, b) = b^2 - a^2 + 2b - 1 \quad (1.157)$$

$$v(a, b) = -2a(b + 1) \quad (1.158)$$

Cerchiamo ora i cammini a fase costante passanti per y_0 . Sostituendo troviamo che

$$v(0, -1) = -2 \cdot 0 \cdot (0 + 1) = 0 \quad (1.159)$$

$$a(b + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{asse immaginario} \\ b = -1 & \text{asse reale traslato di } -i \end{cases} \quad (1.160)$$

Ma quale dei due cammini è quello che serve a noi? Andiamo a sostituire nell'espressione di $u(a, b)$:

1. Sostituiamo $a = 0$

$$u(0, b) = b^2 + 2b - 1 \quad (1.161)$$

$$\left. \frac{du}{db} \right|_{a=0} = 2b + 2 \quad (1.162)$$

$$\left. \frac{d^2u}{db^2} \right|_{a=0} = 2 \geq 0 \quad (1.163)$$

Siccome non abbiamo $\ddot{u} < 0$ questo cammino non va bene.

2. Sostituiamo $b = -1$

$$u(a, -1) = 1 - a^2 - 2 - 1 = -a^2 - 2 \quad (1.164)$$

$$\left. \frac{du}{da} \right|_{b=-1} = -2a \quad (1.165)$$

$$\left. \frac{d^2u}{da^2} \right|_{b=-1} = -2 \leq 0 \quad (1.166)$$

Il cammino giusto è quindi

$$\gamma^* = \{(a, b) \in \mathbb{C} : (a, b) = (a, -1)\} \quad (1.167)$$

I cui punti sono parametrizzati come

$$y = a - i \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.168)$$

E da cui segue che

$$\operatorname{Re}(\phi) = u(a, b) = -a^2 - 2 \quad (1.169)$$

$$\operatorname{Im}(\phi) = v(a, b) = 0 \quad (1.170)$$

Andiamo quindi a sostituire nella nostra funzione integrale ed otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} da \, e^{x[-2-a^2]} \frac{1}{a^2 - 2ia - 1 + 2} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} da \, e^{x[-2-a^2]} \frac{1}{a^2 - 2ia + 1} \end{aligned} \quad (1.171)$$

Siccome stiamo su sviluppando sul punto di sella $(0, -1)$ il denominatore può essere approssimato a 1, e abbiamo quindi

$$F(x) = e^{-2x} \int_{\mathbb{R}} da \, e^{-xa^2} = e^{-2x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \quad (1.172)$$

1.7.9 Esempio 2

Calcoliamo i termini Leading e Subleading per lo sviluppo asintotico della seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dx e^{ix(z^2-2z)} \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad (1.173)$$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad (1.174)$$

$$\phi(z) = i(z^2 - 2z) \quad (1.175)$$

Andiamo a calcolare le derivate di $\phi(z)$ e a trovare il punto di sella

$$\phi(z) = i(z^2 - 2z) \quad (1.176)$$

$$\dot{\phi}(z) = i(2z - 2) \rightarrow z_0 = 1 \quad (1.177)$$

$$\ddot{\phi}(z) = 2i \quad (1.178)$$

Passiamo in coordinate cartesiane ponendo $z = x + iy$ e otteniamo

$$z_0 = x_0 + iy_0 = 1 \rightarrow z_0 = (1, 0) \quad (1.179)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= i[(x + iy)^2 - 2x - 2iy] = i(x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy) = \\ &= i[(x^2 - y^2 - 2x) + 2i(xy - y)] = \\ &= 2y(1 - x) + i(x^2 - y^2 - 2x) \end{aligned} \quad (1.180)$$

Da cui quindi otteniamo

$$\phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.181)$$

$$u(x, y) = 2y(1 - x) \rightarrow u(0, 1) = 2 \quad (1.182)$$

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - 2x \rightarrow v(0, 1) = -1 \quad (1.183)$$

Vogliamo quindi trovare i percorsi tali che $Im(\phi(z)) = -1$. Per fare ciò poniamo

$$x^2 - y^2 - 2x = -1 \quad (1.184)$$

$$\downarrow$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$(x - 1)^2 = y^2$$

$$\downarrow$$

$$y = \pm(x - 1) \quad (1.185)$$

Le nostre curve sono quindi due rette. Cerchiamo ora quale fa al caso nostro

$$y_1 = x - 1 \rightarrow u_1(x) = -2(1 - x)^2 \rightarrow \dot{u}_1(x) = -4(1 - x) \quad (1.186)$$

$$y_2 = 1 - x \rightarrow u_2(x) = +2(1 - x)^2 \rightarrow \dot{u}_2(x) = +4(1 - x) \quad (1.187)$$

Studiando l'andamento delle derivate notiamo come $u_1(x)$ abbia un massimo in $x = 1$, e che quindi è la nostra curva d'interesse.

Andiamo ora a parametrizzare. Siccome i punti della nostra curva sono ruotati di 45° rispetto all'asse reale, scriviamo

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \tau \quad (1.188)$$

$$\downarrow$$

$$dz = e^{i\frac{\pi}{4}} d\tau \quad (1.189)$$

Possiamo quindi riscrivere

$$\begin{aligned}
\phi(\tau) &= i[(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\tau)^2 - 2(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\tau)] = \\
&= i[1 + 2e^{i\frac{\pi}{4}}\tau + e^{i\frac{\pi}{2}}\tau^2 - 2 - 2e^{i\frac{\pi}{4}}\tau] = \\
&= i(e^{i\frac{\pi}{2}}\tau^2 - 1) = \\
&= i(-i\tau^2 - 1) = -\tau^2 - i
\end{aligned} \tag{1.190}$$

Nota bene: abbiamo bisogno del termine subleading, ma questo non compare dalla formula del $d\tau$ che si ferma prima di τ^2 . Dobbiamo quindi sviluppare $g(z)$ intorno a z_0

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \Big|_{z=1+e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}}} \sim 1 - \cancel{\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4}\tau} + \frac{3}{8} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4} \tau^2 \tag{1.191}$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra funzione integrale come

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{\mathbb{R}} d\tau; \frac{e^{x(-i-\tau^2)}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{32}i\tau^2\right) e^{i\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} + \frac{3i}{32} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^2 \right] = \\
&= \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\pi}{x}} + \frac{3i}{32} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \right]
\end{aligned} \tag{1.192}$$

Chapter 2

Operatori Infinito-Dimensionali

2.1 Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)

2.1.1 Nozioni generali sugli spazi

2.1.1.1 Spazi vettoriali

Si definisce uno **spazio vettoriale** V come un insieme su un campo K (di solito \mathbb{R} o \mathbb{C}) dove sono definite le operazioni di

1. Somma vettoriale

$$V \times V \rightarrow V \quad (2.1)$$

$$(v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2 \quad (2.2)$$

2. Prodotto per uno scalare

$$K \times V \rightarrow V \quad (2.3)$$

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda v \quad (2.4)$$

Preso A sottoinsieme di V , ne definiamo i **punti di aderenza** come quei punti tali che, preso un loro intorno, contengono almeno un punto di A .

In particolare, preso un punto di aderenza z_0 , se nel suo intorno contiene almeno un punto $z_1 \neq z_0$ appartenente ad A , allora z_0 si dice **punto di accumulazione**.

Possiamo quindi dividere i punti di aderenza in due categorie

1. tutti i punti di A
2. i punti di accumulazione esterni ad A

Possiamo ora definire la **chiusura** \overline{A} come l'insieme dei punti di aderenza di A .

Un insieme A si dice **denso** in B se $B \subseteq \overline{A}$. In particolare se $\overline{A} = V$ l'insieme A si dice **ovunque denso**

2.1.1.2 Spazi metrici, normati ed euclidei

Dato uno spazio vettoriale V e, presi due elementi dello spazio x e y , definita la funzione **distanza** $d(x, y)$ tale che

$$d(x, y) \geq 0 \quad ; \quad d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y \quad (2.5)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (2.6)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad ; \quad \forall x, y, z \in M \quad (2.7)$$

Si definisce **Spazio Metrico** la coppia (V, d) .

Preso di nuovo lo spazio vettoriale V e presi $v, w \in V$ e $\alpha \in K$ si può definire la **norma** $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\|v\| \geq 0 \quad ; \quad \|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0 \quad (2.8)$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad (2.9)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (2.10)$$

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ si chiama **spazio normato**.

Importante: tutti gli spazi normati sono anche spazi metrici, con $d(x, y) = \|x - y\|$, ma non tutti gli spazi metrici sono normati.

In uno spazio metrico abbiamo che un punto $x_a \in M$ sarà

1. di **aderenza** se e solo se $\exists \{x_n\} \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_a$
2. di **accumulazione** se e solo se $\exists \{x_n \neq x_a\} \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_a$

Definiamo ora una **successione di Cauchy** come tale se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n > n_\epsilon \quad (2.11)$$

Possiamo quindi dire che uno spazio metrico V si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in esso definita è convergente.

