**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Специальность: 010200 — механика

Специализация: 010205 — механика жидкости, газа и плазмы

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

(Магистрская работа)

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ТЕЧЕНИИ

Работа завершена:

20 июня 2014 г. __________________________ (А.Р. Сираев)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

доктор технических наук, профессор

21 июня 2014 г. __________________________ (Н.И. Михеев)

Заведующий кафедрой

доктор физ.-мат. наук, профессор

24 июня 2014 г. __________________________ (А.Г. Егоров)

Казань – 2014

# Содержание

## Условные обозначения и сокращения

ОКЗА – обратная краевая задача аэрогидродинамики

ИНЖ – идеальная несжимаемая жидкость

ЭВМ – электронно-вычислительная машина

CUDA – Compute Unified Device Architecture (вычислительная унифицированная архитектура устройств)

TPL – Task Parallel Library (библиотека параллельных задач)

CPU – Central processing unit (центральное процессорное устройство)

GPU – Graphics processing unit (графическое процессорное устройство)

GPGPU – General-purpose graphics processing units (GPU общего назначения)

API – Application program interface (интерфейс прикладного программирования)

.NET – .NET Framework (программная платформа от Microsoft)

PLINQ – Parallel for Language Integrated Query (параллельность для интегрированного языка запросов)

$M$ – исходное количество узлов на профиле

$N$ – количество узлов на единичной окружности в канонической плоскости – искомое число узлов на профиле

# 1 Введение

## 2 Постановка задачи

Рассматривается нестационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения радиуса $r_0$ и длины $x_0$ с заданным законом изменения перепада давления.

Требуется:

1. получить уравнения для пульсирующего ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе в безразмерной форме;

2. получить численное решение полученных уравнений;

3. найти распределение скорости по радиусу трубы;

4. вычислить среднерасходную скорость, кинетическую энергию по периоду;

5. проанализировать полученные результаты, сделать выводы.

# 3 Решение задачи

## 3.1 Уравнение нестационарного ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения

Исходные уравнения были получены из уравнений Стокса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В рамках данной задачи ось трубы совпадает с осью $x$: $v = w = 0$, объемные силы отсутствуют: $F_x = F_y = F_z = 0$. При учете уравнения неразрывности получено, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Третье уравнение из системы уравнения Стокса примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\nabla^2 u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2}$$

Левая часть уравнения зависит только от $y$, $z$ и $t$. При этом, из первых двух уравнений (1) следует, что $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0$ Таким образом, правая часть уравнения не зависит от $y$ и $z$. Это означает, что $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ является функцией зависящей только от времени

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f(t). \tag{3}$$

При переходе в цилиндрическую систему координат и подстановке в уравнение (2) выражения для градиента давления (3) получено уравнение нестационарного ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = f(t) \tag{4}$$

### 3.2 Переход к безразмерной форме

Закон изменения перепада давления задан следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(A\cos\omega t + \frac{\Delta p}{\rho x_0}\right) \tag{5}$$

Связь между размерными и безразмерными переменными:

$$t = t_0\bar{t}, \;\; u = u_0\bar{u}, \;\; r = r_0\bar{r}, \;\; x = x_0\bar{x} \tag{6}$$

Выбраны следующие масштабы:

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \;\; , \;\; u_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \;\; , \;\; u' = \sqrt{Ar_0} \tag{7}$$

После подстановки (5) и введеных масштабов (7) уравнение (4) примет вид

$$\omega u_0\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \nu\frac{u_0}{r_0^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}\right) = \frac{u'^2}{r_0}\cos\bar{t} + \frac{u_0^2}{x_0} \tag{8}$$

Обе части уравнения умножены на $\dfrac{r_0^2}{\nu u_0}$ (черта над безразмерными переменными опущена)

$$\omega\frac{r_0^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{u_0 r_0 u'^2}{\nu u_0^2}\cos t + \frac{u_0 r_0^2}{\nu x_0} \tag{9}$$

После введения безразмерных комплексов

$$s = r_0\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \;\; , \;\; Re = \frac{u_0 r_0}{\nu} \;\; , \;\; \beta = \frac{u'}{u_0} \;\; , \;\; \varepsilon = \frac{r_0}{x_0}$$

уравнение (9) примет окончательный вид в безразмерной форме:

$$s^2\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = Re\left(\beta^2\cos t + \varepsilon\right). \tag{10}$$

Также, удобным для расчетов будет другой вид уравнения (10), в котором используются комплексы

$$H_1 = s^2 \quad , \quad H_2 = Re\beta^2 \quad , \quad H_3 = Re\varepsilon \quad ,$$

которые полностью определяют решение. Тогда

$$H_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) = H_2 \cos t + H_3. \tag{11}$$

## 3.3 Точное решение в случае осцилирующего ламинарного течения

# 4 Примененные методы при решении задачи

## 4.1 Формулы для вычисления функций Бесселя

## 4.2 Разностные схемы для уравнения диффузии в цилиндрических координатах

## 4.3 Сравнение результатов точного и численного решения

## 4.4 Зависимость сходимости по периоду от численной схемы

## 4.5 Выбор разностной схемы для проведения анализа решения

# 5 Выбор и обоснование использованных технологий программирования.

## 5.1 Выбор платформы разработки и языка программирования

## 5.2 Выбор хранилища данных

## 5.3 Выбор технологии для отображения данных

# 6 Анализ полученного решения

## 6.1 Зависимость профиля скорости от варьируемых комплексов

## 6.2 Крайние случаи

## 6.3 Анализ среднерасходной скорости

# 7 Заключение

# 8 Список использованной литературы