

Esercizi svolti da gente brava e spunti di teoria
per la prova scritta del corso di
Metodi e Modelli Matematici per la Fisica 2



a cura di
Alessandro Marcelli
2023

Contents

Note introduttive	v
0.1 Ciancio alle bande	v
0.2 Crediti	v
0.3 Contatti	v
1 Funzioni analitiche, prolungamenti ed espansioni asintotiche	1
1.1 Spunti di teoria generale (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)	1
1.1.1 I numeri complessi (Alessandro Marcelli)	1
1.1.2 Funzioni di variabile complessa (Alessandro Marcelli)	2
1.1.3 Zeri e singolarità (Alessandro Marcelli)	3
1.1.3.1 Zeri	3
1.1.3.2 Singolarità	3
1.1.3.3 Residui	3
1.1.4 Indicatore Logaritmico (Davide Bufalini)	3
1.1.5 Espansione di Weierstrass (Davide Bufalini)	4
1.1.6 Funzioni speciali (Alessandro Marcelli)	4
1.1.6.1 Funzione Gamma di Eulero	4
1.1.6.2 Funzione Digamma	4
1.1.6.3 Funzione beta di Eulero	4
1.1.6.4 Funzione zeta di Riemann generalizzata	4
1.2 Inversione e reciprocità locale (Davide Bufalini)	5
1.2.1 Spunti di teoria (Davide Bufalini)	5
1.2.1.1 Funzione reciproca	5
1.2.1.2 Funzione inversa	6
1.2.2 Numeri di Eulero	7
1.2.3 Numeri di Bernoulli	7
1.3 Espansione di Mittag-Leffler (Davide Bufalini)	8
1.3.1 Esempio 1: $\cot(z)$	8
1.3.1.1 Calcolo dell'espansione	8
1.3.1.2 Verifica dell'espansione	9
1.3.2 Esempio 2: $\sin^{-2}(z)$	10
1.4 Sommerfeld-Watson (Davide Bufalini)	11
1.4.1 Esempio 1	11
1.5 Espansioni asintotiche (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)	12
1.5.1 Spunti di teoria (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)	12
1.5.1.1 Definizione molto generale (Alessandro Marcelli)	12
1.5.1.2 Termine Leading: Metodo di Laplace (Alessandro Marcelli)	12
1.5.1.3 Metodo risolutivo generalizzato (Paolo Proia)	12
1.5.1.4 Metodo del punto di sella (Davide Bufalini)	13
1.5.2 Esempio 1: metodo generalizzato (Paolo Proia)	14
1.5.3 Esempio 2 (Davide Bufalini)	16
1.5.4 Esempio 3 (Davide Bufalini)	18
1.5.5 Esempio 4 (Davide Bufalini)	20

1.5.6	Esempio 5: Punto di sella 1 (Davide Bufalini)	22
1.5.7	Esempio 6: Punto di sella 2 (Davide Bufalini)	24
2	Operatori Infinito-Dimensionali	27
2.1	Spunti di teoria generale (Alessandro Marcelli)	27
2.1.1	Nozioni generali sugli spazi	27
2.1.1.1	Spazi vettoriali	27
2.1.1.2	Spazi metrici, normati ed euclidei	28
2.1.2	Operatori	28
2.1.2.1	Spettri per operatori Infinito-Dimensionali	29
2.2	Operatori integrali (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)	30
2.2.1	Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)	30
2.2.2	Esempio 1 (Davide Bufalini)	31
2.2.3	Esempio 2 (Davide Bufalini)	34
2.3	Operatori differenziali (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)	36
2.3.1	Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)	36
2.3.2	Esempio 1: Operatore Differenziale del Ilo Ordine (Davide Bufalini)	37
2.3.3	Esempio 2 (Davide Bufalini)	39
2.4	Operatori a blocchi (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)	41
2.4.1	Esempio 1 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Paolo Proia)	41
2.4.2	Esempio 2 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)	46
3	Equazioni Differenziali Ordinarie	51
3.1	Spunti di teoria generale (Alessandro Marcelli)	51
3.1.1	Concetti generali	51
3.1.2	Esistenza ed unicità delle soluzioni	51
3.1.3	Distribuzioni	52
3.1.4	Equazioni Differenziali Lineari	52
3.2	EDO lineari del 1o ordine [teoria](Alessandro Marcelli)	53
3.2.1	Separazione di variabili + variazione delle costanti	53
3.2.2	Metodo della funzione di Green	54
3.3	EDO lineari del 2o ordine (Adriano Chialastri, Alessandro Marcelli)	56
3.3.1	Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)	56
3.3.1.1	Metodo del Wronskiano	58
3.3.1.2	Metodo della funzione di Green	59
3.3.1.3	Teorema di Green	61
3.3.1.4	Applicazione del teorema di Green ai problemi di Sturm-Liouville	62
3.3.1.5	Applicazione del teorema di Green ai problemi di Cauchy	63
3.3.1.6	Operatori lineari, unicità delle soluzioni e teorema dell'alternativa	63
3.3.1.7	Applicazione del teorema dell'alternativa alle funzioni di Green	65
3.3.2	Messaggio dall'autore	66
3.3.3	Esempio 1: Problema di Cauchy (Adriano Chialastri)	66
3.3.4	Esempio 2: Omogenea di Eulero (Adriano Chialastri)	68
3.3.5	Esempio 3: Problema di Sturm-Liouville (Adriano Chialastri)	69
3.3.6	Esempio 4: Problema di Cauchy non lineare (Adriano Chialastri)	71
3.3.7	Esempio 5: prova d'esame (Alessandro Marcelli)	74
3.4	Equazioni Differenziali Ordinarie Complesse (Alessandro Marcelli)	76
3.4.1	Spunti di teoria	76
3.4.1.1	Concetti introduttivi	76
3.4.1.2	Punti regolari e soluzione per serie	77
3.4.1.3	Punti singolari	80
3.4.1.3.1	Soluzioni per autovalori di A non coincidenti	81
3.4.1.3.2	Soluzioni per autovalori di A coincidenti	82

3.4.1.3.3	Punti singolari regolari e teorema di Fuchs	83
3.4.1.3.3.1	Verifica dei coefficienti	85
3.4.1.3.3.2	Convergenza delle serie	87
3.4.1.3.4	Punti singolari non regolari	89
3.4.1.4	Punto all'infinito	90
3.4.1.5	Equazioni fuchsiane	92
3.4.1.5.1	Trasformazioni conformi	93
3.4.1.5.2	Equazioni con 1 punto fuchsiano	95
3.4.1.5.3	Equazioni con 2 punti fuchsiani	96
3.4.1.5.4	Equazioni con 3 punti fuchsiani: Papperitz-Riemann	98
3.4.1.5.5	Equazione ipergeometrica	100
3.4.1.5.5.1	Soluzioni dell'ipergeometrica	101
3.4.1.5.5.2	Relazioni tra le soluzioni dell'ipergeometrica	103
3.4.2	Esempi	104

Note introduttive

0.1 Ciancio alle bande

Questa ”dispensa” è una raccolta di materiale utile (almeno al momento della scrittura di questa introduzione) alla prova scritta dell’esame di Metodi e Modelli Matematici per la Fisica 2 del corso di laurea magistrale in Fisica dell’Università Tor Vergata.

L’intento iniziale era semplicemente quello di fare una raccolta di esercizi svolti da gente brava che nel corso del tempo ho ~~seiacallato~~ recuperato durante la preparazione di questa prova scritta, come esercizio personale al fine di una maggiore comprensione. Niente de serio, solo che me diverto più a scrivere su latex che a farmi venire un crampo al braccio alla lavagna.

Ho iniziato quindi trascrivendo e basta, modificandoli nella forma quel tanto che bastava per passare dal ”calcolo su foglio” a roba che sembra effettivamente una dispensa.

Poi me so fatto prende la mano, e oltre a perdere un sacco di tempo a formattare il meglio possibile sti appunti, quando possibile ho cercato di aggiungere dei minimi richiami di teoria qualora fossero assenti negli svolgimenti.

Sul successo dell’operazione lascio il giudizio ai posteri, ammesso che ce ne saranno.

Ben lungi dall’essere un lavoro perfetto, ma sinceramente spero di non fare in tempo a renderlo tale (RIP Equazioni Differenziali in campo complesso).

0.2 Crediti

Nei titoli degli argomenti sono creditati i vari autori dei materiali raccolti. Qualora una sezione fosse composta da materiale di più persone, queste sono prima creditate nel titolo della sezione e poi nelle sottosezioni rilevanti. Se invece una sezione è farina del sacco di un solo autore, questo viene creditato solo nel titolo della sezione.

Detto in parole povere, ste dispense sono l’equivalente di un mixtape, e a parte che con il buon Paolo, non ho collaborato con gli altri due autori (dei quali ho però la benedizione a pubblicare queste dispense), mi sono limitato a fare l’amanuense con il loro lavoro. Ergo se avete cacciato soldi per avere sto documento vi hanno truffato.

0.3 Contatti

Qualora eventuali futuri ~~masochisti~~ utenti volessero contribuire a quest’accrocco mi si può raggiungere all’indirizzo **marcelli.alessandro.92@gmail.com**

Chapter 1

Funzioni analitiche, prolungamenti ed espansioni asintotiche

1.1 Spunti di teoria generale (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)

1.1.1 I numeri complessi (Alessandro Marcelli)

I numeri complessi possono essere espressi come somma di una **parte reale** e di una **parte immaginaria**

$$z = x + iy \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Si definisce il **complesso coniugato** di un numero complesso come

$$\bar{z} = x - iy \quad (1.2)$$

Possiamo definire il suo **modulo** come

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad (1.3)$$

Utilizzando queste due definizioni si possono riscrivere le parti reale e immaginaria come

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (1.4)$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1.5)$$

Un numero complesso può essere rappresentato anche in **forma polare** nel seguente modo

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases} \quad (1.6)$$

↓

$$\begin{cases} z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ \bar{z} = \rho(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) \end{cases} \quad (1.7)$$

Possiamo inoltre usare la **formula di Eulero** per riscrivere

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (1.8)$$

↓

$$\begin{cases} z = \rho e^{+i\theta} \\ \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2\rho} \quad (1.10)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad ; \quad x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i\rho} \quad (1.11)$$

1.1.2 Funzioni di variabile complessa (Alessandro Marcelli)

Una funzione di variabile complessa $f(z)$ per definizione può essere scritta come

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad ; \quad x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

In analogo col caso reale, $f(z)$ si dice **differenziabile**[1] in $z_0 \in \mathbb{C}$ se il limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.13)$$

1. esiste
2. è finito
3. il suo valore non cambia in funzione della direzione dal quale lo si approccia

La difficoltà aggiuntiva rispetto al caso reale è dovuto al fatto che in campo complesso il numero di direzioni possibili è infinito. Le condizioni sono quindi molto più restrittive del caso reale, ovvero

1. Devono essere rispettate le **condizioni di Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (1.15)$$

2. Le derivate parziali prime di $u(x, y)$ e $v(x, y)$ devono essere continue

Le funzioni di variabile complessa si dividono in due categorie:

1. **funzioni a singolo valore**, ovvero che assumono lo stesso valore in z_0 indipendentemente dal percorso fatto per raggiungerlo. Ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (1.16)$$

2. **funzioni multivalore**, ovvero il cui valore varia a seconda del percorso fatto per raggiungere z_0 . Ad esempio

$$g(z) = \ln(z) = \ln|z| + i \arg(z) \quad (1.17)$$

Se la funzione è differenziabile ed è a **singolo valore** per ogni punto di un insieme \mathcal{D} , allora si dice che è **analitica** in questo insieme, che prende il nome di **dominio di analiticità**. All'interno di \mathcal{D} essa non può assumere massimi locali.

Una funzione analitica può essere anche riscritta come (RITROVA GLI APPUNTI DI SANTINI)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \rightarrow f(z) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z}) \quad (1.18)$$

Se una funzione è analitica in un punto, questo si dice **punto regolare** della funzione, altrimenti prende il nome di **punto singolare**.

Per le funzioni multivalore spesso si può "barare" utilizzando le **superfici di Riemann**, che ci permettono di usare le comode proprietà delle funzioni analitiche.

Il **teorema di Cauchy** ci dice che, per curve chiuse γ

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{D} \quad (1.19)$$

Siccome qualunque curva chiusa può essere scritta come combinazioni di curve con gli stessi estremi, questo implica che fissati gli estremi di integrazione il valore dell'integrale è indipendente dal percorso.

1.1.3 Zeri e singolarità (Alessandro Marcelli)

1.1.3.1 Zeri

Se una funzione $f(z)$ sparisce per $z = z_0$ allora tale punto viene detto **zero della funzione**. Uno zero si dice di ordine n quando

$$f(z_0) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right|_{z=z_0} = \dots = \left. \frac{d^{n-1} f(z)}{dz^{n-1}} \right|_{z=z_0} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \neq 0 \quad (1.20)$$

1.1.3.2 Singolarità

Le **singolarità** di una funzione sono i punti in cui una funzione non è analitica. Qualora vi sia un solo punto nell'insieme si parla di **singolarità isolata**. Possiamo dividerle in tre categorie

1. **Singolarità eliminabile**, quando esiste finito il limite tendente ad essa.
2. **Poli di ordine n** , ovvero dove la serie di Laurent della funzione ha coefficienti nulli da b_{n+1} in poi.
3. **Singolarità essenziali** quando la serie di LAurent ha infiniti coefficienti non nulli

APPUNTI SANTINI DATROVARE

1.1.3.3 Residui

Se in un insieme A la nostra $f(z)$ presenta singolarità isolate z_i , non vale più il teorema di Cauchy, e quindi non si annulla l'integrale, il cui valore viene dato dalla somma dei **residui della funzione** in tali punti

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \sum_{i=1}^N \text{Res}(f(z), z_i) \quad (1.21)$$

$$\text{Res}(f(z), z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right) \quad ; \quad n = \text{ordine del polo} \quad (1.22)$$

1.1.4 Indicatore Logaritmico (Davide Bufalini)

Data una funzione $f(z)$ meromorfa, si definisce l'**indicatore logaritmico** come

$$L_f(z) = \frac{d}{dz} \ln(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (1.23)$$

$L_f(z)$ sarà dotata di poli semplici.

Facciamo alcune osservazioni:

1. Se $f(z)$ ha N poli e K zeri allora

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{l=1}^M r_l \quad (1.24)$$

Le quantità m_i e r_l sono rispettivamente le molteplicità dei poli e degli zeri di $f(z)$.

2. Per l'indicatore logaritmico vale la seguente relazione

$$\int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \text{Arg}(f(z)) \quad (1.25)$$

3. In generale vale che

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} L_f(z) \phi(z) = \sum_{i=1}^N m_i \phi(a_i) - \sum_{l=1}^M r_l \phi(b_l) \quad (1.26)$$

Dove a_i e b_l sono rispettivamente i poli e gli zeri di $\phi(z)$.

1.1.5 Espansione di Weierstrass (Davide Bufalini)

Presa una $f(z)$ con infiniti zeri z_j numerabili di ordine α_j che si accumulano all'infinito (e mai allo zero???) allora vale lo sviluppo

$$f(z) = f(0)e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \frac{z}{z_n}} \quad (1.27)$$

1.1.6 Funzioni speciali (Alessandro Marcelli)

1.1.6.1 Funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = \dots = \quad \text{Integrale Euleriano di II tipo} \quad (1.28)$$

$$= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \quad (1.29)$$

Gode della proprietà

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.30)$$

\downarrow

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.31)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \xi\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \xi\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi\xi)} \quad (1.32)$$

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (1.33)$$

$$\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)} \quad (1.34)$$

In campo complesso si può prolungare tramite il cammino di Hankel, e si arriva ad ottenere

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (1.35)$$

1.1.6.2 Funzione Digamma

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \quad (1.36)$$

1.1.6.3 Funzione beta di Eulero

$$B(p, q) = \int_0^1 dt t^{p-1} (1-t)^{q-1} = \dots = \quad \text{Integrale Euleriano di I tipo} \quad (1.37)$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.38)$$

1.1.6.4 Funzione zeta di Riemann generalizzata

Sono stanco capo.

1.2 Inversione e reciprocità locale (Davide Bufalini)

1.2.1 Spunti di teoria (Davide Bufalini)

Sia una $f(z)$ analitica con centro dello sviluppo in z_0 tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.39)$$

allora, preso un intorno di z_0 , vi si possono definire la reciproca della funzione $\frac{1}{f}$ e la sua inversa z^{-1} .

1.2.1.1 Funzione reciproca

Definiamo la reciproca come

$$\frac{1}{f} = \sum_k c_k (z - z_0)^k \quad (1.40)$$

Allora per definizione avremo, considerando la 1.39

$$\sum_k c_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n = 1 \quad (1.41)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k,n} c_k a_n (z - z_0)^{n+k} = 1 \quad (1.42)$$

Riscriviamo la 1.42 come

$$\sum_{l=0}^{+\infty} d_l (z - z_0)^l = 1 \quad (1.43)$$

definendo

$$l = n + k \quad (1.44)$$

$$d_l = \sum_{n=0}^l c_{l-n} a_n \quad (1.45)$$

Vediamo come

$$1 = d_0 = c_0 a_0 \quad \rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{a_0} \quad (1.46)$$

$$0 = d_1 = c_0 a_1 + c_1 a_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} = -\frac{a_1}{a_0} c_0 \quad (1.47)$$

$$0 = d_2 = c_0 a_2 + c_1 a_1 + c_2 a_0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \dots = -\frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \quad (1.48)$$

...

Andiamo ora a scrivere

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}(z - z_0) + \frac{a_2}{a_0}(z - z_0)^2 + \dots} := \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - h(z)} \quad (1.49)$$

Siccome $|h(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, possiamo appoggiarci al concetto di serie geometrica

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0} \cdot (1 + h(z) + h^2(z) + \dots) \quad (1.50)$$

1.2.1.2 Funzione inversa

Iniziamo notando come $F(z_0) = a_0$, da cui troviamo che, definendo

$$g(w) = f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(w - w_0)^n \quad (1.51)$$

Si ottiene

$$g(w_0) = f^{-1}(w_0) = b_0 = z_0 \quad (1.52)$$

Possiamo quindi procedere in due modi:

1. Per serie:

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = w - w_0 \quad (1.53)$$

\downarrow

$$z - z_0 = g(w) - g(w_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(w - w_0)^n \quad (1.54)$$

\downarrow

$$w - w_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(w - w_0)^k \right)^n \quad (1.55)$$

2. Formula di Lagrange:

$$b_0 = g(w_0) = z_0 \quad (1.56)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right] \Bigg|_{z=z_0} \quad (1.57)$$

1.2.2 Numeri di Eulero

Data la relazione

$$\frac{1}{\coth(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \quad (1.58)$$

$$E_{2n+1} = 0 \quad \forall n \quad (1.59)$$

$$E_n = \text{numeri di eulero} \quad (1.60)$$

1.2.3 Numeri di Bernoulli

1.3 Espansione di Mittag-Leffler (Davide Bufalini)

Presa una $f(z)$ analitica nell'origine e con infiniti poli semplici che si accumulano all'infinito, vale la seguente approssimazione

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cdot \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \quad (1.61)$$

$$R_n = \text{Res}(f, z_n) \quad (1.62)$$

1.3.1 Esempio 1: $\cot(z)$

1.3.1.1 Calcolo dell'espansione

La funzione

$$f(z) = \cot(z) \quad (1.63)$$

ha poli in $z_n = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, ma **non** è analitica in $z = 0$.

Per eliminare la singolarità in 0 considero allora la funzione

$$f(z) = \cot(z) - \frac{1}{z} \quad (1.64)$$

I cui residui saranno

$$R_n = \lim_{z \rightarrow n\pi} \left[(z - n\pi) \cdot \frac{z \cot(z) - 1}{z} \right] = \dots = 1 \quad (1.65)$$

Applicando lo sviluppo ottengo

$$\cot(z) - \frac{1}{z} = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \quad (1.66)$$

\downarrow

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n > 0} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} - \left(\frac{1}{-z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right] = \\ &= \dots = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n > 0} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \end{aligned} \quad (1.67)$$

1.3.1.2 Verifica dell'espansione

Dimostrare la validità della relazione

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \quad (1.68)$$

Iniziamo dimostrando l'analiticità. Come abbiamo visto prima, dobbiamo prendere

$$f(z) = \cot(z) - \frac{1}{z} \quad (1.69)$$

Andiamo quindi a calcolarne il limite in 0

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \cot(z) \frac{1}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z \cos(z)}{\sin(z)} - 1}{z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z \sin(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) \cdot [z - \tan(z)]}{z - \sin(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cot(z)}{z} \cdot (z - \tan(z)) = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

Verificata l'analiticità, procediamo a studiare poli e residui della funzione.

Avremo dei poli semplici quando $\sin(z) = 0$, e quindi per $z_n = n\pi$, con $n = 0$ **escluso**, in quanto vi si annulla la funzione. Ne segue che i residui saranno

$$Res(f, z_n) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cdot \frac{z \cot(z) - 1}{z} \quad (1.71)$$

Facendo il cambio di variabile $u = z - n\pi$ otteniamo

$$Res(f, z_n) = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cot(u + n\pi) - 1}{u + n\pi} \quad (1.72)$$

Se però osserviamo un attimo il termine $\cot(u + n\pi)$ notiamo come lo si possa manipolare nel seguente modo

$$\cot(u + n\pi) = \frac{\cos(u + n\pi)}{\sin(u + n\pi)} = \frac{\cos(u) \cdot (-1)^n}{\sin(u) \cdot (-1)^n} = \frac{\cos(u)}{\sin(u)} = \cot(u) \quad (1.73)$$

Possiamo quindi riscrivere la 1.72 come

$$\begin{aligned} Res(f, z_n) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cot(u) - 1}{u + n\pi} \simeq \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{(u + n\pi) \cdot \frac{1}{u} - 1}{u + n\pi} = \\ &= \left. \frac{u + n\pi - u}{u + n\pi} \right|_{u=0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Possiamo quindi applicare lo sviluppo

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \\ &= \sum_{n>0} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} - \left(\frac{1}{-z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right] = \\ &= 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - (n\pi)^2} \end{aligned} \quad (1.75)$$

E la tesi è così dimostrata.

1.3.2 Esempio 2: $\sin^{-2}(z)$

Utilizziamo l'integrale (di Cauchy? Chiedere)

$$I_n = \oint_{Q_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z) \sin^2(\zeta)} \quad (1.76)$$

Studiando i poli otteniamo

$$\zeta_0 = z \quad \text{polo semplice} \quad (1.77)$$

$$\zeta_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{poli doppi} \quad (1.78)$$

Siccome $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) + \text{Res}(f(\zeta), z) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) + \frac{1}{\sin^2(z)} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Da cui otteniamo

$$\frac{1}{\sin^2(\zeta)} = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) \quad (1.80)$$

Dato che

$$\text{Res}(f(\zeta), n\pi) = \lim_{\zeta \rightarrow n\pi} \frac{d}{d\zeta} \frac{(\zeta - n\pi)^2}{(\zeta - z) \sin^2(\zeta)} \quad (1.81)$$

↓

$$\begin{cases} u = \zeta - n\pi \\ \zeta = u + n\pi \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(\zeta), n\pi) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \sin^2(u + n\pi)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z)(-1)^{2n} \sin^2(u)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \left(u - \frac{u^3}{3!} + \dots\right)^2} = \frac{d}{du} \frac{u^2}{(u + n\pi - z) \left(u - \frac{u^3}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{1}{(u + n\pi - z) \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \frac{d}{du} \frac{1}{(u + n\pi - z) \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \dots\right)^2} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{d}{du} \frac{\left(1 + \frac{u^2}{3!} - \dots\right)^2}{(u + n\pi - z)} \Bigg|_{u=0} = \frac{d}{du} \frac{\left(1 + \frac{u^2}{3} + \dots\right)}{(u + n\pi - z)} \Bigg|_{u=0} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}u + \dots\right)(u + n\pi - z) - \left(1 + \frac{u^2}{3}\right)}{(u + n\pi - z)^2} \Bigg|_{u=0} = -\frac{1}{(n\pi - z)^2} \end{aligned} \quad (1.82)$$

La 1.79 diventa

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n\pi - z)^2} \quad (1.83)$$

1.4 Sommerfeld-Watson (Davide Bufalini)

Utile strumento per il calcolo delle somme di serie. Sia una funzione $g(z)$ analitica ovunque tranne che in singolarità polari isolate z_k e sia

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |zq(z)| = 0 \quad (1.84)$$

Allora valgono le seguenti relazioni

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n g(n) = -\pi \sum_k \text{Res} \left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)}, z = z_k \right) \quad (1.85)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = -\pi \sum_k \text{Res} (g(z) \cot(\pi z), z = z_k) \quad (1.86)$$

1.4.1 Esempio 1

Calcolare la somma della serie

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.87)$$

Iniziamo notando che possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = 2S(a) + \frac{1}{a^2} \quad (1.88)$$

Ponendo

$$g(z) = \frac{1}{n^2 + a^2} \quad (1.89)$$

Otteniamo

$$z^2 + a^2 = 0 \quad (1.90)$$

$$\downarrow$$

$$z_p = \pm ia \quad (1.91)$$

E possiamo quindi applicare SW

$$\lim_{z \rightarrow \pm ia} \frac{z \pm ia}{z^2 + a^2} \cdot \frac{1}{\sin(\pi z)} = \dots = -\frac{1}{2a \sinh(\pi a)} \quad (1.92)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\pi \text{Res} \left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)}, z_p \right) = -\frac{\pi}{2a \sinh(\pi a)}$$

$$\downarrow$$

$$S(a) = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a \sinh(\pi a)} \quad (1.93)$$

1.5 Espansioni asintotiche (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)

1.5.1 Spunti di teoria (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)

1.5.1.1 Definizione molto generale (Alessandro Marcelli)

Lo sviluppo in serie può essere esteso anche al caso in cui la funzione oggetto di studio $f(z)$ non sia analitica in z_0 , trovando uno sviluppo $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ che approssima "bene" il comportamento della funzione in un intorno di z_0 [2], ovvero che valgono le due seguenti proprietà:

1. il resto della serie $R_N(z) = f(z) - S_N(z)$ è tale che $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|R_N(z)|}{|f_N(z)|} = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$
2. la serie fornisce una buona approssimazione di $f(z)$ solo in determinate regioni del piano complesso

L'approssimazione che si va a trovare sarà tanto più buona tanto più grande è x , e si lavora quindi per $x \rightarrow +\infty$. Nel caso ci si trovi nel caso $x \rightarrow -\infty$ bisogna fare un cambio di variabile.

Il contributo maggiore sarà dato dai primi termini dell'espansione, motivo per cui di solito ci si ferma al secondo termine.

Nel nostro caso ci interessiamo della famiglia di funzioni integrali del tipo

$$F(x) = \int_a^b dt e^{x\phi(t)} g(t) \quad (1.94)$$

1.5.1.2 Termine Leading: Metodo di Laplace (Alessandro Marcelli)

Se interessa solo il primo termine dell'espansione, detto **dominante**, basta sviluppare al secondo ordine $\phi(t)$ e $g(t)$ nel punto di massimo della prima, risolvere l'integrale con questa approssimazione e prendere il primo termine, come si vede nell'esempio svolto del paragrafo 1.5.3.