Uno spazio **euclideo** è uno spazio normato la cui norma è definita attraverso un **prodotto scalare**, ovvero un'applicazione $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che, $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, soddisfa

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \text{Hermitianità} \quad (2.12)$$

$$(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z) \quad \text{Linearità} \quad (2.13)$$

$$(x, y) \geq 0 \quad ; \quad (x, x) = 0 \leftrightarrow x = 0 \quad (2.14)$$

Uno spazio euclideo completo si dice **spazio di Hilbert**.

2.1.2 Operatori

Presi due spazi di Hilbert H_1 e H_2 , definiamo un **operatore lineare** A come un'applicazione del tipo

$$A : \mathcal{D}_A \subseteq H_1 \rightarrow R_A \subseteq H_2 \quad (2.15)$$

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A(v) + \beta A(w) \quad ; \quad \forall v, w \in \mathcal{D}_A \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (2.16)$$

Un operatore si dice

1. **Limitato** se $\exists N \in \mathbb{R} : \|A(x)\| \leq N\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}_A$
2. **Continuo** se $\forall \{x_n\} \in \mathcal{D}_A : x_n \rightarrow x$ segue che $\lim_{n \rightarrow \text{infity}} A(x_n) = A(x)$ **Nota bene:** un operatore lineare (A, \mathcal{D}_A) è continuo se e solo se è limitato.

Iniziamo definendo il seguente funzionale lineare

$$x \rightarrow \phi_\nu(x) \quad (2.17)$$

$$\phi_\mu(x) = (\mu, Ax) \quad \forall x \in \mathcal{D}_A \quad (2.18)$$

Dato quindi un operatore A , si definisce il suo **aggiunto** A^\dagger come l'operatore per cui, grazie anche al teorema di Riesz

$$(\mu, Ax) = (A^\dagger \mu, x) \quad (2.19)$$

Se A è lineare, limitato e densamente definito ne segue che $\|A\| = \|A^\dagger\|$.

Un'operatore A si dice **unitario** quando

1. è **Isometrico**, ovvero

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_A \quad (2.20)$$

$$\|A\| = 1 \quad (2.21)$$

2. il suo range è denso in H

Per gli operatori unitari vale che

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (2.22)$$

Un operatore si dice **simmetrico** quando

$$(x, Ay) = (Ax, y) \quad ; \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_A \quad (2.23)$$

Se un operatore è simmetrico e $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^\dagger}$ allora si dice che è **autoaggiunto**.

2.1.2.1 Spettri per operatori Infinito-Dimensionali

Sia H uno spazio di Hilbert. Dato un **operatore lineare densamente definito**

$$A : \mathcal{D}_A \subseteq H \rightarrow R_A \subseteq H \quad (2.24)$$

e definita la famiglia di operatori

$$T_z(A) : \mathcal{D}_A \rightarrow H \quad (2.25)$$

$$T_z(A) = z\mathbb{1} - A \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.26)$$

Si dice che z appartiene all'**insieme risolvente** $Res(A)$ dell'operatore A se $T_z(A)$ è **biunivoco** con **inverso limitato**.

Tale inverso prende il nome di **Operatore risolvente** di A e viene definito come

$$R_z(A) : \mathcal{R}_{T_z(A)} \rightarrow H \quad (2.27)$$

$$R_z(A) = (z\mathbb{1} - A)^{-1} \quad (2.28)$$

Se invece $z \notin Res(A)$, allora si dice che esso appartiene allo spettro di A . Rispetto agli operatori finito-dimensionali questo non implica che z sia autovalore di A . Ci troviamo quindi a dividere gli elementi dello spettro in tre categorie:

1. Lo **spettro puntuale** $\sigma_p(A)$, ovvero l'insieme degli autovalori di A , per i quali quindi esiste un $x \neq 0 : Ax = zx$
2. Lo **spettro residuo** $\sigma_\rho(A)$, ovvero l'insieme degli $z \notin \sigma_p(A)$ per i quali $R_z(A)$ non è densamente definito.
3. **Spettro continuo** $\sigma_c(A)$, ovvero l'insieme degli $z \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_\rho(A)$ per i quali $R_z(A)$, per quanto densamente definito, non è limitato.

2.1.2.2 Operatori integrali

Si definiscono gli **operatori integrali** quella famiglia di operatori lineari del tipo

$$K : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b] \quad (2.29)$$

per i quali l'azione su un vettore $f \in H$ è definita attraverso un **nucleo integrale** $K(x, t)$ nel seguente modo

$$[Kf](x) = \int_a^b dy K(x, y)f(y) \quad (2.30)$$

Definita la **norma di Hilbert-Schmidt** come

$$\|K\|_{HS} = \int_a^b dx \int_a^b dy |K(x, y)|^2 \quad (2.31)$$

Gli operatori definiti attraverso nuclei per i quali tale norma è finita sono detti **nuclei di Hilbert-Schmidt** e sono **limitati**.

Le equazioni di Fredholm sono un noto caso di studio di problemi agli autovalori Per operatori integrali lineari. Si tratta di cercare soluzioni per equazioni del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b dy K(x, y)\phi(y) = f(x) \quad (2.32)$$

L'equazione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \lambda K)\phi &= f \\ \downarrow \\ \left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1} - K\right)\phi &= \frac{f}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Definendo $\mu = \lambda^{-1}$ e $T_\mu = (\mu\mathbb{1} - K)$ otteniamo

$$(\mu\mathbb{1} - K)\phi = T_\mu\phi = \tilde{f} \quad (2.34)$$

La sua omogenea associata è l'equazione agli autovalori per un operatore K

$$(\mu\mathbb{1} - K)\phi = T_\mu\phi = 0 \quad (2.35)$$

I λ_i per cui questa equazione ammette soluzioni non triviali vengono detti **numeri caratteristici** dell'equazione, e sono l'inverso degli autovalori μ_i

2.1.2.3 Operatori differenziali reali

Gli operatori differenziali $\mathcal{L}_x^{(n)}$ di ordine n sono definiti come

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ \text{Boundary conditions} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_x^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \quad (2.37)$$

I problemi di ricerca di soluzioni particolari si dividono in due famiglie

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ \frac{d^n}{dx^n} u(x_0) = u_0^{(n)} \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u(x_0) = u_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} u(x_0) = u_0' \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{Problemi di Cauchy} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ u(x_n) = u_n \\ u(x_{n-1}) = u_{n-1} \\ \vdots \\ u(x_1) = u_1 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{Problemi di Sturm-Liouville} \quad (2.39)$$

La ricerca delle soluzioni può passare attraverso il calcolo del nucleo $G(x, y)$ dell'operatore inverso, denominato **funzione di Green**, per il quale vale

$$\mathcal{L}_x^{(n)} G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.40)$$

E che quindi si può definire

$$G(x, y) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \theta(x - y) \left[\frac{u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)}{W(y)} \right] \quad (2.41)$$

Dove al denominatore abbiamo il **denominatore della matrice di Wronsky**, definito come

$$W = \det \begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 \\ \dot{u}_1^0 & \dot{u}_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Due famiglie importanti di funzioni di Green sono le

1. **Funzioni di Green avanzate**, utili nello studio dei problemi di Cauchy

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x > y \quad (2.43)$$

2. **Funzioni di Green ritardate**

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x < y \quad (2.44)$$

2.2 Operatori integrali (Davide Bufalini)

2.2.1 Esempio 1

Dato l'operatore integrale il cui nucleo in $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ è dato da

$$k(x, y) = 2xy - 4x^2 \quad (2.45)$$

andiamo a

1. discuterne lo spettro puntuale
2. risolvere, al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione di Fredholm di 2a specie

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 dy k(x, y) \phi(y) = 1 - \alpha x \quad (2.46)$$

Iniziamo dal secondo punto. Possiamo riscrivere l'equazione di Fredholm come

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lambda \int_0^1 dy (2xy - 4x^2) \phi(y) + 1 - \alpha x = \\ &= 2\lambda x \int_0^1 dy y \phi(y) - 4x^2 \lambda \int_0^1 dy \phi(y) + 1 - \alpha x \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da cui segue che

$$A = \int_0^1 dy \phi(y) \quad (2.48)$$

$$B = \int_0^1 dy y \phi(y) \quad (2.49)$$

Sostituendo in queste espressioni la 2.47 otteniamo

$$A = \int_0^1 dy 2y \lambda B - 4y^2 \lambda A + 1 - \alpha y = \lambda B - \frac{4}{3} A \lambda + 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (2.50)$$

$$B = \int_0^1 dy 2y^2 \lambda B - 4y^3 \lambda A + y - \alpha y^2 = \frac{2}{3} \lambda B - A \lambda + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \quad (2.51)$$

