Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне - вариант 11

Зиязетдинов Алмаз Радикович

Содержание

1 Цель работы **5**

2 Задание **6**

3 Выполнение лабораторной работы **7**
3.1 Условие задачи 9
3.2 Код программы (Scilab) 9
3.3 Решение 12

4 Выводы **14**

Список литературы **15**

Список иллюстраций

3.1 Траектории для случая 1 (Scilab) 12
3.2 Траектории для случая 2 (Scilab) 13

Список таблиц

1 Цель работы

Приведем один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Например, рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить, по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтобы нагнать лодку.

2 Задание

1. Провести необходимые рассуждения и вывести дифференциальные уравнения, если скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

3 Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ — место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ — место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс — это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ — в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ — во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$, при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$, при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_t

— тангенциальная скорость. Радиальная скорость — это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. ТангенциальнаяМе скорость — это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $v_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку радиальная скорость равна v, то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_t = v\sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$.

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$.

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3.1 Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12.2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4.1 раза больше скорости браконьерской лодки.

3.2 Код программы (Scilab)

```
// Параметры задачи
k = 6.9; // начальное расстояние, км
n = 2.9; // отношение скоростей
phi = 3*%pi/4; // угол движения лодки

// Начальные радиусы для двух случаев
x1 = k / (n + 1); // случай 1: r(0) = 6.9 / 3.9 ≈ 1.769
x2 = k / (n - 1); // случай 2: r(π) = 6.9 / 1.9 ≈ 3.632
sqrt_n2_minus_1 = sqrt(n^2 - 1); // ≈ 2.72

// Функция для траектории катера (дифференциальное уравнение dr/d⊠ = r / sqrt(n^2
function dr = f(theta, r)
    dr = r / sqrt_n2_minus_1;
endfunction

// Случай 1: начальные условия r(0) = x1
r0_1 = x1;
theta0_1 = 0;
theta1 = 0:0.01:4*%pi; // диапазон углов
```

```
r1 = ode(r0_1, theta0_1, theta1, f); // решение диф. уравнения

// Случай 2: начальные условия r(π) = x2
r0_2 = x2;
theta0_2 = %pi;
theta2 = %pi:0.01:5*%pi; // диапазон углов
r2 = ode(r0_2, theta0_2, theta2, f); // решение диф. уравнения

// Траектория лодки в декартовых координатах
function [x, y] = boat_trajectory(t)
    x = t * cos(phi);
    y = t * sin(phi);
endfunction

t = 0:0.1:20; // время для траектории лодки
[x_b, y_b] = boat_trajectory(t);

// Построение графиков
clf; // очистка окна
// Траектория катера (случай 1) в полярных координатах
polarplot(theta1, r1, style=color("green"));
// Траектория катера (случай 2) в полярных координатах
polarplot(theta2, r2, style=color("blue"));
// Траектория лодки в декартовых координатах
plot2d(x_b, y_b, style=color("red"));

// Добавление начальных точек
plot2d([0], [0], style=-2, strf="000"); // полюс (лодка в t=0)
plot2d([k], [0], style=-3, strf="000"); // катер (случай 1)
```

```
plot2d([-k], [0], style=-4, strf="000"); // катер (случай 2)

// Настройки графика
xtitle("Траектории катера и лодки", "x, км", "y, км");
legend(["Катер (случай 1)", "Катер (случай 2)", "Лодка", "Полюс", "Катер t=0 (слу
```

