

Г.ШЛИХТИНГ

ТЕОРИЯ
ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ

Г. ШЛИХТИНГ

ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Перевод Г. А. ВОЛЬПЕРТА
с пятого немецкого издания,
исправленный по шестому
(американскому) изданию,
под редакцией Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

533

III 69

УДК 533.6

Grenzschicht-Theorie

VON

Dr. Hermann Schlichting

O. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig,
Direktor der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen
und Leiter des Instituts für Aerodynamik
der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig

Fünfte erweiterte und neubearbeitete Auflage

VERLAG G. BRAUN. KARLSRUHE

Теория пограничного слоя. Шлихтинг Г., перев. с немецкого, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Москва, 1974.

Книга состоит из четырех частей. В первой части в двух вводных главах излагаются без применения какого бы то ни было математического аппарата первоначальные сведения из теории пограничного слоя; остальные главы этой части посвящены математической и физической разработке теории пограничного слоя на основе уравнений Навье — Стокса. Во второй части излагается теория ламинарного пограничного слоя, в том числе и температурного пограничного слоя. В третьей части рассматривается переход течения из ламинарной формы в турбулентную, т. е. возникновение турбулентности. Четвертая часть посвящена турбулентным пограничным слоям.

Рис. 390. Табл. 24. Библ. ссылок 1583.

Оглавление

Предисловие редактора русского перевода	10
Из предисловия автора к первому изданию (1951 г.)	11
Из предисловия автора к пятому изданию	13
Введение	15

Часть первая

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Глава I. Первоначальные сведения о течениях жидкости с трением	19
§ 1. Действительная и идеальная жидкость	19
§ 2. Вязкость	20
§ 3. Сжимаемость	22
§ 4. Течение Хагена — Пуазеля в трубе	24
§ 5. Законы подобия; число Рейнольдса и число Маха	26
§ 6. Сравнение выводов теории идеальной жидкости с результатами измерений	33
Литература к главе I	35
Глава II. Первоначальные сведения из теории пограничного слоя	36
§ 1. Понятие пограничного слоя	36
§ 2. Отрыв пограничного слоя и образование вихрей	40
§ 3. Турбулентное течение в трубе и в пограничном слое	48
Литература к главе II	53
Глава III. Составление уравнений движения сжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса)	55
§ 1. Основные уравнения динамики жидкости	55
§ 2. Общий случай напряженного состояния деформируемого тела	56
§ 3. Скорость деформации элемента жидкости при течении	59
§ 4. Связь между напряженным состоянием и скоростью деформации	64
§ 5. Гипотеза Стокса	67
§ 6. Объемная вязкость и термодинамическое давление	68
§ 7. Уравнения Навье — Стокса	70
Литература к главе III	74
Глава IV. Общие свойства уравнений Навье — Стокса	75
§ 1. Вывод закона подобия Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса	75
§ 2. Течения без трения как «решения» уравнений Навье — Стокса	77
§ 3. Уравнения Навье — Стокса как уравнение переноса вихрей	78
§ 4. Предельный случай очень больших сил вязкости (очень малое число Рейнольдса)	80
§ 5. Предельный случай очень малых сил вязкости (очень большое число Рейнольдса)	81
§ 6. Математический пример предельного перехода $Re \rightarrow \infty$	84
Литература к главе IV	85

Глава V. Точные решения уравнений Навье — Стокса	86
§ 1. Слоистые течения	86
§ 2. Другие точные решения	96
Литература к главе V	109
Глава VI. Ползущие движения	111
§ 1. Дифференциальные уравнения ползущего движения	111
§ 2. Обтекание шара	112
§ 3. Гидродинамическая теория смазки	115
§ 4. Течение Хил-Шоу	121
Литература к главе VI	123
 Ч а с т ь в т о р а я	
ЛАМИНАРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ	
Глава VII. Уравнения пограничного слоя при плоском течении. Пограничный слой на пластине	124
§ 1. Составление уравнений пограничного слоя для течения вдоль плоской пластины	124
§ 2. Отрыв пограничного слоя	128
§ 3. Замечание по поводу интегрирования уравнений пограничного слоя	130
§ 4. Сопротивление трения	131
§ 5. Пограничный слой на пластине	132
Литература к главе VII	140
Глава VIII. Общие свойства уравнений пограничного слоя	142
§ 1. Зависимость развития пограничного слоя от числа Рейнольдса	142
§ 2. «Подобные» решения уравнений пограничного слоя	144
§ 3. Проблема «продолжения» решения. Контурные связи	149
§ 4. Преобразование уравнений пограничного слоя в уравнение теплопроводности	150
§ 5. Теорема импульсов и теорема энергии для пограничного слоя	152
Литература к главе VIII	155
Глава IX. Точные решения уравнений пограничного слоя для стационарного плоского течения	157
§ 1. Течение около клина	158
§ 2. Течение в суживающемся канале	160
§ 3. Течение около цилиндра (ряд Блазиуса)	161
§ 4. Пограничный слой для потенциального течения $U(x) = U_0 - ax^n$	170
§ 5. Ряд Гёртлера	171
§ 6. Спутное течение позади плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении	172
§ 7. Плоская струя	177
§ 8. Ламинарный слой на границе раздела двух потоков	180
§ 9. Плоское течение в начальном участке канала	181
§ 10. Метод продолжения	184
§ 11. Разностные методы	187
Литература к главе IX	190
Глава X. Приближенные способы решения уравнений пограничного слоя для стационарных плоских течений	192
§ 1. Применение теоремы импульсов к плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении	192
§ 2. Применение теоремы импульсов к обтеканию с градиентом давления	197
§ 3. Сравнение приближенного расчета с точными решениями	205
§ 4. Другие примеры приближенного расчета пограничного слоя	208
§ 5. Другие способы приближенного расчета пограничного слоя	210

§ 6. Ламинарное течение с возрастанием давления	213
Литература к главе X	216
Глава XI. Осесимметричные и трехмерные пограничные слои	218
§ 1. Точные решения для осесимметричных пограничных слоев	218
§ 2. Приближенные решения для осесимметричных пограничных слоев. Течение в начальном участке трубы	232
§ 3. Связь между осесимметричными и плоскими пограничными слоями .	238
§ 4. Трехмерные пограничные слои	241
Литература к главе XI	250
Глава XII. Температурные пограничные слои в ламинарном течении	254
§ 1. Составление уравнения энергии	254
§ 2. Повышение температуры, возникающее вследствие адиабатического сжатия	257
§ 3. Теория подобия в теплопередаче	259
§ 4. Составление уравнений температурного пограничного слоя	264
§ 5. Общие свойства температурных пограничных слоев	267
§ 6. Точные решения для распределения температуры в вязком течении .	273
§ 7. Температурные пограничные слои при вынужденном конвективном течении	278
§ 8. Температурные пограничные слои при естественном конвективном течении	299
Литература к главе XII	304
Глава XIII. Ламинарные пограничные слои при сжимаемом течении	309
§ 1. Физические основы	309
§ 2. Связь между распределениями скоростей и температуры	312
§ 3. Пограничный слой на продольно обтекаемой плоской пластине .	314
§ 4. Пограничный слой с градиентом давления	319
§ 5. Взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения	339
Литература к главе XIII	348
Глава XIV. Управление пограничным слоем при ламинарном течении	352
§ 1. Различные способы управления пограничным слоем	352
§ 2. Отсасывание пограничного слоя	356
§ 3. Вдувание другого газа (двуихкомпонентный пограничный слой) .	371
Литература к главе XIV	373
Глава XV. Нестационарные пограничные слои	378
§ 1. Общие замечания о расчете нестационарных пограничных слоев	378
§ 2. Развитие пограничного слоя при внезапном возникновении движения	385
§ 3. Развитие пограничного слоя при ускоренном движении	392
§ 4. Экспериментальные исследования процесса разгона	394
§ 5. Периодический пограничный слой	396
§ 6. Сжимаемые нестационарные пограничные слои	407
Литература к главе XV	412
 Часть третья	
ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОЙ ФОРМЫ ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНУЮ	
Глава XVI. Возникновение турбулентности I (некоторые экспериментальные резуль- таты; основы теории устойчивости и ее экспериментальное подтверждение для пограничного слоя на пластине)	415
§ 1. Некоторые экспериментальные результаты, относящиеся к переходу ламинарного течения в турбулентное	415
§ 2. Основы теории устойчивости ламинарного течения	422
§ 3. Результаты теории устойчивости для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине	431

§ 4. Сравнение результатов теории устойчивости с экспериментальными данными	439
Литература к главе XVI	446
Глава XVII. Возникновение турбулентности II (влияние градиента давления, отсасывания, сжимаемости, теплопередачи и шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную)	450
§ 1. Влияние градиента давления на переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную	450
§ 2. Определение положения нейтральной точки на заданном теле	456
§ 3. Влияние отсасывания на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный	465
§ 4. Влияние активных сил на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный	470
§ 5. Влияние теплопередачи и сжимаемости на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный	474
§ 6. Устойчивость пограничного слоя при трехмерных возмущениях	480
§ 7. Влияние шероховатости стенки на переход ламинарного течения в турбулентное	487
§ 8. Осесимметричные течения	492
Литература к главе XVII	493

Ч а с т ь ч е т в е р т а я
ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Глава XVIII. Основные сведения о турбулентных течениях	500
§ 1. Осредненное движение и пульсационное движение	502
§ 2. Дополнительные (кажущиеся) турбулентные напряжения	503
§ 3. Вывод тензора напряжения кажущегося турбулентного трения из уравнений движения Навье — Стокса	505
§ 4. Некоторые измерения турбулентных пульсаций скорости	508
§ 5. Баланс энергии в турбулентных течениях	514
§ 6. Турбулентность в аэродинамической трубе	515
Литература к главе XVIII	517
Глава XIX. Теоретические гипотезы для расчета турбулентных течений	520
§ 1. Основные уравнения	520
§ 2. «Путь перемешивания» Прандтля	521
§ 3. Две другие гипотезы о турбулентном касательном напряжении	525
§ 4. Гипотеза подобия Кармана	527
§ 5. Универсальные законы распределения скоростей	529
§ 6. Другие гипотезы для расчета турбулентных течений	534
Литература к главе XIX	535
Глава XX. Турбулентное течение в трубах	536
§ 1. Экспериментальные результаты для гладких труб	536
§ 2. Связь между законом сопротивления и распределением скоростей	540
§ 3. Универсальные законы распределения скоростей для очень больших чисел Рейнольдса	542
§ 4. Универсальный закон сопротивления для гладких труб при очень больших числах Рейнольдса	548
§ 5. Трубы с некруглым поперечным сечением	551
§ 6. Шероховатые трубы, в частности с песочной шероховатостью	554
§ 7. Другие виды шероховатости	562
§ 8. Течение в криволинейных трубах и диффузорах	564
§ 9. Нестационарное течение в трубе	567
Литература к главе XX	567

Глава XXI. Турбулентные пограничные слои без градиента давления. Пограничный слой на пластине. Вращающиеся диски. Шероховатость	571
§ 1. Гладкая плоская пластина	572
§ 2. Вращающийся диск	582
§ 3. Шероховатая пластина	586
§ 4. Допустимая высота шероховатости	592
Литература к главе XXI	599
Глава XXII. Турбулентные пограничные слои с градиентом давления при несжимаемом течении	601
§ 1. Некоторые экспериментальные результаты	601
§ 2. Расчет плоского турбулентного пограничного слоя	603
§ 3. Трехмерные пограничные слои	620
Литература к главе XXII	623
Глава XXIII. Турбулентные пограничные слои при сжимаемом течении	627
§ 1. Предварительные замечания	627
§ 2. Связь между распределением скоростей и распределением температуры	632
§ 3. Влияние числа Маха. Законы сопротивления трения	639
Литература к главе XXIII	645
Глава XXIV. Свободная турбулентность	649
§ 1. Предварительные замечания	649
§ 2. Оценка увеличения ширины зоны перемешивания и уменьшения скорости свободных струй	651
§ 3. Примеры	655
§ 4. Закон Райхардта для переноса импульса	670
§ 5. Распространение тепла при свободной турбулентности	672
Литература к главе XXIV	673
Глава XXV. Определение профильного сопротивления	676
§ 1. Предварительные замечания	676
§ 2. Экспериментальный метод Бетца	677
§ 3. Экспериментальный метод Джонса	679
§ 4. Определение профильного сопротивления путем расчета	681
§ 5. Потери энергии в лопаточных решетках	686
Литература к главе XXV	690
Литература (учебники и обзорные работы)	693
Сокращения, применяемые для обозначения некоторых журналов	698
Список наиболее важных обозначений	699
Именной указатель	701
Предметный указатель	708

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

Т а б л и ц а 1.1. Значения плотности, динамической вязкости и кинематической вязкости для воды и воздуха при разных температурах	22
Т а б л и ц а 1.2. Значения кинематической вязкости для некоторых жидкостей	22
Т а б л и ц а 2.1. Толщина δ турбулентного пограничного слоя на конце плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении	52
Т а б л и ц а 5.1. Значения функций φ, φ' и φ'' для плоского и осесимметричного течений в окрестности критической точки	99
Т а б л и ц а 5.2. Значения функций, определяющих распределение скоростей и распределение давления вблизи диска, вращающегося в неподвижной жидкости	104
Т а б л и ц а 7.1. Значения функции $f(\eta)$ для пограничного слоя на плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении	134

Т а б л и ц а 9.1. Значения первых шести членов ряда Блазиуса (9.18) для плоского пограничного слоя на цилиндре (симметричный случай)	166
Т а б л и ц а 10.1. Результаты приближенного расчета пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении	197
Т а б л и ц а 10.2. Вспомогательные функции для приближенного расчета ламинарного пограничного слоя	202
Т а б л и ц а 10.3. Сравнение параметров пограничного слоя плоского течения в окрестности критической точки, полученных путем приближенного расчета и точного решения	206
Т а б л и ц а 11.1. Значения функций F , G , H , определяющих распределение скоростей при вращательном движении жидкости над неподвижным основанием	221
Т а б л и ц а 11.2. Значения коэффициентов-функций ряда Блазиуса для расчета пограничного слоя на теле вращения	230
Т а б л и ц а 11.3. Значения функций $g_0(\eta)$ и $g_2(\eta)$ для течения с критической линией	246
Т а б л и ц а 12.1. Физические характеристики некоторых веществ	258
Т а б л и ц а 12.2. Значения безразмерных величин a_1 и b для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении	280
Т а б л и ц а 12.3. Значения функции A , необходимые для расчета теплопередачи вблизи критической точки цилиндра	290
Т а б л и ц а 12.4. Значения функции $H(\Delta)$	291
Т а б л и ц а 12.5. Значения функции $F(\chi)$, используемой для расчета температурного пограничного слоя при произвольном распределении температуры на стенке	295
Т а б л и ц а 12.6. Коэффициенты теплопередачи для вертикально поставленной нагретой плоской пластины при естественной ламинарной конвекции	302
Т а б л и ц а 13.1. Универсальные функции для приближенного расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя	336
Т а б л и ц а 13.2. Функция $F(X)$, определяющая распределение давления вдоль плоской пластины в окрестности скачка уплотнения	347
Т а б л и ц а 14.1. Безразмерная толщина вытеснения δ_1 и формпараметр профиля скоростей δ_1/δ_2 в начальном участке продольно обтекаемой пластины с равномерным отсасыванием	360
Т а б л и ц а 15.1. Значения функций ζ_{1a} и ζ_{1b} для нестационарного разгонного течения	387
Т а б л и ц а 17.1. Зависимость критического числа Рейнольдса и максимального коэффициента нарастания возмущений от формпараметра β профилей скоростей пограничного слоя на клине при обтекании последнего с градиентом давления	453
Т а б л и ц а 17.2. Зависимость критического числа Рейнольдса для профиля скоростей при отсасывании от безразмерной текущей длины ξ на начальном участке пластины	467
Т а б л и ц а 17.3. Критические числа Рейнольдса для профилей скоростей, обращующихся во вращающемся цилиндре при его разгоне	471
Т а б л и ц а 20.1. Средняя по поперечному сечению скорость течения в трубе при различных показателях степени n в уравнении (20.6)	540
Т а б л и ц а 20.2. Зависимость коэффициента сопротивления λ в гладких трубах от числа Рейнольдса	550
Т а б л и ц а 21.1. Местный и полный коэффициенты сопротивления для продольно обтекаемой гладкой плоской пластины при логарифмическом законе распределения скоростей	578

Т а б л и ц а 21.2. Зависимость допустимой высоты шероховатости от числа Рейнольдса	593
Т а б л и ц а 21.3. Примеры определения допустимой высоты шероховатости	594
Т а б л и ц а 22.1. Постоянные в квадратурных формулах для толщины потери импульса	606
Т а б л и ц а 23.1. Зависимость величин a и b , необходимых для вычисления коэффициента теплопередачи и коэффициента восстановления, от отношения \Pr/\Pr_t	636
Т а б л и ц а 24.1. Степенные законы увеличения ширины и уменьшения скорости течения с увеличением расстояния x для различных случаев свободной турбулентности	654

Предисловие редактора русского перевода

Автор настоящей монографии профессор, доктор Г. Шлихтинг является известным зарубежным специалистом в области гидроаэродинамики и особенно в области теории пограничного слоя. Он занимает пост директора снискавшей в свое время мировую известность Аэродинамической испытательной лаборатории в Гётtingене, а также пост научного руководителя Института аэродинамики при Немецком исследовательском авиационном центре в Брауншвейге.

Советский читатель уже знаком с книгой Г. Шлихтинга по ее переводам, сделанным с первого и пятого немецких изданий и выпущенных в 1956 и 1969 г.

Книга Г. Шлихтинга ценна связью излагаемой в ней теории ламинарного и турбулентного пограничного слоя с ее многочисленными техническими применениями. По характеру изложения автор следует хорошо соответствующему цели книги принципу: «от простого к сложному». Почти повсюду сначала приводится физическое истолкование явления, а уже затем дается математическое оформление количественной стороны этого явления.

В настоящем русском издании учтены все изменения и дополнения, внесенные автором в шестое (американское) издание. Из этих дополнений следует отметить значительную переработку третьей главы, приблизившую изложение к движениям вязкого газа, и некоторое уточнение изложения основ гидродинамической теории смазки в подшипниках. Несколько расширена библиография.

Книге несколько вредит незнакомство автора с советскими исследованиями по теории пограничного слоя, причем здесь дело не в приоритетных притязаниях, а просто в вытекающей отсюда некоторой ограниченности изложения. Переводчик и редактор приняли решение за небольшими исключениями не загромождать книгу примечаниями по этому поводу.

Л. Г. Лойцянский

Из предисловия автора к первому изданию (1951 г.)

Современная механика жидкости стала развиваться в начале текущего столетия. В отличие от классической гидродинамики прошлого столетия, она быстро достигла очень крупных успехов в теоретическом объяснении явлений, наблюдавшихся при течении жидкостей. Особенно большое развитие получили за последние пятьдесят лет три раздела современной механики жидкости: теория пограничного слоя, газовая динамика и теория крыла. Настоящая книга посвящена теории пограничного слоя — наиболее старому из перечисленных разделов. Начало этой теории положил в 1904 г. Л. Прандтль, указав тогда путь, сделавший доступным теоретическому исследованию течения жидкостей с очень малой вязкостью, из которых наиболее важными в техническом отношении являются вода и воздух; для достижения этого достаточно было учитывать действие вязкости только там, где оно проявляется существенным образом, а именно в тонком «пограничном слое» вблизи стенки, обтекаемой жидкостью. Этот путь позволил дать теоретическое объяснение многим явлениям, ранее остававшимся совершенно непонятными. Прежде всего, идея Л. Прандтля сделала доступными для теоретического исследования вопросы, связанные с сопротивлением, возникающим при обтекании жидкостью твердых тел. Бурно развивавшаяся авиационная техника очень быстро извлекла из теоретических выводов многое, полезное для себя, и в свою очередь поставила перед новой теорией многочисленные проблемы. В настоящее время для инженера, работающего в области авиации, понятие пограничного слоя стало настолько привычным, что без него он не может больше обойтись. В другие отрасли машиностроения, связанные с проблемами движения жидкостей, — одной из важнейших таких отраслей является турбиностроение — новые идеи внедрялись значительно медленнее, но в настоящее время они усиленным образом используются при конструировании всех гидромашин.

Настоящая книга предназначена в первую очередь для инженеров. Как следует из названия книги, на переднем плане всего изложения стоит теоретическое рассмотрение проблемы. Я попытался дать это теоретическое рассмотрение в форме, легко понятной для инженера. Из весьма обширного экспериментального материала я использовал только некоторые немногочисленные результаты, особенно пригодные для оживления физической наглядности, и, кроме того, такие результаты, которые либо могут служить для проверки теории, либо, как в проблеме турбулентного пограничного слоя, являются фундаментом для построения полуэмпирических теорий.

Поступая так, я имел в виду подчеркнуть, что решающие успехи достигаются не путем нагромождения обширного экспериментального материала, а, напротив, некоторыми немногими фундаментальными опытами в сочетании с теоретическими соображениями.

Книга разделена на четыре части. В первой части в двух вводных главах излагаются без применения какого бы то ни было математического аппарата первоначальные сведения из теории пограничного слоя; остальные главы этой части посвящены математической и физической разработке теории пограничного слоя на основе уравнений Навье — Стокса. Во второй части излагается теория ламинарного пограничного слоя, в том числе и температурного пограничного слоя. В третьей части рассматривается переход течения из ламинарной формы в турбулентную, т. е. возникновение турбулентности. Наконец, четвертая часть посвящена турбулентным пограничным слоям. Теорию ламинарного пограничного слоя в настоящее время можно считать в основном ее содержании законченной: ее физические особенности полностью разъяснены, а расчетные методы разработаны до большого совершенства и во многих случаях доведены до столь простой формы, что полностью доступны инженеру. Оставшиеся неразрешенными специальные проблемы (например, пограничный слой при течении сжимаемой жидкости и пограничный слой при наличии отсасывания) носят в основном математический характер. Вопрос о переходе ламинарной формы течения в турбулентную, которым впервые начал заниматься О. Рейнольдс в 1880 г., теперь, после нескольких десятилетий безуспешной работы, нашел удачное объяснение. Теория устойчивости В. Толмина, подвергавшаяся долгое время возражениям с различных точек зрения, подтверждена теперь в полном своем объеме весьма тщательными опытами Г. Л. Драйдена и его сотрудников. При изложении проблемы турбулентного пограничного слоя я, придерживался в основном полуэмпирических теорий, связанных с представлением о пути перемешивания, введенным Л. Прандтлем. Хотя, согласно последним исследованиям, эти теории несколько недостаточны, тем не менее пока не предложено взамен их ничего лучшего, что могло бы быть непосредственно использовано инженером. Напротив, полуэмпирические теории дают на многие практические вопросы вполне удовлетворительный ответ.

Из предисловия автора к пятому изданию

Со времени выхода в свет третьего издания этой книги в 1958 г. область применений теории пограничного слоя вновь сильно расширилась. Английский перевод этой книги, вышедший в 1960 г., уже значительно отличался от третьего немецкого издания 1958 г. Сейчас, когда последнее немецкое и английское издания, по-видимому, полностью разошлись, я решил на новую глубокую переработку книги.

Как и в предыдущих изданиях, я стремился к тому, чтобы из большого количества новой литературы, посвященной пограничному слою, использовать для книги наиболее важные работы, не меняя при этом основной структуры книги. Я надеюсь, что в результате выполненной переработки главная особенность книги — выдвижение на передний план теоретических соображений в форме, доступной для инженера, — сохранилась. Подразделение книги на четыре части (основные законы течения вязкой жидкости, ламинарные пограничные слои, переход ламинарной формы течения в турбулентную, турбулентные течения) оставлено неизменным. Однако в части «Ламинарные пограничные слои» сделана перестановка глав с целью придать этой части более обозримую структуру. В результате этой перестановки главы об управлении пограничным слоем и о нестационарных пограничных слоях отодвинуты в конец части. В части «Турбулентные течения» добавлена одна новая глава, вследствие чего общее число глав книги возросло до 25.

Из сделанных в новом издании дополнений особо отмечу следующие. В части «Ламинарные пограничные слои» сделаны большие вставки об осесимметричных и трехмерных, а также о нестационарных пограничных слоях. Особенно сильно расширены главы XII и XIII — о температурных пограничных слоях и ламинарных сжимаемых пограничных слоях. В части «Переход ламинарной формы течения в турбулентную» вновь расширена глава XVII, посвященная приложениям теории устойчивости. Сведения о влиянии сжимаемости на турбулентные пограничные слои расширены настолько, что оказалось целесообразным выделить их в отдельную главу XXIII.

Упомяну также о вопросах, которые в книге не рассмотрены. Не включены сведения о влиянии химических реакций, возникающих в пограничных слоях при гиперзвуковых скоростях, на процесс течения в пограничном слое. Мне кажется, что этот вопрос находится пока только в стадии первоначальной разработки. То же самое относится к пограничным слоям при магнитогидродинамических течениях. В новом издании я по-прежнему отказался

от включения сведений о статистической теории турбулентности, так как эта теория хорошо изложена в других книгах.

Список литературы во многих главах вновь сильно расширен. Число рисунков увеличено, объем книги значительно возрос. Тем не менее я надеюсь, что первоначальный характер книги остался неизменным и что, несмотря на увеличение объема, целевая установка книги — дать обзор о важном разделе механики жидкости и газа — полностью сохранилась.

При составлении рукописи нового издания мне оказали помощь многочисленные коллеги по специальности. Без этой помощи при моей теперешней большой нагрузке я не сумел бы подготовить настоящее издание. К. Герстен весьма существенно переработал и значительно дополнил главу XII («Температурные пограничные слои при ламинарном течении») и главу XV («Нестационарные пограничные слои»). Ф. Ригельс внес дополнения, в частности вопрос о преобразовании Иллингвортса — Стюартсона, в главу XIII («Ламинарные пограничные слои при сжимаемом течении»). И. Ротта тщательно пересмотрел часть книги, посвященную турбулентным пограничным слоям, и снабдил ее многочисленными дополнениями, в частности новой главой XXIII о сжимаемых турбулентных пограничных слоях. В. Пехау и Штайхойер приняли участие в переработке многих глав в первой и второй частях книги. Всем перечисленным лицам приношу свою благодарность за цennую помощь.

Г. Шлихтинг

Гётtingен,
октябрь 1964

Введение

В конце XIX столетия наука о движении жидкости распалась на две ветви, почти не связанные между собой. С одной стороны, достигла большого совершенства *теоретическая гидродинамика*, исходившая из уравнений, составленных Эйлером для движения жидкости без трения. Однако результаты этой так называемой классической гидродинамики во многом резко противоречили опыту. Особенно резкое противоречие получалось в весьма важных вопросах о потере давления в трубах и каналах и о сопротивлении, которое оказывает жидкость движущемуся в ней телу; поэтому классическая гидродинамика имела для практики лишь небольшое значение, что побудило инженеров создать для решения важных проблем, выдвигавшихся быстро развивавшейся техникой, свою собственную науку о движении жидкости, так называемую *гидравлику*. Эта наука, принявшая резко выраженный эмпирический характер, опиралась на большое число экспериментальных результатов и очень сильно отличалась от теоретической гидродинамики как своими методами, так и своей целью.

В начале настоящего столетия Л. Прандтль нашел путь, позволивший вновь соединить в одно целое указанные выше далеко отошедшие друг от друга ветви науки о движении жидкости. Кроме того, связав теорию с практикой, Л. Прандтль положил начало направлению, дальнейшее развитие которого в современной гидродинамике привело на протяжении первой половины настоящего столетия к неожиданным успехам. В этом состоит большая заслуга Л. Прандтля. Правда, уже давно было известно, что резкое расхождение между результатами классической гидродинамики и действительностью возникало в очень многих случаях вследствие пренебрежения в теоретических исследованиях *трением жидкости*. Тогда же были составлены уравнения движения жидкости с учетом трения (так называемые уравнения Навье — Стокса). Однако эти уравнения вследствие больших математических трудностей не удалось применить к теоретическому исследованию движений жидкости с трением (за исключением немногих частных случаев). Между тем для воды и воздуха, т. е. для жидкостей, особенно важных в технике, коэффициент вязкости весьма мал, и, следовательно, силы трения, обусловленные вязкостью, получаются в целом очень небольшими по сравнению с остальными силами (силою тяжести и силами давления); поэтому в течение долгого времени не удавалось понять, каким образом малые силы трения, которые в классической теории считалось возможным отбрасывать, оказывали тем не менее решающее влияние на процесс движения.

В 1904 г. Л. Прандтль в своем докладе «О движении жидкости при очень малом трении», прочитанном на математическом конгрессе в Гейдельберге¹⁾, указал путь, сделавший доступным теоретическому исследованию

¹⁾ Prandtl L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, 484—491; см. также Prandtl L., Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, herausgegeben von W. Tollmien, H. Schlichting und H. Görtler, т. II, 575—584, Springer, Berlin 1961.

течения жидкости с трением в практически важных случаях. А именно, исходя из теоретических соображений и некоторых простых экспериментов, Л. Прандтль показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (*пограничный слой*), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Свои теоретические соображения Л. Прандтль уже тогда подтвердил некоторыми очень простыми опытами в небольшом, построенном им самим, гидроканале. Таким образом, гипотеза Л. Прандтля положила начало восстановлению утраченной связи между теoriей и практикой. Теория пограничного слоя Прандтля оказалась чрезвычайно плодотворной и сразу же после своего опубликования дала мощный толчок к дальнейшему развитию теоретических исследований. Под влиянием задач, поставленных в начале нашего столетия расцветом авиационной техники, новая теория весьма быстро развилась и вскоре превратилась, вместе с другими важными теориями — теорией крыла и теорией движения газа при больших скоростях,— в основу современной механики жидкости и газа.

В качестве областей применения теории пограничного слоя упомянем о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела (например, плоской пластины в продольном направлении) вследствие трения жидкости о поверхность тела, далее, о вычислении сопротивления трения корабля, профиля крыла, фюзеляжа самолета или лопатки турбины. Особенностью пограничного слоя является его свойство допускать при некоторых обстоятельствах возникновение возвратного течения в непосредственной близости от стенки. С этим свойством связаны отрыв пограничного слоя от тела и возникновение более или менее сильных вихрей на кормовой части обтекаемого тела. Эти явления обусловливают значительное изменение распределения давления вдоль поверхности обтекаемого тела по сравнению с распределением давления в потоке без трения, что приводит к возникновению так называемого сопротивления давления обтекаемого тела. Теория пограничного слоя указывает путь к вычислению этого сопротивления. Далее, теория пограничного слоя дает ответ на важный вопрос о том, какую форму должно иметь обтекаемое тело для того, чтобы не возникало вредного отрыва потока от тела. Однако отрыв потока от тела может возникать не только при обтекании тела, но и при течении жидкости в канале. Следовательно, теория пограничного слоя дает возможность исследовать особенности течения в межлопаточных каналах гидравлических и газовых машин (насосов, турбин). Только на основе теории пограничного слоя могут быть объяснены явления, возникающие при достижении подъемной силой крыла максимального значения и также связанные с отрывом потока. Наконец, теплопередача между телом и обтекающей его жидкостью (или газом) также связана с особенностями течения в пограничном слое.

Вначале теория пограничного слоя развивалась главным образом в применении к ламинарным течениям несжимаемой среды. Для этих течений можно было считать, что силы трения в них допустимо подсчитывать на основе закона трения Стокса. Эта область применения теории пограничного слоя была в дальнейшем столь глубоко развита в многочисленных исследованиях, что в настоящее время ее можно считать в основных чертах исчерпанной. Позже теория пограничного слоя была распространена также на практически более важные случаи несжимаемых турбулентных течений в пограничных слоях в предположении несжимаемости среды. Правда, для турбулентных течений О. Рейнольдс еще в 1880 г. ввел весьма важное понятие

кажущегося турбулентного трения, но это еще не дало возможности теоретического расчета этих течений. Существенный успех в этой области был достигнут только после введения Л. Прандтлем в 1925 г. понятия пути перемешивания. Введение этого понятия наряду с выполнением систематических опытов позволило применить теорию пограничного слоя для теоретического исследования и турбулентных течений. Однако до настоящего времени все же не имеется рациональной теории вполне развившихся турбулентных течений. При чрезвычайной сложности турбулентных течений создание такой теории вообще вряд ли возможно. В дальнейшем, под влиянием сильного возрастания скоростей в авиации, были тщательно исследованы пограничные слои также для движений сжимаемой среды. При таких движениях наряду с динамическим пограничным слоем образуется температурный пограничный слой, играющий большую роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения между движущимся телом и средой, приводит к сильному нагреванию поверхности обтекаемого тела. Расчет этого нагревания представляет собой трудную проблему, особенно для авиационной техники и для искусственных спутников («тепловой барьер»).

Для всей механики жидкости и газа фундаментальное значение имеет явление перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Впервые это явление было подробно исследовано О. Рейнольдсом в восьмидесятых годах прошлого столетия при изучении движения воды в трубах. В 1914 г. Л. Прандтлю удалось экспериментальным путем, на примере обтекания шара, показать, что течение внутри пограничного слоя также может быть либо ламинарным, либо турбулентным и что процесс отрыва потока, а вместе с тем и вся проблема сопротивления зависят от перехода течения внутри пограничного слоя из ламинарной формы в турбулентную. В основе теоретического исследования такого перехода лежит предположение О. Рейнольдса о неустойчивости ламинарного течения. В 1921 г. такими исследованиями занялся Л. Прандтль. В 1929 г. В. Толмину после ряда неудачных попыток удалось впервые теоретически вычислить критическое число Рейнольдса для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении. Однако потребовалось еще свыше десяти лет, прежде чем теория Толмина смогла быть подтверждена очень тщательными экспериментами Х. Драйдена и его сотрудников. Теория устойчивости пограничного слоя позволила объяснить влияние на переход ламинарной формы течения в турбулентную также других факторов (градиента давления, отсасывания, числа Маха, теплопередачи). Эта теория получила важное применение, в частности, при исследовании несущих профилей с очень малым сопротивлением (так называемых ламинаризованных профилей).

Существенной особенностью современной механики жидкости и газа в целом и теории пограничного слоя в частности является очень тесная связь теории и эксперимента. Решающие успехи достигнуты в большей части случаев путем немногих фундаментальных опытов в сочетании с теоретическими рассуждениями. Обзор развития теории пограничного слоя с особым подчеркиванием плодотворных результатов от взаимной связи теории и эксперимента уже давно был опубликован А. Бетцем¹⁾. Исследования пограничных слоев, начатые Л. Прандтлем в 1904 г., в течение последующих примерно двадцати лет — вплоть до доклада Л. Прандтля, прочитанного в 1927 г. в Лондонском аэронавтическом обществе²⁾, — проводились почти

¹⁾ B e t z A., Ziele, Wege und konstruktive Auswertung der Strömungsforschung. Z-VDI 91, 253—258 (1949).

²⁾ R a n d t L., The generation of vortices in fluids of small viscosity (15-я лекция, посвященная памяти Вильбура Райта, 1927). J. Roy. Aero. Soc. 31, 720—741 (1927). Немецкий текст: Die Entstehung von Wirbeln in einer Flüssigkeit mit kleiner Reibung. ZFM 18, 489—496 (1927).

исключительно только в институте Прандтля в Гётtingене. Лишь начиная примерно с 1930 г. в дальнейшую разработку теории пограничного слоя включились также другие исследователи, сначала главным образом в Англии и в Соединенных Штатах Америки. В настоящее время теорией пограничного слоя, ставшей, как уже было сказано, одной из основ современной механики жидкости и газа, занимаются во всем мире.

Первое сводное изложение теории пограничного слоя было дано в двух небольших статьях В. Толмина, помещенных в 1931 г. в энциклопедии «Handbuch der Experimentalphysik»¹⁾. Вскоре после этого, в 1935 г., Л. Прандтль опубликовал более подробную статью, вошедшую в состав энциклопедии «Handbuch der Aerodynamik», выпущенной под редакцией В. Ф. Дюрэнда. В последующие тридцать лет число работ, посвященных теории пограничного слоя, чрезвычайно возросло²⁾. Согласно обзору Х. Л. Драйдена, опубликованному в 1955 г.³⁾, в те годы ежегодно публиковалось около 100 работ, посвященных теории пограничного слоя. В настоящее время, т. е. десять лет спустя, это число возросло до 200 за год. В результате теория пограничного слоя, так же как и некоторые другие разделы механики жидкости и газа, развилаась столь сильно, что отдельный исследователь вряд ли в состоянии охватить все области этой теории. Поэтому в настоящее время изложение теории пограничного слоя в современной справочно-энциклопедической литературе с полным основанием распределяется между многими авторами

¹⁾ См. список литературы на стр. 697.

²⁾ Schlichting H., Some developments of boundary layer research in the past thirty years (3-я лекция, посвященная памяти Ланчестера, 1959). J. Roy. Aero. Soc. 64, 63—80 (1960). Немецкий текст: Entwicklung der Grenzschichttheorie in den letzten drei Jahrzehnten. ZFW 8, 93—111 (1960).

³⁾ Dryden H. L. Fifty years of boundary layer theory and experiments. Science 121, 375—380 (1955).