Queste equazioni formano il seguente sistema

$$\begin{cases} A \left(1 + \frac{4}{3} \lambda\right) - \lambda B &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \lambda A + \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right) B &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \end{cases} \quad (2.52)$$

La cui matrice è dunque

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{3} \lambda & -\lambda \\ \lambda & 1 - \frac{2}{3} \lambda \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Iniziamo studiando l'omogenea, ovvero il caso $\det M = 0$

$$\det M = 0 \quad (2.54)$$

$$\downarrow$$

$$\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) + \lambda^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\lambda\right)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_c = -3$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_p(k) = \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad (2.55)$$

Passiamo ora al caso non omogeneo. Dobbiamo distinguere due casi

1. $\lambda \neq \lambda_c$

$$A = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha}{2} & -\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} & 1 - \frac{2}{3}\alpha \end{vmatrix} = \dots = \frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \quad (2.56)$$

$$B = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 + \frac{4}{3}\alpha & 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \lambda & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \end{vmatrix} = \dots = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{3\alpha-2}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \quad (2.57)$$

Otteniamo quindi

$$\phi(x) = 1 - \alpha x + 2 \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{3\alpha-2}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \right] \lambda x - 4 \left[\frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \right] \lambda x^2 \quad (2.58)$$

2. $\lambda = \lambda_c$

Prima di procedere dobbiamo trovare $\phi_0^{(+)}$, la soluzione dell'omogenea di k^\dagger che servirà quando imporremo $\langle \phi_0^{(+)}, \phi \rangle = 0$ tramite la quale potremo ricavare i valori α tali da restituire altre soluzioni.

Andiamo quindi a risolvere l'omogenea per

$$k^\dagger(x, y) = \overline{k(x, y)} \stackrel{\mathbb{R}}{=} k(y, x) = 2yx - 4y^2 \quad (2.59)$$

Risolvendo Fredholm otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \phi_0^{(+)}(x) &= \lambda \int_0^1 dy (2xy - 4y^2) \phi_0^{(+)} = \\ &= 2\lambda x \int_0^1 dy y \phi_0^{(+)}(y) - 4\lambda \int_0^1 dy y^2 \phi_0^{(+)}(y) = \\ &= 2\lambda x D - 4\lambda C \quad ; \quad \begin{cases} C &= \int_0^1 dy y \phi_0^{(+)}(y) \\ D &= \int_0^1 dy y^2 \phi_0^{(+)}(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

la 2.60 ci porta a scrivere che

$$C = \int_0^1 dy (y^3 D - 4\lambda C y^2) = \frac{1}{2}\lambda D - \frac{4}{3}\lambda C \quad (2.61)$$

$$D = \int_0^1 dy (2\lambda y^2 D - 4\lambda C y) = \frac{2}{3}\lambda D - 2\lambda C \quad (2.62)$$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (1 + \frac{4}{3}\lambda) C - \frac{1}{2}\lambda D = 0 \\ 2\lambda C + (1 - \frac{2}{3}\lambda) D = 0 \end{cases} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{3}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ 2\lambda & 1 - \frac{2}{3}\lambda \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

L'omogenea ha lo stesso risultato di prima, con $\lambda_c = -3$, e per tale valore il sistema diventa

$$\begin{cases} (1 - 4) C + \frac{3}{2} D = 0 \\ -6C + (1 + 2) D = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

\downarrow

$$\begin{cases} D = 2C \\ C = ap \end{cases} \quad ; \quad ap = \text{a piacere} \quad (2.65)$$

Ponendo $C = \frac{1}{4\lambda_c}$ otteniamo $D = \frac{1}{2\lambda_c}$ e arriviamo alla formula

$$\phi_0^{(+)}(x) = 2D\lambda_c x - 4\lambda_c C = x - 1 \quad (2.66)$$

Possiamo quindi procedere

$$\langle \phi_0^{(+)}, f \rangle = 0 \quad (2.67)$$

\downarrow

$$\int_0^1 dx (x - 1)(1 - \alpha x) = 0$$

\downarrow

$$\alpha = 3 \quad (2.68)$$

Per tale valore di α abbiamo quindi ulteriori soluzioni al problema di partenza. Se andiamo a sostituire $\lambda = \lambda_c = -3$ otteniamo

$$\begin{cases} (1 - 4\lambda) A + 3B = 1 - \frac{3}{2} \\ -3A + (1 + 2)B = \frac{1}{2} - 1 \end{cases} \quad (2.69)$$

\downarrow

$$\begin{cases} -3A + 3B = -\frac{1}{2} \\ -3A + 3B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

\downarrow

$$\begin{cases} B = A - \frac{1}{6} \\ A = ap \end{cases} \quad ; \quad ap = \text{a piacere}$$

\downarrow

$$\phi_A(x) = 1 - 3x + 2(-3) \left(A - \frac{1}{6} \right) x - 4Ax^2(-3)$$

\downarrow

$$\phi_A(x) = 1 - 2x - 6Ax + 12Ax^2 \quad (2.70)$$

2.2.2 Esempio 2

Determinare i numeri caratteristici dell'operatore integrale il cui nucleo in $L^2([-1, +1]x[-1, +1])$ è dato da

$$k(x, y) = xy - x^2y^2 \quad (2.71)$$

Si calcolino inoltre, per tutti i $\lambda \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione di Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} dy k(x, y)\phi(y) = 5x^3 + x^2 - 3x \quad (2.72)$$

$$g(x) = 5x^3 + x^2 - 3x \quad (2.73)$$

Nel nostro caso avremo

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lambda \int_{-1}^{+1} dy (xy - x^2y^2)\phi(y) + g(x) = \\ &= \lambda x \int_{-1}^{+1} dy \phi(y) - \lambda x^2 \int_{-1}^{+1} dy y^2 \phi(y) + g(x) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$A = \int_{-1}^{+1} dy \phi(y) = \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{+1} dy (\lambda y^2 A - \lambda y^2 B) + \int_{-1}^{+1} dy (5x^3 + x^2 - 3x) = \\ &= \frac{2}{3}A\lambda + 2 - 2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$B = \int_{-1}^{+1} dy y^2 \phi(y) = \dots = -\frac{2}{5}\lambda B + \frac{2}{5} \quad (2.77)$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (2.78)$$

Per trovare lo spettro puntuale andiamo a risolvere il caso omogeneo

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +\frac{3}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ \sigma_p(k) &= \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{5} \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Andiamo ora a studiare il sistema non omogeneo. Distinguiamo i due casi

1. $\lambda \neq \lambda_c$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{2}{5+2\lambda} \end{cases} \quad (2.81)$$

Da cui otteniamo la soluzione

$$\phi(x) = g(x) - \frac{2}{5+2\lambda}x^2 \quad (2.82)$$

2. $\lambda = \lambda_c$

(a) $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot A = 0 \\ \frac{8}{5}B = \frac{2}{5} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{ap}{2} \\ B = \frac{2}{8} \end{array} \right. \quad ; \quad ap = \text{a piacere} \quad (2.83)$$

Da cui otteniamo la famiglia di soluzioni

$$\phi_{\frac{3}{2}}(x) = g(x) - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}xA \quad (2.84)$$

(b) $\lambda = -\frac{5}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot A = 0 \\ 0 \cdot B = \frac{2}{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{sistema non risolvibile} \quad (2.85)$$

2.3 Operatori differenziali (Davide Bufalini)

2.3.1 Esempio 1: Operatore Differenziale del IIo Ordine

Sia l'operatore

$$\mathcal{L}_x^\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \lambda \quad ; \quad \lambda = \text{cost.} \quad (2.86)$$

Si richiede di

1. calcolare, al variare di λ , la soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^\lambda f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ \dot{f}(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

2. ricavare la Funzione di Green (l'operatore risolvente) per i valori in cui \mathcal{L}_x^λ è invertibile del corrispondente problema di Sturm-Liouville

L'operatore è in forma canonica con coefficienti costanti nella forma

$$a\ddot{f} + b\dot{f} + cf = 0 \quad ; \quad \text{nel nostro caso } b = 0 \quad (2.88)$$

Prendendo un Ansatz del tipo $f(x) \sim e^{\alpha x}$ otteniamo

$$-\alpha^2 - \lambda = 0 \rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \quad (2.89)$$

Da cui segue

$$f(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} \quad (2.90)$$

Imponendo le condizioni di bordo otteniamo

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \dot{f}(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ i\sqrt{\lambda}(Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi} - Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \end{cases} \quad (2.91)$$

\downarrow

$$\begin{cases} B = -A \\ Ai\sqrt{\lambda}2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

Escludendo le soluzioni banali $A = 0 = B$ e $\lambda = 0$ abbiamo $n \in \mathbb{Z}$ autovalori nella forma

$$\lambda = \frac{(2k+1)^2}{4} \quad (2.93)$$

Per trovare gli autovettori corrispondenti ci affidiamo alla condizione $A = -B$ dalla quale segue

$$f_n(x) = -2iB \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \quad (2.94)$$

Per trovare B sfruttiamo l'ortogonalità

$$\begin{aligned} \delta_{n,m} = \langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^\pi dx \overline{f_n(x)} f_m(x) = \\ &= \int_0^\pi dx (2iB^*) \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \cdot (-2iB) \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Iniziamo studiando il caso $n = m$

$$\delta_{m,m} = \langle f_n, f_m \rangle = 4|B|^2 \int_0^\pi dx \sin^2 \left(\frac{2k+1}{2}x \right) = 4|B|^2 \frac{\pi}{2} \quad (2.96)$$

Per ortonormalità imponiamo

$$4|B|^2 \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow |B| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.97)$$

Che, nel caso $n \neq m$, diventa

$$B = \frac{e^{i\rho}}{\sqrt{2\pi}} \quad ; \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (2.98)$$

Da cui segue che

$$f_n(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\rho} \sin \left(\frac{2n+1}{2}x \right) \quad ; \quad \begin{cases} \rho \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.99)$$

Siccome $\lambda = 0$ non è autovalore non abbiamo modi nulli.