1.5.1.3 Metodo risolutivo generalizzato (Paolo Proia)

Qualora servano termini successivi (di solito ci si ferma al termine Next-to-Leading) la situazione si complica, in quanto non basta sviluppare al secondo ordine e bon, dato che ci sono casi in cui uno dei due termini può essere nullo (funzioni trigonometriche my beloved). Il procedimento si snoda quindi:

1. Trovare massimo per $\phi(t)$ (chiamiamo t_0)
2. Espandere $g(t)$ intorno a t_0 per 2 o 3 termini
3. Prendere nota dell'esponente dell'ultimo termine (definiamo come n)
4. Parametrizzare come $\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2$ ed espandere $\phi(t)$ intorno a t_0 fino ad ordine n
5. Trovare cambio di variabile da t a τ , imponendo $t - t_0 = h(\tau) = \sum_i^{n+1} c_i \tau^i$
6. Sostituiamo nella 4 tenendo i termini fino a τ^{n+1}
7. Imporre l'uguaglianza tra i coefficienti con la stessa potenza di τ a dx e sx, trovando così $h(\tau)$
8. Essendo $h(\tau) = t + \text{cost.}$ abbiamo che $\dot{h}d\tau = dt$ e abbiamo così terminato il cambio di variabile
9. Sostituiamo nella 1.94

$$\phi(t) = \phi(t_0) - \tau^2 \quad (1.95)$$

$$dt = \dot{h}d\tau \quad (1.96)$$

$$g(t) \rightarrow g(h(\tau)) \quad (1.97)$$

Nella 1.97 usiamo direttamente l'espansione in serie del punto 2

10. Svolgiamo il prodotto $\dot{h} \cdot g(h(\tau))$, sostituiamo nell'integrale e teniamo i primi n termini il cui integrale è non nullo (nel caso Next-to-Leading i primi 2)

NOTA BENE: qualora una delle due funzioni sia una trigonometrica elevata a potenza conviene sviluppare solo la trigonometrica e mettere a potenza lo sviluppo, e fare altri magheggi quali utilizzare le relazioni trigonometriche per fare il meno conti possibile.

1.5.1.4 Metodo del punto di sella (Davide Bufalini)

Abbiamo finora visto integrali sulla retta reale. Qualora si abbia una generica curva $\gamma \in \mathbb{C}$ il procedimento si complica leggermente.

Presa una funzione integrale della forma

$$I(x) = \int_{\gamma} dt e^{x\phi(t)} g(t) \quad (1.98)$$

Qualora $\phi(t)$ e $g(t)$ siano analitiche in un dominio D e si abbia $\gamma \subseteq D$ abbiamo un problema. Infatti, riscrivendo la $\phi(t)$ nella seguente forma

$$\phi(t) = u(t) + iv(t) \quad (1.99)$$

All'interno del dominio non è detto che $v(t)$ sia costante, il che ci impedisce di restringerci al caso reale. Inoltre, per $t \in \gamma$ il termine $e^{iv(t)}$ oscilla fortemente, portando la $I(x)$ ad essere mediata a 0.

Cerchiamo un modo per rendere costante la $v(t)$ e rendere massima la $u(t)$, in modo da rispettare il comportamento asintotico. Il procedimento si snoda nei seguenti passaggi

1. Riscriviamo la $\phi(t)$ come

$$\phi(t) = \phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.100)$$

Possiamo farlo in più modi

- (a) Coordinate cartesiane, sostituendo $t = x + iy$
- (b) Coordinate polari, sostituendo $t = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i \arctan(\frac{x}{y})}$

2. Cerchiamo il punto di sella t_0 di $\phi(t)$ tale

$$\phi(t_0) = 0 \quad (1.101)$$

$$\ddot{\phi}(t_0) : \ddot{u}(t_0) < 0 \quad (1.102)$$

3. Cerchiamo quindi i percorsi a fase costante passanti per t_0 , ovvero ponendo $v(t) = v(t_0)$, da cui segue $Im(\phi(t))m = Im(\phi(t_0))$. Una volta trovati questi cammini, vediamo se è possibile deformare la curva γ su un cammino a fase costante γ^* dove $\ddot{u}(t_0) < 0$

4. Una volta trovato questo cammino, risolviamo con i metodi noti per il caso reale

1.5.2 Esempio 1: metodo generalizzato (Paolo Proia)

Sia la seguente funzione integrale

$$I(t) = \int_1^{+\infty} dt e^{-x \frac{t^2}{2}} t^x \frac{1}{t^2 + 1} = \int_1^{+\infty} dt e^{-x \frac{t^2}{2}} e^{x \ln(t)} \frac{1}{t^2 + 1} = \int_1^{+\infty} dt e^{x(\ln(t) - \frac{t^2}{2})} \frac{1}{t^2 + 1} \quad (1.103)$$

$$\phi(t) = \ln(t) - \frac{t^2}{2} \quad (1.104)$$

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \quad (1.105)$$

1. Trovare massimo per $\phi(y)$ (chiamiamo y_0)

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{t} - t = \frac{1 - t^2}{t} = 0 \rightarrow t = \pm 1 \quad (1.106)$$

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 = -\frac{t^2 + 1}{t^2} \quad (1.107)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{2}{t^3} \quad (1.108)$$

Escludiamo il risultato negativo, siccome $\phi(t)$ non è definito in quel punto. Abbiamo quindi

$$t_0 = +1 \quad ; \quad \phi_0 = -\frac{1}{2} \quad (1.109)$$

2. Espandiamo $g(t)$ intorno a t_0

$$g(t) \simeq g(t_0) + g'(t_0) \cdot (t - t_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t - 1) = 1 - \frac{t}{2} \quad (1.110)$$

3. Notiamo come ci siamo fermati per $n = 1$

4. Parametrizziamo

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} + 0 \cdot (t - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (t - 1)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2(t - t_0)^3 = -\frac{1}{2} - (t - 1)^2 + \frac{1}{3}(t - t_0)^3 = -\tau^2 \quad (1.111)$$

5. Troviamo cambio di variabile da t a τ , fermandoci al terzo ordine, essendo lo sviluppo in t al 3o ordine

$$t - t_0 = t - 1 = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + O(\tau^4) \quad (1.112)$$

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} - (c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^2 + \frac{1}{3}(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^3 \quad (1.113)$$

6. Andiamo quindi a sostituire

$$\begin{aligned} \phi(t) + \frac{1}{2} &= -(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^2 + \frac{1}{3}(c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3)^3 = \dots = \\ &= -c_1^2\tau^2 - 2c_1c_2\tau^3 + \frac{1}{3}c_1^3\tau^3 \end{aligned} \quad (1.114)$$

7. Andiamo ora a confrontare

$$\phi(t) + \frac{1}{2} = -\tau^2 \quad (1.115)$$

$$\phi(t) + \frac{1}{2} = -c_1^2\tau^2 - 2c_1c_2\tau^3 + \frac{1}{3}c_1^3\tau^3 \quad (1.116)$$

Ne segue che

$$-c_1^2 \tau^2 = -\tau^2 \quad \rightarrow c_1 = 1 \quad (1.117)$$

$$-2c_1 c_2 \tau^3 + \frac{1}{3} c_1^3 \tau^3 = 0 \quad \rightarrow -2c_2 + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{6} \quad (1.118)$$

Abbiamo così trovato

$$t - 1 = h(\tau) = \tau + \frac{1}{6} \tau^2 \quad (1.119)$$

8. Sostuiamo e troviamo

$$t - 1 = \tau + \frac{1}{6} \tau^2 \rightarrow d(t - 1) = dt = \left(1 + \frac{1}{3} \tau\right) d\tau \quad (1.120)$$

9. Sostituiamo infine nella nostra funzione integrale

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(1 + \frac{1}{3} \tau\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{6} \tau - \frac{1}{6} \tau^2\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x(\tau^2 + \frac{1}{\tau})} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \tau\right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \tau\right) \end{aligned} \quad (1.121)$$

10. abbiamo quindi

$$I(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau \right) \quad (1.122)$$

1.5.3 Esempio 2 (Davide Bufalini)

Calcolare per $x \rightarrow +\infty$ i primi due termini dell'espansione per la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt e^{x \cos(t)} \sin^3(t) \quad (1.123)$$

Partiamo dal **termine Leading**. Siccome abbiamo

$$\phi(t) = \cos(t) \quad (1.124)$$

$$g(t) = \sin^3(t) \quad (1.125)$$

Andiamo a cercarne il punto di massimo, che troviamo in

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\sin(t) \quad (1.126)$$

$$\downarrow$$

$$\sin(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$t_0 = 0 \quad (1.127)$$

Andiamo quindi a sviluppare

$$\phi(t) \simeq 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \quad (1.128)$$

$$g(t) \simeq \left(t - \frac{t^3}{6}\right)^3 \simeq t^3 \quad \text{termine leading} \quad (1.129)$$

E otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt e^{x(1-\frac{t^2}{2})} t^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} dt e^x e^{-x\frac{t^2}{2}} t^3 \end{aligned} \quad (1.130)$$

Applicando la sostituzione

$$y = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad t^2 = 2y \quad (1.131)$$

$$dy = t dt \quad (1.132)$$

Possiamo arrivare ad ottenere il termine cercato

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy e^x e^{-xy} 2y = \\ &= 2e^x \int_0^{+\infty} dy e^{-xy} y = \\ &= 2e^x \frac{\Gamma(2)}{x^2} = \frac{2e^x}{x^2} \end{aligned} \quad (1.133)$$

Per quanto riguarda il termine **Sub-leading**, andiamo a parametrizzare la $\phi(t)$ nel seguente modo

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.134)$$

$$\downarrow$$

$$\cos(t) - 1 = -\tau^2$$

$$\downarrow$$

$$t = \arccos(i - \tau^2) \quad (1.135)$$

$$\downarrow$$

$$dt = -\frac{d\tau}{\sqrt{1 - (1 - \tau^2)^2}} \cdot (-2\tau) = \frac{2\tau d\tau}{\sqrt{2\tau^2 - \tau^4}} = \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} \quad (1.136)$$

Andiamo così a trovare i primi due termini dell'espansione

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{1 - \cos^2(t)})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{1 - (1 - \tau^2)^2})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\sqrt{2\tau^2 - t^4})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2d\tau}{\sqrt{2 - \tau^2}} e^{x(1-\tau^2)} (\tau\sqrt{2 - \tau^2})^3 = \\ &= \int_0^{+\infty} 2d\tau e^{x(1-\tau^2)} \tau^3 (2 - \tau^2) = \\ &= 2e^x \left[2 \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^3 - \int_0^{+\infty} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^5 \right] = \\ &= 2e^x \left[2 \frac{\Gamma(2)}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)}{x^3} \right] = \\ &= \frac{2e^x}{x^2} - \frac{2e^x 2!}{2 x^3} = \\ &= \frac{2e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3} \end{aligned} \quad (1.137)$$

1.5.4 Esempio 3 (Davide Bufalini)

Calcoliamo i termini **Leading** e **Subleading** per la funzione

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x \cosh(t)} \quad (1.138)$$

Iniziamo individuando le nostre funzioni

$$\phi(t) = -\cosh(t) \quad (1.139)$$

$$g(t) = 1 \quad (1.140)$$

↓

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \sinh(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t_0 = 0 \quad (1.141)$$

Iniziamo col termine **Leading**. Sviluppando intorno a t_0 otteniamo

$$\phi(t) \simeq -\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \quad (1.142)$$

↓

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x} e^{-x \frac{t^2}{2}} = e^{-x} \frac{2\pi}{x} \quad (1.143)$$

Per quanto riguarda il termine **Subleading** andiamo a parametrizzare

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.144)$$

↓

$$\cosh(t) - (-1) = -\tau^2 \quad (1.145)$$

Siccome abbiamo

$$dt = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau \quad (1.146)$$

Dobbiamo trovare una espressione per $t(\tau)$ per il calcolo dello Jacobiano.

Siccome abbiamo $t_0 = 0$ andiamo a sviluppare per t piccoli

$$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots \quad (1.147)$$

\downarrow

$$\mathcal{I} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots = \mathcal{I} + \tau^2$$

\downarrow

$$\frac{t^2}{2} \left(1 + \frac{t^2}{12} \right) = \tau^2 \quad (1.148)$$

\downarrow

$$t^2 = \frac{2\tau^2}{1 + \frac{t^2}{12}} = 2\tau^2 \left(1 - \frac{t^2}{12} + \left(\frac{t^2}{12} \right)^2 + \dots \right) \simeq 2\tau^2 - 2\tau^2 \frac{t^2}{12} \quad (1.149)$$

\downarrow

$$t^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{6} \right) = 2\tau^2$$

\downarrow

$$t^2 = \frac{2\tau^2}{1 + \frac{\tau^2}{6}}$$

\downarrow

$$t = \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{6}}} \simeq \sqrt{2}\tau \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{6} \right) = \sqrt{2}\tau \left(1 - \frac{\tau^2}{12} \right) \quad (1.150)$$

Dunque otteniamo

$$t = \sqrt{2}\tau - \frac{\sqrt{2}}{12}\tau^3 \quad (1.151)$$

\downarrow

$$dt = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\tau^2 \right) d\tau \quad (1.152)$$

Possiamo quindi finalmente sostituire

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathbb{R}} dt e^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}x} = \\ &= e^{-x} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\tau^2 \right) = \\ &= e^{-x} \sqrt{2} \left[\int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} - \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \frac{1}{4}\tau^2 \right] = \\ &= e^{-x} \sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right] = \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} - \frac{1}{8x} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[1 - \frac{1}{8x} \right] \end{aligned} \quad (1.153)$$

1.5.5 Esempio 4 (Davide Bufalini)

Data la funzione

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} dt e^{-\frac{x}{\sin(t)}} (1 + \cot(t)) \quad (1.154)$$

se ne calcoli l'espansione.

Iniziamo trovando il punto di sella

$$\phi(t) = -\frac{1}{\sin(t)} \quad (1.155)$$

↓

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = 0 \quad (1.156)$$

↓

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \quad (1.157)$$

Siccome il punto cade su uno degli estremi, ci basta considerare $t(\tau) \sim o(\tau^2)$ Parametizziamo

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\tau^2 \quad (1.158)$$

↓

$$-\frac{1}{\sin(t)} - \left(-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = -\tau^2$$

↓

$$-\frac{1}{\sin(t)} = 1 + \tau^2$$

↓

$$\sin(t) = -\frac{1}{1 + \tau^2} = 1 - \tau^2 + \tau^4 + \dots$$

↓

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \tau^2 + o(\tau^3) \quad (1.159)$$

Espandendo τ si ha che

$$t - \frac{\pi}{2} = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \dots \quad (1.160)$$

Sostituendo nella 1.159

$$\frac{1}{2} (c_1\tau + c_2\tau^2)^2 = \tau^2 \quad (1.161)$$

↓

$$c_1^2\tau^2 + 2c_1c_2\tau^3 + c_2^2\tau^4 = 2\tau^2$$

↓

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad (1.162)$$

Sostituendo nella 1.160 otteniamo

$$t - \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\tau + o(\tau^3) \quad (1.163)$$

↓

$$dt = \sqrt{2}d\tau \quad (1.164)$$

Sviluppiamo ora $g(t)$ intorno a t_0

$$g(t) = 1 + \cot(t) = 1 - \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sim 1 - \sqrt{2}\tau + o(\tau^3) \quad (1.165)$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra funzione integrale come

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{2}d\tau \, e^{-x(1+\tau^2)}(1 - \sqrt{2}\tau) = \\ &= \sqrt{2}e^{-x} \int_0^{+\infty} d\tau \, e^{-\tau^2}(1 - \sqrt{2}\tau) = \\ &= e^{-x} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{1}{x} \right] \end{aligned} \quad (1.166)$$

1.5.6 Esempio 5: Punto di sella 1 (Davide Bufalini)

Calcoliamo il termine leading per l'espansione asintotica della funzione integrale

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} dy e^{-x[2y^2 - (y-i)^2]} \frac{1}{y^2 + 2} \quad (1.167)$$

$$g(y) = \frac{1}{y^2 + 2} \quad (1.168)$$

$$\phi(y) = 2y^2 - (y - i)^2 \quad (1.169)$$

Iniziamo trovando il punto di sella di $\phi(y)$, e calcoliamo preliminarmente

$$\phi(y) = (y - i)^2 - 2y^2 = y^2 - 2iy - 1 - 2y^2 = -y^2 - 2iy - 1 \quad (1.170)$$

$$\dot{\phi}(y) = 2y + 2i \quad (1.171)$$

$$\ddot{\phi}(y) = 2 \quad (1.172)$$

Troviamo quindi che

$$2y + 2i = 0 \quad (1.173)$$

$$\downarrow$$

$$y_0 = -i \quad (1.174)$$

$$\downarrow$$

$$y_0 = (0, -1) \quad (1.175)$$

Passiamo in coordinate cartesiane sostituendo $y = a + ib$

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \phi(a, b) = -(a + ib)^2 - 2i(a + ib) - 1 = \\ &= -a^2 - 2iab + b^2 - 2ia + 2b - 1 = \\ &= (b^2 - a^2 + 2b - 1) - 2ia(b + 1) \end{aligned} \quad (1.176)$$

Da cui abbiamo che

$$u(a, b) = b^2 - a^2 + 2b - 1 \quad (1.177)$$

$$v(a, b) = -2a(b + 1) \quad (1.178)$$

Cerchiamo ora i cammini a fase costante passanti per y_0 . Sostituendo troviamo che

$$v(0, -1) = -2 \cdot 0 \cdot (0 + 1) = 0 \quad (1.179)$$

$$a(b + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{asse immaginario} \\ b = -1 & \text{asse reale traslato di } -i \end{cases} \quad (1.180)$$

Ma quale dei due cammini è quello che serve a noi? Andiamo a sostituire nell'espressione di $u(a, b)$:

1. Sostituiamo $a = 0$

$$u(0, b) = b^2 + 2b - 1 \quad (1.181)$$

$$\left. \frac{du}{db} \right|_{a=0} = 2b + 2 \quad (1.182)$$

$$\left. \frac{d^2u}{db^2} \right|_{a=0} = 2 \geq 0 \quad (1.183)$$

Siccome non abbiamo $\ddot{u} < 0$ questo cammino non va bene.

2. Sostituiamo $b = -1$

$$u(a, -1) = 1 - a^2 - 2 - 1 = -a^2 - 2 \quad (1.184)$$

$$\left. \frac{du}{da} \right|_{b=-1} = -2a \quad (1.185)$$

$$\left. \frac{d^2u}{da^2} \right|_{b=-1} = -2 \leq 0 \quad (1.186)$$

Il cammino giusto è quindi

$$\gamma^* = \{(a, b) \in \mathbb{C} : (a, b) = (a, -1)\} \quad (1.187)$$

I cui punti sono parametrizzati come

$$y = a - i \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.188)$$

E da cui segue che

$$Re(\phi) = u(a, b) = -a^2 - 2 \quad (1.189)$$

$$Im(\phi) = v(a, b) = 0 \quad (1.190)$$

Andiamo quindi a sostituire nella nostra funzione integrale ed otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} da \, e^{x[-2-a^2]} \frac{1}{a^2 - 2ia - 1 + 2} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} da \, e^{x[-2-a^2]} \frac{1}{a^2 - 2ia + 1} \end{aligned} \quad (1.191)$$

Siccome stiamo su sviluppando sul punto di sella $(0, -1)$ il denominatore può essere approssimato a 1, e abbiamo quindi

$$F(x) = e^{-2x} \int_{\mathbb{R}} da \, e^{-xa^2} = e^{-2x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \quad (1.192)$$

1.5.7 Esempio 6: Punto di sella 2 (Davide Bufalini)

Calcoliamo i termini Leading e Subleading per lo sviluppo asintotico della seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dx e^{ix(z^2-2z)} \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad (1.193)$$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad (1.194)$$

$$\phi(z) = i(z^2 - 2z) \quad (1.195)$$

Andiamo a calcolare le derivate di $\phi(z)$ e a trovare il punto di sella

$$\phi(z) = i(z^2 - 2z) \quad (1.196)$$

$$\dot{\phi}(z) = i(2z - 2) \rightarrow z_0 = 1 \quad (1.197)$$

$$\ddot{\phi}(z) = 2i \quad (1.198)$$

Passiamo in coordinate cartesiane ponendo $z = x + iy$ e otteniamo

$$z_0 = x_0 + iy_0 = 1 \rightarrow z_0 = (1, 0) \quad (1.199)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= i[(x + iy)^2 - 2x - 2iy] = i(x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy) = \\ &= i[(x^2 - y^2 - 2x) + 2i(xy - y)] = \\ &= 2y(1 - x) + i(x^2 - y^2 - 2x) \end{aligned} \quad (1.200)$$

Da cui quindi otteniamo

$$\phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.201)$$

$$u(x, y) = 2y(1 - x) \rightarrow u(0, 1) = 2 \quad (1.202)$$

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - 2x \rightarrow v(0, 1) = -1 \quad (1.203)$$

Vogliamo quindi trovare i percorsi tali che $Im(\phi(z)) = -1$. Per fare ciò poniamo

$$x^2 - y^2 - 2x = -1 \quad (1.204)$$

$$\downarrow$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$(x - 1)^2 = y^2$$

$$\downarrow$$

$$y = \pm(x - 1) \quad (1.205)$$

Le nostre curve sono quindi due rette. Cerchiamo ora quale fa al caso nostro

$$y_1 = x - 1 \rightarrow u_1(x) = -2(1 - x)^2 \rightarrow \dot{u}_1(x) = -4(1 - x) \quad (1.206)$$

$$y_2 = 1 - x \rightarrow u_2(x) = +2(1 - x)^2 \rightarrow \dot{u}_2(x) = +4(1 - x) \quad (1.207)$$

Studiando l'andamento delle derivate notiamo come $u_1(x)$ abbia un massimo in $x = 1$, e che quindi è la nostra curva d'interesse.

Andiamo ora a parametrizzare. Siccome i punti della nostra curva sono ruotati di 45° rispetto all'asse reale, scriviamo

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \tau \quad (1.208)$$

$$\downarrow$$

$$dz = e^{i\frac{\pi}{4}} d\tau \quad (1.209)$$

Possiamo quindi riscrivere

$$\begin{aligned}
 \phi(\tau) &= i[(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\tau)^2 - 2(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\tau)] = \\
 &= i[1 + 2e^{i\frac{\pi}{4}}\tau + e^{i\frac{\pi}{2}}\tau^2 - 2 - 2e^{i\frac{\pi}{4}}\tau] = \\
 &= i(e^{i\frac{\pi}{2}}\tau^2 - 1) = \\
 &= i(-i\tau^2 - 1) = -\tau^2 - i
 \end{aligned} \tag{1.210}$$

Nota bene: abbiamo bisogno del termine subleading, ma questo non compare dalla formula del $d\tau$ che si ferma prima di τ^2 . Dobbiamo quindi sviluppare $g(z)$ intorno a z_0

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \Big|_{z=1+e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}}} \sim 1 - \cancel{\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4}\tau} + \frac{3}{8} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4} \tau^2 \tag{1.211}$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra funzione integrale come

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_{\mathbb{R}} d\tau; \frac{e^{x(-i-\tau^2)}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{32}i\tau^2\right) e^{i\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} + \frac{3i}{32} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-x\tau^2} \tau^2 \right] = \\
 &= \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\pi}{x}} + \frac{3i}{32} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.212}$$

Chapter 2

Operatori Infinito-Dimensionali

2.1 Spunti di teoria generale (Alessandro Marcelli)

2.1.1 Nozioni generali sugli spazi

2.1.1.1 Spazi vettoriali

Si definisce uno **spazio vettoriale** V come un insieme su un campo K (di solito \mathbb{R} o \mathbb{C}) dove sono definite le operazioni di

1. Somma vettoriale

$$V \times V \rightarrow V \quad (2.1)$$

$$(v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2 \quad (2.2)$$

2. Prodotto per uno scalare

$$K \times V \rightarrow V \quad (2.3)$$

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda v \quad (2.4)$$

Preso A sottoinsieme di V , ne definiamo i **punti di aderenza** come quei punti tali che, preso un loro intorno, contengono almeno un punto di A .

In particolare, preso un punto di aderenza z_0 , se nel suo intorno contiene almeno un punto $z_1 \neq z_0$ appartenente ad A , allora z_0 si dice **punto di accumulazione**.

Possiamo quindi dividere i punti di aderenza in due categorie

1. tutti i punti di A
2. i punti di accumulazione esterni ad A

Possiamo ora definire la **chiusura** \overline{A} come l'insieme dei punti di aderenza di A .

Un insieme A si dice **denso** in B se $B \subseteq \overline{A}$. In particolare se $\overline{A} = V$ l'insieme A si dice **ovunque denso**.

2.1.1.2 Spazi metrici, normati ed euclidei

Dato uno spazio vettoriale V e, presi due elementi dello spazio x e y , definita la funzione **distanza** $d(x, y)$ tale che

$$d(x, y) \geq 0 \quad ; \quad d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y \quad (2.5)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (2.6)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad ; \quad \forall x, y, z \in M \quad (2.7)$$

Si definisce **Spazio Metrico** la coppia (V, d) .

Preso di nuovo lo spazio vettoriale V e presi $v, w \in V$ e $\alpha \in K$ si può definire la **norma** $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\|v\| \geq 0 \quad ; \quad \|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0 \quad (2.8)$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad (2.9)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (2.10)$$

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ si chiama **spazio normato**.

Importante: tutti gli spazi normati sono anche spazi metrici, con $d(x, y) = \|x - y\|$, ma non tutti gli spazi metrici sono normati.

In uno spazio metrico abbiamo che un punto $x_a \in M$ sarà

1. di **aderenza** se e solo se $\exists \{x_n\} \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_a$
2. di **accumulazione** se e solo se $\exists \{x_n \neq x_a\} \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_a$

Definiamo ora una **successione di Cauchy** come tale se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n > n_\epsilon \quad (2.11)$$

Possiamo quindi dire che uno spazio metrico V si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in esso definita è convergente.

Uno spazio **euclideo** è uno spazio normato la cui norma è definita attraverso un **prodotto scalare**, ovvero un'applicazione $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che, $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, soddisfa

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \text{Hermitianità} \quad (2.12)$$

$$(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z) \quad \text{Linearità} \quad (2.13)$$

$$(x, y) \geq 0 \quad ; \quad (x, x) = 0 \leftrightarrow x = 0 \quad (2.14)$$

Uno spazio euclideo completo si dice **spazio di Hilbert**.

2.1.2 Operatori

Presi due spazi di Hilbert H_1 e H_2 , definiamo un **operatore lineare** A come un'applicazione del tipo

$$A : \mathcal{D}_A \subseteq H_1 \rightarrow R_A \subseteq H_2 \quad (2.15)$$

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A(v) + \beta A(w) \quad ; \quad \forall v, w \in \mathcal{D}_A \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (2.16)$$

Un operatore si dice

1. **Limitato** se $\exists N \in \mathbb{R} : \|A(x)\| \leq N\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}_A$
2. **Continuo** se $\forall \{x_n\} \in \mathcal{D}_A : x_n \rightarrow x$ segue che $\lim_{n \rightarrow \text{infy}} A(x_n) = A(x)$ **Nota bene:** un operatore lineare (A, \mathcal{D}_A) è continuo se e solo se è limitato.

Iniziamo definendo il seguente funzionale lineare

$$x \rightarrow \phi_\nu(x) \quad (2.17)$$

$$\phi_\mu(x) = (\mu, Ax) \quad \forall x \in \mathcal{D}_A \quad (2.18)$$

Dato quindi un operatore A , si definisce il suo **aggiunto** A^\dagger come l'operatore per cui, grazie anche al teorema di Riesz

$$(\mu, Ax) = (A^\dagger \mu, x) \quad (2.19)$$

Se A è lineare, limitato e densamente definito ne segue che $\|A\| = \|A^\dagger\|$.