Часть первая

Основные законы течения вязкой жидкости

Глава I

Первоначальные сведения о течениях жидкости с трением

§ 1. Действительная и идеальная жидкости

В предыдущем столетии теоретические исследования движения жидкости проводились в большей части случаев на основе предположения, что жидкость является идеальной, т. е. не обладающей трением, и притом — несжимаемой. Только в настоящем столетии влияние трения и сжимаемости стали учитывать в большей мере. При движении жидкости без трения между отдельными ее соприкасающимися слоями возникают только нормальные силы (давления), касательные же силы (напряжения сдвига) отсутствуют. Это означает, что идеальная жидкость не оказывает изменению формы никакого внутреннего сопротивления. Теория движения идеальной жидкости математически очень широко разработана и во многих случаях дает вполне удовлетворительную картину действительных движений. Такими случаями являются, например, волновое движение или движение с образованием струй. В то же время теория идеальной жидкости совершенно бессильна для решения проблемы вычисления сопротивления тела, движущегося в жидкости. В этом случае она приводит к результату, что тело, равномерно движущееся в неограниченно распространенной жидкости, не испытывает никакого сопротивления (парадокс Даламбера).

Такой совершенно неприемлемый результат теории идеальной жидкости объясняется тем, что в действительных жидкостях между отдельными слоями внутри самой жидкости, а также между жидкостью и поверхностью обтекаемого тела действуют не только нормальные, но и касательные силы. Эти касательные силы, или, другими словами, силы трения действительных жидкостей, связаны с тем свойством жидкости, которое называется *вязкостью*.

В идеальной жидкости касательные силы отсутствуют, и поэтому на поверхности соприкосновения твердого тела с жидкостью в общем случае имеется разность касательных скоростей, т. е. происходит скольжение жидкости вдоль стенки. Напротив, в действительной жидкости на обтекаемую твердую стенку передаются касательные силы, и это приводит к тому, что жидкость прилипает к стенке.

Наличие касательных напряжений (напряжений сдвига) и *прилипание* жидкости к твердым стенкам существенно отличают действительную жидкость от идеальной. Некоторые жидкости, особенно важные в практическом отношении, например вода и воздух, обладают очень малой вязкостью. Течения таких *маловязких* жидкостей во многих случаях весьма хорошо совпадают с течениями идеальной жидкости, так как касательные силы

в них в общем и целом остаются очень малыми. Поэтому в теории идеальной жидкости вязкость совершенно не учитывают, поскольку это приводит к весьма существенному упрощению уравнений движения, позволяющему построить широкую математическую теорию. Необходимо, однако, особо подчеркнуть, что в жидкостях с очень малой вязкостью, в противоположность идеальной жидкости, прилипание к стенкам все же существует. В некоторых случаях это прилипание приводит к очень сильным отклонениям законов течения действительной жидкости от законов течения идеальной жидкости; в частности, физической причиной указанного выше несовпадения между законами сопротивления для действительной и идеальной жидкостей является именно прилипание действительной жидкости к стенкам.

В настоящей книге мы будем заниматься законами течения маловязких жидкостей, поскольку такие жидкости имеют наибольшее практическое значение; при этом мы увидим, каким путем можно объяснить, с одной стороны, далеко идущее совпадение, а с другой — резкое отклонение поведения идеальной жидкости от поведения действительной жидкости.

§ 2. Вязкость

Сущность вязкости жидкости можно проще всего уяснить путем следующего опыта. Рассмотрим течение между двумя очень длинными параллельными плоскими пластинами, из которых одна, например нижняя, неподвижна, в то время как другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью U (рис. 1.1).

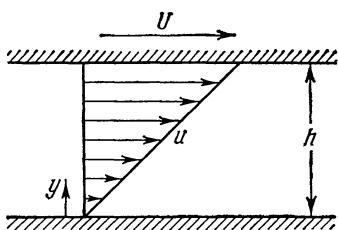


Рис. 1.1. Распределение скоростей в потоке вязкой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками (течение Куэтта).

Обозначим расстояние между пластинами через h и предположим, что давление во всем пространстве, занимаемом жидкостью, постоянно. Опыт показывает, что жидкость прилипает к обеим пластинам, следовательно, непосредственно около нижней пластины скорость жидкости равна нулю, а непосредственно около верхней пластины она совпадает со скоростью U верхней пластины. Далее, опыт показывает, что в пространстве между пластинами имеет место линейное распределение скоростей, т. е. скорость течения пропорциональна расстоянию y от нижней пластины и выражается формулой

$$u(y) = \frac{y}{h} U. \quad (1.1)$$

Для того чтобы существовало такое состояние движения, к жидкости со стороны верхней пластины должна быть приложена касательная сила в направлении движения, уравновешивающая силы трения жидкости. На основании результатов опыта эта сила (отнесенная к единице площади пластины) пропорциональна скорости U верхней пластины и обратно пропорциональна расстоянию h между пластинами. Следовательно, сила трения τ , отнесенная к единице площади, т. е. касательное напряжение, пропорциональна отношению U/h , вместо которого в общем случае можно взять отношение du/dy . Множитель пропорциональности между τ и du/dy , который мы обозначим через μ , зависит от природы жидкости. Он мал для так называемых маловязких жидкостей, например для воды и спирта, и, напротив, велик для очень вязких жидкостей, например для масла и глицерина. Таким образом, мы имеем элементарный закон трения жидкости в следующем виде:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.2)$$

Величина μ представляет собой физическую характеристику жидкости, сильно зависящую от температуры и называемую *динамическим коэффициентом вязкости* или просто *вязкостью* жидкости. Закон трения, выражаемый равенством (1.2), называют *законом трения Ньютона*. Равенство (1.2) можно рассматривать как определение коэффициента вязкости. Необходимо, однако, подчеркнуть, что рассмотренное нами движение представляет собой весьма простой частный случай. Течение, изображенное на рис. 1.1, называется также *движением чистого сдвига*. Обобщением закона трения Ньютона является закон трения Стокса (см. главу III).

Размерность коэффициента вязкости μ может быть сразу определена из равенства (1.2). Касательное напряжение τ имеет в технической системе единиц (килограмм-сила, метр, секунда)¹⁾ размерность KL^{-2} , а градиент скорости du/dy — размерность T^{-1} , где K есть символ силы, L — символ длины, а T — символ времени. Поэтому размерностью μ будет

$$[\mu] = \frac{[KT]}{L^2}.$$

Равенство (1.2) имеет внутреннее сходство с законом упругости твердого тела. Для такого тела на основании закона Гука касательное напряжение τ пропорционально величине деформации сдвига γ , т. е.

$$\tau = G\gamma, \quad (1.3)$$

где

$$\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

В этих равенствах G обозначает модуль сдвига, γ — изменение первоначально прямого угла и ξ — смещение в направлении оси x . Но, в то время как для упругого твердого тела касательное напряжение пропорционально величине деформации γ , для жидкостей оно, на основании опытов, пропорционально величине скорости деформации $d\xi/dt$. В самом деле, положив

$$\tau = \mu \frac{d\xi}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)$$

и имея в виду, что $\xi = ut$, мы получим опять соотношение

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Однако эта аналогия между жидкостью и твердым телом неполная, так как напряжение в жидкости зависит от одной постоянной, а именно от вязкости μ , в то время как в изотропном упругом теле оно зависит от двух постоянных.

Во всех течениях, в которых наряду с силами вязкости действуют также силы инерции, важную роль играет отношение вязкости μ к плотности ρ , называемое *кинематической вязкостью* и обозначаемое буквой v :

$$v = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.4)$$

Размерностью кинематической вязкости будет L^2/T .

Численные значения. Для капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но сильно уменьшается при повышении температуры.

¹⁾ В дальнейшем мы будем пользоваться, как правило, технической системой единиц с килограммом (kT) в качестве единицы силы. Однако в главе XII и последующих главах, а также в таблицах некоторые физические величины будут приводиться также в системе единиц килограмм-масса, метр, секунда с ньютоном (n) в качестве единицы силы. [В подлиннике единица силы в технической системе единиц называется, как это принято в немецкой литературе, не килограмм-силой, а килопондом (обозначение kp). — Прим. перев.]

Независимость μ от давления имеет место также для газов, но зато для последних μ увеличивается при повышении температуры. Кинематическая вязкость v для капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры почти в такой же степени, как и μ , так как плотность ρ очень слабо зависит от температуры. Напротив, для газов, для которых ρ при повышении температуры сильно уменьшается, кинематическая вязкость при увеличении температуры быстро повышается. В таблице 1.1 даны некоторые численные значения ρ , μ и v для воды и воздуха. Значения кинематической вязкости для некоторых других жидкостей указаны в таблице 1.2.

Таблица 1.1. Значения плотности, динамической вязкости и кинематической вязкости для воды и воздуха при разных температурах

Темпера- тура $^{\circ}\text{C}$	Вода			Воздух (при давлении 760 мм рт. ст.)						
	плотность ρ	вязкость $\mu \cdot 10^6$	кинематич. вязкость $v \cdot 10^6$	плотность ρ	вязкость $\mu \cdot 10^6$	кинематич. вязкость $v \cdot 10^6$				
	$\text{кг}/\text{м}^3$	$\text{кГсек}^2/\text{м}^4$	$\text{кг}/\text{сек}$	$\text{кГсек}^2/\text{м}^2$	$\text{кг}/\text{м}^3$	$\text{кГсек}^2/\text{м}^4$	$\text{кг}/\text{сек}$			
-20	—	—	—	—	1,39	0,142	15,6	1,59	11,3	
-10	—	—	—	—	1,34	0,137	16,2	1,65	12,1	
0	999,3	101,9	1795	183	1,80	1,29	0,132	16,8	1,71	13,0
10	999,3	101,9	1304	133	1,30	1,25	0,127	17,4	1,77	13,9
20	997,3	101,7	1010	103	1,01	1,21	0,123	17,9	1,83	14,9
40	991,5	101,1	655	66,8	0,664	1,12	0,114	19,1	1,95	17,0
60	982,6	100,2	474	43,3	0,482	1,06	0,108	20,3	2,07	19,2
80	971,8	99,1	357	36,4	0,368	0,99	0,101	21,5	2,19	21,7
100	959,1	97,8	283	28,9	0,296	0,94	0,096	22,9	2,33	24,5

Таблица 1.2. Значения кинематической вязкости для некоторых жидкостей

Жидкость	Темпера- тура $^{\circ}\text{C}$	Кинематич. вязкость $v \cdot 10^6$ $\text{м}^2/\text{сек}$	Жидкость	Темпера- тура $^{\circ}\text{C}$	Кинематич. вязкость $v \cdot 10^6$ $\text{м}^2/\text{сек}$
Глицерин . . .	20	680	Смазочное масло . . .	20	400
Ртуть	0	0,125	То же	40	100
"	100	0,091	" "	60	30

§ 3. Сжимаемость

Сжимаемостью называется способность жидкости или газа уменьшать свой объем под действием сил внешнего давления. Мерою сжимаемости является так называемый модуль объемной упругости E , определяемый посредством равенства

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (1.5)$$

где $\Delta V/V_0$ означает относительное изменение объема, вызванное повышением давления на величину Δp . Для капельных жидкостей сжимаемость

чрезвычайно мала. Так, например, для воды $E = 20\,000 \text{ кГ/см}^2$, т. е. повышение давления на одну атмосферу вызывает относительное изменение объема на $1/20\,000 = 0,05\%$. То же самое имеет место и для всех других капельных жидкостей. Таким образом, для капельных жидкостей сжимаемость столь мала, что в большей части случаев можно пренебречь, и поэтому течения капельных жидкостей могут рассматриваться как несжимаемые.

Для газов, если изменение объема остается сравнительно небольшим и происходит при постоянной температуре, модуль объемной упругости равен давлению p_0 в начальном состоянии, в чем легко убедиться из уравнения состояния газа¹⁾. Следовательно, для воздуха в нормальном состоянии, т. е. при давлении, равном одной атмосфере, и температуре 0°C

$$E = 1 \text{ кГ/см}^2.$$

Таким образом, сжимаемость воздуха в 20 000 раз больше сжимаемости воды. Аналогичное соотношение имеет место и для всех других газов.

Решение вопроса о том, следует ли при течениях газа учитывать сжимаемость, зависит от того, вызывают ли изменения давления, связанные с движением газа, заметное изменение объема газа или же такого изменения объема не происходит. Вместо изменения объема можно оценить изменение плотности $\Delta\rho$. На основании закона сохранения массы мы имеем

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \Delta\rho) = V_0\rho_0,$$

следовательно,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx -\frac{\Delta V}{V_0},$$

и поэтому равенство (1.5) можно переписать в виде

$$\Delta p = E \frac{\Delta\rho}{\rho_0}. \quad (1.5a)$$

Очевидно, что течение жидкости допустимо рассматривать как несжимаемое до тех пор, пока относительное изменение плотности остается весьма малым, т. е. до тех пор, пока

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1.$$

Из уравнения Бернуlli

$$p + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const},$$

где w есть скорость течения, видно, что изменение давления Δp , связанное с процессом течения, имеет величину такого же порядка, как и динамическое давление $q = \rho w^2/2$; поэтому из равенства (1.5a) следует, что

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx \frac{q}{E}. \quad (1.6)$$

Если требуется, чтобы

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1,$$

¹⁾ В самом деле, из уравнения состояния идеального газа следует, что при постоянной температуре изменение объема ΔV , вызванное изменением давления Δp , удовлетворяет соотношению

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = p_0 V_0,$$

откуда имеем

$$\Delta p \approx -p_0 \frac{\Delta V}{V_0}.$$

то это, на основании соотношения (1.6), равносильно требованию, чтобы

$$\frac{q}{E} \ll 1.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату: течения газа можно рассматривать с хорошим приближением как несжимаемые до тех пор, пока динамическое давление остается весьма малым по сравнению с модулем объемной упругости.

Этот результат можно сформулировать также несколько иначе, если ввести в рассмотрение скорость звука c . Согласно формуле Лапласа скорость звука определяется равенством

$$c^2 = \frac{E}{\rho_0};$$

поэтому, используя соотношение (1.6), условие $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ можно переписать в виде

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx \frac{\rho_0}{2} \frac{w^2}{E} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{w}{c} \right)^2 \ll 1.$$

Отношение скорости течения w к скорости звука c называют *числом Маха* и обозначают буквами Ma :

$$Ma = \frac{w}{c}. \quad (1.7)$$

Таким образом, течения газа можно рассматривать приближенно как несжимаемые, если

$$\frac{1}{2} Ma^2 \ll 1, \quad (1.8)$$

т. е. при условии, что число Маха остается малым по сравнению с единицей, или, другими словами, при условии, что скорость течения мала по сравнению со скоростью звука. Для воздуха, в котором звук распространяется со скоростью $c \approx 330$ м/сек, число Маха Ma при скорости течения $w = 100$ м/сек равно 0,3; следовательно, относительное изменение плотности будет

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} Ma^2 = 0,05.$$

Эту скорость течения можно рассматривать как наибольшую, при которой газы еще допустимо рассматривать приближенно как несжимаемую жидкость.

В первых одиннадцати главах мы будем предполагать, что текущая среда несжимаема, следовательно, выведенные результаты будут действительны только для малых чисел Маха. Однако в дальнейшем, в особенностях в главах XII, XIII и XXIII, мы будем рассматривать также сжимаемые жидкости.

§ 4. Течение Хагена — Пузейля в трубе

Элементарный закон трения для течения чистого сдвига, приведенный в § 2 настоящей главы, находит важное применение для расчета течения в прямой круглой трубе с постоянным по всей длине диаметром $D = 2R$. Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в середине же трубы она имеет наибольшее значение (рис. 1.2). В точках цилиндрических поверхностей с осями, совпадающими с осью трубы, скорость течения постоянна. Отдельные концентрические слои скользят один по другому, и притом так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого вида называется *ламинарным течением* (от латинского

слова «*lamina*» — слой). На достаточно большом расстоянии от входа в трубу распределение скоростей течения вдоль радиуса не зависит от координаты в продольном направлении.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное. Вследствие трения от одного цилиндрического слоя к другому передается касательное напряжение, пропорциональное градиенту скорости du/dy . Следовательно, движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением. Другие силы на жидкость не действуют, в частности, не действуют и силы инерции, так как для каждой жидкостной струйки скорость в продольном направлении постоянна. Для составления уравнения равновесия мысленно вырежем из жидкости, содержащейся в трубе, цилиндр длиною l , радиусом y и с осью, совпадающей с осью трубы (см. рис. 1.2).

В направлении оси x на вырезанный цилиндр действуют силы давления $p_1\pi y^2$ и $p_2\pi y^2$, приложенные к левому и правому основаниям цилиндра, и касательная сила $2\mu ly \cdot \tau$, действующая на боковую поверхность цилиндра. Приравняв разность сил давления $(p_1 - p_2)\pi y^2$ касательной силе, мы получим в качестве условия равновесия в направлении x уравнение.

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}. \quad (1.9)$$

Для рассматриваемого случая скорость u уменьшается с увеличением координаты y ; поэтому на основании элементарного закона трения (1.2) следует принять, что

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}.$$

Подставив это значение τ в уравнение (1.9), мы получим

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \frac{y}{2}$$

или, после интегрирования,

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{\mu l} \left(C - \frac{y^2}{4} \right).$$

Постоянную интегрирования C следует определить из условия прилипания жидкости к стенкам трубы, т. е. из условия, что $u(y) = 0$ при $y = R$. Отсюда $C = R^2/4$, следовательно,

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - y^2). \quad (1.10)$$

Таким образом, имеет место параболическое распределение скоростей по радиусу трубы (см. рис. 1.2). Наибольшее значение скорость имеет в середине трубы, где она равна

$$u_m = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2.$$

Полное количество Q жидкости, протекающей сквозь поперечное сечение трубы (расход жидкости), определяется совсем просто, так как объем

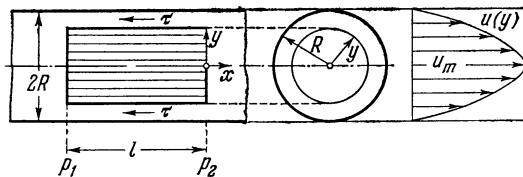


Рис. 1.2. Ламинарное течение в трубе.

параболоида вращения равен половине произведения площади основания параболоида на его высоту. Следовательно,

$$Q = \frac{\pi}{2} R^2 u_m = \frac{\pi R^4}{8\mu l} (p_1 - p_2), \quad (1.11)$$

т. е. расход Q пропорционален первой степени перепада давления $(p_1 - p_2)/l$ на единицу длины и четвертой степени радиуса трубы. Введем в рассмотрение среднюю скорость течения через поперечное сечение трубы, равную

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2}.$$

Тогда формулу (1.11) можно переписать также в виде

$$p_1 - p_2 = 8\mu \frac{l}{R^2} \bar{u}. \quad (1.12)$$

Закон, выражаемый формулой (1.11), впервые был выведен Г. Хагеном [5] и вскоре повторно был найден Ж. Пуазейлем [8]. Мы будем называть его *законом Хагена — Пуазеля ламинарного течения в трубе*.

Формулу (1.11) можно использовать для экспериментального определения коэффициента вязкости μ . Это производится следующим образом. Берется узкая труба (капилляр) определенного диаметра, и для заданной длины трубы определяется перепад давления и расход; имея эти числа, легко вычислить из формулы (1.11) величину μ .

Течение, описываемое формулами (1.10) и (1.11), в действительности может происходить только в трубах со сравнительно небольшим диаметром и при сравнительно небольших скоростях. При больших скоростях течения и большем диаметре трубы характер течения совершенно изменяется. А именно, в этом случае перепад давления уже не пропорционален первой степени средней скорости течения в соответствии с формулой (1.12), а приближенно пропорционален второй степени от \bar{u} . Кроме того, скорость течения распределяется по поперечному сечению значительно более равномерно и вместо упорядоченного слоистого течения происходит течение, в котором на продольную скорость налагаются беспорядочные поперечные составляющие, вызывающие сильное перемешивание жидкости в поперечном направлении. Такой формой течения, называемой *турбулентным течением*, мы подробно займемся ниже, в главе XX. Для турбулентных течений закон трения Ньютона, выражаемый формулой (1.2), перестает быть применимым.

§ 5. Законы подобия; число Рейнольдса и число Маха

Течение в трубе, рассмотренное в предыдущем параграфе, является особенно простым в том смысле, что в нем на каждую частицу жидкости действуют только силы трения и давления. Силы инерции всюду равны нулю. В трубе же с расширяющимся или суживающимся поперечным сечением на каждую частицу жидкости дополнительно действует сила инерции.

Остановимся сейчас на следующем фундаментальном вопросе: при каком условии течения каких-либо жидкостей около двух геометрически подобных тел при одинаковых направлениях натекания геометрически подобны друг другу, т. е. при каком условии геометрически подобны картины линий тока этих течений? Будем называть такие течения с геометрически подобными границами и геометрически подобными картинами линий тока *механически подобными течениями*. Для того чтобы течения различных жидкостей около двух геометрически подобных тел различных размеров (например, около двух шаров) и при различных скоростях были механически

подобны, должно, очевидно, удовлетворяться следующее условие: во всех подобно расположенных точках силы, действующие на элемент объема жидкости, должны находиться в одинаковом отношении одна к другой во все моменты времени.

Рассмотрим сейчас важный случай, когда имеются только силы трения и силы инерции. Упругие силы, возникающие вследствие изменения объема, не будем учитывать, т. е. будем предполагать, что жидкость несжимаема. Не будем учитывать также силы тяжести, следовательно, исключим из рассмотрения свободную поверхность жидкости (сила тяжести внутри жидкости уравновешивается гидростатической подъемной силой). При сделанных допущениях условие механического подобия будет соблюдаться только в том случае, если во всех подобно расположенных точках жидкости отношение силы инерции к силе трения будет одинаковым. Для движения, происходящего в основном в направлении оси x , сила инерции, отнесенная к единице объема, равна $\rho u \frac{du}{dx}$, где u есть скорость жидкости в направлении оси x , а D/Dt — субстанциальная производная. Для стационарного движения мы можем вместо $\rho u \frac{du}{dx}$ написать

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $\partial u/\partial x$ есть изменение скорости при переходе от одной точки к другой. Следовательно, сила инерции, отнесенная к единице объема, равна $\rho u \partial u/\partial x$. Выражение для силы трения легко составить на основании закона трения Ньютона (1.2). Для элемента объема с ребром dx , параллельным направлению движения, равнодействующая сил сдвига, как легко видеть из рис. 1.3, равна

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz.$$

Следовательно, сила трения, отнесенная к единице объема, равна $\partial \tau/\partial y$, или, на основании равенства (1.2), $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Итак, условие механического подобия, требующее одинаковости отношения силы инерции к силе трения во всех подобно расположенных точках, приводит к необходимости выполнения соотношения

$$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила трения}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \text{const.}$$

Теперь нам необходимо выяснить, как изменяются силы инерции и силы трения при изменении величин, определяющих рассматриваемое течение. Такими величинами являются плотность ρ , вязкость μ , некоторая характерная скорость, например скорость V потока, набегающего на тело, и некоторый характерный линейный размер тела, например диаметр d шара. Скорость u в какой-либо точке поля течения пропорциональна скорости V набегающего потока, градиент скорости $\partial u/\partial x$ пропорционален V/d , а величина $\partial^2 u/\partial y^2$ пропорциональна V/d^2 . Следовательно, отношение силы инерции к силе трения равно

$$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила трения}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\rho V^2}{d}}{\mu \frac{V}{d^2}} = \frac{\rho V d}{\mu}.$$

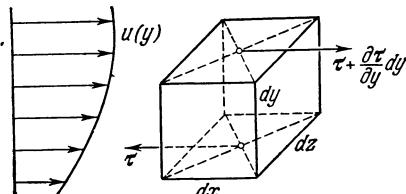


Рис. 1.3. Силы трения, приложенные к элементу объема.

Таким образом, механическое подобие течений будет соблюдаться, если для обоих течений величина $\rho V d / \mu$ будет иметь одинаковое значение. Эту величину, если использовать соотношение $\mu/\rho = v$, можно представить также в виде Vd/v . Будучи отношением двух сил, она представляет собой безразмерное число, которое называется *числом Рейнольдса* и обозначается через *Re*. Итак, оба течения механически подобны, если для них число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{v} \quad (1.13)$$

одинаково. Этот закон был открыт Осборном Рейнольдсом [10] при исследовании течений в трубах и называется по его имени *законом подобия Рейнольдса*.

В том, что число Рейнольдса безразмерно, можно сразу убедиться, если для отдельных величин, входящих в его состав, подставить их размерности, например, в технической системе единиц, а именно:

$$[\rho] = \frac{K T^2}{L^4}, \quad [V] = \frac{L}{T}, \quad [d] = L, \quad [\mu] = \frac{K T}{L^2}.$$

Тогда мы получим

$$\left[\frac{\rho V d}{\mu} \right] = \frac{K T^2}{L^4} \cdot \frac{L}{T} \cdot L \cdot \frac{L^2}{K T} = 1,$$

т. е. число Рейнольдса действительно имеет нулевую размерность.

Анализ размерностей. Для вывода закона подобия Рейнольдса можно воспользоваться вместо соображений о механическом подобии анализом размерностей. Такой анализ основан на принципе, что все физические законы всегда можно выразить в виде, не зависящем от выбранной системы единиц. В рассмотренном выше случае процесс течения определяется следующими физическими величинами: скоростью V набегающего потока, характерной длиной d тела, плотностью ρ жидкости и ее вязкостью μ . Сопоставим размерности перечисленных величин и поставим следующий вопрос: существует ли такая комбинация этих величин в виде произведения

$$V^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta,$$

которая имеет нулевую размерность? Обозначим силу символом K , длину — символом L и время — символом T . Тогда мы получим безразмерную комбинацию величин V , d , ρ и μ , если будет осуществляться соотношение

$$[V^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta] = K^0 L^0 T^0.$$

Без всякого ограничения общности мы можем принять одно из четырех чисел α , β , γ , δ равным единице, так как любая степень безразмерной величины также является безразмерным числом. Приняв $\alpha = 1$, мы получим

$$[V^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta] = \frac{L}{T} L^\beta \left(\frac{K T^2}{L^4} \right)^\gamma \left(\frac{K T}{L^2} \right)^\delta = K^0 L^0 T^0.$$

Приравняв показатели степеней при L , T , K слева и справа, мы будем иметь три уравнения:

$$K: \quad \gamma + \delta = 0,$$

$$L: \quad 1 + \beta - 4\gamma - 2\delta = 0,$$

$$T: \quad -1 + 2\gamma + \delta = 0,$$

решив которые найдем

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1.$$

Следовательно, единственной возможной безразмерной комбинацией величин V , d , ρ и μ является отношение

$$\frac{\rho V d}{\mu} = \text{Re.}$$

Таким образом, анализ размерностей также приводит к числу Рейнольдса.

Безразмерные коэффициенты. Только что выполненный анализ размерностей можно распространить на течения с геометрически подобными границами, но с различными числами Рейнольдса. Для этого необходимо учесть поле скоростей течения и силы (нормальные и касательные). Пусть положение точки в окрестности геометрически подобных тел определяется пространственными координатами x , y , z ; разделив эти координаты на характерный линейный размер тела, мы получим безразмерные координаты x/d , y/d , z/d . Составляющие u , v , w скорости можно сделать безразмерными, разделив их на скорость V набегающего потока; следовательно, безразмерными скоростями будут u/V , v/V , w/V . Далее, разделив нормальные и касательные напряжения p и τ на удвоенное динамическое давление ρV^2 , мы получим безразмерные напряжения $p/\rho V^2$ и $\tau/\rho V^2$. Сформулированный выше закон механического подобия можно теперь выразить также следующим образом: безразмерные величины u/V , v/V , w/V , $p/\rho V^2$ и $\tau/\rho V^2$ для двух геометрически подобных систем с одинаковыми числами Рейнольдса зависят только от безразмерных координат точки x/d , y/d , z/d . Если же обе системы подобны только геометрически, но не механически, следовательно, если для этих систем числа Рейнольдса неодинаковы, то указанные безразмерные величины зависят также от характерных для обеих систем величин V , d , ρ , μ . Однако из принципа о независимости физических законов от системы единиц следует, что безразмерные величины u/V , v/V , w/V , $p/\rho V^2$, $\tau/\rho V^2$ могут зависеть только от безразмерной комбинации величин V , d , ρ , μ . Но единственной безразмерной комбинацией этих четырех величин является число Рейнольдса $\text{Re} = Vd \rho / \mu$. Таким образом, мы пришли к следующему результату: для двух сравниваемых геометрически подобных систем с различными числами Рейнольдса безразмерные величины, определяющие поле течения, зависят только от безразмерных пространственных координат x/d , y/d , z/d и от числа Рейнольдса Re .

Анализ размерностей позволяет сделать важный вывод также относительно результирующей силы, действующей на обтекаемое тело со стороны жидкости. Эта сила возникает в результате сложения всех нормальных давлений и всех касательных сил, приложенных к поверхности тела. Пусть P есть составляющая результирующей силы в произвольном направлении. Для перехода к безразмерной силе следует разделить P на величину $d^2 \rho V^2$. Тогда мы будем иметь дело с отношением $P/d^2 \rho V^2$, называемым *безразмерным коэффициентом силы*. Вместо площади d^2 принято брать другую характерную для обтекаемого тела площадь F , например, лобовую площадь, т. е. площадь наибольшего поперечного сечения, перпендикулярного к направлению набегающего потока. Для шара эта площадь равна $\pi d^2/4$. Тогда безразмерным коэффициентом силы будет $P/F \rho V^2$. Для геометрически подобных систем этот безразмерный коэффициент силы, представляющий собой интеграл от $p/\rho V^2$ и $\tau/\rho V^2$, взятый по поверхности тела, может зависеть, на основании предыдущих рассуждений, только от безразмерной комбинации величин V , d , ρ и μ , следовательно, только от числа Рейнольдса. Составляющая W результирующей силы, параллельная направлению невозмущенного течения, называется *лобовым сопротивлением*; составляющая же A , перпендикулярная к указанному направлению, — *подъемной силой*. Следовательно, безразмерными коэффициентами подъемной силы и лобового сопротивления,

если вместо величины ρV^2 взять динамическое давление $\frac{\rho V^2}{2}$, будут

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V^2 F} \quad \text{и} \quad c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} V^2 F}. \quad (1.14)$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что для геометрически подобных систем, т. е. для геометрически подобных тел, одинаковым образом ориентированных относительно направления невозмущенного течения, безразмерные коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления зависят только от числа Рейнольдса Re , т. е.

$$c_A = f_1(Re), \quad c_W = f_2(Re). \quad (1.15)$$

Еще раз подчеркнем, что этот важный вывод из закона подобия Рейнольдса справедлив только до тех пор, пока выполняется предположение, на котором основан этот закон, а именно предположение, что процесс течения определяется только силами трения и силами инерции. Для сжимаемых жидкостей, в которых существенную роль играют силы упругости, а также для

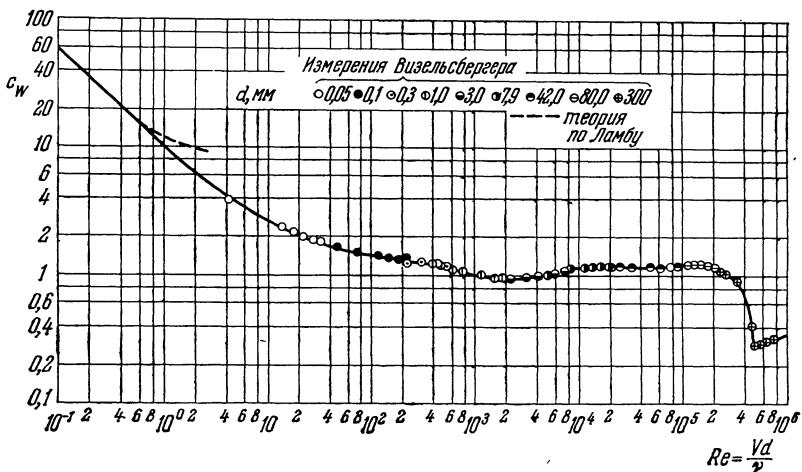


Рис. 1.4. Зависимость коэффициента сопротивления круглых цилиндров от числа Рейнольдса.

течений со свободной поверхностью, когда необходимо учитывать силу тяжести, формулы (1.15) неприменимы. Для таких случаев имеют место другие законы подобия, в которые входят безразмерное число Фруда $Fr = V/\sqrt{gd}$ (для течений, управляемых силами тяжести и инерции) и безразмерное число Маха $Ma = V/c$ (для сжимаемых течений).

Закон подобия Рейнольдса, выражаемый формулами (1.14) и (1.15), играет исключительно важную роль во всей теоретической и экспериментальной гидроаэромеханике. Во-первых, безразмерные коэффициенты c_A и c_W , а также число Рейнольдса Re не зависят от применяемой системы единиц. Во-вторых, определение функций $f_1(Re)$ и $f_2(Re)$ в большей части случаев теоретически невозможно, что делает неизбежным обращение к экспериментальному. Если бы мы не знали закона подобия Рейнольдса, то для экспериментального определения, например, коэффициента сопротивления c_W какого-нибудь тела, хотя бы шара, необходимо было бы выполнить измерения сопротивления для четырех независимых параметров V , d , ρ , μ . Такие измерения потребовали бы чрезвычайно большой затраты времени. Однако, поскольку существует закон подобия Рейнольдса, необходимость в обширных измерениях отпадает. В самом деле, на основании этого закона безразмерный коэффициент сопротивления для шаров различных диаметров d

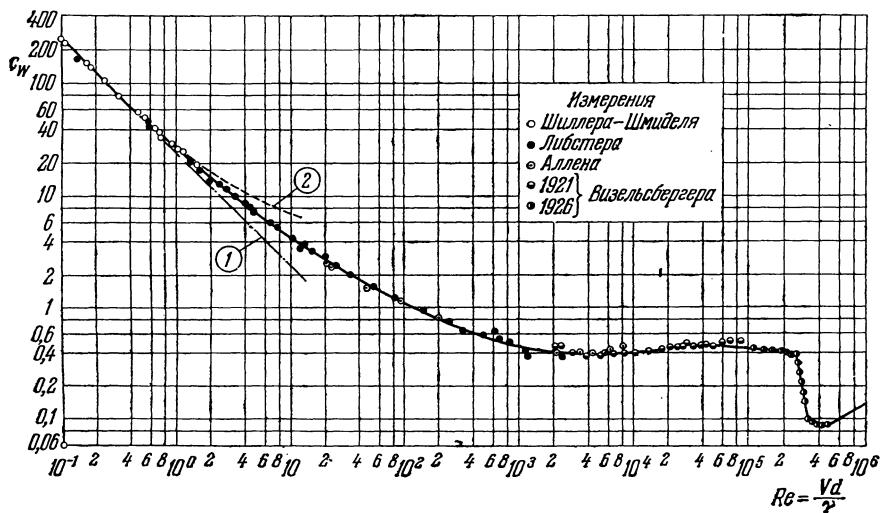


Рис. 1.5. Зависимость коэффициента сопротивления шаров от числа Рейнольдса. Кривая (1) — по теории Стокса [см. формулу (6.10)]; кривая (2) — по теории Озенса [см. формулу (6.13)].

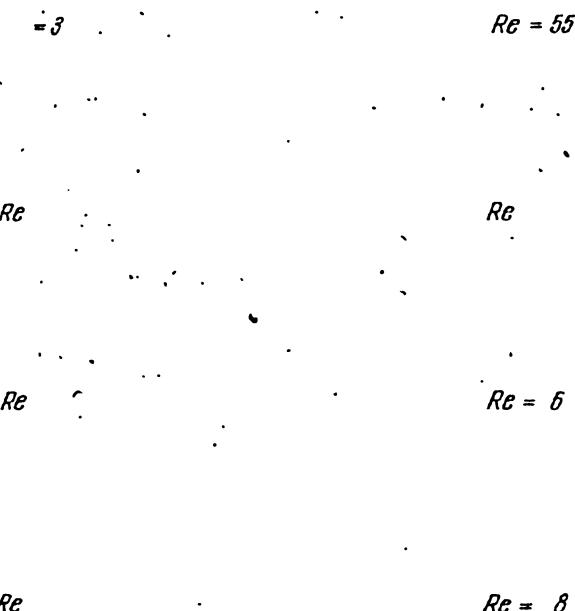


Рис. 1.6. Течение масла около круглого цилиндра при различных числах Рейнольдса. Переход от ламинарного течения к вихревой дорожке. По Хоману [6].

при различных скоростях V набегающего потока и в жидкостях с различными ρ и μ зависит только от переменной Re , а потому измерение сопротивления достаточно выполнить только для различных значений Re .

Насколько хорошо закон подобия Рейнольдса подтверждается опытами, показывает рис. 1.4, на котором изображена зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Рейнольдса. Мы видим, что все измеренные значения коэффициента сопротивления для круглых цилиндров с весьма различными диаметрами располагаются очень хорошо на одной кривой. То же самое имеет место и для коэффициента сопротивления шаров (рис. 1.5). Кривые, изображенные на рис. 1.4 и 1.5, показывают, что при числе Рейнольдса, равном около $3 \cdot 10^5$ для шара и около $5 \cdot 10^5$ для круглого цилиндра, происходит внезапное сильное уменьшение коэффициента сопротивления. К этому обстоятельству мы вернемся ниже. Наглядное представление о том, как изменяется поле течения около круглого цилиндра при увеличении числа Рейнольдса, дает рис. 1.6, на котором изображена серия фотографий, полученных Хоманом [6].

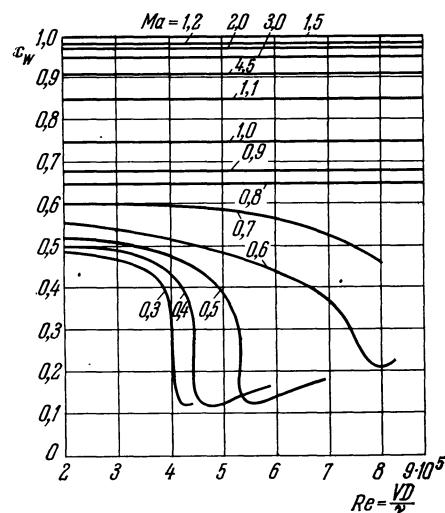


Рис. 1.7. Зависимость коэффициента сопротивления шаров от чисел Рейнольдса и Маха. По измерениям Наумана [1], [8].