Andiamo ora a calcolare l'**operatore risolvente**.

$$(\mathcal{L}_{SL} - \lambda \mathbb{1})G_\lambda(x, y) = \delta(x - y) \quad ; \quad \lambda \neq \lambda_n \text{ per evitare poli semplici} \quad (2.100)$$

\downarrow

$$-\frac{d^2}{dx^2}G_\lambda(x, y) - \lambda G_\lambda = \delta(x - y) \quad (2.101)$$

Utilizziamo un trucco. Siccome il problema è della tipologia

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda f = 0 \quad (2.102)$$

Andiamo a cercare due soluzioni $f_{1,2}^0$ tali che ciascuna soddisfi una delle due condizioni al bordo. Una volta trovate andiamo a calcolare il Wronskiano, necessario per la definizione della funzione di Green

$$G_\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{f_1^0(x)f_2^0(y)}{W} & ; \quad x < y \\ \frac{f_1^0(y)f_2^0(x)}{W} & ; \quad x > y \end{cases} \quad (2.103)$$

In base alle condizioni di bordo proviamo con

$$f_1^0(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x) \rightarrow f_1^0(0) = 0 \quad (2.104)$$

$$f_2^0(x) = \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \rightarrow f_2^0(\pi) = 0 \quad (2.105)$$

Andiamo quindi a calcolarne il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} f_1^0 & f_2^0 \\ f_1^0 & f_2^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}x) & \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \\ \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \end{vmatrix} = \dots = -\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \quad (2.106)$$

Da cui otteniamo

$$G_\lambda(x, y) = \begin{cases} -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x) \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x))}{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)} & ; \quad x < y \\ -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}y) \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - y))}{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)} & ; \quad x > y \end{cases} \quad (2.107)$$

Vediamo come per i λ_n che abbiamo trovato in precedenza ci siano solo poli semplici.

2.3.2 Esempio 2

Dato l'operatore differenziale

$$\mathcal{L}_x = -i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \quad ; \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (2.108)$$

Il cui nucleo è dato da

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_x} = \left\{ f \in L^2 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : f \left(\frac{1}{2} \right) = f(1) \right\} \quad (2.109)$$

Si richiede di

1. Costruire $(\mathcal{L}_x^\dagger, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x^\dagger})$
2. Discutere autovalori e autovettori di $(\mathcal{L}_x, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x})$
3. Trovare i valori di β per cui $(\mathcal{L}_x, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x})$ è autoaggiunto e/o invertibile

Partiamo dall'**aggiunto**:

$$\begin{aligned} \langle g, \mathcal{L}_x f \rangle &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(-i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \right) f = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(-i \frac{d}{dx} f \right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(\frac{\beta}{x} f \right) = \\ &= -i \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \dot{f} + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \frac{\beta}{x} f = \\ &= -i f \bar{g} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + i \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \dot{f} + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \overline{\left(\frac{\beta}{x} g \right)} f \end{aligned} \quad (2.110)$$

Imponendo che \mathcal{L}_x^\dagger sia autoaggiunto otteniamo che

$$-i f \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left[\bar{g} \left(\frac{1}{2} \right) - \bar{g}(1) \right] = 0 \quad (2.111)$$

↓

$$\bar{g} \left(\frac{1}{2} \right) = \bar{g}(1)$$

↓

$$\mathcal{L}_x^\dagger = -i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \quad ; \quad \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x^\dagger} = \left\{ g \in L^2 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : g \left(\frac{1}{2} \right) = g(1) \right\} \quad (2.112)$$

Andiamo ora a calcolare gli autovalori e gli autovettori:

$$\mathcal{L}_x f = \lambda f \quad (2.113)$$

$$\downarrow$$

$$\left(-i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x}\right) f = \lambda f$$

$$\downarrow$$

$$\frac{df}{dx} = i \left(\lambda - \frac{\beta}{x}\right) f$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^x dt \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \int_{\frac{1}{2}}^x dt \left(\lambda - \frac{\beta}{x}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i[\lambda(x-\frac{1}{2})-\beta \ln(2x)]} \quad (2.114)$$

Applicando le condizioni al contorno otteniamo

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.115)$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\frac{\lambda}{2}-\beta \ln(2)} = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i \cdot 0}$$

$$\downarrow$$

$$e^{i\frac{\lambda}{2}-\beta \ln(2)} = 1$$

$$\downarrow$$

$$e^{i\frac{\lambda_n}{2}-\beta \ln(2)} = e^{i2n\pi}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\lambda_n}{2} = \beta \ln(2) + 2n\pi$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_n = 2\beta \ln(2) + 4n\pi \rightarrow f_n(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i[(2\beta \ln(2)+4n\pi)(x-\frac{1}{2})-\beta \ln(2x)]} \quad (2.116)$$

2.4 Operatori a blocchi (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)

2.4.1 Esempio 1 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Paolo Proia)

Dato il seguente operatore a blocchi

$$\begin{cases} (Tx)_1 &= 0 \\ (Tx)_{2n} &= \alpha x_{2n+1} & n > 1 \\ (Tx)_{2n+1} &= \alpha x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.117)$$

Si richiede di

1. Costruire T^\dagger e calcolare $\|T\|$ e $\|T^\dagger\|$
2. Discutere gli spettri puntuali e relative molteplicità
3. Discutere gli spettri residui
4. Discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ (se esistono) l'operatore T è una combinazione delle seguenti
 - (a) Autoaggiunto
 - (b) Unitario
 - (c) Invertibile

Un possibile modo per il calcolo dell'aggiunto è iniziare esplicitando l'azione dell'operatore

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 0 \\ Tx_2 &= \alpha x_3 \\ Tx_3 &= \alpha x_2 \rightarrow T = \\ Tx_4 &= \alpha x_5 \\ Tx_5 &= \alpha x_4 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Da cui segue che

$$T^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger x)_1 &= 0 \\ (T^\dagger x)_{2n} &= \alpha^* x_{2n+1} & n > 1 \\ (T^\dagger x)_{2n+1} &= \alpha^* x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad (2.119)$$

Un altro modo per il calcolo dell'aggiunto passa dalla sua definizione, che ci dice che

$$(y, Tx) = (T^\dagger y, x) \quad (2.120)$$

\downarrow

$$\sum_{i=1}^N y_i^* T x_i = \sum_{i=1}^N (T^\dagger y_i)^* x_i \quad (2.121)$$

Esplicitando le somme si ottengono i seguenti confronti

$$0 + y_2^* \cdot \alpha x_3 + y_3^* \cdot \alpha x_2 + y_4^* \cdot \alpha x_5 + y_5^* \cdot \alpha x_4 + \dots = \\ = (T^\dagger y)_1^* \cdot x_1 + (T^\dagger y)_2^* \cdot x_2 + (T^\dagger y)_3^* \cdot x_3 + (T^\dagger y)_4^* \cdot x_4 + (T^\dagger y)_5^* \cdot x_5 + \dots \quad (2.122)$$

\downarrow

$$y_1 \cdot 0 = 0 = (T^\dagger y)_1^* \cdot x_1 \rightarrow (T^\dagger y)_1 = 0 \quad (2.123)$$

$$\begin{cases} y_2^* \cdot (Tx)_2 = y_2^* \cdot \alpha x_3 = (T^\dagger y)_3^* \cdot x_3 \\ y_3^* \cdot (Tx)_3 = y_3^* \cdot \alpha x_2 = (T^\dagger y)_2^* \cdot x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_2^* = \alpha y_3^* \\ (T^\dagger y)_3^* = \alpha y_2^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_2 = \alpha^* y_3 \\ (T^\dagger y)_3 = \alpha^* y_2 \end{cases} \quad (2.124)$$

$$\begin{cases} y_4^* \cdot (Tx)_4 = y_4^* \cdot \alpha x_5 = (T^\dagger y)_5^* \cdot x_5 \\ y_5^* \cdot (Tx)_5 = y_5^* \cdot \alpha x_4 = (T^\dagger y)_4^* \cdot x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_4^* = \alpha y_5^* \\ (T^\dagger y)_5^* = \alpha y_4^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_4 = \alpha^* y_5 \\ (T^\dagger y)_5 = \alpha^* y_4 \end{cases} \quad (2.125)$$

