Отчет по лабораторной работе №6

Модель эпидемии - вариант 11

Зиязетдинов Алмаз

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Изучить модель эпидемии SIR

2 Задание

1. Изучить модель эпидемии
2. Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае: $I(0) \leq I^*, I(0) > I^*$

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретические сведения

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{,если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

3.2 Задача

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $N = 17000$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 117$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 17$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае: 1. $I(0) \leq I^*$ 2. $I(0) > I^*$

Решение в Scilab

```
// Параметры модели
N = 17000;    // Общая популяция
```

```
alpha = 0.4;  // Коэффициент заболеваемости
beta = 0.2;   // Коэффициент выздоровления
I_star = 100; // Критическое число инфицированных

// Временной интервал
t0 = 0;       // Начальное время
tfinal = 60;  // Конечное время
dt = 0.1;     // Шаг времени
t = t0:dt:tfinal; // Вектор времени

// Определение системы уравнений
function du = epidemic_model(t, u)
    S = u(1); // Восприимчивые
    I = u(2); // Инфицированные
    R = u(3); // Выздоровевшие
    du = zeros(3,1);
    if I > I_star then
        du(1) = -alpha*S;       // dS/dt
        du(2) = alpha*S - beta*I; // dI/dt
    else
        du(1) = 0;              // dS/dt
        du(2) = -beta*I;        // dI/dt
    end
    du(3) = beta*I;           // dR/dt
endfunction

// --- Случай 1: I(0) = 117 > I_star = 100 ---
S0_1 = 16866; // Начальное число восприимчивых: N - I(0) - R(0)
I0_1 = 117;   // Начальное число инфицированных
```

```
R0_1 = 17;    // Начальное число выздоровевших
u0_1 = [S0_1; I0_1; R0_1];

// Решение для случая 1
u_1 = ode(u0_1, t0, t, epidemic_model);
S_1 = u_1(1,:); // S(t)
I_1 = u_1(2,:); // I(t)
R_1 = u_1(3,:); // R(t)

// График для случая 1
scf(1);
plot(t, S_1, 'b-', 'LineWidth', 2); // Восприимчивые
plot(t, I_1, 'r-', 'LineWidth', 2); // Инфицированные
plot(t, R_1, 'g-', 'LineWidth', 2); // Выздоровевшие
xlabel('Время, t');
ylabel('Численность особей');
title('Эпидемия: I(0) = 117 > I^* = 100');
legend(['S(t) - Восприимчивые'; 'I(t) - Инфицированные'; 'R(t) - Выздоров
xgrid;

// --- Случай 2: I(0) = 50 <= I_star = 100 ---
S0_2 = 16933; // Начальное число восприимчивых: N - I(0) - R(0)
I0_2 = 50;    // Начальное число инфицированных
R0_2 = 17;    // Начальное число выздоровевших
u0_2 = [S0_2; I0_2; R0_2];

// Решение для случая 2
u_2 = ode(u0_2, t0, t, epidemic_model);
S_2 = u_2(1,:); // S(t)
```

```
I_2 = u_2(2,:); // I(t)
R_2 = u_2(3,:); // R(t)

// График для случая 2
scf(2);
plot(t, S_2, 'b-', 'LineWidth', 2); // Восприимчивые
plot(t, I_2, 'r-', 'LineWidth', 2); // Инфицированные
plot(t, R_2, 'g-', 'LineWidth', 2); // Выздоровевшие
xlabel('Время, t');
ylabel('Численность особей');
title('Эпидемия: I(0) = 50 <= I^* = 100');
legend(['S(t) - Восприимчивые'; 'I(t) - Инфицированные'; 'R(t) - Выздоров
xgrid;
```

