التحليل العددي (1)

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العددي (1)

الدكتور

محمد صبح

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

1433 – 1434هـ

2012 – 2013م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

المقدمة..... 9

الفصل الأول (الأخطاء)..... 11

مصادر الأخطاء..... 13

الأخطاء في العمليات الحسابية..... 18

تمارين..... 31

الفصل الثاني(حل المعادلات غير الخطية)..... 33

طريقة التنصيف المتكرر..... 43

طريقة نيوتن..... 52

طريقة التكرار 77

نظرية ديكارت..... 84

التمارين..... 96

الفصل الثالث (حل جملة المعادلات الخطية)..... 101

طريقة كرامر 140

طريقة غاوس..... 146

طريقة جاكوبي 190

طريقة (غاوس – سيدل) 205

القيم الذاتية والأشعة الذاتية..... 222

التمارين..... 252

الفصل الرابع الاستيفاء (الاستكمال)..... 263

جداول الفروق..... 267

طريقة لاغرانج..... 297

خواص الفروق المقسومة..... 313

التمارين..... 324

الفصل الخامس (التفاضل العددي)..... 329

صيغ عددية للمشتقات عند نقاط الجدول..... 331

صيغ عددية للمشتقات عند نقاط ليست موجودة في جدول البيانات 336

صيغ لاغرانج لحساب المشتقات..... 349

التمارين..... 354

الفصل السادس (التكامل العددي)..... 357

طريقة المستطيلات..... 360

طريقة سيمبسون..... 372

التمارين..... 388

الفصل السابع (حل المعادلات التفاضلية)..... 391

طريقة أولر..... 394

طريقة تايلور..... 401

طريقة رانج- كاتا..... 412

التمارين..... 421

الرموز والمصطلحات..... 423

المراجع 433

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

Introduction

يكتسب التحليل العددي جاذبية خاصة لدى العاملين في مجال البحث العلمي، ومن أسباب ذلك أنه في بعض الحالات وبعد التطور الكبير الذي حصل في مجال المعلوماتية أصبح من السهل استخدام الطرائق العددية ثم استخدام برامج وخوارزميات للحصول على الحلول المطلوبة لأي مسائل تواجههم بدقة وسرعة.

نعلم أن طلابنا يعانون مشقة في دراسة العلوم بلغة غير اللغة العربية، ونحن إذ نضع هذا الكتاب باللغة العربية بين أيدي طلابنا نهدف إلى تزويد المكتبة العربية بكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً، ثم نهدف أيضاً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً في التحليل العددي للطلاب.

انطلاقاً من ذلك تم وضع هذا الكتاب ليتناول مقرر التحليل العددي، وقدمنا فيه عرضاً متماسكاً وشاملاً للمفاهيم الأساسية، وحاولنا تقديم أسهل الطرائق وأقصرها في إثبات النظريات، وتتويجاً لذلك وزيادة في فهم التحليل العددي اعتنينا بكثرة الأمثلة وتنويعها.

يتكون هذا الكتاب من ستة فصول: في الفصل الأول تم تعرّف الطرائق العددية لحل جملة معادلات خطية، و مسألة القيم الذاتية، وفي الفصل الثاني تم تعرّف معادلات الفروق الخطية بأمثال ثابتة، وعلى طريقة الـ K خطوة الخطية وعلى

طرائق رانج–كاتا لحل المعادلات التفاضلية العادية، وتم في الفصل الثالث تعرّف الطرائق الظاهرية والطرائق الضمنية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، ويبحث الفصل الرابع في الحلول المثلى (طرائق خط البحث – طرائق مرافقة للتدرج – طرائقق نيوتن) وفي الفصل الخامس تم تعرّف تقريب التوابع – الاستيفاء التقريب بكثيرات حدود ليجندر – طريقة المربعات الصغرى.

أما الفصل السادس والأخير فيعالج الحلول العددية للمعادلات التكاملية، فيعرض حل معادلات (فريد هولم) ومعادلات (فولتيرا) وبعض الطرائق العددية الأخرى.

في كل فصل من فصول هذا الكتاب عدد كثير من الأمثلة المحلولة لترسيخ الأفكار الأساسية، وكذلك ثمّة عددٌ من التمارين على كل فصل من أجل التدريب واكتساب المهارات.

في الختام أتمنى على القارئ العزيز أن يزودني باقتراحاته المفيدة، وآمل أن أكون قد قدمت لمكتبتنا العربية، ولقارئنا العربي مرجعاً آخر مفيداً، وأشكر جميع من أسهموا في إنجازه.

والله ولي التوفيق

المؤلف

الفصل الأول

الأخطاء

Errors

مصادر الخطأ

الأخطاء في العمليات الحسابية .

التمارين

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

1 – 1 تمهيد : التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات المهمّة، وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي ، ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية ، حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبية ، وبما أننا نحصل على نتيجة تقريبية أو حل تقريبي فهذا يعني أنّه يوجد خطأ وعلينا حساب الخطأ ، إلا أنه لو استطعنا إيجاد الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الفعلي أو الحقيقي ، الأمر الذي يعني أن إيجاد الخطأغير ممكن، ونسعى بالتالي إلى إيجاد تقريب الخطأ أو حجم الخطأ ، أي تلك القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ .

وتتلخص مهمة التحليل العددي في إيجاد الحل التقريبي لمسألة ما وتقويم الخطأ. إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية , لأنها غالباً ما تمثل أطوال وقياسات أو قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس ، وهي بحد ذاتها تقريبية

1 – 2 مصادر الخطأ : تنشأ الأخطاء من أكثر من مصدر , فهناك أخطاء تنشأ من استعمال الصيغ التقريبية , فمثلا نستخدم الصيغة πr^2 لحساب مساحة الدائرة التي نصف قطرها r ، وهناك أخطاء ناشئة من استعمال هذه الصيغ ,فمثلا نكتفي برقمين عشريين (منزلتين) بعد الفاصلة في الحسابات ، وأحياناً نكتفي بعدد معين من حدود المتسلسلة اللانهائية، فينشأ خطأ الاقتطاع , فمثلاً نعرف أن نشر التابع الأسي حسب ماكلوران يعطى كالآتي:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left[s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right]$$

هذا يعني أن $s_n(x)$ قيمة تقريبية للتابع e^x ، أي أننا حصلنا على هذه القيمة التقريبية بإهمال المقدار $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ، وكأننا قطعنا المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ عند الحد n ، والمصدر الهم للخطأ ينشأ من تدوير الأعداد وتقريبها , وتدوير الأعداد يتم وفق القاعدة الآتية :

ليكن العدد $x = 0.x_1x_2x_3 \dots \dots \dots \dots \dots x_{n-2}x_{n-1}, x_n$

إذا قربنا هذا العدد مكتفين بـ $(n-1)$ رقم على يمين الفاصلة، فإن العدد يكتب بالشكل الآتي :

$$\bar{x} = 0, x_1x_2x_3 \dots \dots \dots \dots \dots x_{n-2}\bar{x}_{n-1}$$

حيث $\bar{x}_{n-1}$ يتم تحديده كما يلي :

إذا كان $x_n > 5$ فإن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

وإذا كان $x_n < 5$ فإن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1}$

وفي حال $x_n = 5$ ننظر إلى x_{n-1} ونميز حالتين

إذا كان x_{n-1} زوجياً فإن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1}$

أما إذا كان x_{n-1} فردياً فإن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$ ، ويكون الخطأ المرتكب والناتج عن عملية التدوير :

$$e = 0.5X10^{-(n-1)} = 0.5X10^{-n+1} = 5X10^{-n}$$

مثال (1) دور العدد $x = 64.237519$ إلى عدد يحوي خمسة أرقام عشرية ، ثم إلى عدد يحوي ثلاثة أرقام عشرية ، ثم إلى عدد يحوي رقم عشري واحد ، واحسب الأخطاء المرتكبة .

الحل :

$\bar{x} = 64.23752$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-6}$

$\bar{x} = 64.238$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-4}$

$\bar{x} = 64.2$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-2}$

مثال (2) دور العدد $x = 101.64535$ إلى عدد يحوي أربعة أرقام عشرية ، ثم إلى عدد يحوي ثلاثة أرقام عشرية ، ثم إلى عدد يحوي رقمين عشريين ، واحسب الأخطاء المرتكبة .

الحل :

$\bar{x} = 101.6454$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-5}$

$\bar{x} = 101.645$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-4}$

$\bar{x} = 101.64$ والخطأ المرتكب هو $5x10^{-3}$

1 – 3 الخطأ المطلق والخطأ النسبي : بفرض $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x فإن الخطأ المرتكب هو $\Delta x = x - \bar{x}$ ، وبما أن إشارة Δx قد تكون موجبة أو سالبة لذلك نعرف ما يسمى بالخطأ المطلق .

تعريف (1 – 1) : الخطأ المطلق الذي نرتبكه باعتبار $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x هو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الفعلية x والقيمة التقريبية $\bar{x}$، أي الخطأ المطلق هو

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \bar{x}| = |\bar{x} - x|$$

تعريف (1 – 2) : الخطأ النسبي الذي نرتكبه باعتبار $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x الذي نرمز له بالرمز R يعطى بالعلاقة التالية :

$$R = \frac{\Delta}{x} = \frac{|\Delta x|}{x} \qquad ; \ x \neq 0$$

وغالباً تكون القيمة x غير معروفة وإنما معروفة $\bar{x}$ القيمة التقريبية لـ x لذلك يمكن أن نكتب :

$$R = \frac{\Delta}{\bar{x}} = \frac{|\Delta x|}{\bar{x}} \qquad ; \ \bar{x} \neq 0$$

مثال (3) عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفرض $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x حيث :

$$x = 8.7291 \quad , \quad \bar{x} = 8.73$$

الحل :

$$\Delta x = x - \bar{x} = 8.7291 - 8.73 = -0.0009$$

الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \bar{x}| = 0.0009$$

الخطأ النسبي

$$R_x = R_1 = \frac{\Delta}{x} = \frac{0.0009}{8.7291} = 0.0001031$$

$$R_{\bar{x}} = R_2 = \frac{\Delta}{\bar{x}} = \frac{0.0009}{8.73} = 0.00010309$$

تعريف (1 – 3) الخطأ المئوي الذي نرمز له بالرمز E يعطى بالعلاقة التالية :

$$E = R\text{x}100\%$$

مثال (4) إذا كانت $\bar{x} = 0.00005$ قيمة تقريبية لـ $x = 0.00004$ عين الخطأ المئوي

الحل : أولاً نعين الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \bar{x}| = |0.00004 - 0.00005| = 0.00001$$

ثانياً نعين الخطأ النسبي

$$R = \frac{\Delta}{x} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$$

وأخيراً نعين الخطأ المئوي

$$E = R\text{x}100\% = 0.25\text{x}100\% = 25\%$$

1 – 4 الأخطاء في العمليات الحسابية

كثيراً ما يدخل العدد الذي نقربه في حسابات أخرى ولكن الخطأ الذي نرتكبه عند التقريب لا يبقى ثابتاً ، وإنما يسري في هذه الحسابات ويتضاعف فنحصل على نتائج بعيدة عن الحقيقة ، من أجل الحد من هذه الأخطاء نبحث عن الأخطاء في العمليات الحسابية .

1 – الخطأ المطلق في حاصل جمع (طرح) عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة لهذين العددين .

الإثبات لتكن $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x

ولتكن $\bar{y}$ قيمة تقريبية لـ y

ولنحسب الخطأ المرتكب باعتبار $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ قيمة تقريبية لـ $z = x + y$

$$\Delta z = z - \bar{z} = (x + y) - (\bar{x} + \bar{y}) = (x - \bar{x}) + (y - \bar{y})$$

$$= \Delta x + \Delta y$$

الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

ويمكن تعميم ذلك من أجل أكثر من عددين

وإذا $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ قيمة تقريبية لـ $z = x - y$

فإن الخطأ المرتكب هو

$$\Delta z = z - \bar{z} = (x - y) - (\bar{x} - \bar{y}) = (x - \bar{x}) - (y - \bar{y})$$
$$= \Delta x - \Delta y$$

والخطأ المطلق هو

$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

وهو المطلوب

مثال (5) عين الخطأ المطلق لمجموع وحاصل طرح العددين التقريبيين

$x = 7.423$ $\qquad$ $y = 6.514$

الحل :

$$\Delta x = 0.5\text{x}10^{-3} = 5\text{x}10^{-4}$$
$$\Delta y = 0.5\text{x}10^{-3} = 5\text{x}10^{-4}$$

الخطأ المطلق لمجموع هذين العددين هو

$$|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 10^{-3} = 0.001$$

الخطأ المطلق لطرح هذين العددين هو

$$|\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 0.001$$

2 – الخطأ النسبي ل جداء عددين تقريبين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين

الإثبات بفرض $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x

بفرض $\bar{y}$ قيمة تقريبية لـ y

وبفرض $\bar{z} = \bar{x}.\bar{y}$ قيمة تقريبية لـ $z = x.y$

فإن

$$z = x.y = (\bar{x} + \Delta x).(\bar{y} + \Delta y)$$

$$= \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x + \Delta x\Delta y$$

وبإهمال الحد $\Delta x\Delta y$ الذي هو مقدار صغير نجد :

$$\Delta z = z - \bar{z} = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x - \bar{x}.\bar{y}$$

$$= \bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x$$

الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta z| = |\bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x|$$

$$\leq |\bar{x}||\Delta y| + |\bar{y}||\Delta x|$$

الخطأ النسبي $$R_{x.y} = \frac{\Delta}{\bar{x}\bar{y}} \leq \frac{\bar{x}|\Delta y| + \bar{y}|\Delta x|}{\bar{x}\bar{y}}$$

$$= \frac{|\Delta x|}{\bar{x}} + \frac{|\Delta y|}{\bar{y}}$$

$$= R_x + R_y$$

مثال (6) عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق لحاصل ضرب العددين التقريبين

$x = \pi = 3.14$ $\qquad$ $y = 2.15$

الحل : الخطأ النسبي هو

$$R_{xy} \leq R_x + R_y = \frac{5\text{x}10^{-3}}{3.14} + \frac{5\text{x}10^{-3}}{2.15}$$

$$= 0.00159263 + 0.00232558$$

$$= 0.00391794$$

الخطأ المطلق

$$R_{xy} = \frac{\Delta(x.y)}{x.y} \quad \Rightarrow \quad |\Delta(x.y)| = R_{xy}(x.y)$$

$$\leq 0.00391794(3.14)(2.15)$$

$$= 0.026446367$$

3 – الخطأ النسبي في حاصل قسمة عددين تقريبين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين .

الإثبات بفرض $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ x

والخطأ النسبي هو $R_1 = \frac{0.005}{5.41} = 0.0009242$

$\Delta_2 = 5x10^{-4}$ الخطأ المطلق باعتبار 7.251 عدداً مدوراً

والخطأ النسبي هو $R_2 = \frac{0.0005}{7.251} = 0.00006896$

$\Delta_3 = 5x10^{-2}$ الخطأ المطلق باعتبار 20.3 عدداً مدوراً

والخطأ النسبي هو $R_3 = \frac{0.05}{20.3} = 0.002463$

الخطأ النسبي في حاصل الضرب $(5.41)(7.251)$ هو

$$R_4 \leq R_1 + R_2 = 0.0009242 + 0.00006896 = 0.0009932$$

الخطأ المطلق في حاصل الضرب

$$\Delta_4 = (5.41)(7.251)(0.0009932)$$

$$= (39.2279)(0.0009932) = 0.03896$$

الخطأ النسبي في حاص القسمة هو

$$R_5 \leq R_4 + R_3 = 0.0009932 + 0.002463 = 0.00345$$

لحساب الخطأ المطلق نحسب أولاً المقدار

$$\frac{(5.41)(7.251)}{20.3} = \frac{39.2279}{20.3} = 1.93241$$

وبالاعتماد على العلاقة

$$R_5 = \frac{\Delta_5}{1.93241}$$

فإن الخطأ المطلق المرتكب هو

$$\Delta_5 = (1.93241)R_5 = (1.93241)(0.003456) = 0.006678$$

1 – 5 حساب الأخطاء لتابع في عدة متغيرات (متحولات)

بفرض لدينا التابع $f(x) = f(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$

لحساب الخطأ المطلق نستخدم عبارة التفاضل الآتية

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

من هذه العلاقة يمكن تعيين قيمة الخطأ المطلق كما يلي :

$$\Delta f \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

فمثلاً إذا كان التابع $f = x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n$

فإن الخطأ المطلق يعطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta f \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

وإذا كان التابع $f = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .....x_n^{\alpha_n}$ ، فـإن الخطأ النسبي يعطى بالعلاقة التالية :

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} = |\alpha_1| R_1 + |\alpha_2| R_2 + ...+ |\alpha_n| R_n$$

أما إذا كان التابع $f = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{z^{\gamma}}$

فإن الخطأ النسبي يعطى بالعلاقة التالية :

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} = |\alpha| R_x + |\beta| R_y + |\gamma| R_z$$

مثال (9) احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب

$$f = \frac{x+y.z}{S}$$

حيث $S = 8.7193$ $z = 1.842$ $y = 2.73$ $x = 3.219$

أعداد مدورة

الحل :

$$f = \frac{3.219+(2.73)(1.842)}{8.7193} = 0.9459085$$

الخطأ النسبي لـ $y.z$ هو

$$R_{y.z} = \frac{0.005}{2.73} + \frac{0.0005}{1.842} = 0.002130$$

الخطأ المطلق لـ $y.z$ هو

$$\Delta(y.z) = (0.002130)(5.02866) = 0.010575$$

الخطأ المطلق لـ $x + y.z$ هو

$$\Delta(x + y.z) \leq 0.0005 + 0.010575 = 0.011075$$

الخطأ النسبي لـ $x + y.z$ هو

$$R_{x+y.z} = \frac{0.011075}{8.24766} = 0.001343$$

الخطأ النسبي لـ f هو

$$R_f \leq 0.001343 + \frac{0.00005}{8.7193} = 0.001349$$

الخطأ المطلق لـ f هو

$$\Delta f = (0.001349)(0.9459005) = 0.001276$$

مثال (10) بفرض $f = x^{0.1}y^2$

حيث $y = 3.01$ $x = 2.0$ أعداد مدورة

عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق لـ f

الحل : الخطأ النسبي

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} = |0.1|R_x + |2|R_y$$

$$= (0.1)\frac{0.05}{2.0} + 2\frac{0.005}{3.01}$$

$$= (0.1)(0.025) + 2(0.001661) = 0.005822$$

الخطأ المطلق

$$\Delta f = Rf(2.0)^{0.1}(3.01)^2 = 0.00582(2.0)^{0.1}(3.01)^2$$

$$= 0.05653$$

مثال (11) احسب $y = \sqrt[3]{x^2}$ حيث $x = 8000 + 3$

الحل :

$$y = x^{\frac{2}{3}} = (8000)^{\frac{2}{3}} = 400$$

الخطأ النسبي

$$\frac{\Delta y}{y} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Delta x}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{3}{8000} = \frac{1}{4000}$$

الخطأ المطلق

$$\Delta y = y\left(\frac{1}{4000}\right)$$

$$= 400\left(\frac{1}{4000}\right) = \frac{1}{10} = 0.1$$

ومنه $y = 400 \mp 0.1$

مثال (12) احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حساب قيمة التابع

$$f = f(x, y, z) = \sin(x^2)y^3 + \frac{e^x}{z^2}$$

حيث $z = 0.49001$ $y = 1.99999$ $x = -2.500000$ أعداد مدورة

الحل : بتعويض قيم المتحولات نجد :

$$f = f(-2.5, 1.99999, 0.49001) = \sin(-2.5^2)1.99999^3 + e{-}2.50.490012$$

$$= 0.076435$$

ولدينا $\Delta z = \mathrm{x}10^{-6}$ $\Delta y = 5\mathrm{x}10^{-6}$ $\Delta x = 5\mathrm{x}10^{-7}$

والخطأ المطلق

$$\Delta f \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

حيث $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2\right)y^3 + \frac{e^x}{z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\sin\left(x^2\right)y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2e^x}{z^3}$$

بالتعويض نجد :

$$\Delta f \le \left|2x\cos\left(x^2\right)y^3 + \frac{e^x}{z^2}\right|\Delta x + \left|3\sin\left(x^2\right)y^2\right|\Delta y + \left|\frac{-2e^x}{z^3}\right|\Delta z$$

$$= \left|2(-2.5)\cos\left((-2.5)^2\right)(1.99999)^3 + \frac{e^{-2.5}}{(0.49001)^2}\right|.10^{-7}$$

$$+\left|3\sin\left((-2.5)^2\right)(1.99999)^2\right|.10^{-6} + \left|\frac{-2e^{-2.5}}{(0.49001)^2}\right|.10^{-6}$$

$$= 0.00000567086$$

الخطأ النسبي

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} = \frac{0.00000567086}{0.076435}$$

$$= 0.000074192$$

تمارين

1 – دور الأعداد التالية إلى ثلاثة أرقام عشرية، ثم إلى رقمين عشريين، ثم إلى رقم عشري واحد، واحسب الأخطاء المرتكبة في كل منها :

$$14.5247 \quad 25.1479 \quad 0.41517 \quad 93.527148$$

2 – بفرض

$x = -0.7183 \quad y = 9.118 \quad z = 11.821$ أعداد مدورة

احسب الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية في حساب قيم العلاقات التالية :

$$\frac{x+y}{x-y} \ , \ \frac{x.y}{z} \ , \ x + \frac{y}{z} \ , \ x.y - z$$

3 – احسب قيمة التابع $f = x^2 + 3.12x + 2.71$

حيث $x = 1.12$ عدد مدور، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي

4 – أثبت أن الخطأ المطلق في حاصل قسمة عددين تقريبيين يعطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta z = \Delta\left(\frac{x}{y}\right) \le \frac{\Delta x}{|\overline{y}|} + \Delta y \left|\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2}\right| \quad ; \quad y \neq 0$$

5 – إذا كان

$$x = 2 \mp 0.005 \quad y = 10 \mp 0.01 \quad z = 20 \mp 0.01$$

احسب قيمة التابع $f = \frac{x^3 y^5}{z^2}$ واحسب الخطأ المرتكب

6 – احسب قيمة التابع

$$f = f(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{z} + \frac{\ln(x)\, z}{y}$$

ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي

حيث $z = 101.00001 \quad y = 99.99999 \quad x = 100.0000$ أعداد مدورة

7 – احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب القيمة التالية :

$$(2.4)(5.3) + (2.2)(5.1) + (7.7)(0.5)$$

8 – احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حساب قيمة التابع :

$$f = f(x, y, z) = x^2 y^{0.1} z^{\frac{1}{3}}$$

حيث $z = 0.33 \quad y = 1.60 \quad x = 1.25$ أعداد مدورة

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

Solving Non – Linear Equations

طريقة التنصيف المتكرر

طريقة نيوتن

طريقة التكرار

الحلول العددية لجملة معادلات غير خطية

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

2 – 1 تمهيد: نعلم أنه إذا كانت المعادلة من الشكل

$$f(x) = ax + b = 0$$

فإن حل هذه المعادلة هو $x = -\frac{b}{a}$ حيث $a \neq 0$

وهذه المعادلة تسمى معادلة خطية من الدرجة الأولى

كذلك يمكن حل المعادلات من الدرجة الثانية

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \qquad ; \quad a \neq 0$$

وذلك بحساب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ فإذا كان المميز موجباً فإن المعادلة السابقة تقبل حلين

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad , \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ولكن الحياة العملية ملأى بالمعادلات التي تخرج عن دائرة هذه الحالات البسيطة بحيث لا نستطيع حلها بشكل مباشر بالطرائق التحليلية المعروفة .

في هذه الحالة نلجأ للبحث عن حلول تقريبية، وما أكثر ما يلجأ الإنسان إلى التقريب معترفاً بعجزه عن البلوغ إلى الحقيقة كاملة، ومعبراً عن رغبته وحبه للمعرفة حتى وإن كانت منقوصة.

وفي هذا الفصل سوف نناقش بعض الطرائق للبحث عن حل تقريبي لمعادلة من النوع $f(x) = 0$، حيث f تابع مستمر على المجال $[a, b]$

تعريف (2 – 1) تسمى القيمة α جذراً للمعادلة $f(x) = 0$ ،أو صفراً للتابع $f(x) = 0$ إذا تحقق الشرط $f(\alpha) = 0$

في حال وجدنا صعوبة في حل المعادلات غير الخطية، أو إيجاد الجذور لها، نستخدم الطرائق العددية لإيجاد هذه الجذور، أو على الأقل قيماً قريبة جداً لهذه الجذور، وذلك بالبحث عن قيم x التي تجعل المقدار $|f(x)|$ أصغر ما يمكن، أي البحث عن قيم x القريبة جداً من الجذر α للمعادلة $f(x) = 0$

وبشكل عام فإن حل المعادلة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

والتي هي كثيرة حدود من الدرجة n ، يزداد صعوبة كلما زادت n ، وفي بعض الحالات فإن المعادلة $f(x) = 0$ تحوي توابع مثلثية أو أسية أو قطعية , في مثل هذه الحالات تسمى المعادلة بالمعادلة المتسامية . عندئذ يصبح من الصعب حل هذه المعادلات بالطرائق العادية المعروفة أو التحليلية، لذلك نلجأ في البحث عن حلول تقريبية للمعادلات غير الخطية , من أجل إيجاد هذه الحلول نعين المجالات

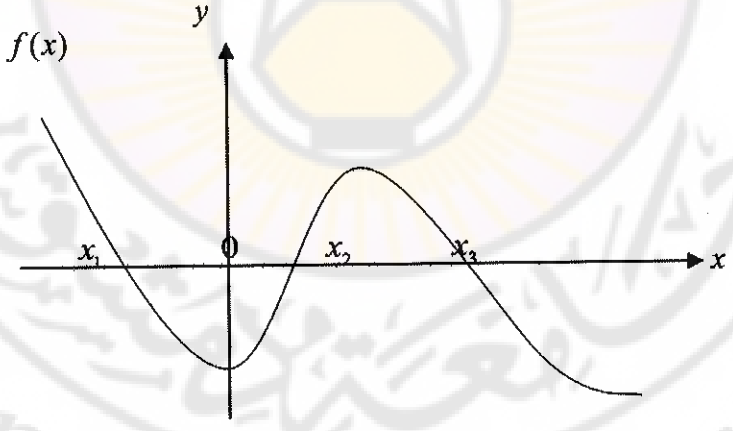
$$[a, b], [c, d], \dots\dots\dots\dots\dots$$

بحيث يوجد جذر واحد فقط للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ في كل مجال من هذه المجالات، وتسمى عملية التعيين هذه بعزل الجذور ، ويمكن تعيين هذه

المجالات أو عزل جذور المعادلة $f(x) = 0$ بالاعتماد على الطريقتين التاليتين :

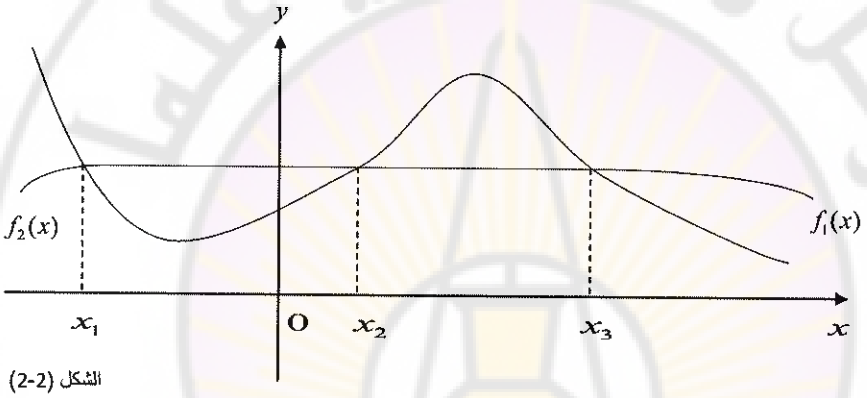
2 – 2 الطريقة البيانية لعزل جذور المعادلة غير الخطية

لعزل جذور المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ حيث $f(x)$ تابع حقيقي مستمر ، أي لتعيين المجالات التي يوجد فيها الجذور الحقيقية لهذه المعادلة نرسم منحني التابع $f(x)$ بشكل تقريبي بالاعتماد على إعطاء قيم للمتغير x , نحصل منها على القيم المقابلة للتابع $f(x)$، و كلما زدنا عدد النقاط حصلنا على منحنٍ بياني أفضل للتابع $f(x)$، عندئذ نقاط تقاطع المنحنى البياني مع المحور ox تقع ضمن مجالات معزولة كما في الشكل (2 – 1)



الشكل (2-1)

ويمكن في بعض الحالات استبدال المعادلة $f(x) = 0$ بمعادلة مكافئة $f_1(x) = f_2(x)$ حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$، تابعان أكثر بساطة من $f(x)$ ، ثم نقوم برسم كل من المنحنين البيانيين للتابعيين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ، وتصبح جذور المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل نقط تقاطع هذين المنحنيين كما في الشكل (2 – 2)



الشكل (2-2)

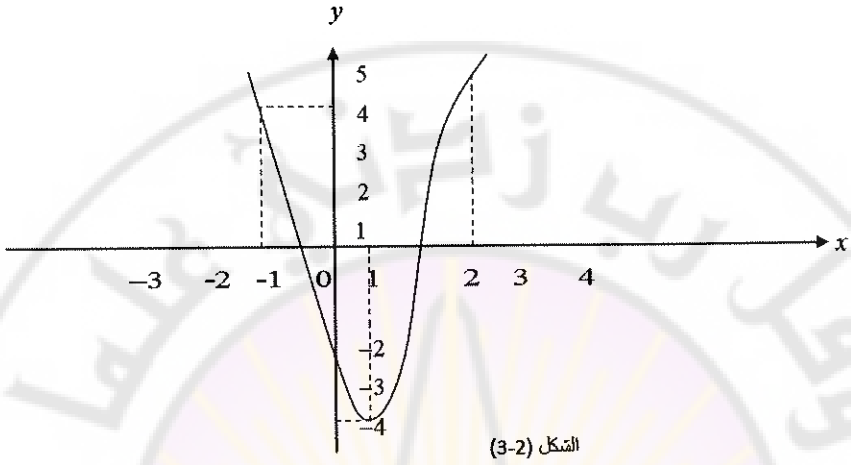
مثال (1) اعزل بالطريقة البيانية جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 - 4x - 1 = 0$$