\vdots

Da cui otteniamo (per fortuna) lo stesso risultato

$$\begin{cases} (T^\dagger x)_1 &= 0 \\ (T^\dagger x)_{2n} &= \alpha^* x_{2n+1} & n > 1 \\ (T^\dagger x)_{2n+1} &= \alpha^* x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad (2.126)$$

Andiamo quindi a calcolare la norma dell'operatore

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(Tx)_n} (Tx)_n = \\ &= \overline{(Tx)_1} (Tx)_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (|\alpha|^2 |x_{2n+1}|^2 + |\alpha|^2 |x_{2n}|^2) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha|^2 (|x_{2n+1}|^2 + |x_{2n}|^2) = \\ &= |\alpha|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 = |\alpha|^2 (\|x\|^2 - |x_1|^2) \leq |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (2.127)$$

\downarrow

$$\|T\| \leq |\alpha| \quad (2.128)$$

Se $|x_1| = 0$ allora la norma è raggiunta(?). Siccome per operatori limitati e densamente definiti allora $\|T\| = \|T^\dagger\|$ e quindi

$$\|T^\dagger\| \leq |\alpha| \quad (2.129)$$

Andiamo ora a calcolare lo **spettro puntuale**. Dobbiamo risolvere

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (2.130)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 0 &= \lambda x_1 \\ Tx_2 &= \alpha x_3 &= \lambda x_2 \\ Tx_3 &= \alpha x_2 &= \lambda x_3 \\ Tx_4 &= \alpha x_5 &= \lambda x_4 \\ Tx_5 &= \alpha x_4 &= \lambda x_5 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.131)$$

Distinguiamo ora i vari casi

1. $\lambda = 0$; $\alpha = 0$

$$0 = 0 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.132)$$

$$0 = 0 \cdot x_2 \rightarrow x_2 = \text{qualsiasi} \quad (2.133)$$

$$0 = 0 \cdot x_3 \rightarrow x_3 = \text{qualsiasi} \quad (2.134)$$

$$\dots \quad (2.135)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (2.136)$$

2. $\lambda = 0$; $\alpha \neq 0$

$$0 = 0 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.137)$$

$$\alpha x_3 = 0 \cdot x_2 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.138)$$

$$\alpha x_2 = 0 \cdot x_3 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.139)$$

$$\dots \quad (2.140)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, \dots) \quad (2.141)$$

3. $\lambda \neq 0$; $\alpha = 0$

$$0 = \lambda x_1 \rightarrow x_1 = 0 \quad (2.142)$$

$$0 = \lambda x_2 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.143)$$

$$0 = \lambda x_3 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.144)$$

$$\dots \quad (2.145)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (0, 0, 0, \dots) \quad (2.146)$$

4. $\lambda \neq 0$; $\alpha \neq 0$

$$0 = \lambda x_1 \rightarrow x_1 = 0 \quad (2.147)$$

$$\alpha x_2 = \lambda x_3 \rightarrow x_2 = \frac{\lambda}{\alpha} x_3 \quad (2.148)$$

$$\alpha x_3 = \lambda x_2 \rightarrow x_3 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} x_3 \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_3 = 0 \quad (2.149)$$

$$\alpha x_4 = \lambda x_5 \rightarrow x_4 = \frac{\lambda}{\alpha} x_5 \quad (2.150)$$

$$\alpha x_5 = \lambda x_4 \rightarrow x_5 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} x_5 \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_5 = 0 \quad (2.151)$$

$$\dots \quad (2.152)$$

\downarrow

$$x_{2n} = \frac{\lambda}{\alpha} x_{2n+1} \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_{2n+1} = 0 \quad (2.153)$$

Dobbiamo distinguere due casi

(a) $|\lambda| \neq |\alpha|$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha^2}\right) x_{2n+1} = 0 \rightarrow x_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.154)$$

\downarrow

$$\vec{x} = \vec{0} \quad (2.155)$$

(b) $|\lambda| = |\alpha| \rightarrow \lambda = e^{i\phi}|\alpha|$

$$x_{2n} = \frac{e^{i\phi}|\alpha|}{|\alpha|} x_{2n+1} \rightarrow x_{2n} = e^{i\phi} x_{2n+1} \quad (2.156)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (0, e^{i\phi} x_3, x_3, e^{i\phi} x_5, x_5, \dots) \quad (2.157)$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = e^{i\phi}|\alpha| \ ; \ \alpha \in \mathbb{C}\} \quad (2.158)$$

Si ottiene un risultato analogo per $\sigma(T^\dagger)$.

Andiamo ora a calcolare lo **spettro residuo** dell'operatore e del suo aggiunto.

Andiamo quindi a cercare

$$z \neq \lambda : \exists \vec{\eta} \neq \vec{0} : \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle = 0 \quad (2.159)$$

$$\vec{v} = (z\mathbb{1} - T)\vec{x} \in \text{Range}(z\mathbb{1} - T) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}_T \quad (2.160)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$z\mathbb{1} - T = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & z & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & z & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & z & -\alpha & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & z & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Da cui segue che

$$(z\mathbb{1} - T)\vec{x} = \begin{pmatrix} zx_1 \\ zx_2 - \alpha x_3 \\ zx_3 - \alpha x_2 \\ zx_4 - \alpha x_5 \\ zx_5 - \alpha x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

E arriviamo quindi a scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle = \sum_n \bar{\eta}_n v_n = \\ &= \eta_1^* zx_1 + \eta_2^* (zx_2 - \alpha x_3) + \eta_3^* (zx_3 - \alpha x_2) + \dots = \\ &= x_1 z \eta_1^* + x_2 (z \eta_2^* - \alpha \eta_3^*) + x_3 (z \eta_3^* - \alpha \eta_2^*) + \dots \end{aligned} \quad (2.163)$$

Siccome la somma è nulla, questo ci porta a scrivere

$$\eta_1^* = 0 \quad (2.164)$$

$$\eta_2^* = \frac{\alpha}{\lambda} \eta_3^* \quad (2.165)$$

$$\eta_3^* = \frac{\alpha}{\lambda} \eta_2^* = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \eta_3^* \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right) \eta_3^* = 0 \quad (2.166)$$

\vdots

Abbiamo però un "problema". Siccome $z \neq \lambda = e^{i\phi}|\alpha|$, abbiamo che

$$1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \neq 0 \rightarrow \eta_3^* = 0 \rightarrow \vec{\eta} = \vec{0} \quad (2.167)$$

Ma questo non è possibile per definizione, quindi abbiamo

$$\sigma_\rho(T) = \emptyset \quad (2.168)$$

In conclusione rispondiamo alle domande del quarto punto:

1. L'operatore è **autoaggiunto** per $\alpha = \alpha^*$, ovvero per $\alpha \in \mathbb{R}$, dato che in tale caso segue $T = T^\dagger$ e $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^\dagger}$
2. Non può mai essere **unitario**, dato che $TT^\dagger \neq \mathbb{1} \neq T^\dagger T$
3. Non è **invertibile** dato che $z \in \sigma_p(T)$

2.4.2 Esempio 2 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)

Sia l'operatore in $l^2(\mathbb{C})$ definito da

$$\begin{cases} (Tx)_1 = 2^a x_2 \\ (Tx)_n = x_n + (n+1)^a x_{n+1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.169)$$

Si richiede di

1. Costruire l'aggiunto
2. Discutere gli spettripuntuali
3. Discutere se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, $z_0 = 0$ appartiene allo spettro dell'operatore o dell'aggiunto

Iniziamo dal primo punto.