В опытах Хомана движущейся жидкостью служило масло. Мы видим, что при небольших числах Рейнольдса течение позади цилиндра ламинарное; при более высоких числах Рейнольдса за цилиндром образуются очень правильно расположенные вихри, совокупность которых называется *вихревой дорожкой Кармана*. При еще больших числах Рейнольдса (для них фотографии не приведены) вихревые дорожки становятся нерегулярными и течение приобретает турбулентный характер.

Влияние сжимаемости. Изложенные выше соображения о подобии относились к несжимаемой жидкости. В этом случае безразмерные коэффициенты зависят только от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса. В случае сжимаемой среды имеет место зависимость еще от одной безразмерной величины, а именно от числа Маха $Ma = V/c$, которое, согласно сказанному в § 3 настоящей главы, можно рассматривать как меру сжимаемости текущей среды. Для таких течений, при которых сжимаемость играет существенную роль, безразмерные коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления зависят от обеих величин Re и Ma и вместо зависимостей (1.15) имеют место следующие:

$$c_A = f_1(Re, Ma), \quad c_w = f_2(Re, Ma). \quad (1.16)$$

В качестве примера на рис. 1.7 изображена зависимость коэффициента сопротивления c_w шаров от числа Рейнольдса $Re = VD/v$ и числа Маха $Ma = V/c$. Кривая для $Ma = 0,3$ приближенно совпадает с аналогичной кривой для несжимаемого течения (см. рис. 1.5). Это означает, что при $Ma \leq 0,3$ сжимаемость не оказывает существенного влияния на сопротивление. Однако при более высоких числах Маха это влияние становится весьма заметным. При этом обнаруживается примечательное обстоятельство: в исследованной области чисел Рейнольдса при возрастании числа Маха влияние числа Рейнольдса на сопротивление все более и более отступает на задний план по сравнению с влиянием числа Маха.

§ 6. Сравнение выводов теории идеальной жидкости с результатами измерений

Для большей части технически важных случаев течения воды и воздуха число Рейнольдса весьма велико, так как вязкость воды и воздуха очень мала. Поэтому на первый взгляд можно было бы предполагать, что получится вполне приемлемое совпадение с опытом, если воспользоваться теорией, полностью пренебрегающей вязкостью, т. е. теорией идеальной жидкости. Во всяком случае, для сравнения результатов, доставляемых теорией, с результатами опыта целесообразнее всего начать с рассмотрения теории идеальной жидкости, поскольку она уже давно позволила получить большое число математических решений.

Для некоторых классов задач, например для волновых движений, а также для движений при приливах и отливах, теория идеальной жидкости действительно приводит к довольно хорошим результатам¹⁾. Однако мы будем рассматривать главным образом задачи, связанные с движением твердого тела в покоящейся жидкости или с течением жидкости в трубах и каналах. При решении таких задач теория идеальной жидкости находиточень ограниченное применение, так как она основана на предположении о возможности скольжения жидкости вдоль стенок, между тем как во всех действительных жидкостях происходит прилипание жидкости к стенкам. Вследствие этого решения, получаемые на основе теории идеальной жидкости, не могут удовлетворять условию прилипания на твердых стенках и в корне отличаются от решений, получаемых на основе теории вязкой жидкости, даже при условии очень малой вязкости. Тем не менее в некоторых случаях, например для тонкого удобообтекаемого тела, теория идеальной жидкости приводит к решениям, довольно хорошо совпадающим с действительностью. Наибольшее расхождение между теорией идеальной жидкости и действительностью получается при решении проблемы сопротивления. А именно, согласно теории идеальной жидкости, при равномерном движении любого твердого тела в неограниченно распространенной жидкости результирующая сила в направлении движения отсутствует, т. е. лобовое сопротивление равно нулю (*парадокс Даламбера*). Этот вывод резко противоречит наблюдениям, которые показывают, что любое тело при своем движении в жидкости встречает сопротивление (правда, для тонких тел, обтекаемых в продольном направлении, сопротивление может быть довольно малым).

Для пояснения приведем некоторые сведения об обтекании круглого цилиндра. Картина линий тока, получающаяся при таком обтекании в случае идеальной жидкости, изображена на рис. 1.8. Из симметрии линий тока сразу следует, что результирующая сила в направлении течения (сопротивление) равна нулю. На рис. 1.9 показаны три кривые распределения давления вдоль окружности цилиндра. Штрих-пунктирная кривая построена на основе теории идеальной жидкости, две другие получены путем эксперимента. Одна из экспериментальных кривых получена для числа Рейнольдса, соответствующего области больших (докритических) значений коэффициента сопротивления, другая — для числа Рейнольдса, соответствующего области малых (сверхкритических) значений коэффициента сопротивления (см. рис. 1.4).

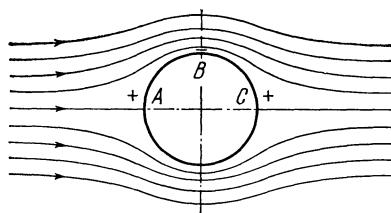


Рис. 1.8. Картина линий тока около круглого цилиндра в идеальной жидкости.

¹⁾ См., например, Lamb H., Hydrodynamics, изд. 6, New York 1945. [Имеется русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Москва 1947.— Прим. перев.]

Прежде всего, мы видим, что обе экспериментальные кривые в целом сильно отличаются одна от другой. Далее, мы видим, что на передней стороне цилиндра измеренные распределения давления более или менее совпадают с теоретическим распределением для идеальной жидкости, но на задней стороне цилиндра отклонение теоретических значений от измеренных весьма

велико (в соответствии с большим сопротивлением круглого цилиндра). В целом результаты измерений при большем числе Рейнольдса ближе к теоретической кривой, чем результаты измерений при меньшем числе Рейнольдса. На сильной зависимости распределения давления от числа Рейнольдса мы подробно остановимся в следующей главе.

Такие же кривые распределения давления — одна теоретическая и две экспериментальные — показаны на

Рис. 1.9. Распределение давления на поверхности круглого цилиндра при докритическом и сверхкритическом числах Рейнольдса ($q_\infty = \rho V^2/2$ — динамическое давление и набегающего потока). По измерениям Флаксбарта [1].

рис. 1.10 для меридианного сечения шара. И в этом случае результаты измерения получаются весьма различными для чисел Рейнольдса, соответствующих докритическим и сверхкритическим значениям коэффициента сопротивления (ср. с рис. 1.5). Но теперь измеренная кривая распределения давления,

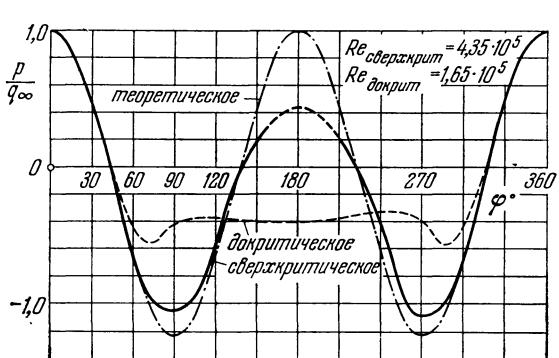


Рис. 1.9. Распределение давления на поверхности круглого цилиндра при докритическом и сверхкритическом числах Рейнольдса ($q_\infty = \rho V^2/2$ — динамическое давление и набегающего потока). По измерениям Флаксбарта [1].

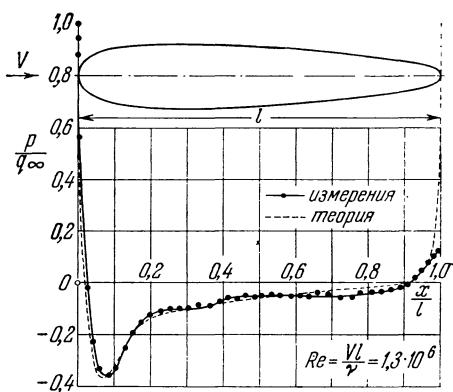


Рис. 1.11. Распределение давления на поверхности удобообтекаемого тела вращения; сравнение теории и измерений. По Фурману [4].

соответствующая сверхкритическим значениям коэффициента сопротивления, на большей части своего протяжения проходит совсем близко от теоретической кривой, полученной в предположении, что трение отсутствует.

Значительное лучшее совпадение теоретического и измеренного распределений давления получается для удобообтекаемого тела вращения (рис. 1.11) при условии, что направление набегающего течения совпадает с направлением оси вращения тела [4]. В этом случае результаты теории идеальной жидкости мало отличаются от результатов измерения почти по всей длине тела, за исключением только небольшой области около его кормовой части. Ниже мы увидим, что в данном случае хорошее совпадение теории идеаль-

ной жидкости с действительностью связано с тем, что давление по мере приближения к кормовой части тела повышается, очень медленно.

Теория идеальной жидкости, будучи, как правило, непригодной для определения лобового сопротивления, тем не менее позволяет в общем случае довольно хорошо определять подъемную силу. На рис. 1.12 изображена полученная А. Бетцем [1] экспериментальная кривая, показывающая, как изменяется подъемная сила профиля Жуковского с бесконечным размахом

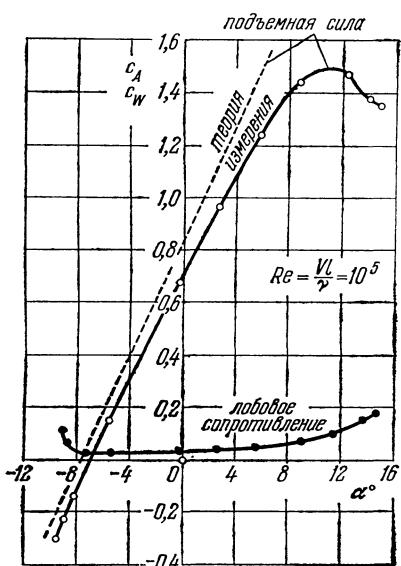


Рис. 1.12. Подъемная сила и лобовое сопротивление профиля Жуковского при плоском течении. По Бетцу [1].

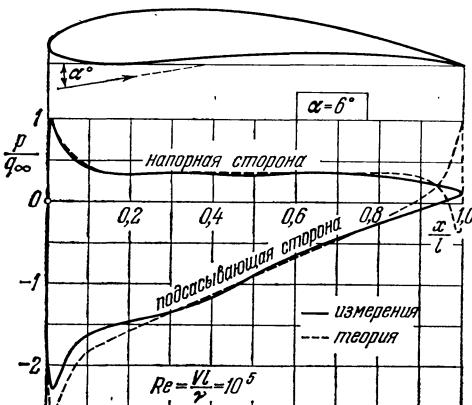


Рис. 1.13. Теоретическое и измеренное распределение давления для профиля Жуковского при одной и той же подъемной силе. По Бетцу [1].

при изменении угла атаки. Для сравнения на том же рисунке показана теоретическая кривая подъемной силы. Мы видим, что в области углов атаки от $\alpha = -10^\circ$ до $\alpha = +10^\circ$ совпадение хорошее; небольшое отклонение измеренной кривой от теоретической объясняется влиянием трения. Для профиля Жуковского хорошо совпадают также теоретическое и измеренное распределения давления (рис. 1.13).

Литература к главе I

1. B e t z A., Untersuchung einer Joukowskyschen Tragfläche. ZFM 6, 173—179 (1915).
2. F l a c h s b a r t O., Neuere Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. Phys. Z. 28, 461—469 (1927).
3. F l a c h s b a r t O., Winddruck auf Gasbehälter. Ergebnisse AVA, IV. Lieferung, 134—138 (1932).
4. F u h r m a n n G., Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Диссертация, Göttingen 1910—Jb. d. Motorluftschiff-Studienges. 1911/12, 63.
5. H a g e n G., Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. Pogg. Ann. 46, 423—442 (1839).
6. H o m a n n F., Einfluss grosser Zähigkeit bei Strömung um Zylinder. Forschg. Ing.-Wes. 7, 1—10 (1936).
7. N a u m a n n A., Luftwiderstand von Kugeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten. Allgem. Wärmetechnik 4, 217—221 (1953).
8. N a u m a n n A., P f e i f e r H., Über die Grenzschichtströmung am Zylinder bei hohen Geschwindigkeiten. Advances in Aeronautical Sciences (под ред. Th. v. Kármán'a), т. 3, 185—206, London 1962.
9. P o i s e u i l l e J., Recherches expérimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. Comptes Rendus 11, 961—967 и 1041—1048 (1840); 12, 112—115 (1841); подробнее в Mémoires des Savants Etrangers 9 (1846).
10. R e y n o l d s O., An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. Roy. Soc. 174, 935—982 (1883).

Г л а в а II

Первоначальные сведения из теории пограничного слоя

§ 1. Понятие пограничного слоя

В конце предыдущей главы мы рассмотрели течение около удобообтекаемого тела вращения и течение около профиля крыла и увидели, что для них теория идеальной жидкости дает почти такое же распределение давления вдоль поверхности, как и измерения (рис. 1.11 и 1.13). В такого рода течениях влияние вязкости при очень больших числах Рейнольдса проявляется только в очень тонком слое, находящемся в непосредственной близости от твердых стенок. Если бы в действительных жидкостях не происходило прилипания к стенкам, то для рассмотренных течений картина

линий тока была бы почти одинаковой как при наличии, так и при отсутствии вязкости. Однако в действительных жидкостях всегда имеет место прилипание к стенкам, и это прилипание значительно изменяет картину линий тока, так как оно вызывает, вследствие трения, торможение прилегающего к стенкам тонкого слоя жидкости. В этом тонком слое скорость течения возрастает от нуля на стенке (прилипание) до своего полного значения во внешнем потоке, в котором жидкость можно рассматривать текущей без

Рис. 2.1. Течение вдоль тонкой плоской пластины; число Рейнольдса $Re = Vl/v = 3$ (l — длина пластины). По Прандтлю — Титтенсу [16].

трения. Указанный тонкий слой называют, следуя Л. Прандтлю [14], *пограничным слоем или слоем трения*.

На рис. 2.1 изображена фотография течения, возникающего около тонкой плоской пластины при ее протаскивании через воду. Линии тока сделаны видимыми посредством обсыпания поверхности воды порошком алюминия. Длина черточек, в виде которых изобразились на фотографии частицы алюминия, пропорциональна скорости течения. Мы видим, что в непосредственной близости от обеих сторон пластины имеется тонкий пограничный слой жидкости, в котором скорость значительно меньше, чем на большом расстоянии от пластины. Толщина этого слоя трения увеличивается вдоль пластины по направлению к ее задней кромке. На рис. 2.2 схематически показано распределение скоростей в этом пограничном слое на пластине, причем для наглядности масштаб длины в поперечном направлении сильно увеличен. Около передней кромки пластины в плоскости, к ней

перпендикулярной, распределение скоростей течения постоянное. Толщина заторможенного вследствие трения слоя, которую мы будем обозначать через δ , постепенно возрастает по мере удаления от передней кромки пластины, так как количество заторможенной жидкости увеличивается по мере приближения к задней кромке пластины. Очевидно, что пограничный слой тем тоньше, чем меньше коэффициент вязкости. Что касается касательного напряжения $\tau = \mu du/dy$, возникающего вследствие трения, то внутри пограничного слоя оно получается весьма большим даже при очень малой

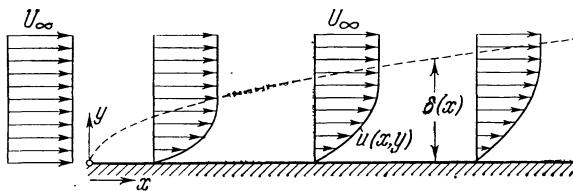


Рис. 2.2. Схематическое изображение пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

вязкости (большое число Рейнольдса), так как градиент скорости в направлении, перпендикулярном к плоскости пластины, весьма велик. В то же время вне пограничного слоя касательное напряжение очень мало. Это обстоятельство позволяет для теоретического исследования течений жидкостей с малой вязкостью разбить все поле течения на две области: на область тонкого пограничного слоя вблизи стенки, в которой следует учитывать силы трения, и на область вне пограничного слоя, в которой силами трения, вследствие их малости, можно пренебречь и поэтому с большой степенью точности применять здесь закономерности теории идеальной жидкости. Такое подразделение поля течения на две области, как мы увидим ниже, значительно упрощает теоретическое исследование течений жидкостей с малой вязкостью. Вообще только идея Прандтля о пограничном слое и сделала доступным для теоретического изучения такого рода течения.

Изложению математической теории пограничного слоя, являющемуся целью настоящей книги, мы посвятим следующие главы. В этой же главе мы коротко остановимся лишь на основных понятиях теории пограничного слоя, причем разъясним их только с чисто физической точки зрения без применения математических методов.

Жидкость, заторможенная в пограничном слое, не во всех случаях прилегает ко всей обтекаемой стенке тела в виде тонкого слоя. Бывают случаи, когда пограничный слой сильно утолщается вниз по течению и при этом в нем возникает возвратное течение. Это влечет за собой вынос жидкости, заторможенной в пограничном слое, во внешнее течение, вследствие чего последнее оттесняется от тела. В таких случаях говорят, что *пограничный слой отрывается* от тела. Отрыв пограничного слоя всегда связан с сильным образованием вихрей и с большой потерей энергии на кормовой части обтекаемого тела. Эти явления наблюдаются в первую очередь у плохо обтекаемых тел, например у круглого цилиндра и шара. В результате за кормовой частью таких тел образуется область сильно замедленного течения (так называемая *застойная область*), в которой распределение давления сильно отличается от распределения давления, соответствующего течению без трения (это ясно видно из рис. 1.9 и 1.10, изображающих распределение давления для круглого цилиндра и шара). Именно это измененное, по сравнению со случаем идеальной жидкости, распределение давления, связанное с отрывом пограничного слоя, и является причиной большого сопротивления плохо обтекаемых тел.

Оценка толщины пограничного слоя. Толщину пограничного слоя для случая безотрывного обтекания можно приблизенно определить следующим образом. Вне пограничного слоя вследствие малой вязкости можно пренебречь силами трения по сравнению с силами инерции. Однако внутри пограничного слоя порядок величины этих сил одинаков. Сила инерции, отнесенная к единице объема, равна, как это было разъяснено в § 5 главы I, $\rho u \partial u / \partial x$. Для пластины длиной l величина $\partial u / \partial x$ пропорциональна U/l , где U есть скорость внешнего течения. Следовательно, сила инерции имеет величину порядка $\rho U^2 / l$. С другой стороны, сила трения, отнесенная к единице объема, равна $\mu \partial^2 u / \partial y^2$; последняя величина при условии, что течение ламинарное, равна $\mu \partial^2 u / \partial y^2$. Градиент скорости в направлении, перпендикулярном к стенке, т. е. производная $\partial u / \partial y$, имеет величину порядка U/δ ; поэтому сила трения, отнесенная к единице объема, пропорциональна $\mu U / \delta^2$. Приравняв силу трения силе инерции, мы получим соотношение

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{\rho U^2}{l},$$

решив которое относительно толщины пограничного слоя δ , найдем¹⁾

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho U}} = \sqrt{\frac{v l}{U}}. \quad (2.1)$$

В этом соотношении остается пока неопределенным численный множитель в правой части, переводящий пропорциональность в равенство. Ниже, в главе VII, мы увидим, что на основании точного решения Г. Блазиуса^[1] этот множитель равен приближенно 5, следовательно, для ламинарного течения толщина пограничного слоя равна

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{v l}{U}}. \quad (2.1a)$$

Если мы разделим δ на длину пластины, то получим безразмерную толщину пограничного слоя:

$$\frac{\delta}{l} = 5 \sqrt{\frac{v}{U l}} = \frac{5}{\sqrt{Re}}, \quad (2.2)$$

где

$$Re_l = \frac{U l}{v}$$

есть число Рейнольдса, составленное для длины пластины. Из соотношения (2.1) следует, что толщина пограничного слоя пропорциональна и \sqrt{v} , и \sqrt{l} . Заменим длину l переменным расстоянием x от переднего края пластины; тогда мы увидим, что толщина пограничного слоя δ возрастает пропорционально \sqrt{x} . С другой стороны, из равенства (2.2) мы видим, что относительная толщина пограничного слоя δ/l уменьшается при увеличении числа Re пропорционально $1/\sqrt{Re}$, следовательно, при переходе к жидкости, лишенной трения, т. е. при переходе к $Re \rightarrow \infty$, пограничный слой исчезает.

Нетрудно найти оценку и для касательного напряжения τ_0 на стенке, а вместе с ним — и для полного сопротивления трения. В самом деле, на

¹⁾ О более точном определении толщины пограничного слоя см. в конце настоящего параграфа.

на основании закона трения Ньютона (1.2) мы имеем

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0,$$

где индекс 0 отмечает, что берется значение на стенке, на которой $y = 0$. На основании сказанного выше

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \sim \frac{U}{\delta},$$

поэтому

$$\tau_0 \sim \frac{\mu U}{\delta};$$

подставив сюда вместо δ его значение (2.1), мы получим

$$\tau_0 \sim \mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu l}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{l}}. \quad (2.3)$$

Следовательно, касательное напряжение на стенке, возникающее вследствие трения, пропорционально скорости набегающего потока U в степени $3/2$. Разделив, как и в главе I, напряжение τ_0 на ρU^2 , мы получим безразмерное касательное напряжение на стенке:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}}. \quad (2.3a)$$

Этот результат полностью соответствует выводу из анализа размерностей, который был сделан в главе I и согласно которому безразмерное касательное напряжение зависит только от числа Рейнольдса.

Полное сопротивление трения W пластины, очевидно, равно

$$W = bl\tau_0,$$

где b есть ширина пластины. Подставив вместо τ_0 его значение (2.3), мы получим

$$W \sim b \sqrt{\rho \mu U^3 l}. \quad (2.4)$$

Таким образом, сопротивление трения при ламинарном течении пропорционально $U^{3/2}$ и $l^{1/2}$. Пропорциональность сопротивления величине $l^{1/2}$, а не l легко понять; в самом деле, если мы удвоим длину пластины, то это отнюдь не повлечет за собой удвоения сопротивления, так как толщина пограничного слоя на задней половине пластины (удлиненной в два раза) больше, чем на передней половине, вследствие чего сопротивление трения для задней половины пластины меньше, чем для передней половины.

Наконец, воспользовавшись формулой (1.14), составим безразмерный коэффициент сопротивления, причем вместо площади F возьмем смоченную жидкостью площадь bl одной стороны пластины; тогда из соотношения (2.4) мы получим

$$c_w \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}},$$

Численный множитель, переводящий пропорциональность в равенство, согласно точному решению Г. Блазиуса [1], равен 1,328; следовательно, закон сопротивления для пластины, обтекаемой в продольном направлении, выражается при ламинарном течении формулой

$$c_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}}. \quad (2.5)$$

Поясним найденные оценки численным примером. Как показывают наблюдения, течение вдоль пластины остается ламинарным до тех пор, пока число Рейнольдса Ul/v не превышает значения, равного приблизительно от $5 \cdot 10^5$ до 10^6 . При больших числах Рейнольдса пограничный слой становится турбулентным. Вычислим толщину пограничного слоя на конце пластины длиной $l = 1$ м, обтекаемой воздухом ($v = 0,15 \cdot 10^{-4}$ м²/сек) со скоростью $U = 15$ м/сек. Заданным числам соответствует число Рейнольдса

$$Re_l = \frac{Ul}{v} = 10^6;$$

следовательно, мы можем применить формулу (2.2), согласно которой

$$\frac{\delta}{l} = \frac{5}{10^3} = 0,005,$$

откуда

$$\delta = 5 \text{ м.м.}$$

Коэффициент сопротивления, определяемый формулой (2.5), в рассматриваемом случае равен

$$c_w = 0,0013,$$

т. е. по сравнению с коэффициентом сопротивления круглого цилиндра (см. рис. 1.4) чрезвычайно мал.

Определение толщины пограничного слоя. Так как переход скорости пограничного слоя в скорость внешнего течения совершается асимптотически, то определение толщины пограничного слоя в известной степени произвольно. Однако для практических целей эта произвольность не играет роли, так как скорость пограничного слоя достигает скорости внешнего течения уже на весьма малом расстоянии от стенки. Поэтому за толщину пограничного слоя можно принять, например, такое расстояние от стенки, на котором скорость течения отличается на 1% от скорости внешнего течения. Именно при таком определении толщины пограничного слоя в формуле (2.2) получается численный множитель 5. Вместо толщины пограничного слоя часто используется так называемая *толщина вытеснения* δ_1 (рис. 2.3).

Рис. 2.3. Толщина вытеснения δ_1 пограничного слоя.

Эта толщина определяется посредством соотношения

$$U\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U - u) dy. \quad (2.6)$$

Толщина вытеснения есть не что иное, как расстояние, на которое отодвигаются от тела линии тока внешнего течения вследствие образования пограничного слоя (вытесняющее действие пограничного слоя). Для пластины, обтекаемой вдоль своей плоскости, толщина вытеснения δ_1 равна приблизительно 1/3 от толщины пограничного слоя δ , определяемой формулой (2.1а).

§ 2. Отрыв пограничного слоя и образование вихрей

Пограничный слой, возникающий при обтекании плоской пластины в продольном направлении, имеет особенно простую структуру потому, что при таком обтекании статическое давление во всем поле течения остается постоянным. В самом деле, во внешнем течении, которое можно считать происходящим без трения, скорость имеет постоянное значение, и поэтому здесь, на основании уравнения Бернулли, постоянно и давление. Далее,

не происходит заметного изменения давления также по толщине пограничного слоя в любом его сечении, перпендикулярном к направлению набегающего потока. Следовательно, внутри пограничного слоя в каждом его сечении давление такое же, как и во внешнем течении в том же сечении. Это равенство давлений внутри пограничного слоя и во внешнем течении в одном и том же сечении существует и в том случае, когда контур обтекаемого тела имеет произвольную криволинейную форму и, следовательно, давление во внешнем течении изменяется вдоль стенки. Таким образом, в любом случае давление внешнего течения передается без изменения внутрь пограничного слоя. В случае продольного обтекания плоской пластины давление во внешнем течении постоянное и поэтому оно постоянное и во всем пограничном слое.

С характером распределения давления в пограничном слое тесно связано упомянутое выше явление отрыва пограничного слоя от стенки. Однако пограничный слой, образующийся при продольном обтекании плоской пластины, не отрывается от нее, так как в таком пограничном слое не возникает возвратного течения.

Для того чтобы пояснить важное явление отрыва пограничного слоя, рассмотрим течение около тела с тупой кормовой частью, например около круглого цилиндра (рис. 2.4). При течении, происходящем без трения, жидкость на передней половине цилиндра, между точками D и E , движется ускоренно, причем давление по мере приближения к точке E понижается; на задней же половине цилиндра, между точками E и F , происходит замедление движения, следовательно, давление по мере приближения к точке F повышается. В первый момент после возникновения течения, когда пограничный слой еще очень тонок, жидкость движется действитель но почти без трения. Для частицы жидкости, находящейся во внешнем потоке, на пути от D к E происходит преобразование энергии давления в кинетическую энергию, а на пути от E к F — обратное преобразование кинетической энергии в энергию давления, и притом так, что в точку F частица приходит с той же скоростью, какую она имела в точке D . Иначе ведет себя частица жидкости, движущаяся внутри пограничного слоя в непосредственной близости от поверхности цилиндра. Хотя поле давления здесь, согласно сказанному выше, такое же, как и во внешнем течении, но зато здесь действуют значительные силы трения. Это приводит к тому, что на пути от D к E часть кинетической энергии частицы жидкости теряется, и оставшейся кинетической энергии уже недостаточно, чтобы преодолеть повышение давления на пути от E к F . Следовательно, внутри пограничного слоя частица жидкости не может далеко прорваться в область возрастающего давления между точками E и F и где-то, не доходя до точки F , останавливается, а затем под воздействием распределения давления внешнего течения начинает двигаться назад.

На рис. 2.5 изображены последовательные фотографии обтекания кормовой части закругленного тела с момента начала движения. Давление вдоль контура тела возрастает слева направо. При фотографировании течение было сделано видимым посредством алюминиевых блесток, насыпанных

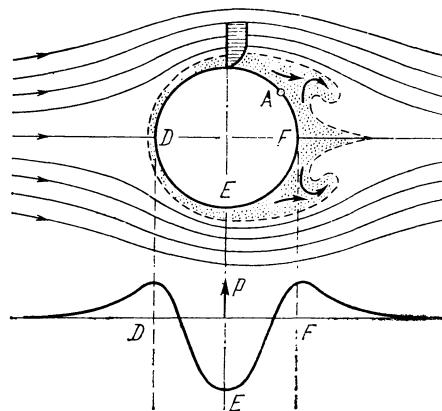
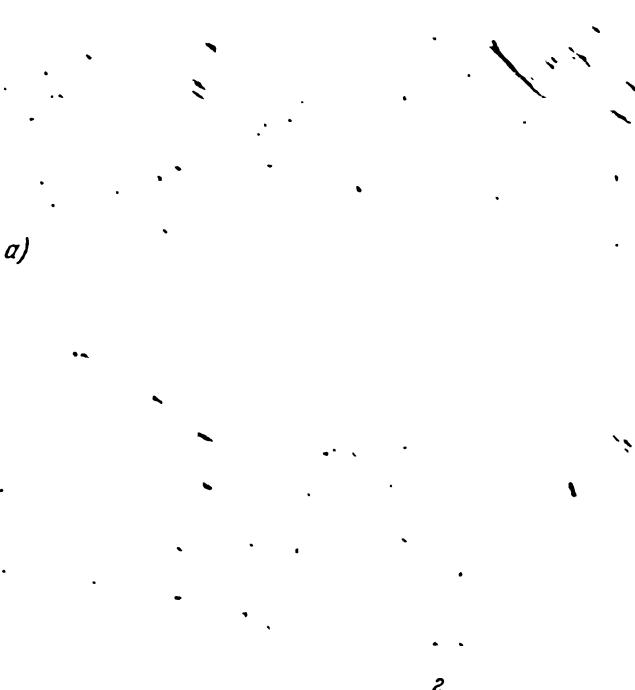


Рис. 2.4. Схематическое изображение отрыва пограничного слоя и образования вихрей при обтекании круглого цилиндра; A — точка отрыва.

на поверхность воды. Пограничный слой четко виден на всех фотографиях; в нем, вследствие меньшей скорости течения, алюминиевые блестки оставили при экспозиции значительно более короткие черточки, чем во внешнем течении. На рис. 2.5, *a*, изображающем течение вскоре после его возникновения, возвратное течение только что началось около самой задней кромки тела. На рис. 2.5, *b* возвратное течение продвинулось довольно далеко вперед



2

Рис. 2.5. Развитие во времени отрыва пограничного слоя на теле с тупой кормовой частью. По Прандтлю — Титтенсу [^{1c}]

против направления основного течения, а толщина пограничного слоя значительно выросла. На рис. 2.5, *c* видно, как из возвратного течения развился большой вихрь, ставший на рис. 2.5, *d* еще большим. В дальнейшем этот вихрь отрывается от тела и уплывает вниз по течению. Вместе с отрывом вихря картина течения становится совершенно иной; полностью изменяется и распределение скоростей по сравнению с тем распределением, которое имеет место при течении без трения. Окончательный вид течения около круглого цилиндра показан на рис. 2.6. В завихренной зоне позади кормовой части цилиндра давление довольно сильно понижено по сравнению с давлением в невозмущенном течении (см. кривые распределения давления на рис. 1.9). Это понижение давления и является причиной так называемого *сопротивления давления*, имеющего для цилиндра большую величину.

На некотором расстоянии позади обтекаемого тела образуется правильная последовательность вихрей, врачающихся попаременно вправо и влево.

Такая последовательность вихрей называется *вихревой дорожкой Кармана* [10] (рис. 2.7, см. также рис. 1.6). На рис. 2.6 хорошо виден готовый к отрыву от цилиндра вихрь дорожки Кармана, врачающийся вправо. В другой своей работе Т. Карман [11] показал, что вихревые дорожки в общем

Рис. 2.6. Мгновенная фотография течения, полностью оторвавшегося от круглого цилиндра. По Прандтлю — Титтенсу [10].

Рис. 2.7. Вихревая дорожка Кармана. По Тимме [12].

случае неустойчивы относительно небольших перемещений вихрей параллельно самим себе. Устойчивой является только дорожка с таким расположением вихрей, для которого $h/l = 0,281$ (рис. 2.8). Вихревую дорожку перемещается со скоростью u , меньшей скорости U потока, набегающего на тело. Вихревую дорожку можно рассматривать как сильно идеализированную картину процесса течения позади тела. Кинетическая энергия, содержащаяся в поле скоростей вихревой дорожки, должна непрерывно вновь создаваться

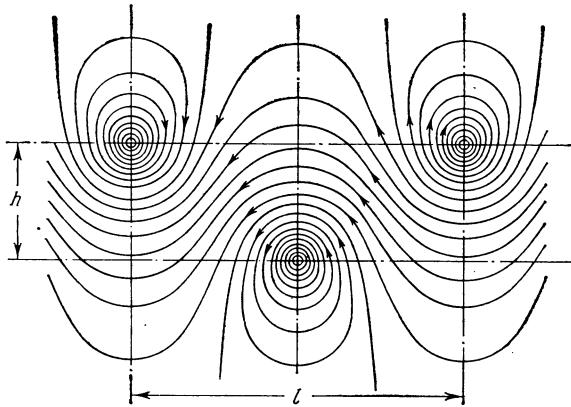


Рис. 2.8. Схематическое изображение вихревой дорожки Кармана для случая, когда $h/l = 0,281$. Картинка линий тока дана в системе отсчета, движущейся вместе с вихревой дорожкой.

при движении тела в жидкости. На основе такого представления можно, пользуясь теорией идеальной жидкости, вычислить сопротивление цилиндрического тела; расчеты показывают, что это сопротивление на единицу длины тела равно

$$W = \rho U^2 h \left[2,83 \frac{u}{U} - 1,12 \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right].$$

Ширина h вихревой дорожки и отношение u/U должны быть определены из опыта.

Частота вихрей в дорожках Кармана, образующихся позади круглых цилиндров, т. е. количество вихрей, отрывающихся от цилиндра в единицу времени, впервые была тщательно исследована экспериментально Г. Бленком, Д. Фуксом и Л. Либерсоном [2]. Регулярные вихревые дорожки образуются только в области чисел Рейнольдса VD/v примерно от 60 до 5000. Для чисел Рейнольдса, меньших 60, течение позади цилиндра ламинарное — такого же типа, как на первых двух фотографиях, изображенных на рис. 1.6; для чисел Рейнольдса, больших 5000, позади цилиндра происходит полное турбулентное перемешивание. В указанной области чисел Рейнольдса имеет место однозначная зависимость безразмерной частоты

$$\frac{nD}{V} = S,$$

называемой числом *Струхала* [22], от числа Рейнольдса $Re = VD/v$ (n есть частота отрыва вихрей в одну секунду). На рис. 2.9 эта зависимость изображена на основании новых измерений А. Рошко [18] (см. также работу Р. Фримбергера [7]). Мы видим, что значения числа Струхала, измеренные для цилиндров с разными диаметрами D и для течений с различными скоростями V , хорошо укладываются на одну кривую. Для чисел Рейнольдса, больших примерно 1000, число Струхала остается почти постоянным, равным 0,21.

Для цилиндров с небольшим диаметром и при умеренных скоростях обтекания частота отрыва вихрей лежит в области частот звуковых колебаний. Именно этим объясняется гудение телеграфных проводов при ветре.

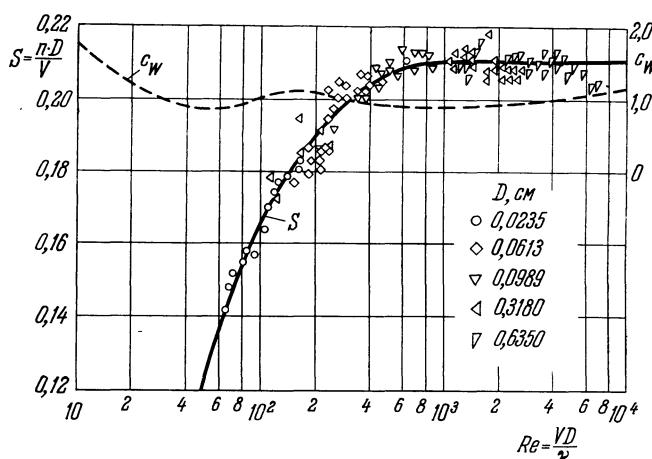


Рис. 2.9. Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса для течения около круглого цилиндра. По измерениям А. Рошко [18].

При скорости ветра $V = 10 \text{ м/сек}$ и при диаметре провода $D = 2 \text{ мм}$ получается частота $n = 0,21 \cdot 10 / 0,002 = 1050 \text{ сек}^{-1}$. Этим значениям V и D соответствует число Рейнольдса $Re \approx 1200$.

Теории вихревых дорожек Кармана посвящены работы Ц. Ц. Линя [12] и У. Домма [4].

Таким образом, теория пограничного слоя позволяет объяснить не только сопротивление трения, но — путем исследования явления отрыва — и сопротивление давления. Опасность отрыва пограничного слоя всегда существует в областях возрастания давления, и притом тем большая, чем резче происходит возрастание давления. Следовательно, возможность отрыва

особенно велика при обтекании тел с тупой кормовой частью. С этой точки зрения понятно, почему для тонкого удобообтекаемого тела (см. рис. 1.11) наблюдаемое в действительности распределение давления почти совпадает с распределением давления, вычисленным теоретически для течения без трения. В самом деле, при обтекании такого тела давление по мере приближения к кормовой части увеличивается столь слабо, что пограничный слой не отрывается от тела. Вследствие этого сопротивление давления получается очень небольшим, и полное сопротивление состоит в основном из сопротивления трения и поэтому остается малым.