الحل : نرسم منحني التابع $f(x) = x^4 - 4x - 1$ وذلك بإعطاء قيم لـ x مثل $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ والحصول على القيم التالية :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	271	92	23	4	-1	-4	7	68	239

بالاعتماد على هذه القيم نحصل على منحني التابع $f(x)$ في الشكل (2 – 3)

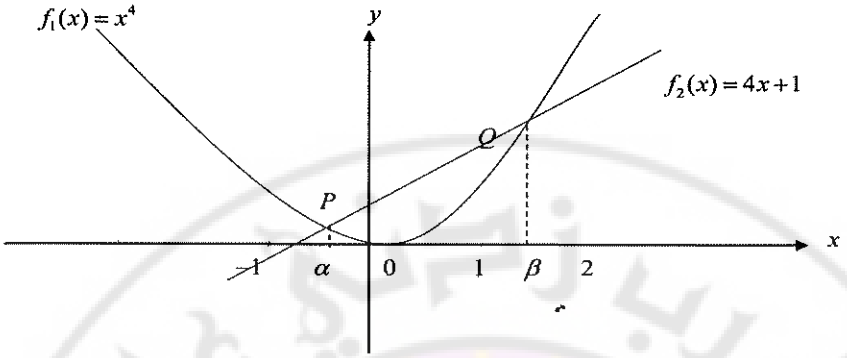


الشكل (2-3)

نلاحظ أن بيان التابع $f(x)$ يقطع المحور ox في نقطتين النقطة الأولى تقع في المجال $[-1,0]$ والنقطة الثانية تقع في المجال $[1,2]$ وإذا كتبنا المعادلة السابقة بالشكل المكافئ التالي :

$$f_1(x) = x^4 = 4x + 1 = f_2(x)$$

ورسمنا منحني التابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نلاحظ أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في نقطتين P و Q فاصلة النقطة P ولتكن α تقع في المجال $[-1,0]$ وفاصلة النقطة Q ولتكن β تقع في المجال $[1,2]$ كما في الشكل (2 – 4)

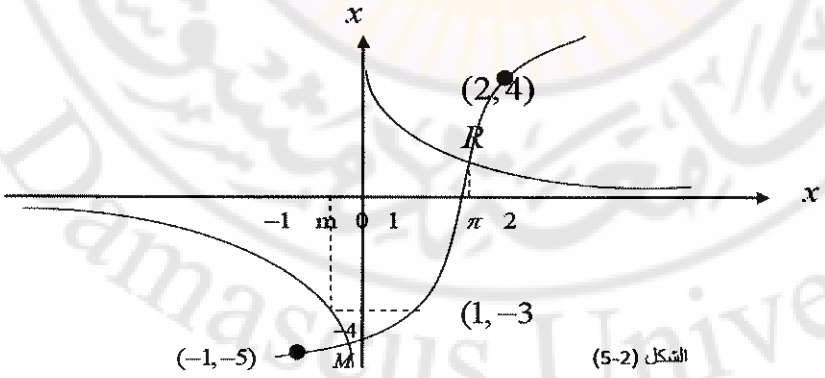


الشكل (4-2)

وكذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل المكافئ التالي

$$f_1(x) = x^3 - 4 = \frac{1}{x} = f_2(x)$$

وبرسم منحني التابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نلاحظ أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في نقطتين M و R فاصلة النقطة M ، ولتكن m تقع في المجال $[-1,0]$ و فاصلة النقطة R، ولتكن r تقع في المجال $[1,2]$ كما في الشكل (5 – 2)



الشكل (5-2)

مثال (2) اعزل بالطريقة البيانية جذور المعادلة

$$f(x) = 2.13 \sin x - x = 0$$

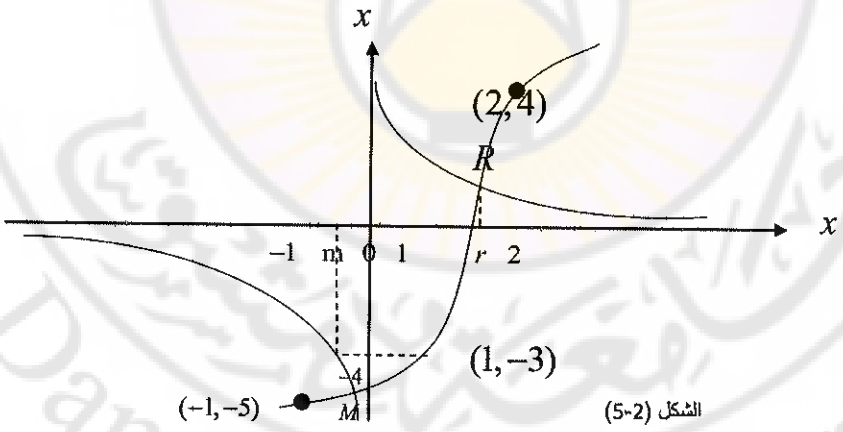
الحل : نكتب هذه المعادلة بالشكل المكافئ التالي :

$$f_1(x) = \sin x = \frac{1}{2.13} x = 0.4695x = f_2(x)$$

ثم نقوم برسم المنحني البياني للتابعين $f_1(x) = \sin x$ و $f_2(x) = 0.4695x$

فنجد أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في النقاط P , Q , M، حيث فاصلة P تقع في المجال $[-2, -1]$، وفاصلة Q هي صفر $Q(0,0)$، وفاصلة M تقع في المجال $[1,2]$

كما في الشكل (2 ← 6)



الشكل (2-5)

2 – 3 الطريقة التحليلية لعزل جذور المعادلة غير الخطية

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$، و كان $f(a).f(b) < 0$، فإنه يوجد جذر واحد على الأقل للمعادلة $f(x) = 0$ يقع ضمن هذا المجال .

وللتأكد من أن هذا الجذر وحيد يكفي أن يكون التابع $f(x)$ متزايداً أو متناقصاً ضمن هذا المجال , وفي حال $f(a).f(b) > 0$ فهذا يعني أنه لا يوجد جذور للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$ أو يوجد عدد زوجي من الجذور لهذه المعادلة ضمن هذا المجال .

مثال (3) اعزل بالطريقة التحليلية جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

الحل :

$$f(0)f(1) < 0 \Leftarrow \begin{cases} f(0) = 2 > 0 \\ f(1) = -3 < 0 \end{cases}$$

هذا يعني أن يوجد جذر في المجال [0,1]

$$f(2)f(3) < 0 \Leftarrow \begin{cases} f(2) = -2 < 0 \\ f(3) = 11 > 0 \end{cases}$$

يوجد جذر في المجال [2,3]

$$f(4) = 42 > 0$$
$$f(5) = 97 > 0$$

نلاحظ أن التابع $f(x)$ يتزايد , لذلك نبحث عن بقية الجذور في المجالات السالبة

$$f(-1) = 7 > 0$$
$$f(-3)f(-2) \Leftarrow \begin{cases} f(-2) = 6 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{cases}$$

هذا يعني أنه يوجد جذر في المجال $[-3, -2]$

2 – 4 الطرائق العددية لحل المعادلات غير الخطية :

بعد عملية عزل جذور المعادلة $f(x) = 0$ كيف نعين أحد جذور هذه المعادلة وبالدقة التي نريدها؟ هناك عدة طرائق لإيجاد الجذور التقريبية لمثل هذه المعادلات من هذه الطرائق .

2 – 4 – 1 طريقة التنصيف المتكرر

بفرض أنه يوجد للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ جذر واحد ضمن المجال $[a, b]$, لإيجاد القيمة التقريبية لهذا الجذر نقسم المجال $[a, b]$ إلى نصفين فإذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$، فإن $x_0 = \frac{a+b}{2}$ هي جذر المعادلة، أما إذا كان $f(x_0) \neq 0$ فإننا نختار المجال $[x_0, b]$ إذا كا $f(x_0).f(b) < 0$ ، أو نختار المجال $[a, x_0]$ إذا كان $f(a).f(x_0) < 0$، نسمي المجال الذي

اخترناه $[a_1, b_1]$ ونقسم هذا المجال إلى نصفين فإذا كان $f(x_1) =$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ فإن x_1 هي جذر المعادلة، أما إذا كان $f(x_1) \neq 0$ فإننا
نختار المجال $[x_1, b_1]$ إذا كان $f(x_1).f(b_1) < 0$، أو نختار المجال
$[a_1, x_1]$ إذا كان $f(a_1).f(x_1) < 0$ نسمي المجال الذي اخترناه $[a_2, b_2]$

نكرر هذا العمل فنحصل على متتالية من القيم

$$x_0, x_1, x_2, \dots \dots \dots \dots \dots, x_n$$

تتقارب من جذر المعادلة المطلوب

مثال (4) استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد القيم التقريبية لجذور المعادلة

$$f(x) = x^4 - 4x - 1 = 0$$

الحل :

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1)f(2) < 0 \Leftarrow \begin{cases} f(1) = -4 < 0 \\ f(2) = 7 > 0 \end{cases}$$

هذا يعني أنه يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $[1,2]$ للتأكد من أنه وحيد
نوجد المشتق للتابع $f(x)$ فنجد :

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

نلاحظ أن $f'(x) \geq 0$ من أجل جميع قيم x من المجال $[1,2]$، وبالتالي يوجد جذر واحد فقط

نطبق طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد القيمة التقريبية لهذا الجذر

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(x_0) = f(1.5) = -1.9375 < 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في المجال $[1.5,2]$ لأن $f(1.5)f(2) < 0$

$$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$$f(x_1) = 1.3789 > 0$$

الجذر يقع في المجال $[1.5,1.75]$

$$x_2 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$$

$$f(x_2) = -0.5271 < 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في المجال $[1.625,1.75]$

$$x_3 = \frac{1.625+1.75}{2} = 1.6875$$

$$f(x_3) = 0.3591 > 0$$

$$x_4 = \frac{1.625+1.6875}{2} = 1.65625$$

$$f(x_4) = -0.10005 < 0$$

$$x_5 = \frac{1.65625+1.6875}{2} = 1.671875$$

$$f(x_5) = 0.12545 > 0$$

$$x_6 = \frac{1.65625+1.671875}{2} = 1.6640625$$

$$f(x_6) = 0.011687 > 0$$

$$x_7 = \frac{1.65625+1.6640625}{2} = 1.66015625$$

$$f(x_7) = -0.04443 < 0$$

نلاحظ أن

$$|x_7 - x_6| = |1.66015625 - 1.6640625| =$$

$$= 0.00390625 \leq 0.005 = 5\text{x}10^{-3} = \varepsilon$$

لإيجاد بقية الجذور للمعادلة لدينا

$$f(-1)f(0) < 0 \Leftarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(-1) = 4 > 0 \end{cases}$$

هذا يعني أنه يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $[-1,0]$

ونلاحظ أن $f'(x) = 4x^3 - 4 \neq 0$

وهنا $f'(x) < 0$ أي التابع $f(x)$ متناقص على المجال $[-1,0]$

وبالتالي فإنه يوجد جذر واحد فقط ضمن المجال $[-1,0]$ نطبق طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد القيمة التقريبية لهذا الجذر

$$x_0 = \frac{-1+0}{2} = -0.5$$

$$f(x_0) = f(-0.5) = 1.0625 > 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في المجال $[-0.5,0]$

$$x_1 = \frac{-0.5+0}{2} = -0.25$$

$$f(x_1) = 0.003906 > 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في المجال $[-0.25,0]$

$$x_2 = \frac{-0.25+0}{2} = -0.125$$

$$f(x_2) = -0.4998 > 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في المجال $[-0.25,-0.125]$

$$x_3 = \frac{-0.25-0.125}{2} = -0.1875$$

$$f(x_3) = -0.2488 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[-0.25,-0.1875]$

$$x_4 = \frac{-0.25-0.1875}{2} = -0.21875$$

$$f(x_4) = -0.127 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[-0.25, -0.21875]$

$$x_5 = -0.234375$$

$$f(x_5) = -0.0655 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[-0.25, -0.234375]$

$$x_6 = \frac{-0.25-0.234375}{2} = -0.2421875$$

$$f(x_6) = -0.03469 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[-0.25, -0.2421875]$

$$x_7 = -0.24609375$$

نلاحظ أن

$$|x_7 - x_6| = 0.00390625 \leq 0.005 = 5\text{x}10^{-3} = \varepsilon$$

2 – 4 – 1 – 1 – التقارب وتقييم الخطأ :

إذا كان المجال $[a, b]$ يحوي جذراً واحداً للمعادلة $f(x) = 0$ فإنه بتطبيق طريقة التنصيف المتكرر نحصل على المتتالية $x_0, x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_n$ حيث

x_0 منتصف المجال $[a, b]$

x_1 منتصف المجال $[a_1, b_1]$

x_2 منتصف المجال $[a_2, b_2]$

.
.
.

x_n منتصف المجال $[a_n, b_n]$

حيث $f(a_n).f(b_n) < 0 \quad ; \quad \forall n = 1,2, \dots \dots$

إذا رمزنا للخطأ المطلق بالرمز $e_n = |x_n - \alpha| = |\alpha - x_n|$ حيث α جذر المعادلة $f(x) = 0$ فإن α يحقق العلاقة $|\alpha - x_0| \leq \frac{b-a}{2}$

وبشكل عام فإن :

$$|a - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \quad ; \quad n = 0,1,2, \dots \dots \dots$$

نلاحظ أنه كلما زادت n عدد مرات التكرار x_n يقترب من α جذر المعادلة والخطأ يصغر .

مثال (5) :

إذا كان المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ بخطأ لا يتجاوز 10^{-k} فأن عدد التكرارات n التي نقوم بها للحصول على الجذر التقريبي x_n يعين بالعلاقة التالية :

$$n + 1 \geq \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

الحل :

الخطأ المرتكب بطريقة التنصيف المتكرر أصغر من $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ حيث وجدنا $|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ ومنه يمكن تعيين n بالاعتماد على المتراجحة :

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 10^{-k}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد :

$$\log(b-a) \leq \log(2^{n+1}10^{-k}) = (n+1)\log 2 - k$$

ومنه :

$$n+1 \geq \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

وهو المطلوب .

مثال (6) :

أوجد بطريقة التنصيف المتكرر الجذر الموجب الأصغر للمعادلة

$f(x) = 5x - 8\ln x - 8 = 0$ وكم مرة يجب أن نطبق طريقة التنصيف المتكرر لكي لا يتجاوز الخطأ 10^{-3} .

الحل :

$$f(0) = 0 - 8(-\infty) - 8 = \infty > 0$$

$$f(1) = 5 - 8\ln 1 - 8 = -3 < 0$$

$f(0).f(1) < 0$ إذن الجذر الموجب الأصغر يقع في المجال $[0,1]$

بالتعويض بالعلاقة :

$$n + 1 \geq \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

نجد :

$$n + 1 \geq \frac{\log(1-0)+3}{\log 2} = 9.96578$$

ومنه $n \geq 9$ عدد مرات تطبيق طريقة التنصيف المتكرر

$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5 \quad , \quad f(x_0) = f(0.5) = 0.0542 > 0$$

$f(0.5).f(1) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[0.5,1]$

$$x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75 \quad , \quad f(x_1) = -1.9485 < 0$$

إذن الجذر يقع في المجال $[0.5,0.75]$

$$x_2 = 0.625 \quad , \quad f(x_2) = -1.1148 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5625]$

$$x_3 = 0.5625 \quad , \quad f(x_3) = -0.5846 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5625]$

$$x_4 = 0.5312 \quad , \quad f(x_4) = -0.2831 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5312]$

$$x_5 = 0.5156 \quad , \quad f(x_5) = -0.1226 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5156]$

$$x_6 = 0.5078 \quad , \quad f(x_6) = -0.0397 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5078]$

$$x_7 = 0.5039 \quad , \quad f(x_7) = 0.0025 > 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5078]$

$$x_8 = 0.5058 \quad , \quad f(x_8) = -0.01809 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5058]$

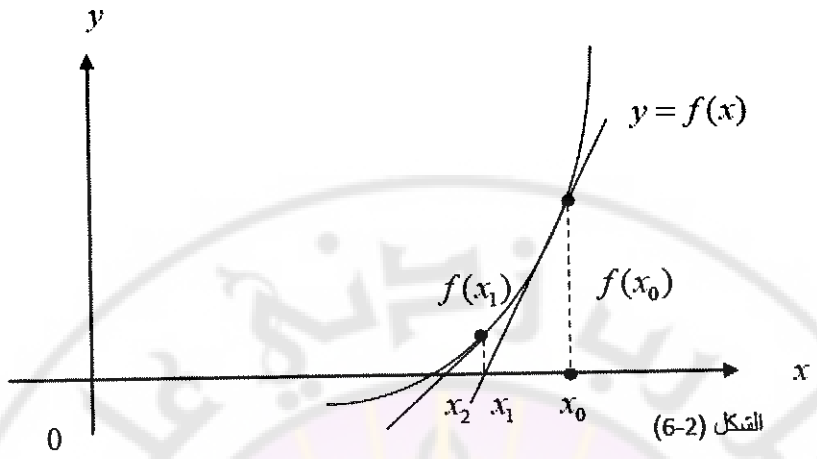
$$x_9 = 0.5048 \quad , \quad f(x_9) = -0.0073 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5048]$

$$x_{10} = 0.50435$$

2 – 4 – 2 – طريقة نيوتن :

بفرض $y = f(x)$ تابع كما هو موضح في الشكل (2 – 6)



الشكل (2-6)

لإيجاد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ نختار نقطة x_0 من المجال $[a, b]$ حيث $f(a).f(b) < 0$ نوجد $f(x_0)$، وننشئ المماس المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ الذي يقطع المحور ox بالنقطة x_1، وتكون معادلة المماس المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ هي :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

وترتيب النقطة x_1 هو $y = 0$ بالتعويض في معادلة المماس نجد :

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

ومنه :

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

نوجد $f(x_1)$، ثم ننشئ المماس المار بالنقطة $(x_1, f(x_1))$ الذي يقطع المحور ox بالنقطة x_2، وبشكل مشابه نجد :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبشكل عام :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ ; \ f'(x_n) \neq 0$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة نيوتن – رافسون ونتوقف عن التكرار عند تحقق الشرط $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ حيث ε مقدار صغير موجب، وتكون القيمة x_{i+1} هي القيمة التقريبية لجذر المعادلة غير الخطية .

مثال (7) :

أوجد بطريقة نيوتن جميع جذور المعادلة التالية :

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$$

الحل :

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0).f(1) < 0$$

إذن يوجد جذر يقع في المجال $[0,1]$

$f(2) = 1 > 0$ إذن $f(1).f(2) < 0$ هذا يعني أنه يوجد جذر يقع في المجال $[1,2]$

$$f(-1) = 4 > 0 \quad , \quad f(-2) = 1 > 0 \quad , \quad f(-3) = -14 < 0$$

ومنه $f(-3).f(-2) < 0$ إذن يوجد جذر سالب يقع في المجال $[-3,-2]$

لنوجد أولاً الجذر السالب نختار $x_0 = -3$

ونطبق طريقة نيوتن :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

فنجد :

$$x_1 = -3 - \frac{(-3)^2 - 4(-3) + 1}{3(-3)^2 - 4} = -3 - \frac{-27+12+1}{3(9)-4}$$

$$= -3 - \frac{-14}{23} = -3 + \frac{14}{23} = -2.3913$$

$$x_2 = -2.3913 - \frac{(-2.3913)^3 - 4(-2.3913) + 1}{3(-2.3913)^2 - 4} = -2.15496$$

$$x_3 = -2.115945$$

$$x_4 = -2.11695$$

ثم نوجد الجذر الموجب الأصغر الواقع في المجال $[0,1]$

نختار $x_0 = 0$ ، ونطبق طريقة نيوتن :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_1 = 0 - \frac{1}{-4} = 0.25$$

$$x_2 = 0.25 - \frac{(0.25)^3 - 4(0.25) + 1}{3(0.25)^2 - 4} = 0.2541$$

$$x_3 = 0.2541$$

وأخيراً لنوجد الجذر الموجب الأكبر الواقع في المجال $[1,2]$

نختار $x_0 = 2$ ، ونطبق طريقة نيوتن :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$$

$$x_2 = 1.875 - \frac{(01.875)^3 - 4(1.875) + 1}{3(1.875)^2 - 4} = 1.861$$

$$x_3 = 1.681$$

نظرية :

إذا كان $f(a).f(b) < 0$ وكان $f'(x), f''(x)$ غير معدومين ويحافظان على إشاراتيهما فوق المجال $[a,b]$ فمن أجل أي نقطة $x_0 \in [a,b]$ التي تحقق $f(x_0).f''(x_0) > 0$ يمكن باستخدام طريقة نيوتن حساب القيمة التقريبية للجذر الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$

مثال (8)

بتطبيق طريقة نيوتن , عين الجذر التقريبي للمعادلة :

$$f(x) = \sin x - x\cos x = 0$$

والموجود ضمن المجال $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ وذلك بتقريب ثالث .

الحل :

نحسب المشتقين الأول والثاني للقابع $f(x) = \sin x - x\cos x$ فنجد :

$$f'(x) = x\sin x \quad ; \quad f''(x) = \sin x + x\cos x$$

ومن أجل : $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ يكون $f''(x) < 0$، و $f'(x) < 0$

ومن أجل : $x = x_0 = \frac{3\pi}{2}$ يكون $f''(x_0) = -1$، و $f(x_0) = -1$

أي أن : $f(x_0).f''(x_0) > 0$

ومنه يمكننا تطبيق طريقة نيوتن بتقريب أول : $x_0 = \frac{3\pi}{2} = 4.71239$

وبتقريب ثان : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4.71239 - \frac{-1}{-4.712} =$
4.50004

وبتقريب ثالث : $x_2 = 4.50004 - \frac{-0.0291}{-4.0399} = 4.49344$

فالجذر المطلوب عندئذ هو $\alpha \approx 4.49344$ (راديان).

2 – 4 – 2 – 1 – إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية بالاعتماد على طريقة نيوتن

يمكن بالاعتماد على طريقة نيوتن إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية وذلك كما يلي :

إذا كان المطلوب هو إيجاد الجذر البائي للعدد الحقيقي a

نفرض أن القيمة التقريبية لهذا الجذر هي x أي :

$$x = \sqrt[P]{a} = (a)^{\frac{1}{P}}$$

ومنه :

$$x^P = a \;\Rightarrow\; f(x) = x^P - a = 0$$

$$f'(x) = Px^{P-1}$$

بالتعويض بطريقة نيوتن :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

نجد :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^P - a}{px_n^{p-1}}$$

وهذه العلاقة تمكننا من إيجاد الجذور للأعداد الحقيقية .

مثال (9) :

باستخدام طريقة نيوتن استخرج علاقة لإيجاد الجذر التقريبي التكعيبي لأي عدد حقيقي $a > 0$، ثم طبق ذلك من أجل $a = 5$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية .

الحل :

نفرض : $x = \sqrt[3]{a} \Rightarrow x^3 = a$

ومنه : $f(x) = x^3 - a = 0$

بالتعويض بطريقة نيوتن :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

نجد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2})$$

ثم نفرض $x_0 = 2$ ونعوض بالعلاقة السابقة فنجد :

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[2(2) + \frac{5}{(2)^2}\right] = \frac{23}{12} = 1.91667$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left[2(1.91667) + \frac{5}{(1.91667)^2}\right] = 1.73146$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left[2(1.73146) + \frac{5}{(1.73146)^2}\right] = 1.71024$$

$$x_4 = \frac{1}{3}\left[2(1.71024) + \frac{5}{(1.71024)^2}\right] = 1.70998$$

$$x_5 = \frac{1}{3}\left[2(1.70998) + \frac{5}{(1.70998)^2}\right] = 1.70998$$

إذن القيمة التقريبية للجذر الثالث للعدد 5 هي : $x = 1.70998$

مثال (10)

أوجد القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[5]{12}$

الحل :

نفرض : $x = \sqrt[5]{12} \Rightarrow x^5 = 12$

ومنه :

$$f(x) = x^5 - 12 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4$$

بالتعويض بطريقة نيوتن :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

وبفرض $x_0 = 1.5$ نجد :

$$x_1 = 1.5 - \frac{(1.5)^2 - 12}{4(1.5)^4} = 1.5 + 0.17407 = 1.6741$$

$$x_2 = 1.6741 - \frac{(1.6741)^2 - 12}{4(1.6741)^4} = 1.6448$$

$$x_3 = 1.6448 - \frac{(1.6448)^2 - 12}{4(1.6448)^4} = 1.6438$$

$$x_4 = 1.6438 - \frac{(1.6438)^2 - 12}{4(1.6438)^4} = 1.6438$$

ومنه : $\sqrt[5]{12} \approx 1.6438$

2 – 4 – 3 – طريقة النقطة الثابتة :

تعريف :

نقول عن التابع $g : R \to R$ إنه تقليصي على المجال $[a, b]$ إذا كانت المسافة بين $g(x)$ و $g(y)$ أصغر من المسافة بين x و y، وبمعنى أدق إذا

وجد ثابت k , $0 \leq k \leq 1$ بحيث مهما كان x, y عددين حقيقيين من المجال $[a, b]$ فإن :

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

نظرية :

بفرض أن التابع g قابل للتفاضل على المجال $[a, b]$

إذا وجد $0 \leq l < 1$ بحيث :

$$\forall x \in [a, b] \quad : \quad |g'(x)| \leq l < 1$$

فإن g تابع تقليصي على المجال $[a, b]$.

الإثبات :

بتطبيق نظرية القيمة الوسطى , مهما يكن x, y عددين حقيقيين مختلفين من المجال $[a, b]$ فإنه يوجد عدد c بين x, y بحيث :

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(c)$$

نأخذ القيمة المطلقة للطرفين فنجد :

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = |g'(c)| \leq l \;\Rightarrow\; |g(x) - g(y)| \leq l|x - y|$$

وهذا يعني أن g تابع تقليصي على المجال $[a, b]$

مثال (11)

أثبت أن التابع $g(x) = \frac{2}{3}\sin x$ تقليصي على المجال $[0,\pi]$

الحل :

$$\forall x \in [0,\pi] \quad : \quad |g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\cos x\right| = \frac{2}{3}|\cos x| \leq \frac{2}{3} < 1$$

تعريف :

نقول إن التابع g يملك نقطة ثابتة α إذا تحقق الشرط $g(\alpha) = \alpha$

مثال (12)

أثبت أن $\frac{1}{2}$ نقطة ثابتة للتابع $g(x) = 3x - 1$

الحل :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

2 – 5 – نظرية النقطة الثابتة

إذا كان $g: [a,b] \rightarrow [a,b]$ تابع تقليصي :

$$\exists k\,; 0 \leq k < 1 : \forall x, y \in [a,b]: |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

فإن :

1 – g يملك نقطة ثابتة وحيدة داخل المجال $[a,b]$ أي أن المعادلة $g(x) =$ x تقبل حلاً وحيداً α

2 – بفرض $c \in [a,b]$ ولتكن u_n الحل الوحيد للعلاقة التكرارية :

$$u_{n+1} = g(u_n) \quad ; \quad u_0 = c$$

المتتالية u_n تنتهي إلى α عندما تنتهي n إلى ∞ أي :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$$

هذا يعني أن حدود المتتالية u_n تشكل حلولاً تقريبية للمعادلة $g(x) - x = 0$.

الإثبات :

1 – بفرض $f(x) = g(x) - x$, نلاحظ أن f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ لأنه عبارة عن حاصل فرق تابعين مستمرين .

كذلك $f(a).f(b) \le 0$ لأن

$$g(a) \in [a,b] \Rightarrow a \le g(a) \Rightarrow g(a) - a \ge 0 \Rightarrow f(a) \ge 0$$

$$g(b) \in [a,b] \Rightarrow g(b) \le b \Rightarrow g(b) - b \le 0 \Rightarrow f(b) \le 0$$

بالاعتماد على نظرية القيمة الوسطى للتوابع المستمرة , يوجد على الأقل α من المجال $[a,b]$ بحيث :

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

لنثبت أن الحل α وحيد .

نفرض أنه يوجد حل آخر β يحقق العلاقة $g(\beta) = \beta$، وبما أن g تابع تقليصي فإن :

$$|g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta| \quad ; \quad 0 \leq k < 1$$

ولكن $g(\alpha) = \alpha$ و $g(\beta) = \beta$، ومنه فإن المتراجحة السابقة تكتب كما يلي :

$$|\alpha - \beta| \leq k|a - \beta| \leftrightarrow (1-k)|\alpha - \beta| = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

لأن $k \neq 1$

2 – بفرض $c \in [a,b]$ ولتكن u_n الحل الوحيد للعلاقة التكرارية :

$$u_{n+1} = g(u_n) \quad ; \quad u_0 = c$$

لنثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$

$$\begin{aligned}|u_n - \alpha| &= |g(u_{n-1}) - g(\alpha)| \leq k|u_{n-1} - \alpha| = k|g(u_{n-2}) - g(\alpha)| \\ &\leq \mathrm{k}^2|u_{n-2} - \alpha| \leq \ldots\ldots \leq \mathrm{k}^n|u_0 - \alpha| = \mathrm{k}^n|c - \alpha|\end{aligned}$$

وبما أن $0 \leq k < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} k^n|c - \alpha| = 0$

هذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$

مثال (13) :

حل المعادلة التالية $\cos x - 4x = 0$ بطريقة النقطة الثابتة .

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos x - x = 0$$

$$f(0) = \frac{1}{4} > 0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

ومنه $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$، إذن يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$x = g(x) = \frac{1}{4}\cos x$$

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ , \ |g'(x)| \le \frac{1}{4}|\sin x| \le \frac{1}{4} < 1$$

هذا يعني أن التابع g تقليصي

$$g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0,\frac{1}{4}\right] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos a - a = 0$$

هذا يعني أن المعادلة السابقة بالاعتماد على نظرية النقطة الثابتة تملك حلاً وحيداً α في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ثم نفرض $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}\cos u_n$

$$u_1 = \frac{1}{4}\cos u_0 = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0.1768$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\cos u_1 = 0.2461$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\cos u_2 = 0.2425$$

$$u_4 = \frac{1}{4}\cos u_3 = 0.2427$$

مثال (14) أوجد الجذر الموجب للمعادلة $f(x) = x^2 - 2x - 8$ بطريقة النقطة الثابتة .