Un'operatore A si dice **unitario** quando

1. è **Isometrico**, ovvero

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_A \quad (2.20)$$

$$\|A\| = 1 \quad (2.21)$$

2. il suo range è denso in H

Per gli operatori unitari vale che

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (2.22)$$

Un operatore si dice **simmetrico** quando

$$(x, Ay) = (Ax, y) \quad ; \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_A \quad (2.23)$$

Se un operatore è simmetrico e $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^\dagger}$ allora si dice che è **autoaggiunto**.

2.1.2.1 Spettri per operatori Infinito-Dimensionali

Sia H uno spazio di Hilbert. Dato un **operatore lineare densamente definito**

$$A : \mathcal{D}_A \subseteq H \rightarrow R_A \subseteq H \quad (2.24)$$

e definita la famiglia di operatori

$$T_z(A) : \mathcal{D}_A \rightarrow H \quad (2.25)$$

$$T_z(A) = z\mathbb{1} - A \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.26)$$

Si dice che z appartiene all'**insieme risolvente** $Res(A)$ dell'operatore A se $T_z(A)$ è **biunivoco** con **inverso limitato**.

Tale inverso prende il nome di **Operatore risolvente** di A e viene definito come

$$R_z(A) : \mathcal{R}_{T_z(A)} \rightarrow H \quad (2.27)$$

$$R_z(A) = (z\mathbb{1} - A)^{-1} \quad (2.28)$$

Se invece $z \notin Res(A)$, allora si dice che esso appartiene allo spettro di A . Rispetto agli operatori finito-dimensionali questo non implica che z sia autovalore di A . Ci troviamo quindi a dividere gli elementi dello spettro in tre categorie:

1. Lo **spettro puntuale** $\sigma_p(A)$, ovvero l'insieme degli autovalori di A , per i quali quindi esiste un $x \neq 0 : Ax = zx$
2. Lo **spettro residuo** $\sigma_\rho(A)$, ovvero l'insieme degli $z \notin \sigma_p(A)$ per i quali $R_z(A)$ non è densamente definito.
3. **Spettro continuo** $\sigma_c(A)$, ovvero l'insieme degli $z \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_\rho(A)$ per i quali $R_z(A)$, per quanto densamente definito, non è limitato.

2.2 Operatori integrali (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)

2.2.1 Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)

Si definiscono gli **operatori integrali** quella famiglia di operatori lineari del tipo

$$K : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b] \quad (2.29)$$

per i quali l'azione su un vettore $f \in H$ è definita attraverso un **nucleo integrale** $K(x, t)$ nel seguente modo

$$[Kf](x) = \int_a^b dy K(x, y)f(y) \quad (2.30)$$

Definita la **norma di Hilbert-Schmidt** come

$$\|K\|_{HS} = \int_a^b dx \int_a^b dy |K(x, y)|^2 \quad (2.31)$$

Gli operatori definiti attraverso nuclei per i quali tale norma è finita sono detti **nuclei di Hilbert-Schmidt** e sono **limitati**.

Le equazioni di Fredholm sono un noto caso di studio di problemi agli autovalori Per operatori integrali lineari. Si tratta di cercare soluzioni per equazioni del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b dy K(x, y)\phi(y) = f(x) \quad (2.32)$$

L'equazione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \lambda K)\phi &= f \\ \downarrow \\ \left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1} - K\right)\phi &= \frac{f}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Definendo $\mu = \lambda^{-1}$ e $T_\mu = (\mu\mathbb{1} - K)$ otteniamo

$$(\mu\mathbb{1} - K)\phi = T_\mu\phi = \tilde{f} \quad (2.34)$$

La sua omogenea associata è l'equazione agli autovalori per un operatore K

$$(\mu\mathbb{1} - K)\phi = T_\mu\phi = 0 \quad (2.35)$$

I λ_i per cui questa equazione ammette soluzioni non triviali vengono detti **numeri caratteristici** dell'equazione, e sono l'inverso degli autovalori μ_i

2.2.2 Esempio 1 (Davide Bufalini)

Dato l'operatore integrale il cui nucleo in $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ è dato da

$$k(x, y) = 2xy - 4x^2 \quad (2.36)$$

andiamo a

1. discuterne lo spettro puntuale
2. risolvere, al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione di Fredholm di 2a specie

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 dy \, k(x, y) \phi(y) = 1 - \alpha x \quad (2.37)$$

Iniziamo dal secondo punto. Possiamo riscrivere l'equazione di Fredholm come

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lambda \int_0^1 dy \, (2xy - 4x^2) \phi(y) + 1 - \alpha x = \\ &= 2\lambda x \int_0^1 dy \, y \phi(y) - 4x^2 \lambda \int_0^1 dy \, \phi(y) + 1 - \alpha x \end{aligned} \quad (2.38)$$

Notiamo come il nucleo 2.36 sia di **Pincherle-Goursat** (o **degenerare**), ossia può essere riscritto come

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^N P_i(x) Q_i(y) \quad (2.39)$$

Da cui segue che possiamo definire

$$A_{ij} = \int_0^1 dy \, P_i(x) Q_i(y) \quad (2.40)$$

$$B_i = \int_0^1 dy \, Q_i(y) f(y) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ \phi(x) &= f(x) + c_A \lambda A + c_B \lambda B \end{aligned} \quad (2.42)$$

Confrontando la 2.42 e la 2.38 troviamo

$$A = \int_0^1 dy \, \phi(y) \quad ; \quad c_A = -4x^2 \quad (2.43)$$

$$B = \int_0^1 dy \, y \phi(y) \quad ; \quad c_B = +2x \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ \phi(x) &= 1 - \alpha x - 4x^2 \lambda A + 2x \lambda B \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sostituendo in queste espressioni la 2.38 otteniamo

$$A = \int_0^1 dy \, 2y \lambda B - 4y^2 \lambda A + 1 - \alpha y = \lambda B - \frac{4}{3} \lambda A + 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (2.46)$$

$$B = \int_0^1 dy \, 2y^2 \lambda B - 4y^3 \lambda A + y - \alpha y^2 = \frac{2}{3} \lambda B - \lambda A + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \quad (2.47)$$

Queste equazioni formano il seguente sistema

$$\begin{cases} A \left(1 + \frac{4}{3} \lambda\right) - \lambda B &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \lambda A + \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right) B &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \end{cases} \quad (2.48)$$

La cui matrice è dunque

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{3}\lambda & -\lambda \\ \lambda & 1 - \frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Iniziamo studiando l'omogenea, ovvero il caso $\det M = 0$

$$\det M = 0 \quad (2.50)$$

↓

$$\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) + \lambda^2 = 0$$

↓

$$\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + 1 = 0$$

↓

$$\left(1 + \frac{1}{3}\lambda\right)^2 = 0$$

↓

$$\lambda_c = -3$$

↓

$$\sigma_p(k) = \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad (2.51)$$

Passiamo ora al caso non omogeneo. Dobbiamo distinguere due casi

1. $\lambda \neq \lambda_c$

$$A = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha}{2} & -\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} & 1 - \frac{2}{3}\alpha \end{vmatrix} = \dots = \frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \quad (2.52)$$

$$B = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 + \frac{4}{3}\alpha & 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \lambda & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \end{vmatrix} = \dots = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{3\alpha-2}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \quad (2.53)$$

Otteniamo quindi

$$\phi(x) = 1 - \alpha x + 2 \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{3\alpha-2}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \right] \lambda x - 4 \left[\frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}\lambda}{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{3}\lambda + 1} \right] \lambda x^2 \quad (2.54)$$

2. $\lambda = \lambda_c$

Prima di procedere dobbiamo trovare $\phi_0^{(+)}$, la soluzione dell'omogenea di k^\dagger che servirà quando imporremo $\langle \phi_0^{(+)}, \phi \rangle = 0$ tramite la quale potremo ricavare i valori α tali da restituire altre soluzioni.

Andiamo quindi a risolvere l'omogenea per

$$k^\dagger(x, y) = \overline{k(x, y)} \stackrel{\mathbb{R}}{=} k(y, x) = 2yx - 4y^2 \quad (2.55)$$

Risolvendo Fredholm otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \phi_0^{(+)}(x) &= \lambda \int_0^1 dy (2xy - 4y^2) \phi_0^{(+)} = \\ &= 2\lambda x \int_0^1 dy y \phi_0^{(+)}(y) - 4\lambda \int_0^1 dy y^2 \phi_0^{(+)}(y) = \\ &= 2\lambda x D - 4\lambda C \quad ; \quad \begin{cases} C &= \int_0^1 dy y \phi_0^{(+)}(y) \\ D &= \int_0^1 dy y^2 \phi_0^{(+)}(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.56)$$

la 2.56 ci porta a scrivere che

$$C = \int_0^1 dy \ (y^3 D - 4\lambda C y^2) = \frac{1}{2}\lambda D - \frac{4}{3}\lambda C \quad (2.57)$$

$$D = \int_0^1 dy \ (2\lambda y^2 D - 4\lambda C y) = \frac{2}{3}\lambda D - 2\lambda C \quad (2.58)$$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (1 + \frac{4}{3}\lambda) C - \frac{1}{2}\lambda D = 0 \\ 2\lambda C + (1 - \frac{2}{3}\lambda) D = 0 \end{cases} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{3}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ 2\lambda & 1 - \frac{2}{3}\lambda \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

L'omogenea ha lo stesso risultato di prima, con $\lambda_c = -3$, e per tale valore il sistema diventa

$$\begin{cases} (1 - 4) C + \frac{3}{2} D = 0 \\ -6C + (1 + 2) D = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

\downarrow

$$\begin{cases} D = 2C \\ C = ap \end{cases} \quad ; \quad ap = \text{a piacere} \quad (2.61)$$

Ponendo $C = \frac{1}{4\lambda_c}$ otteniamo $D = \frac{1}{2\lambda_c}$ e arriviamo alla formula

$$\phi_0^{(+)}(x) = 2D\lambda_c x - 4\lambda_c C = x - 1 \quad (2.62)$$

Possiamo quindi procedere

$$\langle \phi_0^{(+)}, f \rangle = 0 \quad (2.63)$$

\downarrow

$$\int_0^1 dx \ (x - 1)(1 - \alpha x) = 0$$

\downarrow

$$\alpha = 3 \quad (2.64)$$

Per tale valore di α abbiamo quindi ulteriori soluzioni al problema di partenza. Se andiamo a sostituire $\lambda = \lambda_c = -3$ otteniamo

$$\begin{cases} (1 - 4\lambda) A + 3B = 1 - \frac{3}{2} \\ -3A + (1 + 2)B = \frac{1}{2} - 1 \end{cases} \quad (2.65)$$

\downarrow

$$\begin{cases} -3A + 3B = -\frac{1}{2} \\ -3A + 3B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

\downarrow

$$\begin{cases} B = A - \frac{1}{6} \\ A = ap \end{cases} \quad ; \quad ap = \text{a piacere}$$

\downarrow

$$\phi_A(x) = 1 - 3x + 2(-3) \left(A - \frac{1}{6} \right) x - 4Ax^2(-3)$$

\downarrow

$$\phi_A(x) = 1 - 2x - 6Ax + 12Ax^2 \quad (2.66)$$

2.2.3 Esempio 2 (Davide Bufalini)

Determinare i numeri caratteristici dell'operatore integrale il cui nucleo in $L^2([-1, +1]x[-1, +1])$ è dato da

$$k(x, y) = xy - x^2y^2 \quad (2.67)$$

Si calcolino inoltre, per tutti i $\lambda \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione di Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} dy k(x, y)\phi(y) = 5x^3 + x^2 - 3x \quad (2.68)$$

$$g(x) = 5x^3 + x^2 - 3x \quad (2.69)$$

Nel nostro caso avremo

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lambda \int_{-1}^{+1} dy (xy - x^2y^2)\phi(y) + g(x) = \\ &= \lambda x \int_{-1}^{+1} dy \phi(y) - \lambda x^2 \int_{-1}^{+1} dy y^2 \phi(y) + g(x) \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$A = \int_{-1}^{+1} dy \phi(y) = \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{+1} dy (\lambda y^2 A - \lambda y^2 B) + \int_{-1}^{+1} dy (5x^3 + x^2 - 3x) = \\ &= \frac{2}{3}A\lambda + 2 - 2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$B = \int_{-1}^{+1} dy y^2 \phi(y) = \dots = -\frac{2}{5}\lambda B + \frac{2}{5} \quad (2.73)$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (2.74)$$

Per trovare lo spettro puntuale andiamo a risolvere il caso omogeneo

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +\frac{3}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (2.75)$$

\downarrow

$$\sigma_p(k) = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{5} \right\} \quad (2.76)$$

Andiamo ora a studiare il sistema non omogeneo. Distinguiamo i due casi

1. $\lambda \neq \lambda_c$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) A = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{2}{5+2\lambda} \end{cases} \quad (2.77)$$

Da cui otteniamo la soluzione

$$\phi(x) = g(x) - \frac{2}{5+2\lambda}x^2 \quad (2.78)$$

2. $\lambda = \lambda_c$

(a) $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot A = 0 \\ \frac{8}{5}B = \frac{2}{5} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{ap}{2} \\ B = \frac{2}{8} \end{array} \right. \quad ; \quad ap = \text{a piacere} \quad (2.79)$$

Da cui otteniamo la famiglia di soluzioni

$$\phi_{\frac{3}{2}}(x) = g(x) - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}xA \quad (2.80)$$

(b) $\lambda = -\frac{5}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot A = 0 \\ 0 \cdot B = \frac{2}{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{sistema non risolubile} \quad (2.81)$$

2.3 Operatori differenziali (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)

2.3.1 Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)

Gli operatori differenziali $\mathcal{L}_x^{(n)}$ di ordine n sono definiti come

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ \text{Boundary conditions} \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\mathcal{L}_x^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \quad (2.83)$$

I problemi di ricerca di soluzioni particolari si dividono in due famiglie

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ \frac{d^n}{dx^n} u(x_0) = u_0^{(n)} \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u(x_0) = u_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} u(x_0) = u_0' \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{Problemi di Cauchy} \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \\ u(x_n) = u_n \\ u(x_{n-1}) = u_{n-1} \\ \vdots \\ u(x_1) = u_1 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{Problemi di Sturm-Liouville} \quad (2.85)$$

La ricerca delle soluzioni può passare attraverso il calcolo del nucleo $G(x, y)$ dell'operatore inverso, denominato **funzione di Green**, per il quale vale

$$\mathcal{L}_x^{(n)} G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.86)$$

E che quindi si può definire

$$G(x, y) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \theta(x - y) \left[\frac{u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)}{W(y)} \right] \quad (2.87)$$

Dove al denominatore abbiamo il **denominatore della matrice di Wronsky**, definito come

$$W = \det \begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 \\ \dot{u}_1^0 & \dot{u}_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Due famiglie importanti di funzioni di Green sono le

1. **Funzioni di Green avanzate**, utili nello studio dei problemi di Cauchy

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x > y \quad (2.89)$$

2. **Funzioni di Green ritardate**

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x < y \quad (2.90)$$

2.3.2 Esempio 1: Operatore Differenziale del IIo Ordine (Davide Bufalini)

Sia l'operatore

$$\mathcal{L}_x^\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \lambda \quad ; \quad \lambda = \text{cost.} \quad (2.91)$$

Si richiede di

1. calcolare, al variare di λ , la soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^\lambda f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ \dot{f}(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

2. ricavare la Funzione di Green (l'operatore risolvete) per i valori in cui \mathcal{L}_x^λ è invertibile del corrispondente problema di Sturm-Liouville

L'operatore è in forma canonica con coefficienti costanti nella forma

$$a\ddot{f} + b\dot{f} + cf = 0 \quad ; \quad \text{nel nostro caso } b = 0 \quad (2.93)$$

Prendendo un Ansatz del tipo $f(x) \sim e^{\alpha x}$ otteniamo

$$-\alpha^2 - \lambda = 0 \rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \quad (2.94)$$

Da cui segue

$$f(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} \quad (2.95)$$

Imponendo i condizioni di bordo otteniamo

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \dot{f}(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ i\sqrt{\lambda}(Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi} - Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

\downarrow

$$\begin{cases} B = -A \\ Ai\sqrt{\lambda}2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

Escludendo le soluzioni banali $A = 0 = B$ e $\lambda = 0$ abbiamo $n \in \mathbb{Z}$ autovalori nella forma

$$\lambda = \frac{(2k+1)^2}{4} \quad (2.98)$$

Per trovare gli autovettori corrispondenti ci affidiamo alla condizione $A = -B$ dalla quale segue

$$f_n(x) = -2iB \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \quad (2.99)$$

Per trovare B sfruttiamo l'ortogonalità

$$\begin{aligned} \delta_{n,m} = \langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^\pi dx \overline{f_n(x)} f_m(x) = \\ &= \int_0^\pi dx (2iB^*) \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \cdot (-2iB) \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Iniziamo studiando il caso $n = m$

$$\delta_{m,m} = \langle f_n, f_m \rangle = 4|B|^2 \int_0^\pi dx \sin^2\left(\frac{2k+1}{2}x\right) = 4|B|^2 \frac{\pi}{2} \quad (2.101)$$

Per ortonormalità imponiamo

$$4|B|^2 \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow |B| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.102)$$

Che, nel caso $n \neq m$, diventa

$$B = \frac{e^{i\rho}}{\sqrt{2\pi}} \quad ; \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (2.103)$$

Da cui segue che

$$f_n(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\rho} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad ; \quad \begin{cases} \rho \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.104)$$

Siccome $\lambda = 0$ non è autovalore non abbiamo modi nulli.

Andiamo ora a calcolare l'operatore risolvente.

$$(\mathcal{L}_{SL} - \lambda \mathbb{1})G_\lambda(x, y) = \delta(x - y) \quad ; \quad \lambda \neq \lambda_n \text{ per evitare poli semplici} \quad (2.105)$$

\downarrow

$$-\frac{d^2}{dx^2}G_\lambda(x, y) - \lambda G_\lambda = \delta(x - y) \quad (2.106)$$

Utilizziamo un trucco. Siccome il problema è della tipologia

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda f = 0 \quad (2.107)$$

Andiamo a cercare due soluzioni $f_{1,2}^0$ tali che ciascuna soddisfi una delle due condizioni al bordo. Una volta trovate andiamo a calcolare il Wronskiano, necessario per la definizione della funzione di Green

$$G_\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{f_1^0(x)f_2^0(y)}{W} & ; \quad x < y \\ \frac{f_1^0(y)f_2^0(x)}{W} & ; \quad x > y \end{cases} \quad (2.108)$$

In base alle condizioni di bordo proviamo con

$$f_1^0(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x) \rightarrow f_1^0(0) = 0 \quad (2.109)$$

$$f_2^0(x) = \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \rightarrow f_2^0(\pi) = 0 \quad (2.110)$$

Andiamo quindi a calcolarne il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} f_1^0 & f_2^0 \\ f_1^0 & f_2^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}x) & \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \\ \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x)) \end{vmatrix} = \dots = -\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \quad (2.111)$$

Da cui otteniamo

$$G_\lambda(x, y) = \begin{cases} -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x) \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - x))}{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)} & ; \quad x < y \\ -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}y) \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - y))}{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)} & ; \quad x > y \end{cases} \quad (2.112)$$

Vediamo come per i λ_n che abbiamo trovato in precedenza ci siano solo poli semplici.

2.3.3 Esempio 2 (Davide Bufalini)

Dato l'operatore differenziale

$$\mathcal{L}_x = -i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \quad ; \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (2.113)$$

Il cui nucleo è dato da

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_x} = \left\{ f \in L^2 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : f \left(\frac{1}{2} \right) = f(1) \right\} \quad (2.114)$$

Si richiede di

1. Costruire $(\mathcal{L}_x^\dagger, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x^\dagger})$
2. Discutere autovalori e autovettori di $(\mathcal{L}_x, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x})$
3. Trovare i valori di β per cui $(\mathcal{L}_x, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x})$ è autoaggiunto e/o invertibile

Partiamo dall'**aggiunto**:

$$\begin{aligned} \langle g, \mathcal{L}_x f \rangle &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(-i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \right) f = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(-i \frac{d}{dx} f \right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \left(\frac{\beta}{x} f \right) = \\ &= -i \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \dot{f} + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \bar{g} \frac{\beta}{x} f = \\ &= -i f \bar{g} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + i \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \dot{\bar{g}} f + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \, \overline{\left(\frac{\beta}{x} g \right)} f \end{aligned} \quad (2.115)$$

Imponendo che \mathcal{L}_x^\dagger sia autoaggiunto otteniamo che

$$-i f \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left[\bar{g} \left(\frac{1}{2} \right) - \bar{g}(1) \right] = 0 \quad (2.116)$$

↓

$$\bar{g} \left(\frac{1}{2} \right) = \bar{g}(1)$$

↓

$$\mathcal{L}_x^\dagger = -i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x} \quad ; \quad \mathcal{D}_{\mathcal{L}_x^\dagger} = \left\{ g \in L^2 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : g \left(\frac{1}{2} \right) = g(1) \right\} \quad (2.117)$$

Andiamo ora a calcolare gli autovalori e gli autovettori:

$$\mathcal{L}_x f = \lambda f \quad (2.118)$$

$$\downarrow$$

$$\left(-i \frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x}\right) f = \lambda f$$

$$\downarrow$$

$$\frac{df}{dx} = i \left(\lambda - \frac{\beta}{x}\right) f$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^x dt \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \int_{\frac{1}{2}}^x dt \left(\lambda - \frac{\beta}{x}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i[\lambda(x-\frac{1}{2})-\beta \ln(2x)]} \quad (2.119)$$

Applicando le condizioni al contorno otteniamo

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.120)$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\frac{\lambda}{2}-\beta \ln(2)} = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i \cdot 0}$$

$$\downarrow$$

$$e^{i\frac{\lambda}{2}-\beta \ln(2)} = 1$$

$$\downarrow$$

$$e^{i\frac{\lambda_n}{2}-\beta \ln(2)} = e^{i2n\pi}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\lambda_n}{2} = \beta \ln(2) + 2n\pi$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_n = 2\beta \ln(2) + 4n\pi \rightarrow f_n(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) e^{i[(2\beta \ln(2)+4n\pi)(x-\frac{1}{2})-\beta \ln(2x)]} \quad (2.121)$$

2.4 Operatori a blocchi (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli, Paolo Proia)

2.4.1 Esempio 1 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Paolo Proia)

Dato il seguente operatore a blocchi

$$\begin{cases} (Tx)_1 &= 0 \\ (Tx)_{2n} &= \alpha x_{2n+1} & n > 1 \\ (Tx)_{2n+1} &= \alpha x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.122)$$

Si richiede di

1. Costruire T^\dagger e calcolare $\|T\|$ e $\|T^\dagger\|$
2. Discutere gli spettri puntuali e relative molteplicità
3. Discutere gli spettri residui
4. Discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ (se esistono) l'operatore T è una combinazione delle seguenti
 - (a) Autoaggiunto
 - (b) Unitario
 - (c) Invertibile

Un possibile modo per il calcolo dell'aggiunto è iniziare esplicitando l'azione dell'operatore

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 0 \\ Tx_2 &= \alpha x_3 \\ Tx_3 &= \alpha x_2 \rightarrow T = \\ Tx_4 &= \alpha x_5 \\ Tx_5 &= \alpha x_4 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Da cui segue che

$$T^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger x)_1 &= 0 \\ (T^\dagger x)_{2n} &= \alpha^* x_{2n+1} & n > 1 \\ (T^\dagger x)_{2n+1} &= \alpha^* x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad (2.124)$$

Un altro modo per il calcolo dell'aggiunto passa dalla sua definizione, che ci dice che

$$(y, Tx) = (T^\dagger y, x) \quad (2.125)$$

\downarrow

$$\sum_{i=1}^N y_i^* (Tx)_i = \sum_{i=1}^N (T^\dagger y)_i^* x_i \quad (2.126)$$

Esplicitando le somme si ottengono i seguenti confronti

$$0 + y_2^* \cdot \alpha x_3 + y_3^* \cdot \alpha x_2 + y_4^* \cdot \alpha x_5 + y_5^* \cdot \alpha x_4 + \dots = \\ = (T^\dagger y)_1^* \cdot x_1 + (T^\dagger y)_2^* \cdot x_2 + (T^\dagger y)_3^* \cdot x_3 + (T^\dagger y)_4^* \cdot x_4 + (T^\dagger y)_5^* \cdot x_5 + \dots \quad (2.127)$$

\downarrow

$$y_1 \cdot 0 = 0 = (T^\dagger y)_1^* \cdot x_1 \rightarrow (T^\dagger y)_1 = 0 \quad (2.128)$$

$$\begin{cases} y_2^* \cdot (Tx)_2 = y_2^* \cdot \alpha x_3 = (T^\dagger y)_3^* \cdot x_3 \\ y_3^* \cdot (Tx)_3 = y_3^* \cdot \alpha x_2 = (T^\dagger y)_2^* \cdot x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_2^* = \alpha y_3^* \\ (T^\dagger y)_3^* = \alpha y_2^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_2 = \alpha^* y_3 \\ (T^\dagger y)_3 = \alpha^* y_2 \end{cases} \quad (2.129)$$

$$\begin{cases} y_4^* \cdot (Tx)_4 = y_4^* \cdot \alpha x_5 = (T^\dagger y)_5^* \cdot x_5 \\ y_5^* \cdot (Tx)_5 = y_5^* \cdot \alpha x_4 = (T^\dagger y)_4^* \cdot x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_4^* = \alpha y_5^* \\ (T^\dagger y)_5^* = \alpha y_4^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (T^\dagger y)_4 = \alpha^* y_5 \\ (T^\dagger y)_5 = \alpha^* y_4 \end{cases} \quad (2.130)$$

\vdots

Da cui otteniamo (per fortuna) lo stesso risultato

$$\begin{cases} (T^\dagger x)_1 &= 0 \\ (T^\dagger x)_{2n} &= \alpha^* x_{2n+1} & n > 1 \\ (T^\dagger x)_{2n+1} &= \alpha^* x_{2n} & n > 1 \end{cases} \quad (2.131)$$

Andiamo quindi a calcolare la norma dell'operatore

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(Tx)_n} (Tx)_n = \\ &= \overline{(Tx)_1} (Tx)_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (|\alpha|^2 |x_{2n+1}|^2 + |\alpha|^2 |x_{2n}|^2) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha|^2 (|x_{2n+1}|^2 + |x_{2n}|^2) = \\ &= |\alpha|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 = |\alpha|^2 (\|x\|^2 - |x_1|^2) \leq |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (2.132)$$

\downarrow

$$\|T\| \leq |\alpha| \quad (2.133)$$

Se $|x_1| = 0$ allora la norma è raggiunta(?). Siccome per operatori limitati e densamente definiti allora $\|T\| = \|T^\dagger\|$ e quindi

$$\|T^\dagger\| \leq |\alpha| \quad (2.134)$$

Andiamo ora a calcolare lo **spettro puntuale**. Dobbiamo risolvere

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (2.135)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 0 &= \lambda x_1 \\ Tx_2 &= \alpha x_3 &= \lambda x_2 \\ Tx_3 &= \alpha x_2 &= \lambda x_3 \\ Tx_4 &= \alpha x_5 &= \lambda x_4 \\ Tx_5 &= \alpha x_4 &= \lambda x_5 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.136)$$

Distinguiamo ora i vari casi

1. $\lambda = 0$; $\alpha = 0$

$$0 = 0 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.137)$$

$$0 = 0 \cdot x_2 \rightarrow x_2 = \text{qualsiasi} \quad (2.138)$$

$$0 = 0 \cdot x_3 \rightarrow x_3 = \text{qualsiasi} \quad (2.139)$$

$$\dots \quad (2.140)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (2.141)$$

2. $\lambda = 0$; $\alpha \neq 0$

$$0 = 0 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.142)$$

$$\alpha x_3 = 0 \cdot x_2 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.143)$$

$$\alpha x_2 = 0 \cdot x_3 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.144)$$

$$\dots \quad (2.145)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, \dots) \quad (2.146)$$

3. $\lambda \neq 0$; $\alpha = 0$

$$0 = \lambda x_1 \rightarrow x_1 = 0 \quad (2.147)$$

$$0 = \lambda x_2 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.148)$$

$$0 = \lambda x_3 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.149)$$

$$\dots \quad (2.150)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (0, 0, 0, \dots) \quad (2.151)$$

4. $\lambda \neq 0$; $\alpha \neq 0$

$$0 = \lambda x_1 \rightarrow x_1 = 0 \quad (2.152)$$

$$\alpha x_2 = \lambda x_3 \rightarrow x_2 = \frac{\lambda}{\alpha} x_3 \quad (2.153)$$

$$\alpha x_3 = \lambda x_2 \rightarrow x_3 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} x_3 \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_3 = 0 \quad (2.154)$$

$$\alpha x_4 = \lambda x_5 \rightarrow x_4 = \frac{\lambda}{\alpha} x_5 \quad (2.155)$$

$$\alpha x_5 = \lambda x_4 \rightarrow x_5 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} x_5 \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_5 = 0 \quad (2.156)$$

$$\dots \quad (2.157)$$

\downarrow

$$x_{2n} = \frac{\lambda}{\alpha} x_{2n+1} \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right) x_{2n+1} = 0 \quad (2.158)$$

Dobbiamo distinguere due casi

(a) $|\lambda| \neq |\alpha|$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha^2}\right) x_{2n+1} = 0 \rightarrow x_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.159)$$

\downarrow

$$\vec{x} = \vec{0} \quad (2.160)$$

(b) $|\lambda| = |\alpha| \rightarrow \lambda = e^{i\phi}|\alpha|$

$$x_{2n} = \frac{e^{i\phi}|\alpha|}{|\alpha|} x_{2n+1} \rightarrow x_{2n} = e^{i\phi} x_{2n+1} \quad (2.161)$$

\downarrow

$$\vec{x} = (0, e^{i\phi} x_3, x_3, e^{i\phi} x_5, x_5, \dots) \quad (2.162)$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = e^{i\phi}|\alpha| \ ; \ \alpha \in \mathbb{C}\} \quad (2.163)$$

Si ottiene un risultato analogo per $\sigma(T^\dagger)$.