Картина линий тока в пограничном слое вблизи точки отрыва имеет вид, примерно изображенный на рис. 2.10. Вследствие возвратного течения вблизи стенки возникает очень сильное утолщение пограничного слоя, что влечет за собой вынос жидкости из пограничного слоя во внешнее течение. В точке отрыва начинается одна из линий тока, образующая определенный угол со стенкой. В этой точке градиент скорости в направлении, перпендикулярном к стенке, равен нулю, т. е.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{стенка}} = 0. \quad (2.7)$$

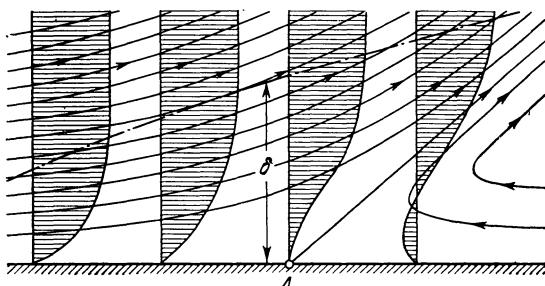


Рис. 2.10. Схематическое изображение течения в пограничном слое вблизи точки отрыва; A — точка отрыва.

Теоретически положение точки отрыва на поверхности обтекаемого тела может быть определено только посредством точного расчета, а именно путем интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя.

Отрыв потока, только что рассмотренный для случая обтекания круглого цилиндра, возникает также при течении жидкости в канале, резко расширяющемся в направлении течения (рис. 2.11). До достижения жидкостью самого узкого поперечного сечения давление в направлении течения понижается. В этой части канала поток полностью прилегает к стенкам совершенно так же, как и при течении без трения. После же самого узкого поперечного сечения резкое расширение канала приводит к резкому возрастанию давления в направлении течения, вследствие чего происходит отрыв пограничного слоя от обеих стенок с одновременным образованием вихрей. В результате в расширяющейся части канала поток занимает только небольшую часть его поперечного сечения. Однако если на стенках производится отсасывание пограничного слоя, то отрыв не возникает (рис. 2.12 и 2.13).

В том, что для возникновения отрыва необходимо совместное действие градиента давления и трения на стенах, можно убедиться из фотографий, изображенных на рис. 2.14 и 2.15¹). Первая из них показывает течение около

Рис. 2.11. Течение в сильно расширяющемся канале с отрывом пограничного слоя. По Прандтлю — Титценсу [1*].

¹) Рисунки 2.14 и 2.15 взяты из работы: F ö t t i n g e r H., Strömungen in Dampfkesselanlagen, Mitteilungen der Vereinigung der Gross-Kesselbesitzer, вып. 73, 151 (1939).

стенки, поставленной перпендикулярно к направлению течения (*плоское течение в окрестности критической точки*). На линии тока, совпадающей с осью симметрии и ведущей к критической точке, происходит сильное повышение давления в направлении течения. Тем не менее здесь не возникает

Рис. 2.12. Течение в сильно расширяющемся канале при отсасывании пограничного слоя на верхней стенке канала.

Рис. 2.13. Течение в сильно расширяющемся канале при отсасывании пограничного слоя на обеих стенах канала.

отрыва, так как отсутствует стенка, а вместе с нею и трение на стенке. Не возникает отрыва и на самой стенке, поставленной поперек течения, так как здесь в обоих направлениях пограничный слой движется в сторону понижающегося давления. Но если заменить центральную линию тока, ведущую к критической точке, тонкой продольной стенкой, поставленной

Рис. 2.14. Свободное течение в окрестности критической точки без отрыва. По Фёттингеру.

Рис. 2.15. Заторможенное течение в окрестности критической точки с отрывом. По Фёттингеру.

перпендикулярно к поперечной стенке (рис. 2.15), то на продольной стенке образуется пограничный слой с повышающимся давлением в направлении течения, что влечет за собой отрыв¹ пограничного слоя от этой стенки.

Отрыв течения часто довольно чувствителен к небольшим изменениям формы обтекаемого тела, особенно в тех случаях, когда изменение формы тела оказывает сильное влияние на распределение давления. Примечательным примером такой чувствительности может служить обтекание модели грузового автомобиля, изображенной на рис. 2.16 [13], [20]. При плохо обте-

каемой форме кабины автомобиля (рис. 2.16, а) обтекание довольно острых передних кромок вызывает здесь сильное понижение давления, что влечет за собой последующее сильное возрастание давления вдоль боковых стенок. В результате пограничный слой на боковых стенках полностью отрывается и позади тела образуется широкая область застойного течения. Коэффициент сопротивления автомобиля с такой плохо обтекаемой кабиной равен $c_w = 0,76$. При округленной форме кабины (рис. 2.16, б) сильного понижения

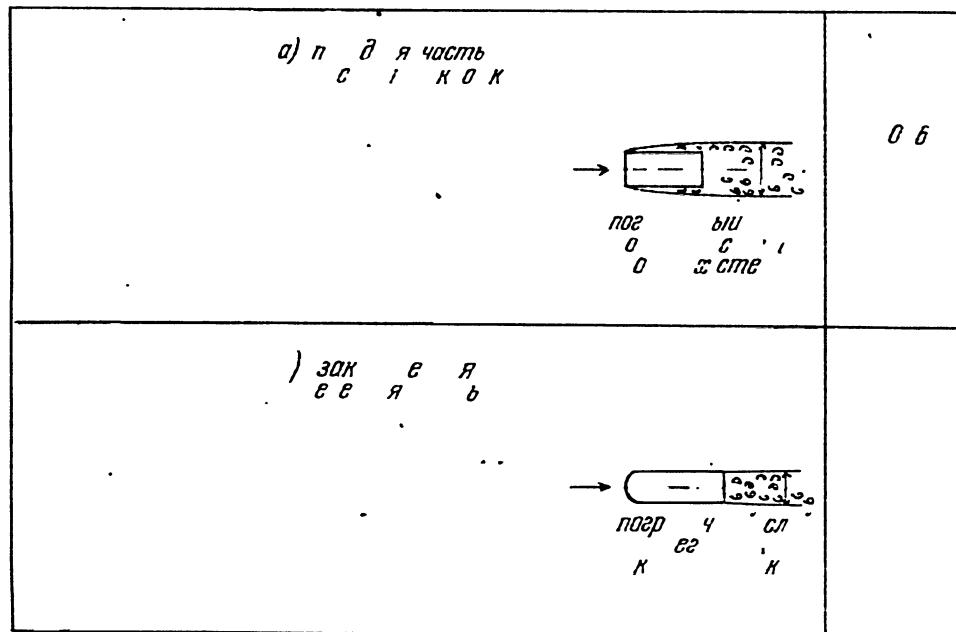


Рис. 2.16. Обтекание модели грузового автомобиля. а) Кабина плохо обтекаемая, течение отрывается от боковых стенок на всем их протяжении, коэффициент сопротивления велик: $c_w = 0,76$. б) Кабина хорошо обтекаемая, течение прилегает к боковым стенкам на всем их протяжении, коэффициент сопротивления мал: $c_w = 0,42$. По Мёллеру [13].

давления на передних кромках не получается, поэтому на боковых стенках течение прилегает к ним на всем их протяжении. Это приводит к значительному уменьшению коэффициента сопротивления: теперь он равен только $c_w = 0,42$.

Отрыв пограничного слоя играет важную роль также при возникновении подъемной силы крыла. При небольших углах атаки (примерно до 10°) обтекание обеих сторон крыла происходит без отрыва (рис. 2.17, а); поэтому такое обтекание с весьма хорошим приближением можно рассматривать как течение без трения, создающее достаточно большую подъемную силу при малом лобовом сопротивлении (соответствующее распределение давления изображено на рис. 1.13). При увеличении угла атаки возникает опасность отрыва на подсасывающей стороне профиля, так как теперь возрастание давления по мере удаления от носика профиля происходит более резко. При некотором определенном угле атаки, равном приблизительно 15° , отрыв обязательно наступает, причем точка отрыва лежит немного позади носика профиля. Между оторвавшимся течением и поверхностью крыла образуется большая застойная область, заполненная вихрями (рис. 2.17, б).

В результате течение, которое до возникновения отрыва происходило почти без трения и давало очень незначительное лобовое сопротивление, дает теперь весьма большое лобовое сопротивление. Начало отрыва течения совпадает примерно с достижением подъемной силой крыла своего наибольшего значения.

§ 3. Турбулентное течение в трубе и в пограничном слое

Как показывают наблюдения, течение в круглой трубе с параболическим распределением скоростей, рассмотренное в § 4 главы I, возможно только при умеренных числах Рейнольдса. Характерной особенностью такого течения, называемого *ламинарным* течением, является движение

жидкости в виде отдельных слоев без составляющей скорости в поперечном направлении, причем падение давления вдоль трубы происходит пропорционально первой степени средней скорости течения. Указанную особенность можно сделать очень четко видимой, если в поток воды ввести тонкую струйку жидкой краски (рис. 2.18). При ламинарном течении окрашенная струйка остается резко ограниченной от остальной жидкости вдоль всей трубы (рис. 2.18, а). Однако при увеличении скорости достигается в конце концов такое состояние, при котором прямолинейное движение жидкой струйки нарушается. Последняя перемешивается с окружающей ее жидкостью, и весь поток становится окрашенным (рис. 2.18, б).

Это показывает, что жидкость уже не движется в виде отдельных слоев. Теперь на продольное движение налагаются неравномерные поперечные движения, вызывающие перемешивание всей жидкости.

Такого рода течение называется *турбулентным*.

Опыт с окрашенной жидкой струйкой впервые был выполнен О. Рейнольдсом [17]. Выяснилось, что переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при определенном значении числа Рейнольдса, называемом *критическим числом Рейнольдса*. Однако критическое число Рейнольдса не постоянно при всех условиях: оно сильно зависит от экспериментальной установки и особенно от интенсивности возмущений, полученных жидкостью при входе в трубу. Если обеспечить вход жидкости в трубу с очень небольшими возмущениями, то можно достичь критического числа Рейнольдса ($\bar{u}d/v_{kp}$, превышающего 10^4 (\bar{u} — осредненная по поперечному сечению скорость). При острых краях входного сечения трубы критическое число Рейнольдса равно приблизительно

$$\left(\frac{\bar{u}d}{v} \right)_{kp} = Re_{kp} \approx 2300. \quad (2.8)$$

Это значение является нижней границей критического числа Рейнольдса; при меньших числах Рейнольдса турбулентное течение не может существовать даже при сильных возмущениях.

При турбулентном течении в трубе падение давления вдоль трубы пропорционально приближенно второй степени средней скорости течения.

a)

Рис. 2.17. Течение около крылового профиля: а) без отрыва; б) с отрывом. По Прандтлю [16].

Следовательно, при турбулентном течении для протекания через трубу определенного количества жидкости требуется значительно больший перепад давления, чем при ламинарном течении. Это вполне понятно, так как турбулентное перемешивание приводит к значительному рассеянию энергии, а потому и к значительному увеличению сопротивления. Далее, при турбулентном течении распределение скоростей в поперечном сечении получается значительно более равномерным, чем при ламинарном течении. И эта особенность турбулентного течения связана с перемешиванием жидкости, вызывающим обмен импульсами между слоями, близкими к середине трубы, и слоями, прилегающими к стенке. В технических условиях преобладающая часть движений жидкости в трубах происходит при весьма больших числах Рейнольдса, следовательно, эти течения являются турбулентными.

Закономерности турбулентного течения в трубе будут подробно рассмотрены в главе XX.

Течение в пограничном слое на стенке совершенно так же, как и течение в трубе становится турбулентным, как только толщина пограничного слоя или скорость внешнего течения становятся достаточно большими. Исследования перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный впервые были выполнены И. М. Бюргерсом [³] и Б. Г. ван дер Хегге-Цейненом [⁹], а также М. Ханзеном [⁸]. Эти исследования показали, что для такого перехода наиболее характерным признаком является внезапное резкое увеличение толщины пограничного слоя и касательного напряжения на стенке.

Заменим в формуле (2.1) длину пластины l на путь x , пройденный частицей жидкости в пограничном слое от передней кромки пластины. Тогда, разделив обе части формулы (2.1) на $\sqrt{vx/U_\infty}$, мы увидим, что при ламинарном течении безразмерная толщина пограничного слоя $\delta/\sqrt{vx/U_\infty}$ имеет постоянное значение, равное, согласно решению Блазиуса [формула (2.1а)], приблизительно пяти. На рис. 2.19 значения этой постоянной безразмерной толщины пограничного слоя отложены как ординаты над абсциссами $Re_x = U_\infty x/v$, соответствующими возрастающим значениям расстояния x от передней кромки пластины. Но как только число Рейнольдса Re_x становится больше $3,2 \cdot 10^5$, безразмерная толщина пограничного слоя начинает внезапно резко возрастать. Такое же явление наблюдается и для касательного напряжения на стенке. Внезапное возрастание этих величин означает, что в пограничном слое произошел переход ламинарной формы течения в турбулентную. В соответствии с формулой (2.1а) число Рейнольдса Re_x , составленное для текущей длины x , связано с числом Рейнольдса $Re_\delta = U_\infty \delta/v$, составленным для толщины пограничного слоя δ , соотношением

$$Re_\delta = 5 \sqrt{Re_x}$$



Рис. 2.18. Течение в воде, сделанное видимым при помощи окрашенной струйки (опыт Рейнольдса). а) Ламинарное течение, $Re = 1150$. б) Турбулентное течение, $Re = 2520$. По Дубсу [⁶].

Следовательно, при течении вдоль пластины критическое число Рейнольдса

$$Re_{x \text{ кр}} = \left(\frac{U_\infty x}{v} \right)_{\text{кр}} = 3,2 \cdot 10^5$$

соответствует критическому числу $Re_{\delta \text{ кр}} \approx 2800$.

Таким образом, при течении вдоль пластины пограничный слой вблизи ее передней кромки остается ламинарным и только на некотором расстоянии $x_{\text{кр}}$ от переднего края становится турбулентным. Расстояние $x_{\text{кр}}$ определяется указанным выше критическим числом Рейнольдса $Re_{x \text{ кр}}$. Подобно тому, как для трубы критическое число Рейнольдса, после достижения которого все течение в трубе из ламинарного делается турбулентным, сильно зависит от степени возмущения течения при входе в трубу, так и для пластины критическое число $Re_{x \text{ кр}}$, определяющее переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную, сильно зависит от степени возмущения внешнего течения.

Значение $Re_{x \text{ кр}} = 3,2 \cdot 10^5$ следует рассматривать как нижнюю границу критического числа Рейнольдса. Путем особенно тщательного предохранения внешнего течения от возмущений удалось достигнуть для критического числа $Re_{x \text{ кр}}$ значений до $3 \cdot 10^6$.

Особенно примечательное явление, связанное с переходом течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную, наблюдается при обтекании тела с тупой кормовой частью, например круглого цилиндра или шара. Из рис. 1.4 и 1.5 мы видим, что при числах Рейнольдса Vd/v , равных для круглого цилиндра приблизительно $5 \cdot 10^5$, а для шара приблизительно $3 \cdot 10^5$, коэффициент сопротивления цилиндра и шара внезапно сильно уменьшается. Впервые это явление было обнаружено для шара Г. Эйфелем [6]. Столь резкое уменьшение сопротивления объясняется возникновением в пограничном слое турбулентного течения. Турбулизация пограничного слоя, турбулентного перемешивания, значительно усиливает увлекающее действие внешнего потока по сравнению со случаем ламинарного пограничного слоя, и это приводит к перемещению точки отрыва назад, т. е. вниз по течению. Если для пограничного слоя, оставшегося ламинарным на всем протяжении, точка отрыва лежит приблизительно на экваторе шара, то после турбулизации пограничного слоя она перемещается на довольно значительное расстояние назад, т. е. на заднюю половину шара. Вследствие этого область застойного течения позади тела значительно суживается и распределение давления приближается к распределению давления при течении без трения (см. рис. 1.10). Сужение же застойной области приводит к значительному уменьшению сопротивления давления, что дает о себе знать в виде скачкообразного понижения кривой $c_w = f(Re)$ (см. рис. 1.4 и 1.5). Правильность такого объяснения подтвердил Л. Прандтль путем следующего опыта [15]. Несколько впереди экватора шара, обтекавшегося потоком воздуха, он укрепил на поверхности шара тонкое проволочное кольцо. Наличие этого кольца вызвало искусственную турбулизацию пограничного слоя уже при умеренном числе Рейнольдса

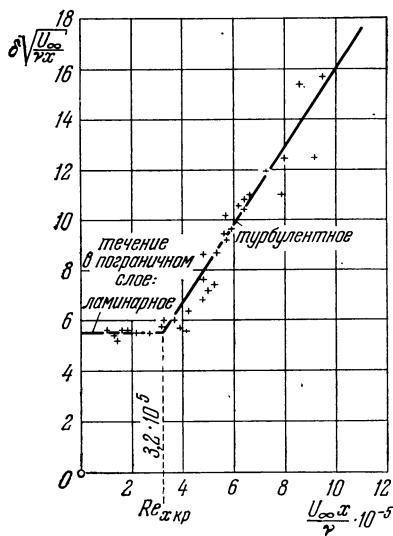


Рис. 2.19. Зависимость толщины пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении, от расстояния от передней кромки пластины. По измерениям Ханзена [8].

т. е. возникновение в нем усиливает увлекающее действие внешнего потока по сравнению со случаем ламинарного пограничного слоя, и это приводит к перемещению точки отрыва назад, т. е. вниз по течению. Если для пограничного слоя, оставшегося ламинарным на всем протяжении, точка отрыва лежит приблизительно на экваторе шара, то после турбулизации пограничного слоя она перемещается на довольно значительное расстояние назад, т. е. на заднюю половину шара. Вследствие этого область застойного течения позади тела значительно суживается и распределение давления приближается к распределению давления при течении без трения (см. рис. 1.10). Сужение же застойной области приводит к значительному уменьшению сопротивления давления, что дает о себе знать в виде скачкообразного понижения кривой $c_w = f(Re)$ (см. рис. 1.4 и 1.5). Правильность такого объяснения подтвердил Л. Прандтль путем следующего опыта [15]. Несколько впереди экватора шара, обтекавшегося потоком воздуха, он укрепил на поверхности шара тонкое проволочное кольцо. Наличие этого кольца вызвало искусственную турбулизацию пограничного слоя уже при умеренном числе Рейнольдса

и повлекло за собой такое же понижение сопротивления, как и увеличение числа Рейнольдса при отсутствии кольца. На рис. 2.20 и 2.21 показаны фотографии обтекания шара при докритическом состоянии течения (без кольца) и при послекритическом состоянии (с кольцом). Течение было сделано видимым посредством введения в поток воздуха дыма. Мы видим, что при докритическом состоянии застойная область действительно значительно шире, чем при послекритическом состоянии. Опыт Л. Прандтля убедительно показал, что скачок на кривых сопротивления шара и круглого цилиндра можно объяснить только как результат перехода течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную. Примерно такой же скачок на кривой сопротивления получается и для других тел с тупой кормовой частью (например, для эллиптического цилиндра). Однако с увеличением обтекаемости

Рис. 2.20. Обтекание шара при докритическом числе Рейнольдса. По Бизельсбергеру [2*].

Рис. 2.21. Обтекание шара при послекритическом числе Рейнольдса. Послекритическое состояние достигнуто наложением на шар тонкого проволочного кольца. По Бизельсбергеру.

тела скачок на кривой сопротивления становится все менее и менее заметным. У удобообтекаемого тела (см. рис. 1.11) повышение давления по мере приближения к кормовой части происходит очень постепенно, и поэтому оно преодолевается пограничным слоем обычно без отрыва. Именно поэтому для такого тела кривая сопротивления не имеет скачка.

Как мы увидим подробнее ниже, на положение точки отрыва пограничного слоя решающее влияние оказывает распределение давления во внешнем потоке. В области понижения давления, простирающейся от передней точки тела до того места, где давление имеет минимальное значение, пограничный слой ламинарный; в начинающейся же затем области повышения давления пограничный слой обычно турбулентный. Необходимо отметить следующее весьма важное обстоятельство: в общем случае отрыв пограничного слоя может быть предотвращен только при турбулентном течении в пограничном слое. Ниже будет показано, что ламинарный пограничный слой может преодолеть лишь чрезвычайно небольшое повышение давления и поэтому он обычно отрывается, даже если обтекаемое тело очень тонкое. В частности, такой отрыв происходит и в случае обтекания крыла при распределении давления, изображенном на рис. 1.13, причем опасность отрыва наиболее велика на подсасывающей (верхней) стороне профиля. При таком распределении давления гладкое безотрывное обтекание крыла, которое является необходимым условием возникновения подъемной силы, возможно только при турбулентном пограничном слое.

Таким образом, подытоживая все сказанное, мы можем утверждать, что причиной малой величины лобового сопротивления тонких тел и возникновения подъемной силы крыловых профилей является, как правило, турбулентная форма течения в пограничном слое.

Толщина пограничного слоя. В турбулентном потоке пограничный слой в общем случаѣ, вследствие большей потери энергии, толще, чем в ламинарном потоке. При продольном обтекании гладкой плоской пластины толщина пограничного слоя увеличивается вниз по течению пропорционально $x^{0.8}$, где x есть расстояние от передней кромки пластины. Ниже, в главе XXI, мы увидим, что при турбулентном обтекании пластины толщина пограничного слоя определяется формулой

$$\frac{\delta}{l} = 0,37 \left(\frac{U_{\infty} l}{v} \right)^{-1/5} = 0,37 (\text{Re}_l)^{-1/5}, \quad (2.9)$$

аналогичной по своей структуре формуле (2.2) для ламинарного обтекания. В таблице 2.1 даны значения толщины пограничного слоя, вычисленные по формуле (2.9), для некоторых типичных случаев течения воздуха и воды.

Т а б л и ц а 2.1. Толщина δ турбулентного пограничного слоя на конце плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, при различных скоростях U_{∞} набегающего потока (l — длина пластины, v — кинематическая вязкость)

	U_{∞} , м/сек	l , м	$\text{Re}_l = \frac{U_{\infty} l}{v}$	δ , мм
Воздух $v = 14 \cdot 10^{-6}$ м ² /сек	50 100 100 200	1	$3,5 \cdot 10^6$	18
		1	$7 \cdot 10^6$	16
		5	$3,5 \cdot 10^7$	60
		10	$1,4 \cdot 10^8$	90
Вода $v = 1 \cdot 10^{-6}$ м ² /сек	1 2 5 10	2	$2 \cdot 10^6$	40
		5	$1 \cdot 10^7$	75
		50	$2,5 \cdot 10^8$	385
		200	$2 \cdot 10^9$	1000

Способы предотвращения отрыва пограничного слоя. Отрыв пограничного слоя обычно нежелателен, так как он влечет за собой большие потери энергии; поэтому были придуманы различные способы, позволяющие искусственным путем воспрепятствовать отрыву пограничного слоя. С физической точки зрения наиболее простым способом предотвращения отрыва было бы уменьшение разности между скоростями внешнего потока и обтекаемой стенки путем приведения стенки в движение в направлении течения. Такой способ, как показал Л. Прандтль¹⁾ на примере *вращающегося круглого цилиндра*, весьма эффективен, однако в общем случае его трудно осуществить в технических условиях. На той стороне цилиндра, где вращающаяся стенка движется в одном направлении с внешним потоком, не получается никакого отрыва пограничного слоя. Но и на другой стороне цилиндра, на которой стенка и внешний поток движутся в противоположных направлениях, отрыв получается очень незначительным. В результате около вращающегося цилиндра возникает течение с циркуляцией и большой поперечной силой, которое с большой степенью приближения можно рассматривать как течение без трения.

Другим весьма эффективным способом предотвращения отрыва пограничного слоя является его *отсасывание*. Для этой цели в стенке обтекаемо-

¹⁾ Prandtl — Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, т. II, Berlin 1931, таблицы 7, 8 и 9. [Имеется русский перевод: Прандтль — Т и е т ѿ н с, Гидроаэромеханика, т. II, Москва 1935. — Прим. перев.]

го тела устраивается узкая щель, через которую заторможенная жидкость, текущая в пограничном слое, отсасывается внутрь тела. Если отсасывание производится достаточно сильно, то можно предотвратить отрыв пограничного слоя от стенки. Отсасывание пограничного слоя от поверхности круглого цилиндра было применено Л. Прандтлем уже в 1904 г. в его первой фундаментальной работе о пограничном слое. При устройстве щели в кормовой части круглого цилиндра отсасывание почти полностью предотвращает отрыв пограничного слоя. Несколько эффективно отсасывание пограничного слоя, показывают рис. 2.12 и 2.13, на которых изображены фотографии течения в сильно расширяющемся канале. В таком канале при отсутствии отсасывания возникает сильный отрыв течения от стенок (рис. 2.11). При одностороннем отсасывании (рис. 2.12) поток прилегает к той стенке, через которую производится отсасывание. При двустороннем отсасывании (рисунок 2.13) поток заполняет все поперечное сечение канала, и получается такая же картина линий тока, как и при течении без трения. В последнее время отсасывание пограничного слоя с успехом было применено для увеличения подъемной силы крыльев. Если отсасывание производится через узкую щель вблизи задней кромки крыла, то поток продолжает прилегать к поверхности крыла при значительно больших углах атаки, чем в обычных условиях, вследствие чего максимальная подъемная сила весьма значительно повышается [21].

Закончив на этом описание основных физических явлений, возникающих при течениях с очень малой вязкостью, и изложив тем самым в самых кратких чертах теорию пограничного слоя, мы перейдем в следующих главах к построению рациональной теории этих явлений на основе уравнений движения вязкой жидкости. В настоящей части книги (в главе III) мы составим общие уравнения движения Навье — Стокса, а во второй части сначала выведем из уравнений Навье — Стокса путем упрощений, вытекающих из предположения о малой величине вязкости, уравнения Прандтля для пограничного слоя, а затем перейдем к интегрированию этих уравнений для ламинарного пограничного слоя. Далее, в третьей части книги, мы рассмотрим проблему возникновения турбулентности (переход от ламинарного течения к турбулентному) с точки зрения теории устойчивости ламинарного течения. Наконец, в четвертой части книги мы изложим теорию пограничного слоя для вполне развившегося турбулентного течения. Теорию ламинарного пограничного слоя можно построить чисто дедуктивным путем, исходя из дифференциальных уравнений Навье — Стокса для движения вязкой жидкости. Для теории турбулентного пограничного слоя такое дедуктивное построение до сегодняшнего дня невозможно, так как механизм турбулентного течения вследствие его большой сложности недоступен чисто теоретическому исследованию. В связи с этим при изучении турбулентных течений приходится в широкой мере опираться на экспериментальные результаты, и поэтому теория турбулентного пограничного слоя является, вообще говоря, полуэмпирической.

Литература к главе II

1. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Диссертация, Göttingen 1907; Z. Math. u. Phys. 56, 1—37 (1908). Имеется английский перевод в NACA TM 1256.
2. Blenk H., Fuchs D., Liebers L., Über die Messung von Wirbelfrequenzen. Luftfahrtforschung 12, 38—41 (1935).
3. Burgers J. M., Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, 113 (1924).
4. Domm U., Ein Beitrag zur Stabilitätstheorie der Wirbelstrassen unter Berücksichtigung endlicher und zeitlicher anwachsender Wirbelkerndurchmesser. Ing.-Arch. 22, 400—410 (1954).

5. D u b s W., Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenbild von Wasser und Nitrobenzol. Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem. *Helv. phys. Acta* 12, 169—228 (1939).
6. E i f f e l G., Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. *Comptes Rendus* 155, 1597 (1912).
7. F r i m b e r g e r R., Experimentelle Untersuchungen an Kármánschen Wirbelstrassen. *ZFW* 5, 355—359 (1957).
8. H a n s e n M., Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an der längsgestromten ebenen Platte. *ZAMM* 8, 185—199 (1928); NACA TM 585 (1930).
9. van der H e g g e Z i j n e n B. G., Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Тезисы доклада, Delft 1924.
10. v. K á r m á n Th., Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 1911, 509—517 и 1912, 547—556; см. также *Collect. Works* I, 324—338.
11. v. K á r m á n Th., R u b a c h H., Über den Mechanismus des Flüssigkeits-und Luftwiderstandes. *Phys. Z.* 13, 49—59 (1912); см. также *Collect. Works* I, 339—358.
12. L i n C. C., On periodically oscillating wakes in the Oseen approximation. В сб. R. v. Mises Anniversary «Studies in Mathematics and Mechanics». Academic Press, New York 1950, 170—176.
13. M ö l l e r E., Luftwiderstandsmessungen am Volkswagen-Lieferwagen. *Automobiltechnische Z.* 53, вып. 6, 1—4 (1951).
14. P r a n d t l L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg 1904, 484—941. Вновь отпечатано в «Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik», Göttingen 1927; см. также Gesammelte Abhandlungen II, 575—584. Имеется английский перевод: NACA TM 452 (1928).
15. P r a n d t l L., Der Luftwiderstand von Kugeln. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 1914, 177—190; см. также Gesammelte Abhandlungen II, 597—608.
16. P r a n d t l L., T i e t j e n s O., Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl, т. I: Gleichgewicht und reibungslose Bewegung; т. II: Bewegung reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen. Berlin 1929 und 1931. [Имеется русский перевод: Прандтль Л. — Тиценс О., Гидроаэромеханика по лекциям Л. Прандтля, т. I и II, Москва 1933 и 1935¹.]
17. R e y n o l d s O., An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 174, 935—982 (1883); см. также: *Scientific Papers* 2, 51.
18. R o s h k o A., On the development of turbulent wakes from vortex streets. NACA Rep. 1191 (1954).
19. R u b a c h H., Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares bei zylindrischen Körpern. Диссертация, Göttingen 1914; VDI-Forschungsheft 185 (1916).
20. S c h l i c h t i n g H., Aerodynamische Untersuchungen an Kraftfahrzeugen. Berichtsband der Technischen Hochschule Braunschweig, 1954, 130—139.
21. S c h r e n k O., Versuche mit Absaugeflügeln. *Aerodynamische Forschung* XII, 10—27 (1935).
22. S t r o u h a l V., Über eine besondere Art der Tonerregung. *Ann. Phys. und Chemie. Neue Folge*, 5, 216—251 (1878).
23. T i m m e A., Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln. *Ing.-Arch.* 25, 205—225 (1957).
24. W i e s e l s b e r g e r C., Der Luftwiderstand von Kugeln. *ZFM* 5, 140—144 (1914).

¹⁾ Здесь и в списках литературы к последующим главам все помещенные в прямые скобки ссылки на наличие русских переводов сделаны переводчиком.

Г л а в а III

Составление уравнений движения сжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса)¹⁾

§ 1. Основные уравнения динамики жидкости

Составим уравнения движения сжимаемой вязкой жидкости. В общем случае трехмерного движения поле течения определяется, во-первых, вектором скорости $\mathbf{w} = iu + jv + kw$, где u, v, w суть проекции скорости \mathbf{w} на оси прямоугольной системы координат, во-вторых, давлением p и, в-третьих, плотностью ρ . Для определения этих пяти величин в нашем распоряжении имеется уравнение неразрывности (закон сохранения массы), три уравнения движения (закон сохранения импульса) и уравнение термодинамического состояния $p = f(\rho)$, следовательно, всего пять уравнений²⁾.

Уравнение неразрывности выражает собой следующее: сумма массы, втекающей в единицу объема в единицу времени, и массы, вытекающей из того же объема за тот же промежуток времени, равна изменению массы, происходящему в единицу времени вследствие изменения плотности. Для нестационарного течения сжимаемой жидкости уравнением неразрывности будет

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) = 0. \quad (3.1)$$

В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и уравнение неразрывности принимает более простой вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (3.1a)$$

Символ $D\rho/Dt$ означает субстанциальную производную, которая складывается из локальной производной $\partial\rho/\partial t$, учитывающей нестационарный характер течения, и конвективной производной $\mathbf{w} = \operatorname{grad} \rho$, учитывающей перемещение частицы.

Для составления уравнений движения будем исходить из основного закона механики, согласно которому масса, умноженная на ускорение, равна сумме всех внешних сил, действующих на рассматриваемую массу. На частицы жидкости действуют массовые силы (гравитационные силы) и поверхностные силы (силы давления и силы трения). Обозначим через $\mathbf{K} = \rho \mathbf{g}$ массовую силу, отнесенную к единице объема (\mathbf{g} есть вектор ускорения свободного падения в поле земного тяготения), и через \mathbf{P} — по-

¹⁾ Эта глава переработана И. Кестином (J. Kestin) — переводчиком настоящей книги с немецкого на английский язык. — *Прим. перев.*

²⁾ Если уравнение состояния содержит также температуру, то последняя является еще одной переменной, и к указанным пяти уравнениям следует присоединить еще одно уравнение, а именно уравнение энергии, выраженное в форме первого начала термодинамики; подробно об этом см. в главе XII.

верхностную силу, также отнесенную к единице объема; тогда уравнение движения в векторной форме будет иметь следующий вид:

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{K} + \mathbf{P}, \quad (3.2)$$

где $D\mathbf{w}/Dt$ есть субстанциальное ускорение, равное сумме локальной составляющей $\partial\mathbf{w}/\partial t$, учитывающей нестационарный характер течения, и конвективной составляющей $d\mathbf{w}/dt = (\mathbf{w} \operatorname{grad}) \mathbf{w}$ ¹, учитывающей перемещение частицы. Следовательно, субстанциальное ускорение равно

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

Массовая и поверхность силы \mathbf{K} и \mathbf{P} выражаются через свои проекции на координатные оси следующим образом:

$$\mathbf{K} = iX + jY + kZ, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{P} = iP_x + jP_y + kP_z. \quad (3.4)$$

Массовые силы следует рассматривать как заданные внешние силы, поверхности же силы зависят от скорости, с которой жидкость деформируется в рассматриваемом поле скоростей. Совокупность сил определяет *напряженное состояние* тела. Для дальнейшего нам необходимо знать связь между напряженным состоянием и скоростью деформации тела. Эта связь может быть установлена всегда только эмпирически. Мы ограничимся рассмотрением только изотропной ньютоновской жидкости, для которой можно принять, что указанная связь линейная. Все газы, а также многие жидкости, рассматриваемые в теории пограничного слоя (в частности — вода), принаследуют к этому классу. Жидкость называется *изотропной*, если связь между составляющими напряженного состояния и составляющими скорости деформации одинакова во всех направлениях. Жидкость называют *ニュтоновской*, если для нее указанная связь линейна и жидкость подчиняется закону трения Стокса. В случае изотропного упругого твердого тела эксперимент показывает, что напряженное состояние зависит от величины самой деформации. Большая часть инженерных материалов подчиняется линейному закону Гука, который в известной мере аналогичен закону трения Стокса. А именно, в то время как связь между напряженным и деформированным состояниями в изотропном упругом теле содержит в себе две постоянные, характеризующие свойства рассматриваемого материала (например, модуль упругости и коэффициент Пуассона), связь между напряженным состоянием и скоростью деформации в изотропной ньютоновской жидкости содержит только одну единственную постоянную (коэффициент вязкости μ), правда, до тех пор, пока внутри жидкости не возникают явления релаксации, о чем будет сказано в § 5 настоящей главы.

§ 2. Общий случай напряженного состояния деформируемого тела

Прежде всего найдем общее выражение для поверхности силы, отнесенной к единице объема деформируемого тела. Для этой цели мысленно вырежем из тела прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz , следовательно, с объемом $dV = dx dy dz$ (рис. 3.1), на мгновение будем считать этот параллелепипед изолированным от остальной жидкости и рассмотрим силы, действующие на грани этого параллелепипеда. Пусть левая передняя вершина параллелепипеда лежит в точке x, y, z . К обеим граням

¹⁾ Для того чтобы выразить вектор $(\mathbf{w} \operatorname{grad}) \mathbf{w}$ в любой системе координат, следует воспользоваться соотношением $(\mathbf{w} \operatorname{grad}) \mathbf{w} = \operatorname{grad} (\frac{1}{2} \mathbf{w}^2) - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$.

параллелепипеда, перпендикулярным к оси x и имеющим площади $dy dz$, приложены результирующие напряжения, равные соответственно

$$\mathbf{p}_x \text{ и } \mathbf{p}_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx. \quad (3.5)$$

Эти напряжения являются векторами и представляют собой отнесенные к единице площади результирующие поверхностные силы. Индекс x показывает, что рассматриваемые векторы действуют на элемент площади, перпендикулярный к оси x . Аналогичные векторы получаются и для элементарных площадок $dx dz$ и $dx dy$, перпендикулярных соответственно к оси y и к оси z . Следовательно, составляющими результирующей поверхностной силы для трех координатных направлений будут:

$$\begin{aligned} \text{для направления } x & \quad \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy dz, \\ \text{для направления } y & \quad \frac{\partial p_y}{\partial y} dx dy dz, \\ \text{для направления } z & \quad \frac{\partial p_z}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Сложив эти составляющие и разделив полученную сумму на объем dV параллелепипеда, мы получим отнесенную к единице объема поверхностную результирующую силу \mathbf{P} , вызванную напряженным состоянием:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

В этом равенстве \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z суть векторы, которые мы можем разложить на их составляющие. Выполним это разложение и введем следующие обозначения. Составляющие, перпендикулярные к элементарным площадкам, т. е. нормальные напряжения, обозначим буквой σ с индексом, указывающим ось, параллельно которой направлено рассматриваемое нормальное напряжение. Составляющие же, лежащие в плоскости элементарных площадок, т. е. касательные напряжения, обозначим буквой τ с двумя индексами; из этих индексов первый указывает, к какой оси перпендикулярна рассматриваемая элементарная площадка, а второй указывает ту ось, параллельно которой направлено рассматриваемое касательное напряжение. Применив эти обозначения, мы будем иметь

$$\mathbf{p}_x = i\sigma_x + j\tau_{xy} + k\tau_{xz}, \quad \mathbf{p}_y = i\tau_{yx} + j\sigma_y + k\tau_{yz}, \quad \mathbf{p}_z = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_z. \quad (3.7)$$

Таким образом, напряженное состояние определяется девятью скалярными величинами, совокупность которых составляет *тензор напряжений*. Эту совокупность девяти составляющих тензора напряжений называют также *матрицей напряжений* и обозначают следующим образом:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Тензор напряжений и соответствующая матрица напряжений симметричны относительно главной диагонали, так как касательные напряжения с одинаковыми, но расположеными в обратном порядке индексами равны между собой. В этом легко убедиться из рассмотрения уравнений движения

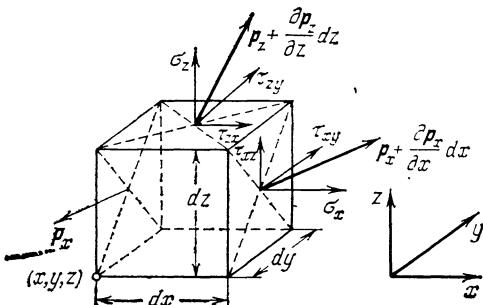


Рис. 3.1. К выводу выражения тензора напряжений при неоднородном напряженном состоянии.