الحل :

$$f(3) = -5 < 0 \quad , \quad f(5) = 7 > 0$$

ومنه فإن $f(3).f(5) < 0$

هذا يعني أن الجذر الموجب موجود في المجال $[3,5]$

نختار تابع التكرار بالشكل $x = g(x) = \sqrt{2x+8}$

نلاحظ أن $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

ومنه $|g'(x)| < 1$ وذلك $\forall x \in [3,5]$

أي أن شرط تقارب طريقة التكرار محقق .

نختار $x_0 = 5$ ونطبق $x_{n+1} = g(x_n)$ فنجد :

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{2x_0 + 8} = \sqrt{2(5)+8} = \sqrt{18} = 4.243$$
$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{2(4.243)+8} = \sqrt{16.486} = 4.060$$
$$x_3 = g(x_2) = \sqrt{2(4.060)+8} = \sqrt{16.12} = 4.015$$
$$x_4 = g(x_3) = \sqrt{2(4.015)+8} = \sqrt{16.03} = 4.004$$
$$x_5 = g(x_4) = \sqrt{16.004} = 4.001$$
$$x_6 = g(x_5) = \sqrt{16.001} = 4.000$$

ثم نختار تابع التكرار بالشكل $x = g(x) = \frac{2x+8}{x}$

$$g'(x) = \frac{2x-2x-8}{x^2} = -\frac{8}{x^2}$$

نلاحظ أن $|g'(x)| = \frac{8}{x^2} < 1$ وذلك $\forall x \in [3,5]$

أي أن شرط التقارب محقق .

نختار $x_0 = 5$ فنجد :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{2x_0 + 8}{x_0} = \frac{2(5)+8}{5} = \frac{18}{5} = 3.600$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{2x_1 + 8}{x_1} = \frac{2(3.6)+8}{3.6} = \frac{18}{3.6} = 4.222$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{2(4.222)+8}{4.222} = \frac{15.2}{4.222} = 3.895$$

$$x_4 = g(x_3) = \frac{2(3.895)+8}{3.895} = 4.054$$

$$x_5 = g(x_4) = 3.973 \qquad x_6 = g(x_5) = 4.014$$

$$x_7 = g(x_6) = 3.998 \qquad x_8 = g(x_7) = 4.004$$

$$x_9 = g(x_8) = 3.998 \qquad x_{10} = g(x_9) = 4.001$$

$$x_{11} = g(x_{10}) = 4.000$$

ويمكن أن نختار تابع التكرار بالشكل $x = g(x) = \frac{x^2-8}{2}$

$$g'(x) = x$$

ومنه $|g'(x)| = |x| > 1$ وذلك $\forall x \in [3,5]$

وهذا يعني أن المتتالية التي نحصل عليها بتطبيق الصيغة $x_{n+1} = g(x_n)$ ستكون متباعدة ويمكن التأكد من ذلك .

نختار $x_0 = 5$ فنجد :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{(5)^2 - 8}{2} = \frac{17}{2} = 8.500$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{(8.500)^2 - 8}{2} = \frac{64.25}{2} = 32.125$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{(32.125)^2 - 8}{2} = \frac{1024.0156}{2} = 512.008$$

مثال (15) أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = x\,e^x - 1$ حيث $\varepsilon = 0.005$

الحل :

$$f(0) = -1 < 0 \quad , \quad f(1) = 1.7183 > 0$$

ومنه $f(0).f(1) < 0$

أي أن الجذر للمعادلة موجود في المجال $[0,1]$

نختار تابع التكرار $x = g(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

ومنه $|g'(x)| = \left|\frac{1}{e^x}\right| < 1$ وذلك $\forall x \in [0,1]$

نختار $x_0 = 1$ ونطبق الصيغة $x_{n+1} = g(x_n)$

$$x_1 = g(x_0) = e^{-x_0} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.36788$$
$$x_2 = g(x_1) = e^{-x_1} = e^{-0.36788} = 0.69220$$
$$x_3 = g(x_2) = e^{-x_2} = e^{-0.69220} = 0.50047$$
$$x_4 = g(x_3) = e^{-0.50047} = 0.60624$$
$$x_5 = g(x_4) = e^{-0.60624} = 0.54540$$
$$x_6 = g(x_5) = e^{-0.54540} = 0.57961$$
$$x_7 = g(x_6) = e^{-0.57961} = 0.56012$$
$$x_8 = g(x_7) = e^{-0.56012} = 0.57114$$
$$x_9 = g(x_8) = e^{-0.57114} = 0.56488$$
$$x_{10} = g(x_9) = e^{-0.56488} = 0.56843$$
$$|x_{10} - x_9| = |0.56843 - 0.56488| = 0.00355 < 0.005$$

إذن الجذر التقريبي للمعادلة هو $\alpha = x_{10} = 0.56843$

2 – 6 – الحلول العددية لجملة المعادلات غير الخطية :

بفرض :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

جملة المعادلات غير خطية، والمطلوب إيجاد قيم $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ التي تحقق جملة المعادلات غير الخطية السابقة .

للتبسيط نأخذ معادلتين غير خطيتين بمجهولين :

$$f(x,y) = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

حيث f, g تابعان قابلان للاشتقاق، ويمكن حل المعادلتين باستخدام الطرق العددية التالية :

2 – 6 – 1 – طريقة نيوتن :

لإيجاد حل المعادلتين غير الخطيتين ننشر كلاً من التابعين f, g حسب تايلور بجوار النقطة (x_n, y_n)،وبحذف الحدود غير الخطية في $(x - x_n)(y - y_n)$ فنجد :

$$f(x,y) = f(x_n, y_n) + f_x(x - x_n) + f_y(y - y_n) = 0$$
$$g(x,y) = g(x_n, y_n) + g_x(x - x_n) + g_y(y - y_n) = 0$$

بحل المعادلتين السابقتين بالاعتماد على طريقة كرامر نجد :

$$x - x_0 = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

حيث f_x, f_y, g_x, g_y المشتقات الجزئية لـ f, g

$$J = J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

ومن أجل $J(x_n, y_n) \neq 0$ يمكن كتابة العلاقات التكرارية التالية :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

ونتوقف عن التكرار عند تحقق ما يلي :

$$|x_{k+1} - x_k| \varepsilon \quad : \quad |y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب .

مثال (16)

باستخدام طريقة نيوتن وبفرض $(x_0, y_0) = (0.5,0.1)$ أوجد حل المعادلتين :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad x.y = 0$$

الحل :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad , \quad g(x,y) = x.y$$

$$f_x = 2x \quad ; \quad g_x = y$$

$$f_y = 2y \quad ; \quad g_y = x$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 - y^2)$$

$$J(x_0, y_0) = J(0.5, 0.1) = 2(0.25 - 0.01) = 0.48 \neq 0$$

$$J(x_0, y_0) = 0.48 \quad , \quad f(x_0, y_0) = -0.74 \quad , \quad g(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0) = 1 \quad , \quad f_y(x_0, y_0) = 0.2$$

$$g_x(x_0, y_0) = 0.1 \quad , \quad g_y(x_0, y_0) = 0.5$$

بالتعويض بالعلاقتين :

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} \quad ; \quad y_1 = y_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

نجد :

$$x_1 = 0.5 - \frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} -0.74 & 0.2 \\ 0.05 & 0.5 \end{vmatrix} = 1.2917$$

$$y_1 = 0.1 - \frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} 1 & -0.74 \\ 0.1 & 0.05 \end{vmatrix} = -0.1583$$

$$x_1 = 1.2917 \quad , \quad y_1 = -0.1583$$

$$J(x_1, y_1) = 3.2869 \ , \ f(x_1, y_1) = 0.6934 \ , \ g(x_1, y_1) = 0.204$$

$$f_x = 2.5834 \quad , \quad f_y = -0.3166$$

$$g_x = -0.1583 \quad , \quad g_y = 1.2917$$

بالتعويض نجد :

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 1.2917 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 0.6934 & -0.3166 \\ 0.2045 & 1.2917 \end{vmatrix} = 0.9995$$

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= -0.1583 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 2.5834 & 0.6934 \\ -0.1583 & 0.2045 \end{vmatrix} = -0.3524$$

$$x_2 = 0.9995 \quad , \quad y_2 = -0.3524$$

$$J(x_2,y_2)=1.7496 \quad , \quad f(x_2,y_2)=0.1232 \quad , \quad g(x_2,y_2)=-0.3522$$
$$f_x=1.999 \quad , \quad f_y=-0.7048$$
$$g_x=-0.3524 \quad , \quad g_y=0.9995$$

بالتعويض نجد :

$$x_3=x_2-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$
$$=0.9995-\frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 0.1232 & -0.7048 \\ 1.7496 & 0.9995 \end{vmatrix}=1.0710$$

$$y_3=y_2-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$
$$=-0.3524-\frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 1.999 & 0.1232 \\ -0.3524 & 1.7496 \end{vmatrix}=0.0252$$
$$x_3=1.0710 \quad , \quad y_3=0.0252$$

بنفس الطريقة نجد :

$$x_4 = 1.0026 \quad , \quad y_4 = 0.0016$$
$$x_5 = 1.00009 \quad , \quad y_5 = 0.000008$$

ومنه فإن الحل يقترب من $(1,0)$

2 – 6 – 2 – طريقة التكرار :

لإيجاد حل المعادلتين غير الخطيتين :

$$f(x,y) = 0 \ , \ g(x,y) = 0$$

نختار تابعي التكرار بالشكل :

$$x = F(x,y) \quad , \quad y = G(x,y)$$

ونكتب علاقتي التكرار :

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \quad , \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n)$$

تتقارب المتتاليتان الناتجتان من تطبيق علاقتي التكرار إذا تحقق ما يلي :

$$|F_x| + |F_y| \le k < 1$$
$$|G_x| + |G_y| \le k < 1$$

مثال (17)

أوجد بطريقة التكرار حل المعادلتين :

$$x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

حيث : $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

الحل :

نكتب المعادلتين بالشكل التالي :

$$x = F(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6} + \frac{1}{2} \quad , \quad y = G(x,y) = \frac{x^3-y^3}{6} + \frac{1}{3}$$

$$F_x = \frac{x^2}{2} \quad , \quad F_y = \frac{y^2}{2}$$

$$G_x = \frac{x^2}{2} \quad , \quad G_y = -\frac{y^2}{2}$$

$$|F_x| + |F_y| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| = \left|\frac{x^2}{2}\right| + \left|\frac{y^2}{2}\right| = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{0.25+0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

هذا يعني أن شرط التقارب محقق وبتطبيق العلاقتين التكراريتين :

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^3 + y_n^3) + \frac{1}{2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^3 - y_n^3) + \frac{1}{3}$$

نجد :

$$x_1 = \frac{1}{6}(x_0^3 + y_0^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(0.125 + 0.125) + \frac{1}{2} = 0.542$$
$$y_1 = \frac{1}{6}(x_0^3 - y_0^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(0.125 - 0.125) + \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(x_1^3 + y_1^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left[(0.542)^3 + (0.3333)^3\right] + \frac{1}{2} = 0.533$$
$$y_2 = \frac{1}{6}(x_1^3 - y_1^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left[(0.542)^3 - (0.3333)^3\right] + \frac{1}{3} = 0.353$$
$$x_3 = \frac{1}{6}(x_2^3 + y_2^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left[(0.533)^3 + (0.353)^3\right] + \frac{1}{2} = 0.532$$
$$y_3 = \frac{1}{6}(x_2^3 - y_2^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left[(0.533)^3 - (0.353)^3\right] + \frac{1}{3} = 0.351$$
$$x_4 = \frac{1}{6}(x_3^3 + y_3^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left[(0.532)^3 + (0.351)^3\right] + \frac{1}{2} = 0.532$$
$$y_4 = \frac{1}{6}(x_3^3 - y_3^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left[(0.532)^3 - (0.351)^3\right] + \frac{1}{3} = 0.531$$

إذاً الجذر التقريبي هو $(0.532, 0.531)$.

مثال (18)

أوجد حل المعادلتين :

$$x = \sin y \quad , \quad y = \cos x$$

بطريقتين مختلفتين حيث $(x_0, y_0) = (1,1)$

الحل :

أولاً بطريقة نيوتن :

نكتب المعادلتين السابقتين بالشكل التالي :

$$f(x,y) = \cos x - y \quad , \quad g(x,y) = x - \sin y$$

$$f_x = -\sin x \; g_x = 1 \quad ; \quad f_y = -1 \quad g_y = -\cos y$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix} = \sin x \cos x + 1$$

$$J(x_0, y_0) = \sin x \cos x + 1 = (0.8415)(0.5403) + 1 = 1.4547 \neq 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.4597 & -1 \\ 0.1585 & -0.5403 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.4069}{1.4547} = 1 - 0.2797 = 0.7203$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.8415 & -0.4597 \\ 1 & 0.1585 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.3263}{1.4547} = 1 - 0.2243 = 0.7757$$

$$J(x_1, y_1) = \sin 0.720 . \cos 0.7757 + 1$$

$$= (0.6596)(0.7139) + 1 = 1.4709$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.7203 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} -0.0241 & -1 \\ 0.0020 & -0.7139 \end{vmatrix} = 0.7203 - \frac{0.0192}{1.4709}$$

$$= 0.7203 - 0.0130 = 0.7073$$

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$y_1 = 0.7757 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} 0.6596 & -0.0241 \\ 1 & 0.0020 \end{vmatrix} = 0.7757 - \frac{0.0228}{1.4709}$$

$$= 0.7757 - 0.0155 = 0.7602$$

ثانياً : <u>بطريقة التكرار :</u>

$$x = F(x,y) = \sin x \quad , \quad y = G(x,y) = \cos x$$

ولنطبق علاقتي التكرار :

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) = \sin y_n \quad , \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n) = \cos xn$$

$$x_1 = \sin y_0 = \sin 1 = 0.8415$$
$$y_1 = \cos x_0 = \cos 1 = 0.5403$$
$$x_2 = \sin y_1 = \sin 0.5403 = 0.5144$$
$$y_2 = \cos x_1 = \cos 0.8415 = 0.6663$$
$$x_3 = \sin y_2 = \sin 0.6663 = 0.6181$$
$$y_3 = \cos x_2 = \cos 0.5145 = 0.8706$$
$$x_4 = \sin y_3 = \sin 0.8706 = 0.7647$$
$$y_4 = \cos x_3 = \cos 0.6181 = 0.8150$$
$$x_5 = \sin y_4 = \sin 0.8150 = 0.7277$$
$$y_5 = \cos x_4 = \cos 0.7647 = 0.7216$$
$$x_6 = \sin y_5 = 0.6606 \ , \ y_6 = \cos x_5 = 0.7467$$
$$x_7 = \sin y_6 = 0.6792 \ , \ y_7 = \cos x_6 = 0.7896$$
$$x_8 = \sin y_7 = 0.7101 \ , \ y_8 = \cos x_7 = 0.7781$$
$$x_9 = \sin y_8 = 0.7019 \ , \ y_9 = \cos x_8 = 0.7583$$
$$x_{10} = \sin y_9 = 0.6877 \ , \ y_{10} = \cos x_9 = 0.7636$$
$$x_{11} = \sin y_{10} = 0.6915 \ , \ y_{11} = \cos x_{10} = 0.7727$$

7-2 تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة غير الخطية :

تستخدم الحدوديات بشكل كبير في التحليل العددي، وبخاصة في مجال البحث عن قيمة الحدودية عند قيمة معينة للمتغير x .

والحدودية من الدرجة n تكتب بالشكل :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

لمعرفة عدد الأصفار (الجذور) الحقيقية لكثيرة الحدود $p_n(x)$ نذكر النظريتين الآتيتين :

1 – نظرية ديكارت :

إن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة لكثيرة الحدود $p_n(x)$ يساوي عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية الأمثال $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$، أو ينقص عنه بعدد زوجي، مع العلم أن الأمثال المعدومة لا تحسب . أما لتعيين عدد الأصفار الحقيقية السالبة فيكفي أن نعيد ما سبق من أجل كثيرة الحدود $p_n(-x)$.

مثال (19)

ليكن لدينا الحدودية $p_3(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 35 = 0$ ، والمطلوب حدد عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة لهذه الحدودية .

الحل :

إن متتالية الأمثال لكثيرة الحدود $p_3(x)$ هي

$$-35 \quad 5 \quad -7 \quad 1$$

من الواضح أنها تغير إشاراتها ثلاث مرات .

أي أن الجذور الحقيقية الموجبة إما 3 أو 1 .

ولتحديد عدد الجذور السالبة نبدل في كثيرة الحدود $p_3(x)$ كل x بـ $-x$ فنحصل على الحدودية التالية :

$$p_3(-x) = -x^3 - 7x^2 - 5x - 35 = 0$$

متتالية الأمثال لكثيرة الحدود $p_4(-x)$:

$$-35 \quad -5 \quad -7 \quad -1$$

ومن الواضح أنه لا يوجد تغيير في الإشارة أي لا يوجد جذر حقيقي سالب .

2 – نظرية بودان :

إذا كان $p_n^{(k)}(a)$ هو المشتقة من المرتبة k لكثيرة الحدود $p_n(x)$ في النقطة a وإذا كان N_a هو عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية قيم المشتقات

$$p_n(a), p'_n(a), p''_n(a), p'''_n(a), \ldots, p_n^{(k)}(a), \ldots, p_n^{(n)}(a)$$

وليكن N_b هو عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية قيم المشتقات التالية في النقطة b

$$p_n(b), p'_n(b), p''_n(b), p'''_n(b), \ldots, p_n^{(k)}(b), \ldots, p_n^{(n)}(b)$$

عندئذ يكون عدد الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود $p_n(x)$ الموجودة في المجال $[a,b]$ هو $|N_b - N_a|$ أو ينقص عنه بعدد زوجي .

مثال (20)

لتكن كثيرة الحدود التالية

$$p_4(x) = x^4 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15 = 0$$

والمطلوب ما عدد الأصفار الحقيقية الموجودة في المجال $[0,5]$ ثم عين المجالات التي تحوي هذه الأصفار ؟

الحل :

$$p'_4(x) = 4x^3 - 30x^2 + 64x - 38$$
$$p_4^n(x) = 12x^2 - 60x + 64$$
$$p_4^m(x) = 24x - 60$$
$$p_4^{(4)}(x) = 24$$

ولنكتب جدول الإشارات الموافقة للقيم ضمن المجال $[0,5]$

x_i	[illegible]	[illegible]	$p_4^n(x_i)$	$p_4^m(x_i)$	$p_4^{(4)}(x_i)$	N_{x_i}
0	+	−	+	−	+	4
1	+	+	+	−	+	2
2	+	+	−	−	+	2
3	+	−	−	+	+	2
4	−	−	+	+	+	1
5	+	+	+	+	+	0

نلاحظ أن عدد الأصفار الحقيقية في المجال $[0,5]$ هو

$$|N_5 - N_0| = |0 - 4| = 4$$

أو جذرين أو لا يوجد جذور حقيقية .

وعدد الأصفار في المجال $[0,1]$ هو $|N_1 - N_0| = 2$

وعدد الأصفار في المجال $[3,4]$ هو $|N_4 - N_3| = 1$

وعدد الأصفار في المجال $[4,5]$ هو $|N_5 - N_4| = 1$

طريقة هورنر في إيجاد قيمة كثيرة الحدود في نقطة محددة :

في كثير من الأحيان نجد صعوبة في إيجاد قيمة كثيرة الحدود في نقطة محددة $x = a$، أو إيجاد قيمة المشتقة $p_n^{(k)}(a)$ بشكل مباشر .

الطريقة التالية التي تسمى طريقة هورنر تساعدنا في مثل هذه الحالات

لتكن لدينا كثيرة الحدود التالية :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

التي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$p_n(x) = \Big((\ldots\ldots(\big(a_n x + a_{n-1}\big)x + a_{n-2}\Big)x + \ldots\ldots + a_2)x + a_1)x + a_0$$

عندما نريد إيجاد كثيرة الحدود في النقطة $x = a$ نقوم بما يلي :

نكتب أمثال كثيرة الحدود مرتبة اعتباراً من a_n وحتى a_0 في صفر واحد بحيث نضع 0 مكان الأمثلة المعدومة .

ونترك تحته سطراً فارغاً , ثم نضع خط تحت هذه المقادير ، ومقابل السطر الثاني الفارغ نكتب $x = a$، وفي السطر الثالث تحت الخط مباشرة نجري العمليات التالية :

نضع $a_n = q_n$ تحت a_n مباشرة , ثم نجري عملية الضرب $q_n . a$، ونضع الناتج تحت a_{n-1}، ونجمع نرمز لناتج الجمع q_{n-1}، ونجري عملية الضرب $q_{n-1} . a$، ونضع الناتج تحت a_{n-2}، ونجمع ونرمز لناتج الجمع بـ q_{n-2}، ونجري عملية الضرب مرة ثالثة $q_{n-2} . a$، ونضع الناتج تحت a_{n-3}، و هكذا .....حتى نصل إلى q_1، ونجري عملية الضرب $q_1 . a$، ونضع الناتج تحت a_0، ونجمع فيكون الناتج q_0 هو قيمة كثيرة الحدود $p_n(x)$ عند النقطة $x = a$.

ويمكن ترتيب ذلك بالدول التالي ولاذي يسمى جدول هورنر

$$\begin{array}{lcccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ x = a & q_n a & q_{n-1} a & \ldots\ldots & q_3 a & q_2 a & q_1 a & \\ \hline & q_n & q_{n-1} & q_{n-2} & \ldots\ldots & q_2 & q_1 & q_0 = p_n(a) \end{array}$$

مثال (21)

أوجد قيمة كثيرة الحدود

$$p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

في النقطة $x = 3$ بطريقة هورنر .

الحل :

نكتب سطر الأمثال ونطبق طريقة هورنر

	1	-6	8	8	4	-40
$x=3$		3	-9	-3	15	57
1	-3	-1	5	19	$17=p(3)$	

أي $p_5(3)=17$

وحاصل القسمة (ناتج القسمة)

$$q(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+19$$

يمكن كتابة كثيرة الحدود بالشكل التالي :

$$p_n(x)=(x-a)q_1(x)+R$$

حيث R هو باقي القسمة، وكما رأينا فإن $P_n(a)=R$. أما $q_1(x)$ فهو حاصل القسمة، وهي كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$.

نحسب مشتقة الحدودية $p_n(x)=(x-a)q_1(x)+R$

فنجد :

$$p'_n(x) = q_1(x) + (x-a)q'_1(x)$$

بتعويض $x = a$ في هذه العلاقة نجد :

$$p'_n(a) = q_1(a)$$

وبما أن $q_1(b)$ هو حاصل قسمة $q_1(x)$ على $(x-a)$ والذي يمكن أن نرمز له بالرمز R_1 أي أن :

$$q_1(x) = (x-a)q_2(x) + R_1$$

فإن $p'_n(a) = R_1$

وبالتالي فإننا نستطيع حساب قيمة مشتقة $p_n(x)$ عند أية نقطة x دون إيجاد المشتقة $p'(x)$

و يمكننا تعيين بقيمة المشتقات كما يلي :

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= p_n(a) + (x-a)q_1(x) \\
&= p_n(a) + (x-a)\left[q_1(a) + (x-a)q_2(x)\right] \\
&= p_n(a) + (x-a)q_1(a) + (x-a)^2 q_2(x) \\
&= p_n(a) + (x-a)q_1(a) + (x-a)^2\left[q_2(a) + (x-a)q_3(x)\right]
\end{aligned}$$

وهكذا بالتتابع ..... فنجد :

$$p_n(x) = p_n(a) + (x-a)q_1(a) + (x-a)^2 q_2(a) + (x-a)^3\left[q_3(a) + (x-a)q_4(x)\right] + \dots$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع منشور تايلور للتابع $p_n(x)$ في جوار النقطة $x = a$ التالي :

$$p_n(x) = p_n(a) + \frac{(x-a)}{1!}p'_n(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}p''_n(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}p_n^{(n)}(a) + \dots$$

نحصل على العلاقات التالية :

$$q_1(a) = \frac{p'_n(a)}{1!} = p'_n(a)$$

$$q_1(a) = \frac{p''_n(a)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$q_n(a) = \frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}$$

مثال (22)

بتطبيق طريقة هورنر عين قيمة الحدودية التالية :

$$p_4(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 7$$

عند النقطة $x = 3$ ثم عين قيم المشتقات المتتالية لهذه الحدودية عند النقطة $x = 3$.

الحل :

بتطبيق طريقة هورنر لتعيين قيمة الحدودية عند $x = 3$:

	1	-5	5	5	-7
$x = 3$		3	-6	-3	6
1	-2	-1	2	$-1 = q_4(3)$	

أي $p_4(3) = -1$ حاصل القسمة $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

لإيجاد المشتق الأول نطبق طريقة هورنر

	1	-2	-1	2
$x = 3$		3	3	6
	1	1	2	$8 = q_1(3)$

وبما أن $q_1(3) = q_1(a) = p'(3) = p'_4(3)$

فإن $p'_4(3) = 8$

حاصل القسمة الجديد $q_2(x) = x^2 + x + 2$

لإيجاد المشتق الثاني نكتب :

$$\begin{array}{lccc} & 1 & 1 & 2 \\ x = 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 14 = q_2(3) \end{array}$$

وبما أن $q_2(3) = \dfrac{p''_4(3)}{2!}$

فإن $q''_4(3) = 2(14) = 28$

وحاصل القسمة $q_3(x) = x + 4$

ولإيجاد المشتق الثالث نكتب :

$$\begin{array}{lcc} & 1 & 4 \\ x = 3 & & 3 \\ \hline & 1 & 7 = q_3(3) \end{array}$$

وبما أن $q_3(3) = \dfrac{p''_4(3)}{3!}$

فإن $p'''(3) = 6(7) = 42$

وحاصل القسمة $q_4(x) = 1$

وبما أن $q_4(3) = 1 = \frac{p_4^{(4)}(3)}{4!}$

فإن $p_4^{(4)}(3) = (1)(4!) = 24$

Damascus University

تمارين

1 – اعزل جذور المعادلة $f(x) = x^4 - 14x - 1 = 0$

2 – حل المعادلتين التاليتين بالطريقة البيانية :

a) $x \ln x = 1$

b) $x^3 + 2x + 7.8 = 0$

3 – استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد جذور المعادلة :

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

4 – كم مرة يجب أن نكرر طريقة التنصيف المتكرر للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3}

في إيجاد جذر المعادلة $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

5 – أوجد بطريقة التنصيف المتكرر جذور المعادلة :

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$$

6 – أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ بطريقة نيوتن .

7 – عين اعتماداً على طريقة نيوتن الجذر التقريبي للمعادلة :

$$f(x) = x - 2\sin x = 0$$

8 – أوجد القيمة التقريبية لجذر $\sqrt[3]{5}$ بطريقة نيوتن .

9 – أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ بطريقة النقطة الثابتة .

10 –حل المعادلة $f(x) = e^{-x} - \cos x = 0$ بطريقة النقطة الثابتة.

11 – اعتماداً على طريقة النقطة الثابتة أوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة :

$$e^x - 3x^2 = 0$$

12 – حل المعادلتين التاليتين :

$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0$$

$$g(x,y) = xy^3 - y - 4 = 0$$

بطريقة نيوتن .

13 – حل المعادلتين التاليتين بطريقة نيوتن:

$$f(x,y) = y - e^x + 2 = 0$$

$$g(x,y) = y - \ln(x+2) = 0$$

14 – أوجد حل المعادلتين التاليتين :

$$f(x,y) = e^x - y = 0$$

$$g(x,y) = xy - e^x = 0$$

بطريقة التكرار .

15 – حل المعادلتين التاليتين بطريقة التكرار:

$$x - y^2 + 3\log x = 0$$

$$y - \frac{1}{x} - 2x + 5 = 0$$

حيث $(x_0, y_0) = (3.4, 2.2)$

16 –حل المعادلتين التاليتين بطريقة التكرار:

$$0.1x^2 + 0.1y^2 - x + 0.8 = 0$$

$$0.1x^2 + 0.1xy^2 - y + 0.8 = 0$$

حيث $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

17– لتكن الحدودية

$$p_4(x) = 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 2$$

والمطلوب أوجد عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة لهذه الحدودية

18– لتكن لدينا كثيرة الحدود

$$p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

والمطلوب ما عدد الأصفار الحقيقية الموجودة في المجال $[0,5]$ ثم عين المجالات التي تحوي هذه الأصفار

19- أوجد قيمة كثيرة الحدود

$$p_6(x) = x^6 - 2x^3 + x^2 + 5$$

في النقطة $x = 2$ بطريقة هورنر

20- عين قيمة الحدودية التالية بتطبيق طريقة هورنر:

$$p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$$

عند النقطة $x = 2$

ثم عين قيم المشتقات المتتالية لهذه الحدودية عند النقطة $x = 2$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

حل جمل المعادلات الخطية

Solving Linear Equations

طريقة كرامر

طريقة مقلوب مصفوفة

طريقة غاوس

طريقة جاكوبي

طريقة (غاوس – سيدل)

القيم الذاتية والأشعة الذاتية

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

3 – 1 مقدمة :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_1 &= b_m \end{aligned}$$

حيث a_{ij} $j = 1,2, \ldots \ldots, n$, $i = 1,2, \ldots \ldots, m$ مقادير معلومة وتسمى الأمثال أو المعاملات .

b_i مقادير معلومة أيضاً $i = 1,2, \ldots \ldots, m$

x_i مقادير غير معلومة (مجهولة) $j = 1,2, \ldots \ldots, n$

وهذه الجملة تسمى جملة معادلات خطية مؤلفة من m معادلة و n مجهول .