Un possibile metodo è quello di **esplicitare** l'azione dell'operatore

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 2^a x_2 \\ Tx_2 &= x_2 + 3^a x_3 \\ Tx_3 &= x_3 + 4^a x_4 \\ &\vdots \end{aligned} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 2^a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3^a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4^a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5^a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6^a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Da cui otteniamo quindi

$$T^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2^a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3^a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4^a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 5^a & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow T^\dagger = \begin{cases} (T^\dagger x)_1 = 0 \\ (T^\dagger x)_n = x_n + n^a x_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.171)$$

Altrimenti possiamo calcolarlo **analiticamente**, studiando il prodotto

$$(y, Tx) = (T^\dagger y, x) \quad (2.172)$$

\downarrow

$$\sum_{i=1}^n y_i^* (Tx)_i = \sum_{i=1}^n (T^\dagger y)_i^* x_i \quad (2.173)$$

Da cui otteniamo che

$$y_1^* (Tx)_1 = y_1^* 2^a x_2 = (T^\dagger y)_1^* x_1 \quad (2.174)$$

$$y_2^* (Tx)_2 = y_2^* (x_2 + 3^a x_3) = (T^\dagger y)_2^* x_2 \quad (2.175)$$

$$y_3^* (Tx)_3 = y_3^* (x_3 + 4^a x_4) = (T^\dagger y)_3^* x_3 \quad (2.176)$$

$$y_4^* (Tx)_4 = y_4^* (x_4 + 5^a x_5) = (T^\dagger y)_4^* x_4 \quad (2.177)$$

$$y_5^* (Tx)_5 = y_5^* (x_5 + 6^a x_6) = (T^\dagger y)_5^* x_5 \quad (2.178)$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} & y_1^* 2^a x_2 + y_2^* x_2 + y_2^* 3^a x_3 + y_3^* x_3 + y_3^* 4^a x_4 + y_4^* x_4 + y_4^* 5^a x_5 + \dots = \\ & = (y_1^* 2^a + y_2^*) x_2 + (y_2^* 3^a + y_3^*) x_3 + (y_3^* 4^a + y_4^*) x_4 = \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$= (T^\dagger y)_1^* x_1 + (T^\dagger y)_2^* x_2 + (T^\dagger y)_3^* x_3 + (T^\dagger y)_4^* x_4 + \dots \quad (2.180)$$

Confrontando i termini otteniamo quindi

$$(T^\dagger y)_1^* = 0 \quad (2.181)$$

$$(T^\dagger y)_2^* = y_1^* 2^a + y_2^* \quad (2.182)$$

$$(T^\dagger y)_3^* = y_2^* 3^a + y_3^* \quad (2.183)$$

$$(T^\dagger y)_4^* = y_3^* 4^a + y_4^* \quad (2.184)$$

$$\vdots$$

Da cui (per fortuna) otteniamo di nuovo

$$T^\dagger = \begin{cases} (T^\dagger x)_1 = 0 \\ (T^\dagger x)_n = x_n + n^a x_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.185)$$

Andiamo ora a calcolare gli spettri puntuali dell'operatore e del suo aggiunto.

$$Tx = \lambda x \rightarrow (Tx)_n = \lambda x_n \quad (2.186)$$

$$\downarrow$$

$$(Tx)_1 = 2^a x_2 = \lambda x_1 \quad (2.187)$$

$$(Tx)_2 = x_2 + 3^a x_3 = \lambda x_2 \quad (2.188)$$

$$(Tx)_3 = x_3 + 4^a x_4 = \lambda x_3 \quad (2.189)$$

$$(Tx)_4 = x_4 + 5^a x_5 = \lambda x_4 \quad (2.190)$$

$$\vdots$$

Dobbiamo ora distinguere i diversi casi:

1. $\lambda = 0$; $a = 0$

$$x_1 = \text{indeterminato} \quad (2.191)$$

$$x_2 = 0 \quad (2.192)$$

$$x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.193)$$

$$x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \quad (2.194)$$

$$x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_5 = 0 \quad (2.195)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, 0, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.196)$$

2. $\lambda = 0$; $a \neq 0$

$$x_1 = \text{indeterminato} \quad (2.197)$$

$$2^a x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.198)$$

$$x_2 + 3^a x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.199)$$

$$x_3 + 4^a x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \quad (2.200)$$

$$x_4 + 5^a x_5 = 0 \rightarrow x_5 = 0 \quad (2.201)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, 0, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.202)$$

3. $\lambda \neq 0$; $a \neq 0$

$$2^a x_2 = \lambda x_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = & \text{indeterminato} \\ x_2 = & \frac{\lambda}{2^a} x_1 \end{cases} \quad (2.203)$$

$$x_2 + 3^a x_3 = \lambda x_2 \rightarrow x_3 = \frac{\lambda - 1}{3^a} x_2 \quad (2.204)$$

$$x_3 + 4^a x_4 = \lambda x_3 \rightarrow x_4 = \frac{\lambda - 1}{4^a} x_3 = \frac{(\lambda - 1)^2}{(3 \cdot 4)^a} x_2 = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(2 \cdot 3 \cdot 4)^a} x_1 = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(4!)^a} x_1 \quad (2.205)$$

$$x_4 + 5^a x_5 = \lambda x_4 \rightarrow x_5 = \frac{\lambda - 1}{5^a} x_4 = \dots = \frac{\lambda(\lambda - 1)^3}{(5!)^a} x_1 \quad (2.206)$$

\vdots

\downarrow

$$\begin{cases} x_1 = & \text{indeterminato} \\ x_2 = & \frac{\lambda}{2^a} x_1 \\ x_n = & \frac{\lambda(\lambda-1)^{n-2}}{(n!)^a} x_1 \quad ; \quad n > 2 \end{cases} \quad (2.207)$$

La situazione si complica. Dobbiamo trovare per quali λ e a abbiamo $\vec{x} \in l^2(\mathbb{C})$. Andiamo a calcolare la norma

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = |x_1|^2 + \left| \frac{\lambda}{2^a} x_1 \right|^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left| \frac{\lambda(\lambda - 1)^{n-2}}{(n!)^a} x_1 \right|^2 = \\ &= \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{2^{2a}} \right) |x_1|^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|\lambda|^2 |\lambda - 1|^{2n-4}}{(n!)^{2a}} |x_1|^2 \end{aligned} \quad (2.208)$$

Applichiamo ora il criterio della radice, ovvero

$$|x_n| \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \quad (2.209)$$

E otteniamo

$$\frac{|\lambda|^2 |\lambda - 1|^{2n-4}}{(n!)^{2a}} \sim \frac{|\lambda|^{\frac{2}{n}} |\lambda - 1|^{\frac{2n-4}{n}}}{\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \right)^{\frac{2a}{n}}} \sim \left| \frac{(\lambda - 1)^2 e^{2a}}{n^{2a}} \right| \rightarrow \begin{cases} 0 & a > 0 \\ |\lambda - 1|^2 & a = 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases} \quad (2.210)$$

Il caso $a < 0$ diverge, e quindi lo escludiamo a priori. Studiamo ora gli altri due

(a) $a = 0 \rightarrow |\lambda - 1|^2 < 1 \rightarrow |\lambda - 1| < 1$

Abbiamo quindi una regione di convergenza circolare centrata in 1 con raggio di convergenza pari a 1.

(b) $a > 0 \rightarrow 0$

In questo caso la serie converge $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, e abbiamo un raggio di convergenza infinito.

Andiamo ora a studiare lo spettro puntuale dell'aggiunto.

$$T^\dagger v = \lambda v \rightarrow (T^\dagger v)_n = \lambda v_n \quad (2.211)$$

\downarrow

$$(T^\dagger v)_1 = 0 = \lambda v_1 \quad (2.212)$$

$$(T^\dagger v)_2 = v_2 + 2^a v_1 = \lambda v_2 \quad (2.213)$$

$$(T^\dagger v)_3 = v_3 + 3^a v_2 = \lambda v_3 \quad (2.214)$$

$$(T^\dagger v)_4 = v_4 + 4^a v_3 = \lambda v_4 \quad (2.215)$$

\vdots

Di nuovo, andiamo a distinguere i vari casi

1. $\lambda = 0$; $a = 0$

$$v_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.216)$$

$$v_2 + v_1 = 0 \rightarrow v_2 = -v_1 \quad (2.217)$$

$$v_3 + v_2 = 0 \rightarrow v_3 = -v_2 = v_1 \quad (2.218)$$

$$v_4 + v_3 = 0 \rightarrow v_4 = -v_3 = -v_1 \quad (2.219)$$

\vdots

\downarrow

$$\vec{v} = (v_1, -v_1, v_1, \dots, (-1)^{n+1} v_1, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.220)$$

2. $\lambda = 0$; $a \neq 0$

$$v_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.221)$$

$$v_2 + 2^a v_1 = 0 \rightarrow v_2 = -2^a v_1 \quad (2.222)$$

$$v_3 + 3^a v_2 = 0 \rightarrow v_3 = -3^a v_2 = 6^a v_1 \quad (2.223)$$

$$v_4 + 4^a v_3 = 0 \rightarrow v_4 = -4^a v_3 = -24^a v_1 \quad (2.224)$$

\vdots

\downarrow

$$\vec{v} = (v_1, -2^a v_1, 6^a v_1, \dots, (-1)^{n+1} (n!)^a v_1, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.225)$$

3. $\lambda \neq 0$; $a \neq 0$

$$v_1 = 0 \quad (2.226)$$

$$v_2 = \lambda v_2 \rightarrow (1 - \lambda) v_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad (2.227)$$

$$(1 - \lambda) v_3 = -3^a v_2 \quad (2.228)$$

\vdots

Distinguiamo i due casi

(a) $\lambda \neq 1 \rightarrow v_2 = 0 \rightarrow v_3 = 0 \rightarrow \dots \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(b) $\lambda = 1 \rightarrow v_2 = \text{qualsiasi} \rightarrow v_3 = v_3 - 3^a v_2 \rightarrow v_2 = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Andiamo ora a studiare lo **spettro residuo**. Vale il teorema per cui

$$\sigma_\rho(A) \subset \overline{\sigma_\rho(A^\dagger)} \leftrightarrow \sigma_\rho(A^\dagger) \subset \overline{\sigma_\rho(A)} \quad (2.229)$$

$$0 \in \sigma_\rho(A) \rightarrow 0 \in \overline{\sigma_\rho(A^\dagger)} \quad (2.230)$$

CHIEDERE A PAOLO

Chapter 3

Equazioni Differenziali

3.1 Equazioni Differenziali Reali (Adriano Chialastri)

3.1.1 Messaggio dall'autore

Riporto qui, sotto richiesta dell'autore di questi esercizi, un suo messaggio:

Io sottoscritto Adriano Chialastri non mi riterrò responsabile di qualsiasi danno a cose o persone causato da questi esercizi, in quanto non svolti nel pieno esercizio delle mie facoltà mentali a causa nella prolungata permanenza presso il luogo correntemente noto come Sogene.