элементарного объема жидкости. В общем случае движение можно разложить на мгновенное перемещение и на мгновенное вращение. Для нашей цели достаточно рассмотреть только последнее движение. Обозначив мгновенное угловое ускорение элементарного объема жидкости через $\dot{\omega}$ ($\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$), мы получим для вращения вокруг оси y уравнение

$$\dot{\omega}_y dI_y = (\tau_{xz} dy dz) dx - (\tau_{zx} dx dy) dz = (\tau_{xz} - \tau_{zx}) dV,$$

где dI_y есть момент инерции выделенного объема жидкости относительно оси y . Но момент инерции dI пропорционален пятой степени линейных размеров элементарного параллелепипеда, тогда как объем dV пропорционален третьей степени линейных размеров элементарного параллелепипеда. Стягивая элемент жидкости в точку, мы увидим, что левая часть предыдущего уравнения исчезающе мала по сравнению с правой частью. Следовательно,

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0,$$

если только составляющая $\dot{\omega}_y$ углового ускорения не имеет бесконечно большого значения. Аналогичные равенства получаются и для двух других осей. Тем самым симметрия тензора напряжений доказана. Из предыдущего ясно, что тензор напряжений не будет симметричным, если в жидкости возникают локальные моменты, пропорциональные объему dV . Такой случай может иметь место, например, в электростатическом поле.

Таким образом, мы имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (3.9)$$

следовательно, матрица напряжений (3.8) содержит только шесть различных составляющих тензора напряжения и симметрична относительно своей главной диагонали; поэтому ее можно переписать следующим образом:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Подставив в равенство (3.6) значения (3.7) и имея в виду только что доказанную парность касательных напряжений, мы получим для поверхностной силы \bar{P} , отнесенной к единице объема, такое выражение:

$$\begin{aligned} \bar{P} = i & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + & \text{составляющая вдоль оси } x \\ & + j \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + & \text{составляющая вдоль оси } y \\ & + k \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) + & \text{составляющая вдоль оси } z \\ & \underbrace{\text{пло-}}_{yz} \quad \underbrace{\text{пло-}}_{zx} \quad \underbrace{\text{пло-}}_{xy} & \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.10a)$$

Внеся это выражение в уравнение движения (3.2) и спроектировав последнее на оси координат, мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В жидкости, лишенной трения, все касательные напряжения равны нулю, и в уравнениях остаются только нормальные напряжения, которые к тому же одинаковы. Отрицательное значение любого из этих нормальных напряжений определяет давление в точке x, y, z . Следовательно, мы имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

При таком гидростатическом напряженном состоянии давление в жидкости равно среднему арифметическому из нормальных напряжений, взятым со знаком минус. Так как измерения, которые ведут к установлению термодинамического уравнения, выполняются в условиях, когда жидкость остается в покое, то только что указанное давление совпадает с термодинамическим давлением, входящим в уравнение состояния. Среднее арифметическое из нормальных напряжений, сумма которых является следом (первым инвариантом) тензора напряжений, целесообразно использовать в качестве особой расчетной величины также для вязкой жидкости, находящейся в состоянии движения. Это среднее арифметическое по-прежнему называют *давлением*, но связь этого давления с термодинамическим давлением требует дальнейшего исследования. Хотя это давление уже не равно обычному напряжению, нормальному к поверхности, тем не менее оно, как инвариант тензора напряжения, обладает свойством инвариантности относительно преобразования системы координат и определяется величиной

$$\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p. \quad (3.12)$$

В § 4 мы увидим, что при отсутствии релаксации оно остается равным термодинамическому давлению.

Система трех уравнений (3.11) содержит шесть составляющих $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ тензора напряжения. Следующей нашей задачей является установление связи этих составляющих с деформациями, а тем самым — и с составляющими u, v, w скорости. Прежде чем вывести эту связь, что мы сделаем в § 4 настоящей главы, остановимся подробнее на деформированном состоянии.

§ 3. Скорость деформации элемента жидкости при течении

Когда сплошное жидкое тело приходит в движение, каждый элемент жидкости с течением времени в общем случае перемещается в новое положение и при этом деформируется. Движение жидкости будет полностью определено, если вектор скорости ω будет задан как функция времени и положения, т. е. если будет известна функция $\omega = \omega(x, y, z, t)$. Поэтому должно существовать соотношение между составляющими скорости деформации и функцией $\omega = \omega(x, y, z, t)$. Скорость, с которой элемент жидкости деформируется, зависит от относительного движения двух точек. Рассмотрим две близкие точки A и B (рис. 3.2). При наличии поля скоростей точка A за промежуток времени dt совершает перемещение $s = \omega dt$ в положение A' , точка же B с радиусом-вектором dr по отношению к A перемещается в положение B' , расположенное относительно B согласно радиусу-вектору

$$s + ds = (\omega + d\omega) dt.$$

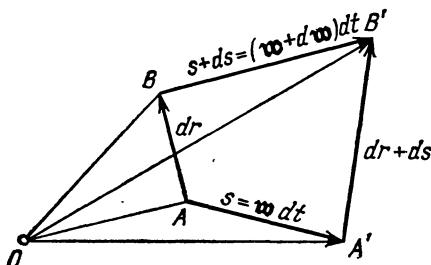


Рис. 3.2. Относительное смещение.

Пусть в точке A составляющие скорости w равны u, v, w . Тогда составляющие $u + du, v + dv, w + dw$ скорости $w + dw$ в соседней точке B мы найдем, развернув выражения этих составляющих в ряд Тейлора и сохранив в нем только члены первого порядка. Мы получим

$$\left. \begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ w + dw &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Таким образом, относительное движение точки B относительно точки A будет описываться следующей матрицей из девяти частных производных локального поля скоростей:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.13a)$$

Целесообразно преобразовать полученные выражения (3.13) составляющих du, dv, dz относительной скорости к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} du &= (\dot{\varepsilon}_x dx + \dot{\varepsilon}_{xy} dy + \dot{\varepsilon}_{xz} dz) + (\eta dz - \zeta dy), \\ dv &= (\dot{\varepsilon}_{yx} dx + \dot{\varepsilon}_y dy + \dot{\varepsilon}_{yz} dz) + (\zeta dx - \xi dz), \\ dw &= (\dot{\varepsilon}_{zx} dx + \dot{\varepsilon}_{zy} dy + \dot{\varepsilon}_z dz) + (\xi dy - \eta dx). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Легко проверить, что введенные новые символы имеют значения

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15a)$$

и

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.15b)$$

Заметим, что матрицы $\dot{\varepsilon}_{ij}$ симметричны, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_{yx} = \dot{\varepsilon}_{xy}, \quad \dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{zx}, \quad \dot{\varepsilon}_{zy} = \dot{\varepsilon}_{yz}, \quad (3.15b)$$

а величины ξ, η, ζ можно рассматривать как составляющие вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{w}. \quad (3.15c)$$

Каждой из введенных величин можно дать геометрическую интерпретацию, что мы сейчас и сделаем.

Поскольку мы сосредоточили наше внимание на непосредственной окрестности точки A , и так как целью нашего рассмотрения является движение точки B относительно A , то целесообразно поместить точку A в начало координат и рассматривать величины dx, dy, dz как координаты точки B в декартовой системе координат. Тогда уравнения (3.14) будут определять поле относительных скоростей, в котором составляющие du, dv, dw являются линейными функциями пространственных координат. Для того чтобы понять смысл отдельных членов в матрице (3.15а) и в равенствах (3.15б), рассмотрим эти члены каждый в отдельности.

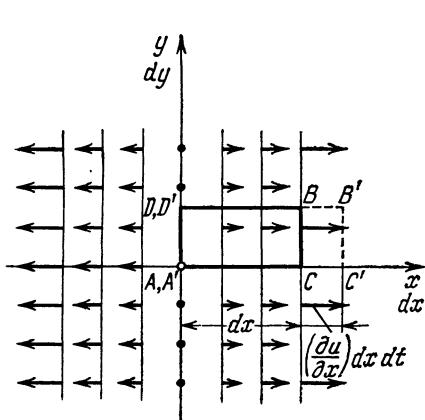


Рис. 3.3. Локальное искажение элемента жидкости для случая, когда $\partial u / \partial x > 0$, а все остальные члены равны нулю. Однородное растяжение в направлении x .

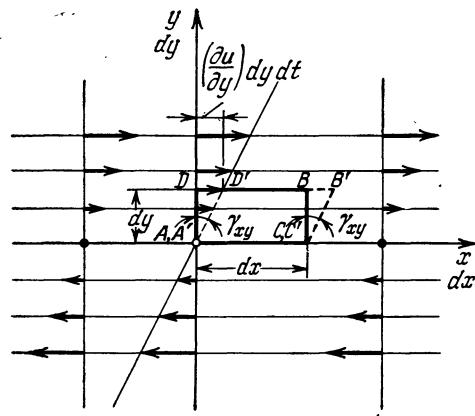


Рис. 3.4. Локальное искажение элемента жидкости, когда $\partial u / \partial y > 0$, а все остальные члены равны нулю. Однородный сдвиг.

На рис. 3.3 представлено поле скоростей для случая, когда отсутствуют все члены, кроме $\partial u / \partial x$, причем предполагается, что $\partial u / \partial x > 0$. Относительной скоростью точки B относительно A теперь будет

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx,$$

и поле скоростей будет состоять из плоскостей $x = \text{const}$, одинаковым образом удаляющихся со скоростью, пропорциональной dx , от плоскости $x = 0$. Элементарный параллелепипед, имеющий две вершины в точках A и B , подвергается в таком поле скоростей растяжению, причем грань BC удаляется от грани AD с возрастающей скоростью. Следовательно, величина ε_x представляет собой скорость удлинения элемента жидкости в направлении x . Аналогичным образом члены $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$ и $\varepsilon_z = \partial w / \partial z$ представляют собой скорости удлинения элемента жидкости в направлениях y и z .

Теперь легко видеть, какая деформация элемента жидкости возникает в результате одновременного действия всех трех диагональных членов матрицы (3.13а) или (3.15а). А именно, элемент жидкости удлиняется во всех трех направлениях, причем изменения длин трех ребер параллелепипеда вызывает изменение объема с относительной скоростью

$$\begin{aligned} e &= \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right) \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \right) \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \right) - dx dy dz}{dx dy dz dt} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.16)$$

с точностью до производных первого порядка. Однако в процессе этой деформации геометрическая форма элемента жидкости, определяемая углами при вершинах параллелепипеда, не искажается, так как прямые углы остаются прямыми. Таким образом, величина ϵ представляет собой мгновенное объемное расширение элемента жидкости. Для несжимаемой жидкости $\epsilon = 0$.

Для сжимаемой жидкости уравнение неразрывности (3.1) принимает вид

$$\dot{\epsilon} = \operatorname{div} \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.17)$$

следовательно, объемное расширение, т. е. относительное изменение объема равно взятой со знаком минус относительной скорости изменения локальной плотности.

Поле относительных скоростей будет иметь другой вид, когда один из недиагональных членов матрицы (3.13а), например $\partial u / \partial y$, не равен нулю. Для определенности примем его положительным. Соответствующее поле скоростей, изображенное на рис. 3.4, представляет собой деформацию чистого сдвига. Прямоугольный элемент жидкости, одна из вершин которого совпадает с началом прямоугольной системы координат, деформируется теперь в параллелограмм $A'D'B'C'A'$. Первоначально прямой угол в вершине изменяется со скоростью, измеряемой углом

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy},$$

т. е. со скоростью $\partial u / \partial y$.

Если не равны нулю два члена $\partial u / \partial y$ и $\partial v / \partial x$ и при этом оба они положительны, то первоначально прямой угол в вершине A искажается вследствие наложения двух движений так, как показано на рис. 3.5. Легко видеть, что теперь скорость изменения первоначально прямого угла в вершине определяется двумя недиагональными членами матрицы (3.15а) и равна

$$\dot{\epsilon}_{yx} = \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Вообще каждый из трех недиагональных членов $\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx}$, $\dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx}$ и $\dot{\epsilon}_{zy} = \dot{\epsilon}_{yz}$ определяет скорость искажения прямого угла, лежащего в плоскости, нормальной к оси, индекс которой отсутствует в двойном индексе недиагонального члена матрицы (3.15а). Это искажение сохраняет объем и изменяет только форму элемента жидкости.

На рис. 3.6 изображено поле скоростей для частного случая, когда $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$. Из предыдущих рассуждений и из того обстоятельства, что теперь $\dot{\epsilon}_{xy} = 0$, мы можем сразу сделать вывод, что прямой угол в вершине A остается неизменным. Это видно также из рисунка, который показывает, что элемент жидкости вращается вокруг точки A как твердое тело. Мгновенная угловая скорость этого вращения равна

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx dt} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теперь легко видеть, что согласно (3.15б) компонента ζ вектора $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{w}$, известная нам как завихренность поля скоростей, представляет угловую скорость мгновенного вращения элемента жидкости как твердого тела, и имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0.$$

В более сложном случае, когда $\partial v / \partial x \neq -\partial u / \partial y$, элемент жидкости вращается и одновременно его геометрическая форма искажается. Мы можем интерпретировать член

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

как скорость деформации элемента жидкости, а член

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

как скорость, с которой элемент жидкости принимает участие во вращении жидкости как твердого тела.

Линейность уравнений (3.13) или полностью им эквивалентных уравнений (3.14) означает, что самый общий случай деформации получается

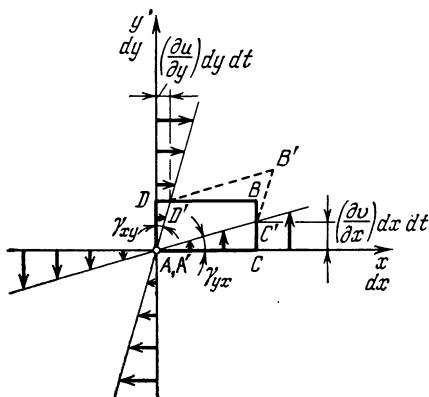


Рис. 3.5. Локальное искажение элемента жидкости, когда

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) > 0,$$

а все остальные члены равны нулю; искажение формы. (Диаграмма построена для $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$.)

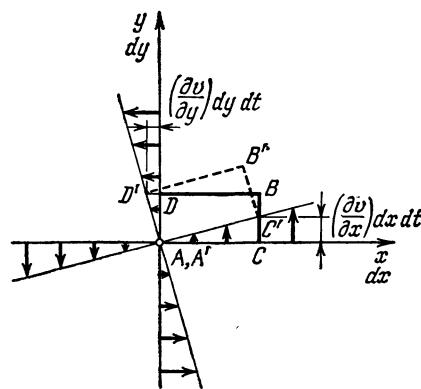


Рис. 3.6. Локальное искажение элемента жидкости, когда

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0.$$

Мгновенное вращение элемента жидкости как твердого тела.

посредством наложения только что описанных простых деформаций. Следовательно, если наше внимание сосредоточено на двух соседних точках A и B элемента жидкости, находящейся в непрерывном поле скоростей $w(x, y, z)$, то движение этого элемента может быть единственным образом разложено на четыре составляющих движения:

а) На чистое параллельное перемещение, определяемое составляющими u, v, w скорости w .

б) На вращение как твердого тела, определяемое составляющими ξ, η, ζ вектора $\frac{1}{2} \operatorname{rot} w$.

в) На объемное расширение, определяемое величиной $e = \operatorname{div} w$ или на линейные удлинения в направлении осей, определяемые соответственно величинами $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

г) На искажение геометрической формы, определяемое величинами $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zy}$.

Только два последних движения вызывают деформацию элемента жидкости, содержащего точку A , в прямом смысле слова; первые же два движения даже в общем случае вызывают только смещение элемента жидкости из его первоначального положения.

Элементы матрицы (3.15а) образуют систему составляющих симметричного тензора, называемого *тензором скоростей деформации*. Математические свойства этого тензора аналогичны свойствам тензора напряжений, также симметричного. Из теории упругости [3], [7], а также из тензорной алгебры [11] известно, что с каждым симметричным тензором можно связать три взаимно ортогональные главные оси, которые определяют три взаимно ортогональные главные плоскости, образующие привилегированную декартову систему координат. В этой системе координат вектор напряжения в каждой главной плоскости (или мгновенное движение в такой плоскости) нормален к ней, т. е. параллелен одной из главных осей. Когда применяется такая специальная система координат, матрицы (3.10) или (3.15а) содержат одни

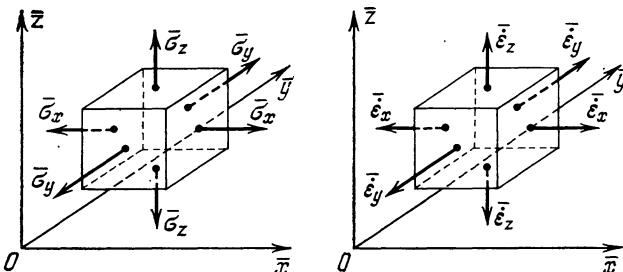


Рис. 3.7. Главные оси тензора напряжений и тензора скоростей деформации.

только диагональные члены. Обозначим соответствующие значения составляющих такого тензора прежними буквами, но с черточкой сверху; мы получим

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Наконец, вспомним, что такое преобразование координат не изменяет суммы диагональных членов, так как такая сумма, как мы уже отметили выше, является инвариантом тензора; следовательно, мы будем иметь

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z \quad (3.19a)$$

и

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \bar{\dot{\varepsilon}}_x + \bar{\dot{\varepsilon}}_y + \bar{\dot{\varepsilon}}_z (= \dot{\bar{e}} = \operatorname{div} \mathbf{w}). \quad (3.19b)$$

На рис. 3.7 изображены две такие привилегированные системы — одна для тензора напряжений, другая для тензора скоростей деформации. Мы видим, что элемент жидкости подвергается действию нормальных напряжений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, а его грани мгновенно перемещаются также в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Это, конечно, не означает, что в других плоскостях не возникают касательные напряжения и что форма элемента жидкости неискажается.

§ 4. Связь между напряженным состоянием и скоростью деформации

С самого начала подчеркнем, что уравнения, определяющие поверхностные силы в поле течения, должны быть получены на основе надлежащей интерпретации экспериментальных результатов и что дальнейшие наши рассуждения будут ограничены только изотропной ньютоновской жидкостью. Сведения, изложенные в предыдущем параграфе, обеспечивают нас надле-

жащим математическим фундаментом, позволяющим установить в более точной формулировке требования, диктуемые экспериментом.

Когда жидкость покоятся, в ней существует однородное поле гидростатического напряжения (отрицательное давление $-p$). Если же жидкость движется, то уравнение состояния должно определять также давление в каждой точке («принцип локального состояния» [4]), и поэтому удобно ввести в рассмотрение, наряду с остающимися при этом неизменными касательными напряжениями, девиатор нормальных напряжений

$$\sigma'_x = \sigma_x + p, \quad \sigma'_y = \sigma_y + p, \quad \sigma'_z = \sigma_z + p. \quad (3.20)$$

Полученные таким путем шесть величин образуют симметричный тензор напряжений, существование которого обязано движению, так как для покоящейся жидкости все составляющие этого тензора тождественно равны нулю. Из сказанного ранее следует, что составляющие полученного девиатора тензора напряжений связаны исключительно с составляющими тензора скоростей деформации, т. е. с составляющими u, v, w скорости и с составляющими ξ, η, ζ завихренности. Это равносильно тому, что мгновенное смещение элемента жидкости [составляющие движения (а)], а также его мгновенное вращение как твердого тела [составляющие движения (б)] не вызывает появления в дополнение к уже имеющимся составляющим гидростатического давления — поверхностных сил на элементе жидкости. Предыдущее утверждение представляет собой, очевидно, только краткую локальную формулировку общего случая, когда конечный объем жидкости совершает произвольное движение, неразличимое от эквивалентного движения твердого тела. Следовательно, выражения составляющих $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \dots, \tau_{zx}$ девиатора тензора напряжений могут содержать в себе только градиенты скорости $du/dx, \dots, dw/dz$ в соответствующих комбинациях, определением которых мы сейчас и займемся.

Прежде всего постулируем, что для обеспечения изотропии эти комбинации должны быть линейными и должны оставаться неизменными при вращении координат или при взаимной замене осей. Условия изотропии требуют также, чтобы главные оси тензора напряжений в каждой точке континуума совпадали с главными осями тензора скоростей деформации, иными словами, должно быть выбрано привилегированное направление.

Простейшим способом достичь нашей цели будет следующий. Выберем произвольную точку континуума и поместим в нее начало локальной системы координат x, y, z так, чтобы ее оси совпали с соответствующими главными осями тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Составляющие поля скоростей в этой системе координат обозначим через $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Теперь ясно, что изотропия будет обеспечена только в том случае, если каждое из трех нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ будет зависеть, во-первых, от соответствующей составляющей скорости деформации, умноженной на некоторый коэффициент пропорциональности λ , общий для всех трех составляющих, и, во-вторых, от суммы составляющих скоростей деформации, также умноженной на некоторый коэффициент пропорциональности μ , общий для всех трех составляющих. Таким образом, используя пространственные частные производные, мы можем сразу записать, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}'_x &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \\ \bar{\sigma}'_y &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \\ \bar{\sigma}'_z &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Величины u , v , w и ξ , η , ζ не входят в эти уравнения по только что объясненной причине. В правой части каждого из уравнений (3.21) последний член представляет собой соответствующую скорость линейного расширения, т. е. по существу изменение формы, первый же член выражает собой объемное расширение, т. е. скорость изменения объема или, что то же самое,—изменение плотности. Множитель 2 в последних членах несуществен — он введен, как мы увидим ниже, только с целью облегчения интерпретации. Множители μ и λ , введенные для обеспечения изотропии, должны быть одними и теми же во всех трех уравнениях (3.21). Легко видеть, что взаимная замена любых двух осей, а также взаимная замена любых из трех пар величин (\bar{u}, \bar{x}) , (\bar{v}, \bar{y}) , (\bar{w}, \bar{z}) оставляет весь набор выражений в правых частях равенств (3.21) инвариантным, как это и должно быть в изотропной среде. Кроме того, только что указанные особенности являются единственной комбинацией пространственных градиентов, обладающей требуемым свойством. Если читателю трудно обнаружить справедливость сказанного непосредственно, то советуем ему ознакомиться с более строгим изложением в каком-либо учебнике тензорной алгебры (или в книге [11]).

Уравнения (3.21) могут быть переписаны в виде, пригодном для применения в произвольной системе координат, путем поворота системы координат и с помощью линейных формул преобразования. Мы воздерживаемся от детального разбора необходимых преобразований. Они получаются очень просто, если воспользоваться тензорным исчислением. Соответствующие формулы можно найти в работах [8], [6], [7], [11]. Таким образом окончательно получаем

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_x = \lambda \operatorname{div} w + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma'_y = \lambda \operatorname{div} w + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma'_z = \lambda \operatorname{div} w + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{array} \right\} \quad (3.22a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{array} \right\} \quad (3.22b)$$

где символ $\operatorname{div} w$ применен для сокращения записи. Читатель сразу заметит, в какой последовательности переставляются в этих уравнениях индексы x , y , z , составляющие скорости u , v , w и координаты x , y , z ¹⁾.

Применив уравнения (3.22a) и (3.22b) к простому течению, изображеному на рис. 1.1, мы вновь придем к уравнению (1.2), следовательно, получим подтверждение того, что общие уравнения (3.22a) и (3.22b) сводятся к закону трения Ньютона для случая простого сдвига. Это означает, что уравнения (3.22a) и (3.22b) являются обобщением закона трения Ньютона. Одновременно выявляется, что множитель μ тождествен с вязкостью жидкости,

¹⁾ Система шести уравнений (3.22a), (3.22b) может быть заменена одним тензорным уравнением (в декартовой системе координат)

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

где δ -функция Кронекера равна $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ (знак суммирования по дважды повторяющемуся индексу опущен).

подробно обсужденной в § 2 главы I. Попутно оправдывается предварительное введение в правые части уравнений (3.21) множителя 2. Физический смысл множителя λ требует дальнейшего обсуждения. Пока отметим, что он не играет роли для несжимаемой жидкости, когда $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$; его приходится учитывать только для сжимаемой жидкости.

§ 5. Гипотеза Стокса

Проблема, которой мы посвятим настоящий параграф, возникла более 150 лет тому назад. Однако физическая интерпретация множителя λ , входящего в уравнения (3.21) или (3.22), для случая, когда дивергенция скорости не равна тождественно нулю, все еще продолжает обсуждаться, хотя в рабочие уравнения множитель λ не входит. Численное значение этого множителя было определено с помощью гипотезы, предложенной Г. Г. Стоксом в 1845 г. [13]. Не касаясь сейчас физических обоснований, оправдывающих гипотезу Стокса, мы сначала констатируем, что в соответствии с этой гипотезой необходимо принять существование соотношения

$$3\lambda + 2\mu = 0, \quad \text{или} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (3.23)$$

Это соотношение связывает множитель λ с вязкостью μ сжимаемой жидкости и сводит число свойств, характеризующих поле напряжений в текущей сжимаемой жидкости, с двух до одного, т. е. к тому же числу, которое требуется для несжимаемой жидкости.

Подставив это значение λ в уравнение (3.22а), мы получим нормальные компоненты девиатора тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma'_y &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma'_z &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Касательные напряжения остаются неизменными. Заменив σ'_x , σ'_y , σ'_z их выражениями (3.20), мы получим основные уравнения изотропной ньютоновской жидкости в их следующем окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.25b)$$

где p есть местное термодинамическое давление¹⁾.

¹⁾ В компактной тензорной записи уравнения (3.25а) и (3.25б) заменяются одним уравнением

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Несмотря на то, что соотношение (3.23) представляет собой чистую гипотезу или даже скорее догадку, оно может быть взято за основу дальнейших построений, и правильность рабочих уравнений, получающихся после подстановки в уравнения (3.11) соотношений (3.25), подтверждается необычайно большим числом экспериментальных проверок, причем выполненных даже при самых предельных условиях, в чем читатель сумеет убедиться после того, как начнет изучение этой книги. Таким образом, эти уравнения, не будучи результатом точного вывода, тем не менее являются превосходным приближением к действительности.

Так как составляющие девиатора напряжений являются единственными напряжениями, возникающими при движении, то они представляют собой именно те компоненты тензора напряжений, которые обусловливают диссиацию в изотермическом течении; они же вызывают дальнейшую диссиацию в температурном поле, возникающем вследствие теплопроводности.

Далее, так как множитель λ входит только в нормальные компоненты σ_x' , σ_y' , σ_z' , содержащие также термодинамическое давление, то становится ясным, что физический смысл λ связан с механизмом диссиации, возникающей при изменении объема элемента жидкости с конечной скоростью, а также с соотношением между полным тензором напряжений и термодинамическим давлением.

§ 6. Объемная вязкость и термодинамическое давление

Вернемся к нашему общему исследованию вне зависимости от того, законна или незаконна гипотеза Стокса. При этом ограничимся случаем, когда касательные напряжения отсутствуют, поскольку их физический смысл и происхождение ясен.

Рассмотрим жидкое тело, например, в форме шара, к границам которого приложено однородное нормальное напряжение $\bar{\sigma}$. При отсутствии движения напряжение $\bar{\sigma}$, очевидно, равно и противоположно по знаку термодинамическому давлению p . Сложив три уравнения (3.21) и приняв во внимание равенства (3.20), мы получим

$$\bar{\sigma} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} w. \quad (3.26)$$

Мы видим, что наши уравнения выражают собой то же самое, что и раньше (§ 5). Теперь вопрос сводится к тому, будет ли полученное соотношение иметь место в случае течения произвольного вида. Если жидкое тело сжимается квазистатически и обратимо, то мы вновь возвращаемся к предыдущему случаю, так как $\operatorname{div} w$ асимптотически стремится к нулю. Отметим, что в этих случаях скорость изменения работы при термодинамически обратимом процессе на единицу объема равна

$$\dot{W} = p \operatorname{div} w, \quad (3.26a)$$

или, что то же самое,

$$\dot{W} = p \frac{dV}{dt}. \quad (3.26b)$$

где V — удельный объем.

Если $\operatorname{div} w$ имеет конечное значение и жидкость сжимаемая, то жидкое тело расширяется или начинает колебаться с конечной скоростью, и равенство между \dot{W} и $-p$ будет соблюдаться только в том случае, когда коэффициент

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (3.27)$$

тождественно равен нулю (гипотеза Стокса). В противном случае равенство между σ и $-p$ не имеет места. При $\mu \neq 0$ колебательное движение шара (рис. 3.8, б) будет вызывать диссипацию энергии даже в том случае, если температура жидкого тела будет оставаться постоянной во всем его объеме. То же самое будет происходить и в случаях расширения или сжатия с конечной скоростью. Поэтому коэффициент μ' называется *объемной вязкостью жидкости*; он представляет то свойство, аналогичное сдвиговой вязкости при деформации, которое связано с диссипацией энергии в жидкости неизменной температуры из-за изменения объема с конечной скоростью. Таким образом, объемная вязкость является вторым свойством сжимаемой изотропной newtonовской жидкости, свойством, которое должно учитываться при

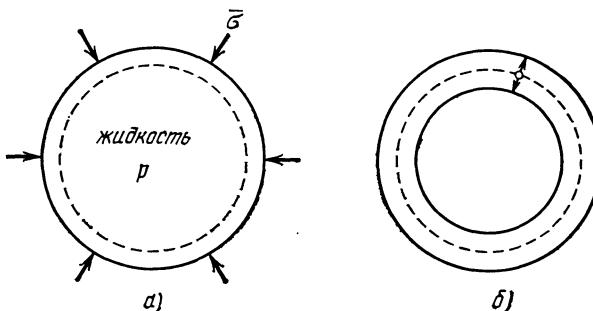


Рис. 3.8. Квазистатическое сжатие и колебательное движение шаровой массы жидкости.

составлении основных уравнений и, следовательно, должно измеряться в дополнение к измерению сдвиговой вязкости μ . Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mu' &= 0, \text{ если } p = -\bar{\sigma}, \\ \mu' &\neq 0, \text{ если } p = -\bar{\sigma}.\end{aligned}$$

Таким образом, принятие гипотезы Стокса равносильно предположению, что термодинамическое давление p равно одной трети инвариантной суммы нормальных напряжений даже в том случае, когда сжатие или расширение происходит с конечной скоростью. Кроме того, принятие гипотезы Стокса равносильно допущению, что колебательное движение жидкого шара, если оно происходит изотермически, обратимо. Более подробное рассмотрение этих вопросов на языке понятий термодинамики и в связи с его приложениями к необратимым процессам в сплошных средах можно найти в работах И. Пригожина [12] и С. Р. де Гроота и П. Мазура [1].

Для того чтобы определить условия, при которых объемная вязкость сжимаемой жидкости может не учитываться, необходимо обратиться либо к эксперименту, либо к методам статистической термодинамики, допускающей в принципе вычисление коэффициента переноса из первого начала. Однако статистические методы для газов с большой плотностью или для жидкостей пока не разработаны до такой степени, которая позволила бы полностью решить поставленную задачу. Что касается газов с малой плотностью, т. е. при условии, что в расчет принимаются только двойные столкновения молекул, можно предполагать, что в таких газах объемная вязкость тождественно равна нулю.

В газах с большой плотностью численное значение объемной вязкости, по-видимому, очень мало. Это означает, что уравнения (3.26а), (3.26б) продолжают определять работу в сплошной среде при отсутствии сдвига с высокой степенью приближения и что диссипация при постоянной температуре обусловливается даже в общем случае только девиатором тензора напря-

жений. Таким образом, мы опять приходим к гипотезе Стокса и тем самым — к уравнению (3.26). Однако это заключение не распространяется на жидкости, способные подвергаться релаксационным процессам вследствие местных отклонений от состояния химического равновесия [1], [8]. Такие релаксационные процессы возникают, например, при наличии химической реакции или при течении газа сложной структуры, когда становится возможным сравнительно медленный перенос энергии между поступательной и вращательной степенями свободы с одной стороны и колебательной степенью свободы с другой стороны. Таким образом, в тех случаях, когда возможны релаксационные процессы, термодинамическое давление не равно одной трети инварианта тензора напряжений.

Иногда утверждают, что принятие гипотезы Стокса, равносильное предположению о равенстве нулю объемной вязкости для ньютоновской жидкости, не должно совпадать с нашим интуитивным чувством, подсказывающим, что при циклической смене сжатия и расширения жидкого шара (рис. 3.8, б) не должно возникать диссиляции энергии. Как легко видеть из предыдущих рассуждений, это должно быть так потому, что диссилятивная часть поля напряжений при некоторых условиях обращается в нуль. Однако не следует забывать, что такое заключение правильно, только в том случае, если температура шаровой массы газа остается постоянной в течение всего колебательного процесса во всем объеме. В общем же случае это невозможно. Следовательно, в пульсирующей шарообразной массе газа вскоре возникает температурное поле и энергия диссилируется.

§ 7. Уравнения Навье — Стокса

Вернемся к уравнениям движения (3.11) и, воспользовавшись равенством (3.20), выделим из нормальных напряжений давление $-p$, которое не зависит от вязкости; тогда уравнения (3.11) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Применим теперь закон трения Стокса (3.24) и выразим составляющие результирующей поверхностной силы \mathbf{P} , входящие в правые части уравнений (3.28), в виде функций от составляющих u , v , w скорости смещения \mathbf{w} . Для составляющей силы \mathbf{P} в направлении x мы получим, согласно уравнению (3.10а), следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{w} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения мы получим и для составляющих P_y и P_z . Коэффициент вязкости μ в общем случае движения сжимаемой жидкости следует рассматривать как функцию точки. В самом деле, в сжимаемой жидкости изменения скорости и давления связаны со значительными изменениями температуры, возникающими в результате изменения объема и выделения

тепла вследствие трения; коэффициент же вязкости сильно зависит от температуры (см. таблицу 1.1 на стр. 22). Закон изменения вязкости от температуры, т. е. функция $\mu = \mu(T)$, определяется путем эксперимента; подробно об этом будет сказано в § 1 главы XIII.

Подставив выражения составляющих P_x , P_y , P_z в основные уравнения (3.11), мы получим

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} w \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} w \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} w \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial u}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Дифференциальные уравнения (3.29)¹⁾ составляют основу всей механики жидкости и газа и называются *уравнениями Навье — Стокса*. К этим уравнениям следует присоединить еще уравнение неразрывности (3.1), которое в раскрытой форме имеет для течений сжимаемой жидкости следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3.30)$$

Однако для исследования сжимаемых течений уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности недостаточно. В самом деле, изменения давления и плотности, происходящие в сжимаемых течениях, влекут за собой изменения температуры, что приводит к необходимости ввести в рассмотрение некоторые термодинамические соотношения. Первым таким соотношением является уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотность и температуру. Для идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$p - \rho R T = 0, \quad (3.31)$$

где R есть газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Далее, если изменение состояния протекает не изотермически, то необходимо использовать еще одно термодинамическое соотношение — уравнение энергии, которое выражает баланс теплоты и механической энергии (первое начало термодинамики) и представляет собой дифференциальное уравнение для распределения температуры. Подробно об этом уравнении будет сказано в главе XII. Наконец, последнее необходимое соотношение дает эмпирическая связь $\mu(T)$ между коэффициентом вязкости μ и температурой T (зависимостью вязкости от давления обычно пренебрегают). Таким образом, если массовые силы X , Y , Z рассматривать как заданные, то мы имеем семь уравнений для определения семи величин u , v , w , p , ρ , T , μ .

¹⁾ В индексной записи эти уравнения имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

В случае изотермического изменения состояния вместо семи уравнений остаются только пять уравнений (3.29), (3.30) и (3.31) для определения пяти неизвестных величин u , v , w , p , ρ .

Несжимаемые течения. Для несжимаемых течений ($\rho = \text{const}$) перечисленная выше система уравнений значительно упрощается даже в случае непостоянной температуры внутри жидкости. В самом деле, прежде всего уравнение неразрывности (3.1а) получает более простой вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0.$$

Далее, поскольку в несжимаемых течениях разности температур в общем случае малы, коэффициент вязкости можно рассматривать как постоянную величину¹⁾ и поэтому уравнение состояния и уравнение энергии становятся ненужными для расчета поля течения. Следовательно, этот расчет может производиться независимо от термодинамических уравнений. В результате уравнения движения (3.29) и уравнение неразрывности (3.30) упрощаются и, если члены, содержащие ускорение, выписать в раскрытом виде, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.33)$$

Таким образом, если массовые силы рассматривать как заданные, то остаются четыре неизвестные величины u , v , w , p , и для их определения имеется четыре уравнения.

Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости (3.32) могут быть объединены в одно векторное уравнение

$$\rho \frac{D \mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{K} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{w}, \quad (3.34)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

есть оператор Лапласа. От уравнений Эйлера для движения жидкости без трения уравнения Навье — Стокса отличаются присутствием в них члена $\mu \Delta \mathbf{w}$, учитывающего вязкость.

Для полной физической определенности решений системы уравнений Навье — Стокса должны быть заданы *граничные и начальные условия*. В вязкой жидкости имеет место прилипание частиц жидкости к ограничивающим стенкам, т. е. на стенках исчезают как нормальная, так и касательная составляющие скорости, следовательно, граничными условиями будут

$$w_n = 0, \quad w_t = 0 \text{ на твердых стенках.} \quad (3.35)$$

Уравнения (3.29) впервые были выведены М. Навье [9] (в 1827 г.) и С. Д. Пуассоном [10] (в 1831 г.) на основе соображений о действии межмолекулярных сил. Несколько позже эти же уравнения получили Б. Сен-Венан [14] (в 1843 г.) и Г. Г. Стокс [13] (в 1845 г.), но уже не привлекая к рассмотрению действие межмолекулярных сил, а исходя, во-первых, из допу-

¹⁾ В газах это условие приближенно удовлетворяется лучше, чем в жидкостях.

щения, что нормальные и касательные напряжения связаны со скоростями деформаций линейными зависимостями, т. е. из того же допущения, которое введено законом трения Ньютона, и, во-вторых, из предположения, что термодинамическое давление равно одной трети суммы нормальных напряжений, взятой со знаком минус.

Так как допущение, положенное в основу вывода уравнений Навье — Стокса, является совершенно произвольным, то заранее нельзя быть уверенным, что эти уравнения правильно описывают движение вязкой жидкости. Следовательно, уравнения Навье — Стокса нуждаются в проверке, которая возможна только путем эксперимента. Правда, необходимо иметь в виду, что до настоящего времени вследствие больших математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье — Стокса в их полном виде, т. е. с сохранением всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Однако известны некоторые частные решения, например для ламинарного течения в трубе или для течений в пограничном слое, и эти частные решения столь хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений Навье — Стокса.

Цилиндрические координаты. В дальнейшем нам неоднократно понадобятся уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах. Обозначим через r , φ , z соответственно радиальную, окружную и осевую координаты цилиндрической системы координат, через v_r , v_φ , v_z — составляющие скорости в направлении этих координат и выполним переход от прямоугольных координат к цилиндрическим. Тогда для несжимаемой жидкости мы получим вместо уравнений (3.32) и (3.33) следующие [3], [11]:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \\ = K_r - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) &= \\ = K_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \\ = K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.37)$$

Составляющие тензора напряжений будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \tau_{r\varphi} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right], \\ \sigma_\varphi &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & \tau_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Литература к главе III

1. De Groot S. R. and Mazur P., Non-equilibrium Thermodynamics. North-Holland Publ. Co., 1962.
2. Föppl A., Vorlesungen über technische Mechanik, т. 5, Teubner, Leipzig 1922.
3. Hopf L., Zähe Flüssigkeiten, глава в «Handbuch der Physik», т. VII, под редакцией H. Geiger и K. Scheela, Berlin 1927.
4. Kestin J., A Course in Thermodynamics, т. 1, Blaisdell 1966.
5. Kestin J., Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles. Rep. № 66—67, Lab. d'Aerothermique, Meudon 1966.
6. Lamb H., Hydrodynamics. Изд. 6-е, Cambridge 1957; также Dover 1945 (имеется русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947).
7. Love A. E. H., The Mathematical Theory of Elasticity. Изд. 4-е, Cambridge Univ. Press, 1952 (имеется русский перевод: Язв А., Математическая теория упругости, ОНТИ 1935).
8. Meixner J. und Reik H. G., Thermodynamic irreversiblen Prozesse. Статья в «Handbuch der Physik», т. VIII/2, под ред. S. Flugge, Springer 1959, 413—523.
9. Navier M., Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. Mém. de l'Acad. d. Sci. 6, 389—416 (1827).
10. Poisson S. D., Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides. Jour. de l'Ecole polytechn. 13, 139—186 (1831).
11. Prager W., Introduction to Mechanics of Continua. Ginn and Co., 1961.
12. Prigogine I., Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles, Dunod-Desoer 1947.
13. Stokes G. G., On the Theories of Internal Friction of Fluids in Motion. Trans. Cambr. Phil. Soc. 8, 287—305 (1845).
14. de St. Venant B., Note à joindre un mémoire sur la dynamique des fluides. Comptes-Rendus 17, 1240-1244 (1843).

Г л а в а IV

Общие свойства уравнений Навье — Стокса

Задачей интегрирования уравнений Навье — Стокса мы займемся в следующих главах. В этой же главе мы рассмотрим некоторые общие свойства этих уравнений, причем ограничимся только случаем несжимаемой вязкой жидкости.

§ 1. Вывод закона подобия Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса

До настоящего времени не найдены методы интегрирования уравнений Навье — Стокса в их общем виде. Правда, для некоторых частных случаев течения вязкой жидкости удалось найти решения, но среди этих частных случаев только совсем немногие не налагаются никаких ограничений на величину вязкости. К числу таких случаев, допускающих для коэффициента вязкости любые значения, принадлежат, например, течение Пуазейля в трубе и течение Куэтта между двумя параллельными стенками, из которых одна неподвижна, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (рис. 1.1). Это обстоятельство вынудило искать решение проблемы расчета течений вязкой жидкости, исходя из двух предельных случаев. А именно, с одной стороны, были рассмотрены течения с очень большой вязкостью, а с другой стороны, стали исследоваться течения с очень малой вязкостью, так как в том и другом случае получаются некоторые математические упрощения. Однако результаты, полученные для таких предельных случаев, ни в коем случае нельзя интерполировать на течения со средней величиной вязкости.

Предельные случаи очень большой и очень малой вязкости, несмотря на некоторые математические упрощения, все же остаются очень трудными для теоретического исследования. Это обстоятельство заставляет в широкой мере обращаться к экспериментальному изучению вязких течений. Такой способ изучения, вообще говоря, очень трудоемкий, так как требует выполнения большого количества измерений. Однако имеются возможности значительного сокращения измерений. Относительно этих возможностей весьма полезные указания дают уравнения Навье — Стокса.

Часто экспериментальные исследования обтекания тел производятся не на натуральных объектах, т. е. объектах в натуральную величину, а на геометрически подобных небольших моделях, помещаемых в искусственный поток жидкости (или воздуха). В таких случаях всегда возникает вопрос о динамическом подобии обоих течений, вопрос, непосредственно связанный с возможностью переноса результатов испытания модели на натуральный объект. Как уже было сказано в главе I, два течения с геометрически подобными границами называются динамически подобными, если для обоих течений геометрически подобны также картины линий тока. В той же главе мы установили, что для течений, в которых достаточно учитывать только

силы инерции и силы трения, признаком динамического подобия является равенство чисел Рейнольдса для обоих течений (закон подобия Рейнольдса). Выведем еще раз закон подобия Рейнольдса, но на этот раз не путем оценки сил, определяющих движение, а из уравнений Навье — Стокса.

Дифференциальные уравнения Навье — Стокса выражают собой не что иное, как равновесие приложенных к каждому элементу жидкости массовых сил (вес), поверхностных сил и сил инерции. В число поверхностных сил входят, во-первых, силы давления (нормальные силы) и, во-вторых, силы трения (касательные силы). Массовые силы (вес) играют при движении жидкости существенную роль только либо при наличии у жидкости свободной поверхности, либо при неравномерном распределении плотности, т. е. в случае неоднородной жидкости. В однородных же жидкостях без свободной поверхности вес, действующий на каждый элемент объема, уравновешивается гидростатической подъемной силой, вызываемой распределением гидростатического, или весового, давления, т. е. того давления, которое имеет место в состоянии покоя. Следовательно, при движении однородной жидкости без свободной поверхности массовые силы совершенно выпадают, если вместо действительного давления рассматривать разность между действительным давлением и давлением в состоянии покоя. В дальнейшем мы ограничимся только такими случаями, так как они являются наиболее важными для приложений. Тогда в уравнения Навье — Стокса будут входить только силы давления, силы трения и силы инерции.

Вернемся к уравнению Навье — Стокса в векторной форме, т. е. к уравнению (3.34). Если ограничиться случаем стационарного течения и учесть только что сказанное о равновесии между силой веса и гидростатической подъемной силой, то уравнение (3.34) примет вид¹⁾

$$\rho (\mathbf{w} \operatorname{grad}) \mathbf{w} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{w}, \quad (4.1)$$

причем под p теперь следует понимать разность между действительным и гидростатическим давлениями. Дифференциальное уравнение (4.1), очевидно, не должно зависеть от выбора единиц для входящих в него физических величин: скорости, давления и других.

Рассмотрим обтекание двух неодинаковых по размерам, но геометрически подобных тел, например двух шаров. Пусть в обоих течениях скорость, плотность и вязкость будут разными. Выясним, при каких условиях оба эти течения с геометрически подобными границами будут динамически подобны. Очевидно, что оба течения будут динамически подобны, если при надлежащем выборе единиц длины, времени и силы уравнение Навье — Стокса (4.1), составленное для первого течения, будет тождественно совпадать с таким же уравнением, составленным для второго течения. Для того чтобы освободиться от произвольного выбора указанных единиц, введем в дифференциальное уравнение (4.1) безразмерные величины. С этой целью выберем в качестве единиц измерения определенные постоянные величины, характерные для рассматриваемого течения (например, скорость набегающего течения и диаметр шара), и все результаты измерения будем выражать в этих единицах.

Пусть V , l и p_1 будут характерные величины, посредством которых все остальные величины делаются безразмерными. Тогда, измерив все величины, входящие в уравнение (4.1), в единицах V и l , мы будем иметь: безразмерную скорость $\mathfrak{W} = \frac{\mathbf{w}}{V}$; безразмерные длины $X = \frac{x}{l}$, $Y = \frac{y}{l}$, $Z = \frac{z}{l}$; безразмерное давление $P = \frac{p}{p_1}$.

¹⁾ См. сноску на стр. 56.

Введя эти безразмерные скорость, длины и давление в уравнение Навье — Стокса (4.1), мы получим

$$\rho \frac{V^2}{l} (\mathfrak{W} \operatorname{grad}) \mathfrak{W} = -\frac{p_1}{l} \operatorname{grad} P + \frac{\mu V}{l^2} \Delta \mathfrak{W}$$

или, после разделения всех членов на $\rho V^2/l$,

$$(\mathfrak{W} \operatorname{grad}) \mathfrak{W} = -\frac{p_1}{\rho V^2} \operatorname{grad} P + \frac{\mu}{\rho V l} \Delta \mathfrak{W} \quad (4.2)$$

Оба рассматриваемых течения будут подобны только в том случае, если решения уравнения Навье — Стокса (4.2), т. е. решения, выраженные в соответствующих безразмерных постоянных, для обоих течений совпадут. Для этого необходимо, чтобы безразмерные уравнения Навье — Стокса, составленные для обоих течений, отличались одно от другого только множителем, одинаковым для всех членов. Величина $p_1/\rho V^2$ представляет собой отношение давления p_1 к удвоенному динамическому давлению $\rho V^2/2$ и для динамического подобия двух течений несущественна, так как изменение давления в несжимаемой жидкости не вызывает изменения объема. Напротив, величина $\rho V l / \mu$ весьма существенна и для динамического подобия обоих течений должна принимать одно и то же значение. Таким образом, условие механического подобия будет выполнено, если для обоих течений будет соблюдаться равенство

$$\frac{\rho_1 V_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 l_2}{\mu_2}.$$

Этот закон был открыт О. Рейнольдсом при исследовании течений в трубах и называется в честь него *законом подобия Рейнольдса*. Безразмерное же число

$$\frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{v} = \text{Re} \quad (4.3)$$

называется *числом Рейнольдса*. Здесь, как и раньше, вместо отношения коэффициента вязкости μ к плотности ρ введена кинематическая вязкость v . Следовательно, подводя итог всему сказанному, мы можем коротко сказать: течения несжимаемых вязких жидкостей без свободных поверхностей около двух геометрически подобных тел динамически подобны, если для этих течений числа Рейнольдса одинаковы.

Таким образом, закон подобия, выведенный в § 5 главы I один раз путем оценки действующих сил, а другой раз из соображений о размерности, подтверждается и уравнениями Навье — Стокса.

§ 2. Течения без трения как «решения» уравнений Навье — Стокса

Забегая вперед, заметим, что несжимаемые течения *без трения* можно рассматривать как строгие решения уравнений Навье — Стокса, так как для таких течений члены уравнений Навье — Стокса, зависящие от вязкости, тождественно равны нулю. В самом деле, для несжимаемых течений, происходящих без трения, вектор скорости может быть представлен как градиент потенциала φ , т. е.

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \varphi,$$

и этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 56.

Но в таком случае имеет место равенство

$$\operatorname{grad} (\Delta \varphi) = \Delta (\operatorname{grad} \varphi) = 0,$$

и поэтому

$$\Delta w = 0.$$

Таким образом, для потенциальных течений член в уравнении (4.1), зависящий от вязкости, тождественно исчезает.

Однако для потенциальных течений оба граничных условия (3.35) для скорости в общем случае не могут быть выполнены одновременно. Если нормальная составляющая скорости вдоль границы наперед задана, то тем самым при потенциальном течении устанавливается и определенная касательная скорость, и поэтому условие прилипания не может быть удовлетворено. Следовательно, течения без трения в общем случае не могут рассматриваться как решения уравнений Навье — Стокса, имеющие физический смысл, так как они не удовлетворяют граничному условию, требующему равенства нулю касательной скорости на стенке, т. е. условию прилипания на стенке. Исключением является случай, когда стенка движется вместе с течением, следовательно, когда необходимость выполнения только что указанного условия отпадает. Простейшим примером такого течения является обтекание вращающегося цилиндра. В этом случае потенциальное течение может рассматриваться как решение уравнений Навье — Стокса, имеющее физический смысл. Подробнее об этом будет сказано на стр. 90. Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в работах Г. Хамеля [2] и Ж. Аккерета [1].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только плоских (двумерных) течений, так как, во-первых, только для них можно указать некоторые общие свойства уравнений Навье — Стокса, а во-вторых, именно они встречаются в преобладающей части приложений.

§ 3. Уравнения Навье — Стокса как уравнение переноса вихрей

Для плоского нестационарного течения в плоскости xy уравнения (3.32) и (3.33) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.4a)$$

где u и v суть составляющие вектора скорости

$$w = iu(x, y, t) + jv(x, y, t).$$

Таким образом, для определения трех величин u , v , p мы имеем три уравнения.

Введем в рассмотрение так называемую *ротацию скорости* $\operatorname{rot} w$, равную удвоенной вихревой напряженности ω . При плоском течении остается

только составляющая вихревой напряженности вдоль оси z , равная

$$\frac{1}{2} [\operatorname{rot} \omega]_z = \omega_z = \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

В потенциальных течениях вращение частиц отсутствует, поэтому в таких течениях $\operatorname{rot} w \equiv 0$. Исключив из уравнений (4.4) давление p и, приняв во внимание равенство (4.5), мы получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.6)$$

или, в сокращенной записи,

$$\frac{D\omega}{Dt} = v \Delta \omega. \quad (4.7)$$

Это уравнение, называемое *уравнением переноса вихрей*, показывает, что субстанциальное изменение вихревой напряженности, складывающееся из локальной и конвективной составляющих, равно диссипации вихревой напряженности вследствие трения. К уравнению (4.6) необходимо, конечно, присоединить уравнение неразрывности (4.4а), следовательно, для определения двух составляющих u , v скорости мы имеем два уравнения.

Наконец, мы можем два уравнения (4.6) и (4.4а) с двумя неизвестными заменить одним уравнением с одной неизвестной. Для этого введем функцию тока $\psi(x, y)$, т. е. положим

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.8)$$

и тем самым выполним интегрирование уравнения неразрывности (4.4а). Внеся эти значения u , v в равенство (4.5), мы получим

$$\omega = -\frac{1}{2} \Delta \psi. \quad (4.9)$$

Следовательно, уравнение переноса вихрей (4.6) примет вид

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = v \Delta \Delta \psi. \quad (4.10)$$

В этом виде уравнение переноса вихрей содержит только одну неизвестную ψ . Его левая часть содержит, так же как и уравнения Навье — Стокса, инерционные члены, а правая часть — члены, зависящие от вязкости. Уравнение (4.10) является дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции тока. Так как это уравнение нелинейное, то нахождение его общего решения связано с очень большими трудностями.

Решение уравнения переноса вихрей (4.10) для случая обтекания шара дано В. Г. Иенсоном [3]. На рис. 4.1 изображены получившиеся при этом решении картины линий тока для различных чисел Рейнольдса, а также соответствующие распределения вихревой напряженности. Наименьшее число Рейнольдса ($Re = 5$, рис. 4.1, a и g) соответствует течению, в котором силы трения значительно больше сил инерции (ползущее движение, см. § 4 главы IV и главу V). В этом случае во всем поле течения происходит вращение частиц и картина линий тока на передней и задней стороне шара приближенно

одинаковая. При увеличении числа Рейнольдса на задней стороне шара возникает возвратное течение и отрыв. Вихревая напряженность концентрируется все более и более на задней стороне шара, область же впереди шара

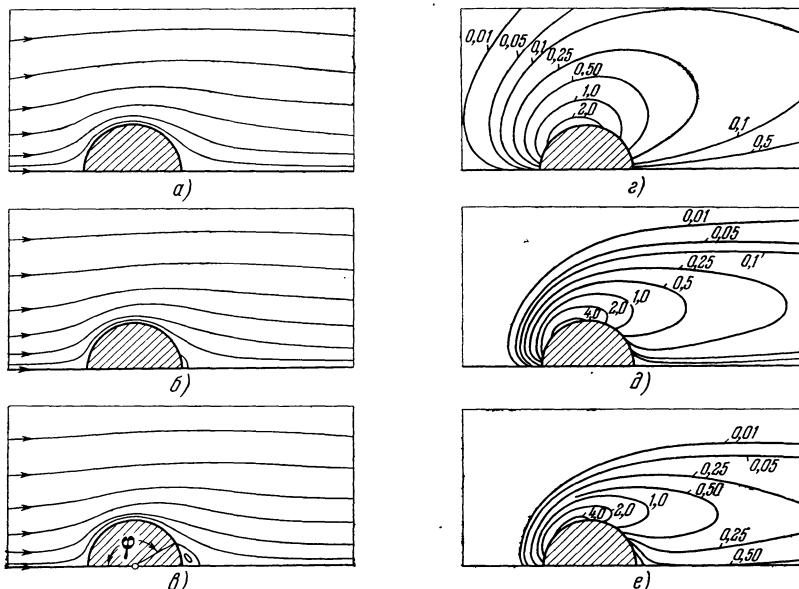


Рис. 4.1. Течение вязкой жидкости около шара при различных числах Рейнольдса $Re = VD/\nu$, вычисленное по уравнению переноса вихрей (4.10). а), б), в) — картины линий тока; д), е), в) — распределение вихревой напряженности $\omega D/V$; а), д) $Re = 5$; $c_W = 8,0$; отрыва нет; б), е) $Re = 20$; $c_W = 2,9$; отрыв при $\phi = 171^\circ$; в), в) $Re = 40$; $c_W = 1,9$; отрыв при $\phi = 148^\circ$. По В. Г. Иенсону [3].

остается свободной от вращения частиц. Эти результаты, полученные из уравнений Навье — Стокса, хорошо показывают характерные изменения картины течения при увеличении числа Рейнольдса. Впрочем, необходимо отметить, что даже при наибольшем числе Рейнольдса ($Re = 40$, рис. 4.1, в и 4.1, в) пограничный слой еще не успевает полностью сформироваться.

§ 4. Предельный случай очень больших сил вязкости (очень малое число Рейнольдса)

При очень медленных течениях, а также при течениях очень вязких жидкостей силы трения значительно больше, чем силы инерции. В самом деле, силы трения пропорциональны первой степени скорости, а силы инерции — квадрату скорости. Поэтому в первом приближении мы можем полностью пренебречь инерционными членами по сравнению с членами, зависящими от вязкости, и тогда вместо уравнения (4.10) мы будем иметь линейное дифференциальное уравнение

$$\Delta\Delta\psi = 0. \quad (4.11)$$

Возможности для решения такого уравнения значительно шире, чем для решения полного уравнения (4.10). Течения, удовлетворяющие уравнению (4.11), называются *ползущими движениями*. С математической точки зрения отбрасывание инерционных членов в предельном случае очень медленного движения вполне допустимо, так как при этом порядок дифференциального уравнения не понижается, и поэтому решения более простого

дифференциального уравнения (4.11) позволяют удовлетворить такому же количеству граничных условий, как и решения полного уравнения (4.10).

Ползущие движения можно рассматривать как решения уравнений Навье — Стокса для предельного случая очень малых чисел Рейнольдса ($Re \rightarrow 0$), так как число Рейнольдса есть не что иное, как отношение сил инерции к силам трения.

Решение уравнения (4.11) было получено Г. Г. Стоксом для шара и Г. Ламбом для круглого цилиндра. Решение Стокса применимо, например, к падению капель тумана в воздухе, а также к падению маленьких шариков в густом масле. В самом деле, в обоих этих случаях скорости настолько малы, что с большой степенью приближения можно пренебречь силами инерции. Гидродинамическая теория смазки, в которой изучается течение смазочного масла в очень узком промежутке между цапфой и подшипником, также основана на уравнениях ползущего движения. Правда, при вращении цапфы в подшипнике скорости движения в слое масла отнюдь не малы, но очень малое расстояние между цапфой и подшипником и сравнительно большая вязкость смазочного масла приводят к тому, что силы трения получаются значительно большими, чем силы инерции. Впрочем, необходимо отметить, что технические применения теории ползущего движения, если не считать теории смазки, весьма ограничены.

Наоборот, другой предельный случай, при котором в уравнении (4.10) члены, зависящие от вязкости, значительно меньше инерционных членов, имеет большое значение для практических приложений. Так как наиболее важные в техническом отношении жидкости — воздух и вода — обладают весьма малыми коэффициентами вязкости, то только что указанный предельный случай обычно имеет место при более или менее высоких скоростях. В этом предельном случае число Рейнольдса очень велико ($Re \rightarrow \infty$). Однако вытекающая отсюда возможность математического упрощения дифференциального уравнения (4.10) требует весьма большой осторожности. Нельзя просто вычеркнуть члены, зависящие от вязкости, т. е. всю правую часть уравнения (4.10), так как это понизило бы порядок дифференциального уравнения с четвертого до второго и поэтому решения упрощенного дифференциального уравнения не могли бы удовлетворять граничным условиям полного дифференциального уравнения. Поставленный вопрос об упрощении уравнений Навье — Стокса в предельном случае очень большого числа Рейнольдса является одним из основных вопросов теории пограничного слоя.

В следующем параграфе мы покажем на простом примере, какие общие выводы можно сделать о решениях уравнений Навье — Стокса в предельном случае очень большого числа Рейнольдса, т. е. в случае, когда силы вязкости очень малы по сравнению с силами инерции.

§ 5. Предельный случай очень малых сил вязкости (очень большое число Рейнольдса)

Наглядное представление о характере решений уравнений Навье — Стокса для предельного случая очень малой вязкости или очень малой величины сил трения по сравнению с силами инерции можно получить из следующей аналогии. Распределение температуры $\vartheta(x, y)$ в окрестности нагретого тела, обтекаемого жидкостью, определяется, как это будет показано в главе XII, дифференциальным уравнением

$$\rho c \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right). \quad (4.12)$$

В этом уравнении ρ есть плотность, c — удельная теплоемкость и λ — коэффициент теплопроводности текущей среды; ϑ есть разность между

температуру T температурного поля вокруг тела и постоянной температурой T_∞ жидкости на очень большом расстоянии от тела, т. е. $\vartheta = T - T_\infty$. Поле скоростей $u(x, y)$ и $v(x, y)$, входящих в уравнение (4.12), следует считать известным. Температура T_0 на контуре обтекаемого тела предполагается заданной, причем в простейшем случае она постоянна во всех точках контура и во все моменты времени, в общем же случае она изменяется при переходе от одной точки контура к другой и зависит от времени. Вообще температура T_0 может быть больше или меньше температуры T_∞ , т. е. $T_0 \geqslant T_\infty$. С физической точки зрения уравнение (4.12) выражает не что иное, как тепловой баланс единицы объема жидкости. В левой части уравнения

мы имеем изменение количества тепла вследствие конвекции, а в правой части — изменение количества тепла вследствие теплопроводности. Теплота, возникающая вследствие внутреннего трения, принимается пренебрежимо малой и не учитывается. Если $T_0 > T_\infty$, то задача состоит в определении температурного поля в окрестности нагреветого тела, охлаждаемого потоком жидкости. Сравнивая уравнение (4.12) с уравнением (4.6) для вихревой напряженности ω , мы видим, что оба уравнения имеют сходную структуру.

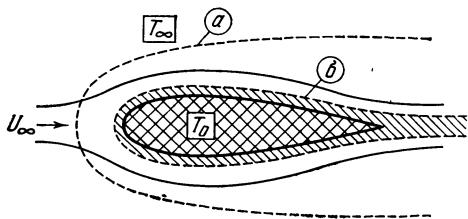


Рис. 4.2. Аналогия между распределением температуры и распределением вихревой напряженности в окрестности обтекаемого тела; а) граница нагретой области при малой скорости течения; б) та же граница при большой скорости течения.

Уравнение (4.6) сразу переходит в уравнение (4.12), если вихревую напряженность ω заменить разностью температур ϑ , а кинематическую вязкость ν — величиной $\lambda/\rho c$. Границному условию $\vartheta = 0$ на большом расстоянии от тела соответствует условие $\omega = 0$ для невозмущенного параллельного течения на большом расстоянии от тела. Следовательно, можно ожидать, что решения обоих уравнений (4.6) и (4.12), т. е. распределение вихревой напряженности и распределение температуры, имеют в окрестности тела сходную структуру.

Структура температурного поля в окрестности тела более или менее ясна из чисто наглядных соображений. В предельном случае, когда скорость течения равна нулю (случай покоя), тепло от нагреветого тела распространяется в окружающую среду равномерно во всех направлениях. То же самое происходит и при очень малых скоростях течения. При больших же скоростях течения картина распространения тепла, как легко себе представить, становится иной, а именно по мере увеличения скорости область течения, подвергающаяся нагреванию, все более и более стягивается, образуя узкую зону в непосредственной окрестности тела и длинный след нагретой жидкости позади тела (рис. 4.2).

Аналогичный характер имеет и решение уравнения (4.6) для вихревой напряженности. При небольших скоростях течения (силы трения велики по сравнению с силами инерции) вращение частиц жидкости возникает во всей окрестности тела. Напротив, при больших скоростях течения (силы трения малы по сравнению с силами инерции) следует ожидать такого поля течения, в котором вращение частиц жидкости сосредоточено в узкой зоне вдоль поверхности обтекаемого тела и в следе позади тела, во всей же остальной области течения практически не происходит вращения частиц (см. рис. 4.1). Таким образом, можно предполагать, что в предельном случае очень малых сил трения, т. е. очень большого числа Рейнольдса, решения уравнений Навье — Стокса обладают таким свойством, что все поле течения можно разделить на две области: на область тонкого слоя, облегающего

обтекаемое тело и распространяющегося позади тела в виде узкого следа, и на область внешнего течения, отделенного от тела только что указанным слоем. Внешнее течение свободно от вращения частиц, следовательно, подчиняется законам движения жидкостей, не обладающих трением, и поэтому может быть рассчитано как потенциальное течение. В тонком же слое около тела частицы жидкости при течении врачаются, и поэтому здесь течение должно рассчитываться на основе уравнений Навье — Стокса. Только в этом тонком слое силы трения играют существенную роль, т. е. величина этих сил имеет здесь одинаковый порядок с величиной сил инерции. Этот тонкий слой около тела называется *пограничным слоем* или *слоем трения*. Идея пограничного тела впервые была введена в механику жидкостей, как уже отмечалось выше, в начале текущего столетия Л. Прандтлем и оказалась весьма плодотворной. Лишь после того, как все поле течения вокруг обтекаемого тела было разделено на внешнее течение, свободное от вращения частиц, и на пограничный слой, в котором только и проявляет свое действие трение, удалось уменьшить математические трудности, связанные с интегрированием уравнений Навье — Стокса, и притом настолько, что для многих случаев интегрирование оказалось возможным выполнить. Такое интегрирование уравнений Навье — Стокса на основе идеи Л. Прандтля и составляет содержание теории пограничного слоя, излагаемой в последующих главах.

В том, что в предельном случае очень большого числа Рейнольдса вблизи тела существует тонкий слой, в котором в основном только и проявляет себя трение, можно убедиться в некоторых простых случаях путем прямого решения уравнений Навье — Стокса. Подробно мы рассмотрим эти случаи в следующей главе.

Известные в настоящее время решения уравнений Навье — Стокса, полученные путем численного анализа, также показывают, что в предельном случае очень больших чисел Рейнольдса существует тонкий пограничный слой, в котором сосредоточено влияние вязкости. К этой теме мы вернемся в главе V.

Рассмотренный в предыдущем параграфе предельный случай, в котором силы трения значительно превышают силы инерции (*ползущее движение*, число Рейнольдса очень мало), приводит к весьма значительному облегчению решения уравнений Навье — Стокса. Правда, пренебрежение силами инерции не понижает порядка уравнений Навье — Стокса, но зато делает их линейными. Предельный же случай, который мы рассмотрели в этом параграфе и в котором силы инерции значительно превышают силы трения (*пограничный слой*, число Рейнольдса очень велико), в математическом отношении труднее, чем случай ползущего движения. В самом деле, если мы просто подставим в уравнения Навье — Стокса (3.32) $\mu = 0$, то тем самым мы вычеркнем из этих уравнений, а также из уравнения для функции тока (4.10) производные наиболее высокого порядка, т. е. получим дифференциальное уравнение более низкого порядка. Очевидно, что решения этих уравнений не могут удовлетворить всем граничным условиям первоначальных, т. е. полных, дифференциальных уравнений. Но это означает, что решения упрощенных дифференциальных уравнений, полученных из полных уравнений путем вычеркивания членов, зависящих от вязкости, физически не имеют никакого смысла.

Отсюда вытекает следующий вывод: для получения из уравнений Навье — Стокса решений, соответствующих предельному случаю течений с очень большим числом Рейнольдса и в то же время имеющих определенный физический смысл, необходимо выполнить предельный переход к исчезающей малой вязкости $\mu \rightarrow 0$ не в самих дифференциальных уравнениях, а в их решениях.

§ 6. Математический пример предельного перехода $\text{Re} \rightarrow \infty$

Поскольку рассуждения предыдущих двух параграфов имеют очень важное значение для обоснования теории пограничного слоя, поясним заключенную в них сущность одним очень простым математическим примером, указанным Л. Прандтлем¹⁾.

Рассмотрим затухающее колебание материальной точки. Такого рода движение определяется дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (4.13)$$

где m есть масса колеблющейся точки, k — коэффициент затухания, c — коэффициент восстанавливающей силы, x — расстояние колеблющейся точки от положения равновесия и t — время. По аналогии с уравнениями Навье — Стокса с очень малой вязкостью v рассмотрим и здесь предельный случай очень малой массы m , когда в уравнении (4.13) член с производной высшего порядка становится очень малым.

Итак, исследуем решение дифференциального уравнения (4.13) при очень малых значениях m , причем

а) сначала путем подстановки $m = 0$ в заданное дифференциальное уравнение (4.13),

б) а затем путем подстановки $m = 0$ в полное решение дифференциального уравнения (4.13).

Подстановка $m = 0$ в дифференциальное уравнение (4.13) приводит к более простому уравнению более низкого порядка

$$k \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (4.14)$$

Его решение будет

$$x = Ae^{-ct/k}. \quad (4.15)$$

Полное же решение уравнения (4.13) для очень малых значений m ($\ll k^2/4c$) имеет вид

$$x = A_1 e^{-ct/k} + A_2 e^{-kt/m}. \quad (4.16)$$

Мы видим, что при $m \rightarrow 0$ полное решение (4.16) переходит в решение (4.15) упрощенного дифференциального уравнения (4.14), если положить

$$A_1 = A, \quad (4.17)$$

но при условии, что одновременно t не стремится к нулю. Определение постоянной A_2 производится путем задания начального условия для решения (4.16), например принимается, что

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0. \quad (4.18)$$

В этом случае

$$A_2 = -A_1. \quad (4.19)$$

Таким образом, оба сравниваемых решения имеют следующий вид:

$$x = Ae^{-ct/k}, \quad (4.15)$$

$$x = A(e^{-ct/k} - e^{-kt/m}). \quad (4.20)$$

Графическое изображение обоих решений дано на рис. 4.3 для случая, когда $A > 0$. Кривая a соответствует решению (4.15) упрощенного дифференциального уравнения (4.14). Кривые b , c и d соответствуют решению (4.20) полного дифференциального уравнения (4.13) при малых значениях m , причем чем выше кривая, тем меньше значение m . Начальному условию удовлетворяют только решения b , c , d полного дифференциального уравнения; решение упрощенного дифференциального уравнения (4.14)

¹⁾ Prandtl L., Anschauliche und nützliche Mathematik. Лекции в Гётtingене в зимнем семестре 1931—1932 г.

этому условию не удовлетворяет. При предельном переходе $t \rightarrow 0$ решение (4.20) полного дифференциального уравнения переходит в решение (4.15) упрощенного дифференциального уравнения, но это последнее решение, как только что было сказано, не удовлетворяет начальному условию (4.18).

Решение (4.20) полного дифференциального уравнения состоит из двух членов. Первый член, равный A при $t = 0$, при возрастании t медленно уменьшается. Будем называть его медленно изменяющимся решением. Это решение тождественно совпадает с решением (4.15) упрощенного дифференциального уравнения. Второй член решения (4.20) при возрастании t очень быстро затухает. Благодаря этому быстро изменяющемуся решению общее решение полного дифференциального уравнения удовлетворяет начальному условию (4.18).

Сравнив этот пример со случаем дифференциальных уравнений Навье — Стокса, мы увидим, что полное дифференциальное уравнение (4.13) соответствует дифференциальным уравнениям Навье — Стокса вязкой жидкости, а упрощенное дифференциальное уравнение (4.14) — дифференциальным уравнениям Эйлера идеальной жидкости. Начальное условие (4.18) отвечает условию прилипания вязкой жидкости, которому могут удовлетворить только решения уравнений Навье — Стокса, но не решения уравнений Эйлера. Медленно изменяющееся решение соответствует решению без учета трения (потенциальное течение), т. е. тому решению, которое не удовлетворяет условию прилипания на стенке. Быстро изменяющееся решение отвечает решению, зависящему от вязкости и не равному нулю только в узкой зоне вблизи стенок (граничный слой, или слой трения). Только путем присоединения решения, учитывающего картину течения в граничном слое, становится возможным удовлетворить условию прилипания на стенке, благодаря чему полное решение приобретает физический смысл.

Таким образом, рассмотренный простой пример еще раз наглядно подтверждает сказанное в предыдущем параграфе: предельный переход к очень малой вязкости (или к очень большому числу Рейнольдса) следует выполнить не в уравнениях Навье — Стокса путем вычеркивания членов, зависящих от вязкости, а в решении этих уравнений путем приближения коэффициента вязкости к нулю.

Ниже мы покажем, что для предельного перехода $Re \rightarrow \infty$ вовсе не требуется сохранять все члены уравнений Навье — Стокса. Некоторые из членов, зависящих от вязкости, все же можно отбросить как пренебрежимо малые по сравнению с другими такими членами. Важно лишь не отбрасывать всех членов, зависящих от вязкости, так как такой путь привел бы к недопустимому понижению порядка уравнений Навье — Стокса.

Литература к главе IV

1. Acker et J., Über exakte Lösungen der Stokes—Navier Gleichungen inkompres-sibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen. ZAMP 3, 259—271 (1952).
2. Hamel G., Über die Potentialströmung zäher Flüssigkeiten. ZAMM 21, 129—139 (1941).
3. Jenson V. G., Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers (< 40). Proc. Roy. Soc. London, A 249, 346—366 (1959).

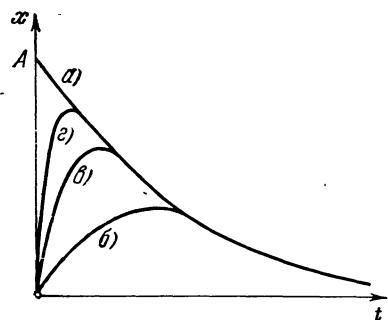


Рис. 4.3. Решение уравнения (4.13) колебательного движения материальной точки. а) Решение упрощенного дифференциального уравнения (4.14), $t = 0$; б), в), в) — решения полного дифференциального уравнения (4.13) при различных значениях t . Для небольших значений t (кривая в) решение обладает свойствами, характерными для граничного слоя.

Г л а в а V

Точные решения уравнений Навье — Стокса

Отыскание точных решений уравнений Навье — Стокса наталкивается в общем случае на непреодолимые математические трудности. Эти трудности возникают прежде всего вследствие нелинейности уравнений Навье — Стокса, не допускающей применения принципа наложения, столь плодотворного при исследовании потенциальных течений невязкой жидкости. Тем не менее в некоторых частных случаях все же можно найти точные решения уравнений Навье — Стокса. Такими случаями являются главным образом те, в которых квадратичные члены сами собой исчезают. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые точные решения и увидим, что большая часть этих решений в предельном случае очень малой вязкости имеет такой же характер, как течение в пограничном слое, т. е. в течениях, соответствующих этим решениям, действие трения проявляется только в тонком слое близи стенок.