يمكن كتابة الجملة السابقة باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$AX = B$$

وهذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$$

وتسمى مصفوفة الأمثال

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

و B مصفوفة الثوابت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و X مصفوفة المجاهيل

لحل جملة المعادلات الخطية نتعرف خواص المصفوفات :

تسمى $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ مصفوفة من نوع $m \times n$

إذا كانت $m=n$ فإننا نقول إن A مصفوفة مربعة من الدرجة n

مثال (1)

بفرض أن

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 5\end{bmatrix}$$

فإن A مصفوفة من النوع 1x4

B مصفوفة من النوع 2x3

C مصفوفة من النوع 4x3

D مصفوفة من النوع 5x1

تعريف :

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى بالمصفوفة الصفرية ، ونرمز لها بالرمز O فمثلاً المصفوفات التالية هي مصفوفات صفرية :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعريف :

المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها غير القطرية أصفار ، ونكتب المصفوفة القطرية بالشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وإذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية ، وتساوي الواحد في المصفوفة القطرية، فإننا نسمي هذه المصفوفة بالمصفوفة الواحدية ونرمز لها بالرمز I، ونكتب المصفوفة الواحدية بالشكل التالي :

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3 – 2 – العمليات الجبرية على المصفوفات :

1 – تساوي مصفوفتين :

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ فإننا نقول إن المصفوفتين A,B متساويتان، ونكتب $A=B$ إذا كان :

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad \forall i=1,2,.....,m$$
$$j=1,2,.....,n$$

أي العناصر المتناظرة في المصفوفتين من نفس النوع تكون متساوية .

2 – جمع مصفوفتين :

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ مصفوفتين من نفس النوع mxn فإن حاصل الجمع $A+B$ هو مصفوفة من نفس النوع، وعناصرها هي مجموع العناصر المتناظرة أي أن :

$$A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

مثال (2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3 – ضرب المصفوفة في عدد قياسي :

ضرب المصفوفة A بالعدد λ الذي يكتب بالشكل $A\lambda$ هو مصفوفة نحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد λ :

أي إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ فإن $\lambda A=\left[\lambda a_{ij}\right]_{mxn}$

مثال (3)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ و $\lambda = 4$ فإن

$$\lambda A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 12 & 4 & 20 \\ -4 & 16 & 24 \\ 8 & 32 & 36 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

من تعريف جمع المصفوفات وضربها بعدد فإنه من أجل أي مصفوفتين A,B من نفس النوع، ومن أجل أي عددين قياسين λ,μ فإن :

$$A+B=B+A$$
$$A+O=O+A=A$$
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$
$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$$

وكذلك إذا كانت C مصفوفة من نفس نوع المصفوفتين A,B فإن :

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال (4)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & -3 & 4\\ 2 & 7 & 8 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0 & 2\\ 7 & 4 & 2 & -5\\ 8 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$

أوجد $2A-B$

الحل :

$$2A-B=\begin{bmatrix}0 & 8 & 10 & 12\\ 6 & 2 & -6 & 8\\ 4 & 14 & 16 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -1 & 0 & -2\\ -7 & -4 & -2 & 5\\ -8 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 7 & 10 & 10\\ -1 & -2 & -8 & 13\\ -4 & 13 & 16 & 5\end{bmatrix}$$

4 – ضرب المصفوفات :

حاصل ضرب المصفوفتين A,B الذي يكتب بالشكل $A.B$ يكون معرفاً إذا كان عدد أعمدة A مساوياً عدد أسطر B

وهذا يعني أنه بفرض $A=[a_{ij}]$ من النوع mxn وأن $B=[b_{jk}]$ من النوع nxk حيث :

$$i = 1,2, \dots \dots, m \quad , \quad j = 1,2, \dots \dots, n \quad , \quad k = 1,2, \dots \dots, s$$

فإن $AB = C = [c_{ik}]$

حيث :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad ; \quad i = 1,2,\dots\dots,m \ , \ k = 1,2,\dots\dots,s$$

فمثلاً العنصر c_{23} هو حاصل ضرب عناصر السطر الثاني من A في عناصر العمود الثالث من B أي أن :

$$c_{23} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + \dots\dots + a_{2n} b_{n3}$$

مثال (5)

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 3\\ -2 & -6 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -21 & 7\\ -2 & -30 & -1\end{bmatrix}$$

لاحظ أن :

1) إذا كان عدد أعمدة A لا يساوي عدد أسطر B فإن AB غير معرف .

2) إذا كان AB و BA معرف فإن AB لا يساوي دائماً BA

3) $A = IA = AI$

4) $\forall n \in N \ : \ I = I^2 = I^3 = \cdots = I^n$

مثال (6) :

إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

أوجد AB و BA ماذا نستنتج ؟

الحل :

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 10\\7 & 16\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & -4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 5\\-10 & -4\end{bmatrix}$$

نستنتج أن $AB \neq BA$

5 – منقولة مصفوفة :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ من النوع mxn، فإن منقول المصفوفة A الذي نرمز له بالرمز A^T هو مصفوفة نحصل عليها بكتابة أسطر A كأعمدة، وكتابة أعمدة A كأسطر مع المحافظة على الترتيب

أي أن : $A^T=[a_{ji}]$

و A^T مصفوفة من النوع nxm

مثال (7) :

أوجد منقول المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\3 & 7 & 1\\5 & 0 & -1\\6 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

الحل :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6 – المصفوفة المثلثية :

1. **المصفوفة المثلثية العليا :** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي صفرية .
2. **المصفوفة المثلثية السفلى :** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي صفرية

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من النوع 3x3 وهي مصفوفة مثلثية عليا .

والمصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من النوع 4x4 وهي مصفوفة مثلثية سفلى .

7 – المصفوفة النظامية :

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من النوع nxn نقول عن هذه المصفوفة بأنها مصفوفة نظامية (غير شاذة) إذا كان معينها الذي نرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det A$ لا يساوي الصفر أي $\det A = |A| \neq 0$

أما إذا كان $|A| = 0$ فإننا نقول عن المصفوفة A بأنها شاذة أو غير نظامية .

8 – المعينات من النوع nxn

معين المصفوفة المربعة A من النوع nxn، أو اختصاراً من النوع n يكتب بالشكل التالي :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

تعريف :

صغير العنصر a_{ij} هو معين ينتج من المعين $|A|$ وذلك بحذف السطر i والعمود j منه مسبوقاً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ ونرمز له بالرمز A_{ij} هذا يعني أن :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

يمكن إيجاد قيمة المعين $|A|$ وذلك بنشره وفق أحد الأسطر أو أحد الأعمدة كما يلي :

قيمة المعين $|A|$ عند نشره وفق السطر i هي :

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots\ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

قيمة المعين $|A|$ عند نشره وفق العمود j هي :

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots\ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

مثال (8) :

احسب قيمة معين المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

الحل :

ننشر المعين $|A|$ وفق السطر الأول فنجد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(0)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1+3) + (2)(-1)(-1-6)$$

$$= 4 - 2(-7) = 4 + 14 = 18$$

3 – 3 – خواص المعينات :

1. لا تتغير إشارة المعين (قيمة المعين) إذا جعلنا أسطره أعمدة وأعمدته أسطراً مع المحافظة على نفس الترتيب .
2. إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين فإن قيمة المعين تتغير إشارته فقط .
3. إذا ضربنا جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في معين Δ بعدد ثابت k، فإن قيمة المعين الناتج هي $k\Delta$
4. تنعدم قيمة المعين في الحالات الآتية :

a) إذا تساوى في المعين سطران أو عمودان .

b) إذا كانت عناصر أي سطر أو أي عمود أصفاراً .

c) إذا كانت عناصر أي سطر أو أي عمود هي مضاعفات عناصر سطر آخر أو عمود آخر .

5. لا تتغير قيمة المعين إذا أضفنا إلى عناصر أحد الأسطر أو (الأعمدة) عناصر سطر آخر (عمود آخر) بعد ضربها بعدد ثابت k

6. إذا كان كل عنصر من عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في معين يتألف من مجموع حدين، فإن المعين يرد إلى مجموع معينين .

مثال (9) باستخدام خواص المعينات أوجد قيمة المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$

الحل :

بطرح عناصر العمود الأول من عناصر العمود الثاني، وكذلك بطرح عناصر العمود الثاني من عناصر العمود الثالث نجد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 16-13 & 19-16 \\ 14 & 17-14 & 20-17 \\ 15 & 18-15 & 21-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3 – 4 – مقلوب المصفوفة المربعة النظامية :

بفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من النوع n وبفرض $\det A = |A| \neq 0$

لإيجاد مقلوب المصفوفة A نجري الخطوات التالي :

1. نوجد أولاً معين المصفوفة A أي نوجد $|A|$
2. نوجد مصفوفة الصغائر التالية :

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ثم نوجد منقول المصفوفة $\left[A_{ij}\right]$

أي نوجد $\left[A_{ij}\right]^T$ التي نرمز لها بالرمز $adj\ A$ أو $\Gamma(A)$

أي $\Gamma(A)=adjA=\left[A_{ij}\right]^T$

وتسمى المصفوفة المرافقة (المساعدة أو الملحقة)

3. مقلوب المصفوفة A الذي نرمز له بالرمز A^{-1} يعطى بالعلاقة التالية :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$$

ويحقق ما يلي $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$

مثال (10)

أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

الحل :

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$$

إذن المصفوفة نظامية ويمكن إيجاد مقلوبها A^{-1}

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4,\ A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0,\ A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

إذن مصفوفة الصغائر هي :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة هي :

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة A هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد كما يلي :

$$A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

تعريف :

بفرض $A = [a_{ij}]$ من النوع mxn

معين أي مصفوفة جزئية مربعة في المصفوفة يسمى بالتعريف بالمعين الأصغر .

3 – 5 – تعريف رتبة المصفوفة :

نقول عن العدد r إنه يمثل رتبة المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من النوع mxn إذا حقق الشرطين التاليين :

1 – يوجد على الأقل معين أصغر واحد من النوع r لا يساوي الصفر .

2 – كل معين أصغر من النوع $r + 1$ وما فوق يساوي صفراً .

نرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز $ran(A)$ ونكتب $ran(A) = r$ وتكون رتبة المصفوفة المربعة النظامية تساوي نوعها .

مثال (11) :

عين رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل :

لنحسب معين هذه المصفوفة حيث إن هذه المصفوفة من النوع 3

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 48 + 0 - (0 + 0 - 140)$$

$$= -27 + 140 = 113 \neq 0$$

هذا عني أن المصفوفة نظامية ورتبتها $ran\ (A) = 3$

مثال (12) :

عين رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل :

إن كل المعينات التي يمكن تشكيلها من النوع 3 من هذه المصفوفة قيمتها تساوي الصفر .

بينما الصغير

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ومنه فإن $ran\ (A) = 2$

3 – 6 – التحويلات الأولية (العمليات البسيطة) على المصفوفات :

العمليات التالية تسمى تحويلات أولية على المصفوفات :

1 – المبادلة بين سطرين من أسطر المصفوفة فمثلاً $R_i \leftrightarrow R_j$

2 – ضرب جميع عناصر أحد الأسطر بعدد لا يساوي الصفر أي

$a \neq 0\ ; aR_i$

3 – إضافة أحد الأسطر إلى سطر آخر بعد ضربه بعدد ما لا يساوي الصفر ، أي $aR_i \pm R_j$ حيث $a \neq 0$

تعريف :

تكون المصفوفتان A, B متكافئتين إذا كانت إحداهما ناتجة عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية ونكتب $A \sim B$

ملاحظة :

بالاعتماد على التحويلات الأولية يمكن تعيين رتبة المصفوفة حيث تكون رتبة المصفوفة تمثل عدد الأسطر في هذه المصفوفة والمستقلة خطياً .

مثال (13) :

عين باستخدام التحويلات الأولية رتبة المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

نطبق التحويلات الأولية لجعل عناصر العمود الأول أصفاراً ما عدا العنصر الأول، ثم نطبق التحويلات الأولية لجعل عناصر العمود الثاني أصفاراً ما عدا العنصر الأول من السطر الثاني وهكذا .....

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} -2R_2+R_3 \\ -\frac{1}{2}R_2+R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن رتبة المصفوفة A هي $ran(A) = 2$

ونلاحظ أن الصغير $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

والصغائر من النوع $3x3$ تكون معدومة لأن السطر الثالث أصفار ، وكذلك الصغائر من النوع $4x4$ معدومة أيضاً .

3 – 7 – مقلوب مصفوفة نظامية باستخدام التحويلات الأولية :

بالاعتماد على التحويلات الأولية يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة النظامية $A = [a_{ij}]$ من النوع n وذلك بكتابة المصفوفة الموسعة : $[A: I_n]$

ثم إجراء التحويلات الأولية على هذه المصفوفة للحصول على المصفوفة $[I_n: A^{-1}]$

مثال (14) :

أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام التحويلات الأولية .

الحل :

نكتب المصفوفة الموسعة ونجري التحويلات الأولية المناسبة كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_1 \\ \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_3 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}R_2 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{2}{3}R_2 + R_1 \\ \frac{4}{3}R_2 + R_3 \\ -R_2 + R_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{5}{3}R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{2}{3}R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \\ -R_3 + R_4 \\ \sim \end{array}$$

ومنه فإن مقلوب المصفوفة A المصفوفة A^{-1} التالية:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

3 – 8 – المعادلات الخطية المتجانسة :

تعريف :

نقول عن جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بأنها جملة معادلات خطية متجانسة إذا كانت $B = [0]$ أي $b_1 = b_2 = \cdots \ldots\ldots = b_n = 0$

ومجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = O$ دوماً تملك الحل الصفري أي $X = [0]$

وإذا كان المعين $[A] \neq 0$، فإن لجملة المعادلات الخطية المتجانسة الحل الصفري فقط .

أما إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطية المتجانسة فإن لهذه الجملة حل غير الحل الصفري .

مثال (15) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

هذه جملة معادلات خطية متجانسة لإيجاد حل هذه الجملة نكتب مصفوفة الأمثال ونجري عليها التحويلات الأولية المناسبة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \overset{5R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الصغير :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

ومنه فإن رتبة مصفوفة الأمثال A هي $r = 3$

وعدد المجاهيل $n = 4$

إذن $n > r$ هذا يعني أنه يوجد حل غير الصفري وجملة المعادلات الخطية المتجانسة هي :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$
$$x_3 - 9x_4 = 0$$

إذن لدينا ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل هذا يعني أنه يوجد مجهول اختياري وليكن مثلاً x_4 ومنه يمكن أن نكتب :

$$x_3 = \frac{9x_4}{12} = \frac{3}{4}x_4$$

$$x_2 = -2x_3 + x_4 = -2(\frac{3}{4})x_4 + x_4 = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -2(\frac{1}{2})x_4 + \frac{3}{4}x_4 - x_4 = \frac{3}{4}x_4$$

ومنه فإن حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة هو :

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

كلما أعطينا المجهول الاختياري x_4 قيمة نحصل على حل، وبالتالي فإن جملة المعادلات الخطية المتجانسة لها عدد لانهائي من الحلول .

مثال (16) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$\begin{aligned} 3x_1-4x_2&=0 \\ 5x_1+x_2+2x_3&=0 \\ 6x_1+7x_3&=0 \end{aligned}$$

الحل :

نجري تحويلات أولية على مصفوفة الأمثال كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \underset{-2R_1+R_3}{\overset{-\frac{5}{3}R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{-\frac{3}{17}R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{-8R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 0 & \frac{167}{17} \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_2 - \frac{6}{17}x_3 = 0$$

$$\frac{167}{17}x_3 = 0$$

ومنه :

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{6}{17} x_3 = \frac{6}{17}(0) = 0$$

$$x_3 = \frac{4}{3} x_2 = \frac{4}{3}(0) = 0$$

وهذا يعني أن جملة المعادلات الخطية المتجانسة لها الحل الصفري فقط .

مثال (17) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

نأخذ مصفوفة الأمثال ونجري عليها التحويلات الأولية التالية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_2 + 2x_3 = 0$$

إذن لدينا معادلتان بثلاث مجاهيل ،

أي $n > r$ هذا يعني أنه يوجد حل غير الحل الصفري $(n = 3 , r = 2)$

إذن يوجد مجهول اختياري واحد وليكن x_3 مثلاً :

$$x_2 = x_3$$
$$x_1 = -x_2 + 4x_3 = -x_3 + 4x_3 = 3x_3$$

ومنه حل جملة المعدلات الخطية المتجانسة هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 – 9 – الطرق العددية لحل جملة المعادلات الخطية :

يمكن إيجاد حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$, أي إيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots, x_n$ بالاعتماد على الطرق العددية التالية :

3 – 9 – 1 – طريقة مقلوب المصفوفة :

بفرض $AX = B$ جملة المعادلات الخطية , حيث $A = [a_{ij}]$ من النوع n إذا كانت المصفوفة A نظامية أي $|A| \neq 0$, فإنه يمكن إيجاد مقلوبها A^{-1} .

نضرب طرفي المساواة $AX = B$ من اليسار بـ A^{-1} فنجد :

$$A^{-1}.AX = A^{-1}.B$$

وبما أن $A^{-1}.\mathrm{A} = \mathrm{I_n}$ فإن $X = A^{-1}B$.

هذا يعني أنه من أجل حل جملة المعادلات الخطية يمكن أن نوجد A^{-1} ثم نعوض في العلاقة $X = A^{-1}B$ فنحصل على حل جملة المعادلات الخطية المطلوب .

مثال (18) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 17$$

بطريقة مقلوب الصفوفة

الحل :

نحسب معين الأمثال :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 56 + 12 - (-24 + 21 - 4)$$
$$= 71 - (-7) = 78 \neq 0$$

ثم نحسب مصفوفة الصغائر :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 20 \\ 30 & -27 & -9 \\ 6 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المرافقة :

$$adjA = \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

مقلوب مصفوفة A هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

بالتعويض بالعلاقة $X = A^{-1}B$ نجد :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} 78 \\ 156 \\ 234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3 – 9 – 2 – طريقة كرامر :

وجدنا أن حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بطريقة مقلوب مصفوفة يعطى بالعلاقة التالية : $X = A^{-1}B$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نرمز لمعين مصفوفة الأمثال A بالرمز Δ أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

ونرمز بـ Δ_i حيث $i = 1,2, \ldots, n$ للمعين الناتج من Δ بتبديل عمود الثوابت B بالعمود i أي أن :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ومنه يمكن أن نكتب :

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots\dots\dots\dots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots\dots\dots\dots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots\dots\dots\dots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

مثال (19)

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$$

الحل :

نحسب معين الأمثال

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0$$

ثم نحسب المعينات :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Damascus University

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -153$$

وبتطبيق طريقة كرامر نجد :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{153}{-153} = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{153}{-153} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} - \frac{0}{-153} = 0 \quad , \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} - \frac{-153}{-153} = 1$$

الحل هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه : $x_2 = -6$

$$x_1 = 2 + x_2 = 2 - 6 = -4$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right] \overset{R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات الخطية :

$$\frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{2}{3}x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}$$

ومنه : $x_1 = -4$

$$x_2 = -\frac{10}{3} + \frac{2}{3}x_1 = -\frac{10}{3} + (\frac{2}{3})(-4) = -\frac{18}{3} = -6$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

مثال (21) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غاوس :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

الحل :

نكتب المصفوفة الموسعة , ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية سفلى كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 7 & 10 & 8 & 7 & 32 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 33 \\ 5 & 7 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{7}{5}R_1+R_2 \\ -\frac{6}{5}R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.4 & 2.8 & 3 & 5.4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$\sim$$

$$\begin{array}{c} 2R_2+R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{3}{2}R_3+R_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات الخطية :

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$
$$0.2x_2 - 0.4x = -0.2$$
$$2x_3 + 3x_4 = 5$$
$$0.5x_4 = 0.5$$

ومنه : $x_4 = 1$

$$x_3 = \frac{5 - 3x_4}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{0.4x_3 - 0.2}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$
$$x_1 = \frac{23 - 7x_2 - 6x_3 - 5x_4}{5} = \frac{23-18}{5} = 1$$

ومنه حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 – 9 – 3 – 1 – حساب معين مصفوفة باستخدام طريقة غاوس :

إذا كان عدد المعادلات الخطية كثيراً فإن عملية نشر المعينات لا تعود سهلة، من أجل ذلك يمكن استخدام طريقة غاوس وتحويل المصفوفة المربعة إلى مصفوفة مثلثية عليا , أو إلى مصفوفة مثلثية سفلى، عندئذ فإن قيمة المعين تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .

مثال (23) :

باستخدام طريقة غاوس احسب قيمة المعين التالي :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

نجري تحويلات أولية على المعين كما يلي :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_3+R_4 \\ \sim \end{matrix} (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ومنه فإن قيمة المعين هي :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Damascus University

3 – 9 – 4 – طريقة غاوس – جوردان :

في هذه الطريقة نجري تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال المربعة A في جملة المعادلات الخطية $AX = B$ إلى مصفوفة قطرية (أي مصفوفة مثلثية عليا وسفلى في آن واحد).

مثال (24) :

أوجد بطريقة غاوس – جوردان حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ R_1+R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3R_2+R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{5}R_3+R_1 \\ -\frac{1}{5}R_3+R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{2}{3}R_2+R_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

ومنه :

$$2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$-2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$-5x_3 = -15 \Rightarrow x_3 = 3$$

حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مثال (25) : أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

بطريقة غاوس – جوردان .

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة، ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \\ R_1+R_4 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} -4R_2+R_3 \\ 3R_2+R_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{13}R_4 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3R_4+R_1 \\ 5R_4+R_2 \\ -13R_4+R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{3}R_3+R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2+R_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ومنه :

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = 0 \ , \ x_4 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

يمكن تعيين مقلوب مصفوفة بالاعتماد على طريقة غاوس – جوردان .

نعلم أنه من أجل المصفوفة النظامية فإن : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ومنه من أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A نوسع المصفوفة A بالمصفوفة الواحدية I_n، ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل المصفوفة A إلى مصفوفة واحدية I_n فنحصل على A^{-1} .

مثال (26) :

أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-8+18-12-(8-12-18)$$

$$=-2-(-22)=-2+22=20\neq 0$$

هذا يعني أن المصفوفة A نظامية ولها مقلوب، لذلك نجري التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة التالية :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ R_1+R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 3R_2+R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{5}R_3+R_1 \\ -\frac{1}{5}R_3+R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 2 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \frac{3}{2}R_2+R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}R_1 \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{5}R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

ومنه فإن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (27) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غاوس–جوردان :

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3+x_4&=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4&=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4&=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4&=6 \end{aligned}$$

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -4R_1 + R_3 \\ \sim \\ -\frac{2}{3}R_1 + R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3R_2 + R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{4}R_3 + R_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{-2R_4+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\begin{array}{l} -\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ \frac{1}{2}R_3+R_2 \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\underset{\sim}{2R_2+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

أي الحل هو :

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1$$
$$x_3 = -1 \quad , \quad x_4 = -1$$

3 – 9 – 5 – طريقة كراوت :

وجدنا أنه لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ نحول مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى، وفي هذه الطريقة نكتب مصفوفة الأمثال A بالشكل $A = LU$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلى، و U مصفوفة مثلثية عليا، وكل من U, L من نوع المصفوفة A عندئذ فإن حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ يكافئ حل جملة المعادلات الخطية $LUX = B$، ويمكن إيجاد هذا الحل على مرحلتين :

المرحلة الأولى حل الجملة $LY = B$

المرحلة الثانية حل الجملة $UX = Y$

حيث كل من الجملتين السابقتين مصفوفة الأمثال مصفوفة مثلثية وحل الجملة يكون سهلاً .

وتبقى الخطوة المهمة في هذه الطريقة هي كيفية كتابة المصفوفة A بالشكل $A = LU$، من أجل ذلك نكتب هذه العلاقة بالشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن كلاً من L, U تحوي $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ عنصراً مجهولاً، ولدينا n^2 علاقة لتعيين المجاهيل $n^2 + n$، هذا يعني أنه يمكن إعطاء n من المجاهيل قيماً اختيارية، ونختار عادة هذه القيم بأحد الأشكال التالية :

1 – نختار $l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1$

2 – نختار $u_{11} = u_{22} = \cdots = u_{nn} = 1$

ويمكن اختيار n من المجاهيل بأشكال متعددة أخرى .

مثال (28) :

اكتب المصفوفة التالية بالشكل LU :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 6 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

الحل :

يمكن كتابة المصفوفة A بالشكل LU وبأشكال متعددة كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 6 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

لنفرض أننا اخترنا $u_{11}=u_{22}=.....=u_{nn}=1$

عندئذ يمكن الحصول على العلاقات التي تعين المجاهيل l_{ij}, u_{ij} للمصفوفتين L, U كما يلي :

من أجل $j = 1$ فإن $l_{i1} = a_{i1}$ حيث $i = 1,2, \dots \dots, n$

ومن أجل $i = 1$ فإن $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ حيث $j = 1,2, \dots \dots, n$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$ حيث $i \geq j > 1$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ij}}$$ حيث $i < j$

ملاحظة :

ليس من الضروري أن نستطيع كتابة أي مصفوفة نظامية كجداء مصفوفتين مثلثيتين في الحالة العامة , فالمصفوفة النظامية $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لا يمكن كتابتها بالشكل LU .

مثال (29) :

بطريقة كراوت أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$10x_1 - 7x_2 = 7$$
$$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4$$
$$5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6$$

الحل :

نأخذ مصفوفة الأمثال :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ونكتبها بالشكل : $A = LU$ وهذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على العلاقات السابقة نجد :

$$l_{11} = a_{11} = 10 \ , \ l_{21} = a_{21} = -3 \ , \ l_{31} = a_{31} = 5$$

$$u_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, u_{21} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{7}{10}, u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 0$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - (-3)(-\frac{7}{10}) = -\frac{1}{10}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{6 - (-3)(0)}{-\frac{1}{10}} = -60$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = (-1) - 5(-\frac{7}{10}) = \frac{25}{10}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 5 - 5(0) - (\frac{25}{10})(-60) = 155$$

ومنه :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{25}{10} & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنوجد أولاً حل الجملة $LY = B$ وهذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{25}{10} & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات :

$$10y_1 = 7$$

$$-3y_1 - \frac{1}{10}y_2 = 4$$

$$5y_1 + \frac{25}{10}y_2 + 155y_3 = 6$$

ومنه :

$$y_1 = \frac{7}{10} \quad , \quad y_2 = -61 \quad , \quad y_3 = 1$$

ثم نوجد حل الجملة $UX = Y$ وهذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -61 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات :

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{7}{10} x_2 &= \frac{7}{10} \\ x_2 - 60 x_3 &= -61 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ومنه :

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = -1 \ , \ x_3 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

بالاعتماد على طريقة كراوت يمكن إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية ، وذلك بحل الجملة :

$$LUX = I_j$$

n مرة من أجل n طرفاً ثانياً حيث I_j هي أعمدة المصفوفة الواحدية I_n و $j = 1,2,\ldots\ldots,n$

مثال (30) :

بطريقة كراوت أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+2-(0-1+0) = 4 \neq 0$$

إذن المصفوفة A نظامية ويوجد لها مقلوب .

نكتب المصفوفة A بالشكل LU كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}=a_{11}=1 \ , \ l_{21}=a_{21}=2 \ , \ 1_{31}=a_{31}=0$$

$$u_{11}=\frac{a_{11}}{a_{11}}=1 \ , \ u_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=0 \ , \ u_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}=1$$

$$l_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=1-2(0)=1$$

$$u_{23}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}}=\frac{-1-(2)(1)}{1}=-3$$

$$l_{23}=a_{23}-l_{31}u_{12}=1-(0)(0)=1$$

$$l_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=1-(0)(1)-(1)(-3)=4$$

بالتعويض نجد :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب المصفوفة A نحل جملة المعادلات $AX = I_3$، وبما أن $A = LU$

نحل الجملة $LUX = I_3$

من أجل ذلك نوجد أولاً حل الجملة $LY = I_3$ وذلك كما يلي :

أولاً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ فنجد :

$$y_1 = 1$$
$$2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2$$
$$y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix}1\\-2\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ وهو أول عمود من المصفوفة Y

ثانياً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ فنجد :

$$y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$$
$$y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ وهو ثاني عمود للمصفوفة Y

ثالثاً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ فنجد :

$$y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$
$$y_2 + 4y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثالث عمود للمصفوفة Y، وبالتالي المصفوفة Y هي :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بعد أن أوجدنا المصفوفة Y نحل الجملة $UX = Y$ من أجل ذلك نوحد أولاً حل الجملة

$$UX = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فنجد :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 - 3x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ وهو أول عمود للمصفوفة X، أي أول عمود للمصفوفة A^{-1}

ثانياً نحل الجملة $UX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ فنجد :

$$x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 - 3x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثاني عمود للمصفوفة A^{-1}

ثالثاً نحل الجملة $UX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ فنجد :

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثالث عمود للمصفوفة A^{-1}، وأخيراً نجد :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3 – 10 – طرائق التكرار لحل جملة معادلات خطية :

الطرائق التي تعرفناها إليها تسمى الطرائق المباشرة , وعندما يكون عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطية كثيراً، فإن تطبيق الطرائق لمباشرة يصبح ليس بالأمر السهل , في مثل هذه الحالات سوف نستخدم طرائق تسمى الطرائق غير المباشرة أو الطرائق التكرارية حيث تعتمد هذه الطرائق على اختيار مسبق للتقريب الأولي للحل .

فإذا أخذنا قيمة تقريبية للحل و حصلنا على قيم جديدة باستخدام الطرائق التكرارية، فإننا نحصل على متتاليات للحلول , هذه المتتاليات قد تكون متقاربة لحل جملة المعادلات الخطية المطلوبة، وقد يكون تقاربها بطيئاً، من أجل دراسة تقارب

متتاليات التكرار نحتاج إلى مقياس معين , ويمكن اعتبار النظيم هو المقياس , وفي بعض الحالات قد تكون المتتاليات متباعدة .

3 – 11 – نظيم مصفوفة وحساب الأخطاء :

نظيم مصفوفة $A = [a_{ij}]$ من النوع n، هو في الحالة العامة عدد حقيقي نرمز له بالرمز $\|A\|$، ويحقق الشروط التالية :

1 – $\|A\| \geq 0$ كما أن $\|A\| = 0$ إذا وفقط إذا كانت $A = 0$

2 – $\|kA\| = |k|\|A\|$ حيث k عدد حقيقي ويكون $\|-A\| = \|A\|$

3 – $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4 – $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

وبشكل عام $\|A^P\| \leq \|A\|^P$ حيث P عدد حقيقي .

ومن النظم المعروفة بالنسبة للمصفوفات :

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)^2}$$

النظيم الإقليدي .