3.3 Решение

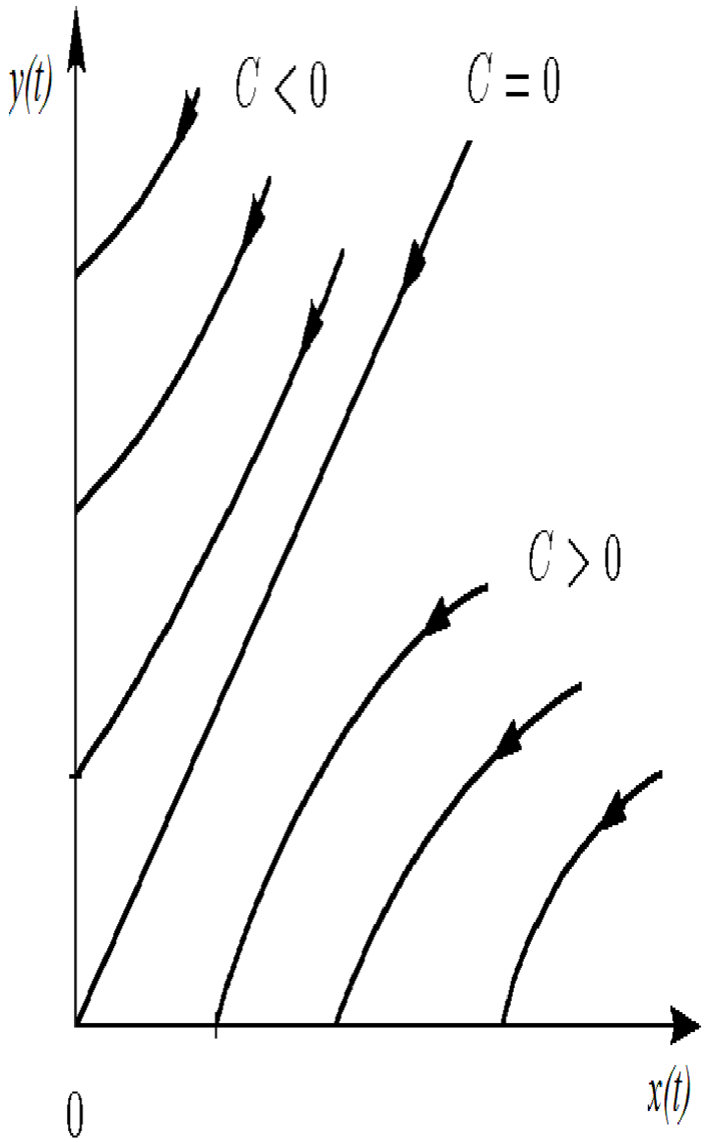

Рис. 3.1: Траектории для случая 1 (Scilab)

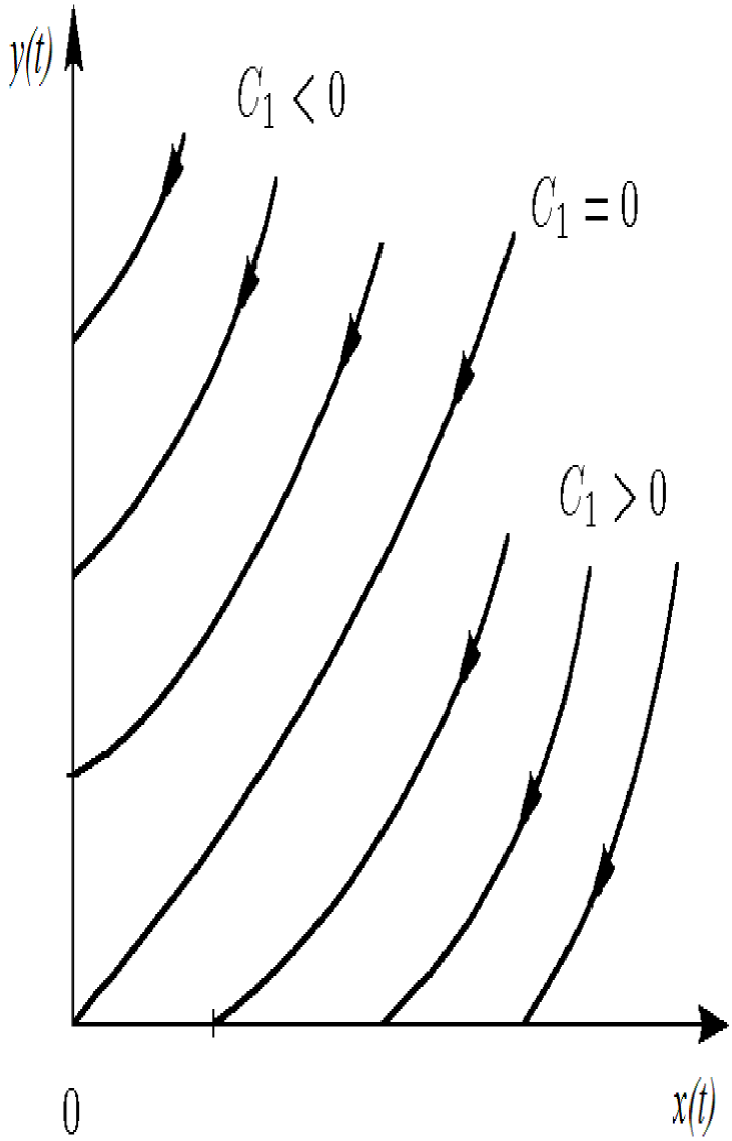

Рис. 3.2: Траектории для случая 2 (Scilab)

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели потребуется пройти меньшее расстояние.

4 Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.

Список литературы