Обширный обзор решений уравнений Навье — Стокса недавно опубликован Р. Беркером [4].

§ 1. Слоистые течения

Особенно простой класс точных решений представляют так называемые *слоистые течения*, характерным признаком которых является существование в них лишь *одной* составляющей скорости. Пусть, например, не равна нулю только составляющая u , составляющие же v и w всюду равны нулю. В таком случае из уравнения неразрывности сразу вытекает, что $\partial u / \partial x = 0$, и поэтому составляющая u не может зависеть от координаты x . Следовательно, для слоистого течения мы имеем

$$u = u(y, z, t), \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (5.1)$$

Из уравнений Навье — Стокса (3.32), составленных для направлений y и z , сразу получаем¹⁾

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Это означает, что давление в слоистом течении зависит только от координаты x и t . Далее, в уравнении Навье — Стокса, составленном для направления x , выпадают все конвективные члены, поэтому оно принимает более простой вид:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (5.2)$$

¹⁾ В дальнейшем под давлением будем понимать всегда разность между действительным давлением и гидростатическим давлением. Тогда массовые силы, как находящиеся в равновесии с силами весового давления, выпадут из уравнений Навье — Стокса (3.29),

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением относительно переменной u (y, z, t).

1. Течение в канале и течение Куэтта. Уравнение (5.2) очень просто решается для стационарного плоского течения в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками (рис. 5.1). В этом случае уравнение (5.2) принимает вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}, \quad (5.3)$$

причем граничными условиями, если расстояние между стенками равно $2b$, будут

$$u = 0 \text{ при } y = \pm b.$$

Так как $\partial p / \partial y = 0$, то из уравнения (5.3) следует, что перепад давления в продольном направлении постоянен, т. е. $dp/dx = \text{const}$, поэтому, проинтегрировав уравнение (5.3), мы получим

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2). \quad (5.4)$$

Следовательно, в канале имеет место параболическое распределение скоростей (рис. 5.1).

Другое простое решение уравнения (5.3) получается для течения между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна поконится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью U (рис. 5.2). Такое течение называется *течением Куэтта*. Пусть расстояние между стенками равно h ; тогда граничными условиями будут

$$u = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$u = U \text{ при } y = h,$$

и решение уравнения (5.3) будет иметь вид

$$u = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (5.5)$$

Распределения скоростей, даваемые этим решением для различных значений перепада давления, изображены на рис. 5.2. В частности, для нулевого перепада давления получается линейное распределение скоростей

$$u = \frac{y}{h} U. \quad (5.5a)$$

Течение с таким распределением скоростей часто называют *простым течением Куэтта* или *течением чистогодвига*. Течение Куэтта в более широком смысле, т. е. с перепадом давления, не равным нулю, представляет собой наложение простого течения Куэтта и течения в канале. Форма кривой распределения скоростей при течении Куэтта определяется безразмерным

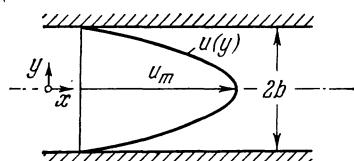


Рис. 5.1. Плоское течение в канале с параболическим распределением скоростей.

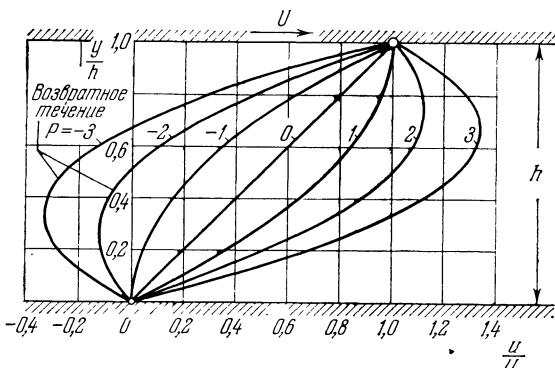


Рис. 5.2. Течение Куэтта между двумя параллельными плоскими стенками. Кривые со значениями $P > 0$ соответствуют падению давления в направлении движения верхней стенки, а со значениями $P < 0$ — повышению давления в этом направлении; кривая $P = 0$ соответствует градиенту давления, равному нулю.

градиентом давления

$$P = \frac{h^2}{2\mu U} \left(-\frac{dp}{dx} \right).$$

Для $P > 0$, т. е. для случая падения давления в направлении движения верхней стенки, скорость положительна по всей ширине канала. При отрицательных P в некоторой части поперечного сечения возможны отрицательные скорости, иными словами, возможно *возвратное течение*. Вблизи неподвижной стенки такое движение возникает уже при $P < -1$ (см. рис. 5.2). Объясняется оно тем, что в этом случае для частиц жидкости, находящихся вблизи неподвижной стенки, увлекающее действие соседних, более быстрых слоев не в состоянии преодолеть перепад давления, действующий в сторону, противоположную движению верхней стенки.

Течение Кэттса с наличием градиента давления в основных чертах сходно с течением масла в узком промежутке между цапфой и подшипником; последнее течение составляет предмет гидродинамической теории смазки (см. § 3 главы VI).

2. Течение Хагена — Пуазейля в трубе. Пространственным осесимметричным течением, аналогичным только что рассмотренному плоскому течению в канале, является течение в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением. Пусть ось трубы совпадает с осью x (см. рис. 1.2); радиальную координату y будем измерять от оси трубы. Составляющие скорости в радиальном направлении и в направлении касательной к окружности поперечного сечения равны нулю. Составляющая в осевом направлении пусть равна u ; она зависит только от координаты y . Давление в каждом поперечном сечении трубы постоянно. Следовательно, из трех уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах (3.36) остается только последнее (для осевого направления); при выбранных здесь обозначениях оно принимает вид

$$\mu \left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx}. \quad (5.6)$$

Границными условиями будут

$$u = 0 \quad \text{при всех } y = R$$

Решив уравнение (5.6), мы получим распределение скоростей по поперечному сечению трубы:

$$u(y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2), \quad (5.7)$$

где

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \text{const}$$

есть постоянный перепад давления, который следует рассматривать заданным. Формула (5.7), полученная нами как точное решение уравнений Навье — Стокса, совпадает с формулой (1.10), выведенной в главе I элементарным путем. Мы видим, что распределение скоростей в поперечном сечении изображается параболоидом вращения. Максимальная скорость течения имеет место в середине трубы и равна

$$u_m = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right).$$

Средней скоростью в поперечном сечении будет

$$\bar{u} = \frac{u_m}{2} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right); \quad (5.8)$$

следовательно, через поперечное сечение протекает в единицу времени количество жидкости (расход)

$$Q = \pi R^2 \bar{u} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (5.9)$$

Формула (5.9) называется *законом Хагена — Пузейля* для течения в круглой трубе.

Рассмотренное ламинарное течение, взятое само по себе, является точным решением уравнений Навье — Стокса для любых значений dp/dx , R и μ , следовательно, и для любых значений \bar{u} , R , μ . Однако в действительности оно имеет место только до тех пор, пока число Рейнольдса $Re = \bar{u}d/\nu$ (d — диаметр трубы) остается ниже определенного значения, называемого *критическим числом Рейнольдса*. Согласно опытам критическое число Рейнольдса равно примерно

$$\left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \right)_{kp} = Re_{kp} = 2300.$$

При числах Рейнольдса $Re > Re_{kp}$ возникает другая форма течения, называемая *турбулентной*; ее мы рассмотрим подробно ниже, в главе XX.

В технических расчетах принято связывать перепад давления со средней скоростью течения посредством введения безразмерного коэффициента, называемого *коэффициентом сопротивления* λ . Для этой цели принимается, что

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2, \quad (5.10)$$

т. е. предполагается, что падение давления пропорционально динамическому давлению и, следовательно, квадрату средней скорости течения¹⁾. Подставив в равенство (5.10) значение dp/dx из равенства (5.9), мы получим

$$\lambda = \frac{2d}{\rho \bar{u}^2} \frac{8\mu \bar{u}}{R^2} = \frac{32\mu}{\rho \bar{u} R}.$$

Если ввести число Рейнольдса, составленное для диаметра трубы и средней скорости течения, т. е.

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} = \frac{\bar{u} d}{\nu}, \quad (5.11)$$

то предыдущее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (5.12)$$

Равенство (5.12) выражает собой закон сопротивления для круглой трубы при ламинарном течении. Этот закон наилучшим образом подтверждается результатами измерений (для ламинарной области течений!), что хорошо видно из рис. 5.3, на котором показаны результаты измерений Г. Хагена [9].

¹⁾ Подчеркнем, что квадратичный закон сопротивления, при котором $dp/dx \sim \bar{u}^2$, верен при турбулентном течении в трубе; при ламинарном же течении имеет место, как это видно из равенства (5.4), линейный закон сопротивления $dp/dx \sim \bar{u}$. Тем не менее в технических расчетах принимается, что квадратичный закон сопротивления справедлив и при ламинарном течении. Конечно, при таком предположении коэффициент сопротивления λ для ламинарного течения уже не является постоянным.

Отсюда можно вывести обратное заключение, а именно, что параболическое распределение скоростей (5.7), являющееся точным решением уравнений Навье — Стокса, также должно совпадать с результатами эксперимента [20]. Уравнения Навье — Стокса допускают точное решение также для течения в трубе с поперечным сечением в виде круглого кольца [18]. Ламинарное и турбулентное течения в трубе с поперечным сечением в виде эксцентрического круглого кольца исследованы теоретически и экспериментально в работе [34].

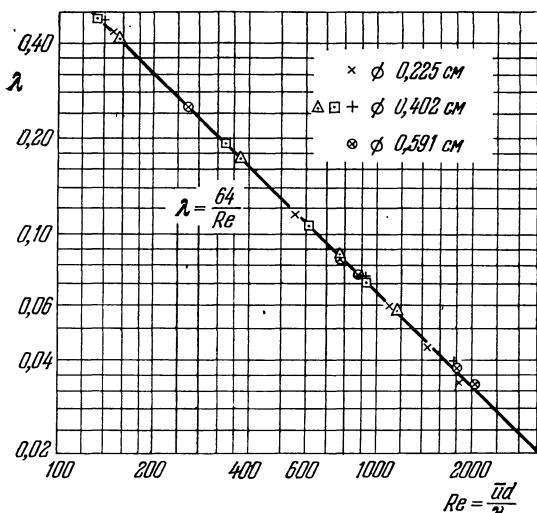


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса при ламинарном течении в трубе (измерения Хагена). По Прандтлю — Титтенсу.

3. Течение между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. Следующим случаем, допускающим простое точное решение уравнений Навье — Стокса, является течение между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с различными, но постоянными угловыми скоростями.

Пусть r_1 и r_2 суть радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, а ω_1 и ω_2 — их угловые скорости. Поскольку рассматриваемое течение можно считать плоским, из системы уравнений Навье — Стокса в полярных координатах (3.36) остаются только первые два, которые, если окружнюю скорость обозначить через u , примут вид

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) = 0. \quad (5.14)$$

Границными условиями будут

$$u = r_1 \omega_1 \quad \text{при } r = r_1$$

и

$$u = r_2 \omega_2 \quad \text{при } r = r_2.$$

Проинтегрировав уравнение (5.14) при заданных граничных условиях, мы получим

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r (\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right]. \quad (5.15)$$

Распределение давления в радиальном направлении определяется уравнением (5.13).

Некоторый практический интерес представляет случай, когда внутренний цилиндр покоятся, а внешний — вращается. В этом случае вращающий момент, передаваемый внешним цилиндром на жидкость, равен

$$M_2 = 4\pi \mu h \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \omega_2, \quad (5.16)$$

где h есть высота цилиндра. Такую же величину имеет и момент M_1 , передаваемый жидкостью на покоящийся внутренний цилиндр. Такое устрой-

ство из двух соосных цилиндров иногда применяется для экспериментального определения коэффициента вязкости. Измерив угловую скорость внешнего цилиндра и врачающий момент M_1 , передаваемый на внутренний цилиндр, можно из равенства (5.16) вычислить коэффициент вязкости.

В случае одного-единственного цилиндра, врачающегося в неограниченно распространенной жидкости ($r_2 \rightarrow \infty$, $\omega_2 = 0$), формула (5.15) принимает вид

$$u = \frac{r_1^2 \omega_1}{r}$$

и момент, передаваемый жидкостью на цилиндр, равен

$$M_1 = 4\pi\mu h r_1^2 \omega_1.$$

Поле скоростей в окрестности цилиндра в этом случае в точности такое же, как в окрестности вихревой нити с напряженностью $\Gamma_1 = 2\pi r_1^2 \omega_1$, врачающейся в жидкости без трения, следовательно,

$$u = \frac{\Gamma_1}{2\pi r}.$$

Таким образом, течение без трения в окрестности вихревой нити является одновременно решением уравнений Навье — Стокса (см. по этому поводу § 2 главы IV).

В связи со сказанным отметим, что при *нестационарном* течении, возникающем при распаде вихревой нити под действием вязкости, также возможно точное решение уравнений Навье — Стокса. Как показали К. В. Озен [19] и Г. Хамель [10], зависимость окружной скорости от радиуса r и времени t определяется при таком распаде формулой

$$u(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/4vt}).$$

Графически это распределение скоростей изображено на рис. 5.4. В приведенной формуле Γ_0 есть циркуляция вихревой нити в момент времени t_0 , т. е. в момент, когда начинает проявлять свое действие вязкость. Экспериментальные исследования такого распада вихря выполнены А. Тимме [36].

К. Кирде [16] исследовал теоретически и экспериментально случай, когда начальное распределение скоростей отличается от распределения, получающегося при потенциальном течении вокруг вихревой нити.

4. Плоская стенка, внезапно приведенная в движение (первая задача Стокса). Рассмотрим теперь некоторые *нестационарные слоистые течения*. Так как при таких течениях члены с конвективными составляющими ускорения тождественно равны нулю, то в уравнениях Навье — Стокса остаются только члены с локальными составляющими ускорения и с силами трения. Простейшими течениями такого рода являются так называемые *разгонные течения*, т. е. такие, которые возникают из состояния покоя. Пусть, например, плоская стенка, ранее покоявшаяся, внезапно начинает двигаться в своей собственной плоскости с постоянной скоростью U_0 . Выясним, какое

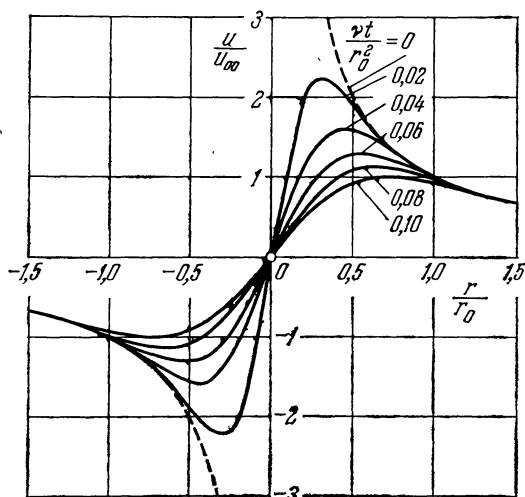
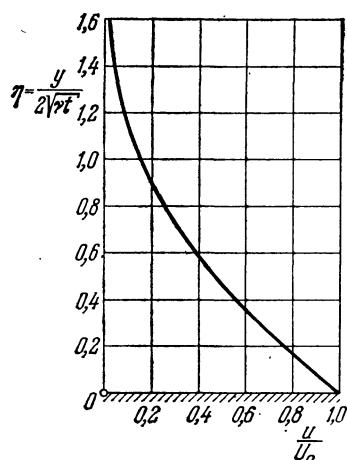


Рис. 5.4. Изменение распределения скоростей во времени в окрестности вихревой нити вследствие действия вязкости. Γ_0 — циркуляция вихревой нити в момент времени $t = 0$, т. е. в тот момент, когда начинается действие вязкости; $u_{\infty} = \Gamma_0 / 2\pi r_0$.

текущее возникает при этом вблизи стенки¹⁾. Пусть стенка совпадает с плоскостью xz . Для плоской задачи из уравнений Навье — Стокса остается только следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.17)$$

Давление во всем пространстве постоянно. Начальными условиями будут:



$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } t \leq 0 & u = 0 \quad \text{для всех } y, \\ \text{при } t > 0 & u = U_0 \quad \text{для } y = 0; \\ & u = 0 \quad \text{для } y = \infty. \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

Дифференциальное уравнение (5.17) совпадает с уравнением теплопроводности, описывающим распространение тепла в полупространстве $y > 0$ для того случая, когда в момент времени $t = 0$ стенка $y = 0$ доводится до некоторой температуры, превышающей температуру окружающей среды. Если ввести новую безразмерную переменную

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}, \quad (5.19)$$

то уравнение в частных производных (5.17) можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение. Далее, если положить

$$u = U_0 f(\eta), \quad (5.20)$$

то для $f(\eta)$ получится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (5.21)$$

с граничными условиями

$$f = 1 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } f = 0 \text{ при } \eta = \infty.$$

Решение этого уравнения будет

$$u = U_0 \operatorname{erfc} \eta, \quad (5.22)$$

где

$$\operatorname{erfc} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = 1 - \operatorname{erf} \eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

есть дополнительный интеграл вероятности, для которого имеются подробные таблицы²⁾. Распределение скоростей изображено на рис. 5.5. Профили скоростей для различных моментов времени аффинно-подобны между собой, т. е. они могут быть приведены в совпадение путем изменения масштаба в направлении y . Дополнительный интеграл вероятности, входящий в равенство (5.22), имеет численное значение 0,01 примерно при $\eta = 2,0$. Вспомнив

¹⁾ Эту задачу вместе с некоторыми другими задачами решил в своей знаменитой статье о маятнике [31] Г. Г. Стокс. Некоторые авторы называют ее задачей Рэйли, что, однако, неправильно, так как ее полное решение было дано раньше Стоксом в упомянутой статье.

²⁾ См., например, Sheppard, The Probability Integral, British Assoc. Adv. Sci., Math. Tables, т. 7 (1939), а также Works Projekt Administration, Tables of the Probability Function, New York 1941.

в связи с этим определение толщины пограничного слоя (стр. 38), мы найдем, что толщина слоя, увлекаемого пластиною вследствие трения, равна

$$\delta = 2\eta_0 \sqrt{vt} \approx 4\sqrt{vt}, \quad (5.23)$$

т. е. она пропорциональна корню квадратному из кинематической вязкости и корню квадратному из времени.

Э. Беккер [3] решил эту задачу в более общем виде — с учетом сжимаемости жидкости и при постепенном увеличении скорости стенки.

5. Развитие во времени течения Куттта. Только что рассмотренная задача о развитии во времени пограничного слоя около стенки, внезапно приведенной в движение, может быть обобщена на случай, когда на расстоянии h от движущейся стенки находится другая, ей параллельная, но неподвижная стенка. В этом случае будет иметь место не что иное, как разгон течения Куттта, причем распределение скоростей с увеличением времени будет асимптотически приближаться к линейному распределению, изображеному на рис. 1.1. Дифферен-

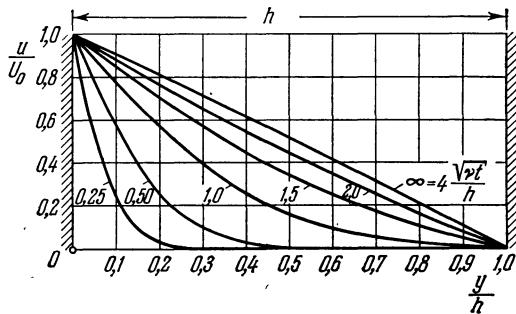


Рис. 5.6. Развитие течения Куттта во времени.

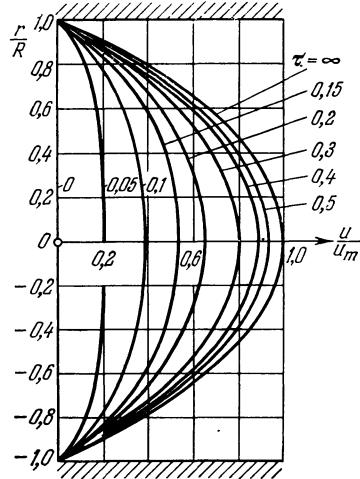


Рис. 5.7. Распределение скоростей при разгоне течения в трубе; $\tau = vt/R^2$. По Шиманскому [33].

циальным уравнением движения будет по-прежнему уравнение (5.21), с той только разницей, что граничными условиями теперь будут

$$f = 1 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } f = 0 \text{ при } \eta = \eta_1,$$

где $\eta_1 = h/2\sqrt{vt}$ есть безразмерное расстояние между обеими стенками. Решение уравнения (5.21), удовлетворяющее этим граничным условиям, легко получается, так как кроме функции $f(\eta)$ решением будет также любая из функций $f(c + \eta)$ и $f(c - \eta)$. Обозначив основное решение (5.22) через $F(\eta)$, мы получим искомое решение поставленной задачи, удовлетворяющее обоим граничным условиям, в следующем виде:

$$\frac{u}{U_0} = f(\eta) = F(\eta) - F(2\eta_1 - \eta) + F(2\eta_1 + \eta) - F(4\eta_1 - \eta) + F(4\eta_1 + \eta) - \dots \quad (5.24)$$

Оно изображено на рис. 5.6. Теперь, в отличие от предыдущего случая, аффинно-подобны между собой, и притом лишь приближенно, только первые профили, соответствующие начальной стадии разгона, при которой слой жидкости, увлеченный движущейся стенкой, еще не распространился до неподвижной стенки. Профили, соответствующие более поздней стадии разгона, уже не аффинно-подобны между собой и асимптотически приближаются к линейному распределению скоростей стационарного течения.

6. Развитие во времени течения в трубе. С задачами, рассмотренными в двух предыдущих пунктах, много общего имеет задача о разгоне течения в трубе. Под такой задачей мы понимаем следующую. Жидкость, находящаяся в бесконечно длинной круглой трубе, до момента времени $t = 0$ покоятся; в момент времени $t = 0$ внезапно возникает перепад давления dp/dx , в дальнейшем не изменяющийся во времени. Под действием сил трения и сил инерции возникает разгонное течение, которое асимптотически переходит в течение Хагена — Паузеля с параболическим распределением скоростей. Решение этой задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению Бесселя, дано Ф. Шиманским [33]. Профили скоростей для различных моментов времени изображены на рис. 5.7. Характерно, что в самой начальной стадии разгона скорость получается одинаковой почти по всему попереч-

ному сечению трубы и влияние трения заметно только в тонком слое вблизи стенок. Лишь затем действие трения распространяется до середины трубы. С увеличением времени асимптотически достигается параболическое распределение стационарного течения. Решение аналогичной задачи для трубы с поперечным сечением в виде круглого кольца дано В. Мюллером [18].

При внезапном выключении неравномерности давления возникает торможение течения. Расчет такого торможения выполнен В. Герберсом [8].

От только что рассмотренного нестационарного разгонного течения в трубе следует отличать стационарное течение в начальном участке трубы. На протяжении этого участка профиль скоростей, имеющий во входном поперечном сечении прямоугольную форму, постепенно, под влиянием трения, вытягивается, пока, наконец, на некотором расстоянии от входа в трубу не принимает параболическую форму, соответствующую течению Хагена — Пуазеля. Так как при течении в начальном участке $du/dx \neq 0$, то такое течение не является слоистым. Плоское течение в начальном участке (вход в канал) было исследовано Г. Шлихтингом [28], а осесимметричное (вход в круглую трубу) — Л. Шиллером [27] и Б. Пуннисом [22] (см. по этому поводу также § 8 главы IX и § 2 главы XI).

7. Течение вблизи колеблющейся плоской стенки (вторая задача Стокса). Пусть неограниченная плоская стенка совершает в своей плоскости прямолинейные гармонические колебания¹⁾. Ось x расположим в плоскости стенки, а ось y направим перпендикулярно к стенке. Так как жидкость прилипает к стенке, то колебания последней приводят к тому, что жидкость на самой стенке ($y = 0$) обладает некоторой скоростью, меняющейся, согласно условию, по закону

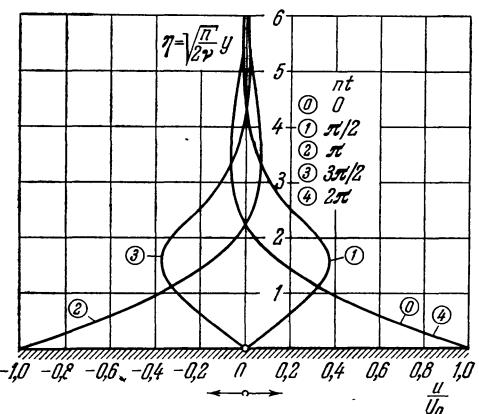


Рис. 5.8. Распределение скоростей вблизи плоской стенки, совершающей колебания в собственной плоскости (вторая задача Стокса).

в рассматриваемом случае, с учетом граничного условия (5.25), оно имеет вид

$$u(y, t) = U_0 e^{-ky} \cos(nt - ky), \quad (5.26)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{n}{2v}}.$$

В правильности решения (5.26) легко убедиться путем подстановки его в дифференциальное уравнение (5.17). Сделав замену

$$\eta = ky = y \sqrt{\frac{n}{2v}},$$

мы получим вместо формулы (5.26) следующую:

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta} \cos(nt - \eta). \quad (5.26a)$$

Таким образом, жидкость вблизи стенки совершает колебательное движение с убывающей по мере удаления от стенки амплитудой $U_0 e^{-y \sqrt{n/2v}}$, причем

¹⁾ И эта задача сначала была рассмотрена Г. Г. Стоксом [31] и только затем — Рэйли [33].

колебание слоя жидкости, находящегося от стенки на расстоянии y , имеет по сравнению с колебанием стенки смещение по фазе $y \sqrt{n/2v}$ в направлении, противоположном движению стенки.

На рис. 5.8 изображены кривые распределения скоростей для различных моментов времени. Два слоя, находящиеся один от другого на расстоянии $2\pi/k = 2\pi\sqrt{2v/n}$, колеблются в одинаковой фазе. Это расстояние можно рассматривать как своего рода длину волны колебания. Слой жидкости, приводимый стенкой в колебательное движение, имеет толщину $\delta \sim \sqrt{v/n}$. Следовательно, он тем тоньше, чем больше частота колебаний и чем меньше кинематическая вязкость¹⁾.

8. Общий класс нестационарных решений уравнений Навье — Стокса. Уравнения Навье — Стокса допускают точные решения также в том случае, когда составляющие скорости течения не зависят от координаты x в направлении, параллельном стенке. Таким точным решениям соответствуют нестационарные течения. Система уравнений (3.32) и (3.33) принимает для плоского течения вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.27b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.27c)$$

Пусть около стенки имеет место постоянная скорость $v_0 < 0$ (скорость отсасывания). Тогда уравнение (5.27b) сразу удовлетворяется подстановкой $v = v_0$, а из уравнения (5.27c) следует, что давление p не зависит от y .

Положив в соответствии с этим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dU}{dt},$$

где $U(t)$ есть «внешняя скорость» на очень большом расстоянии от стенки, мы получим из уравнения (5.27a) следующее уравнение для определения $u(y, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{dt} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.28)$$

Как показал Дж. Т. Стюарт [32], для произвольной внешней скорости

$$U(t) = U_0 [1 + f(t)] \quad (5.29)$$

существует точное решение уравнения (5.28), имеющее вид

$$u(y, t) = U_0 [\zeta(y) + g(y, t)], \quad (5.30)$$

где

$$\zeta(y) = 1 - e^{yv_0/v}. \quad (5.31)$$

Подставив выражения $U(t)$ и $u(y, t)$ с учетом равенства (5.31) в уравнение (5.28), мы получим для определения неизвестной функции $g(y, t) = g(\eta, T)$ уравнение в частных производных

$$\frac{\partial g}{\partial T} - 4 \frac{\partial g}{\partial \eta} = f'(T) + 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \quad (5.32)$$

с граничными условиями

$$g = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \quad g = f \quad \text{при} \quad \eta = \infty.$$

В уравнение (5.32) введены безразмерные переменные

$$\eta = \frac{y(-v_0)}{v}, \quad T = \frac{tv_0^2}{4v}. \quad (5.33)$$

¹⁾ Решение (5.26a) и его графическое изображение на рис. 5.8 представляют также распределение температуры в поверхностном слое Земли, возникающее вследствие периодических, связанных с временами года, изменений температуры поверхности Земли.

Решения уравнения (5.32) исследованы Дж. Ватсоном [37] при помощи преобразования Лапласа для некоторых специальных функций $f(T)$. В частности, были рассмотрены следующие типы внешнего течения $U(t)$:

- незатухающие и затухающие колебания;
- скаккообразное изменение скорости от одного постоянного значения к другому;
- линейное увеличение скорости от одного постоянного значения к другому.

В частном случае постоянного во времени внешнего течения, т. е. в случае, когда $f(t) = 0$, из уравнения (5.32) получается простое решение $g(\eta, T) = 0$. При таком решении профиль скоростей, соответствующий распределению (5.30), переходит в асимптотический профиль (14.6), получающийся при отсасывании пограничного слоя.

§ 2. Другие точные решения

Особая простота слоистых течений, исследованных в предыдущем параграфе, заключается в том, что для всех них конвективное ускорение, делающее уравнения движения нелинейными, всюду тождественно равно нулю. Рассмотрим теперь несколько примеров течений, для которых конвективное ускорение не равно нулю, но уравнения Навье — Стокса, на этот раз уже нелинейные, тем не менее допускают точное решение. Однако во всех этих случаях речь будет идти о стационарных течениях.

9. Плоское течение вблизи критической точки. Первым простым примером указанного рода течений является плоское течение вблизи критической точки (рис. 5.9). При таком течении жидкость подходит из бесконечности к стенке, поставившей вдоль нее в противоположные стороны от критической точки O . Совместим ось x со стенкой, ось y направим перпендикулярно к стенке, а начало координат расположим в критической точке. Следовательно, координатами критической точки будут $x = 0; y = 0$. В окрестности критической точки составляющие скорости потенциального течения, т. е. течения без трения, равны

$$U = ax, \quad V = -ay,$$

где a есть постоянная. Давление в потенциальном течении определяется из уравнения Бернуlli и равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} (U^2 + V^2) = \frac{\rho}{2} a^2 (x^2 + y^2),$$

где p_0 есть давление в критической точке, а p — давление в произвольной точке течения. Но в то время как при потенциальном течении жидкость скользит вдоль стенки, при вязком течении она должна прилипать к последней. В соответствии с этим примем, что в вязком течении в окрестности критической точки распределения скоростей и давлений определяются формулами

$$u = xf'(y), \quad v = -f(y), \quad (5.34)$$

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} a^2 [x^2 + F(y)]. \quad (5.35)$$

Распределение скоростей (5.34) тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности (4.4a), и для определения функций $f(y)$ и $F(y)$ остаются

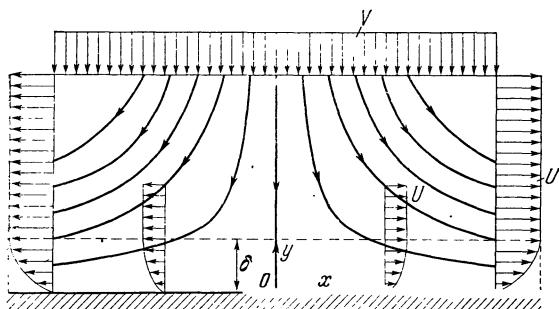


Рис. 5.9. Плоское течение в окрестности критической точки.

два уравнения Навье — Стокса (4.4) плоской задачи. Подставив в них значения u , v и p из равенств (5.34) и (5.35), мы получим для определения f и F два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$f'^2 - ff'' = a^2 + vf'', \quad (5.36)$$

$$ff' = \frac{a^2}{2} F' - vf''. \quad (5.37)$$

На стенке, т. е. при $y = 0$, обе составляющие скорости u и v должны быть равны нулю; на большом расстоянии от стенки, при $y = \infty$, составляющая u должна быть равна $u = U = ax$; кроме того, давление в критической точке должно быть равно $p = p_0$. Следовательно, граничные условия, которым должны удовлетворять функции $f(y)$ и $F(y)$, будут

$$\begin{aligned} f &= 0, & f' &= 0, & F &= 0 & \text{при } y = 0; \\ f' &= a & & & & & \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Уравнения (5.36) и (5.37) представляют собой два дифференциальных уравнения для функций $f(y)$ и $F(y)$, определяющих распределение скоростей и распределение давления. Так как первое уравнение не содержит функции $F(y)$, то сначала можно определить из него функцию $f(y)$, а затем, зная эту функцию, найти из второго уравнения функцию $F(y)$. Нелинейное уравнение (5.36) не может быть решено в замкнутой форме. Для численного решения целесообразно сначала преобразовать его так, чтобы постоянное слагаемое a^2 и постоянный множитель v выпали. Этого можно достичь посредством следующего аффинного преобразования:

$$\eta = ay, \quad f(y) = A\varphi(\eta).$$

После такой подстановки уравнение (5.36) примет вид

$$a^2 A^2 (\varphi'^2 - \varphi\varphi'') = a^2 + vA\alpha^3\varphi'',$$

где штрихи у φ означают теперь дифференцирование по η . Из полученного уравнения видно, что все его коэффициенты будут равны единице, если положить

$$\alpha^2 A^2 = a^2, \quad vA\alpha^3 = a^2,$$

следовательно, принять, что

$$A = \sqrt{va}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{v}}.$$

Подставив эти значения в формулы аффинного преобразования, мы получим

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{v}} y, \quad f(y) = \sqrt{av} \varphi(\eta). \quad (5.38)$$

Таким образом, вместо уравнения (5.36) мы имеем теперь более простое дифференциальное уравнение

$$\varphi'' + \varphi\varphi' - \varphi'^2 + 1 = 0 \quad (5.39)$$

с граничными условиями

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad \varphi' = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Разделив u на U , т. е. составляющую скорости вязкого течения, параллельную стенке, на такую же составляющую скорости потенциального течения, мы получим

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{a} f'(y) = \varphi'(\eta).$$

Численное решение дифференциального уравнения (5.39) впервые было выполнено К. Хименцем [11], а затем более точно — Л. Хоуартом [13]. Графически полученное решение изображено на рис. 5.10 (см. также таблицу 5.1). Кривая $\varphi'(\eta)$ начинается при нулевом значении η и вблизи этого значения имеет прямолинейный участок; затем она асимптотически приближается к значению $\varphi'(\eta) = 1$. Приблизительно при $\eta = 2,4$ функция $\varphi' = 0,99$, т. е. отличается от своего конечного значения на 1%. Приняв расстояние y от стенки, соответствующее значению $\eta = 2,4$, за толщину δ пограничного слоя, мы получим из первого равенства (5.38) следующую формулу для толщины пограничного слоя:

$$\delta = \eta_0 \sqrt{\frac{v}{a}} = 2,4 \sqrt{\frac{v}{a}}. \quad (5.40)$$

Таким образом, при плоском течении в окрестности критической точки толщина слоя, на который распространяется влияние трения, при малой вязкости мала и пропорциональна квадратному корню из кинематической вязкости, т. е. изменяется при уменьшении v так же, как и при течениях, рассмотренных в § 1. Поперечный градиент давления $\partial p / \partial y$ пропорционален $ra\sqrt{va}$, следовательно, при малой вязкости очень мал.

Необходимо обратить внимание на следующее примечательное обстоятельство:

безразмерное распределение скоростей u/U и толщина пограничного слоя δ , определяемая формулой (5.40), не зависят от координаты x , т. е. не изменяются вдоль обтекаемой стенки.

Полученное решение для вязкого течения вблизи критической точки пригодно не только для обтекания плоской стенки, но и для плоского обтекания любого цилиндрического тела при условии, что такое тело вблизи передней критической точки имеет затупленную форму. Правда, в таких случаях найденное решение применимо только в небольшой окрестности критической точки, поскольку здесь кривую поверхность тела можно заменить плоскостью, касающейся тела в критической точке.

Нестационарное течение, возникающее при наложении на только что рассмотренное течение вблизи критической точки произвольного, изменяющегося во времени поперечного движения плоскости, в которой расположена критическая точка, исследовано Дж. Ватсоном [38]. Частный случай гармонического поперечного движения до Дж. Ватсона был рассмотрен М. Б. Глаузертом (см. ссылку [13] в главе XV).

10. Пространственное течение в окрестности критической точки. Совершенно аналогичным способом можно получить точное решение уравнений Навье — Стокса и для пространственного осесимметричного течения в окрестности критической точки. При таком течении жидкость набегает на стенку, перпендикулярную к направлению течения, и отекает от критической точки вдоль этой стенки во все стороны по радиусам. Такое течение получается также при обтекании тела вращения в направлении, параллельном оси вращения, в ближайшей окрестности передней точки тела, являющейся в данном случае критической точкой.

Воспользуемся цилиндрическими координатами r, φ, z . Плоскость $z = 0$ совместим со стенкой, начало координат расположим в критической

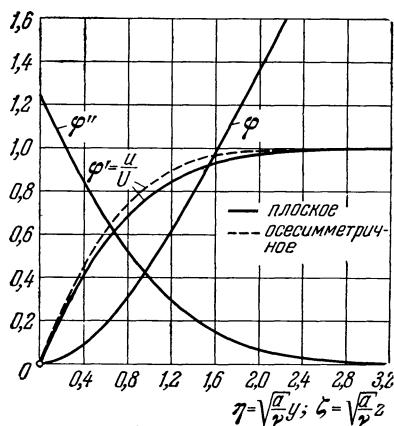


Рис. 5.10. Распределение скоростей при плоском и пространственном течении в окрестности критической точки (см. также таблицу 5.1).