Andiamo ora a calcolare lo **spettro residuo** dell'operatore e del suo aggiunto.

Andiamo quindi a cercare

$$z \neq \lambda : \exists \vec{\eta} \neq \vec{0} : \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle = 0 \quad (2.164)$$

$$\vec{v} = (z\mathbb{1} - T)\vec{x} \in \text{Range}(z\mathbb{1} - T) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}_T \quad (2.165)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$z\mathbb{1} - T = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & z & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & z & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & z & -\alpha & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & z & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

Da cui segue che

$$(z\mathbb{1} - T)\vec{x} = \begin{pmatrix} zx_1 \\ zx_2 - \alpha x_3 \\ zx_3 - \alpha x_2 \\ zx_4 - \alpha x_5 \\ zx_5 - \alpha x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.167)$$

E arriviamo quindi a scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle = \sum_n \bar{\eta}_n v_n = \\ &= \eta_1^* zx_1 + \eta_2^* (zx_2 - \alpha x_3) + \eta_3^* (zx_3 - \alpha x_2) + \dots = \\ &= x_1 z \eta_1^* + x_2 (z \eta_2^* - \alpha \eta_3^*) + x_3 (z \eta_3^* - \alpha \eta_2^*) + \dots \end{aligned} \quad (2.168)$$

Siccome la somma è nulla, questo ci porta a scrivere

$$\eta_1^* = 0 \quad (2.169)$$

$$\eta_2^* = \frac{\alpha}{\lambda} \eta_3^* \quad (2.170)$$

$$\eta_3^* = \frac{\alpha}{\lambda} \eta_2^* = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \eta_3^* \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right) \eta_3^* = 0 \quad (2.171)$$

\vdots

Abbiamo però un "problema". Siccome $z \neq \lambda = e^{i\phi}|\alpha|$, abbiamo che

$$1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \neq 0 \rightarrow \eta_3^* = 0 \rightarrow \vec{\eta} = \vec{0} \quad (2.172)$$

Ma questo non è possibile per definizione, quindi abbiamo

$$\sigma_\rho(T) = \emptyset \quad (2.173)$$

In conclusione rispondiamo alle domande del quarto punto:

1. L'operatore è **autoaggiunto** per $\alpha = \alpha^*$, ovvero per $\alpha \in \mathbb{R}$, dato che in tale caso segue $T = T^\dagger$ e $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^\dagger}$
2. Non può mai essere **unitario**, dato che $TT^\dagger \neq \mathbb{1} \neq T^\dagger T$
3. Non è **invertibile** dato che $z \in \sigma_p(T)$

2.4.2 Esempio 2 con metodo esplicito e analitico (Davide Bufalini, Alessandro Marcelli)

Sia l'operatore in $l^2(\mathbb{C})$ definito da

$$\begin{cases} (Tx)_1 = 2^a x_2 \\ (Tx)_n = x_n + (n+1)^a x_{n+1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.174)$$

Si richiede di

1. Costruire l'aggiunto
2. Discutere gli spettripuntuali
3. Discutere se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, $z_0 = 0$ appartiene allo spettro dell'operatore o dell'aggiunto

Iniziamo dal primo punto.

Un possiile metodo è quello di **esplicitare** l'azione dell'operatore

$$\begin{aligned} Tx_1 &= 2^a x_2 \\ Tx_2 &= x_2 + 3^a x_3 \\ Tx_3 &= x_3 + 4^a x_4 \\ &\vdots \end{aligned} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 2^a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3^a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4^a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5^a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6^a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

Da cui otteniamo quindi

$$T^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2^a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3^a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4^a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 5^a & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow T^\dagger = \begin{cases} (T^\dagger x)_1 = 0 \\ (T^\dagger x)_n = x_n + n^a x_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.176)$$

Altrimenti possiamo calcolarlo **analiticamente**, studiando il prodotto

$$(y, Tx) = (T^\dagger y, x) \quad (2.177)$$

\downarrow

$$\sum_{i=1}^n y_i^* (Tx)_i = \sum_{i=1}^n (T^\dagger y)_i^* x_i \quad (2.178)$$

Da cui otteniamo che

$$y_1^* (Tx)_1 = y_1^* 2^a x_2 = (T^\dagger y)_1^* x_1 \quad (2.179)$$

$$y_2^* (Tx)_2 = y_2^* (x_2 + 3^a x_3) = (T^\dagger y)_2^* x_2 \quad (2.180)$$

$$y_3^* (Tx)_3 = y_3^* (x_3 + 4^a x_4) = (T^\dagger y)_3^* x_3 \quad (2.181)$$

$$y_4^* (Tx)_4 = y_4^* (x_4 + 5^a x_5) = (T^\dagger y)_4^* x_4 \quad (2.182)$$

$$y_5^* (Tx)_5 = y_5^* (x_5 + 6^a x_6) = (T^\dagger y)_5^* x_5 \quad (2.183)$$

\vdots

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} & y_1^* 2^a x_2 + y_2^* x_2 + y_2^* 3^a x_3 + y_3^* x_3 + y_3^* 4^a x_4 + y_4^* x_4 + y_4^* 5^a x_5 + \dots = \\ & = (y_1^* 2^a + y_2^*) x_2 + (y_2^* 3^a + y_3^*) x_3 + (y_3^* 4^a + y_4^*) x_4 = \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$= (T^\dagger y)_1^* x_1 + (T^\dagger y)_2^* x_2 + (T^\dagger y)_3^* x_3 + (T^\dagger y)_4^* x_4 + \dots \quad (2.185)$$

Confrontando i termini otteniamo quindi

$$(T^\dagger y)_1^* = 0 \quad (2.186)$$

$$(T^\dagger y)_2^* = y_1^* 2^a + y_2^* \quad (2.187)$$

$$(T^\dagger y)_3^* = y_2^* 3^a + y_3^* \quad (2.188)$$

$$(T^\dagger y)_4^* = y_3^* 4^a + y_4^* \quad (2.189)$$

$$\vdots$$

Da cui (per fortuna) otteniamo di nuovo

$$T^\dagger = \begin{cases} (T^\dagger x)_1 = 0 \\ (T^\dagger x)_n = x_n + n^a x_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.190)$$

Andiamo ora a calcolare gli spettri puntuali dell'operatore e del suo aggiunto.

$$Tx = \lambda x \rightarrow (Tx)_n = \lambda x_n \quad (2.191)$$

$$\downarrow$$

$$(Tx)_1 = 2^a x_2 = \lambda x_1 \quad (2.192)$$

$$(Tx)_2 = x_2 + 3^a x_3 = \lambda x_3 \quad (2.193)$$

$$(Tx)_3 = x_3 + 4^a x_4 = \lambda x_4 \quad (2.194)$$

$$(Tx)_4 = x_4 + 5^a x_5 = \lambda x_5 \quad (2.195)$$

$$\vdots$$

Dobbiamo ora distinguere i diversi casi:

1. $\lambda = 0$; $a = 0$

$$x_1 = \text{indeterminato} \quad (2.196)$$

$$x_2 = 0 \quad (2.197)$$

$$x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.198)$$

$$x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \quad (2.199)$$

$$x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_5 = 0 \quad (2.200)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, 0, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.201)$$

2. $\lambda = 0$; $a \neq 0$

$$x_1 = \text{indeterminato} \quad (2.202)$$

$$2^a x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \quad (2.203)$$

$$x_2 + 3^a x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \quad (2.204)$$

$$x_3 + 4^a x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \quad (2.205)$$

$$x_4 + 5^a x_5 = 0 \rightarrow x_5 = 0 \quad (2.206)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, 0, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.207)$$

3. $\lambda \neq 0$; $a \neq 0$

$$2^a x_2 = \lambda x_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = & \text{indeterminato} \\ x_2 = & \frac{\lambda}{2^a} x_1 \end{cases} \quad (2.208)$$

$$x_2 + 3^a x_3 = \lambda x_2 \rightarrow x_3 = \frac{\lambda - 1}{3^a} x_2 \quad (2.209)$$

$$x_3 + 4^a x_4 = \lambda x_3 \rightarrow x_4 = \frac{\lambda - 1}{4^a} x_3 = \frac{(\lambda - 1)^2}{(3 \cdot 4)^a} x_2 = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(2 \cdot 3 \cdot 4)^a} x_1 = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(4!)^a} x_1 \quad (2.210)$$

$$x_4 + 5^a x_5 = \lambda x_4 \rightarrow x_5 = \frac{\lambda - 1}{5^a} x_4 = \dots = \frac{\lambda(\lambda - 1)^3}{(5!)^a} x_1 \quad (2.211)$$

\vdots

\downarrow

$$\begin{cases} x_1 = & \text{indeterminato} \\ x_2 = & \frac{\lambda}{2^a} x_1 \\ x_n = & \frac{\lambda(\lambda-1)^{n-2}}{(n!)^a} x_1 \quad ; \quad n > 2 \end{cases} \quad (2.212)$$

La situazione si complica. Dobbiamo trovare per quali λ e a abbiamo $\vec{x} \in l^2(\mathbb{C})$. Andiamo a calcolare la norma

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = |x_1|^2 + \left| \frac{\lambda}{2^a} x_1 \right|^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left| \frac{\lambda(\lambda-1)^{n-2}}{(n!)^a} x_1 \right|^2 = \\ &= \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{2^{2a}} \right) |x_1|^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|\lambda|^2 |\lambda-1|^{2n-4}}{(n!)^{2a}} |x_1|^2 \end{aligned} \quad (2.213)$$

Applichiamo ora il criterio della radice, ovvero

$$n| \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \quad (2.214)$$

E otteniamo

$$\frac{|\lambda|^2 |\lambda-1|^{2n-4}}{(n!)^{2a}} \sim \frac{|\lambda|^{\frac{2}{n}} |\lambda-1|^{\frac{2n-4}{n}}}{\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \right)^{\frac{2a}{n}}} \sim \left| \frac{(\lambda-1)^2 e^{2a}}{n^{2a}} \right| \rightarrow \begin{cases} 0 & a > 0 \\ |\lambda-1|^2 & a = 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases} \quad (2.215)$$

Il caso $a < 0$ diverge, e quindi lo escludiamo a priori. Studiamo ora gli altri due

(a) $a = 0 \rightarrow |\lambda - 1|^2 < 1 \rightarrow |\lambda - 1| < 1$

Abbiamo quindi una regione di convergenza circolare centrata in 1 con raggio di convergenza pari a 1.

(b) $a > 0 \rightarrow 0$

In questo caso la serie converge $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, e abbiamo un raggio di convergenza infinito.

Andiamo ora a studiare lo spettro puntuale dell'aggiunto.

$$T^\dagger v = \lambda v \rightarrow (T^\dagger v)_n = \lambda v_n \quad (2.216)$$

$$\downarrow$$

$$(T^\dagger v)_1 = 0 = \lambda v_1 \quad (2.217)$$

$$(T^\dagger v)_2 = v_2 + 2^a v_1 = \lambda v_2 \quad (2.218)$$

$$(T^\dagger v)_3 = v_3 + 3^a v_2 = \lambda v_3 \quad (2.219)$$

$$(T^\dagger v)_4 = v_4 + 4^a v_3 = \lambda v_4 \quad (2.220)$$

$$\vdots$$

Di nuovo, andiamo a distinguere i vari casi

1. $\lambda = 0$; $a = 0$

$$v_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.221)$$

$$v_2 + v_1 = 0 \rightarrow v_2 = -v_1 \quad (2.222)$$

$$v_3 + v_2 = 0 \rightarrow v_3 = -v_2 = v_1 \quad (2.223)$$

$$v_4 + v_3 = 0 \rightarrow v_4 = -v_3 = -v_1 \quad (2.224)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v} = (v_1, -v_1, v_1, \dots, (-1)^{n+1} v_1, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.225)$$

2. $\lambda = 0$; $a \neq 0$

$$v_1 = \text{qualsiasi} \quad (2.226)$$

$$v_2 + 2^a v_1 = 0 \rightarrow v_2 = -2^a v_1 \quad (2.227)$$

$$v_3 + 3^a v_2 = 0 \rightarrow v_3 = -3^a v_2 = 6^a v_1 \quad (2.228)$$

$$v_4 + 4^a v_3 = 0 \rightarrow v_4 = -4^a v_3 = -24^a v_1 \quad (2.229)$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v} = (v_1, -2^a v_1, 6^a v_1, \dots, (-1)^{n+1} (n!)^a v_1, \dots) \quad ; \quad \nu = 1 \quad (2.230)$$

3. $\lambda \neq 0$; $a \neq 0$

$$v_1 = 0 \quad (2.231)$$

$$v_2 = \lambda v_2 \rightarrow (1 - \lambda) v_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad (2.232)$$

$$(1 - \lambda) v_3 = -3^a v_2 \quad (2.233)$$

$$\vdots$$

Distinguiamo i due casi

$$(a) \quad \lambda \neq 1 \rightarrow v_2 = 0 \rightarrow v_3 = 0 \rightarrow \dots \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$(b) \quad \lambda = 1 \rightarrow v_2 = \text{qualsiasi} \rightarrow v_3 = v_3 - 3^a v_2 \rightarrow v_2 = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

Andiamo ora a studiare lo **spettro residuo**. Vale il teorema per cui

$$\sigma_\rho(A) \subset \overline{\sigma_\rho(A^\dagger)} \leftrightarrow \sigma_\rho(A^\dagger) \subset \overline{\sigma_\rho(A)} \quad (2.234)$$

$$0 \in \sigma_\rho(A) \rightarrow 0 \in \overline{\sigma_\rho(A^\dagger)} \quad (2.235)$$

CHIEDERE A PAOLO

Chapter 3

Equazioni Differenziali Ordinarie

3.1 Spunti di teoria generale (Alessandro Marcelli)

3.1.1 Concetti generali

Un'equazione differenziale ordinaria (EDO) di ordine n viene genericamente definita come

$$\Phi(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

In questo corso ci si occupa solo di equazioni che possono essere scritte in **forma normale**, ovvero dove si può esplicitare in funzione della derivata massima

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

con la proprietà di poter essere riscritte come sistemi di n EDO del 1o ordine nel seguente modo

$$\begin{cases} v_1 &= u' \\ v_2 &= v_1' = u'' \\ \dots & \\ v_{n-1} &= v_{n-2}' \\ v_n &= f(x, u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Questo sistema definisce un insieme infinito di curve detto **integrale generale** dell'equazione.

Per individuare una curva specifica bisogna specificare almeno un punto per cui deve passare, e i rispettivi valori che le varie derivate vi devono assumere fino alla $u^{(n-1)}$. Questo prende il nome di **problema di Cauchy**.

Nota: visto che come abbiamo visto i problemi di ordine superiore al primo possono essere visti come combinazione di EDO al primo ordine, nella teoria ci appoggeremo a problemi del 1o ordine del tipo

$$\begin{cases} u'(x) &= F(x, u(x)) \\ u(x_0) &= u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1.2 Esistenza ed unicità delle soluzioni

L'esistenza delle soluzioni di una EDO è dettata dai seguenti due teoremi:

1. **Teorema di Cauchy:** *sia assegnato un problema di Cauchy in un dominio*

$$\mathcal{D} = (a, b) \times (c, d) : (x_0, u_0) \in \mathcal{D} \quad (3.5)$$

Se rispetto ad u si verifica la condizione di Lipschitzianità per $F(x, u)$

$$|F(x, u_1) - F(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2| \quad (3.6)$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica.

2. **Teorema di Peano:** *sia assegnato un problema di Cauchy in un dominio*

$$\mathcal{D} = (a, b) \times (c, d) : (x_0, u_0) \in \mathcal{D} \quad (3.7)$$

Se la $F(x, u)$ è continua, allora esiste un opportuno intorno $(x_0, x_0 + \delta) \in \mathcal{D}$ tale per cui la soluzione del problema esiste.

Qualora ci si trovi nel secondo caso, non è più sufficiente un unico punto per determinare la soluzione, e bisogna invece specificare, in numero pari all'ordine della EDO, delle **condizioni di bordo** (in inglese **Boundary Conditions**, BC), arriviamo così a definire due tipi di problemi:

1. **Problemi di Dirichlet:** condizioni al bordo su $u(x)$.

Nel caso di equazioni lineari, questi si riconducono allo studio degli autovalori dei corrispondenti operatori lineari, e prendono il nome di **Problemi di Sturm-Liouville**.

2. **Problemi di Neumann:** condizioni al bordo su $u'(x)$

3.1.3 Distribuzioni

Le **distribuzioni** sono una famiglia di operatori lineari integrali definite come

$$(T, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \phi(x) \quad (3.8)$$

$$(T', \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T'(x) \phi(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \phi'(x) = -(T, \phi') \quad (3.9)$$

Per quanto riguarda questo corso ci limiteremo allo spazio S^∞ delle **funzioni di prova**, con derivate continue di ogni ordine che all'infinito tendono a zero più rapidamente di ogni potenza.

Esempi noti di distribuzioni sono la **delta** e la **theta**.

La continuità delle distribuzioni come funzionali consente di ottenere una loro definizione come limite di altre distribuzioni.

3.1.4 Equazioni Differenziali Lineari

Si parla di EDO lineari di ordine n quando possono essere poste nella forma

$$\mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = f(x) \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}_x^{(n)} = \sum_{k=0}^n c_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \quad (3.11)$$

Lo studio passa quindi da F ai vari c_k . Notiamo come possiamo avere singolarità della soluzione solo intorno a punti singolari dei coefficienti, che definiamo come **punti singolari fissi**.

Spesso le soluzioni sono note solo attraverso sviluppi in serie di Laurent intorno a tali punti.

Nel caso lineare, la continuità dei coefficienti ci garantisce esistenza ed unicità delle soluzioni.

Definiamo la **omogenea associata** dell'equazione 3.10 come

$$\mathcal{L}_x^{(n)} u(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) = 0 \quad (3.12)$$

L'integrale generale di una EDO lineare può essere scritto come combinazione della soluzione dell'omogenea $u_{om}(x)$ e di una soluzione particolare $u_p(x)$

$$u(x) = u_{om}(x) + u_p(x) \quad (3.13)$$

3.2 EDO lineari del 1o ordine [teoria](Alessandro Marcelli)

Sia il problema di Cauchy

$$\begin{cases} c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Possiamo risolvere il problema in due modi:

3.2.1 Separazione di variabili + variazione delle costanti

1. La soluzione dell'omogenea si ricava per **separazione delle variabili**

$$\begin{aligned} c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) &= 0 & (3.15) \\ \downarrow \\ c_1(x)u'(x) &= -c_0(x)u(x) \\ \downarrow \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{c_0(x)}{c_1(x)}u(x) \\ \downarrow \\ \int_{u_0}^u du \frac{1}{u} &= -\int_{x_0}^x dt \frac{c_0(t)}{c_1(t)} \\ \downarrow \\ \ln(u(x)) - C &= -\int_{x_0}^x dt \frac{c_0(t)}{c_1(t)} \quad ; \quad C = \ln(u_0) \\ \downarrow \\ u_{om}(x) &= e^C e^{-\int_{x_0}^x dt \frac{c_0(t)}{c_1(t)}} & (3.16) \end{aligned}$$

2. La soluzione della particolare invece col metodo della **variazione delle costanti**, ovvero ponendo

$$\begin{aligned} u_p(x) &= a(x)u_{om}(x) & (3.17) \\ \downarrow \\ u'_p(x) &= a'(x)u_{om}(x) + a(x)u'_{om}(x) \\ \downarrow \\ c_1(x) \cdot [a'(x)u_{om}(x) + a(x)u'_{om}(x)] + c_0a(x)u_{om}(x) &= f(x) \\ \downarrow \\ c_1(x)u_{om}(x) \cdot a'(x) + \cancel{[c_1(x)u'_{om}(x) + c_0(x)u_{om}(x)] \cdot a(x)} &= f(x) \\ \downarrow \\ c_1(x)u_{om}(x) \cdot a'(x) &= f(x) \\ \downarrow \\ a'(x) &= \frac{f(x)}{c_1(x)u_{om}(x)} \\ \downarrow \\ a(x) &= \int_{x_0}^x dt \frac{f(t)}{c_1(t)u_{om}(t)} \\ \downarrow \\ u_p(x) &= \left[\int_{x_0}^x dt \frac{f(t)}{c_1(t)u_{om}(t)} \right] \cdot \left[e^C e^{-\int_{x_0}^x dt \frac{c_0(t)}{c_1(t)}} \right] & (3.18) \end{aligned}$$

3. si sommano le due soluzioni, e si trova la curva che rispetta le condizioni iniziali del problema

3.2.2 Metodo della funzione di Green

Il metodo della **funzione di Green** lo abbiamo già introdotto nel capitolo degli operatori. Andiamo a cercare una soluzione nel senso delle distribuzioni per

$$\mathcal{L}_x^{(1)} G(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.19)$$

Abbiamo visto come l'integrale generale, la soluzione fondamentale è definita a meno di soluzioni dell'omogenea.

Prendiamo in considerazione un problema a **condizioni omogenee** (o **nulle**)

$$\begin{cases} c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = g(x) \\ v(x_0) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Nota: qualunque problema del tipo 3.14 può essere riscritto in questo modo col cambio di variabili

$$v(x) = u(x) - u_0 \quad (3.21)$$

$$g(x) = f(x) - c_0(x)u_0 \quad (3.22)$$

Per il **teorema dell'alternativa**, se l'omogenea ammette solo la soluzione nulla, allora il problema ha soluzione unica.

In questo caso $\mathcal{L}_x^{(1)}$ risulta essere invertibile e la soluzione fondamentale con condizione iniziale omogenea $G(x_0, y) = 0$ della 3.19 prende il nome di **funzione di Green** dell'operatore ed è il nucleo integrale dell'operatore inverso. Grazie ad essa possiamo ricavare la soluzione come **convoluzione** col termine forzante $g(x)$

$$u(x) = \int dy G(x, y)g(y) = G * g \quad (3.23)$$

Andiamo a risolvere la 3.19

$$c_1(x) \frac{d}{dx} G(x, y) + c_0(x)G(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.24)$$

\downarrow

$$\frac{d}{dx} G(x, y) + \frac{c_0(x)}{c_1(x)} G(x, y) = \frac{\delta(x - y)}{c_1(x)} \quad (3.25)$$

\downarrow

$$\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx \frac{d}{dx} G(x, y) + \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx \frac{c_0(x)}{c_1(x)} G(x, y) = \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx \frac{\delta(x - y)}{c_1(x)} \quad (3.26)$$

Essendo i $c_k(x)$ regolari, l'integrando può al più fare un "salto" e quindi la sua primitiva F è continua, e quindi nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ il secondo integrale si annulla

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx \frac{c_0(x)}{c_1(x)} G(x, y) = \int_y^y dx \frac{c_0(x)}{c_1(x)} G(x, y) = F(y, y) - F(y, y) = 0 \quad (3.27)$$

Otteniamo quindi la condizione di salto

$$G(y + \epsilon, y) - G(y - \epsilon, y) = \frac{1}{c_1(y)} \quad (3.28)$$

\downarrow

$$G(y_+, y) = G(y_-, y) + \frac{1}{c_1(y)} \quad (3.29)$$

Andiamo ora a calcolare una soluzione dell'omogenea per 3.19

$$\frac{d}{dx}G(x, y) + \frac{c_0(x)}{c_1(x)}G(x, y) = 0 \quad (3.30)$$

↓

$$G(x, y) = A_-(y) \exp\left(-\int_x^y d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) ; x < y \quad (3.31)$$

$$G(x, y) = A_+(y) \exp\left(-\int_x^y d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) ; x > y \quad (3.32)$$

Applicando la condizione di salto

$$A_+(y) = A_-(y) + \frac{1}{c_1(y)} \quad (3.33)$$

↓

$$G(x, y) = A_-(y) \cdot \exp\left(-\int_x^y d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) ; x < y \quad (3.34)$$

$$G(x, y) = \left[A_-(y) + \frac{1}{c_1(y)}\right] \cdot \exp\left(-\int_x^y d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) ; x > y \quad (3.35)$$

↓

$$G(x, y) = \left[A_-(y) + \frac{\theta(x-y)}{c_1(y)}\right] \cdot \exp\left(-\int_x^y d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \quad (3.36)$$

Nel caso di problemi alle condizioni omogenee, possiamo fare l'ipotesi $x_0 < y$, e la funzione di Green del problema deve soddisfare $G(x_0, y) = 0$, il che ci restituisce

$$G(x, y) = \frac{\theta(x-y)}{c_1(y)} \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \quad (3.37)$$

Invece, nel caso di problemi generali del tipo 3.14, il procedimento si snoda in due passaggi:

1. Calcoliamo la convoluzione della generica soluzione fondamentale, tenendo a mente che $a < x_0 < b$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b dy G(x, y) f(y) = \\ &= \int_{x_0}^b dy \left[A(y) + \frac{\theta(x-y)}{c_1(y)}\right] \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \cdot f(y) = \\ &= \int_{x_0}^b dy A(y) f(y) \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) + \\ &+ \int_{x_0}^x dy \frac{f(y)}{c_1(x)} \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

2. Imponiamo ora le condizioni iniziali del problema, ottenendo così la definizione implicita di $A(y)$

$$u_0 = \int_{x_0}^b dy A(y) f(y) \cdot \exp\left(-\int_y^0 d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \quad (3.39)$$

Da cui otteniamo infine l'integrale generale

$$u(x) = u_0 \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) + \int_{x_0}^x dy \frac{f(y)}{c_1(x)} \cdot \exp\left(-\int_y^x d\xi \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}\right) \quad (3.40)$$

3.3 EDO lineari del 2o ordine (Adriano Chialastri, Alessandro Marcelli)

3.3.1 Spunti di teoria (Alessandro Marcelli)

Le EDO del 2o ordine sono rappresentabili come

$$c_2(x)u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = f(x) \quad (3.41)$$

Seguendo il procedimento illustrato in 3.3.3, possono essere sempre ridotte in **forma canonica**

$$v''(x) + c(x)v(x) = g(x) \quad (3.42)$$

dove, ovviamente le condizioni al contorno vanno trasformate di conseguenza.