مثال (31) :

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

احسب $\|A\|_1$ ، $\|A\|_\infty$ ، $\|A\|_2$

الحل :

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) = \max(11,8,18) = 18$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) = \max(11,8,18) = 18$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(a_{ij}\right)^2} = \sqrt{0+25+36+16+1+9+49+4+81}$$

$$= \sqrt{221} = 14.866$$

في الحالة الخاصة , إذا كان لدينا الشعاع :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

يمكن اعتبار $\|X\|$ نظيماً لهذا الشعاع ومن النظم المعروفة ما يلي :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = |x_1||x_2| + \ldots.. + |x_n|$$

مجموع القيم المطلقة

$$\|X\|_\infty = \max(|x_i|) = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots.., |x_n|)$$

نظيم القيمة المطلقة العظمى

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}$$

النظيم الإقليدي .

مثال (32) :

احسب $\|X\|_2 , \|X\|_\infty , \|X\|_1$ للشعاع $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل :

$$\|X\|_1 = |3| + |-4| + |1| + |0| = 8$$
$$\|X\|_\infty = \max(|3|, |-4|, \|1\|, \|0\|) = 4$$
$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = \sqrt{9+16+1+0} = \sqrt{26}$$

بعد تعرّف نظيم مصفوفة ونظيم شعاع، وبفرض A مصفوفة مربعة، و X شعاعاً حيث A مصفوفة من النوع n و X شعاع من النوع n فإن :

$$\|AX\|_1 \le \|A\|_1 \|X\|_1$$
$$\|AX\|_\infty \le \|A\|_\infty \|X\|_\infty$$
$$\|AX\|_2 \le \|A\|_2 \|X\|_2$$

ملاحظة :

أثناء حل جمل المعادلات الخطية فإن أي خطأ صغير قد يؤدي إلى تغيير كبير في الحل، وكذلك فإن أخطاء التدوير تتراكم في بعض الحالات وخاصة إذا كانت مصفوفة الأمثال قريبة من المصفوفة الشاذة , لذلك يمكن تصنيف جمل المعادلات الخطية كما يلي :

1 - جمل ضعيفة الشرطية : هذه الجمل يكون فيها معين مصفوفة الأمثال قريباً من معين المصفوفة الشاذة .

2 - جمل جيدة الشرطية : في هذه الجمل يكون معين مصفوفة الأمثال بعيداً عن الصفر .

3 – 12 – تقدير الأخطاء في حل جملة معادلات خطية :

بفرض X_c هي القيمة التقريبية، فإننا نعرف الخطأ المطلق لحل جملة معادلات خطية بأنه النظيم :

$$\|X_c - X\| = \|e\|$$

كما نعرف الخطأ النسبي بالشكل التالي :

$$\frac{\|X_c - X\|}{\|X\|} = \frac{\|e\|}{\|X\|}$$

مثال (33) :

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفرض $X_c = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ تقريب للشعاع

$$X = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 1.33 \\ 1.21 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$e = X_c - X = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.54 \\ 1.33 \\ 1.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

ومنه الخطأ المطلق هو :

$$\|e\| = \|X_c - X\|_1 = |-0.04| + |-0.03| + |-0.01| = 0.08$$

ويكون الخطأ النسبي :

$$\frac{\|e\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.08}{4.08} = 0.019$$

ولتقدير الخطأ نعرف ما يلي :

1 – إذا كانت X_c هي القيمة التقريبية لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ فإننا نعرف الباقي أو شعاع الخطأ بأنه شعاع r حيث : $r = AX_c - B$

2 – ونعرف العدد الشرطي لمصفوفة الذي نرمز له بالرمز $cond\ (A)$ بالعلاقة التالية :

$$cond\ (A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

عندئذ بفرض X_c الحل التقريبي للمعادلة $AX = B$ فإن شعاع الخطأ e يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$r = AX_c - B = AX_c - AX = A(X_c - X) = Ae$$

أي : $r = Ae$

ومنه شعاع الخطأ $e = A^{-1}r$

ومن أجل تعيين الخطأ المطلق نحسب نظيم الشعاع e كما يلي :

$$\|e\| \le \|A^{-1}\|\|r\|$$
$$\|r\| \le \|A\|\|e\|$$

ومنه :

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\|\|r\| \qquad (1)$$

ولتعيين الخطأ النسبي نعين أولاً نظيم X من العلاقتين :

$$X = A^{-1}B \quad , \quad AX = B$$

فنجد :

$$\|B\| \le \|A\|\|X\|$$
$$\|X\| \le \|A^{-1}\|\|B\|$$

ومنه :

$$\frac{\|B\|}{\|A\|} \le \|X\| \le \|A^{-1}\|\|B\| \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نعين الخطأ النسبي كما يلي :

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|B\|} \le \frac{\|e\|}{\|X\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|B\|}$$

أو :

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|B\|} \le \frac{\|e\|}{\|X\|} \le cond(A)\frac{\|r\|}{\|B\|}$$

هذا يعين أن الخطأ النسبي لا يتجاوز القيمة $\frac{\|r\|}{\|B\|}$ مضروبة بالعدد الشرطي، لذا فإن الباقي r لا يعطي دوماً معلومات كافية عن دقة الحل وذلك حين تكون قيمة العدد الشرطي كبيرة , بينما يصبح r مقياساً جيداً للدقة حين تكون قيمة العدد الشرطي قريبة من الواحد .

ملاحظة :

نعلم أنه في حالة معادلة غير خطية $f(x) = 0$ نبحث عن تابع تكرار يحقق العلاقة $x = g(x)$ ونطبق العلاقة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ حيث $n = 1,2, \ldots$.

وبشكل مشابه لحل جملة معادلات خطية $AX = B$ فإننا نبحث عن مصفوفة تكرار تحقق العلاقة : $X = \alpha X + \beta$

ونطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$

حيث نبدأ من قيمة ما X^0 ثم نحسب $X^1 = \alpha X^0 + \beta$

من جديد نحسب $X^2 = \alpha X^1 + \beta$ وهكذا ....

ومنه فإننا نحصل على التقريبات المتتالية :

$$X^0, X^1, X^2, \ldots\ldots, X^n, \ldots\ldots$$

فإذا كانت لهذه التقريبات المتتالية نهاية أي $X = \lim_{n\to\infty} X^n$ فإن هذه النهاية هي حل جملة المعادلات الخطية $X = \alpha X + \beta$، وبالتالي هذه النهاية هي حل لجملة المعادلات الخطية $AX = B$ وذلك لأن :

$$\lim_{n\to\infty} X^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\alpha X^n + \beta) = \alpha \lim_{n\to\infty} \alpha X^n + \beta = \alpha X + \beta$$

أي : $X = \alpha X + \beta$

ويوجد عدد كثير من الطرق التكرارية لحل المعادلات الخطية من هذه الطرائق :

3 – 12 – 1 – طريقة جاكوبي :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = B$، وبفرض أن العناصر $a_{ii} \neq 0$ حيث $i = 1,2,\dots,n$

نكتب جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بالتفصيل :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

هذه الجملة يمكن كتابتها من جديد بالشكل التالي :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots\dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots\dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 - \dots\dots - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots\dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}$$

إذا رمزنا $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$

$j = 1,2, \dots\dots, n$, $i = 1,2, \dots\dots, n$ من أجل $i \neq j$

و $\alpha_{ij} = 0$ عندما $i = j$

فإنه يمكن كتابة جملة المعادلات كما يلي :

$$x_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1$$
$$x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2$$
$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{3n}x_n + \beta_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + \beta_n$$

حيث : $\alpha_{ii} = 0 \quad , \quad i = 1,2, \ldots\ldots\ldots, n$

وبفرض المصفوفتين :

$$a = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn-1}\,0 \end{bmatrix} \; ; \; \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفي التالي :

$$X = \alpha X + \beta$$

ويمكن كتابة العلاقة التكرارية بالشكل التالي :

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة جاكوبي حيث $\alpha_{ii} = 0$, $i = 1,2, \ldots\ldots, n$

$k = 1,2, \ldots \ldots$

أو بالشكل التالي :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$$

مثال (34) :

بطريقة جاكوبي أوجد حل جملة المعادلات :

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

واحسب العدد الشرطي ثم احسب الخطأ المطلق وشعاع الخطأ حيث

$$X^0 = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.01 \end{bmatrix}$$

الحل :

نحسب α,β حيث $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{1}\\ -\frac{3}{1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\ ,\ \beta=\begin{bmatrix}\frac{3}{1}\\ \frac{0}{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

ونطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1}=\alpha X^{n}+\beta$ فنجد :

$$X^{1}=\alpha X^{0}+\beta=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.01\\ 1.01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.98\\ -3.03\end{bmatrix}$$

$$X^{2}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.98\\ -3.03\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.06\\ -2.94\end{bmatrix}$$

$$X^{3}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9.06\\ -2.94\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.88\\ -27.18\end{bmatrix}$$

لحساب العدد الشرطي نوجد A^{-1}

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$adjA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

ومنه :

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = (4)(\frac{4}{5}) = \frac{16}{5} = 3.2$$

حيث استخدمنا النظيم :

$$\|A\|_\infty = \max(3,4) = 4$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$$

نحسب الخطأ المطلق وشعاع الخطأ في التكرار الأول :

$$r = AX_c - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.98 \\ 3.03 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.08 \\ -0.09 \end{bmatrix}$$

$$e = A^{-1}r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8.08 \\ -0.09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.58 \\ -4.83 \end{bmatrix}$$

ولنحسب أيضاً الخطأ المطلق وشعاع الخطأ في التكرار الثالث :

$$r = AX_c - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.88 \\ 27.18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48.48 \\ -0.54 \end{bmatrix}$$

$$e = A^{-1}r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -48.48 \\ -0.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.48 \\ -28.98 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن نظيم شعاع الخطأ المطلق هو :

$$\|e\|_\infty = 28.98$$

هذا يعني أن الخطأ المطلق كبير , أي أن متتالية التكرار غير متقاربة .

ملاحظة :

للحصول على أصغر نظيم نغير ترتيب المعادلات بحيث تصبح عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الأمثال A أكبر ما يمكن .

- الشرط اللازم والكافي لتقارب طريقة التكرار هو أن يكون نظيم ما لمصفوفة التكرار أصغر من الواحد .

في المثال السابق كان $\|\alpha\|_\infty = 3$

هذا يعني أن اختيار مصفوفة التكرار α غير موفق .

من أجل اختيار مصفوفة تكرار يكون النظيم لها أصغر من الواحد نغير في ترتيب المعادلات كما يلي :

$$3x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

أي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\|\alpha\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$

نظرية :

إن متتالية التكرار X^n التي نحصل عليها من تطبيق العلاقة التكرارية $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$ تتقارب من حل وحيد X لجملة المعادلات الخطية $AX = B$، إذا كان نظيم ما لمصفوفة التكرار α أقل من الواحد وذلك مهما كان الشعاع الابتدائي X^0 .

مثال (35) :

اوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية اعتماداً على طريقة جاكوبي:

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \end{aligned}$$

الحل :

نغير ترتيب المعادلات كما يلي :

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{12}{10}$$

$$x_2 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{12}{10}$$

$$x_3 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{12}{10}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \beta = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

نأخذ $X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ثم نطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$ فنجد :

$$X^1 = \alpha X^0 + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \alpha X^1 + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.24 \\ -0.24 \\ -0.24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.96 \\ 0.96 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = \alpha X^2 + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.96 \\ 0.96 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.192 \\ -0.192 \\ -0.192 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.008 \\ 1.008 \\ 1.008 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن متتالية التكرار تتقارب من الحل :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (36) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي :

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 &= 26 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

حيث $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon = 0.09$

الحل :

نعيد كتابة المعادلات بحيث تصبح مصفوفة الأمثال مصفوفة مهيمنة أي نجعل عناصر القطر الرئيسي أكبر ما يمكن :

$$X^2 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.08 \\ 1.08 \end{bmatrix}$$

$$x_1^3 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1.08) - \frac{1}{8}(1.08) = 2.98$$

$$x_2^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{1}{5}x_3^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2.9) + \frac{1}{5}(1.08) = 1.036$$

$$x_3^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{1}{5}x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2.9) + \frac{1}{5}(1.08) = 1.036$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 2.98 \\ 1.036 \\ 1.036 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^3 - x_1^2\right| = \left|2.98 - 2.9\right| = 0.08 < 0.09$$

$$\left|x_2^3 - x_2^2\right| = \left|1.08 - 1.036\right| = 0.04 < 0.09$$

$$\left|x_3^3 - x_3^2\right| = \left|1.08 - 1.036\right| = 0.04 < 0.09$$

إذن حل جملة المعادلات هو $X=X^3=\begin{bmatrix}2.98\\1.036\\1.036\end{bmatrix}$

3 – 12 – 2 – طريقة غاوس – سيدل :

في هذه الطريقة كما فعلنا في طريقة جاكوبي نغير ترتيب المعادلات للحصول على مصفوفة تكرار يكون النظيم لها أصغر من الواحد ونوجد مصفوفة التكرار α والمصفوفة β

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \cdots & \alpha_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{12} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{12}\,0\end{bmatrix}\quad ;\quad \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

ونوجد

$$x_1^1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^0-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^0-\ldots..-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^0+\frac{b_1}{a_{11}}$$

كما في طريقة جاكوبي .

ونجري التعديلات التالية على طريقة جاكوبي :

نوجد :

$$x_2^1 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^0 - \ldots\ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^0 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

هذا يعني أن القيمة x_1^1 التي حصلنا عليها استخدمناها بدلاً من x_1^0 ثم نوجد :

$$x_3^1 = -\frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^1 - \frac{a_{34}}{a_{33}} x_4^0 - \ldots\ldots - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n^0 + \frac{b_3}{a_{33}}$$

هذا يعني أننا استخدمنا القيمتين x_1^1, x_2^1 بدلاً من القيمتين x_1^0 , x_2^0 وهكذا .....نوجد :

$$x_n^1 = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^1 - \ldots\ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^1 + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

وبشكل عام بفرض أننا وصلنا إلى التقريب ذي الرتبة k أي وصلنا إلى :

$$X^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

فإن إيجاد التقريب ذي الرتبة $(k+1)$ حسب غاوس – سيدل يتم كما يلي :

$$x_1^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^k + \beta_1$$

$$x_2^{k+1} = \alpha_{21} x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k + \beta_2$$

$$\vdots$$

$$x_2^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{k+1} + \beta_n$$

حيث : $k = 0,1,2,\ldots$.

مثال (37) :

أوجد بطريقة غاوس – سيدل حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$5x_1 + 2x_2 = 7$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

حيث $X^0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

الحل :

$$x_1 = -\frac{2}{5}x_2 + \frac{7}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{2}{5}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\| = \max\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

$$x_1^1 = -\frac{2}{5}x_2^0 + \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}(0.8) + \frac{7}{5} = 1.0800$$

$$x_2^1 = \frac{1}{4}x_1^1 + \frac{1}{4}x_3^0 + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(1.0800) + \frac{1}{4}(1.2) + \frac{2}{4} = 1.0700$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{2}x_2^1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(1.0700) + \frac{3}{2} = 0.9650$$

ومنه :

$$X^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0800 \\ 1.0700 \\ 0.9650 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = -\frac{2}{5}x_2^1 + \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}(1.0700) + \frac{7}{5} = 0.9720$$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^1 + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(0.9720) + \frac{1}{4}(0.9650) + \frac{2}{4} = 0.9842$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(0.9842) + \frac{3}{2} = 1.0079$$

ومنه :

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.9720 \\ 0.9842 \\ 1.0079 \end{bmatrix}$$

وهكذا نتابع فنجد :

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1.0063 \\ 1.0664 \\ 0.9668 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن متتالية التكرار تتقارب من الحل :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (38) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

بطريقة جاكوبي وبطريقة غاوس – سيدل ماذا تستنتج :

الحل :

أولاً : <u>بطريقة جاكوبي :</u>

$$x_1 = \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 + \frac{6}{10}$$

$$x_2 = \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11}$$

$$x_3 = -\frac{2}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10}$$

$$x_4 = -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}$$

Damascus University

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\| = \max(\frac{3}{10}, \frac{5}{11}, \frac{4}{10}, \frac{4}{8}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$$

نختار :

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damascus University

$$x_1^1 = \frac{1}{10}x_2^0 - \frac{1}{5}x_3^0 + \frac{6}{10} = 0.6000$$

$$x_2^1 = \frac{1}{11}x_1^0 + \frac{1}{11}x_3^0 - \frac{3}{11}x_4^0 + \frac{25}{11} = 2.2727$$

$$x_3^1 = -\frac{2}{10}x_1^0 + \frac{1}{10}x_2^0 + \frac{1}{10}x_4^0 - \frac{11}{10} = -1.1000$$

$$x_4^1 = -\frac{3}{8}x_2^0 + \frac{1}{8}x_3^0 + \frac{15}{8} = 1.8750$$

ومنه :

$$X^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6000 \\ 2.2727 \\ -1.1000 \\ 1.8750 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{10}x_2^1 - \frac{1}{5}x_3^1 + \frac{6}{10} = 1.0473$$

$$x_2^2 = \frac{1}{11}x_1^1 + \frac{1}{11}x_3^1 - \frac{3}{11}x_4^1 + \frac{25}{11} = 1.7159$$

$$x_3^2 = -\frac{2}{10}x_1^1 + \frac{1}{10}x_2^1 + \frac{1}{10}x_4^1 - \frac{11}{10} = -0.8052$$

$$x_4^2 = -\frac{3}{8}x_2^1 + \frac{1}{8}x_3^1 + \frac{15}{8} = 0.8852$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1.0473 \\ 1.7159 \\ -0.8052 \\ 0.8852 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0.9326 \\ 2.0533 \\ -1.0493 \\ 1.1000 \end{bmatrix}$$

وهكذا .....

$$X^{10} = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1.9998 \\ -0.9998 \\ 0.9998 \end{bmatrix}$$

ثانياً : <u>بطريقة غاوس – سيدل :</u>

Damascus University

$$x_1^k = \frac{1}{10} x_2^{k-1} - \frac{2}{10} x_3^{k-1} + \frac{6}{10}$$

$$x_2^k = \frac{1}{11} x_1^k + \frac{1}{11} x_3^{k-1} - \frac{3}{11} x_4^{k-1} + \frac{25}{11}$$

$$x_3^k = -\frac{2}{10} x_1^k + \frac{1}{10} x_2^k + \frac{1}{10} x_4^{k-1} - \frac{11}{10}$$

$$x_4^k = -\frac{3}{8} x_2^k + \frac{1}{8} x_3^k + \frac{15}{8}$$

نختار :

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1}{10} x_2^0 - \frac{2}{10} x_3^0 + \frac{6}{10} = 0.6000$$

$$x_2^1 = \frac{1}{11} x_1^1 + \frac{1}{11} x_3^0 - \frac{3}{11} x_4^0 + \frac{25}{11} = 2.3272$$

$$x_3^1 = -\frac{2}{10} x_1^1 + \frac{1}{10} x_2^1 + \frac{1}{10} x_4^0 - \frac{11}{10} = -0.9873$$

$$x_4^1 = -\frac{3}{8} x_2^1 + \frac{1}{8} x_3^1 + \frac{15}{8} = 0.8789$$

ومنه :

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0.6000 \\ 2.3272 \\ -0.9873 \\ 0.8789 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{10}x_2^1 - \frac{2}{10}x_3^1 + \frac{6}{10} = 1.0300$$

$$x_2^2 = \frac{1}{11}x_1^2 + \frac{1}{11}x_3^1 - \frac{3}{11}x_4^1 + \frac{25}{11} = 2.0370$$

$$x_3^2 = -\frac{2}{10}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 + \frac{1}{10}x_4^1 - \frac{11}{10} = -1.0140$$

$$x_4^2 = -\frac{3}{8}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 + \frac{15}{8} = 09844$$

ومنه :

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1.0300 \\ 2.0370 \\ -1.0140 \\ 0.9844 \end{bmatrix}$$

وهكذا .....

$$X^5 = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 2.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

نستنتج أن طريقة غاوس – سيدل أسرع تقارباً من طريقة جاكوبي .

3 – 13 – تقدير الخطأ المرتكب باستخدام الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية :

بفرض أن كلاً من X^n, X^{n-1} حل تقريبي لجملة المعادلات الخطية $X = \alpha X + \beta$ فمن أجل $k \geq 1$ يمكن أن نكتب :

$$\left\|X^{n+k} - X^n\right\| = \left\|X^{n+k} - X^{n+k-1} + X^{n++k-1} + ... + X^{n+1} - X^n\right\|$$
$$\leq \left\|X^{n+k} - X^{n+k-1}\right\| + \left\|X^{n+k-1} - X^{n+k-2}\right\| + ... + \left\|X^{n+1} - X^n\right\|$$

ولكن :

$$X^{n+2} - X^{n+1} = (\alpha X^{n+1} + \beta) - (\alpha X^n + \beta) = \alpha(X^{n+1} - X^n)$$

ومنه :

عين عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-3} :

$$20x_1 - 2x_2 - x_3 = 25$$
$$2x_1 + 13x_2 - 2x_2 = 30$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$

الحل :

$$x_1 = -\frac{2}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3 + \frac{25}{10}$$
$$x_2 = -\frac{2}{13}x_1 + \frac{2}{13}x_3 + \frac{30}{13}$$
$$x_3 = -\frac{2}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{4}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{2}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \frac{25}{20} \\ \frac{30}{13} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\|_1 = \max(0.4038, 0.35, 0.2038) = 0.4038$$
$$\|\beta\|_1 = 4.0577$$

وبالتعويض بالعلاقة :

$$\|X - X^n\| \le \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\|$$

نجد :

$$\|X - X^n\| \le \frac{(0.4038)^{n+1}}{1-(0.4038)}(4.0577) \le 10^{-3}$$

$$(0.4038)^{n+1} \le \frac{0.596210^{-3}}{(4.0577)}$$

نأخذ اللوغاريتم العشري للطرفين فنجد :

$$(n+1)\log(0.4038) \le \log(0.5962) - \log(4.0577) - 3$$
$$-0.3938(n+1) \le -0.2246 - 0.6083 - 3$$
$$-0.3938(n+1) \le -3.8329$$
$$(n+1) \ge \frac{3.8329}{0.3938} = 9.7$$

ومنه : $n \ge 9$.

3 – 14 – القيم الذاتية وبالأشعة الذاتية :

إذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع n، فإننا نعرّف القيمة الذاتية λ لهذه المصفوفة بأنها العدد الذي يحقق المعادلة $AX = \lambda X$ بشرط أن يكون الشعاع X غير صفري , ويسمى الشعاع X بالشعاع الذاتي للمصفوفة الموافق للقيمة الذاتية λ .

المعادلة $AX = \lambda X$ التي تعرف القيمة الذاتية يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$(A - \lambda I)X = 0$$

حيث I هي المصفوفة الواحدية .

وهذه المعادلة تمثل n معادلة خطية متجانسة بـ n مجهول :

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_2 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0
\end{aligned}
$$

يوجد لدينا n معادلة خطية متجانسة , لكي يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حل غير الحل الصفري يجب أن يكون معين الأمثال مساوياً الصفر أي :

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix} = 0
$$

وهذا المعين يمكن أن يكتب بالشكل التالي :

$$|A-\lambda I| = 0$$

وبنشر هذا المعين نحصل على كثيرة حدود (حدودية) من الدرجة n بالنسبة لـ λ

$$p_n(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة المربعة A أو كثيرة الحدود المميزة التي تكتب على الشكل التالي :

$$p_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \ldots\ldots - p_n$$

حيث أن : $p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ مجموع كل المعينات الصغرى من النوع 2

$p_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$ مجموع كل المعينات الصغرى من النوع 3

وهكذا .....

$p_n = |A|$ أي p_n هو معين المصفوفة A .

مثال (40) :

أوجد كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A من النوع 3 .

الحل :

بفرض A مصفوفة من النوع 3 أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة هي :

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3 = 0$$

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2$$

$$+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

إن عدد المعينات الصغرى من النوع k للمصفوفة A يعطى بالعلاقة التالية :

$$C_n^k = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!} \quad ; \quad k = 1, 2, ..., n$$

وعدد المعينات الصغرى من مختلف الأنواع للمصفوفة A يعطى بالعلاقة التالية :

$$C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$$

ملاحظة :

إذا كان $0 \neq \alpha \in R$ و X شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A، والمقابل للقيمة الذاتية λ ، فإن أي شعاع ذاتي Y من الشكل $Y = \alpha X$ هو شعاع ذاتي للمصفوفة A أيضاً بالنسبة إلى القيمة الذاتية λ وذلك لأن :

$$AY = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X) = \lambda Y$$

مثال (41) :

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للمصفوفة A .

الحل :

كثيرة الحدود المميزة :

$$p_2(\lambda)=\lambda^2-p_1\lambda+p_2=\lambda^2-(4+1)\lambda+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$$

لإيجاد القيم الذاتية نحل المعادلة $\lambda^2-5\lambda+6=0$ فنجد :

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0\Rightarrow\lambda_1=2\ \ ,\ \ \lambda_2=3$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A .

لإيجاد الأشعة الذاتية $AX=\lambda X$ وهذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

ومنه :

$$4x_1 - x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

وهذه الجملة يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = 2$ فنجد :

$$2x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

ومنه $x_2 = 2x_1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على الشعاع الذاتي :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

ومن أجل $\lambda_2 = 3$ نجد :

$$(4-3)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-3)x_2 = 0$$

ومنه :

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

أي أن : $x_1 = x_2$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على الشعاع الذاتي :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$

مثال (42) :

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

الحل :

كثيرة الحدود المميزة هي :

$$p_3(\lambda)=\lambda^3-p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3=\lambda^3-(5+4-3)\lambda^2+$$

$$+(\begin{vmatrix}5 & 7\\ 0 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -5\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 8 & -3\end{vmatrix})\lambda-\begin{vmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-6\lambda^2+(20-5-4)\lambda-\left[-60-14-(-40-40)\right]$$

$$=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$$

بحل هذه المعادلة نجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

أو :

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

ومنه : $\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2 \ , \ \lambda_3 = 3$

لنوجد الأشعة الذاتية : $AX = \lambda X$

هذا يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} &(5-\lambda)x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \\ &(4-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ &2x_1 + 8x_2 + (-3-\lambda)x_3 = 0 \end{aligned}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ نجد :

$$\begin{aligned} &4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \\ &3x_2 - x_3 = 0 \\ &2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0 \end{aligned}$$

وهي جملة معادلات خطية متجانسة , بحل هذه الجملة بطريقة غاوس مثلاً نجد :

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \overset{-3R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومنه : $x_3 = 3x_2$

$$4x_1 = 5x_3 - 7x_2 = 5(3x_2) - 7x_2 = 15x_2 - 7x_2 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

نختار مثلاً $x_2 = 1$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$ نجد :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وهي جملة معادلات خطية متجانسة , بحل هذه الجملة نجد :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -5 \end{bmatrix} \overset{-\frac{2}{3}R_1 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \overset{3R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \overset{-5R_2 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

مثال (43) :

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ثم عين $T^{-1}AT$ حيث T هي المصفوفة التي أعمدتها الأشعة الذاتية للمصفوفة A .

الحل :

كثيرة الحدود المميزة :

$$p_3(\lambda)=\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$$

لإيجاد القيم الذاتية نحل هذه المعادلة فنجد :

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad , \quad \lambda_3=10$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية :

$$AX=\lambda X$$

هذا يكافئ :

$$(5-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 + (2-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ نجد :

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

جملة معادلات خطية متجانسة بحلها نجد :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{R_1 + R_3}{\overset{\frac{1}{2}R_1 + R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات :

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

ومنه $x_2 = 2x_1 - 2x_3$

نختار مثلاً $x_1 = 1$ و $x_3 = 0$ فنجد $x_2 = 2$

ومنه :

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الأول .

ثم نختار فنجد $x_1 = x_3$ ومنه :

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فإذا اخترنا $x_1 = 1$ فإن :

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الثاني .

من أجل $\lambda_3 = 10$ نجد :

$$\begin{aligned} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

جملة معادلات خطية متجانسة بحلها نجد :

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -5 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2}R_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5R_1 + R_2 \\ 4R_1 + R_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات :

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$18x_2 - 9x_3 = 0$$
$$x_3 = 2x_2$$

$$x_1 = x_3 - 4x_2 = -2x_2$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_2 = 1$ فنجد :

$$X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الثالث .

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة T هو :

$$T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 5\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

ومنه :

$$T^{-1}AT=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 5\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

3 – 15 – طريقة التكرار لتعيين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها :

$$Y_i = c_1 \lambda_1^i X_1$$
$$Y_{i+1} = c_1 \lambda_1^{i+1} X_1 = \lambda_1 (c_1 \lambda_1^i X_1) = \lambda_1 Y_i$$

نستنتج إذن أن مركبات الشعاعين تصبح تقريباً متناسبة ونسبتها تساوي تقريباً λ_1 أي القيمة الذاتية للمصفوفة A وذات أكبر قيمة مطلقة .

إذن انطلاقاً من شعاع Y_0 اختياري نحسب على التوالي :

$$Y_1 = AY_0 \quad , \quad Y_2 = AY_1 \quad , \ldots\ldots\ldots , \quad Y_{i+1} = AY_i$$

حتى نحصل على شعاعين Y_i, Y_{i+1} بحيث تصبح مركباتهما متناسبة فعندها تكون النسبة هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة وبتقسيم هذه النسبة على مركبات الشعاع Y_{i+1} هذه نحصل على الشعاع الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية التي وجدناها

نلاحظ أن:

$$Y_1 = AY_0 \quad , \quad Y_2 = A^2 Y_0 \quad , \ldots\ldots\ldots , \quad Y_{i+1} = A^{i+1} Y_0$$

ومن هنا تسمى طريقة التكرار هذه طريقة القوى .