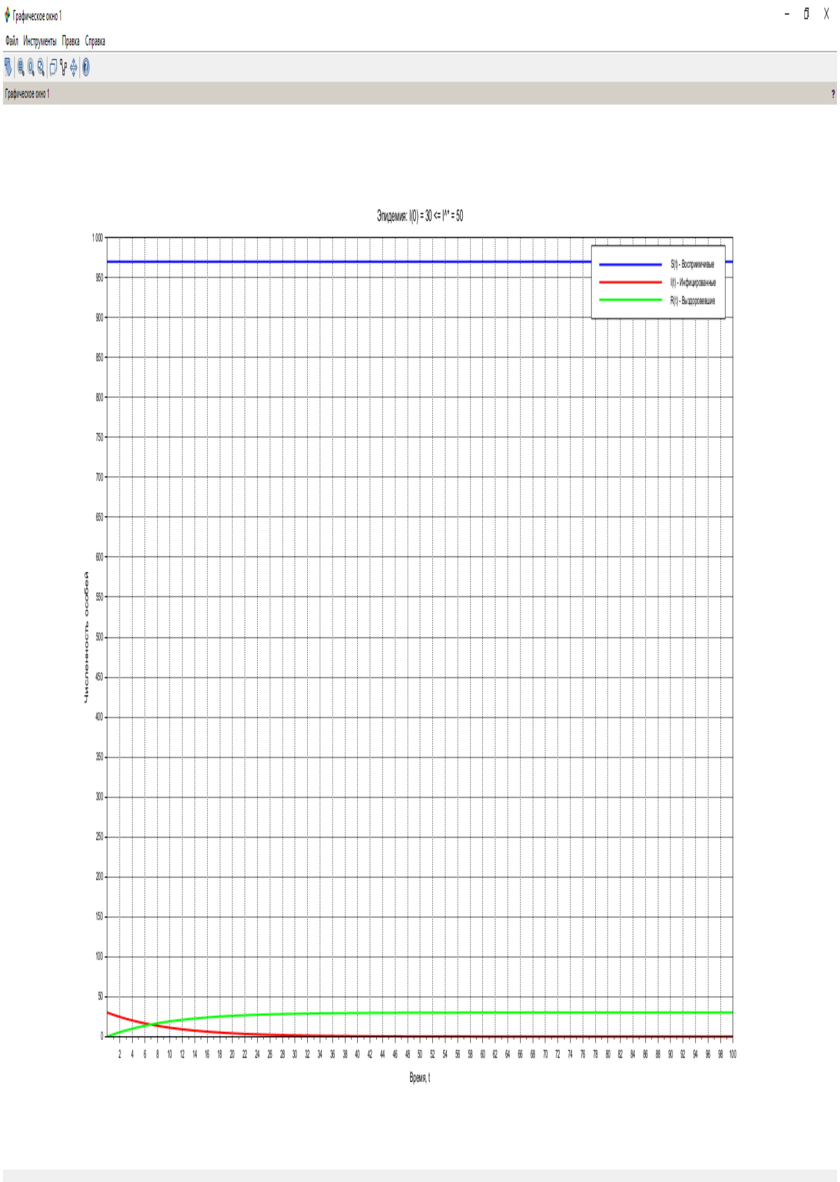

Figure 3.1: Графики численности в случае $I(0) \leq I^*$

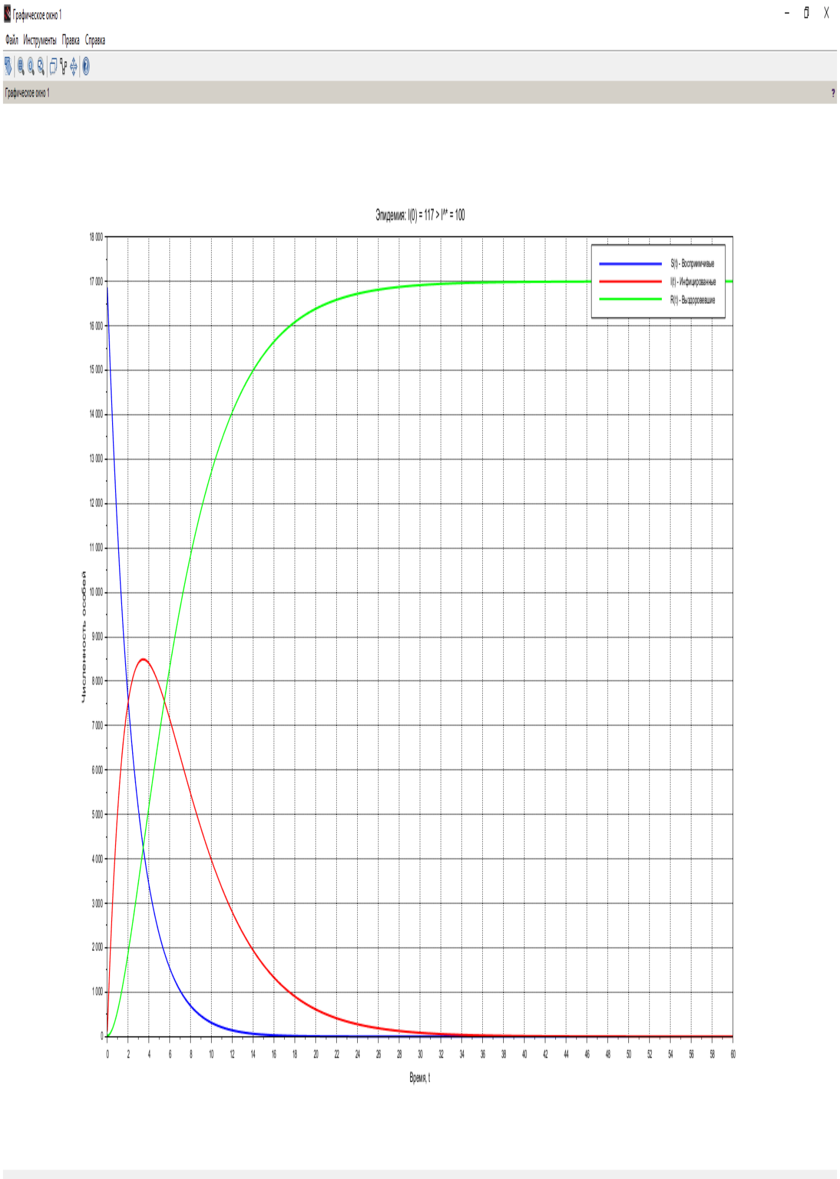

Figure 3.2: Графики численности в случае $I(0) > I^*$

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель эпидемии и построены графики.

Список литературы

1. Конструирование эпидемиологических моделей
2. Зараза, гостья наша