Rispetto alle EDO del 1o ordine, c'è la difficoltà aggiuntiva data dal fatto che non sempre si può trovare una soluzione dell'omogenea (e quindi l'integrale generale). Questo problema non si pone però per due famiglie di equazioni omogenee:

1. Omogenee a coefficienti costanti:

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \quad (3.43)$$

In questo caso si procede con l'**Ansatz** (o **ipotesi**) $u(x) = e^{\alpha x}$ e si va a cercare il parametro α tramite l'equazione caratteristica

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (3.44)$$

↓

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.45)$$

↓

$$u_1(x) = e^{\alpha_1 x} \quad ; \quad u_2(x) = e^{\alpha_2 x} \quad (3.46)$$

Se le soluzioni coincidono, e quindi si ha

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad (3.47)$$

si procede nel seguente modo

$$u_1(x) = e^{\alpha x} \quad ; \quad u_2(x) = \rho(x)e^{\alpha x} \quad (3.48)$$

↓

$$\cancel{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}\rho(x)e^{\alpha x} + (a\rho''(x) + b\rho'(x) + 2a\alpha\rho'(x))e^{\alpha x} = 0 \quad (3.49)$$

Il primo termine si annulla, vista la 3.43, otteniamo quindi

$$(a\rho''(x) + b\rho'(x) + 2a\alpha\rho'(x))e^{\alpha x} = 0 \quad (3.50)$$

↓

$$a\rho''(x) + b\rho'(x) + 2a\alpha\rho'(x) = 0$$

↓

$$a\rho''(x) + b\rho'(x) - \cancel{2a}\frac{b}{2a}\rho'(x) = 0 \rightarrow a\rho''(x) + \cancel{b\rho'(x)} - \cancel{b\rho'(x)} = 0$$

↓

$$\rho''(x) = 0$$

↓

$$\rho(x) = c_1 x + c_2 \quad (3.51)$$

la soluzione più semplice si ha per $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, che ci restituisce

$$u_2(x) = xe^{\alpha x} \quad (3.52)$$

2. Equazioni di Eulero del 2o ordine:

$$u''(x) + \frac{a}{x}u'(x) + \frac{b}{x^2}u(x) = 0 \quad ; \quad a, b \text{ costanti} \quad (3.53)$$

Stavolta le soluzioni le andiamo a cercare con l'Ansatz $u(x) = x^\alpha$, ottenendo la seguente equazione caratteristica

$$\alpha(\alpha - 1) + a\alpha + b = 0 \quad (3.54)$$

$$\downarrow$$

$$\alpha^2 + (a - 1)\alpha + b = 0$$

$$\downarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{(1 - a) \pm \sqrt{(a - 1)^2 - 4b}}{2} \quad (3.55)$$

$$\downarrow$$

$$u_1(x) = x^{\alpha_1} \quad ; \quad u_2(x) = x^{\alpha_2} \quad (3.56)$$

Nel caso di soluzioni coincidenti

$$a = \frac{1 - a}{2} \quad (3.57)$$

conviene trasformare l'equazione in una a coefficienti costanti col cambio di variabili

$$x(t) = e^t \quad (3.58)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dx}u(x(t)) = e^{-t} \frac{du}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x(t)) = e^{-2t} \frac{d^2u}{dt^2} - e^{-2t} \frac{du}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$e^{-2t} \left[\frac{d^2u}{dt^2} + (a - 1) \frac{du}{dt} + bu \right] = 0$$

$$\downarrow$$

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \quad ; \quad u_2(t) = te^{\alpha t}$$

$$\downarrow$$

$$u_1(x) = x^\alpha \quad ; \quad u_2(x) = x^\alpha \ln(x) \quad (3.59)$$

3.3.1.1 Metodo del Wronskiano

Si definisce il **determinante di Wronsky** (anche detto **Wronskiano**) di due funzioni u_1 e u_2 come

$$W(u_1(x), u_2(x)) = W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ \dot{u}_1(x) & \dot{u}_2(x) \end{vmatrix} = u_1(x)\dot{u}_2(x) - \dot{u}_1(x)u_2(x) \quad (3.60)$$

Se $u_1(x) = a \cdot u_2(x)$, ovvero sono linearmente dipendenti, allora $W = 0$.

Presa in considerazione una EDO del tipo

$$a(x)\ddot{u}(x) + b(x)\dot{u}(x) + c(x)u(x) = 0 \quad (3.61)$$

↓

$$\ddot{u}(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\dot{u}(x) + \frac{c(x)}{a(x)}u(x) = 0$$

↓

$$\ddot{u}(x) + a_1(x)\dot{u}(x) + a_2(x)u(x) = 0 \quad (3.62)$$

$$a_1(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad ; \quad a_2(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \quad (3.63)$$

e prese due soluzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ possiamo ricavare

$$u_1(x)\ddot{u}_2(x) + a_1(x)u_1(x)\dot{u}_2(x) + a_2(x)u_1(x)u_2(x) = 0 \quad (3.64)$$

$$u_2(x)\ddot{u}_1(x) + a_1(x)u_2(x)\dot{u}_1(x) + a_2(x)u_2(x)u_1(x) = 0 \quad (3.65)$$

↓ sottraggo membro a membro

$$u_1(x)\ddot{u}_2(x) - u_2(x)\ddot{u}_1(x) + a_1(x)u_1(x)\dot{u}_2(x) - a_1(x)u_2(x)\dot{u}_1(x) + \cancel{a_2(x)u_1(x)u_2(x)} - \cancel{a_2(x)u_2(x)u_1(x)} = 0$$

↓

$$[u_1(x)\ddot{u}_2(x) - u_2(x)\ddot{u}_1(x)] + a_1(x)[u_1(x)\dot{u}_2(x) - u_2(x)\dot{u}_1(x)] = 0$$

↓

$$\dot{W}(x) + a_1(x)W(x) = 0 \quad (3.66)$$

Per separazione delle variabili, e definendo $W(x_0) = W_0$ otteniamo la **formula di Liouville**

$$W(x) = W_0 \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x d\xi a_1(\xi)\right) \quad (3.67)$$

Da cui notiamo che

1. In forma canonica $W = 0$
2. Se $\exists x_1 : W(x_1) = 0 \rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x$
3. Se u_1 e u_2 sono lin ind allora $W(x) \neq 0 \quad \forall x$

Nota una delle due soluzioni, dalla formula di Liouville possiamo ricavare una definizione implicita dell'altra nel seguente modo

$$\frac{W}{u_1^2(x)} = \frac{u_1(x)\dot{u}_2(x) - u_2(x)\dot{u}_1(x)}{u_1^2(x)} \quad (3.68)$$

$$\frac{W}{u_1^2(x)} = \frac{W_0 \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x d\xi a_1(\xi)\right)}{u_1^2(x)} \quad (3.69)$$

↓

$$\frac{u_1(x)\dot{u}_2(x) - u_2(x)\dot{u}_1(x)}{u_1^2(x)} = \frac{W_0 \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x d\xi a_1(\xi)\right)}{u_1^2(x)} \quad (3.70)$$

Il termine a sinistra altro non è che

$$\frac{u_1(x)\dot{u}_2(x) - u_2(x)\dot{u}_1(x)}{u_1^2(x)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \right) \quad (3.71)$$

Da cui otteniamo, sostituendo W_0 con A per liberare l'estremo inferiore di integrazione

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \right) = \frac{W_0 \cdot \exp \left(- \int_{x_0}^x d\xi a_1(\xi) \right)}{u_1^2(x)} \quad (3.72)$$

↓

$$\int^x d\eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u_2(\eta)}{u_1(\eta)} \right) = \int^x d\eta \frac{A \cdot \exp \left(- \int_{x_0}^{\eta} d\xi a_1(\xi) \right)}{u_1^2(\eta)} + c_1$$

↓

$$u_2(x) = Au_1(x) \int^x d\eta \frac{1}{u_1^2(\eta)} \cdot \exp \left(- \int_{x_0}^{\eta} d\xi a_1(\xi) \right) + c_1 u_1(x) \quad (3.73)$$

3.3.1.2 Metodo della funzione di Green

Consideriamo ora l'operatore differenziale in forma normale

$$\mathcal{L}_x^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x) \quad (3.74)$$

Ne definiamo una **soluzione fondamentale** $G(x, y)$ come

$$\mathcal{L}_x^{(2)} G(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.75)$$

Imponiamo la condizione di continuità

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) \propto \delta(x - y) \quad (3.76)$$

Da cui

$$\frac{d}{dx} G(x, y) \Big|_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} + 0 = 1 \quad (3.77)$$

↓

$$G'(y_+, y) - G'(y_-, y) = 1 \quad (3.78)$$

Siano ora $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due soluzioni della omogenea associata alla 3.75, possiamo scrivere

$$G(x, y) = Au_1(x) + Bu_2(x) + G_P(x, y) \quad (3.79)$$

La soluzione particolare può essere scritta nella forma

$$G_P(x, y) = \begin{cases} c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) & x < y \\ d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x) & x > y \end{cases} \quad ; \quad c_i, d_i = \begin{cases} \text{costanti} \\ c_i(y), d_i(y) \end{cases} \quad (3.80)$$

Per la condizione di continuità abbiamo che

$$c_1 u_1(y) + c_2 u_2(y) = d_1 u_1(y) + d_2 u_2(y) \quad (3.81)$$

↓

$$(c_1 - d_1) u_1(y) + (c_2 - d_2) u_2(y) = 0 \quad (3.82)$$

Mentre per il salto della derivata

$$d_1 \dot{u}_1(y) + d_2 \dot{u}_2(y) - c_1 \dot{u}_1(y) - c_2 \dot{u}_2(y) = 1 \quad (3.83)$$

$$\downarrow$$

$$(d_1 - c_1) \dot{u}_1(y) + (d_2 - c_2) \dot{u}_2(y) = 1 \quad (3.84)$$

Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} (c_1 - d_1)u_1(y) + (c_2 - d_2)u_2(y) = 0 \\ (d_1 - c_1)\dot{u}_1(y) + (d_2 - c_2)\dot{u}_2(y) = 1 \end{cases} \quad (3.85)$$

Se prendiamo come incognite le differenze tra i coefficienti tra parentesi, possiamo riscrivere il sistema come il prodotto matrice-vettore

$$\begin{pmatrix} u_1(y) & u_2(y) \\ \dot{u}_1(y) & \dot{u}_2(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 - d_1 \\ c_2 - d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

Notiamo come la matrice dei coefficienti altro non è che la matrice di Wronsky di $u_1(x)$ e $u_2(x)$, e che quindi non ha mai determinante nullo.

Possiamo quindi scrivere le soluzioni come

$$d_1 - c_1 = \frac{1}{W(y)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & u_2(y) \\ 1 & \dot{u}_2(y) \end{vmatrix} = -\frac{u_2(y)}{W(y)} \rightarrow d_1 = c_1 - \frac{u_2(y)}{W(y)} \quad (3.87)$$

$$d_2 - c_2 = \frac{1}{W(y)} \cdot \begin{vmatrix} u_1(y) & 0 \\ \dot{u}_1(y) & 1 \end{vmatrix} = +\frac{u_1(y)}{W(y)} \rightarrow d_2 = c_2 + \frac{u_1(y)}{W(y)} \quad (3.88)$$

Trovate queste possiamo riscrivere la soluzione particolare come

$$G_P(x, y) = \begin{cases} c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) & x < y \\ \left[c_1 - \frac{u_2(y)}{W(y)} \right] u_1(x) + \left[c_2 + \frac{u_1(y)}{W(y)} \right] u_2(x) & x > y \end{cases} \quad ; \quad c_i, d_i = \begin{cases} \text{costanti} \\ c_i(y), d_i(y) \end{cases} \quad (3.89)$$

Possiamo riscrivere la seconda come

$$\left[c_1 - \frac{u_2(y)}{W(y)} \right] u_1(x) + \left[c_2 + \frac{u_1(y)}{W(y)} \right] u_2(x) \quad (3.90)$$

$$\downarrow$$

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \frac{u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)}{W(y)} \quad (3.91)$$

Confrontando con il caso $x < y$ e impiegando il funzionale a gradino $\theta(x - y)$ possiamo riscrivere la soluzione particolare nella seguente forma compatta

$$G_P(x, y) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \theta(x - y) \frac{u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)}{W(y)} \quad (3.92)$$

Riportiamo due casi noti che ci saranno utili più avanti

1. Funzione di Green avanzata

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x < y \quad (3.93)$$

2. Funzione di Green ritardata

$$G(x, y) \equiv 0 \quad x > y \quad (3.94)$$

3.3.1.3 Teorema di Green

Il teorema di Green consente di stabilire le condizioni al bordo per il calcolo della funzione di Green di un problema differenziale lineare.

Iniziamo considerando i problemi di Sturm-Liouville con condizioni accessorie date sul bordo dell'intervallo $[a, b]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(2)} v(x) &= g(x) \\ \tilde{\mathcal{B}}_a(v) &= \tilde{\alpha}_1 v(a) + \tilde{\beta}_1 \dot{v}(a) - \gamma_1 = 0 \\ \tilde{\mathcal{B}}_b(v) &= \tilde{\alpha}_2 v(b) + \tilde{\beta}_2 \dot{v}(b) - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (3.95)$$

Sappiamo dalla teoria delle EDO al 1o ordine che

1. è sempre possibile ricondurre un problema in forma canonica

$$\mathcal{L}_x^C = \frac{d^2}{dx^2} + c(x) \quad (3.96)$$

2. con l'opportuno cambio di variabili ci si può ricondurre al caso di condizioni omogenee

$$\begin{cases} v(x) = u(x) + mx + q \\ \dot{v}(x) = \dot{u}(x) + m \end{cases} \quad (3.97)$$

Possiamo quindi riscrivere

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^C u(x) &= f(x) \\ \mathcal{B}_a^{om}(u) &= \alpha_1 u(a) + \beta_1 \dot{u}(a) = 0 \\ \mathcal{B}_b^{om}(u) &= \alpha_2 u(b) + \beta_2 \dot{u}(b) = 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

ed enunciare il **teorema di Green**: *Sia il problema di Sturm-Liouville appena definito. Se l'omogenea ammette solo la soluzione banale, ovvero*

$$u^{om}(x) = 0 \quad (3.99)$$

all'ora l'integrale generale è dato da

$$u(y) = \int_a^b dx G(x, y) f(x) + \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dx} - G(x, y) \frac{du(x)}{dx} \right] \Big|_a^b \quad (3.100)$$

Dove si ha che $G(x, y)$ è soluzione fondamentale di

$$\mathcal{L}_x^C G(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.101)$$

La dimostrazione passa per la funzione integrale

$$E(y) = \int_a^b dx [G(x, y) \mathcal{L}_x^C u(x) - u(x) \mathcal{L}_x^C G(x, y)] \quad (3.102)$$

Utilizzando la 3.108 e la 3.101 otteniamo

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_a^b dx [G(x, y) f(x) - u(x) \delta(x - y)] = \\ &= -u(y) + \int_a^b dx G(x, y) f(x) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Usando invece la 3.96 otteniamo

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_a^b dx G(x, y) [\ddot{u}(x) + c(x)u(x)] - u(x) [\ddot{G}(x, y) + c(x)G(x, y)] = \\ &= [G(x, y) \dot{u}(x) - u(x) \dot{G}(x, y)] \Big|_a^b - \int_a^b dx \cancel{\dot{G}(x, y) \dot{u}(x)} - \cancel{\dot{u}(x) \dot{G}(x, y)} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Uguagliando 3.103 e 3.104 segue la tesi.

3.3.1.4 Applicazione del teorema di Green ai problemi di Sturm-Liouville

Notiamo come nel caso di condizioni

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

si abbia

$$\begin{cases} \dot{G}(a, y) = 0 \\ \dot{G}(b, y) = 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

Quindi, siccome non sono note le derivate \dot{a} e \dot{b} , basta imporre le condizioni

$$\begin{cases} G(a, y) = 0 \\ G(b, y) = 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

Questo può essere generalizzato al problema generale. Magari scoccio Paolo e lo vedo con lui.

Possiamo quindi dire che dato il problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^C u(x) &= f(x) \\ \mathcal{B}_a^{om}(u) &= \alpha_1 u(a) + \beta_1 \dot{u}(a) = 0 \\ \mathcal{B}_b^{om}(u) &= \alpha_2 u(b) + \beta_2 \dot{u}(b) = 0 \end{cases} \quad (3.108)$$

La funzione di Green associata sarà data da

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^C G(x, y) &= \delta(x - y) \\ \mathcal{B}_a^{om}(G) &= 0 \\ \mathcal{B}_b^{om}(G) &= 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

Da qui possiamo ricavare una definizione operativa. Definiamo due soluzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ e imponiamo

$$\begin{cases} \mathcal{B}_a^{om}(u_1(x)) = 0 \\ \mathcal{B}_b^{om}(u_2(x)) = 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

Preso il Wronskiano costante $W(u_1(x), u_2(x))$ possiamo scrivere la funzione di Green come

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{W(u_1(x), u_2(x))} u_1(x) u_2(y) & x < y \\ \frac{1}{W(u_1(x), u_2(x))} u_1(y) u_2(x) & x > y \end{cases} \quad (3.111)$$

Questa soluzione rispetta

1. le condizioni al bordo (per costruzione)
2. la condizione di continuità di $G(x, y)$
3. la condizione di salto pari a 1 della derivata

3.3.1.5 Applicazione del teorema di Green ai problemi di Cauchy

Ora prendiamo in considerazione le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{cases} \dot{u}(x_0) = 0 \\ u(x_0) = 0 \end{cases} \quad (3.112)$$

Applichiamo il teorema di Green, integrando da x_0 a $x = \Delta$ e ponendo $\Delta > y$. Allora la formula data dal teorema di Green diventa

$$u(y) = \int_{x_0}^{\Delta} dx G(x, y) f(x) + \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dx} - G(x, y) \frac{du(x)}{dx} \right] \Big|_{x_0}^{\Delta} \quad (3.113)$$

Scrivendo per esteso i termini al bordo dati dal secondo termine avremo

$$u(\Delta) \dot{G}(\Delta, y) - u(x_0) \dot{G}(x_0, y) - G(\Delta, y) \dot{u}(\Delta) + G(x_0, y) \dot{u}(x_0) \quad (3.114)$$

Per annullare i termini in Δ , che non conosciamo, dobbiamo imporre

$$\dot{G}(\Delta, y) = G(\Delta, y) = 0 \quad (3.115)$$

Ma, siccome $\Delta > y$, questa condizione altro non è che la **funzione di Green avanzata**. Si dice quindi che la funzione di Green "propaga" la soluzione da x_0 a y , e possiamo riscrivere

$$u(y) = \int_{x_0}^{\Delta} dx G(x, y) f(x) + G(x_0, y) \dot{u}(x_0) - u(x_0) \dot{G}(x_0, y) \quad (3.116)$$

Nel caso di condizioni omogenee, sappiamo che $G(x_0, y) = 0 = \dot{G}(x_0, y)$ e quindi ci riduciamo al problema di convoluzione

$$u(y) = \int_{x_0}^{\Delta} dx G(x, y) f(x) \quad (3.117)$$

Se non ci si vuole ricondurre al caso di condizioni omogenee, bisogna tener da conto dei termini aggiuntivi. Ma perché dovremmo volerci far del male?

3.3.1.6 Operatori lineari, unicità delle soluzioni e teorema dell'alternativa

Vediamo un rapido excursus sugli operatori che ci servirà nel prossimo paragrafo. Sia l'operatore A definito come

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (3.118)$$

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(A)} \quad (3.119)$$

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad ; \quad \vec{x} \in \mathcal{D}(A), \vec{y} \in \mathcal{H} \quad (3.120)$$

Definiamo il **nucleo** dell'operatore come l'insieme dei vettori mappati nel vettore nullo. Qualora esso contenga solo il vettore nullo, si dice che è **triviale**.

Vale il seguente teorema: *se il nucle di A non è nullo, allora la soluzione di 3.120 non è unica, viceversa.*

Il teorema si può dimostrare in entrambe le direzioni:

1. $\text{Ker}(A) \neq \{\vec{0}\} \implies$ non unicità della soluzione

$$\vec{x}_0 \in \text{ker}(A) \implies A\vec{x}_0 = \vec{0} \quad (3.121)$$

$$\vec{x}_s : A\vec{x}_s = \vec{y} \quad (3.122)$$

\downarrow

$$A\vec{x}_0 + A\vec{x}_s = \vec{0} + \vec{y} \rightarrow A(\vec{x}_0 + \vec{x}_s) = \vec{y} \quad (3.123)$$

2. Non unicità della soluzione $\implies Ker(A) \neq \{\vec{0}\}$

$$\vec{x}_1 : A\vec{x}_1 = \vec{y} \quad (3.124)$$

$$\vec{x}_2 : A\vec{x}_2 = \vec{y} \quad (3.125)$$

\downarrow

$$A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0} \rightarrow A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \quad (3.126)$$

Ci viene quindi in aiuto il **teorema dell'alternativa**: *Sia l'operatore A definito come*

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (3.127)$$

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(A)} \quad (3.128)$$

$$R(A) \text{ chiuso} \quad (3.129)$$

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad (3.130)$$

allora il sistema ammetterà soluzioni \vec{y} (ovvero $\vec{y} \in R(A)$) se e solo se $\vec{y} \perp ker(A^\dagger)$ Anche qui dimostriamo entrambe le "direzioni":

1. $\vec{y} \in R(A) \implies \vec{y} \perp ker(A^\dagger)$

$$\vec{z} \in Ker(A^\dagger) \quad (3.131)$$

\downarrow

$$A^\dagger \vec{z} = \vec{0}$$

\downarrow

$$(\vec{y}, \vec{z}) = (A\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{x}, A^\dagger \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{0}) = 0 \quad (3.132)$$

\downarrow

$$\vec{y} \perp ker(A^\dagger) \quad (3.133)$$

2. $\vec{y} \perp ker(A^\dagger) \implies \vec{y} \in R(A)$

Sia $\vec{y} \perp ker(A^\dagger)$, vogliamo dimostrare che appartenenza all'insieme risolvente $R(A)$. Iniziamo scomponendolo

$$\vec{y} = \vec{y}_R + \vec{y}_R^\perp \quad ; \quad \vec{y}_R \in R(A), \quad \vec{y}_R^\perp \in R^\perp(A) \quad (3.134)$$

Questo è possibile solo quando $R(A)$ è chiuso, ovvero è un sottospazio vettoriale di \mathcal{H} tale che

$$\mathcal{H} = R(A) \oplus R^\perp(A) \quad (3.135)$$

Possiamo quindi riscrivere

$$\vec{y} - \vec{y}_R = \vec{y}_R^\perp \quad (3.136)$$

\downarrow

$$(\vec{y}_R^\perp, \vec{y}_R) = (\vec{y} - \vec{y}_R, A\vec{x}) \quad (3.137)$$

Per costruzione questo vale

$$(\vec{y} - \vec{y}_R, A\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}(A) \quad (3.138)$$

\downarrow

$$(A^\dagger(\vec{y} - \vec{y}_R), \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}(A) \quad (3.139)$$

Affinché il prodotto sia nullo per ogni \vec{x} , deve essere per forza

$$A^\dagger(\vec{y} - \vec{y}_R) = \vec{0} \quad (3.140)$$

↓

$$(\vec{y} - \vec{y}_R) \in \ker(A^\dagger)$$

↓

$$0 = (\vec{y} - \vec{y}_R, \vec{y}) = (\vec{y} - \vec{y}_R, \vec{y} - \vec{y}_R + \vec{y}_R) = \|\vec{y} - \vec{y}_R\|^2 + (\vec{y} - \vec{y}_R, \vec{y}_R) = \|\vec{y} - \vec{y}_R\|^2 + \underbrace{(\vec{y}_R^\perp, \vec{y}_R)}_{=0}$$

↓

$$\vec{y} = \vec{y}_R \in R(A) \quad (3.141)$$

Abbiamo quindi dalla 3.135 una decomposizione dello spazio di Hilbert \mathcal{H} , da cui possiamo notare due possibili situazioni

1. $R(A)$ non è chiuso $\implies \mathcal{H} = R(A^\dagger) \oplus \ker(A^\dagger)$

In questo caso l'esistenza della soluzione non è garantita dalla condizione $\vec{y} \perp \ker(A^\dagger)$.

2. $R(A)$ è chiuso $\implies \mathcal{H} = R(A^\dagger) \oplus \ker(A)$

In questo caso vale il teorema dell'alternativa, e quindi

(a) $A\vec{x} = \vec{y}$ ammette un'unica soluzione

(b) $A\vec{x} = \vec{0}$ ammette soluzioni non banali, e quindi

i. $\vec{y} \perp \ker(A^\dagger) \implies A\vec{x} = \vec{y}$ ammette soluzioni

ii. $\vec{y} \not\perp \ker(A^\dagger) \implies A\vec{x} = \vec{y}$ non ammette soluzioni

3.3.1.7 Applicazione del teorema dell'alternativa alle funzioni di Green

Che cosa succede quando viene meno la condizione di invertibilità dell'operatore differenziale? Ci troviamo in presenza di **modi nulli**, ovvero di autovettori corrispondenti all'autovalore zero.

Se quindi prendiamo il problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^C v(x) = 0 \\ \mathcal{B}_a^{om}(v) = 0 \\ \mathcal{B}_b^{om}(v) = 0 \end{cases} \quad (3.142)$$

In questo caso, la funzione di Green propriamente detta non esiste. Possiamo però restringerci al caso dove l'operatore è invertibile, ovvero il sottospazio ortogonale al quello dei modi nulli. Possiamo definire in questo sottospazio una nuova funzione di Green

$$\mathcal{L}_x^C \tilde{G} = \delta + r \quad ; \quad (\delta + r) \perp \ker(\mathcal{L}_x^C) \quad (3.143)$$

La dimostrazione la troviamo più avanti come esempio svolto (da fare).