3.1.2 Esempio 1: Problema di Cauchy

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 \ddot{y} - 2x\dot{y} + 2y = -x \\ \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Iniziamo passando in **forma canonica**

$$y(x) = A(x)v(x) \quad (3.2)$$

↓

$$x^2(\ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A\ddot{v}(x)) - 2x(\dot{A}(x)v(x) + A\dot{v}(x)) + 2A(x)v(x) = -x$$

↓

$$Ax^2\ddot{v}(x) + 2(\dot{A}(x)x^2 - A(x)x)\dot{v}(x) + (\ddot{A}(x)x^2 - 2x\dot{A}(x) + 2A)v(x) = -x \quad (3.3)$$

Per poter fare il passaggio dobbiamo imporre che

$$\dot{A}(x)x^2 - A(x)x = 0 \quad (3.4)$$

↓

$$\dot{A}(x)x = A(x)$$

↓

$$A(x) = x \quad (3.5)$$

Da cui otteniamo che

$$x^3\ddot{v}(x) + (-\cancel{2x} + \cancel{2x})v(x) = -x \quad (3.6)$$

↓

$$\ddot{v}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad y(x) = xv(x) \quad (3.7)$$

Il nostro problema di Cauchy in forma canonica è quindi

$$\begin{cases} \ddot{v}(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \dot{v}(1) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea**

$$\ddot{v}(x) = 0 \quad (3.9)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om}(x) = Ax + B \quad (3.10)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{v}_{om}(1) = A = 0 \\ v_{om}(1) = A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow \text{l'operatore differenziale è invertibile} \quad (3.11)$$

Dalla 3.10 vediamo come

$$v_{om}(x) = Av_1(x) + Bv_2(x)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om_1}(x) = x \quad ; \quad v_{om_2}(x) = 1 \quad (3.12)$$

Calcoliamo il Wronskiano dell'equazione

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad (3.13)$$

E andiamo quindi a calcolare la **Funzione di Green**

$$G(x, y) = -\delta(x - y)(y - x) = (x - y)\delta(x - y) \quad (3.14)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x dy G(x, y) \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \\ &= \int_1^x dy \delta(x - y)(y - x) \cdot \frac{1}{y^2} = \\ &= \int_1^x dy \frac{y - x}{y^2} = \\ &= \int_1^x dy \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = \\ &= \left[\ln(y) + \frac{x}{y}\right]_1^x = \ln(x) + 1 - x \\ &\downarrow \\ y(x) &= xv(x) = x \ln(x) - x^2 + x \end{aligned} \quad (3.15)$$

Verifichiamo la validità della soluzione

$$\dot{y}(x) = 2 - 2x + \ln(x) \quad (3.16)$$

$$\ddot{y}(x) = -2 + \frac{1}{x} \quad (3.17)$$

↓

$$\begin{cases} \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 - 1 + 1 = 0 \\ 2 - 2 + 0 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$x^2 \ddot{y} - 2x \dot{y} + 2y = -x \quad (3.19)$$

↓

$$x^2 \left(-2 + \frac{1}{x} \right) - 2x (2 - 2x + \ln(x)) + 2 (x \ln(x) - x^2 + x) = -x$$

↓

$$-2x^2 + x - 4x + 4x^2 - 2x \ln(x) + 2x \ln(x) - 2x^2 + 2x = -x$$

↓

$$+x - 4x - \cancel{2x \ln(x)} + \cancel{2x \ln(x)} + 2x = -x$$

↓

$$-x = -x \quad (3.20)$$

E quindi l'esercizio è verificato.

3.1.3 Esempio 2: Omogenea di Eulero

Riprendiamo il precedente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 \ddot{y} - 2x \dot{y} + 2y = -x \\ \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Partiamo dall'**omogenea**

$$x^2 \ddot{y} - 2x \dot{y} + 2y = 0 \quad (3.22)$$

↓

$$\ddot{y} - \frac{2}{x} \dot{y} + \frac{2}{x^2} y = 0 \quad (3.23)$$

L'omogenea scritta in questa forma risulta essere un'**equazione di Eulero**. Per risolverla poniamo quindi l'**Ansatz** $y = x^\alpha$ dove otteniamo

$$\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} - 2\alpha x^{\alpha-2} + 2x^{\alpha-2} = 0 \quad (3.24)$$

↓

$$\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2 = 0$$

↓

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

↓

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

↓

$$y_{om_1}(x) = x \quad ; \quad y_{om_2}(x) = x^2$$

↓

$$y_{om}(x) = Ax + Bx^2 \quad (3.25)$$

Andiamo ora a cercare una **soluzione particolare** col **metodo delle costanti**. Poniamo

$$y_p(x) = A(x)x + B(x)x^2 \quad (3.26)$$

↓

$$\dot{y}_p(x) = \dot{A}(x)x + A(x) + \dot{B}(x)x^2 + 2B(x)x \quad (3.27)$$

$$\ddot{y}_p(x) = \ddot{A}(x)x + 2\dot{A}(x) + \ddot{B}(x)x^2 + 4\dot{B}(x)x + 2B \quad (3.28)$$

↓

$$x^2(\ddot{A}(x)x + 2\dot{A}(x) + \ddot{B}(x)x^2 + 4\dot{B}(x)x + 2B) - 2(\dot{A}(x)x + A(x) + \dot{B}(x)x^2 + 2B(x)x) + 2(A(x)x + B(x)x^2) = -x$$

↓

...

↓

$$x^3 \ddot{A}(x) + x^4 \ddot{B}(x) + 2x^3 \dot{B}(x) = -x \quad (3.29)$$

Da cui otteniamo

$$y(x) = y_p(x) + y_{om}(x) = y_p(x) + Ax + Bx^2 \quad (3.30)$$

↓

$$\begin{cases} \dot{y}(1) = \dot{y}_p(1) + A + 2B = 0 \\ y(1) = y_p(1) + A + B = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

3.1.4 Esempio 3: Problema di Sturm-Liouville

Risolvere il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x\ddot{u}(x) + 2\dot{u}(x) + 4xu(x) = 4 \\ u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Iniziamo passando il problema in **forma canonica**

$$u(x) = A(x)v(x) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &x(\ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A(x)\ddot{v}(x)) + 2(\dot{A}(x)v(x) + A(x)\dot{v}(x)) + 4xA(x)v(x) = 4 \\ &\downarrow \\ &A(x)x \cdot \ddot{v}(x) + 2(\dot{A}(x)x + A(x))\dot{v}(x) + (x\ddot{A}(x) + 2\dot{A}(x) + 4xA(x))v(x) = 4 \\ &\downarrow \\ &\dot{A}(x)x + A(x) = 0 \rightarrow \ln(A(x)) = -\ln(x) \rightarrow A(x) = x^{-1} \\ &\downarrow \\ &\frac{1}{x} \ddot{v}(x) + \left(\cancel{x} \frac{2}{\cancel{x}^2} - \frac{2}{x^2} + 4\cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \right) v(x) = 4 \\ &\downarrow \\ &\begin{cases} \ddot{v}(x) + 4v(x) = 4 \\ v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea associata** dell'equazione in forma canonica

$$\ddot{v}(x) + 4v(x) = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\text{Ansatz } v(x) = e^{\alpha x} \\ &\downarrow \\ &\alpha^2 e^{\alpha} + 4e^{\alpha} = 0 \\ &\downarrow \\ &\alpha^2 = -4 \rightarrow \alpha_{1,2} = \pm 2i \\ &\downarrow \\ &v_{om_1}(x) = e^{2ix} \quad ; \quad v_{om_2}(x) = e^{-2ix} \\ &\downarrow \\ &v_{om}(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dalla 3.34 ricaviamo il nostro **operatore differenziale**

$$\mathcal{L}_x^c = \frac{d^2}{dx^2} + 4 \quad (3.37)$$

Andiamo ora a verificare se è invertibile o meno, in base alle nostre Boundary Conditions:

$$\begin{cases} v_{om}\left(\frac{\pi}{4}\right) = Ae^{i\frac{\pi}{2}} + Be^{-i\frac{\pi}{2}} = iA - iB = 0 \\ v_{om}\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ae^{i\pi} + Be^{-i\pi} = -A - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\mathcal{L}_x^c v = 0 \leftrightarrow v = 0 \rightarrow \text{L'operatore è invertibile} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Andiamo ora a trovare due soluzioni dell'omogenea che soddisfino le BC

$$v_A(x) \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0 \rightarrow iA - iB = 0 \rightarrow A = B \rightarrow v_A(x) = A(e^{2ix} + e^{-2ix}) \quad (3.40)$$

$$v_B(x) \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \rightarrow A + b \Rightarrow A = -B \rightarrow v_B(x) = A(e^{2ix} - e^{-2ix}) \quad (3.41)$$