مثال (44) :

عين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المقابل لها بطريقة التكرار للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}$$

الحل :

نأخذ الشعاع الاختياري :

$$Y_0=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

ولنحسب الأشعة :

$$Y_1=AY_0=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 16\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}$$

لنستخدم الشعاع $\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}$ بوصفه شعاعاً تقريبياً جديداً لحساب Y_2

$$Y_2 = A\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{113}{3} \end{bmatrix} = \frac{38}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{264}{19} \\ \frac{1538}{38} \end{bmatrix} = 13.8947\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{bmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.6516 \\ 40.8677 \end{bmatrix} = 13.6516\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9936 \end{bmatrix}$$

$$Y_5 = 13.9744\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9995 \end{bmatrix}$$

$$Y_6 = 13.998\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 13.998$ والشعاع الذاتي

المقابل لها هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

نلاحظ أنه عند استخدام طريقة التكرار فإننا نحصل على القيمة الذاتية , ونحصل على الشعاع الذاتي المقابل لهذه القيمة مباشرة، بينما كنا نحتاج سابقاً لحل المعادلة $p_n(\lambda) = 0$ من أجل إيجاد القيم الذاتية , ونحتاج لحل جملة معادلات خطية متجانسة من أجل إيجاد الأشعة الذاتية .

3 – 16 – طريقة التكرار لتعيين أصغر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها :

في بعض المسائل نحتاج لإيجاد أصغر قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة A نظامية والشعاع الذاتي المقابل لها , وطريقة التكرار تمكننا أيضاً من ذلك .

ليكن X شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A مقابلاً للقيمة الذاتية λ حسب تعريف القيم الذاتية نكتب : $AX = \lambda X$

نضرب طرفي هذه العلاقة بمقلوب المصفوفة A فنجد :

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X$$

أو :

$$X = \lambda A^{-1}X$$

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

تبين هذه العلاقة أن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لمقلوب المصفوفة A أي القيمة الذاتية للمصفوفة A^{-1} .

نستنتج أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة النظامية A، فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لمقلوب هذه المصفوفة .

إذا اعتمدنا المصفوفة A^{-1} وطبقنا طريقة التكرار السابقة لإيجاد أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها فسنحصل على قيمة ذاتية λ' للمصفوفة A^{-1} وستكون λ' أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} وسيكون مقلوب λ' أي $\frac{1}{\lambda'}$ أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A .

مثال (45) :

عين أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

والشعاع الذاتي المرتبط بها .

الحل :

نعين مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}13 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}$$

نختار $Y_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ فنجد :

$$Y_1 = A^{-1}Y_0 = \begin{bmatrix} 0.9286 & -0.2857 \\ -0.2143 & 0.1429 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6425 \\ -0.9714 \end{bmatrix} = 0.6425\begin{bmatrix} 1 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = A^{-1}Y_1 = \begin{bmatrix} 0.9286 & -0.2857 \\ -0.2143 & 0.1429 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

$$= 0.9599\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2398 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0.9286 & -0.2857 \\ -0.2143 & 0.1429 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2398 \end{bmatrix} = 0.9967\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2494 \end{bmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 0.9286 & -0.2857 \\ -0.2143 & 0.1429 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2494 \end{bmatrix} = 0.9995\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2500 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن الفرق بين المركبتين في عمليتي تكرار متتاليتين أصبح 0.0006، فإذا اكتفينا بهذه الدقة تكون أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي :

$$\frac{1}{0.9995} = 1.0095$$

والشعاع الذاتي المرتبط بها هو :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2500 \end{bmatrix}$$

Damascus University

تمارين

1 – أوجد قيمة المعين التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 15 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

2– أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3 – عين مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4 – عين رتبة المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{bmatrix}$$

5 – أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 8 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

باستخدام التحويلات الأولية .

6 – حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

7 – حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 0$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

8 – استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

9 – بالاعتماد على طريقة كرامر , حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4$$
$$3x_1 - 4x_2 = 1$$
$$5x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0$$

10 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 12$$
$$3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 38$$

بطريقة كرامر .

11 – استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

12 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$
$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3$$

بطريقة غاوس .

13 – احسب قيمة المعين التالي باستخدام طريقة غاوس:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

14 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 21$$
$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 32$$

بطريقة غاوس – جوردان .

15 –حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غاوس – جوردان:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$$

16 – أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

17 – أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

18 – أوجد بطريقة كراوت حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$50x_1 + 107x_2 + 36x_3 = 2$$
$$25x_1 + 54x_2 + 20x_3 = 1$$
$$31x_1 + 66x_2 + 21x_3 = 1$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية .

26 – عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

27 – أوجد القيم الذاتية للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

28 – عين أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & -8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم أوجد الشعاع الذاتي المرتبط بها .

29 – عين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30 – عين أكبر قيمة ذاتية وأصغر قيمة ذاتية والشعاعين الذاتيين المرتبطين بهما للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

الاستيفاء (الاستكمال)

Interpolation

الطريقة العامة في الاستيفاء

طريقة لاغرانج

طريقة نيوتن الأمامية

طريقة الفروق المقسومة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

1-4 تمهيد: قبل ظهور الآلات الحاسبة كان حساب $\sin x$ أو $\sqrt{x}$ يتم عن طريق جداول خاصة، أما إذا كان x غير موجود في هذه الجداول نأخذ عددين أحدهما أكبر من x، والآخر أصغر منه، ونجري الاستيفاء من أجل تحديد قيمة $\sin x$ أو $\sqrt{x}$، فمثلاً إذا طلب منا حساب $\sqrt{2.155}$ ولدينا الجدول الخاص

x	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19
$\sqrt{x}$	1.46287	1.46629	1.46969	1.47309	1.74648	1.47986

نلاحظ أن العدد 2.155 ، محصور بين قيمتين من هذا الجدول وهما 2.150 و 2.160 ، وأن الفرق بين الجذرين التربيعيين للعددين 2.150 و 2.160 هو 0.00340 ، وبالتالي فإن الفرق بين $\sqrt{2.150}$ و $\sqrt{2.155}$ هو نصف الفرق بين $\sqrt{2.150}$ و $\sqrt{2.160}$ ولذلك نأخذ نصف القيمة 0.00340 ونضيفها إلى قيمة $\sqrt{2.150}$ فنحصل على العدد التالي:

$$\sqrt{2.150} = 1.46629 + 0.00170 = 1.46799$$

أما إذا كان العدد المطلوب حساب الجذر التربيعي له هو 2.153 ، فإننا نضيف 0.3 من القيمة 0.00340 إلى قيمة $\sqrt{2.150}$ فنحصل على العدد

$$\sqrt{2.153} = 1.46629 + 0.00102 = 1.46731$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

وتكون الفروق الأمامية من المرتبة الثانية

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)$$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

ومنه

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^2 y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$$

وتكون الفروق الأمامية من المرتبة الثالثة

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$= \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i$$

$$= (y_{i+3} - y_{i+2}) - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) + (y_{i+1} + y_i)$$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

ومنه

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

أما الفروق الأمامية من المرتبة الرابعة

$$\Delta^4 y_i = \Delta(\Delta^3 y_i) = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i$$

وبشكل عام الفروق الأمامية من المرتبة n هي:

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{i+n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y_{i+n-3} + \cdots \ldots + (-1)^n y_n$$

ويمكن كتابته بالشكل التالي

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}$$

حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

وهذه العلاقة تمكننا من حساب الفروق الأمامية من أي مرتبة بدلالة قيم التابع في عدد من النقاط، وكذلك نستطيع حساب قيم التابع y_k ,$k = 1, 2, \ldots\ldots, n$ بدلالة علاقات الفروق الأمامية وذلك كما يلي:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \Rightarrow y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 \Rightarrow y_2 = 2y_1 - y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$y_2 = 2(y_0 + \Delta y_0) - y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \Rightarrow y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0 + \Delta^3 y_0$$
$$y_3 = 3(y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) - 3(y_0 + \Delta y_0) + y_0 + \Delta^3 y_0$$
$$= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

وهكذا من علاقة الفروق الأمامية من المرتبة k يمكن أن نكتب

$$y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i y_0 \quad , k=1,2,....,n$$

وهذه العالقة تسمح بحساب قيمة التابع y_k عند أي نقطة بدلالة الفروق الأمامية من مراتب مختلفة.

ويمكن تنظيم الفروق الأمامية بالشكل التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		$\Delta^5 y_2$
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_3$	
		Δy_5		$\Delta^3 y_4$		
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$			
		Δy_6				
x_7	y_7					

وهذا الشكل يسمى جدول الفروق الأمامية.

Damascus University

مثال (1) أوجد جدول الفروق الأمامية للتابع $y = \ln x$ حتى المرتبة السادسة

حيث $x_i = 0.3 + ih$ $\quad$ i=0,1,2,....,9 $\quad$ $h = 0.1$

الحل: نحسب قيم الفروق الأمامية للتابع $y = f(x)$ من المرتبة الأولى وحتى المرتبة السادسة ونرتب الحسابات في الجدول التالي:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0.3	−1.20397						
		0.28768					
0.4	−0.91629		−0.06454				
		0.22314		0.02372			
0.5	−0.69315		−0.04082		−0.01106		
		0.18232		0.01266		0.00593	
0.6	−0.51083		−0.02816		−0.00513		−0.00345
		0.15416		0.00753		0.00248	
0.7	−0.35667		−0.02063		−0.00265		
		0.13353		0.00488			
0.8	−0.22314		−0.01575				
		0.11778					
0.9	−0.10536						

4-4 خواص الفروق الأمامية:

1 إذا كان c قيمة ثابتة فإن $\Delta c = 0$

2 بفرض c قيمة ثابتة و y تابع ما فإن $\Delta(c\mathrm{y}_i) = c\Delta y_i$

3 بفرض c_1 و c_2 قيمتان ثابتتان و y, g تابعان فإن:

$$\Delta(c_1 y_i + c_2 g_i) = c_1 \Delta y_i + c_2 \Delta g_i$$

4 بفرض أن y, g تابعان فإن:

$$\Delta(y_i + g_i) = \Delta y_i + \Delta g_i$$

5 بفرض أن y, g تابعان فإن:

$$\Delta(y_i . g_i) = y_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta y_i = g_i \Delta y_i + y_{i+1} \Delta g_i$$

6 بفرض أن y, g تابعان فإن:

$$\Delta(\frac{y_i}{g_i}) = \frac{g_i \Delta y_i - y_i \Delta g_i}{y_i \Delta g_{i+1}}$$

7 إذا كان $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

فإن $\Delta P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$

وبالتالي فإن: $\Delta^n p_n(x) = a_n h^n n!$

$$x_1 - x_0 = h$$
$$x_2 - x_1 = h$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} = h$$

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ مُعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\Delta^n y_0$$

حيث $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ $\quad h = x_i - x_{i-1}$

تسمى هذه العلاقة بطريقة نيوتن الأمامية

نلاحظ أنه من أجل $\alpha = 0$ يكون لدينا $p_n(x_0) = y_0$

ومن أجل $\alpha = 1$ يكون لدينا

$$p_n(x_1) = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$$

ومن أجل $\alpha = 2$ يكون لدينا

$$p_n(x_2) = y_0 + 2(y_1 - y_0) + (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_2$$

وكذلك من أجل $\alpha = 3$ نحصل على $p_n(x_3) = y_3$

وهذا يعني أن قيمة $p_n(x)$ في النقاط $x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$

تساوي قيمة التابع $y = f(x)$ في هذه النقاط.

مثال(3) ليكن لدينا التابع $y = f(x) = \cos x$

حيث $x_i = 0.2 + ih \quad , \quad i = 0,1,2,3,4 \quad , \quad h = 0.2$

أوجد الحدودية من الدرجة الثالثة الملائمة للتابع $y = f(x)$ ثم أوجد قيمة تقريبية للتابع y

عند النقطة $x = 0.7$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.98007				
		−0.05901			
0.4	0.92106		−0.03671		
		−0.09572		0.00380	
0.6	0.82534		−0.03291		0.00133

		−0.12863		0.00513	
0.8	0.69671		−0.02777		
		−0.15641			
1	0.54030				

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = 5x - 1$$

نطبق طريقة نيوتن الأمامية:

$$p_3(\alpha) = y_0 + \binom{\alpha}{1}\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0$$

$$= y_0 + \alpha\ \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$p_3(x) = 0.98007 + (5x-1)(-0.05901) + \frac{(5x-1)(5x-2)}{2}(+0.03671) +$$

$$+\frac{(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{6}(0.00380)$$

$$= 0.0791667x^3 - 0.553875x^2 + 0.0151083x + 0.99857$$

ولحساب قيمة تقريبية للتابع y نعوض $x = 0.7$ في $p_3(x)$ فنجد:

$$p_3(0.7) = 0.0791667(0.7)^3 - 0.553875(0.7)^2 + 0.0151083(0.7) + 0.99857$$
$$= 0.764901$$

والخطأ المطلق

$$\Delta = |\cos(0.7) - p_3(0.7)|$$
$$= |0.764842 - 0.764901| = 0.000059$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الأمامية.

تُعطى عبارة الخطأ بطريقة نيوتن الأمامية بالعلاقة التالية:

$$e(x_k) = \binom{\alpha}{k+1} \Delta^{k+1} y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} y_0$$

أي أن قيمة الخطأ المرتكب تساوي قيمة الحد التالي للحد الأخير الذي نكتفي باستخدامه.

مثال (4) عين بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$y = f(x)$	0.61	1.09	1.58	2.09

ثم أوجد $f(2.33)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل: نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2.1	0.61			
		0.48		
2.2	1.09		0.01	
		0.49		0.01
2.3	1.58		0.02	
		0.51		
2.4	2.09			

الحدودية الملائمة هي:

$$p_2(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 2.1}{0.1} = 10x - 21$$

بالتعويض نجد:

$$p_2(x) = 0.61 + (10x-21)(0.48) + \frac{(10x-21)(10x-22)}{2}(0.01)$$

$$= 0.61 + 4.8x - 10.08 + (100x^2 - 430x + 462)\frac{(0.01)}{2}$$

$$p_2(x) = 0.5x^2 + (4.8-2.15)x + 0.61 - 10.08 + 2.31$$

$$= 0.5x^2 + 2.65x - 7.61$$

$$f(2.33) \approx p_2(2.33) = 0.5(2.33)^2 + 2.65(2.33) - 7.16$$

$$= 1.72895$$

نحسب الخطأ المرتكب

$$\alpha = 10x - 21 = 10(2.33) - 21 = 2.3$$

$$e = e(2.33) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= \frac{(2.3)(1.3)(0.3)}{6}(0.01) = 0.001495$$

الطريقة الثانية: طريقة نيوتن الخلفية

يعرّف المؤثر التفاضلي الخلفي ∇ على التابع $y = f(x)$ بالعلاقة التالية:

x	0	1	2	3
y	−3	1	2	7

اكتب جدول الفروق الخلفي للتابع $y = f(x)$

الحل:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	−3			
1	1	4	−3	
2	2	1	4	7
3	7	5		

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(s) = y_n + \binom{s}{1}\nabla y_n + \binom{s+1}{2}\nabla^2 y_n + \binom{s+2}{3}\nabla^3 y_n + \cdots$$

$$\cdots + \binom{s+n-1}{n}\nabla^n y_n$$

حيث $s = \dfrac{x - x_n}{h}$

$$h = x_i - x_{i-1} \qquad ; \; i = n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1$$

من أجل $x = x_n$ نجد $s = 0$ ومنه

$$p_n(x_n) = p_n(0) = y_n$$

ومن أجل $x = x_{n-1}$ نجد

$$s = \frac{x_{n-1} - x_n}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ومنه

$$p_n(x_{n-1}) = y_n + (-1)\nabla y_n$$
$$= y_n - (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_n + y_{n-1} = y_{n-1}$$

ومن أجل $x = x_{n-2}$ نجد

$$s = \frac{x_{n-2} - x_n}{h} = \frac{x_{n-2} - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n}{h}$$
$$= \frac{-h-h}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$$

ومنه

$$p_n(x_{n-2}) = y_n - 2\nabla y_n + \frac{(-2)(-1)}{2}\nabla^2 y_n$$
$$= y_n - 2(y_n - y_{n-1}) + (y_n - 2y_{n-1} - y_{n-2})$$
$$= y_{n-2}$$

وهكذا.....

$$p_n(x_2) = y_n$$
$$p_n(x_1) = y_1$$

مثال (6) أوجد بطريقة نيوتن الخلفية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2

$f(x)$	-1	2	7

الحل: نكتب جدول الفروق

x	y	∇y	$\nabla^2 y$
0	-1		
		3	
1	2		2
		5	
2	7		

الحدودية الملائمة للتابع $f(x)$ بطريقة نيوتن الخلفية هي:

$$p_2(s) = y_n + s\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$\mathrm{h} = 1 \qquad y_n = y_2 = 7$$

$$\mathrm{s} = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x-2}{1} = x - 2$$

بالتعويض نجد:

$$p_2(x) = 7 + (x-2)(5) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}(2)$$

$$= x^2 + 2x - 1$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الخلفية:

تُعطى عبارة الخطأ بطريقة نيوتن الخلفية بالعلاقة التالية:

$$e = e(x_k) = \binom{s+k}{k+1} \nabla^{k+1} y_n = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+k)}{(k+1)!} \nabla^{k+1} y_n$$

أي أن قيمة الخطأ المرتكب تساوي قيمة الحد التالي للحد الأخير الذي نكتفي باستخدامه.

مثال (7) ليكن التابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
$f(x)$	1.0000	1.0066	1.0132	1.0196	1.0260	1.0323

والمطلوب:

1 -اكتب جدول الفروق

2 -أوجد كثيرة الحدود $p_3(x)$ بطريقة نيوتن الخلفية

3 -أوجد القيمة التقريبية للتابع $y = f(x)$ عند النقطة $x = 1.05$

4 -احسب الخطأ المرتكب

الحل: 1- نكتب جدول الفروق المقسومة

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
1.00	1.0000					
		0.0066				
1.02	1.0066		0.0000			
		0.0066		−0.0002		
1.04	1.0132		−0.0002		0.0004	
		0.0064				−0.0007
1.06	1.0196		0.0000		−0.0003	
		0.0064		−0.0001		
1.08	1.0260		−0.0001			
		0.0063				
1.10	1.0323					

-2

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - 1.10}{0.02}$$
$$= 50x - 55$$

$$p_3(s) = y_n + s\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_n$$

$$p_3(x) = 1.0323 + (50x - 55)(0.0063) + \frac{(50x-55)(50x-54)}{2}(-0.0001)$$
$$+ \frac{(50x-55)(50x-45)(50x-53)}{6}(-0.0001)$$

$$p_3(x) = -2x^3 + 6.355x^2 - 6.410x + 3.0568$$

-3

$$f(1.05) \approx p_3(1.05) = -2(1.05)^3 + 6355(1.05)^2 - 6.410(1.05) + 3.0568$$
$$= 1.0174$$

$$s = 50x - 55 = 50(1.05) - 55 \qquad -4$$

$$= -2.5$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ $e = \dfrac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}$

نجد:

$$e = \frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)(1.5)}{24}(-0.0003)$$

$$= 0.000011$$

الطريقة الثالثة: الطريقة العامة

ليكن التابع $y = f(x)$ معرفا بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

حيث $y_i = f(x_i) \quad , \quad i = 0,1,2,\cdots,n$

لتعيين الحدودية $p_n(x)$ التي تأخذ قيم التابع $y = f(x)$ نفسها عند النقاط

$$x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

نكتب الحدودية $p_n(x)$ بالشكل العام التالي:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

حيث $i = 0,1,2,\cdots,n$; a_i ثوابت

يمكن تعيين الثوابت a_i بالاعتماد على حل جملة المعادلات الخطية والتي يمكن الحصول عليها من تعويض (x_i, y_i) ; $i = 0,1,2,\cdots,n$

في الحدودية $p_n(x)$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\
a_2 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \cdots + a_n x_2^n &= y_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}$$

يمكن حل هذه الجملة بطريقة كرامر، لذلك نحسب معين الأمثال

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & & x_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & & x_n^n \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن هذا المعين هو معين فاندرموند الذي يُعطى منشوره كما يلي:

$$\begin{aligned} \Delta = & (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)\cdots(x_n - x_0) \\ & (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ & (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_5 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ثم نعين المعينات Δ_0 ، Δ_1 ، Δ_2 ، $\cdots$ ، Δ_n والتي نحصل عليها من المعين Δ

وذلك باستبدال عمود الثوابت $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ بالعمود الأول ثم العمود الثاني

وهكذا..... حتى العمود الأخير

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 46$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 27 \end{vmatrix} = -42$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

ومنه

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{46}{12} = 3.8333$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-42}{12} = -3.5$$

$$a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{12} = 0.6667$$

بالتعويض نحصل على حدودية الاستيفاء

$$p_3(x) = 0.6667x^3 - 3.5x^2 + 0.8333x + 1$$

الطريقة الرابعة: طريقة لاغرانج

بفرض $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	.....	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	.....	y_n

الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ تُعطى بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) \\ &= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_n(x) f(x_n) \\ &= L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + + L_n(x) y_n \end{aligned}$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة لاغرانج

حيث $L_j(x)$ تسمى كثيرات حدود لاغرانج وتُعطى بالشكل التالي:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$L_{n-1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}$$

$$L_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج هي حدوديات من الدرجة n وتحقق العلاقة التالية:

$$L_j(x_i)=\begin{cases}0 & i\neq j \quad \text{عندما}\\ 1 & i=j \quad \text{عندما}\end{cases}$$

إن قيمة الحدودية $p_n(x)$ عند أي نقطة من نقاط الجدول

$$x_i, i=0,1,2,\cdots,n$$

تساوي قيمة التابع $f(x)$ أي أن

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j(x_i)f(x_j)$$

$$=L_0(x_i)f(x_0)+L_1(x_i)f(x_1)+....+L_i(x_i)f(x_i)+$$
$$\cdots\cdots+L_n(x_i)f(x_n)=f(x_i)$$

مثال (9) باستخدام طريقة لاغرانج أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-6	2	-2	6

ثم اوجد القيمة التقريبية لـ $f(0.5)$

الحل: نوجد أولاً حدوديات لاغرانج

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{-6}$$
$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x(x^2-5x+6)}{2}$$
$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x(x^2-4x+3)}{-2}$$
$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x(x^2-3x+2)}{6}$$

بالتعويض بطريقة لاغرانج نجد:

$$p_3(x)=\sum_{j=0}^{3}L_j(x)f(x_j)$$

$$=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

$$=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{-6}(-6)+\frac{x(x^2-5x+6)}{2}(2)$$

$$+\frac{x(x^2-4x+3)}{-2}(-2)+\frac{x(x^2-3x+2)}{6}(6)$$

$$=x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6+x^3-5x^2+6x$$

$$+x^3-4x^2+3x+x^3-3x^2+2x$$

$$=4x^3-18x^2+22x-6$$

$$f(0.5)\approx p_3(0.5)=4(0.5)^3-18(0.5)^2+22(0.5)-6=1$$

تقدير الخطأ المرتب بطريقة لاغرانج

يمكن تقدير الخطأ المرتكب بالاعتماد على النظرية التالية:

نظرية: إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً وقابلاً للاشتقاق $(n+1)$ مرة و بفرض أن النقطة $x=\overline{x}$ واقعة داخل المجال الذي يحوي النقاط

$x_0, x_1 \cdots\cdots, x_n$ بحيث أن $\bar{x} \neq x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\cdots,n$ فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)\omega(\bar{x})}{(n+1)!}$$

حيث $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots\cdots(x - x_n)$

$$= \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

و $p_n(x)$ كثيرة الحدود الملائمة للتابع $f(x)$ في النقاط

$x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\cdots,n$

البرهان: بفرض أن $p_n(\bar{x})$ قيمة تقريبية لـ $f(\bar{x})$ ولنوجد الفرق

$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})$

من أجل ذلك نأخذ التابع المساعد التالي:

$$\varphi(x) = f(x) - p_n(x) - R\omega(x)$$

ونعين الثابت R من الشرط $\varphi(\bar{x}) = 0$ ثم نقدر الخطأ في المنطقة $x = \bar{x}$ التي ينعدم فيها التابع $\varphi(x)$. بالاعتماد على التابع المساعد نجد:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}$$

$$=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x^3-x}{6}$$

بالتعويض بطريقة لاغرانج نجد:

$$p_3(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

$$=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}(0.4)+\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}(1)$$

$$+\frac{x^3-x^2-2x}{-2}(2.5)+\frac{x^3-x}{6}(6.25)$$

$$p_3(x)=0.225x^3+0.45x^2+0.825x+1$$

$$f(1.5)\approx p_3(1.5)=4.00938$$

لحساب الخطأ المرتكب نوجد المشتق الرابع للتابع $f(x)$ حيث $n=3$

$$f'(x) = \ln(2.5)2.5^x$$
$$f''(x) = \left[\ln(2.5)\right]^2 2.5^x$$
$$f'''(x) = \left[\ln(2.5)\right]^3 2.5^x$$
$$f^{(4)}(x) = \left[\ln(2.5)\right]^4 2.5^x$$

$$M = \max_{-1\le x\le 2} \left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{-1\le x\le 2} \left|\left[\ln(2.5)\right]^{(4)} 2.5^x\right|$$
$$= (0.70491)(2.5)^2 = (0.70491)(6.25) = 4.40569$$
$$\omega(1.5) = (1.5+1)(1.5-0)(1.5-1)(1.5-2) = -0.9375$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ

$$\left|e(\overline{x})\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|W(\overline{x})\right|$$
$$\left|e(1.5)\right| \le \frac{4.40569}{4!}\left|0.9375\right|$$
$$= 4.40569(0.0390625) = 0.172097$$

الطريقة الخامسة: طريقة الفروق المقسومة

بفرض $y = f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	.....	x_i	.....	x_n

$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	……	$f(x_i)$	……	$f(x_n)$

حيث $y_i = f(x_i) = f[x_i]$, $i = 0,1,2\cdots\cdots,n$

نعرف الفروق المقسومة الأولى كما يلي:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f[x_{n-1},x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$$

والفروق المقسومة الثانية كما يلي:

$$f\left[x_0,x_1,x_2\right]=\frac{f\left[x_1,x_2\right]-f\left[x_0,x_1\right]}{x_2-x_0}$$

$$f\left[x_1,x_2,x_3\right]=\frac{f\left[x_2,x_3\right]-f\left[x_1,x_2\right]}{x_3-x_1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f\left[x_{n-2},x_{n-1},x_n\right]=\frac{f\left[x_{n-1},x_n\right]-f\left[x_{n-2},x_{n-1}\right]}{x_n-x_{n-2}}$$

والفروق المقسومة الثالثة كما يلي:

$$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,x_2\right]-f\left[x_0,x_1,x_2\right]}{x_3-x_0}$$

$$f\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]=\frac{f\left[x_2,x_3,x_4\right]-f\left[x_1,x_2,x_3\right]}{x_4-x_1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f\left[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n\right]=\frac{f\left[x_{n-2},x_{n-1},x_n\right]-f\left[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}\right]}{x_n-x_{n-3}}$$

وهكذا الفروق المقسومة من المرتبة n تُعطى كما يلي:

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

ويمكن ترتيب هذه الفروق في الجدول التالي والذي يسمى جدول الفروق المقسومة

x	$f(x)$				
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$		
		$f[x_4, x_5]$			
x_5	$f[x_5]$				

مثال (11) اكتب جدول الفروق المقسومة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$f(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7

الحل:

x	$f(x)$				
3.2	22.0				
		8.4000			
2.7	17.8		2.8556		
		2.1176		−0.52748	
1.0	14.2		2.0116		0.25584
		6.3421		0.086531	
4.8	38.3		2.2626		
		1.6750			
5.6	51.7				

حيث

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{17.8-22.0}{2.7-3.2}=8.400$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{2.1176-8.400}{1.0-3.2}=2.8556$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$=\frac{2.0116-2.8556}{4.8-3.2}=-0.52748$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$$

$$=\frac{0.086531-(-0.52748)}{5.6-3.2}=0.25584$$

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y=f(x)$ بطريقة الفروق المقسومة تُعطى بالعلاقة التالية:

$$p_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$\cdots\cdots+f[x_0,x_1,x_2,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-1})$$

نلاحظ أن

$$p_n(x_0)=f[x_0]=f(x_0)$$
$$p_n(x_1)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x_1-x_0)$$
$$=f[x_0]+\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}(x_1-x_0)$$
$$=f[x_0]+f[x_1]-f[x_0]=f[x_1]$$

وهكذا.....

$$p_n(x_n)=f[x_n]$$

هذا يعني أن قيم الحدودية $p_n(x)$ تساوي قيم التابع $y=f(x)$ عند نقاط الارتكاز وبالتالي فالحدودية هي الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$

مثال (12) أوجد باستخدام الفروق المقسومة كثيرة الحدود الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	-1	2	-2

$f(x)$	-5	-3	-15	39	-9

الحل: نشكل جدول الفروق المقسومة

x	$f(x)$				
0	-5				
		2			
1	-3		-4		
		6		8	
-1	-15		12		3
		18		2	
2	39		6		
		12			
-2	-9				

بالتعويض بطريقة الفروق المقسومة نجد:

Damascus University

$$p_4(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) +$$
$$f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$= -5 + 2(x-0) + (-4)(x-0)(x-1) + 8(x-0)(x-1)(x+1) +$$
$$+ 3(x-0)(x-1)(x+1)(x-2)$$
$$= -5 + 2x - 4x^2 + 4x + 8x^3 - 8x + 3x^4 - 3x^2 - 6x^3 + 6x$$
$$= 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$$

خواص الفروق المقسومة

- 1

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1,x_0]$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$
$$= \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2} = f[x_2,x_1,x_0]$$

$$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,x_3\right]-f\left[x_0,x_1,x_2\right]}{x_3-x_0}$$

$$=\frac{\dfrac{\Delta^2 y_1}{2h^2}-\dfrac{\Delta^2 y_0}{2h^2}}{3h}=\frac{\dfrac{y_3-2y_2+y_1-(y_2-2y_1+y_0)}{2h^2}}{3h}$$

$$=\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{6h^3}=\frac{1}{3!h^3}\Delta^3 y_0$$

ومنه نستنتج

$$f\left[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة:

الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_n)f\left[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\right]$$

مثال (13) بفرض $y=f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي:

x	0.00	0.20	0.30
$f(x)$	0.00000	0.20134	0.30452

عين $f(0.23)$ بالاعتماد على طريقة الفروق المقسومة ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل: نشكل جدول الفروق المقسومة

x	$f(x)$		
0.00	0.00000		
		1.0067	
0.20	0.20134		0.08367
		1.0318	
0.30	0.30452		

نطبق طريقة الفروق المقسومة فنجد:

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = 0.00000 + (1.0067)(x - 0) + (0.08367)(x - 0)(x - 0.2)$$

$$= 0.08367x^2 + 0.98997x$$

$$f(0.23) \approx p_2(0.23) = 0.08367(0.23)^2 + 0.98997(0.23)$$

$$= 0.2321$$

بالتعويض بطريقة نيوتن الأمامية نجد:

$$p_2(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$p_2(x) = 4 + (x-2)(5) + \frac{(x-2)(x-3)}{2}(2)$$

$$= 4 + (x-2)\left[5 + x - 3\right] = 4 + (x-2)(x+2)$$

$$= 4 + x^2 - 4 = x^2$$

ومنه

$$6.25 = x^2$$

$$x = \sqrt{6.25} = 2.5$$

مثال (15) أوجد باستخدام الطريقة العامة الحدودية الملائمة للتابع

$y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1

الحل: حدودية الاستيفاء الملائمة لهذا التابع هي

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

بالاعتماد على قيم الجدول نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 = 4$$
$$a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 1$$
$$a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 = 0$$
$$a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 + a_3(3)^3 = 1$$

ومنه

$$a_0 = 4$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 1$$

لنوجد حل جملة المعادلات الخطية بطريقة كرامر

معين الأمثال

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = (1-0)(2-0)(3-0)(2-1)(3-1)(3-2)$$

$$\Delta = (1)(2)(3)(1)(2)(1) = 12 \neq 0$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 4\left[\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 4\left[(108-72)-(54-24)+(18-12)\right]$$

$$= 4(36-30+6) = 4(12) = 48$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 9 & 27 \end{vmatrix} = -48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 27 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه

ثم عين $f(5)$ واحسب الخطأ المرتكب .