3.3.2 Messaggio dall'autore

Riporto qui, sotto richiesta dell'autore della maggior parte di questi esercizi, un suo messaggio:

Io sottoscritto Adriano Chialastri non mi riterrò responsabile di qualsiasi danno a cose o persone causato da questi esercizi, in quanto non svolti nel pieno esercizio delle mie facoltà mentali a causa nella prolungata permanenza presso il luogo correntemente noto come Sogene.

3.3.3 Esempio 1: Problema di Cauchy (Adriano Chialastri)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2\ddot{y} - 2x\dot{y} + 2y = -x \\ \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.144)$$

Iniziamo passando in **forma canonica**

$$y(x) = A(x)v(x) \quad (3.145)$$

↓

$$x^2(\ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A\ddot{v}(x)) - 2x(\dot{A}(x)v(x) + A\dot{v}(x)) + 2A(x)v(x) = -x$$

↓

$$Ax^2\ddot{v}(x) + 2(\dot{A}(x)x^2 - A(x)x)\dot{v}(x) + (\ddot{A}(x)x^2 - 2x\dot{A}(x) + 2A)v(x) = -x \quad (3.146)$$

Per poter fare il passaggio dobbiamo imporre che

$$\dot{A}(x)x^2 - A(x)x = 0 \quad (3.147)$$

↓

$$\dot{A}(x)x = A(x)$$

↓

$$A(x) = x \quad (3.148)$$

Da cui otteniamo che

$$x^3\ddot{v}(x) + (-2x + 2x)v(x) = -x \quad (3.149)$$

↓

$$\ddot{v}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad y(x) = xv(x) \quad (3.150)$$

Il nostro problema di Cauchy in forma canonica è quindi

$$\begin{cases} \ddot{v}(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \dot{v}(1) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea**

$$\ddot{v}(x) = 0 \quad (3.152)$$

↓

$$v_{om}(x) = Ax + B \quad (3.153)$$

↓

$$\begin{cases} \dot{v}_{om}(1) = A = 0 \\ v_{om}(1) = A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow \text{l'operatore differenziale è invertibile} \quad (3.154)$$

Dalla 3.153 vediamo come

$$\begin{aligned} v_{om}(x) &= Av_1(x) + Bv_2(x) \\ \downarrow \\ v_{om_1}(x) &= x \quad ; \quad v_{om_2}(x) = 1 \end{aligned} \quad (3.155)$$

Calcoliamo il Wronskiano dell'equazione

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad (3.156)$$

E andiamo quindi a calcolare la **Funzione di Green**

$$G(x, y) = -\delta(x - y)(y - x) = (x - y)\delta(x - y) \quad (3.157)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x dy \, G(x, y) \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \\ &= \int_1^x dy \, \delta(x - y)(y - x) \cdot \frac{1}{y^2} = \\ &= \int_1^x dy \, \frac{y - x}{y^2} = \\ &= \int_1^x dy \, \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = \\ &= \left[\ln(y) + \frac{x}{y}\right]_1^x = \ln(x) + 1 - x \\ \downarrow \\ y(x) &= xv(x) = x \ln(x) - x^2 + x \end{aligned} \quad (3.158)$$

Verifichiamo la validità della soluzione

$$\dot{y}(x) = 2 - 2x + \ln(x) \quad (3.159)$$

$$\ddot{y}(x) = -2 + \frac{1}{x} \quad (3.160)$$

\downarrow

$$\begin{cases} \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 - 1 + 1 = 0 \\ 1 - 1 + 0 = 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

$$x^2 \ddot{y} - 2x \dot{y} + 2y = -x \quad (3.162)$$

\downarrow

$$x^2 \left(-2 + \frac{1}{x}\right) - 2x(2 - 2x + \ln(x)) + 2(x \ln(x) - x^2 + x) = -x$$

\downarrow

$$-2x^2 + x - 4x + 4x^2 - 2x \ln(x) + 2x \ln(x) - 2x^2 + 2x = -x$$

\downarrow

$$+x - 4x - \cancel{2x \ln(x)} + \cancel{2x \ln(x)} + 2x = -x$$

\downarrow

$$-x = -x \quad (3.163)$$

E quindi l'esercizio è verificato.

3.3.4 Esempio 2: Omogenea di Eulero (Adriano Chialastri)

Riprendiamo il precedente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2\ddot{y} - 2x\dot{y} + 2y = -x \\ \dot{y}(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.164)$$

Partiamo dall'**omogenea**

$$x^2\ddot{y} - 2x\dot{y} + 2y = 0 \quad (3.165)$$

↓

$$\ddot{y} - \frac{2}{x}\dot{y} + \frac{2}{x^2}y = 0 \quad (3.166)$$

L'omogenea scritta in questa forma risulta essere un'**equazione di Eulero**. Per risolverla poniamo quindi l'**Ansatz** $y = x^\alpha$ dove otteniamo

$$\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} - 2\alpha x^{\alpha-2} + 2x^{\alpha-2} = 0 \quad (3.167)$$

↓

$$\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2 = 0$$

↓

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

↓

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

↓

$$y_{om_1}(x) = x \quad ; \quad y_{om_2}(x) = x^2$$

↓

$$y_{om}(x) = Ax + Bx^2 \quad (3.168)$$

Andiamo ora a cercare una **soluzione particolare** col **metodo delle costanti**. Poniamo

$$y_p(x) = A(x)x + B(x)x^2 \quad (3.169)$$

↓

$$\dot{y}_p(x) = \dot{A}(x)x + A(x) + \dot{B}(x)x^2 + 2B(x)x \quad (3.170)$$

$$\ddot{y}_p(x) = \ddot{A}(x)x + 2\dot{A}(x) + \ddot{B}(x)x^2 + 4\dot{B}(x)x + 2B \quad (3.171)$$

↓

$$x^2(\ddot{A}(x)x + 2\dot{A}(x) + \ddot{B}(x)x^2 + 4\dot{B}(x)x + 2B) - 2(\dot{A}(x)x + A(x) + \dot{B}(x)x^2 + 2B(x)x) + 2(A(x)x + B(x)x^2) = -x$$

↓

...

↓

$$x^3\ddot{A}(x) + x^4\ddot{B}(x) + 2x^3\dot{B}(x) = -x \quad (3.172)$$

Da cui otteniamo

$$y(x) = y_p(x) + y_{om}(x) = y_p(x) + Ax + Bx^2 \quad (3.173)$$

↓

$$\begin{cases} \dot{y}(1) = \dot{y}_p(1) + A + 2B = 0 \\ y(1) = y_p(1) + A + B = 0 \end{cases} \quad (3.174)$$

3.3.5 Esempio 3: Problema di Sturm-Liouville (Adriano Chialastri)

Risolvere il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x\ddot{u}(x) + 2\dot{u}(x) + 4xu(x) = 4 \\ u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (3.175)$$

Iniziamo passando il problema in **forma canonica**

$$u(x) = A(x)v(x) \quad (3.176)$$

↓

$$x(\ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A(x)\ddot{v}(x)) + 2(\dot{A}(x)v(x) + A(x)\dot{v}(x)) + 4xA(x)v(x) = 4$$

↓

$$A(x)x \cdot \ddot{v}(x) + 2(\dot{A}(x)x + A(x))\dot{v}(x) + (x\ddot{A}(x) + 2\dot{A}(x) + 4xA(x))v(x) = 4$$

↓

$$\dot{A}(x)x + A(x) = 0 \rightarrow \ln(A(x)) = -\ln(x) \rightarrow A(x) = x^{-1}$$

↓

$$\frac{1}{x} \ddot{v}(x) + \left(\cancel{x} \frac{2}{\cancel{x}^2} - \frac{2}{x^2} + 4\cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \right) v(x) = 4$$

↓

$$\begin{cases} \ddot{v}(x) + 4v(x) = 4 \\ v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (3.177)$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea associata** dell'equazione in forma canonica

$$\ddot{v}(x) + 4v(x) = 0 \quad (3.178)$$

↓

$$\text{Ansatz } v(x) = e^{\alpha x}$$

↓

$$\alpha^2 e^{\alpha} + 4e^{\alpha} = 0$$

↓

$$\alpha^2 = -4 \rightarrow \alpha_{1,2} = \pm 2i$$

↓

$$v_{om_1}(x) = e^{2ix} \quad ; \quad v_{om_2}(x) = e^{-2ix}$$

↓

$$v_{om}(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} \quad (3.179)$$

Dalla 3.177 ricaviamo il nostro **operatore differenziale**

$$\mathcal{L}_x^c = \frac{d^2}{dx^2} + 4 \quad (3.180)$$

Andiamo ora a verificare se è invertibile o meno, in base alle nostre Boundary Conditions:

$$\begin{cases} v_{om}\left(\frac{\pi}{4}\right) = Ae^{i\frac{\pi}{2}} + Be^{-i\frac{\pi}{2}} = iA - iB = 0 \\ v_{om}\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ae^{i\pi} + Be^{-i\pi} = -A - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (3.181)$$

↓

$$\mathcal{L}_x^c v = 0 \leftrightarrow v = 0 \rightarrow \text{L'operatore è invertibile} \quad (3.182)$$

Andiamo ora a trovare due soluzioni dell'omogenea che soddisfino le BC

$$v_A(x) \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0 \rightarrow iA - iB = 0 \rightarrow A = B \rightarrow v_A(x) = A(e^{2ix} + e^{-2ix}) \quad (3.183)$$

$$v_B(x) \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \rightarrow A + b \Rightarrow A = -B \rightarrow v_B(x) = A(e^{2ix} - e^{-2ix}) \quad (3.184)$$

Siccome non abbiamo condizioni su A, la scegliamo comoda a seconda del caso, possiamo quindi scrivere

$$v_A(x) = \frac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}) = \cos(2x) \quad (3.185)$$

$$v_B(x) = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix}) = \sin(2x) \quad (3.186)$$

↓

$$v_{om}(x) = \tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x) \quad (3.187)$$

Andiamo ora a calcolare le **soluzioni fondamentali dell'equazione**

$$W(v_A, v_B) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\cos(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = \dots = 2 \quad (3.188)$$

$$\tilde{G}(x, y) = \tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x) + \frac{\delta(x-y)}{2} [\cos(2y) \sin(2x) - \cos(2x) \sin(2y)] \quad (3.189)$$

$$\mathcal{L}_x^c \tilde{G}(x, y) = \delta(x-y) \quad (3.190)$$

Per questo problema di SL, la **funzione di Green** sarà quindi data da

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x) \sin(2y)}{2} & x < y \\ \frac{\cos(2y) \sin(2x)}{2} & x > y \end{cases} \quad (3.191)$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy G(x, y) \cdot 4 = \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^x dy \cos(2x) \sin(2y) + 2 \int_x^{\frac{\pi}{2}} dy \cos(2y) \sin(2x) = \dots = \\ &= 1 - \sin(2x) + \cos(2x) \end{aligned} \quad (3.192)$$

↓

$$u(x) = \frac{v(x)}{x} = \frac{1 - \sin(2x) + \cos(2x)}{x} \quad (3.193)$$

VERIFICA DA COPIARE QUANDO SONO MENO ABBOTTATO (pag 7 del pdf)

3.3.6 Esempio 4: Problema di Cauchy non lineare (Adriano Chialastri)

Risolvere il seguente **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} x^2 \ddot{f}(x) + 3x \dot{f}(x) + f(x) = 0 \\ \dot{f}(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad (3.194)$$

Affinché l'operatore sia lineare dobbiamo avere BC omogenee, che non è il nostro caso. Dobbiamo quindi **linearizzare** il problema. Andiamo a definire

$$u(x) = f(x) + mx + q \quad (3.195)$$

\downarrow

$$\dot{u}(x) = \dot{f}(x) + m \quad (3.196)$$

Da cui otteniamo, imponendo che siano omogenee le BC di $u(x)$

$$\begin{cases} \dot{u}(1) = \dot{f}(1) + m = 0 \\ u(1) = f(1) + m + q = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 + m = 0 \\ 1 + m + q = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ q = -1 \end{cases} \quad (3.197)$$

\downarrow

$$u(x) = f(x) - 1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = u(x) + 1 \quad (3.198)$$

Il nostro problema diventa quindi

$$\begin{cases} x^2 \ddot{u}(x) + 3x \dot{u}(x) + u(x) = -1 \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.199)$$

Riscriviamo il problema in **forma canonica**

$$\begin{aligned}
 u(x) &= A(x)v(x) & (3.200) \\
 \downarrow \\
 \dot{u}(x) &= \dot{A}(x)v(x) + A(x)\dot{v}(x) \\
 \downarrow \\
 \ddot{u}(x) &= \ddot{A}(x)v(x) + 2\dot{A}(x)\dot{v}(x) + A(x)\ddot{v}(x) \\
 \downarrow \\
 [A(x)x^2]\ddot{v}(x) + [2\dot{A}(x)x^2 + 3A(x)x]\dot{v}(x) + [\ddot{A}(x)x^2 + 3\dot{A}(x)x + A(x)]v(x) &= -1 \\
 \downarrow \\
 2\dot{A}(x)x^2 + 3A(x)x &= 0 \rightarrow \dot{A}(x) = -\frac{3}{2}x^{-1}A(x) \rightarrow \ln(A(x)) = -\frac{3}{2}\ln(x) \rightarrow A(x) = x^{-\frac{3}{2}} \\
 \downarrow \\
 \dot{A}(x) &= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \quad ; \quad \dot{A}(x) = -\frac{15}{2}x^{-\frac{7}{2}} \\
 \downarrow \\
 [x^{-\frac{3}{2}}x^2]\ddot{v}(x) + \left[x^2 \left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}} \right) + 3x \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \right) + x^{-\frac{3}{2}} \right] v(x) &= -1 \\
 \downarrow \\
 [x^{-\frac{3}{2}}x^2]\ddot{v}(x) + \left[\frac{15}{4} - \frac{9}{2} + 1 \right] x^{-\frac{3}{2}}v(x) &= -1 \\
 \downarrow \\
 x^{\frac{1}{2}}\ddot{v}(x) + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}v(x) &= -1 \\
 \downarrow \\
 \begin{cases} \ddot{v}(x) + \frac{1}{4x^2}\dot{v}(x) = -x^{-\frac{1}{2}} \\ \dot{v}(1) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases} & (3.201)
 \end{aligned}$$

Andiamo ora a risolvere l'**omogenea associata** dell'equazione in forma canonica

$$\ddot{v}(x) + \frac{1}{4x^2}\dot{v}(x) = 0 \quad (3.202)$$

Siccome è un'equazione di Eulero usiamo l'Ansatz $v(x) = x^\alpha$ e otteniamo

$$\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1}}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.203)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om_1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad v_{om_2}(x) = x^{\frac{1}{2}} \ln(x)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om}(x) = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}} \ln(x) = x^{\frac{1}{2}}(A + B \ln(x)) \quad (3.204)$$

$$\downarrow$$

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \ln(x) + x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \dots = 1 \quad (3.205)$$

La soluzione generica del PdC sarà data da

$$\tilde{G}(x, y) = \alpha v_1(x) + \beta v_2(x) + \theta(x - y) \left[\frac{v_1(y)v_2(x) - v_1(x)v_2(y)}{W} \right] \quad (3.206)$$

Siccome siamo in presenza di un PdC, a noi serve la **funzione di Green avanzata**, e quindi dobbiamo porre $\alpha = \beta = 0$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \theta(x - y) \left[\frac{v_1(y)v_2(x) - v_1(x)v_2(y)}{W} \right] = \\ &= \theta(x - y) \left[y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] \end{aligned} \quad (3.207)$$

Possiamo quindi andare a calcolare la soluzione

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x dy G(x, y) \left(-y^{-\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{BC} = \\ &= - \int_1^x dy \delta(x - y) \left[x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} \int_1^x dy [\ln(x) - \ln(y)] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} \left[\ln(x) \int_1^x dy + \int_1^x dy \ln(y) \right] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\ln(x)(x - 1) - [y(\ln(y) - 1)]_1^x] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\ln(x)(x - 1) - x(\ln(x) - 1) - 1] = \\ &= -x^{\frac{1}{2}} [\cancel{x \ln(x)} - \ln(x) - \cancel{x \ln(x)} + x - 1] \\ &= x^{\frac{1}{2}} [1 + \ln(x) - x] \end{aligned} \quad (3.208)$$

\downarrow

$$u(x) = x^{-\frac{3}{2}} v(x) = \frac{1}{x} [1 + \ln(x) - x] \quad (3.209)$$

\downarrow

$$f(x) = u(x) + 1 = \frac{1 + \ln(x)}{x} \quad (3.210)$$

Verifichiamo la bontà della soluzione trovata

$$\dot{f}(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2} \quad ; \quad \ddot{f}(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x^3} \quad (3.211)$$

\downarrow

$$\begin{cases} \dot{f}(1) = -\frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \\ f(1) = \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{le BC sono rispettate} \quad (3.212)$$

$$\cancel{x^2} \frac{2 \ln(x) - 1}{\cancel{x^3}} - 3 \cancel{x} \frac{\ln(x)}{\cancel{x^2}} + \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0 \rightarrow \frac{1}{x} [\cancel{2 \ln(x)} - \cancel{3 \ln(x)} + \ln(x) - \cancel{1} + \cancel{1}] = 0 \quad \leftarrow \quad \text{ok} \quad (3.213)$$

3.3.7 Esempio 5: prova d'esame (Alessandro Marcelli)

Sia il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 \ddot{f}(x) - x \dot{f}(x) + f(x) = x^2 \\ \dot{f}(1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad (3.214)$$

Si richiede di calcolare

1. la funzione di Green del problema
2. la soluzione della non omogenea col metodo di Green per $x \geq 1$

Iniziamo passando l'equazione in **forma omogenea** (omettiamo la dipendenza da x per snellire la notazione)

$$f(x) = A(x)v(x) \rightarrow f = Av \quad (3.215)$$

\downarrow

$$\dot{f} = \dot{A}v + A\dot{v} \rightarrow \ddot{f} = \ddot{A}v + 2\dot{A}\dot{v} + A\ddot{v}$$

\downarrow

$$x^2 \ddot{A}v + 2x^2 \dot{A}\dot{v} + x^2 A\ddot{v} - x\dot{A}v - xA\dot{v} + Av = x^2$$

\downarrow

$$x^2 \ddot{A}v + x(2x\dot{A} - A)\dot{v} + (x^2 \ddot{A} - x\dot{A} + A)v = x^2$$

\downarrow

$$2x\dot{A} - A = 0 \rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{A}{2x} \rightarrow \int dA \frac{1}{A} = \int dx \frac{1}{2x} = \ln(A) = \ln(\sqrt{x})$$

\downarrow

$$A = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \dot{A} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \ddot{A} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

\downarrow

$$x^{\frac{5}{2}}\ddot{v} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} = x^2$$

\downarrow

$$\ddot{v} + \frac{1}{4}x^{-2}v = x^{-\frac{1}{2}} \quad (3.216)$$

Cominciamo col risolvere l'omogenea:

$$\ddot{v} + \frac{1}{4}x^{-2}v = 0 \quad (3.217)$$

Siamo in presenza di un'equazione di eulero, visto che

$$\ddot{v} + \frac{a}{x}\dot{v} + \frac{b}{x^2}v = 0 \quad ; \quad a = 0, \quad b = \frac{1}{4} \quad (3.218)$$

\downarrow

$$\ddot{v} + \frac{1}{4x^2}v = 0 \quad (3.219)$$

Possiamo quindi fare l'Ansatz $v = x^\alpha$, ottenendo

$$\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \frac{1}{4}x^{\alpha-2} = 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0 \quad (3.220)$$

Siccome $\Delta = 0$ avremo una sola soluzione in $\alpha = \frac{1}{2}$. Ci conviene quindi trasformare l'equazione con il cambio di variabile $x = e^t$, dove otteniamo

$$\frac{dv}{dx} = e^{-t} \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = e^{-2t} \frac{d^2v}{dt^2} - e^{-2t} \frac{dv}{dt} \quad (3.221)$$

$$\downarrow$$

$$e^{-2t} \left[\frac{d^2v}{dt^2} - (a-1) \frac{dv}{dt} + bv \right] = 0 \quad (3.222)$$

nel nostro caso $a = 0$, quindi

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + \frac{v}{4} = 0 \quad (3.223)$$

Il nostro Ansatz diventa $v = x^\alpha = (e^t)^\alpha = e^{\alpha t}$ e otteniamo le due soluzioni

$$v_1 = e^{\alpha t} \quad ; \quad v_2 = t e^{\alpha t} \quad (3.224)$$

Che, tornando nella variabile originale diventano

$$v_1 = x^\alpha \quad ; \quad v_2 = x^\alpha \ln(x) \quad (3.225)$$

Nel nostro caso saranno quindi

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad v_2 = x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \quad (3.226)$$

$$\downarrow$$

$$v_{om} = x^{\frac{1}{2}} (A + B \ln(x)) \quad (3.227)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{v}_{om} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} A + B \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} A + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} B = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (A + 3B)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} v_{om}(1) = 0 \\ \dot{v}_{om}(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (A + B \ln(1)) = 0 \rightarrow A = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} (A + 3B) = 0 \rightarrow B = 0 \end{cases} \quad (3.228)$$

La soluzione omogenea è nulla, e posso quindi usare il **teorema di Green**.

Iniziamo calcolando il **Wronskiano**

$$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln(x) + x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ln(x) + 1 - \frac{1}{2} \ln(x) = 1 \quad (3.229)$$

Andiamo ora calcolare la **funzione di Green avanzata** del problema

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \theta(x - y) \left[\frac{v_1(y)v_2(x) - v_1(x)v_2(y)}{W} \right] = \\ &= \theta(x - y) \left[y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] \end{aligned} \quad (3.230)$$

Possiamo ora andare a calcolare la soluzione particolare

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x dy \, G(x, y) \cdot y^2 = \\ &= \int_1^x dy \left[y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \ln(x) - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \ln(y) \right] y^2 = \\ &= x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \int_1^x dy \, y^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \int_1^x dy \, y^{\frac{5}{2}} \ln(y) = \\ &= x^{\frac{1}{2}} \ln(x) \left. \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right|_1^x + \end{aligned} \quad (3.231)$$

3.4 Equazioni Differenziali Ordinarie Complesse (Alessandro Marcelli)

3.4.1 Spunti di teoria

3.4.1.1 Concetti introduttivi

Per iniziare il discorso, consideriamo il seguente problema di Cauchy del 1o ordine

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = p(x)u(x) \\ u(x) = u_0 \end{cases} \quad (3.232)$$

Sappiamo che la soluzione sarà data da

$$u(x) = u_0 \cdot \exp\left(-\int_0^x d\xi p(\xi)\right) \quad (3.233)$$

Se prolunghiamo sui complessi e sviluppiamo in serie la $p(\xi)$ otteniamo

$$p(\xi) = \sum_k c_k \xi^k \quad (3.234)$$

\downarrow

$$\int d\xi p(\xi) = \sum_{k \neq -1} c_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} + c_{-1} \ln(\xi) \quad (3.235)$$

Avremo due casi

1. $p(\xi)$ non possiede singolarità, e allora l'unica soluzione possibile è la 3.233
2. $p(\xi)$ presenta dei poli, e allora abbiamo due scenari possibili
 - (a) $c_{-1} \neq 0 \implies$ la soluzione è proporzionale a 3.233 e ha una **singolarità algebrica** dell'origine
 - (b) $c_{-2} \neq 0 \implies$ la soluzione ha una **singolarità essenziale** nell'origine

La presenza di poli rovina l'unicità della soluzione

Ci concentriamo in questo corso nello studio di equazioni "standard" nella forma

$$\frac{d^2}{dz^2}u(z) + p(z)\frac{d}{dz}u(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.236)$$

Preso un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, esso viene classificato come

1. **punto regolare** dell'equazione se sia $p(z)$ che $q(z)$ sono analitiche in esso
2. **punto singolare** dell'equazione se non lo sono

3.4.1.2 Punti regolari e soluzione per serie

Sia il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \\ \dot{u}(z_0) = c_1 \\ u(z_0) = c_0 \end{cases} \quad (3.237)$$

e sia z_0 un punto regolare dell'equazione.

Vogliamo dimostrare come in un intorno $|z - z_0| < r_0$ la soluzione sia unica e come sia possibile determinarla con un procedimento iterativo.

Sappiamo come sia possibile trattare i problemi al 2o ordine come combinazione di problemi al 1o ordine. riscriviamo quindi

$$\begin{cases} \dot{v}(z) = -p(z)v(z) - q(z)u(z) \\ \dot{u}(z) = v(z) \\ v(z_0) = c_1 = \dot{u}(z_0) \\ u(z_0) = c_0 \end{cases} \quad (3.238)$$

Questo è un caso particolare dove la dimostrazione passerebbe per la condizione di lipschitzianità invece che per quella di analiticità.

Integriamo formalmente le prime due equazioni, e otteniamo

$$v(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)v(\zeta) - q(\zeta)u(\zeta)] \quad (3.239)$$

$$u(z) = u(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta v(\zeta) \quad (3.240)$$

Andiamo ora a sostituire funzioni costanti pari ai valori di $v(z_0)$ e $u(z_0)$ negli integrali

$$v_1(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)v_0 - q(\zeta)u_0] \quad (3.241)$$

$$u_1(z) = u(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta v_0 \quad (3.242)$$

Al passo successivo, poniamo $u_0 = u_1$ e $v_0 = v_1$ e ripetiamo

$$v_2(z) = v_1(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)v_1(\zeta) - q(\zeta)u_1(\zeta)] \quad (3.243)$$

$$u_2(z) = u_1(z_0) + \int_{z_0}^z d\zeta v_1(\zeta) \quad (3.244)$$

Siccome in $z = z_0$ i termini integrali spariscono, avremo in tutte le iterazioni che

$$v_n(z_0) = v_0 \quad (3.245)$$

$$u_n(z_0) = u_0 \quad (3.246)$$

e possiamo quindi riscrivere

$$v_2(z) = v_0 + \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)v_1(\zeta) - q(\zeta)u_1(\zeta)] \quad (3.247)$$

$$u_2(z) = u_0 + \int_{z_0}^z d\zeta v_1(\zeta) \quad (3.248)$$

↓

...