Siccome non abbiamo condizioni su A, la scegliamo comoda a seconda del caso, possiamo quindi scrivere

$$v_A(x) = \frac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}) = \cos(2x) \quad (3.42)$$

$$v_B(x) = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix}) = \sin(2x) \quad (3.43)$$

↓

$$v_{om}(x) = \tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x) \quad (3.44)$$

Andiamo ora a calcolare le **soluzioni fondamentali dell'equazione**

$$W(v_A, v_B) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\cos(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = \dots = 2 \quad (3.45)$$

$$\tilde{G}(x, y) = \tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x) + \frac{\delta(x-y)}{2} [\cos(2y) \sin(2x) - \cos(2x) \sin(2y)] \quad (3.46)$$

$$\mathcal{L}_x^c \tilde{G}(x, y) = \delta(x-y) \quad (3.47)$$

Per questo problema di SL, la **funzione di Green** sarà quindi data da

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x) \sin(2y)}{2} & x < y \\ \frac{\cos(2y) \sin(2x)}{2} & x > y \end{cases} \quad (3.48)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy G(x, y) \cdot 4 = \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^x dy \cos(2x) \sin(2y) + 2 \int_x^{\frac{\pi}{2}} dy \cos(2y) \sin(2x) = \dots = \\ &= 1 - \sin(2x) + \cos(2x) \end{aligned} \quad (3.49)$$

↓

$$u(x) = \frac{v(x)}{x} = \frac{1 - \sin(2x) + \cos(2x)}{x} \quad (3.50)$$

VERIFICA DA COPIARE QUANDO SONO MENO ABBOTTATO (pag 7 del pdf)

3.1.5 Esempio 4: Problema di Cauchy non lineare

Risolvere il seguente **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} x^2 \ddot{f}(x) + 3x \dot{f}(x) + f(x) = 0 \\ \dot{f}(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad (3.51)$$

Affinché l'operatore sia lineare dobbiamo avere BC omogenee, che non è il nostro caso. Dobbiamo quindi **linearizzare** il problema. Andiamo a definire

$$u(x) = f(x) + mx + q \quad (3.52)$$

\downarrow

$$\dot{u}(x) = \dot{f}(x) + m \quad (3.53)$$

Da cui otteniamo, imponendo che siano omogenee le BC di $u(x)$

$$\begin{cases} \dot{u}(1) = \dot{f}(1) + m = 0 \\ u(1) = f(1) + m + q = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 + m = 0 \\ 1 + m + q = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ q = -1 \end{cases} \quad (3.54)$$

\downarrow

$$u(x) = f(x) - 1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = u(x) + 1 \quad (3.55)$$

Il nostro problema diventa quindi

$$\begin{cases} x^2 \ddot{u}(x) + 3x \dot{u}(x) + u(x) = -1 \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Riscriviamo il problema in **forma canonica**

$$\begin{aligned}
u(x) &= A(x)v(x) & (3.57) \\
\downarrow \\
\dot{u}(x) &= \dot{A}(x)v(x) + A(x)\dot{v}(x) \\
\downarrow \\
\ddot{u}(x) &= \ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A(x)\ddot{v}(x) \\
\downarrow \\
[A(x)x^2]\ddot{v}(x) + [2\dot{A}(x)x^2 + 3A(x)x]\dot{v}(x) + [\ddot{A}(x)x^2 + 3\dot{A}(x)x + A(x)]v(x) &= -1 \\
\downarrow \\
2\dot{A}(x)x^2 + 3A(x)x &= 0 \rightarrow \dot{A}(x) = -\frac{3}{2}x^{-1}A(x) \rightarrow \ln(A(x)) = -\frac{3}{2}\ln(x) \rightarrow A(x) = x^{-\frac{3}{2}} \\
\downarrow \\
\dot{A}(x) &= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \quad ; \quad \dot{A}(x) = -\frac{15}{2}x^{-\frac{7}{2}} \\
\downarrow \\
[x^{-\frac{3}{2}}x^2]\ddot{v}(x) + \left[x^2 \left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}} \right) + 3x \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \right) + x^{-\frac{3}{2}} \right] v(x) &= -1 \\
\downarrow \\
[x^{-\frac{3}{2}}x^2]\ddot{v}(x) + \left[\frac{15}{4} - \frac{9}{2} + 1 \right] x^{-\frac{3}{2}}v(x) &= -1 \\
\downarrow \\
x^{\frac{1}{2}}\ddot{v}(x) + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}v(x) &= -1 \\
\downarrow \\
\begin{cases} \ddot{v}(x) + \frac{1}{4x^2}\dot{v}(x) = -x^{-\frac{1}{2}} \\ \dot{v}(1) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases} & (3.58)
\end{aligned}$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea associata** dell'equazione in forma canonica

$$\ddot{v}(x) + \frac{1}{4x^2}\dot{v}(x) = 0 \quad (3.59)$$

Siccome è un'equazione di Eulero usiamo l'Ansatz $v(x) = x^\alpha$ e otteniamo

$$\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.60)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om_1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad v_{om_2}(x) = x^{\frac{1}{2}} \ln(x)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om}(x) = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}} \ln(x) = x^{\frac{1}{2}}(A + B \ln(x)) \quad (3.61)$$

$$\downarrow$$

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \ln(x) + x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \dots = 1 \quad (3.62)$$

La soluzione generica del PdC sarà data da

$$\tilde{G}(x, y) = \alpha v_1(x) + \beta v_2(x) + \delta(x - y) \left[\frac{v_1(y)v_2(x) - v_1(x)v_2(y)}{W} \right] \quad (3.63)$$

Siccome siamo in presenza di un PdC, a noi serve la **funzione di Green avanzata**, e quindi dobbiamo porre $\alpha = \beta = 0$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \delta(x - y) \left[\frac{v_1(y)v_2(x) - v_1(x)v_2(y)}{W} \right] = \\ &= \delta(x - y) \left[y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Possiamo quindi andare a calcolare la soluzione

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x dy G(x, y) \left(-y^{-\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{BC} = \\ &= - \int_1^x dy \delta(x - y) \left[x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} \int_1^x dy [\ln(x) - \ln(y)] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} \left[\ln(x) \int_1^x dy + \int_1^x dy \ln(y) \right] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\ln(x)(x - 1) - [y(\ln(y) - 1)]_1^x] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\ln(x)(x - 1) - x(\ln(x) - 1) - 1] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\cancel{x \ln(x)} - \ln(x) - \cancel{x \ln(x)} + x - 1] \\ &= x^{\frac{1}{2}} [1 + \ln(x) - x] \end{aligned} \quad (3.65)$$

↓

$$u(x) = x^{-\frac{3}{2}} v(x) = \frac{1}{x} [1 + \ln(x) - x] \quad (3.66)$$

↓

$$f(x) = u(x) + 1 = \frac{1 + \ln(x)}{x} \quad (3.67)$$

Verifichiamo la bontà della soluzione trovata

$$\dot{f}(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2} \quad ; \quad \ddot{f}(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3} \quad (3.68)$$

↓

$$\begin{cases} \dot{f}(1) = -\frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \\ f(1) = \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{le BC sono rispettate} \quad (3.69)$$

$$\cancel{x^2} \frac{2\ln(x) - 1}{\cancel{x^3}} - 3\cancel{x} \frac{\ln(x)}{\cancel{x^2}} + \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0 \rightarrow \frac{1}{x} [\cancel{2\ln(x)} - \cancel{3\ln(x)} + \cancel{\ln(x)} - \cancel{1} + 1] = 0 \quad \leftarrow \quad \text{ok} \quad (3.70)$$

3.2 Equazioni Differenziali Complesse

N'aggio fatto in tempo, tanto Bufalini le ha scritte bene su Latex.