10 – بفرض $y = f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي :

x	30	35	40	45	50	55	60
$y = f(x)$	0.5	0.5736	0.6428	0.7071	0.766	0.8192	0.866

احسب $\sin(29)$ بطريقة نيوتن الأمامية بالاعتماد على حساب $P_3(29)$ ثم احسب $\sin(61)$ بطريقة نيوتن الخلفية بالاعتماد على حساب $P_3(61)$ واحسب الخطأ المرتكب في حساب كل قيمة .

11 – باستخدام طريقة الفروق المقسومة أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي :

x	0	1	3
$y = f(x)$	−1	−2	8

ثم أوجد $f(2)$ واحسب الخطأ المرتكب .

12 – ليكن التابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي :

x	0	1	2	4
$y=f(x)$	1	1	2	5

عين $f(3)$ بالاعتماد على طريقة الفروق المقسومة ثم احسب الخطأ المرتكب .

13 – بفرض $y=f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي :

x	0	2	3	5	6
$y=f(x)$	1	3	2	5	6

أوجد الحدودية الملائمة بطريقة الفروق المقسومة ثم عين $f(1)$ واحسب الخطأ المرتكب .

Damascus University

الفصل الخامس
التفاضل العددي
Numerical Differentiation

صيغة الفروق الأمامية

صيغة الفروق المركزية

صيغ عددية للمشتقات بالاعتماد على الاستيفاء

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

5-1 تمهيد: نعلم أن مشتق التابع $y = f(x)$ عند النقطة x_0 يُعطى بالعلاقة التالية:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

وفي بعض الحالات يكون من الصعب إيجاد هذه النهاية لبعض التوابع ، وفي حالات أخرى تكون التوابع غير معروفة من خلال علاقة، بل يوجد قيم لهذه التوابع عند بعض النقاط

في مثل هذه الحالات سوف تستخدم طرق عددية لإيجاد قيم تقريبية لمشتقات هذه التوابع، من أجل ذلك نميز حالتين:

1 إذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق التابع $y = f(x)$ عند إحدى النقاط المعطاة $x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots$ ، فإن المسألة هي مسألة تفاضل.

2 إذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق التابع $y = f(x)$ عند نقطة واقعة بين النقاط $x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots$ ، فإن المسألة هي مزيج من التفاضل والاستيفاء

5-2 صيغ عددية للمشتقات عند نقاط الجدول

بفرض $y = f(x)$ تابعاً مُعطى بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	.....	x_i	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	.....	$f(x_i)$	.....	$f(x_n)$

حيث $y_i = f(x_i)$, $x_{i+1} - x_i = h$ $\forall i = 0,1,2, \dots \dots$

نوجد صيغ عددية يمكن الاعتماد عليها في إيجاد قيم تقريبية لمشتق التابع $y = f(x)$

ننشر التابع $y = f(x)$ حسب تايلور

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots\dots\dots (1)$$

حيث h مقدار صغير

من هذه العلاقة وبإهمال المقادير الصغيرة يمكن أن نكتب

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

وهذه العلاقة تسمى صيغة الفروق الأمامية والخطأ المرتكب في هذه الصيغة يكون من الرتبة $0(h)$

بالتعويض بالعلاقة (1) كل h بـ $-h$ نجد:

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+.....(2)$$

من هذه العلاقة بإهمال المقادير الصغيرة نجد:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\frac{\nabla f(x_0)}{h}$$

وتسمى هذه العلاقة بصيغة الفروق الخلفية والخطأ المرتكب في هذه الصيغة من الرتبة $0(h)$

بطرح (2)من (1) نجد:

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=2hf'(x_0)+\frac{h^3}{3}f'''(x_0)+.....$$

بإهمال المقادير الصغيرة يمكن أن نكتب العلاقة التالية:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{\delta f(x_0)}{2h}$$

وتسمى هذه العلاقة بصيغة الفروق المركزية والخطأ المرتكب بهذه الصيغة من الرتبة $0(h^2)$

مثال (1) بفرض $y = f(x) = \sin x$ تابعاً معرفاً على المجال $[0.7,1.3]$ احسب مشتق التابع $y = \sin x$ عند النقطة $x = 1$ مستخدماً الصيغ الثلاث السابقة ثم احسب الخطأ المرتكب في كل صيغة، ماذا تستنتج؟ حيث $h = 0.1$

الحل:نشكل الجدول التالي:

x	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.644217	0.717356	0.783327	0.841471	0.891207	0.932039	0.963558

لنحسب قيمة مشتق التابع $y = \sin x$ عند النقطة $x = 1$

1 -باستخدام صيغة الفروق الأمامية

$$f'(1) = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \frac{0.891207 - 0.841471}{0.1} = 0.497364$$

2 -باستخدام صيغة الفروق الخلفية

$$f'(1) = \frac{f(1) - f(0.9)}{0.1} = \frac{0.841471 - 0.783327}{0.1} = 0.58144$$

3 -باستخدام صيغة الفروق المركزية

$$f'(1)=\frac{f(1.1)-f(0.9)}{2(0.1)}=\frac{0.891207-0.783327}{0.2}=0.539402$$

لحساب الخطأ المرتكب نوجد مشتق التابع $y=\sin x$

$$y'=f'(x)=\cos x$$

ومنه $y'(1)=f'(1)=\cos 1=0.540302$

الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق الأمامية

$$e_1=|0.497364-0.540302|=0.042938$$

الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق الخلفية

$$e_2=|0.58144-0.540302|=0.041138$$

الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق المركزية

$$e_3=|0.539402-0.540302|=0.000902$$

نستنتج أن صيغة الفروق المركزية أفضل من صيغة الفروق الأمامية و صيغة الفروق الخلفية

3-5 صيغ عددية للمشتقات عند نقاط ليست موجودة في جدول البيانات

وجدنا سابقاً في الفصل الرابع أنه يمكن حساب قيمة تقريبية للتابع $y = f(x)$ عند أي نقطة من النقاط $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ ، أو عند أي نقطة واقعة بين هذه النقاط بالاعتماد على الحدودية $p_n(x)$ الملائمة للتابع $f(x)$

يمكن أيضاً إيجاد قيمة تقريبية لمشتقات التابع $y = f(x)$ عند أي نقطة بالاعتماد على مشتقات الحدودية $p_n(x)$

نعلم أن كثيرة حدود الاستيفاء الأمامية تُعطى كما يلي:

$$p_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots$$

حيث $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ ومنه $x = x_0 + h\alpha$ بمفاضلة الطرفين نجد:

$$dx = hd\alpha$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = h \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \frac{d}{dx} p_n(x) = \frac{d}{d\alpha}\left[p_n(\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}\left[p_n(\alpha)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}\left[y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha}{6}\Delta^3 y_0\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-6\alpha}{24}\right)\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}(2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 11\alpha - 3)\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

باشتقاق التابع $f'(x)$ نجد:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d}{d\alpha}\left[f'(\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$=\frac{1}{h^2}\frac{d}{d\alpha}\left[\Delta y_0+(\alpha-\frac{1}{2})\Delta^2 y_0+\frac{1}{6}(3\alpha^2-6\alpha+2)\Delta^3 y_0)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(2\alpha^3-9\alpha^2+11\alpha-3)\Delta^4 y_0+.....\right]$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(\alpha-1)\Delta^3 y_0+\frac{1}{12}(6\alpha^2-18\alpha+11)\Delta^4 y_0+.....\right]$$

باشتقاق التابع $f''(x)$ نجد:

$$f'''(x)=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0+\frac{2\alpha-3}{2}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

أيضاً باشتقاق التابع $f'''(x)$ نجد:

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0.....\right]$$

يمكن بالاعتماد على الصيغ السابقة إيجاد مشتقات التابع $y=f(x)$ عند نقاط جدول البيانات فمثلاً عند النقطة $x=x_0$ فإن $\alpha=0$ ومنه

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+.....\right]$$

$$f'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\frac{7}{4}\Delta^5 y_0-.....\right]$$

$$f^{(4)}(x_0)=\frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0-2\Delta^5 y_0+.....\right]$$

تقدير الخطأ المرتكب في حساب قيمة مشتق التابع عند نقطة بطريقة نيوتن الأمامية

يمكن تقدير الخطأ المرتكب في حساب قيمة مشتق التابع عند نقطة كما يلي:

بفرض $p_n(x)$ كثيرة الحدود الملائمة للتابع $y=f(x)$ فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة

$$e(x)=f(x)-p_n(x)$$

ومنه

$$e'(x)=f'(x)-p_n'(x)$$

$$e'(x)=(-1)^n\frac{h^n}{n+1}f^{(n+1)}(x)$$

حيث

$$x\in[x_0,x_n]$$

أو
$$e'(x) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \max_{x_0 \le x \le x_n} f^{(n+1)}(x)$$

مثال (2) بفرض $y = f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي:

x	4	6	8	10
$f(x)$	1	3	8	20

أوجد $f'(x), f''(x), f'''(x)$ عند النقطة $x = 4.5$

الحل: نشكل جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

نلاحظ أن النقطة $x = 4.5$ ليست موجودة في الجدول لذلك نوجد α

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{4.5 - 4}{2} = \frac{1}{4}$$

بالتعويض نجد:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(2\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 + ...\right]$$

$$f'(4.5) = \frac{1}{2}\left[2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})3 + \frac{1}{6}(\frac{3}{16} - \frac{6}{4} + 2)4\right]$$

$$= \frac{41}{48}$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (\alpha - 1)\Delta^3 y_0 + ...\right]$$

$$f''(4.5) = \frac{1}{4}\left[3 + (\frac{1}{4} - 1)(4)\right] = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 + ...\right]$$

$$f'''(4.5) = \frac{1}{8}(4) = \frac{1}{2}$$

مثال (3): بفرض $y = f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-6	-1	16	51	110

أوجد $f'''(x), f''(x), f'(x)$ عند النقطة $x=1$

الحل: نشكل جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	−6				
		5			
2	−1		12		
		17		6	
3	16		18		0
		35		6	
4	51		24		
		59			
5	110				

$$x_0 = 1 \qquad \alpha = 0 \qquad h = 1$$

بالتعويض نجد:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}\left[5-\frac{1}{2}(12)+\frac{1}{3}(6)-\frac{1}{4}(0)\right]$$

$$=5-6+2=1$$

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-.....\right]$$

$$f''(1)=\frac{1}{1}\left[12-6\right]=6$$

$$f'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

$$f'''(1)=\frac{1}{1}\left[6-\frac{3}{2}(0)\right]=6$$

ملاحظة (1): لمعرفة القيمة العددية للمشتق عند أي نقطة من نقاط الجدول نعتبر أن هذه النقطة هي نقطة البداية x_0 والقيمة المقابلة لها تصبح y_0

مثال (4) بفرض $y=f(x)=x\ln x$ تابعاً معرفاً على المجال $[1,2]$ حيث $h=0.2$

أوجد $f'(x)$ عند النقطتين $x=1.1$ و $x=1.4$ ثم احسب الخطأ المرتكب مكتفياً بثلاثة حدود.

الحل: نشكل جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	0				
		0.2187858			
1.2	0.2187858		0.0334895		
		0.2522753		−0.0048201	
1.4	0.4710611		0.0286694		0.001216
		0.2809447		−0.0036039	
1.6	0.7520058		0.0250655		0.0008066
		0.3060102		−0.0027973	
1.8	1.058016		0.0222682		
		0.3282784			
2	1.3862944				

مشتق التابع $f(x) = x\ln x$ عند النقطة $x = 1.1$ وهذه النقطة ليست من نقاط الجدول لذلك نوجد α

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.1 - 1}{0.2} = 0.5$$

بالتعويض نجد:

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+(\alpha-\frac{1}{2})\Delta^2 y_0+\frac{1}{6}(2\alpha^2-6\alpha+2)\Delta^3 y_0\right]$$

$$=\frac{1}{0.2}\left[0.2187858+0.0002\right]=1.094929$$

مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة $x=1.4$

وهذه النقطة هي إحدى نقاط الجدول نعدّ $x_0=1.4$ ومنه

$$y_0=0.4710611$$

$$\Delta y_0=0.2809447$$

$$\Delta^2 y_0=0.0250655$$

$$\Delta^3 y_0=-0.0027973$$

بالتعويض نجد:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right]\right.$$

$$f'(1.4)=\frac{1}{0.2}\left[0.2809447-\frac{1}{2}(0.025065)+\frac{1}{3}(-0.0027973)\right]$$

$$=1.337393$$

لإيجاد الخطأ المرتكب في حساب قيم المشتقات $f'(1.4), f'(1.1)$ نوجد

مشتقات التابع $f(x)=x\ln x$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{x_0 \le x \le x_n} f^{(4)}(x) = \max_{1 \le x \le 2} \frac{2}{x^3} = \frac{2}{(1)^3} = 2$$

بالتعويض نجد:

$$e'(x) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \underset{x_0 \le x \le x_n}{man} f^{(n+1)}(x)$$

$$e'(x) \le (-1)^3 \frac{(0.2)^n}{4}(2) = -0.004$$

ملاحظة (2): إذا كان التابع $y = f(x)$ مُعطى بجدول، أو كان إيجاد المشتق حتى المرتبة $(n+1)$ ليس بالأمر السهل، فيمكن استخدام الصيغة التالية لتقدير الخطأ.

نعلم أن $f^{(n+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$

ومنه

$$e'(x) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

$$e' = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}$$

مثال (5) بفرض $y = f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ تابعاً معرفاً على المجال $[0,1]$

حيث $h = 0.2$

أوجد مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة $x = 0.2$ ثم احسب الخطأ المرتكب مكتفياً بثلاثة حدود.

الحل: التابع $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ يأخذ القيم التالية:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0.5	0.450166	0.4013123	0.3543436	0.3100255	0.2689414

نشكل جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0.5				
		−0.049834			
0.2	0.450166		0.0009803		
		−0.0488537		0.0009047	

$$f'(x)=\frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(2x-x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+$$

$$+\frac{(2x-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

$$f'(x_0)=\frac{-3h}{(-h)(-2h)}f_0+\frac{-2h}{(h)(-h)}f_1+\frac{-h}{(2h)(h)}f_2$$

$$=\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}$$

وهذه العلاقة تسمى صيغة لاغرانج لحساب $f'(x)$ عند النقطة $x=x_0$

حيث $i=0,1,2,.....,x_{i+1}-x_i=h$

مثال (6) باستخدام صيغة لاغرانج احسب $f'(x)$ عند النقطة $x=2.2$

حيث $y=f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$f(x)$	0.61	1.09	1.58	2.09

الحل: $x_0=2.2$ $h=0.1$

$$f_0 = f(x_0) = f(2.2) = 1.09$$
$$f_1 = f(x_1) = f(2.3) = 1.58$$
$$f_2 = f(x_2) = f(2.4) = 2.09$$

بالتعويض نجد

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$
$$f'(2.2) = \frac{-3(1.09) + 4(1.58) - 2.09}{2(0.2)}$$
$$= \frac{0.96}{0.4} = 2.4$$

لإيجاد صيغة لحساب قيمة $f''(x)$ عن النقطة $x = x_0$ نفرض أن

$p_3(x)$ هي كثيرة حدود لاغرانج الملائمة للتابع $y = f(x)$ أي

$$f(x) \approx p_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$
$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_2)(x_3-x_2)} f_3$$

وبالاشتقاق مرتين وتعويض كل x بـ x_0 نجد:

$$f''(x)=\frac{(6x-2x_1-2x_2-2x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)}f_0+\frac{(6x-2x_0-2x_2-2x_3)}{(h)(-h)(-2h)}f_1+$$

$$+\frac{(6x-2x_0-2x_1-2x_3)}{(2h)(h)(-h)}f_2+\frac{(6x-2x_0-2x_1-2x_2)}{(3h)(2h)(h)}f_3$$

$$f''(x_0)=\frac{2(-h-2h-3h)}{-6h^3}f_0+\frac{2(-2h-3h)}{2h^3}f_1+$$

$$+\frac{2(-h-3h)}{-2h^3}f_2+\frac{2(-h-2h)}{6h^3}f_3$$

$$f''(x_0)=\frac{2}{h^2}f_0+\frac{-5}{h^2}f_1+\frac{4}{h^2}f_2+\frac{-1}{h^2}f_3$$

$$f''(x_0)=\frac{2f_0-5f_1+4f_2-f_3}{h^2}$$

مثال (7) بفرض $y=f(x)$ تابعاً معرفاً بالجدول التالي:

x	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
$f(x)$	1.0000	1.0066	1.0132	1.0196	1.0260	1.0323

احسب $f''(x)$ عند النقطة $x=1.02$

الحل: $h = 0.02 \qquad x_0 = 1.02$

$$f_0 = f(x_0) = f(1.02) = 1.0066$$
$$f_1 = f(1.04) = 1.0132$$
$$f_2 = f(1.06) = 1.0196$$
$$f_3 = f(1.08) = 1.0260$$

بالتعويض نجد

$$f''(x_0) = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

$$f''(1.02) = \frac{2(1.0066) - 5(1.0132) + 4(1.0196) - 1.0260}{(0.02)^2}$$

$$= \frac{-0.0004}{0.0004} = -1$$

f' عند النق

ابعاً معرفاً بال

1	
6	

$f'(x)$ عند

$= f(x)$

$f'(0.2)$

$p_3(x$

بعاً معرفاً بال

0
1

حدودية الملائ

$'(0), f''($

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

التكامل العددي

Numerical Integration

طريقة أشباه المنحرفات
طريقة سيمبسون

Damascus University

ومنه قيمة التكامل هي

$$\int_0^1 \left[\sqrt[3]{x^4}+\sin 2x+x^7\right]dx=\left[\frac{3}{7}(1)^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{2}\cos 2+\frac{1}{8}\right]-\left[-\frac{1}{2}\cos 0\right]$$

$$=\frac{3}{7}-\frac{1}{2}(-0.41615)+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$

$$=1.26164$$

في بعض الحالات توجد صعوبة في إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع المكامل $f(x)$ ، وفي حالات أخرى يكون التابع $f(x)$ مُعطى فقط في جدول، في مثل هذه الحالات نستخدم الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل

$$\int_a^b f(x)dx$$

6-2 طريقة المستطيلات

تعتمد هذه الطريقة على تجزئة المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية متساوي الطول طول كل منها $h=\frac{b-a}{n}$ عندئذ فإن التكامل العددي $\int_a^b f(x)dx$ يساوي إلى مجموع سطوح مستطيلات التجزئة s_i حيث $i=0,1,2,.....,n-1$ كما في الشكل (6-1)، وبما أن طول المستطيل s_i

يساوي قيمة التابع $f(x)$ عند النقطة x_i وعرضه يساوي طول الخطوة h

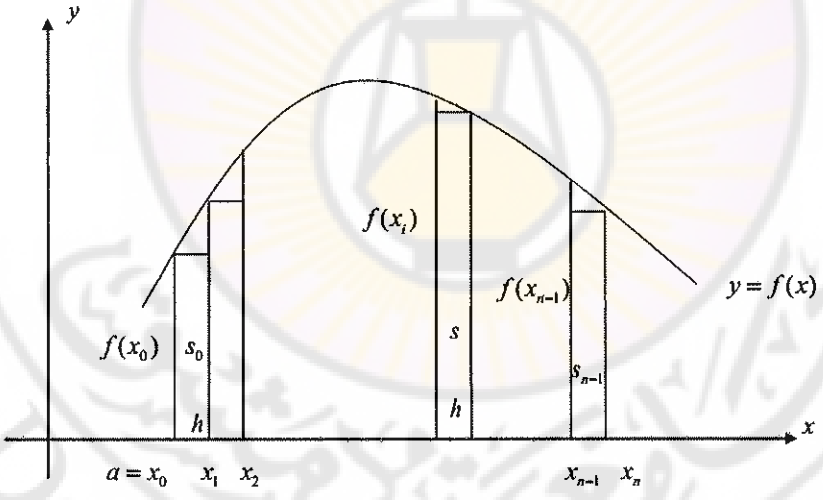
ومساحته عندئذ $s_i = h.f(x_i) \quad ; \quad i = 0,1,2,.....,n-1$

فإن المساحة التقريبية الكلية هي

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right]$$

حيث $a = x_0 < x_1 < x_2 < .....x_{n-1} < x_n$



الشكل (6-1)

مثال (2) احسب قيمة التكامل

$$\int_{1}^{6}(2+\sin 2\sqrt{x})dx$$

حيث $n=10$

الحل: $a=1, b=6$ ومنه

$$h=\frac{6-1}{10}=0.5$$

$$x_i=x_0+ih=1+ih \quad , \quad i=0,1,2,.....,10$$

نكتب الجدول

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	2.9092974	2.6381576	2.30807174	1.97931648	1.68305285

3.5	4	4.5	5	5.5	6
1.435304101	1.243197505	1.108317745	1.0287222	1.00024140	1.01735756

و نطبق طريقة المستطيلات

$$\int_1^6 (2+\sin 2\sqrt{x})dx = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+.....+f(x_9)\right]$$

$$= 0.5\left[2.9092974+2.6381576+.....+1.00024140\right]$$

$$= 8.666839105$$

3-6 طريقة أشباه المنحرفات

وهذه الطريقة مشابهة لطريقة المستطيلات إلا أن التجزئة ستحدد مساحات أشباه المنحرفات s_i بدلاً من مساحات المستطيلات وفي هذه الحالة يتم حساب مساحة شبه المنحرف ذي الدليل i الذي طولا قاعدتيه هما قيمتا التابع $f(x)$ عند النقطتين المتتاليتين $f(x_{i+1}), f(x_i)$ وارتفاعه h وبالتالي فإن مجموع سطوح أشباه المنحرفات $s_i, i=0,1,2,.....,n-1$ يساوي تقريباً قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$

الشكل (6-2) حيث إن مساحة شبه المنحرف

$$s_i = \frac{\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]h}{2}$$

ومنه نحصل على

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$$

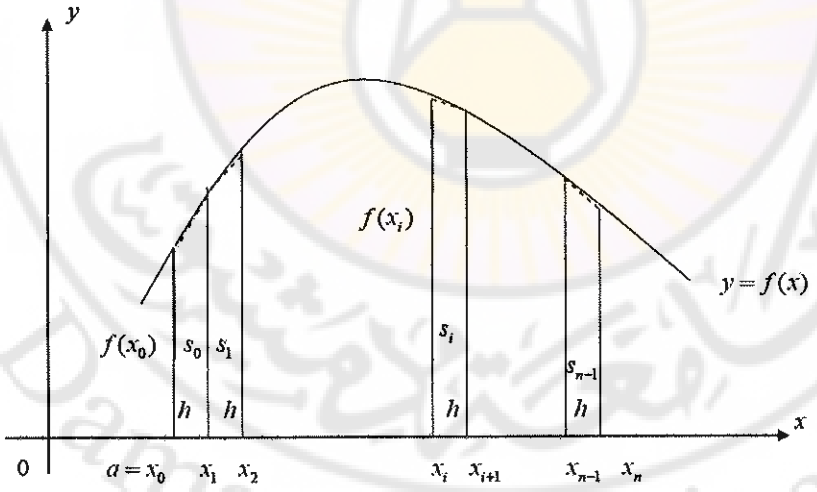
$$= \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+.....+2f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+.....+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0+2(y_1+y_2+.....y_{n-1})+y_n\right]$$

حيث $y_i = f(x_i) \quad ; \quad i = 0,1,2,.....,n$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة أشباه المنحرفات لحساب التكامل المحدد



الشكل (2-6)

ملاحظة: نلاحظ أنه عند استخدام طريقة أشباه المنحرفات نستبدل في كل مجال جزئي منحني التابع $y = f(x)$ بقطعة مستقيمة، أي أننا استكملنا هذا الجزء من المنحني بحدودية من الدرجة الأولى، هذا يعني أن طريقة أشباه المنحرفات هي عملية استيفاء خطي نستبدل فيها المنحنيات بحدوديات من الدرجة الأولى ، لذلك نستطيع أن نستخدم طريقة نيوتن الأمامية في الاستيفاء

نعلم أن حدودية نيوتن الأمامية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(\alpha) = f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + ...$$

فإذا اكتفينا بالحدين الأول والثاني فإن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_0^1 (f_0 + \alpha\Delta f_0)hd\alpha$$

حيث $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ $\qquad dx = hd\alpha$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left[f_0\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f_0 \right]_0^1$$

$$= h\left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 \right]$$

$$= h\left[f_0 + \frac{1}{2}(f_1 - f_0) \right] = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right]$$

والخطأ المرتكب في المجال $\left[x_0, x_1\right]$ هو:

$$e = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 h d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}h\Delta^2 f_0 \left[\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{12}h\Delta^2 f_0$$

وبما أن $f''(x) \approx \frac{\Delta^2 f_0}{h^2}$ فإن $\Delta^2 f_0 = h^2 f''(x)$

حيث $x_0 < x < x_1$

ومنه $e=\frac{-1}{12}h^3 f''(x)$

إذا أخذنا التكامل على المجال $[a,b]$ يمكن أن نكتب

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+.....+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$=\frac{h}{2}[f_0+f_1]+\frac{h}{2}[f_1+f_2]+.....+\frac{h}{2}[f_{n-1}+f_n]$$

$$=\frac{h}{2}[f_0+2f_1+2f_2+.....+f_{n-1}+f_n]$$

أو

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2+.....+2y_{n-1}+y_n]$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات

وجدنا أن الخطأ المرتكب في المجال الأول $[x_0,x_1]$ هو

$$x_0 < x < x_1 \quad , \quad e = \frac{-1}{12} h^3 f''(x)$$

فإن الخطأ في المجال $[a,b]$ هو

$$E = -n\frac{h^3}{12} f''(x) \quad , \quad x_0 \le x \le x_n$$

وبما أن $nh = b - a$ فإن الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات يُعطى بالعلاقة التالية

$$E = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(x) \quad , \quad x \in [a,b]$$

أو $$|E| = \frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

مثال (3) احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث

$$h = 0.25$$

ثم احسب الخطأ المرتكب

الحل: $$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.25} = 4$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1	0.94	0.8	0.64	0.5

بتطبيق طريقة أشباه المنحرفات نجد:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right]$$

$$= \frac{0.25}{2}\left[1 + 2(0.94 + 0.8 + 0.64) + 0.5\right]$$

$$= 0.7875$$

لحساب الخطأ نشتق التابع المكامل $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\max_{0 \le x \le 1} \left|f''(x)\right| = \max_{0 \le x \le 1} \left|\frac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3}\right| = 2$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ نجد:

$$f'''(x)=e^x\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ln x\right)$$

ومنه $f'''(x)>0$ من أجل جميع قيم $x\in[1,e]$

وبالتالي التابع $f''(x)$ متزايد في المجال $[1,e]$

$$\max_{1\le x\le e}|f''(x)|=|f''(e)|=e^e\left[\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}+\ln e\right]$$
$$=24.25323892$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ نجد:

$$|E|=\frac{b-a}{12}h^2\max_{1\le x\le e}|f''(x)|$$
$$=\frac{e-1}{12}\left(\frac{e-1}{9}\right)^2(24.25323892)$$
$$=\frac{123.0418739}{972}=0.12658629$$

4-6 طريقة سيمبسون

لحساب التكامل المحدد نقسم المجال $[a,b]$ إلى عدد زوجي من المجالات الجزئية متساوية الطول عددها n، طول كل مجال جزئي $h=\frac{b-a}{n}$

من أجل حساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نبدأ بحساب التكامل من x_0 إلى $x_2 = x_0 + 2h$ ، ونستبدل التابع المكامل $f(x)$ بحدودية من الدرجة الثانية ملائمة للتابع $f(x)$

نعلم أن حدودية نيوتن الأمامية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(x) = f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

ومنه

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_0^1 \left[f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \right] h d\alpha$$

$$= h\left[f_0\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 f_0 \right]_0^2$$

$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 \right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right]$$

وبشكل مشابه نجد:

$$\int_1^2 xe^x dx = \frac{h}{3}\begin{bmatrix} f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 \\ +4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.1}{3}\begin{bmatrix} 2.7182818 + 4(3.3045826 + ... + 12.7031994) \\ +2(3.9841403 + ... + 10.8893654) + 14.7781122 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.1}{3}\begin{bmatrix} 2.7182818 + 4(36.8061119) \\ +2(28.47563758) + 14.7781122 \end{bmatrix}$$

$$= 7.38907056$$

لحساب الخطأ المطلق نحسب القيمة الفعلية للتكامل

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[e^x(x-1)\right]_1^2 = e^2$$

ومنه الخطأ المطلق هو

$$e = \left|e^2 - 7.38907056\right| = \left|7.3890560989 - 7.38907056\right|$$

$$= 0.0000144611$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة سيمبسون:

الخطأ المرتكب في المجال الجزئي $\left[x_0, x_2\right]$ حيث استبدلنا التابع المكامل $f(x)$ بحدودية نيوتن الأمامية من الدرجة الثانية يكون من مرتبة الحد الذي يليه أي

$$e = h\int_0^2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_0}{6}\int_0^2 (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_0}{6}\left[\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^3 + \alpha^2\right]_0^2 = 0$$

وبالتالي الخطأ من مرتبة الحد الذي يليه أي أن

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-24x^3+24x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{120x^4-240x^2+24}{\left(1+x^2\right)^5}=\frac{24(5x^2-10x^2+1)}{\left(1+x^2\right)^5}$$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right|=f^{(4)}(0)=24$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ نجد:

$$\frac{(b-a)}{180}h^4\max_{0\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right|\le 5x10^{-6}$$

$$\frac{2}{180}h^4(24)\le 5\times 10^{-6}$$

$$\frac{4}{15}h^4 \le 5\times10^{-6}$$

$$h^4 \le \frac{75}{4}\times10^{-6} = 1.875\times10^{-5}$$

ومنه

$$h \le 0.0658037$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-0}{0.0658037} = 30.3934277$$

وبالتالي يمكن اعتبار عدد المجالات $n = 32$

مثال (7) باستخدام طريقة سيمبسون أوجد القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_1^e e^x \ln x dx$$

حيث $n = 8$ ثم احسب الخطأ المرتكب

الحل: $h = \frac{e-1}{8}$

$$f(x) = e^x \ln x \qquad x_i = 1 + \frac{e-1}{8} i$$

$$i = 0,1,2,.....,8$$

لنكتب الجدول التالي:

x	1	1.214785229	1.42970547	1.644355686	1.859140914	2.073926143	2.2887711371	2.503496600	2.718281828
$f(x)$	0	0.655608177	1.492717203	2.575108450	3.980031703	5.803451205	8.165809697	11.218892803	15.154262241

بتطبيق طريقة سيمبسون نجد:

$$\int_1^e e^x \ln x dx = \frac{h}{3}\begin{bmatrix} f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 \\ +4f_7 + f_8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.214785228}{3}\begin{bmatrix} 0 + 4(0.6556068177) + 2(1.492717203) \\ +4(2.575108450) + 2(3.980031703) \\ +4(5.803451205) + 2(8.165809697) \\ +4(11.218892803) + 15.154262241 \end{bmatrix}$$

$$= 8.837955521$$

لحساب الخطأ المرتكب نوجد مشتقات التابع $f(x)=e^x \ln x$

$$f'(x)=e^x(\ln x+\frac{1}{x})$$

$$f''(x)=e^x(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)$$

$$f'''(x)=e^x(\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ln x)$$

$$f^{(4)}(x)=e^x(\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}+\ln x)$$

$$f^{(5)}(x)=e^x(\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{20}{x^3}-\frac{30}{x^4}+\frac{24}{x^5}+\ln x)$$

نلاحظ أن $f^{(5)}(x)\geq 0$ من أجل $x\in[1,e]$

هذا يعني أن التابع $f^{(4)}(x)$ متزايد في المجال $[1,e]$

ومنه $\max\limits_{1\leq x\leq e}\left|f^{(4)}(x)\right|=f^{(5)}(e)$

$$= e^{e}\left[\frac{4}{e}-\frac{6}{e^{2}}+\frac{8}{e^{3}}-\frac{6}{e^{4}}+\ln e\right]$$

$$= 29.51912046$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ نجد:

$$|E| \le \frac{(b-a)}{180} h^{4} \max_{1\le x\le e} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

$$= \frac{(e-1)}{180}\left(\frac{e-1}{8}\right)^{4}(29.51912046)$$

$$= \frac{(e-1)^{5}}{737280}(29.51912046)$$

$$= \frac{14.97862632}{737280}(29.51912046)$$

$$= (0.000020316062)(29.51912046)$$

$$= 0.0005997122866$$

مثال (8) احسب التكامل $\int_{1}^{e} \sqrt{1+x^{2}}\,dx$ بطريقة سيمبسون وبخطأ مطلق لا يتجاوز 10^{-3}

الحل: لنوجد h أو n أي لنوجد طول المجال الجزئي أو عدد المجالات الجزئية، من أجل ذلك نوجد مشتقات التابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$f'''(x)=-3x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=-3x\left[(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\right]=\frac{-3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$f^{(4)}(x)=-3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}(2x)+9x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}-$$

$$-\frac{15}{2}x^3(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}(2x)$$

$$=\frac{-3(1+x^2)^2+18x^2(1+x^2)-15x^4}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}=\frac{12x^2-3}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f^{(4)}(x)\right| = 3$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ نجد:

$$\frac{(b-a)}{180}h^4 \max_{0\le x\le 1}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{1}{180}h^4(3) \le 10^{-3}$$

$$\frac{h^4}{60} \le 0.001$$

$$h^4 \le 0.06$$

ومنه $h \approx \sqrt[4]{0.06} \approx 0.4949232 \approx 0.5$

لذلك نقسم المجال $[0,1]$ إلى مجالين متساويين ويمكن أن نكتب الجدول

x	0	0.5	1
$f(x)$	1	1.1180	1.4142

بالتعويض بطريقة سيمبسون نجد:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

$$= \frac{0.5}{3}\left[1 + 4(1.1180) + 1.4142\right]$$

$$= 1.1477$$

Damascus University

تمارين

1 -احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ بطريقة المستطيلات حيث $n=10$

2 -احسب التكامل $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$ بطريقة المستطيلات حيث $h=1$، ثم بطريقة أشباه المنحرفات.

3 -احسب التكامل $\int_2^3 x^2 e^{-x} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h=0.2$.

4 -احسب التكامل $\int_1^{1.3} \sqrt{x} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h=0.05$ واحسب الخطأ المرتكب.

5 -احسب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h=0.2$ واحسب الخطأ المرتكب

6 -احسب التكامل $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ بطريقة أشباه المنحرفات بحيث يكون الخطأ المطلق لا يتجاوز 0.01

7 -احسب التكامل $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ بطريقة المستطيلات، و بطريقة أشباه المنحرفات وبطريقة سيمبسون حيث $h=0.1$

8 -احسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h=\frac{\pi}{8}$ واحسب الخطأ المرتكب.

9 -احسب قيمة التكامل $\int_{0.2}^{2.6} \frac{\sin x}{x}dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h=0.4$ واحسب الخطأ المرتكب.

10 -احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$ بطريقة سيمبسون حيث $n=6$ واحسب الخطأ المرتكب

11 -احسب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h=0.1$ واحسب الخطأ المرتكب.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

1-7 تمهيد

تعدّ المعادلات التفاضلية من الفروع المهمة نظراً إلى استخداماتها الواسعة كنماذج رياضية في العلوم المختلفة، في الفيزياء مثلاً نجد مسائل السوائل غير القابلة للانضغاط، وفي الكيمياء نجد مسائل لحساب حركة التفاعلات الكيميائية وشدتها،وفي الهندسة لدراسة حركة الآلات، وفي الميكانيك السماوي لدراسة حركة مسارات الأقمار الصناعية والمراكب الفضائية، وفي الملاحة البحرية لدراسة أزمنة وصول السفن والمراكب البحرية وتأخرها، وفي العلوم الطبية لدراسة فترة حضانة الأمراض المعدية والوبائية وغيرها.

إن لكل معادلة تفاضلية عدداً كثيراً من الحلول، ويعتمد ذلك على القيم العددية التي تُعطى للثوابت التي تتضمنها حلول المعادلات التفاضلية التي عددها يساوي رتبة المعادلة التفاضلية، ولتعيين حل معين بشكل خاص يجب أن نعرف شروطاً ابتدائية أو حدية يجب أن يحققها الحل، حيث يشترط أن تكون المعادلة التفاضلية قابلة للحل.

وبشكل عام ليس لجميع المعادلات التفاضلية حلول تحليلية، أو أنه قد يكون من الصعب إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية، وبالتالي فإن الحلول العددية قد تكون هي الملجأ الوحيد لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية.

تصنف المعادلات التفاضلية إلى نوعين: معادلات تفاضلية عادية و معادلات تفاضلية جزئية، وهذا يعتمد على عدد المتغيرات المستقلة الموجودة في المعادلة

التفاضلية بحيث يكون متغير واحد للمعادلة التفاضلية العادية، و أكثر من متغير واحد للمعادلة التفاضلية الجزئية.

إن الطرق العددية للمعادلات التفاضلية ينتج عنها حلول عددية تقريبية كما هو معروف، وهذا يحتاج إلى حسابات كبيرة، وخاصة إذا كانت الطريقة المستخدمة بطيئة التقارب ما يؤدي بنا للحاجة إلى تكرارات كثيرة لتحسين الحل، ويمكن القول إنه لولا وجود الحواسيب لبقيت كثير من المسائل دون حل، و جدير بنا القول إن الحل هنا نسبي، لأن دقة الحل الذي تقدمه طريقة ما قد تختلف عنه في طريقة أخرى لأن هذا الحل تقريبي.

2-7 طريقة أولر

بفرض أن المعادلة $y' = f(x, y)$ تملك حلاً وحيداً هو $y(x)$ حيث $x \in [a, b]$

مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

وأن $y(x)$ قابل للاشتقاق بالنسبة لـ x ، نحصل من تعريف المشتق على

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بأخذ المقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ كتقريب للمشتق y' يمكن أن نكتب

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y \approx y' \Delta x$$

ومن تعريف الفروق الأمامية $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ يمكن أن نكتب

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i = y_i' \Delta x_i = h y_i'$$

حيث $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $\qquad i = 0,1,2,....,n$

ومنه

$$y_{i+1} = y_i + h y_i'$$

$$= y_i + h f(x_i, y_i) \qquad ; \qquad i = 0,1,2,....$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة أولر

مثال (1) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy' + y = 0$$
$$y(1) = 2$$

بطريقة أولر ثم احسب الخطأ المطلق

الحل: $x_0 = 1 \qquad y_0 = 2$

$$y' = f(x, y) = \frac{-y}{x}$$

$$y'_i = f(x_i, y_i) = \frac{-y_i}{x_i}$$

بالتعويض بطريقة أولر نجد:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - h\frac{y_i}{x_i}$$

$$= y_i(1 - \frac{h}{x_i})$$

ومنه

$$y_1 = y_0(1 - \frac{h}{x_0})$$

$$= 2(1 - \frac{0.2}{1}) = 2 - 0.4 = 1.6$$

$$x_1 = x_0 + h = 1.2$$

$$y_2 = y_1(1 - \frac{h}{x_1})$$

$$= 1.6(1 - \frac{0.2}{1.2}) = 1.3333$$

$$x_2 = x_1 + h = 1.4$$

$$y_3 = y_2(1-\frac{h}{x_2})$$

$$= 1.3333(1-\frac{0.2}{1.4}) = 1.142857$$

$$x_3 = x_2 + h = 1.6$$

$$y_4 = y_3(1-\frac{h}{x_3})$$

$$= 1.142857(1-\frac{0.2}{1.6}) = 0.9999$$

$$x_4 = x_3 + h = 1.8$$

$$y_5 = y_4(1-\frac{h}{x_4})$$

$$= 0.9999(1-\frac{0.2}{1.8}) = 0.888889$$

وهي القيمة التقريبية للحل عند النقطة $x_5 = x_4 + h = 2$

لحساب الخطأ المطلق. الحل التحليلي للمعادلة $xy' + y = 0$ هو $y = \frac{2}{x}$

ومنه الخطأ المطلق

$$e = |y(x_5) - y_5| = \left|\frac{2}{x_5} - 0.888889\right|$$
$$= \left|\frac{2}{2} - 0.888889\right|$$
$$= 0.11111$$

مثال (2)

حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ بطريقة أولر حيث $y(0) = 1$
$h = 0.02$ عند النقطة $x = 0.04$ ثم احسب الخطأ المئوي

الحل: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$; $x_1 = 0.02$, $x_2 = 0.04$

نطبق طريقة أولر فنجد:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$= y_0 + h(x_0 + y_0)$$
$$= 1 + h(0+1) = 1 + 0.02(0+1)$$
$$= 1.02$$
$$y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1)$$
$$= 1.02 + 0.02(0.02 + 1.02)$$
$$= 1.02 + 0.02(1.04)$$
$$= 1.0408$$

لحساب الخطأ المئوي نحتاج لإيجاد الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية

$y' = x + y$ وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها

بالشكل $y' - y = x$

نوجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y' - y = 0$

الحل هو:

$$y(x) = \alpha e^{x}$$

حيث α ثابت حقيقي.

نوجد حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية $y' - y = x$ نفرض أن هذا الحل الخاص

هو $y = \alpha(x)e^{x}$

بالاشتقاق

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left[\alpha(x)e^{x}\right]' \\ &= \alpha'(x)e^{x} + \alpha(x)e^{x} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$y' - y = x \Leftrightarrow \alpha'(x)e^{x} + \alpha(x)e^{x} - \alpha(x)e^{x} = x$$

$$\alpha'(x)e^{x} = x$$

$$\alpha'(x) = xe^{-x}$$

ومنه $\alpha(x)=\int xe^{-x}du$

نكامل بالتجزئة فنجد:

$$\begin{aligned}\alpha(x)&=-xe^{-x}-\int -e^{-x}dx\\&=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\\&=-xe^{-x}-e^{-x}+c\\&=-(x+1)e^{-x}+c\end{aligned}$$

نأخذ $\alpha(x)=-(x+1)e^{-x}$

ومنه الحل الخاص هو

$$y=\alpha(x)e^{x}=-(x+1)e^{-x}e^{x}=-(x+1)$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'-y=x$ هو

$$y(x)=\alpha e^{x}-x-1$$

وبما أنا $y(0)=1$ فإن $\alpha=2\Leftarrow\alpha e^{0}-0-1=1$

وبالتالي فإن الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية

$$y'=x+y\quad,\quad y(0)=1$$

هو $y(x) = 2e^x - x - 1$

$$y(0.04) = 2(2.7182)^{0.04} - 0.04 - 1$$
$$= 1.0416$$

الخطأ المطلق

$$e = |1.0408 - 1.0416| = 0.0008$$

الخطأ النسبي:

$$R = \frac{0.0008}{1.0416} = 0.000768$$

الخطأ المئوي

$$E = R \times 100\%$$
$$= 0.0768\%$$

3-7 طريقة تايلور:

لحل المعادلة التفاضلية: $y' = f(x, y)$

$$y(x_0) = y_0$$

نوجد المشتقات المتتالية للتابع $f(x, y)$ بالنسبة للمتغيرين x و y وبفرض $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, 2, ...$ نعوض في منشور تايلور

$$y'(x_1) = y'(0.1) = x_1 y_1 = (0.1)(1.005) = 0.1005$$

$$y''(x_1) = y_1 + x_1 y_1' = 1.005 + (0.1)(1.005) = 1.015$$

$$y'''(x_1) = 2y_1' + xy_1''$$
$$= 2(0.1005) + (0.1)(1.015) = 0.3025$$

$$y^{(4)}(x_1) = 3y_1'' + x_1 y_1'''$$
$$= 3(0.1015) + (0.1)(0.3025) = 3.0752$$

نعوض في نشر تايلور

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!} y_1'' + \frac{h^3}{3!} y_1''' + \frac{h^4}{4!} y_1^{(4)}$$

فنجد:

$$y_2 = 1.005 + (0.1)(0.1005) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.015) +$$
$$+ \frac{(0.1)^3}{6}(0.3025) + \frac{(0.1)^4}{24}(3.0752)$$
$$y_2 = 1.020188$$

الحل الفعلي للمفاضلة التفاضلية $y' = x.y$ نحصل عليه كما يلي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x.y$$

ومنه

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

بالتكامل نجد:

$$\int_{y=1}^{y} \frac{dy}{y} = \int_{x=0}^{x} xdx$$

$$\left[\ln y\right]_1^y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$\ln y - \ln 1 = \frac{x^2}{2} - 0$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

عند النقطة $x = 0.2$ نجد:

$$y(0.2) = e^{\frac{(0.2)^2}{2}} = e^{0.02} = 1.0202$$

وهذه القيمة قريبة جداً من القيمة $y_2 = 1.020188$

7-3-1 تقدير الخطأ المرتكب بطريقة تايلور:

عند الاكتفاء بـ k حد من حدود نشر تايلور فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e(x) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y_{(x)}^{(k+1)} \qquad x_n \le x \le x_n + h$$

مثال (4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x-y}{2}$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حدود من نشر تايلور حيث $y(0)=1$ و $h=0.25$ في المجال $[0,1]$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$$y''(x)=\frac{1-y'}{2}=\frac{1-\frac{x-y}{2}}{2}=\frac{2-x+y}{4}$$

$$y'''(x)=\frac{-1+y'}{4}=\frac{-1+\frac{x-y}{2}}{4}=\frac{-2+x-y}{8}$$

$$y^{(4)}(x)=\frac{1-y'}{8}=\frac{1-\frac{x-y}{2}}{8}=\frac{2-x+y}{16}$$

$$y'(x_0)=y'(0)=\frac{0-1}{2}=-0.5$$

$$y''(x_0)=y''(0)=\frac{2-0+1}{4}=0.75$$

$$y'''(x_0)=y'''(0)=\frac{-2+0-1}{8}=-.375$$

$$y^{(4)}(x_0)=y^{(4)}(0)=\frac{2-0+1}{16}=0.1857$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_1=y(x_1)=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0'''+\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}$$

نجد:

$$y_1 = 1 + (0.25)(-0.5) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.75)$$

$$+ \frac{(0.25)^3}{6}(-0.375) + \frac{(0.25)^4}{24}(0.1857)$$

$$y_1 = 0.9874915$$

ثم نحسب:

$$y'(x_1) = y'(0.25) = \frac{0.25 - 0.8974915}{2} = -0.3237458$$

$$y''(x_1) = y''(0.25) = \frac{2 - 0.25 + 0.8974915}{4} = 0.6618729$$

$$y'''(x_1) = y'''(0.25) = \frac{-2 + 0.25 - 0.8974915}{8} = -0.3309364$$

$$y^{(4)}(x_1) = y^{(4)}(0.25) = \frac{2 - 0.25 + 0.8974915}{16} = 0.1654682$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_2 = y(x_2) = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' + \frac{h^4}{4!}y_1^{(4)}$$

نجد:

$$y_2 = 0.8974915 + (0.25)(-0.3237458) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.6618729)$$

$$+ \frac{(0.25)^3}{6}(-0.3309364) + \frac{(0.25)^4}{24}(0.1654682)$$

$$y_2 = 0.8364037$$

وبنفس الخطوات نجد:

$$y_3 = 0.8119696$$

$$y_4 = 0.8195940$$

لنحسب الخطأ المرتكب من أجل ذلك نوجد:

$$y^{(5)}(x) = \frac{-1 + y'}{16} = \frac{-1 + \frac{x - y}{2}}{16} = \frac{-2 + x + y}{32}$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{-2 + x - y}{32}$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{-2 + 1 - 0.8195940}{32} = -0.056862$$

بالتعويض بالعلاقة:

$$e(x)=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y_{(x)}^{(k+1)}$$

نجد:

$$e=\frac{(0.25)^5}{5!}(-0.056862)=-0.00000064274$$

ملاحظة: يمكن تطبيق طريقة تايلور لحل المعادلات التفاضلية من مراتب أعلى وفي هذه الحالة يصبح حساب المشتقات المتتالية أكثر صعوبة.

مثال (5)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''-4x^2y=-2e^{-x^2}$ بطريقة تايلور حيث

$y(0)=1$ و $y'(0)=e$

$h=1$ عند النقطة $x=1$

الحل:

$$y'' = 4x^2 y - 2e^{-x^2}$$

$$y''' = 8xy + 4x^2 y' - 4xe^{-x^2}$$

$$y^{(4)} = 8y + 8xy' + 8xy' + 4x^2 y'' + 4e^{-x^2} - 8x^2 e^{-x^2}$$

$$y^{(4)} = 8y + 16xy' + 4x^2 y'' + 4e^{-x^2} - 8x^2 e^{-x^2}$$

$$y''(0) = 4(0)(1) - 2e^0 = -2$$

$$y'''(0) = 8(0)(1) + 4(0)e + 4(0)e^0 = 0$$

$$y^{(4)}(0) = 8(1) + 16(0)e + 4(0)(0) + 4e^{-0} - 8(0)e^0$$

$$= 8 + 4 = 12$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_1 = y(x_1) = y(1)$$

$$= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_0)$$

نجد:

$$y_1 = 1 + (1)e + \frac{(1)^2}{2}(-2) + \frac{(1)^3}{6}(0) + \frac{(1)^4}{24}(12)$$

$$y_1 = 3.128$$

7-4 طريق رانج- كاتا:

إن طريقة رانج- كاتا تشبه طريقة أولر ولكن طريقة رانج- كاتا تعدّ أدق، ولطريقة رانج- كاتا عدة صيغ من هذه الصيغ طريقة رانج- كاتا من المرتبة الثانية.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

حيث $k_1 = hf(x_n, y_n)$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$$

7-4-1 طريقة رانج- كاتا من المرتبة الثالثة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

حيث $k_1 = hf(x_n, y_n)$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + 2k_2 - k_1)$$

7-4-2 طريقة رانج- كاتا من المرتبة الرابعة:

التي تعد من أشهر صيغ رانج- كاتا

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

مثال (6)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ بطريقة رانج- كاتا من المرتبة الثانية حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.02$ عند النقطة $x = 0.04$

الحل:

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.02(0)(1) = 0$$

بالتعويض بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

نجد:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left[-0.01 + 4(-0.0049) + 0\right] = 0.9951$$

ثم نحسب:

$$k_1 = hf(x_1, y_1)$$
$$= 0.1\left[0.1 - (0.1)(0.9951)^2\right] = 0.0001$$

$$k_2 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2})$$
$$= 0.1\left[0.15 - (0.1)(0.9951 + \frac{0.0001}{2})^2\right]$$
$$= 0.1\left[0.15 - (0.1)(0.99952)^2\right] = 0.0051$$
$$2k_2 - k_1 = 0.0101$$
$$k_3 = (0.1)\left[0.2 - (0.1)(1.0052)^2\right] = 0.0099$$

بالتعويض بطريقة رانج- كاتا من المرتبة الثالثة:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

نجد:

$$y_2 = 0.9951 + \frac{1}{6}\left[0.0001 + 4(0.0051) + 0.0099\right]$$
$$= 0.9951 + 0.0051 = 1.0002$$

وبشكل مشابه نجد:

$$y_3 = 1.0151$$

مثال (8)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = xy^{\frac{1}{3}}$ بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة. حيث $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 1.1$ مقرباً النتائج إلى خمسة أرقام عشرية، ثم قارن النتيجة التي تحصل عليها مع الحل التحليلي (الفعلي)

الحل:

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$
$$= 0.1\left[(1)(1)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.1$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$
$$= (0.1)f(1.05,1.05)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.10672$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$
$$= (0.1)f(1.05,1.05336)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05336)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.10684$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$
$$= (0.1)f(1.1,1.10684)$$
$$= (0.1)\left[(1.1)(1.15684)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.11379$$

بالتعويض بطريقة رانج- كاتا من المرتبة الرابعة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

نجد:

$$y_1 = y(1.1) = 1 + \frac{1}{6}\left[0.1 + 2(0.10672) + 2(0.10684) + 0.11379\right]$$

$$y_1 = 1.15682$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = xdx$$

بالتكامل نجد:

$$\int_{y=1}^{y} y^{-\frac{1}{3}} dy = \int_{x=1}^{x} xdx$$

$$\left[\frac{3y^{\frac{3}{2}}}{2}\right]_1^y = \left[x^2\right]_1^x$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[x^2 - 1\right]$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{2}{3}$ فنجد:

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

ومنه الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$y = (\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$$

الحل التحليلي عند النقطة $x = 1.1$ هو:

$$y(1.1) = \left[\frac{1}{3}(1.1)^2 + \frac{2}{3}\right]^{\frac{3}{2}} = 1.106802$$

نلاحظ أن الحل التحليلي هونفس الحل التقريبي.

تمارين

1 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x.y$ بطريقة أولر. حيث $y(0)=1$ و $h=0.1$ عند النقطة $x=0.4$

2 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = -y^2$ بطريقة أولر. حيث $y(0)=1$ و $h=0.1$ ثم احسب الخطأ المئوي.

3 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y$ بطريقة تايلور. حيث $y(2)=2$ و $h=0.02$ عند النقطة $x=2.04$ واحسب الخطأ المرتكب مستخدماً أربعة حدود من منشور تايلور

4 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2 + 1$ بطريقة تايلور . حيث $y(0)=0$ و $h=0.1$ عند النقطة $x=0.2$ واحسب الخطأ المرتكب مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور.

5 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' + y' = y^2 e^x$ بطريقة تايلور. حيث $y(0)=0$ و $y'(0)=-1$ و $h=0.1$ عند النقطة $x=0.2$

6 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y$ بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الثانية. حيث $y(0)=1$ و $h=1$ عند النقطة $x=5$ مقرباً النتائج إلى خمسة أرقام عشرية ثم قارن النتيجة التي تحصل عليها مع الحل التحليلي

7 -أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x^2 + y$ بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الثالثة. حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 0.3$

8 -أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y - 2\frac{x}{y}$ بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة. حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.4$

9 -أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x - y}{2}$ بطريقة أولر ثم بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة. حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.25$ عند النقطة $x = 1$

Damascus University

الرموز والمصطلحات العلمية

اللغة الإنجليزية	اللغة العربية
A	
Algorithm	خوارزمية
Absolutely convergent	متقارب بشكل مطلق
Analysis	تحليل
And	و
Accuracy	دقة
Arithmetic statement	عبارة حسابية
Assembly language	لغة التجميع
B	
Bounded	محدود
Bounded function	دالة محدودة
Bit	خلية ثنائية
Blank	فراغ
Base	أساس

Binary	ثنائي
Bisection	تنصيف

C

Cicuruit	دارة
Code	ترميز
Common	مشترك
Compiler	مترجم
Condition	شرط
Constant	ثابت
Continuity	استمرارية
Convergense	تقارب
Computer	حاسب
Columms	أعمدة مصفوفة

D

Data	بيانات (معطيات)
Disc	قرص

Do loop	الحلقة التكرارية
Do statement	عبارة التكرار
Defined	معرف
Definite	محدد
Difference table	جدول الفروق
Direct methods	طرائق مباشرة
Definite integral	تكامل محدد
Definition	تعريف
Derivation	اشتقاق
Derivative	مشتق
Divided defferences	الفروق المقسومة

E

End statement	عبارة النهاية
Equivalence	التكافؤ
Expression	تعبير
Element	عنصر

Equation	معادلة
Error	خطأ
Eigen value	القيمة الذاتية
Example	مثال

F

Flow chart	مخطط تدفقي
File	ملف
Format	صيغة
Factor	عامل
Fixed point	نقطة ثابتة
Fixed value	قيمة ثابتة
Function approximation	تقريب الدالة
Function of iteration	دالة التكرار

G

Guass elimination	طريقة غاوس للحذف
Graphical methods	طرائق بيانية

Greater than	أكبر من
Greatest value	القيمة العظمى

H

Hardware	مكونات الحاسب
High level languages	اللغات عالية المستوى

I

If statement	عبارة الشرطية
Integer number	عدد صحيح
Integer variable	متغير (متحول) صحيح
Infinity	لا نهاية
Interpolation	استكمال
Iteration	تكرار
Index	دليل
Indeinite	غير محدد
Interval	مجال
Information	معلومات

J

Jacobian method	طريقة جاكوبي

L

Logical expression	تعبير منطقي
Linear	خطي
Linear system	جملة خطية
Linear operator	مؤثر خطي
List	لائحة
Loop	حلقة

M

Matrix	مصفوفة
Memory	ذاكرة
Maximum value	قيمة عظمى
Mean value	قيمة وسطى
Mini computer	حاسوب صغير

N

Nested	متداخل
Numerical	عددي
Norm	نظيم
Numerical Analysis	تحليل عددي
Numerical Methods	طرائق عددية
Non-linear	غير خطي

O

Open interval	مجال مفتوح
Order	ترتيب
Operator	مؤثر

P

Program	برنامج
Polynomial	كثيرة حدود
Product	ضرب

Proof	برهان

R

Record	سجل
roots	جذور
Real	حقيقي
Real number	عدد حقيقي
Region	منطقة
Relation	علاقة
Round of	تدوير

S

software	علم البرمجيات
Statement	عبارة
System	نظام
Series	متسلسلة
Set	مجموعة

Sign	إشارة
Solution	حل
Space	فضاء
Sum	جمع
Symbol	رمز
Symmetric	متناظر

T

Transpose	تحويل (منقول)
Table	جدول
Term	حد
Theorem	نظرية

U

Unique solution	حل وحيد

V

Value	قيمة
variables	متحولات (متغيرات)

Vector	متجه (شعاع)
Vector space	فضاء متجهي

Z

Zero function	دالة صفرية
Zero solution	حل صفري

Damascus University

المراجع

1 -د. محمد صبح و د. علي جمال الدين: لغة الفورتران ومبادئ بعض اللغات الأخرى 1992م

2 -د. دعد الحسيني وآخرون: التحليل العددي (1) 2001م

3 -د. فوزي دنان: الرياضيات العددية 1991م

4 -د. محمود عثمان: الأسس العامة للتحليل العددي 1989م

5 -د. هشام عبد للي: التحليل العددي 1992 م

6 -د. محمد صبح و د. صالح الحربي: التحليل العددي وطرق حسابه العددية 2006م

7 -د. فتحي قاضي: مبادئ أساسية في التحليل العددي 2005م

8 -د. تحسين الخطاب: مقدمة في الطرق العددية 2006م

9 -د. سليمان محمود: التحليل العددي (2) جامعة تشرين 2008-2009م

10 -د. برلنت مطيط ود. عبد الله العمر: التحليل العددي جامعة دمشق 2010-2011م

11 -د.محمد صبح: التحليل العددي (2) جامعة دمشق 2011-2012م

12 - Alkelley irapohl , an to programming in c, company inc 1984.

13 -Maron, M,numerical analysis 1982

14 -Esmat hairer, interoduction al'analyse numerique, 2001.

Rephale herbin, cours d'analyse numerique 2004- 15
Dalziel: numerical methods 1999- 16

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University