↓

$$v_n(z) = v_0 + \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)v_{n-1}(\zeta) - q(\zeta)u_{n-1}(\zeta)] \quad (3.249)$$

$$u_n(z) = u_0 + \int_{z_0}^z d\zeta v_{n-1}(\zeta) \quad (3.250)$$

Osserviamo come

$$u_n(z) = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) \quad (3.251)$$

I termini n-simi possono essere quindi interpretati come somme parziali di ordine n

$$v_n(z) = v_0 + \sum_{k=1}^n [v_k(z) - v_{k-1}(z)] \quad (3.252)$$

$$u_n(z) = u_0 + \sum_{k=1}^n [u_k(z) - u_{k-1}(z)] \quad (3.253)$$

Vogliamo quindi dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = u(z) \quad (3.254)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) = v(z) \quad (3.255)$$

$$u(z), v(z) \quad \text{analitiche} \quad (3.256)$$

Definite le due grandezze

$$M = \max(|p|, |q|) \quad (3.257)$$

$$m > \max(|u_0|, |v_0|) \quad (3.258)$$

Confrontandole con le espressioni di $u_1(z)$ e $v_1(z)$ otteniamo

$$|u_1(z) - u_0| \leq m|z - z_0| \quad (3.259)$$

$$|v_1(z) - v_0| \leq 2Mm|z - z_0| \quad (3.260)$$

Definendo

$$M_1 = \max(m, 2Mm) \quad (3.261)$$

Possiamo maggiorare come

$$|u_1(z) - u_0| \leq M_1|z - z_0| \quad (3.262)$$

$$|v_1(z) - v_0| \leq M_1|z - z_0| \quad (3.263)$$

Passando all'iterazione successiva avremo

$$u_2(z) - u_1(z) = \left(\mathcal{U}_0 + \int_{z_0}^z d\zeta v_1(\zeta) \right) - \left(\mathcal{U}_0 + \int_{z_0}^z d\zeta v_0(\zeta) \right) = \int_{z_0}^z d\zeta [v_1(\zeta) - v_0(\zeta)] \quad (3.264)$$

E analogamente avremo

$$v_2(z) - v_1(z) = \int_{z_0}^z d\zeta [-p(\zeta)(v_1(\zeta) - v_0) - q(\zeta)(u_1(\zeta) - u_0)] \quad (3.265)$$

Anche qui possiamo quindi maggiorare come

$$u_2(z) - u_1(z) = M_1 \int_{z_0}^z d\zeta [\zeta - z_0] \quad (3.266)$$

$$v_2(z) - v_1(z) = 2M_1m \int_{z_0}^z d\zeta [\zeta - z_0] \quad (3.267)$$

Anche qui possiamo maggiorare con

$$M_2 = \max(M_1, 2M_1m) \quad (3.268)$$

\downarrow

$$M_1 \int_{z_0}^z d\zeta [\zeta - z_0] \leq M_2 \frac{|z - z_0|^2}{2} = M_2 \frac{r^2}{2} \quad (3.269)$$

Da cui possiamo scrivere

$$|u_2(z) - u_1(z)| \leq M_n \frac{r^n}{n!} \quad (3.270)$$

$$|v_2(z) - v_1(z)| \leq M_n \frac{r^n}{n!} \quad (3.271)$$

Se adesso riprendiamo la

$$u_n(z) = u_0 + \sum_{k=1}^n [u_k(z) - u_{k-1}(z)] \quad (3.272)$$

Possiamo riscrivere

$$|u_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{(Mr)^n}{n!} \quad (3.273)$$

Stesso discorso facciamo per $v(z)$.

Esiste quindi per forza un r_0 tale per cui la serie converge in modo assoluto e uniforme, e che quindi definisce una funzione analitica.

Possiamo quindi ridefinire la $u(z)$ tramite la sua espansione di taylor come

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ \dot{u}(z_0) = v_0 = c_1 \\ u(z_0) = u_0 = c_0 \end{cases} \quad (3.274)$$

Da qui non ci resta che ricavare i coefficienti. Esplicitiamo i termini e sostituiamo

$$\begin{aligned} u(z) &= c_0 + c_1(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= u_0 + v_0(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (3.275)$$

↓

$$\dot{u}(z) = v_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \quad (3.276)$$

↓

$$\ddot{u}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) (z - z_0)^{n-2} \quad (3.277)$$

Sostituiamo nell'equazione generale e otteniamo

$$\ddot{u}(z) = -p(z)\dot{u}(z) - q(z)u(z) \quad (3.278)$$

↓

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) (z - z_0)^{n-2} = -p(z) \left(v_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \right) - q(z) \left(u_0 + v_0(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right)$$

↓

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) (z - z_0)^{n-2} &= -p(z)v_0 - q(z)[u_0 + v_0(z - z_0)] + \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} c_n [np(z)(z - z_0)^{n-1} + q(z)(z - z_0)^n] \end{aligned} \quad (3.279)$$

Per comodità ripetiamo qui la 3.279

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2} = -p(z)v_0 - q(z)[u_0 + v_0(z-z_0)] + \\ - \sum_{n=2}^{\infty} c_n [np(z)(z-z_0)^{n-1} + q(z)(z-z_0)^n] \quad (3.280)$$

Si procede quindi per confronto, trovando

$$n=2 \rightarrow c_2 \cdot 2 \cdot (2-1)(z-z_0)^{2-2} = 2c_2 \quad (3.281)$$

A dx della 3.279 non abbiamo alcun termine corrispondente, ergo

$$c_2 = 0 \quad (3.282)$$

Procediamo e troviamo

$$n=3 \rightarrow c_3 \cdot 3 \cdot (3-1)(z-z_0)^{3-2} = 6c_3(z-z_0) \quad (3.283)$$

A dx troviamo che il termine corrispondente è

$$-q(z)v_0(z-z_0) \quad (3.284)$$

E dunque per confronto

$$6c_3 \cancel{(z-z_0)} = -q(z)v_0 \cancel{(z-z_0)} \quad (3.285)$$

↓

$$c_3 = -\frac{v_0}{6}q(z) \quad (3.286)$$

Proseguiamo imperterriti a mazzetta fino a trovare relazioni ricorrenti tra i coefficienti, e otteniamo così il nostro sviluppo in serie.

3.4.1.3 Punti singolari

Per costruzione, le singolarità di una EDO della forma

$$\ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.287)$$

devono coincidere con quelle delle funzioni $p(z)$ e $q(z)$, esono divise in due categorie

1. punti **singolari regolari** (anche detti **inessenziali** o **fuchsiani**).

Sono particolarmente importanti quelli in cui le soluzioni non presentano singolarità essenziali.

2. punti **singolari irregolari**

Concentriamoci un attimo sul caso di un punto singolare regolare z_0 . Le soluzioni che possono essere trovate intorno ad esso di base non saranno in generale monodrome, e qualora si applichi un prolungamento ci troveremo ad avere

$$(z-z_0) \rightarrow (z-z_0)e^{2\pi i} \quad (3.288)$$

$$u_1(z) \rightarrow U_1(z) \quad (3.289)$$

$$u_2(z) \rightarrow U_2(z) \quad (3.290)$$

Sappiamo però che $u_1(z)$ e $u_2(z)$ sono linearmente indipendenti, e formano quindi una base nello spazio delle soluzioni.

Di conseguenza possiamo scrivere

$$\begin{cases} U_1(z) = a_{11}u_1(z) + a_{12}u_2(z) \\ U_2(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z) \end{cases} \quad (3.291)$$

\downarrow

$$\begin{pmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} \quad (3.292)$$

Si può dimostrare come

$$W(U_1, U_2) = \det(A) \cdot W(u_1, u_2) \quad (3.293)$$

La matrice A è non singolare e dipende dalla polidromia di $u_1(z)$ e $u_2(z)$. Come di consueto gli autovalori si ricavano dall'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad (3.294)$$

e possono essere distinti o coincidenti.

A noi interessa trovare una base dove le polidromie in gioco siano le più semplici possibili.

Questo si traduce nello scegliere una base che renda o diagonale o di Jordan (diagonale a blocchi) la matrice A . Andiamo a studiare i due possibili casi.

3.4.1.3.1 Soluzioni per autovalori di A non coincidenti

Sia il caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, in questo caso possiamo porre

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} U_1 = \lambda_1 u_1 \\ U_2 = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad (3.295)$$

Definita la polidromia delle potenze

$$(z - z_0)^{\rho_i} \rightarrow (z - z_0)^{\rho_i} e^{2\pi i \rho_i} \quad (3.296)$$

Possiamo estenderla alle soluzioni imponendo

$$\rho_i = \frac{\ln(\lambda_i)}{2\pi i} \quad (3.297)$$

questo rende infatti monodrome le funzioni

$$f_i(z) = \frac{u_i(z)}{(z - z_0)^{\rho_i}} \quad (3.298)$$

E quindi, ricordando che z_0 è una singolarità essenziale, possiamo espandere in esso le $f_i(z)$ in serie di Laurent, ottenendo

$$f_i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k = \frac{u_i(z)}{(z - z_0)^{\rho_i}} \quad (3.299)$$

\downarrow

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \end{cases} \quad (3.300)$$

3.4.1.3.2 Soluzioni per autovalori di A coincidenti

Se invece ci troviamo nel caso $\lambda_1 = \lambda_2$ non è detto che possiamo riscrivere la matrice in forma diagonale. Possiamo però ricondurci ad una matrice inferiore di Hessemberg del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ b_{21} & \lambda_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} U_1(z) = \lambda_1 u_1(z) \\ U_2(z) = b_{21} u_1(z) + \lambda_1 u_2(z) \end{cases} \quad (3.301)$$

Riprendendo le funzioni definite prima, in questo caso vale ancora la monodromia per

$$f_1(z) = \frac{u_1(z)}{(z - z_0)^{\rho_1}} \quad (3.302)$$

Invece per l'altra possiamo procedere nel seguente modo

$$\frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{b_{21} u_1(z) + \lambda_1 u_2(z)}{\lambda_1 u_1(z)} = \frac{b_{21}}{\lambda_1} + \frac{u_2(z)}{u_1(z)} \quad (3.303)$$

Possiamo quindi affermare che il rapporto dei due vettori della base esibisce le stesse proprietà di polidromia del logaritmo (perché? cercare su appunti o scocciare paolo), e quindi possiamo definire la funzione monodroma

$$g(z) = \frac{u_2(z)}{u_1(z)} - \frac{b_{21}}{\lambda_1} \cdot \frac{\ln(z - z_0)}{2\pi i} \quad (3.304)$$

che possiamo espandere in serie di Laurent intorno a z_0

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k (z - z_0)^k = \frac{u_2(z)}{u_1(z)} - A \ln(z - z_0) \quad ; \quad A = \frac{b_{21}}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \quad (3.305)$$

↓

$$\frac{u_2(z)}{u_1(z)} = A \ln(z - z_0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k (z - z_0)^k$$

↓

$$u_2(z) = u_1(z) \cdot \left[A \ln(z - z_0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k (z - z_0)^k \right]$$

↓

$$u_2(z) = A \ln(z - z_0) u_1(z) + u_1(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k (z - z_0)^k$$

↓

$$u_2(z) = A \ln(z - z_0) u_1(z) + (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k (z - z_0)^k$$

↓ applico il prodotto di Cauchy?

$$u_2(z) = A \ln(z - z_0) u_1(z) + (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^k c_k d_i (z - z_0)^{k+i}$$

↓

$$u_2(z) = A \ln(z - z_0) u_1(z) + (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k (z - z_0)^k \quad (3.306)$$

3.4.1.3.3 Punti singolari regolari e teorema di Fuchs

Qualora z_0 sia un punto singolare regolare della funzione, e quindi non essenziale, le serie di Laurent devono troncarsi ad una potenza finita negativa. Dovremo quindi riscrivere, nel caso di autovalori non coincidenti

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\tilde{\rho}_1} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\tilde{\rho}_2} \sum_{n=-M}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \end{cases} \quad (3.307)$$

Sfruttando le proprietà di polidromia, sappiamo che possiamo porre

$$\tilde{\rho}_i = \rho_i + n_i \quad ; \quad \begin{cases} n_1 = N \\ n_2 = M \end{cases} \in \mathbb{N} \quad (3.308)$$

in modo che

1. essa sia contenuta tutta nei prefattori esterni alla somma
2. la coda della serie di Laurent venga eliminata

e possiamo quindi riscrivere

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases} \quad (3.309)$$

\downarrow

$$\begin{cases} u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho_1} \\ u_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^{k+\rho_2} \end{cases} \quad (3.310)$$

Allargando il discorso al caso di autovalori coincidenti, possiamo scrivere

$$\begin{cases} u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho_1} \\ u_2(z) = A \ln(z - z_0) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho_1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k+\rho_1} \end{cases} \quad (3.311)$$

\downarrow

$$\begin{cases} u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho_1} \\ u_2(z) = A \ln(z - z_0) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho_1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k+\rho_1} \end{cases} \quad (3.312)$$

Se andiamo a riprendere la forma generale della EDO

$$\ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.313)$$

a partire dalla forma delle soluzioni possiamo ricavare la forma dei coefficienti:

1. Possiamo ricavare $q(z)$ direttamente dalla EDO

$$q(z) = -\frac{\ddot{u}_1(z)}{u_1(z)} - p(z)\frac{\dot{u}_1(z)}{u_1(z)} \quad (3.314)$$

2. Invece $p(z)$ dall'equazione di Liouville che abbiamo introdotto in precedenza

$$\dot{W} + p(z)W = 0 \quad (3.315)$$

\downarrow

$$p(z) = -\frac{\dot{W}}{W}$$

\downarrow

$$p(z) = -\frac{u_1(z)\ddot{u}_2(z) - u_2(z)\ddot{u}_1(z)}{u_1(z)\dot{u}_2(z) - u_2(z)\dot{u}_1(z)} \quad (3.316)$$

Detto questo, prendiamo in esame il caso degli autovalori non coincidenti.

Riscrivendo per comodità le soluzioni come

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} R_1(z) \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} R_2(z) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} R_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ R_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases} \quad (3.317)$$

E andiamo a calcolarne le derivate prime e seconde

$$\dot{u}_i(z) = \rho_i (z - z_0)^{\rho_i-1} R_i(z) + (z - z_0)^{\rho_i} \dot{R}_i(z) \quad (3.318)$$

↓

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(z) &= (z - z_0)^{\rho_i-1} \cdot [\rho_i R_i(z) + (z - z_0) \dot{R}_i(z)] = \\ &= (z - z_0)^{\rho_i-1} \cdot \tilde{R}_i(z) \end{aligned} \quad (3.319)$$

↓ ripetendo il procedimento

$$\ddot{u}_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i-2} \cdot \tilde{\tilde{R}}_i(z) \quad (3.320)$$

Siamo così andati a definire le funzioni $R_i(z)$, $\tilde{R}_i(z)$, $\tilde{\tilde{R}}_i(z)$ che in z_0 sono

1. analitiche
2. mai nulle

Se quindi ad esempio prendiamo la 3.316 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{(z - z_0)^{\rho_1+\rho_2-2} (R_1(z) \tilde{\tilde{R}}_2(z) - R_2(z) \tilde{\tilde{R}}_1(z))}{(z - z_0)^{\rho_1+\rho_2-1} (R_1(z) \tilde{R}_2(z) - R_2(z) \tilde{R}_1(z))} = \\ &= (z - z_0)^{-1} \frac{R_1(z) \tilde{\tilde{R}}_2(z) - R_2(z) \tilde{\tilde{R}}_1(z)}{R_1(z) \tilde{R}_2(z) - R_2(z) \tilde{R}_1(z)} \\ &\downarrow \\ p(z) &= \frac{P(z)}{z - z_0} \quad ; \quad P(z) = \frac{R_1(z) \tilde{\tilde{R}}_2(z) - R_2(z) \tilde{\tilde{R}}_1(z)}{R_1(z) \tilde{R}_2(z) - R_2(z) \tilde{R}_1(z)} \end{aligned} \quad (3.321)$$

E in modo analogo troviamo

$$\begin{aligned} q(z) &= -\frac{(z - z_0)^{\rho_1-2} \cdot \tilde{\tilde{R}}_1(z)}{(z - z_0)^{\rho_1} R_1(z)} - p(z) \frac{(z - z_0)^{\rho_1-1} \cdot \tilde{R}_1(z)}{(z - z_0)^{\rho_1} R_1(z)} = \\ &= -\frac{1}{(z - z_0)^2} \cdot \frac{\tilde{\tilde{R}}_1(z)}{R_1(z)} - \frac{P(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{\tilde{R}_1(z)}{R_1(z)} = \\ &= -\frac{1}{(z - z_0)^2} \cdot \left[\frac{\tilde{\tilde{R}}_1(z)}{R_1(z)} - P(z) \cdot \frac{\tilde{R}_1(z)}{R_1(z)} \right] = \\ &\downarrow \\ q(z) &= \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2} \quad ; \quad Q(z) = P(z) \cdot \frac{\tilde{R}_1(z)}{R_1(z)} - \frac{\tilde{\tilde{R}}_1(z)}{R_1(z)} \end{aligned} \quad (3.322)$$

Per costruzione, sia $P(z)$ che $Q(z)$ sono analitiche, e quindi

1. $p(z)$ ha al massimo un polo singolo
2. $q(z)$ ha al massimo un polo doppio

Possiamo quindi enunciare il **Teorema di Fuch:** *presa una EDO nella forma*

$$\ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.323)$$

un punto z_0 si dice **singolare regolare o fuchsiano** se e solo se valgono le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} p(z)(z - z_0) = p_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} q(z)(z - z_0)^2 = q_0 \end{cases} \quad ; \quad p_0, q_0 \text{ costanti} \quad (3.324)$$

Questo significa che le EDO oggetto di studio di questo corso, in presenza di punti fuchsiani assumono la forma

$$\ddot{u}(z) + \frac{P(z - z_0)}{z - z_0} \cdot \dot{u}(z) + \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^2} \cdot u(z) = 0 \quad (3.325)$$

Dobbiamo dimostrare che

1. i coefficienti siano determinati a partire dalla EDO
2. le serie corrispondenti siano convergenti

3.4.1.3.3.1 Verifica dei coefficienti

Poniamo $\xi = z - z_0$ ed espandiamo secondo Taylor in $\xi = 0$ le due funzioni analitiche

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \xi^k \quad ; \quad Q(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \xi^k \quad (3.326)$$

Prendiamo ora un Ansatz generico

$$u(z) = \xi^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k \quad (3.327)$$

\downarrow

$$\begin{cases} \dot{u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) \xi^{k+\rho-1} \\ \ddot{u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(k + \rho - 1) \xi^{k+\rho-2} \end{cases} \quad (3.328)$$

Arriviamo così a riscrivere

$$\ddot{u}(\xi) + \frac{P(\xi)}{\xi} \cdot \dot{u}(\xi) + \frac{Q(\xi)}{\xi^2} \cdot u(z) = 0 \quad (3.329)$$

\downarrow

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(k + \rho - 1) \xi^{k+\rho-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) \xi^{k+\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{k+\rho} = 0$$

\downarrow

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(k + \rho - 1) \xi^{k+\rho-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) \xi^{k+\rho-2} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{k+\rho-2} = 0 \quad (3.330)$$

Come anche in precedenza, ci appoggiamo al prodotto di Cauchy e definendo l'indice $l = n + k$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) \xi^{k+\rho-2} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l p_n c_k (l - n + \rho) \xi^{l+\rho-2} \quad (3.331)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{k+\rho-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l q_n c_l \xi^{l+\rho-2} \quad (3.332)$$

E sfruttando il fatto che l e k sono indici muti, possiamo raggruppare tutto sotto l'unica sommatoria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k (k + \rho) (k + \rho - 1) + \sum_{n=0}^l (p_n c_{k-n} (k - n + \rho) + q_n c_{k-n}) \right] \xi^{l+\rho-2} = 0 \quad (3.333)$$

Da questo ricaviamo l'espressione ricorsiva dei coefficienti, data da

$$c_k (k + \rho) (k + \rho - 1) + \sum_{n=0}^l (p_n c_{k-n} (k - n + \rho) + q_n c_{k-n}) = 0 \quad (3.334)$$

Ci si presentano due casi

1. $c_0 = 0$

In questo caso otteniamo la soluzione identicamente nulla

2. $c_0 \neq 0$

In questo caso per $k = 0$ otteniamo la cosiddetta **equazione indiciale**, indipendente dai c_k

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \quad (3.335)$$

grazie alla quale possiamo ricavare gli indici ρ_1 e ρ_2 dell'equazione.

Definiamo ora

$$\begin{cases} F_0(\rho) = \rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0 \\ F_n(\rho) = \rho p_n + q_n \end{cases} \quad (3.336)$$

questo ci permette di riscrivere la 3.334 come

$$c_0 F_0(\rho) = 0 \quad (3.337)$$

$$c_1 F_0(\rho + 1) + c_0 F_1(\rho) = 0 \quad (3.338)$$

$$c_2 F_0(\rho + 2) + c_1 F_0(\rho + 1) + c_0 F_2(\rho) = 0 \quad (3.339)$$

...

$$c_n F_0(\rho + n) + c_{n-1} F_0(\rho + n - 1) + \dots + c_1 F_n(\rho + 1) + c_0 F_1(\rho) = 0 \quad (3.340)$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

(a) $\rho_i \neq \rho_j + n \quad ; \quad i, j, n \in N$

In questo caso $F_0(\rho_1 + n)$ è sempre non nullo in quanto l'argomento non può essere soluzione dell'equazione indiciale.

Quindi il sistema determina completamente

- i. i coefficienti c_k di u_1 con indice ρ_1
- ii. i coefficienti d_k di u_2 con indice ρ_2

- (b) $\rho_i = \rho_j + n$; $i, j, n \in N$ In questo caso bisogna cambiare Ansatz per la soluzione, altrimenti da ρ_2 in poi i termini vanno ad annullarsi in cascata.

Dobbiamo quindi passare per il metodo del Wronskiano passando per l'Ansatz

$$u_2(z) = A \ln(z) u_1(z) + z^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (3.341)$$

e ricavando le relazioni ricorsive per i coefficienti b_k e A , quest'ultimo può essere anche nullo.

3.4.1.3.3.2 Convergenza delle serie

Consideriamo un intorno di z_0 di raggio r compreso nel dominio di analiticità delle $P(\xi)$ e $Q(\xi)$. Abbiamo visto come possono essere espanse secondo Taylor

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \xi^k \quad (3.342)$$

$$Q(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \xi^k \quad (3.343)$$

Possiamo utilizzare la **formula di Cauchy** per riscrivere i coefficienti come

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k P(\xi)}{d\xi^k} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi \frac{P(\xi)}{\xi^{k+1}} \quad (3.344)$$

$$q_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k Q(\xi)}{d\xi^k} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi \frac{Q(\xi)}{\xi^{k+1}} \quad (3.345)$$

Per il **teorema del massimo modulo** sappiamo che

$$|p_k| \leq \frac{\max |P|}{r^k} = M_p \quad (3.346)$$

$$|q_k| \leq \frac{\max |Q|}{r^k} = M_q \quad (3.347)$$

$$|F_k(\rho)| = |\rho_1 p_k + q_k| \leq \frac{\max |\rho_1 P + Q|}{r^k} = M_f \quad (3.348)$$

Definendo

$$M = \max(M_p, M_q, M_f) \quad (3.349)$$

sappiamo per certo che per $r < r_0$ avremo

$$|p_k|, |q_k|, |F_k(\rho_1)| \leq \frac{M}{r^k} \quad (3.350)$$

e possiamo quindi enunciare il **teorema**: *data una serie i cui coefficienti sono definibili tramite la 3.334*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k \quad (3.351)$$

i coefficienti soddisferanno la relazione

$$|c_k| \leq c_0 \left(\frac{M}{r} \right)^k \quad (3.352)$$

e di conseguenza la serie avrà raggio di convergenza finito

$$R = \frac{r}{M} \quad (3.353)$$

Iniziamo notando come per ipotesi

$$\rho_1 \neq \rho_2 + n \quad (3.354)$$

\downarrow

$$\begin{cases} F_0(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \\ F_0(\rho_1 + k) = (\rho_1 + k - \rho_1)(\rho_1 + k - \rho_2) = k(k + s) \end{cases} \quad ; \quad s = \rho_1 - \rho_2 \quad (3.355)$$

E dimostriamo il teorema per induzione

1. $k = 1$

$$|c_1| = |c_0| \frac{|F_1(\rho_1)|}{|F_0(\rho_1 + 1)|} \leq \frac{M}{r} \frac{|c_0|}{|s + 1|} \leq |c_0| \frac{M}{r} \quad (3.356)$$

2. Supponiamo che il teorema sia valido fino a $n - 1$

3. $k = n$

$$c_n F_0(\rho + n) + \sum_{l=1}^n c_{n-l} F_l(\rho + n - l) = 0 \quad (3.357)$$

\downarrow

$$c_n = - \frac{\sum_{l=1}^n c_{n-l} F_l(\rho + n - l)}{F_0(\rho + n)}$$

\downarrow

$$|c_n| \leq \frac{\sum_{l=1}^n |c_{n-l}| |F_l(\rho + n - l)|}{|n(n + s)|} \quad (3.358)$$

Siccome abbiamo che

$$\begin{aligned} |F_l(n - l + \rho_l)| &= |(n - l + \rho_1)p_l + q_l| = \\ &= |(n - l)p_l + (\rho_1 p_l + q_l)| = \\ &= |(n - l)p_l + F_1(\rho_1)| \leq \\ &\leq (n - l)|p_l| + |F_1(\rho_1)| \leq \\ &\leq (n - l) \frac{M^l}{r^l} + \frac{M^l}{r^l} \end{aligned} \quad (3.359)$$

\downarrow

$$|F_l(n - l + \rho_l)| \leq (n - l + 1) \cdot \frac{M^l}{r^l} \quad (3.360)$$

Utilizzando le relazioni

$$\sum_{l=1}^n (n - l + 1) = (n + 1) \sum_{l=1}^n 1 - \sum_{l=1}^n l = (n + 1)n - \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (3.361)$$

$$n(n + s) = n^2 + ns > n^2 \quad (3.362)$$

Otteniamo così la tesi

$$\begin{aligned}
 |c_n| &\leq - \sum_{l=1}^n \frac{1}{n(n+s)} [|c_{n-l}| \cdot |F_l(\rho+n-l)|] \leq \\
 &\leq - \frac{1}{n(n+s)} \cdot \sum_{l=1}^n \left[|c_{n-l}| \cdot (n-l+1) \cdot \frac{M^l}{r^l} \right] \leq \\
 &\leq - \frac{1}{n(n+s)} \cdot \sum_{l=1}^n \left[|c_0| \frac{M^{n-l}}{r^{n-l}} \cdot (n-l+1) \cdot \frac{M^l}{r^l} \right] \tag{3.363}
 \end{aligned}$$

↓

$$|c_n| \leq - \frac{|c_0|}{n(n+s)} \cdot \frac{M^n}{r^n} \cdot \sum_{l=1}^n (n-l+1) \tag{3.364}$$

↓

$$|c_n| \leq - \frac{|c_0|}{\mathcal{N}(n+s)} \cdot \frac{M^n}{r^n} \cdot \frac{\mathcal{N}(n+1)}{2} \tag{3.365}$$

↓

$$\begin{aligned}
 |c_n| &\leq - \frac{|c_0|}{2} \cdot \frac{n+1}{n+s} \cdot \frac{M^n}{r^n} \leq \\
 &\leq - \frac{|c_0|}{2} \cdot \frac{M^n}{r^n} \leq \\
 &\leq - |c_0| \cdot \frac{M^n}{r^n} \tag{3.366}
 \end{aligned}$$

Nota bene: la dimostrazione vale anche per $\rho_i = \rho_j + n$, rispetto alla parte non contenente il logaritmo.

3.4.1.3.4 Punti singolari non regolari

Qualora il punto singolare non sia regolare la situazione si complica. Quello che succede di solito è che riesce a ricavare al massimo uno solo degli indici e quindi una soluzione sola, e non sempre si riesce a dimostrare la convergenza della serie ottenuta, che potrebbe quindi essere asintotica.

La situazione migliora in presenza del fenomeno di **confluenza**, ovvero quando la funzione oggetto di studio che presenta punti irregolari è il limite di funzioni che invece presentano punti regolari. Vederemo un esempio più avanti.

3.4.1.4 Punto all'infinito

Per studiare il comportamento della funzione intorno al punto all'infinito dobbiamo applicare il solito cambio di variabili

$$\eta = \frac{1}{z} \quad (3.367)$$

Che matta il punto nell'origine, e che trasforma le derivate nel seguente modo

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} = -\frac{1}{z^2} \frac{d}{d\eta} = -\eta^2 \frac{d}{d\eta} \quad (3.368)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = -\eta^2 \frac{d}{d\eta} \left(-\eta^2 \frac{d}{d\eta} \right) = \eta^4 \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta^3 \frac{d}{d\eta} \quad (3.369)$$

E quindi la EDO si trasforma nel seguente modo

$$\frac{d^2}{dz^2} u(z) + p(z) \frac{d}{dz} u(z) + q(z) u(z) = 0 \quad (3.370)$$

↓

$$\left[\eta^4 \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta^3 \frac{d}{d\eta} \right] u\left(\frac{1}{\eta}\right) + p\left(\frac{1}{\eta}\right) \left[-\eta^2 \frac{d}{d\eta} \right] u\left(\frac{1}{\eta}\right) + q\left(\frac{1}{\eta}\right) u\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0$$

↓

$$\eta^4 \frac{d^2}{d\eta^2} u\left(\frac{1}{\eta}\right) + \left[2\eta^3 - \eta^2 p\left(\frac{1}{\eta}\right) \right] \frac{d}{d\eta} u\left(\frac{1}{\eta}\right) + q\left(\frac{1}{\eta}\right) u\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0$$

↓ riscrivo in forma normale

$$\frac{d^2}{d\eta^2} u\left(\frac{1}{\eta}\right) + \left[\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p\left(\frac{1}{\eta}\right) \right] \frac{d}{d\eta} u\left(\frac{1}{\eta}\right) + \frac{1}{\eta^4} q\left(\frac{1}{\eta}\right) u\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0 \quad (3.371)$$

Definendo

$$\tilde{p}(\eta) = \frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (3.372)$$

$$\tilde{q}(\eta) = \frac{1}{\eta^4} q\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (3.373)$$

Possiamo riscrivere la 3.371 nella forma a noi nota (ricontrollare la dipendenza di u, scocciare qualcuno)

$$\ddot{u}(\eta) + \tilde{p}(\eta) \dot{u}(\eta) + \tilde{q}(\eta) u(\eta) = 0 \quad (3.374)$$

Ne segue che il punto all'infinito sarà regolare se

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \tilde{p}(\eta) = \text{cost.} \quad (3.375)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \tilde{q}(\eta) = \text{cost.} \quad (3.376)$$

Dalla prima ricaviamo che

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p\left(\frac{1}{\eta}\right) \right] = \text{cost} \quad (3.377)$$

↓ espaniamo $p(\eta^{-1})$ secondo taylor in $\eta = 0$

$$p\left(\frac{1}{\eta}\right) = 2\eta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \eta^k$$

↓

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} p\left(\frac{1}{\eta}\right) = 2$$

↓

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = 2 \quad (3.378)$$

Invece dalla seconda

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^4} q \left(\frac{1}{\eta} \right) \right] = cost. \quad (3.379)$$

↓ espandiamo $q(\eta^{-1})$ secondo taylor in $\eta = 0$

$$q \left(\frac{1}{\eta} \right) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k \eta^k = c_4 \eta^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_k \eta^k$$

↓

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^4} q \left(\frac{1}{\eta} \right) \right] = cost.$$

↓

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = cost. \quad (3.380)$$

Riasumendo, il punto all'infinito è **regolare** se

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = 2 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = cost. \end{cases} \quad (3.381)$$

Allo stesso modo si può arrivare a dire che il punto all'infinito è una **singularità regolare** (ovvero è un **punto fuchsiano**) se

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = cost. \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 q(z) = cost. \end{cases} \quad (3.382)$$

Se non rispetta nessuna di queste, è una **singularità irregolare**.

All'infinito la serie di Taylor diventa una serie di Laurent, e le soluzioni possono scriversi come

$$\begin{cases} u_1(z) = z^{-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ u_2(z) = z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \end{cases} \quad ; \quad \rho_1 \neq \rho_2 + n \quad (3.383)$$

$$\begin{cases} u_1(z) = z^{-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ u_2(z) = z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \alpha \ln(z) u_1(z) \end{cases} \quad ; \quad \rho_1 = \rho_2 + n \quad (3.384)$$

3.4.1.5 Equazioni fuchsiane

Se classificare le equazioni fuchsiane è improponibile, non lo è definirne la forma generale.

Presa una equazione

$$\ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.385)$$

con N punti fuchsiani ξ_i e il punto all'infinito anch'esso singolare regolare, possiamo rappresentarle con la seguente matrice, che esanderemo piu' avanti nel **P-simbolo**

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N & \infty \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N & \mu_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{punti singolari regolari} \\ \leftarrow \text{primi indici relativi a ciascun punto} \\ \leftarrow \text{secondi indici relativi a ciascun punto} \end{array} \quad (3.386)$$

Devono quindi valere in contemporanea sia le condizioni di fuchsianità per gli ξ_i , ovvero

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)p(z) = p_0 \\ \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)^2 q(z) = q_0 \end{cases} \quad ; \quad p_0, q_0 \text{ costanti} \quad (3.387)$$

che quelle per il punto all'infinito

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = \text{cost.} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 q(z) = \text{cost.} \end{cases} \quad (3.388)$$

Da queste ultime notiamo come, parametrizzando la funzione coefficiente $p(z)$ come

$$p(z) = \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^N (z - \xi_i)} \quad (3.389)$$

segue che $P(z)$ debba essere un polinomio di grado $N - 1$ in z , e possiamo riscriverlo tramite il metodo delle frazioni parziali come

$$p(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{z - \xi_i} \quad (3.390)$$

In modo analogo possiamo parametrizzare $q(z)$, tenendo a mente che il limite all'infinito deve avere un comportamento analogo a z^{2N} . Avremo quindi un polinomio di grado $2N - 2$ e possiamo quindi usare la rappresentazione

$$q(z) = \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{(z - \xi_i)^2} + \frac{\sum_{j=0}^{N-2} c_j z^{N-2-j}}{\prod_{i=1}^N (z - \xi_i)} \quad (3.391)$$

Con queste parametrizzazioni le condizioni 3.387 si riscrivono nella forma

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)p(z) = A_i \\ \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)^2 q(z) = B_i \end{cases} \quad (3.392)$$

L'equazione indiciale diventa

$$\rho^2 + (A_i - 1)\rho + B_i = 0 \quad (3.393)$$

In precedenza avevamo trovato

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \quad (3.394)$$

\downarrow

$$(\rho - \alpha_i)(\rho - \beta_i) = 0$$

\downarrow

$$\rho^2 - (\alpha_i + \beta_i)\rho + \alpha_i\beta_i = 0 \quad (3.395)$$

Confrontando le due otteniamo

$$\begin{cases} A_i = 1 - \alpha_i - \beta_i \\ B_i = \alpha_i \beta_i \end{cases} \quad (3.396)$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra EDO come

$$\ddot{u}(z) + p(z)\dot{u}(z) + q(z)u(z) = 0 \quad (3.397)$$

↓

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{z - \xi_i} \right] \dot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^N \frac{B_i}{(z - \xi_i)^2} + \frac{\sum_{j=0}^{N-2} c_j z^{N-2-j}}{\prod_{i=1}^N (z - \xi_i)} \right] u(z) = 0$$

↓

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^N \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - \xi_i} \right] \dot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i \beta_i}{(z - \xi_i)^2} + \frac{\sum_{j=0}^{N-2} c_j z^{N-2-j}}{\prod_{i=1}^N (z - \xi_i)} \right] u(z) = 0 \quad (3.398)$$

Andiamo ora ad analizzare l'equazione indiciale intorno al punto all'infinito. Appoggiandoci all'Ansatz $u(z) = z^{-\mu}$ e tenendo solo l'andamento dominante otteniamo

$$\mu^2 + \left[\sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i) + (1 - N) \right] \mu + \left[c_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i \right] = 0 \quad (3.399)$$

Noi ci concentreremo su i casi $N = 1, 2, 3$. Dobbiamo però prima fare una deviazione e definire uno strumento fondamentale per lo studio delle soluzioni.

3.4.1.5.1 Trasformazioni conformi

Spesso fa comodo poter spostare le singolarità della EDO oggetto di studio. Uno strumento molto comodo è quello delle **trasformazioni conformi**, ovvero che mantengono gli angoli ma non le distanze. In particolare ci tornano molto utili le **trasformazioni lineari fratte** (o di Möbius)

$$z \rightarrow F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ; \quad \begin{cases} ad - bc = 1 \\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.400)$$

di cui un esempio è il **birapporto**, definito come

$$F = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (3.401)$$

Queste trasformazioni formano un gruppo non-Abeliano isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$

Per l'isomorfismo associamo alla trasformazione fratta la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.402)$$

Le **trasformazioni di Möbius** godono delle seguenti proprietà:

1. Composizione di due trasformazioni successive

$$z \rightarrow (F_2 \circ F_1)(z) = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2)z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = F_3(z) \quad (3.403)$$

↓

$$\hat{F}_3 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & b_1 a_2 + d_1 b_2 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \hat{F}_1 \hat{F}_2 \quad (3.404)$$

2. La trasformazione identica corrisponde alla matrice identità

$$z \rightarrow I(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} \quad (3.405)$$

\downarrow

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.406)$$

3. la trasformazione inversa si ha solo per $cz + d \neq 0$ e sarà data da

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \rightarrow z = \frac{b - dw}{cw - a} \quad ; \quad \begin{cases} cz + d \neq 0 \\ cw - a \neq 0 \end{cases} \quad (3.407)$$

\downarrow

$$\hat{F}^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad (3.408)$$

4. Essendo le trasformazioni appartenenti al gruppo $PSL(2, \mathbb{C})$, avremo che

$$\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{C} : (e, f, g, h) = (\lambda a, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) \quad (3.409)$$

\downarrow

$$G = \frac{ex + f}{gx + h} = \frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda cx + \lambda d} = \frac{ax + b}{cx + d} = F \quad (3.410)$$

Abbiamo quindi che gruppi di parametri multipli per un numero, le trasformazioni sono uguali.

Notiamo dalla definizione come le trasformazioni lineari fratte abbiano una singolarità in

$$z = -\frac{d}{c} \quad (3.411)$$

E allo stesso modo le inverse in

$$w = +\frac{a}{c} \quad (3.412)$$

Possiamo quindi estendere le trasformazioni al punto all'infinito imponendo che

$$\begin{cases} F\left(-\frac{d}{c}\right) = +\infty \\ F(+\infty) = \frac{a}{c} \end{cases} \quad (3.413)$$

Ma con queste assunzioni in gioco, le trasformate diventano l'unica mappa biunivoca per la sfera di Riemann in se stessa.

Possiamo quindi enunciare il seguente **teorema**: *siano*

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (3.414)$$

allora esiste una sola trasformazione lineare fratta tale che

$$\begin{cases} F(z_1) = w_1 \\ F(z_2) = w_2 \\ F(z_3) = w_3 \end{cases} \quad (3.415)$$

DIMOSTRAZIONE DA FARE

3.4.1.5.2 Equazioni con 1 punto fuchsiano

Partendo dall'espressione

$$\ddot{u}(z) + \frac{P(z)}{z - z_0} \cdot \dot{u}(z) + \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2} \cdot u(z) = 0 \quad (3.416)$$

Consideriamo equazioni che per semplicità abbiano

1. Un punto singolare regolare finito
2. Il punto all'infinito regolare, il che ci impone

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = 2 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = \text{cost.} \end{cases} \implies \begin{cases} P(z) = 2 \\ Q(z) = 0 \end{cases} \quad (3.417)$$

In questo caso avremo EDO nella forma

$$\ddot{u}(z) + \frac{2}{z - z_0} \cdot \dot{u}(z) = 0 \quad (3.418)$$

Per la soluzione abbiamo due strade

1. procedere per separazione di variabili
2. studiare l'equazione indiciale risultante dall'Ansatz $u = (z - z_0)^\rho + \xi^\rho$ dove otteniamo

$$\rho \cdot (\rho - 1) \xi^{\rho-2} + \frac{2\rho}{\xi} \xi^{\rho-1} = 0 \quad (3.419)$$

↓

$$\rho^2 + \rho = 0 \rightarrow \rho(\rho + 1) = 0$$

↓

$$\rho_1 = 0 \quad ; \quad \rho_2 = -1 \quad (3.420)$$

↓

$$u(z) = c_1 + \frac{c_2}{z - z_0} \quad (3.421)$$

3.4.1.5.3 Equazioni con 2 punti fuchsiani

Consideriamo ora il caso con due punti singolari regolari al finito e il punto all'infinito regolare o al più singolare regolare. Analogamente a prima avremo

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{z - z_i} \right] \dot{u}(z) + \left[\frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^2 (z - z_i)^2} \right] u(z) = 0 \quad (3.422)$$

La regolarità del punto all'infinito impone

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = 2 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = \text{cost.} \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ Q(z) = \text{cost.} = B \end{cases} \quad (3.423)$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni indiciali in forma generale come

$$\rho^2 + (A_1 - 1)\rho + \frac{B}{(z_1 - z_2)^2} = 0 = (\rho - \alpha_1)(\rho - \beta_1) \quad (3.424)$$

↓

$$\begin{cases} A_1 - 1 = -\alpha_1 - \beta_1 \\ \frac{B}{(z_1 - z_2)^2} = \alpha_1 \beta_1 \end{cases} \quad (3.425)$$

$$\rho^2 + (A_2 - 1)\rho + \frac{B}{(z_2 - z_1)^2} = 0 = (\rho - \alpha_2)(\rho - \beta_2) \quad (3.426)$$

↓

$$\begin{cases} A_2 - 1 = -\alpha_2 - \beta_2 \\ \frac{B}{(z_2 - z_1)^2} = \alpha_2 \beta_2 \end{cases} \quad (3.427)$$

Dalla 3.423 ricaviamo che

$$A_1 + A_2 = 2 \quad (3.428)$$

↓

$$1 - \alpha_1 - \beta_1 + 1 - \alpha_2 - \beta_2 = 2$$

↓

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0$$

↓ per confronto

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \beta_1 = -\beta_2 \end{cases} \quad (3.429)$$

$$B + B = \alpha_1 \beta_1 (z_1 - z_2)^2 + \alpha_2 \beta_2 (z_2 - z_1)^2 \quad (3.430)$$

↓

$$B = \frac{(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)(z_1 - z_2)^2}{2} \quad (3.431)$$

E possiamo quindi riscrivere la EDO nella seguente forma

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1 - (\alpha_i + \beta_i)}{z - z_i} \right] \dot{u}(z) + \left[\frac{(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)(z_1 - z_2)^2}{2 \prod_{i=1}^2 (z - z_i)^2} \right] u(z) = 0 \quad (3.432)$$

↓ utilizzo le relazioni fra gli indici appena trovate

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1 + (-1)^i (\alpha_1 + \beta_1)}{z - z_i} \right] \dot{u}(z) + \left[\frac{\alpha_1 \beta_1 (z_1 - z_2)^2}{\prod_{i=1}^2 (z - z_i)^2} \right] u(z) = 0 \quad (3.433)$$

Se adesso applichiamo la trasformazione conforme

$$z \rightarrow \frac{z - z_1}{z - z_2} : \begin{cases} z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.434)$$

otteniamo l'equazione in forma **di Eulero**

$$\ddot{u}(z) + \left[\frac{1 + \alpha_1 + \beta_1}{z} \right] \dot{u}(z) + \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{z^2} \right] u(z) = 0 \quad (3.435)$$

Di cui già conosciamo le soluzioni, e tornando alle variabili originali avremo due casi

1. $\alpha_1 \neq \beta_1$

$$u(z) = c_1 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} + c_2 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\beta_1} \quad (3.436)$$

2. $\alpha_1 = \beta_1$

$$u(z) = c_1 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} + c_2 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} \ln \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \quad (3.437)$$

3.4.1.5.4 Equazioni con 3 punti fuchsiani: Papperitz-Riemann

Ci limitiamo allo studio delle equazioni con tre punti fuchsiani al finito e il punto all'infinito regolare o al più singolare regolare. Avremo quindi una EDO nella forma

$$\ddot{u}(z) + \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \cdot \dot{u}(z) + \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)^2} \cdot u(z) = 0 \quad (3.438)$$

Scegliamo i polinomi come

$$P(z) = A_1(z - z_2)(z - z_3) + A_2(z - z_3)(z - z_1) + A_3(z - z_1)(z - z_2) \quad (3.439)$$

$$Q(z) = B_1(z - z_2)(z - z_3) + B_2(z - z_3)(z - z_1) + B_3(z - z_1)(z - z_2) \quad (3.440)$$

Analogamente a prima, la regolarità del punto all'infinito impone che

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2 \quad (3.441)$$

Mentre il confronto fra le espressioni dell'equazione indiciale portano a

$$\begin{cases} A_i = 1 - \alpha_i - \beta_i \\ B_i = \alpha_i \beta_i (z_i - z_k)(z_i - z_j) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} i, j, k = 1, 2, 3 \\ i \neq j \neq k \end{cases} \quad (3.442)$$

Dalla prima ricaviamo anche la condizione

$$1 - \alpha_1 - \beta_1 + 1 - \alpha_2 - \beta_2 + 1 - \alpha_3 - \beta_3 = 2 \quad (3.443)$$

↓

$$- \sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = 2 - 3$$

↓

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = 1 \quad (3.444)$$

Ricordando che $i \neq j \neq k$, possiamo quindi riscrivere la EDO come

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \right] \cdot \dot{u}(z) + \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \beta_i}{z - z_i} (z_i - z_j)(z_i - z_k) \right] \cdot u(z) = 0 \quad (3.445)$$

Possiamo infine introdurre il **P-Simbolo** nominato in precedenza come

$$P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \quad z \right\} \quad (3.446)$$

Il P-Simbolo gode di alcune proprietà, tra cui

1. Siccome non c'è ordinamento tra i punti singolari, le colonne possono essere permutate a piacimento
2. Non vi è ordinamento tra gli indici
3. Siccome l'equazione oggetto di studio è omogenea, il P-Simbolo è definito a meno di una costante moltiplicativa

4. Se si applica una trasformazione lineare fratta, i punti singolari cambiano ma non cambiano gli indici corrispondenti

$$z \rightarrow w(z) \quad (3.447)$$

$$P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} w \quad (3.448)$$

5. è possibile fare anche il contrario, ovvero permutare gli indici lasciando invariati i punti singolari, visto che intorno al punto z_i vale

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - z_i)^{\alpha_i} \sum_n c_n z^n = \\ &= (z - z_i)^{\gamma_i} (z - z_i)^{-\gamma_i} (z - z_i)^{\alpha_i} \sum_n c_n z^n = \\ &= (z - z_i)^{\gamma_i} \left[(z - z_i)^{\alpha_i - \gamma_i} \sum_n c_n z^n \right] \end{aligned} \quad (3.449)$$

$$u_2 = (z - z_i)^{\gamma_i} \left[(z - z_i)^{\beta_i - \gamma_i} \sum_n d_n z^n \right] \quad (3.450)$$

$$\downarrow$$

$$P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z = \left(\prod_{i=1}^3 (z - z_i)^{\gamma_i} \right) P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \alpha_3 - \gamma_3 \\ \beta_1 - \gamma_1 & \beta_2 - \gamma_2 & \beta_3 - \gamma_3 \end{Bmatrix} z \quad (3.451)$$

Dove, per assicurare che la somma degli indici resti 1, si impone che $\sum_{i=0}^3 \gamma_i = 0$

Quest'ultima proprietà presenta il notevole risultato di ridurre l'andamento intorno al punto all'infinito un semplice riscalamento del prefattore.

3.4.1.5.5 Equazione ipergeometrica

L'esempio più noto di EDO con tre punti fuchsiani è la **Ipergeometrica**, ovvero con

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = \infty \end{cases} \quad (3.452)$$

e con P-simbolo

$$F(a, b, c; z) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} z \quad (3.453)$$

Sfruttando le proprietà del P-simbolo, possiamo ricondurre qualunque equazione di Papperitz-Riemann ad una ipergeometrica facendo uso del **birapporto**:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (3.454)$$

che mappa

$$z_1 \rightarrow w_1 = \frac{\cancel{z_1} - \cancel{z_1}}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = 0 \quad (3.455)$$

$$z_2 \rightarrow w_2 = \frac{\cancel{z_2} - \cancel{z_1}}{\cancel{z_2} - \cancel{z_3}} \cdot \frac{\cancel{z_2} - \cancel{z_3}}{\cancel{z_2} - \cancel{z_1}} = 1 \quad (3.456)$$

$$z_3 \rightarrow w_3 = \frac{\cancel{z_3} - \cancel{z_1}}{\cancel{z_3} - \cancel{z_3}} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \infty \quad (3.457)$$

E quindi, per la proprietà 4, possiamo scrivere

$$P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} w \quad (3.458)$$

Per la proprietà 5 invece arriviamo a scrivere

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} w = w^{\alpha_1} (w-1)^{\alpha_2} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_3 \end{Bmatrix} w \quad (3.459)$$

Si può ricattare l'ipergeometrica dalla forma generale di Papperitz-Riemann nel seguente modo

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \right] \cdot \dot{u}(z) + \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \beta_i}{z - z_i} (z_i - z_j)(z_i - z_k) \right] \cdot u(z) = 0 \quad (3.460)$$

↓ applico il limite $z_3 \rightarrow \infty$

$$\ddot{u}(z) + \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \right] \cdot \dot{u}(z) + \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{z - z_1} (z_1 - z_2) + \frac{\alpha_2 \beta_2}{z - z_2} (z_2 - z_1) + \alpha_3 \beta_3 \right) \right] \cdot u(z) = 0$$

↓ sostituisco i valori di z_i, α_i, β_i per la ipergeometrica

$$\ddot{u}(z) + \left[\frac{c}{z} + \frac{1 - c + a + b}{z - 1} \right] \cdot \dot{u}(z) + \left[\frac{ab}{z(z - z_1)} \right] \cdot u(z) = 0$$

↓ posso riscrivere nella forma nota in letteratura

$$[z(1 - z)] \cdot \ddot{u}(z) + [c - (1 + a + b)z] \cdot \dot{u}(z) - [ab] \cdot u(z) = 0 \quad (3.461)$$

3.4.1.5.5.1 Soluzioni dell'ipergeometrica

Utilizzando i metodi usati in precedenza possiamo trovare due soluzioni intorno ai 3 punti singolari

$$z_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} u_1(z) = R_1(z) \\ u_2(z) = z^{1-c} R_2(z) \end{cases} \quad (3.462)$$

$$z_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} u_3(z) = R_3(z-1) \\ u_4(z) = (z-1)^{c-a-b} R_4(z-1) \end{cases} \quad (3.463)$$

$$z_3 = \infty \rightarrow \begin{cases} u_5(z) = z^{-a} R_5(z^{-1}) \\ u_6(z) = z^{-b} R_6(z^{-1}) \end{cases} \quad (3.464)$$

$$R_i \text{ funzioni analitiche} \quad (3.465)$$

Ogni coppia di soluzioni forma una base.

Andiamo a calcolare la coppia di soluzioni intorno all'origine.

1. La prima soluzione, corrispondendo ad un'esponente indiciale nullo, può essere sviluppata secondo Taylor

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3.466)$$

↓

$$\dot{u}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad (3.467)$$

↓

$$\ddot{u}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \quad (3.468)$$

↓ inseriamo nella 3.461

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1)c_n + n c_n(a+b+1) + c_n ab) z^n - (n(n-1)c_n + n c c_n) z^{n-1}] = 0 \quad (3.469)$$

↓

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1) + n(a+b+1) + ab) c_n z^n - (n(n-1) + n c) c_n z^{n-1}] = 0 \quad (3.470)$$

↓

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1) + n(a+b+1) + ab) c_n z^n - ((n+1)n + (n+1)c) c_{n+1} z^n] = 0$$

↓

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1) + n(a+b+1) + ab) c_n - ((n+1)n + (n+1)c) c_{n+1}] z^n = 0$$

↓

$$(n(n-1) + n(a+b+1) + ab) c_n - ((n+1)n + (n+1)c) c_{n+1} = 0$$

↓

$$c_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} c_n \quad (3.471)$$

Come possiamo notare, non vi sono condizioni su c_0 , e tutti i successivi possono essere ricavati in modo ricorsivo:

$$c_1 = \frac{ab}{c} c_0 \quad (3.472)$$

$$c_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)2} c_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)} c_0 \quad (3.473)$$

$$\dots$$

$$c_n = \frac{[\prod_{i=1}^n (a+i-1)] \cdot [\prod_{i=1}^n (b+i-1)]}{n! \prod_{i=1}^n (c+i-1)} \quad (3.474)$$

Possiamo snellire introducendo i simboli di Pochhammer

$$(a)_n = \prod_{i=1}^n (a+i-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (3.475)$$

$$\downarrow$$

$$c_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+n)} \quad (3.476)$$

e ponendo $c_0 = 1$ siamo così arrivati a definire la prima soluzione con la cosiddetta **serie ipergeometrica**

$$u_1(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)} \cdot z^n = {}_2F_1(a, b, c; z) \quad (3.477)$$

Possiamo fare le seguenti osservazioni

- (a) Questa serie converge per $|z| < 1$
- (b) Tramite Stirling notiamo come $c_n \sim n^{a+b-c-1}$
- (c) La notazione a due pedici indica come abbiamo due parametri a denominatore in a e b e uno a numeratore in c
- (d) Per $c = -N$ ci troviamo in presenza di una singolarità essenziale, e si risolve cambiando il primo coefficiente in $c_0 = \frac{1}{\Gamma(c)}$

2. Andiamo ora a trovare la seconda soluzione. Abbiamo visto in precedenza come

$$u_2(z) = z^{1-c} R_2(z) \quad (3.478)$$

Possiamo di nuovo sfruttare le proprietà del P-simbolo, ottenendo

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{matrix} \right\} z = z^{1-c} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ c-1 & 0 & a-c+1 \\ 0 & c-a-b & b-c+1 \end{matrix} \right\} z \quad (3.479)$$

Abbiamo così un P-simbolo corrispondente ad una serie ipergeometrica e possiamo quindi scrivere

$$u_2(z) = z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) \quad (3.480)$$

Ci troviamo ora di fronte a due casi per la soluzione generale $u^{(0)}(z)$ intorno a $z_1 = 0$:

1. $c \notin \mathbb{N}$

In questo caso le due soluzioni sono linearmente indipendenti, e possiamo direttamente scrivere

$$u^{(0)}(z) = A \cdot {}_2F_1(a, b, c; z) + B \cdot z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) \quad (3.481)$$

2. $c \in \mathbb{N}$

In questo caso si procede con il metodo del wronskiano, come abbiamo già visto in precedenza.

3.4.1.5.5.2 Relazioni tra le soluzioni dell'ipergeometrica

Ci chiediamo cosa possa succedere ridefinendo l'indice relativo a $z_2 = 1$ invece che quello relativo a z_1 . Trasformando il P-simbolo nel seguente modo

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\} z = (1-z)^{c-a-b} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & c-b \\ 1-c & a+b-c & c-a \end{array} \right\} z \quad (3.482)$$

Troviamo così una soluzione incognita all'equazione, che definiamo come

$$\tilde{u}(z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-b, c-a, c; z) \quad (3.483)$$

3.4.2 Esempi

N'aggio fatto in tempo, tanto Bufalini le ha scritte bene su Latex.

Bibliography

- [1] André Krzywiki Philippe Denner. *Mathematics for Physicists*. Dover Publications, 1996.
- [2] Gianfranco Pradisi. *Lezioni di metodi matematici della fisica*. Edizioni della Normale, 2017.