точке, а ось z направим противоположно направлению набегающего течения. Обозначим через U и W составляющие скорости в радиальном и осевом направлениях для течения без трения, а через $u = u(r, z)$ и $w = w(r, z)$ — соответствующие составляющие для вязкого течения. Вследствие осевой

Таблица 5.1. Значения функций φ , φ' и φ'' для плоского и осесимметричного течений в окрестности критической точки (для плоского течения — по Л. Хоуарту [13], для осесимметричного — по Н. Фресслингу [7])

Плоское течение			Осесимметричное течение				
$\eta = \sqrt{\frac{a}{v}} y$	φ	$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{u}{U}$	$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}$	$V\sqrt{2}\cdot\zeta = \sqrt{\frac{2a}{v}} z$	φ	$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{u}{U}$	$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}$
0	0	0	1,2326	0	0	0	1,3120
0,2	0,0233	0,2266	1,0345	0,2	0,0127	0,1755	1,1705
0,4	0,0881	0,4145	0,8463	0,4	0,0487	0,3341	1,0298
0,6	0,1867	0,5663	0,6752	0,6	0,1054	0,4669	0,8910
0,8	0,3124	0,6859	0,5254	0,8	0,1799	0,5833	0,7563
1,0	0,4592	0,7779	0,3980	1,0	0,2695	0,6811	0,6283
1,2	0,6220	0,8467	0,2938	1,2	0,3717	0,7614	0,5097
1,4	0,7967	0,8968	0,2110	1,4	0,4841	0,8258	0,4031
1,6	0,9798	0,9323	0,1474	1,6	0,6046	0,8761	0,3100
1,8	1,1689	0,9568	0,1000	1,8	0,7313	0,9142	0,2315
2,0	1,3620	0,9732	0,0658	2,0	0,8627	0,9422	0,1676
2,2	1,5578	0,9839	0,0420	2,2	0,9974	0,9622	0,1175
2,4	1,7553	0,9905	0,0260	2,4	1,1346	0,9760	0,0798
2,6	1,9538	0,9946	0,0156	2,6	1,2733	0,9853	0,0523
2,8	2,1530	0,9970	0,0090	2,8	1,4131	0,9912	0,0331
3,0	2,3526	0,9984	0,0051	3,0	1,5536	0,9949	0,0202
3,2	2,5523	0,9992	0,0028	3,2	1,6944	0,9972	0,0120
3,4	2,7522	0,9996	0,0014	3,4	1,8356	0,9985	0,0068
3,6	2,9521	0,9998	0,0007	3,6	1,9769	0,9992	0,0037
3,8	3,1521	0,9999	0,0004	3,8	2,1182	0,9996	0,0020
4,0	3,3521	1,0000	0,0002	4,0	2,2596	0,9998	0,0010
4,2	3,5521	1,0000	0,0001	4,2	2,4010	0,9999	0,0006
4,4	3,7521	1,0000	0,0000	4,4	2,5423	0,9999	0,0003
4,6	3,9521	1,0000	0,0000	4,6	2,6837	1,0000	0,0001

симметрии течения $v_\phi = 0$ и $\partial/\partial\phi = 0$; поэтому из трех уравнений Навье — Стокса (3.36) остаются только два, которые вместе с уравнением неразрывности (3.37) после замены обозначений v_r и v_z на u и v принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Границными условиями будут

$$u = 0, \quad w = 0 \text{ при } z = 0; \quad u = U \text{ при } z = \infty. \quad (5.41a)$$

Для невязкого осесимметричного течения с критической точкой мы имеем решение

$$U = ar, \quad W = -2az, \quad (5.42)$$

где a есть постоянная. Легко видеть, что это решение удовлетворяет уравнению неразрывности. Давление в невязком течении равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} (U^2 + W^2) = \frac{\rho}{2} a^2 (r^2 + 4z^2),$$

где p_0 есть по-прежнему давление в критической точке.

Примем, что в вязком осесимметричном течении с критической точкой распределение скоростей и распределение давления определяются формулами

$$u = rf'(z), \quad w = -2f(z), \quad (5.43)$$

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} a^2 [r^2 + F(z)]. \quad (5.44)$$

Уравнение неразрывности и теперь тождественно удовлетворяется подстановкой выражений (5.43). Уравнения же движения (5.41) после подстановки в них выражений (5.43) и (5.44) дают два уравнения [для определения функций $f(z)$ и $F(z)$]:

$$f'^2 - 2ff'' = a^2 + vf'', \quad (5.45)$$

$$2ff' = \frac{1}{4} a^2 F' - vf''. \quad (5.46)$$

Границные условия для функций $f(z)$ и $F(z)$ легко получаются из условий (5.41а):

$$f = f' = 0, \quad F = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \quad f' = a \quad \text{при} \quad z = \infty.$$

Совершенно так же, как и в плоской задаче, уравнение (5.45) можно освободить от постоянных a^2 и v , применив для этой цели прежнее аффинное преобразование, а именно:

$$\xi = \sqrt{\frac{a}{v}} z, \quad f(z) = \sqrt{av} \varphi(\xi).$$

Выполнив это преобразование, мы получим для функции $\varphi(\xi)$ более простое дифференциальное уравнение:

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad (5.47)$$

причем граничными условиями будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad \varphi' = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Уравнение (5.47) впервые было решено Ф. Хоманом [12] путем разложения в ряд. Изменение безразмерной скорости $\varphi' = u/U$ изображено на рис. 5.10. Значения φ' , приведенные в таблице 5.1, вычислены Н. Фрэслером [7].

11. Течение вблизи вращающегося диска. Следующим примером точного решения уравнений Навье — Стокса является течение вблизи плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Жидкость вдали от диска принимается покоящейся. Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к диску, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от диска. Взамен отброшенной жидкости к диску притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увлекается диском и опять отбрасывается наружу. Следовательно, в данном случае мы имеем полностью трехмерное течение. Перспективное изображение этого течения показано на рис. 5.11. Скорость имеет три составляющие: в радиальном направлении r , в окружном направлении φ и в осевом направлении z .

Обозначим эти составляющие соответственно через u , v , w . Вычисления выполним сначала для неограниченной вращающейся плоскости, после чего, пренебрегая концевым эффектом, перенесем полученный результат на случай круглого диска, имеющего конечный диаметр $D = 2R$.

Вследствие осевой симметрии течения уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах (3.36) упрощаются и при принятых обозначениях получают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right], \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Границные условия, определяемые условием прилипания к вращающейся плоскости, будут

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad v = r\omega, \quad w = 0 &\text{ при } z = 0; \\ u = 0, \quad v = 0 &\text{ при } z = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Прежде чем приступить к решению системы уравнений (5.48), найдем оценку для толщины δ слоя жидкости, увлекаемого диском вследствие трения [21]. Из наглядных соображений, а также из сравнения с предыдущими примерами легко видеть, что эта толщина тем меньше, чем меньше вязкость. Для частицы жидкости, находящейся в увлеченном, вследствие трения, слое на расстоянии r от оси, центробежная сила на единицу объема равна $\rho r\omega^2$. Следовательно, на объем, имеющий основание с площадью $dr ds$ и высоту δ , действует центробежная сила $\rho r\omega^2 \delta dr ds$. На основание того же элемента объема действует касательное напряжение τ_w , направление которого совпадает с направлением движения жидкости, оттекающей вдоль вращающейся плоскости от оси вращения; пусть это направление образует с окружным направлением угол ϑ . Радиальная составляющая касательного напряжения должна быть равна центробежной силе, т. е.

$$\tau_w \sin \vartheta dr ds = \rho r \omega^2 \delta dr ds,$$

или

$$\tau_w \sin \vartheta = \rho r \omega^2 \delta.$$

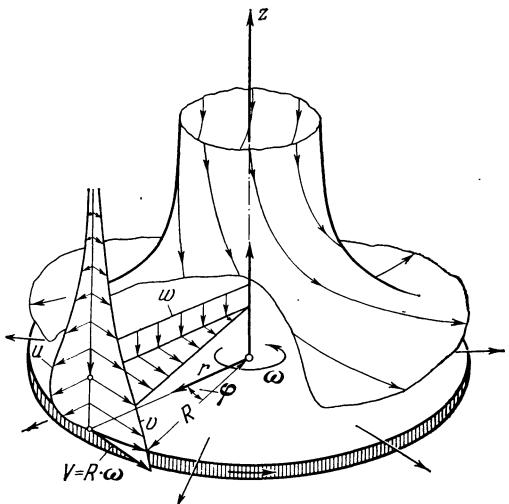


Рис. 5.11. Течение в окрестности диска, вращающегося в покоящейся жидкости; u , v , w — составляющие скорости соответственно в радиальном, окружном и осевом направлении. Слой жидкости, прилегающий к диску, увлекается последним вследствие трения. Центробежные силы, действующие в этом слое, создают вторичное течение в радиальном направлении от центра диска наружу.

С другой стороны, окружная составляющая касательного напряжения должна быть пропорциональна градиенту окружной скорости около

стенки, т. е.

$$\tau_w \cos \vartheta \sim \frac{\mu r \omega}{\delta}.$$

Исключив τ_w из последних двух соотношений, мы получим

$$\delta^2 \sim \frac{v}{\omega} \operatorname{tg} \vartheta.$$

Примем, что направление скольжения потока вдоль стенки не зависит от радиуса; тогда для толщины δ слоя, увлекаемого вращающейся плоскостью вследствие трения, мы будем иметь оценку

$$\delta \sim \sqrt{\frac{v}{\omega}},$$

совпадающую с оценкой, полученной выше для случая колеблющейся стенки (стр. 95). Далее, для касательного напряжения на стенке мы получим оценку

$$\tau_w \sim \rho r \omega^2 \delta \sim \rho r \omega \sqrt{v \omega}.$$

Момент сопротивления M вращению стенки равен произведению касательного напряжения на стенке, площади стенки и плеча, следовательно,

$$M \sim \tau_w R^3 \sim \rho R^4 \omega \sqrt{v \omega}, \quad (5.50)$$

где R есть радиус диска.

Для интегрирования системы (5.48) целесообразно ввести вместо z безразмерное расстояние от стенки $\zeta \sim z/\delta$, т. е. принять, что

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{v}}. \quad (5.51)$$

Далее, примем, что составляющие скорости и давление определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} u &= r \omega F(\zeta), & v &= r \omega G(\zeta), & w &= \sqrt{v \omega} H(\zeta), \\ p &= p(z) = \rho v \omega P(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

После подстановки этих выражений u , v , w , p в уравнения (5.48) мы получим для определения четырех неизвестных функций F , G , H и P следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2F + H' &= 0, \\ F^2 + F'H - G^2 - F'' &= 0, \\ 2FG + HG' - G'' &= 0, \\ P' + HH' - H'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Границными условиями теперь, вместо условий (5.49), будут

$$\begin{aligned} F &= 0, & G &= 1, & H &= 0, & P &= 0 & \text{при } \zeta = 0; \\ F &= 0, & G &= 0 & & & & \text{при } \zeta = \infty. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (5.53) впервые было дано Т. Карманом [14] приближенным способом. Впоследствии В. Кохрэн [6] вычислил значения функций F , G , H , P более точно посредством численного интегрирования¹⁾. Эти значения даны в таблице 5.2 (стр. 104); на рис. 5.12 они изображены в виде графиков.

¹⁾ Решение Кохрена заключалось в следующем: для каждой из искомых функций составлялся сначала степенной ряд для значения $\zeta = 0$, а затем — асимптотическое разложение для больших значений ζ , после чего оба ряда смыкались при некотором среднем значении ζ .

Схема решения системы уравнений (5.53) в точности такая же, как и для пространственного течения в окрестности критической точки: сначала из уравнения неразрывности и двух уравнений движения для направлений, параллельных стенке, определяется поле скоростей, а затем из третьего уравнения движения для направления, перпендикулярного к стенке, вычисляется распределение давления.

Из рис. 5.12 видно, что расстояние от вращающейся стенки, на котором окружная скорость течения понижается до половины окружной скорости стенки, равно

$$\delta_{0.5} \approx \sqrt{\frac{v}{\omega}}.$$

Далее, полученное решение показывает, что если толщина $\delta \approx \sqrt{v/\omega}$ мала, то составляющие u и v скорости имеют заметные значения только в тонком слое толщиной $\sqrt{v/\omega}$. Составляющая скорости w , перпендикулярная к стенке, пропорциональна величине $\sqrt{v/\omega}$ и, следовательно, мала во всем пространстве.

Вообразим, что стенка неподвижна, а жидкость на большом расстоянии от диска вращается; тогда для определения угла, образуемого относительными линиями тока около стенки с окружным направлением, мы получим уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = - \left(\frac{\partial u / \partial z}{\partial v / \partial z} \right)_{z=0} = - \frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{0.510}{0.616} = 0.838,$$

откуда

$$\varphi_0 = 39.6^\circ.$$

Хотя предыдущие вычисления выполнены для бесконечно протяженного диска, тем не менее полученные результаты можно применить к круглому диску конечного радиуса R , если только этот радиус велик по сравнению с толщиной δ слоя, увлекаемого диском. Вычислим момент сопротивления такого диска. Кольцо шириной dr и радиусом r дает момент сопротивления

$$dM = -2\pi r dr \cdot r \tau_{z\varphi},$$

где

$$\tau_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0$$

есть окружная составляющая касательного напряжения на стенке. Следовательно, момент сопротивления всего диска, смачиваемого жидкостью с одной стороны, будет

$$M = -2\pi \int_0^R r^2 \tau_{z\varphi} dr.$$

Окружная составляющая $\tau_{z\varphi}$ касательного напряжения на стенке, в соответствии со вторым из равенств (5.52), равна

$$\tau_{z\varphi} = \rho r v^{1/2} \omega^{3/2} G'(0).$$

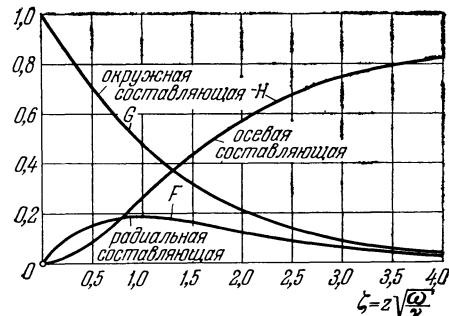


Рис. 5.12. Распределение скоростей вблизи диска, вращающегося в неподвижной жидкости. См. также таблицу 5.2.

Таблица 5.2. Значения функций, определяющих распределение скоростей и распределение давления в пограничном слое на диске, вращающемся в неподвижной жидкости (по В. Г. Кохрэну [6]); ср. с соотношениями (5.52)

$\xi = z \sqrt{\frac{\omega}{v}}$	F	G	$-H$	P	F'	$-G'$
0	0	1,0	0	0	0,510	0,616
0,1	0,046	0,939	0,005	0,092	0,416	0,611
0,2	0,084	0,878	0,018	0,167	0,334	0,599
0,3	0,114	0,819	0,038	0,228	0,262	0,580
0,4	0,136	0,762	0,063	0,275	0,200	0,558
0,5	0,154	0,708	0,092	0,312	0,147	0,532
0,6	0,166	0,656	0,124	0,340	0,102	0,505
0,7	0,174	0,607	0,158	0,361	0,063	0,476
0,8	0,179	0,561	0,193	0,377	0,032	0,448
0,9	0,181	0,517	0,230	0,388	0,006	0,419
1,0	0,180	0,468	0,266	0,395	-0,016	0,391
1,1	0,177	0,439	0,301	0,400	-0,033	0,364
1,2	0,173	0,404	0,336	0,403	-0,046	0,338
1,3	0,168	0,371	0,371	0,405	-0,057	0,313
1,4	0,162	0,341	0,404	0,406	-0,064	0,290
1,5	0,156	0,313	0,435	0,406	-0,070	0,268
1,6	0,148	0,288	0,466	0,405	-0,073	0,247
1,7	0,141	0,264	0,495	0,404	-0,075	0,228
1,8	0,133	0,242	0,522	0,403	-0,076	0,210
1,9	0,126	0,222	0,548	0,402	-0,075	0,193
2,0	0,118	0,203	0,572	0,401	-0,074	0,177
2,1	0,111	0,186	0,596	0,399	-0,072	0,163
2,2	0,104	0,171	0,617	0,398	-0,070	0,150
2,3	0,097	0,156	0,637	0,397	-0,067	0,137
2,4	0,091	0,143	0,656	0,396	-0,065	0,126
2,5	0,084	0,131	0,674	0,395	-0,061	0,116
2,6	0,078	0,120	0,690	0,395	-0,058	0,106
2,8	0,068	0,101	0,721	0,395	-0,052	0,089
3,0	0,058	0,083	0,746	0,395	-0,046	0,075
3,2	0,050	0,071	0,768	0,395	-0,040	0,063
3,4	0,042	0,059	0,786	0,394	-0,035	0,053
3,6	0,036	0,050	0,802	0,394	-0,030	0,044
3,8	0,031	0,042	0,815	0,393	-0,025	0,037
4,0	0,026	0,035	0,826	0,393	-0,022	0,031
4,2	0,022	0,029	0,836	0,393	-0,019	0,026
4,4	0,018	0,024	0,844	0,393	-0,016	0,022
∞	0	0	0,886	0,393	0	0

Подставив это значение в выражение для момента M и удвоив последний, мы получим момент сопротивления диска, смачиваемого жидкостью с обеих сторон:

$$2M = -\pi \rho R^4 (v \omega^3)^{1/2} G'(0) = 0,616 \pi \rho R^4 (v \omega^3)^{1/2}. \quad (5.54)$$

В технических расчетах принято вводить в выражение момента сопротивления безразмерный коэффициент

$$C_M = \frac{2M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5}. \quad (5.55)$$

В нашем случае этот коэффициент, в соответствии с формулой (5.54), равен

$$C_M = -\frac{2\pi G'(0) v^{1/2}}{R \omega^{1/2}}$$

или, если ввести число Рейнольдса

$$Re = \frac{R^2 \omega}{v},$$

составленное для радиуса и окружной скорости, и учесть, что $-2\pi G'(0) = 3,87$,

$$C_M = \frac{3,87}{Re^{1/2}}. \quad (5.56)$$

Эта формула для момента трения графически изображена на рис. 5.13 в виде кривой 1. На этом же рисунке отмечены для сравнения экспериментальные значения C_M [35]. До числа Рейнольдса $Re = 3 \cdot 10^5$ совпадение теории

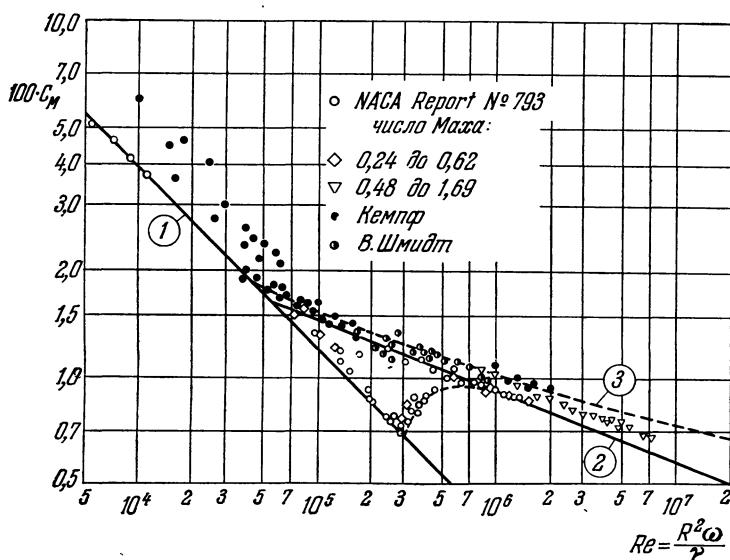


Рис. 5.13. Коэффициент момента сопротивления C_M диска, вращающегося в неподвижной жидкости: кривая (1) соответствует ламинарному течению [формула (5.56)], а кривые (2) и (3) — турбулентному течению [формулы (21.25) и (21.28)].

[формула (5.56)] с измерениями очень хорошее. При больших числах Рейнольдса около диска возникает турбулентное течение. При таком течении, которое подробно будет рассмотрено в главе XXI, для безразмерного коэффициента C_M получаются кривые 2 и 3. Более старые измерения, также удовлетворительно совпадающие с теорией, были выполнены Г. Кемпфом [15] и В. Шмидтом [29]. Еще раньше Д. Рябушинский [24], [25] из очень тщательных измерений вывел эмпирические формулы для момента сопротивления вращающихся дисков, которые хорошо совпадают с найденными впоследствии теоретическими формулами.

Секундный объем жидкости, отбрасываемой наружу вследствие центробежного эффекта с одной стороны диска, равен

$$Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u \, dz,$$

где R есть радиус диска. Вычислив интеграл, мы получим для Q формулу

$$Q = 0,886\pi R^2 \sqrt{v\omega} = 0,886\pi R^3 \omega Re^{-1/2}. \quad (5.57)$$

Такой же секундный объем жидкости притекает к диску в осевом направлении. Так как давление около диска имеет одинаковый порядок с величиной $\rho\omega$, то при малой вязкости оно изменяется очень мало, и притом только в направлении, перпендикулярном к стенке; в радиальном направлении оно остается постоянным.

М. Г. Роджерс и Г. Н. Лоус [26] обобщили рассмотренную задачу исследовав случай, когда жидкость в бесконечности вращается с угловой скоростью $\Omega = s\omega$. Для такой обобщенной задачи второе из уравнений системы (5.53) заменяется уравнением $F^2 + F'H - G^2 - F'' + s^2 = 0$, а второе граничное условие для функции $G(\zeta)$ принимает вид $G(\infty) = s$ (см. в связи с этим рассмотренное в § 1 главы XI вращательное движение жидкости над неподвижным диском). Численные решения для случая вращения жидкости и диска в одну и ту же сторону ($s > 0$) даны в работе [26]. В случае вращения жидкости и диска в противоположные стороны ($s < -0,2$) решения, имеющие физический смысл, возможны только при применении равномерно распределенного отсасывания в направлении, перпендикулярном к плоскости диска.

Течение около вращающегося диска, помещенного в кожух, будет рассмотрено ниже, в главе XXI.

Особый интерес представляет следующее обстоятельство. Только что полученное точное решение уравнений Навье — Стокса для течения около вращающегося диска, а также ранее полученные точные решения для течений в окрестности критической точки обладают свойствами, характерными для пограничного слоя (в смысле, поясненном в предыдущей главе). В самом деле, эти решения показывают, что в предельном случае очень малой вязкости область течения, на которую распространяется влияние трения, заключена в весьма тонком слое вблизи твердых стенок, в то время как во всем остальном пространстве течение происходит практически так же, как если бы трения не было, т. е. как если бы течение было потенциальным. Далее, рассмотренные примеры показывают, что толщина слоя, в котором проявляется действие трения, имеет величину порядка \sqrt{v} . Решения, полученные в предыдущем параграфе для слоистых течений, также обладают свойствами, характерными для пограничного слоя.

В этой связи упомянем также о полученном Г. К. Бэтчелором [2] решении уравнений Навье — Стокса для течения между двумя дисками, вращающимися в противоположные стороны; см. по этому поводу также работу К. Стюартсона [30]. Обобщение изложенного выше решения на случай равномерно распределенного отсасывания жидкости от диска дано Дж. Т. Стюартом ([32] в главе XIV).

12. Течения в суживающемся и расширяющемся каналах. Дальнейший класс точных решений уравнений Навье — Стокса получается следующим образом. Предположим, что в плоском течении все лучи, проходящие через некоторую точку, являются линиями тока. Пусть, далее, скорость течения на отдельных лучах различная, т. е. изменяется вместе с полярным углом ϕ . Те лучи, на которых скорость равна нулю, могут рассматриваться как стени суживающегося или расширяющегося канала. Уравнение неразрывности выполняется, если скорость на каждом луче изменяется обратно пропорционально расстоянию от нулевой точки. Следовательно, радиальная скорость u должна удовлетворять соотношению

$$u \sim \frac{F(\phi)}{r},$$

или, если потребовать, чтобы величина $F(\phi)$ была безразмерной, соотношению

$$u \sim \frac{v}{r} F(\phi).$$

Окружная скорость v_ϕ всюду должна быть равна нулю. Введем эти значения скоростей в уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах (3.36) и исключим из уравнений для направлений r и ϕ давление: тогда для определения функции $F(\phi)$ мы получим дифференциальное уравнение

$$2FF' + 4F' + F'' = 0,$$

из которого после однократного интегрирования найдем

$$F^2 + 4F + F'' + K = 0 \quad (5.58)$$

Постоянная K в этом уравнении равна радиальному градиенту давления на стенках, т. е.

$$K = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{r^3}{v^2}.$$

На стенках, где $\phi = \alpha$ и $\phi = -\alpha$, функция F равна нулю. При $\phi = 0$ равна нулю производная F' . Решение дифференциального уравнения (5.58) дано Г. Хамелем [10]; оно показывает, что F является эллиптической функцией от ϕ .

Не входя в подробности вычислений, отметим коротко характерные особенности полученного решения. На рис. 5.14 изображено семейство профилей скоростей в суживающихся и расширяющихся каналах при различных числах Рейнольдса. Все профили построены на основании численных расчетов К. Миллсапса и К. Польгаузена [17]. Распределения скоростей для суживающегося и расширяющегося канала резко отличаются одно от другого, причем для расширяющегося канала они сильно изменяются в зависимости от числа Рейнольдса. В суживающемся канале скорость при наибольшем числе Рейнольдса ($Re = 5000$) в центральной части канала на довольно большом участке почти постоянна и только вблизи стенок она круто падает до нуля. Следовательно, в этом случае течение вблизи стенок канала имеет четко выраженный характер пограничного слоя.

В расширяющемся канале для профиля скоростей получаются весьма различные формы в зависимости от того, какие значения имеют число Рейнольдса и угол раствора канала. Как показывает рис. 5.14, при больших числах Рейнольдса скорость положительна по всему поперечному сечению [кривые 5 и 6]; при малом же числе Рейнольдса скорость вблизи стенок канала отрицательна [кривая 7]. Следовательно, в последнем случае получается распределение скоростей с возвратным течением вблизи стенок. При углах раствора канала, больших $2\alpha = 10^\circ$, возвратное течение возникает, как показывают другие примеры решения Хамеля, при еще меньших числах Рейнольдса. Возвратное течение есть начальная стадия возникновения отрыва течения от стенки. В действительных условиях течение отрывается обычно не симметрично на обеих стенках, а только на одной (сразу по всей ее длине), продолжая при этом прилегать к противоположной стенке.

Г. Хамель в цитированной выше работе поставил перед собой задачу найти все плоские течения вязкой жидкости, в которых линии тока совпадают с линиями тока потенциального течения. Выяснилось, что такие течения должны иметь линии тока в виде логарифмических спиралей. Частными случаями этих течений являются только что рассмотренное радиальное течение, а также упомянутый в п. 3 § 1 настоящей главы потенциальный вихрь.

Полученные Г. Хамелем точные решения уравнений Навье — Стокса опять показывают, что такие решения обладают свойствами, характерными для пограничного слоя.

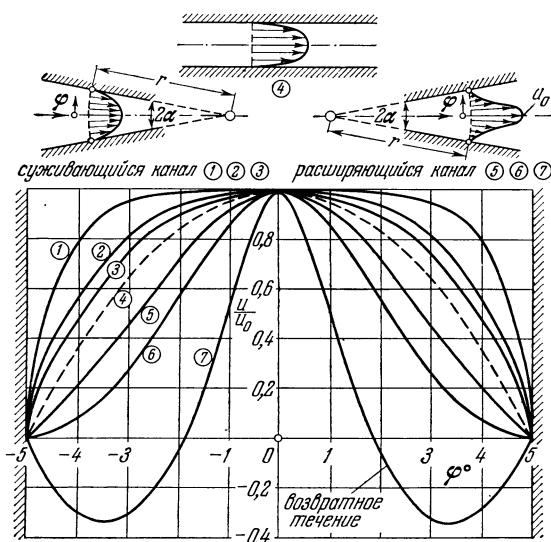


Рис. 5.14. Распределение скоростей в плоском суживающемся и расширяющемся каналах. По Г. Хамелю [10], К. Миллсапсу и К. Польгаузену [17]. Угол раствора $2\alpha = 10^\circ$. Число Рейнольдса $Re = u_0/v$. Суживающийся канал: кривая (1): $Re = 5000$; кривая (2): $Re = 1342$; кривая (3): $Re = 684$. Расширяющийся канал: кривая (5): $Re = 5000$; кривая (6): $Re = 1342$; кривая (7): $Re = 684$. Кривая (4) изображает распределение скоростей в канале с параллельными стенками (параболическое распределение по Пуазэлю, см. также рис. 5.1).

Особенно четко это выступает для случая течения в суживающемся канале, когда прилегающий к стенкам слой жидкости, в котором проявляется действие трения, получается весьма тонким (вычисления показывают, что его толщина и в этом случае пропорциональна \sqrt{v}). В расширяющемся канале при подходящих обстоятельствах в качестве особого явления возникает возвратное течение и, как следствие его, отрыв течения от стенки. Такой отрыв является существенным свойством течений в пограничном слое и хорошо подтверждается экспериментальными результатами; подробнее о нем будет сказано ниже, при исследовании уравнений пограничного слоя.

Плоское течение в слабо расширяющемся канале и осесимметричное течение в слабо расширяющейся трубе были исследованы до Г. Хамеля Г. Блазиусом [6] также на основе уравнений Навье — Стокса. Эти исследования показали, что ламинарное течение в состоянии преодолеть без отрыва только очень незначительное повышение давления. Для расширяющейся круглой трубы радиуса $R(x)$ условие невозможности возникновения возвратного течения, т. е. условие невозможности отрыва, имеет вид

$$\frac{dR}{dx} \leqslant \frac{12}{Re},$$

где $Re = \bar{u}d/v$ есть число Рейнольдса, составленное для средней скорости и диаметра трубы.

Для расширяющегося канала эти расчеты были продолжены М. Абрамовичем [1]. Выяснилось, что при увеличении числа Рейнольдса и при уменьшении угла раствора канала точка отрыва удаляется от входа в канал вниз по течению.

13. Заключительное замечание. На этом мы закончим рассмотрение точных решений уравнений Навье — Стокса и перейдем к приближенным решениям. Под точными решениями мы понимали такие решения, которые получались из уравнений Навье — Стокса при сохранении всех членов, тождественно не равных нулю для изучавшихся течений. В противоположность этому под приближенными решениями мы будем понимать такие решения, которые получаются из уравнений Навье — Стокса путем отбрасывания в них членов, по своей величине малых в условиях рассматриваемой задачи. Как уже было отмечено в главе IV, при приближенных решениях особую роль играют два предельных случая: в первом из них силы трения значительно больше, чем силы инерции (ползущее движение), во втором же они значительно меньше, чем силы инерции (течение в пограничном слое). В то время как в первом случае допустимо полностью отбросить инерционные члены, во втором случае, т. е. в теории пограничного слоя, отнюдь нельзя одновременно отбросить все члены, зависящие от вязкости, так как это привело бы к невозможности выполнения физически существенного граничного условия — условия прилипания жидкости к стенкам.

В самое недавнее время К. В. Манглер [16a] и Д. Кетеролл вместе с К. В. Манглером [5a] разработали новую теорию решения уравнений Навье — Стокса для ламинарных плоских течений при больших числах Рейнольдса, т. е. для вязких течений, имеющих характер пограничного слоя. В то время, как в теории пограничного слоя по Прандтлю (см. главу VII) контур обтекаемого тела заранее задан и затем трение учитывается только в тонком, прилегающем к стенке пограничном слое, в теории Манглера — Кетеролла контур тела заранее не задается. В этом смысле новый метод решения уравнений Навье — Стокса является непрямым методом. В теории Манглера — Кетеролла заранее указывается не контур тела, а подходящая форма так называемого контура вытеснения или поверхности вытеснения, внутри которых лежит тело. Этот контур вытеснения учитывает вытесняющее действие пограничного слоя и спутного течения позади тела. Сначала рассчитывается внешнее невязкое течение вокруг заданного контура вытеснения, а затем — из уравнений Навье — Стокса и в предположении, что число Рейнольдса велико — тот слой течения, в котором проявляет свое действие вязкость. Наконец, имея расчет этого слоя, можно найти контур тела. Примечательной особенностью нового метода является возможность расчета пограничного слоя позади точки отрыва, в то время как теория Прандтля применима самое большое только до точки отрыва. Более того, в некоторых случаях новый метод позволяет рассчитывать даже сложные явления в возвратном течении за точкой отрыва, а также процесс обратного прилегания течения к обтекаемому контуру.

Ограничимся этой краткой справкой о новой теоретической концепции пограничного слоя, отличающейся от концепции Прандтля. В основе развиваемой в последующих главах теории пограничного слоя лежит концепция Прандтля.

Литература к главе V

1. Abramowitz M., On backflow of a viscous fluid in a diverging channel. *J. Math. Phys.* **28**, 1–21 (1949).
2. Batchelor G. K., Note on a class of solutions of the Navier—Stokes equations representing steady non rotationally symmetric flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4**, 29–41 (1951).
3. Becker E., Eine einfache Verallgemeinerung der Rayleigh-Grenzschicht. *ZAMP* **11**, 146–152 (1960).
4. Beker R., Intégration des équations du mouvements d'un fluide visqueux incompressible. Статья в *Handbuch der Physik* (под ред. S. Flügge) **VIII/2**, 1–384, Berlin 1963.
5. Blasius H., Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite. *Z. Math. u. Physik* **58**, 225–233 (1910).
- 5a. Catherall D., Mangler K. W., An indirect method for the solution of the Navier—Stokes equations for laminar incompressible flow at large Reynolds numbers. *RAE-Report Aero* 2683 (1963).
6. Cochran W. G., The flow due to a rotating disk. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **30**, 365–375 (1934).
7. Försching N., Verdunstung, Wärmeübertragung und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. *Lunds Univ. Arsskr. N.F. Avd. 2*, 35, 4 (1940).
8. Gerbers W., Zur instationären laminaren Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit in kreiszylindrischen Röhren. *Z. angew. Physik* **3**, 267–271 (1951).
9. Hagen G., Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. *Pogg. Ann.* **46**, 423–442 (1839).
10. Hamel G., Spiralförmige Bewegung zäher Flüssigkeiten. *Jahresber. d. Dt. Mathematiker-Vereinigung* **25**, 34–60 (1916).
11. Hiemenz K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Диссертация, Гöttingen 1911. *Dingl. Polytechn. J.* **326**, 321 (1911).
12. Homann F., Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel. *ZAMM* **16**, 153–164 (1936), а также в *Forschg. Ing.-Wes.* **7**, 1–10 (1936).
13. Howarth L., On the calculation of the steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. *ARC RM* 1632 (1935).
14. v. Kármán T., Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM* **1**, 233–252 (1921); см. также *Collect. Works* **II**, 70–97. Английский перевод: *NACA TM* 1092 (1946).
15. Kempf G., Über Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Vorträge auf dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik, Innsbrucker Kongr. 1922, стр. 168, Berlin 1924.
16. Kirdé K., Untersuchungen über die zeitliche Weiterentwicklung eines Wirbels mit vorgegebener Anfangsverteilung. *Ing.-Arch.* **31**, 385–404 (1962).
- 16a. Mangler K. W., The solution of the Navier—Stokes equations for laminar incompressible flow for large Reynolds numbers. *RAE Techn. Note Aero* 2832 (1962).
17. Millsaps K. und Pohlhausen K., Thermal distribution in Jeffery—Hamel flows between nonparallel plane walls. *JAS* **20**, 187–196 (1953).
18. Müller W., Zum Problem der Anlaufströmung einer Flüssigkeit im geraden Rohr mit Kreisring- und Kreisquerschnitt. *ZAMM* **16**, 227–238 (1936).
19. Oseen C. W., Ark. f. Math. Astron. och Fys. **7** (1911); *Hydromechanik*, стр. 82, Leipzig 1927.
20. Poiseuille J., Récherches expérimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes Rendus* **11**, 961–967 и 1041–1048 (1840); 12, 112–115 (1841); более подробно в *Mémoires des Savants Étrangers* **9** (1846).
21. Prandtl L., Führer durch die Strömungslehre. 3-е изд., 342, 1949. [Имеется русский перевод; Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, Москва 1951.]
22. Punnis B., Zur Berechnung der laminaren Anlaufströmung im Rohr. Диссертация, Гöttingen 1947.
23. Lord Rayleigh, On the motion of solid bodies through viscous liquids. *Phil. Mag.* **21**, 697–711 (1911); см. также: *Sci. Papers* **VI**, 29.
24. Рябушинский Д., Бюл. аэродин. ин-та в Кучине 5, 5–34, Москва 1914; см. также *J. Roy. Aero Soc.* **39**, 340–348 и 377–379 (1935).
25. Рябушинский Д., Sur la résistance de frottement des disques tournant dans un fluide et les équations intégrales appliquées à ce problème. *Compte Rendus* **233**, 899–901 (1951).
26. Rogers M. G., Lauce G. N., The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. *J. Fluid Mech.* **7**, 617–631 (1960).
27. Schiller L., Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. *VDI-Forschungsheft* 248 (1922).

28. Schlichting H., Laminare Kanaleinlaufströmung. ZAMM 14, 368—373 (1934).
29. Schmidt W., Ein einfaches Messverfahren für Drehmomente. Z. VDI 65, 411—444 (1921).
30. Stewarson K., On the flow between two rotating coaxial discs. Proc. Cambr. Phil. Soc. 49, 331—341 (1953).
31. Stokes G. G., On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX, 8 (1851), Math. and Phys. Papers III, 1—141, Cambridge, 1901.
32. Stuart J. T., A solution of the Navier—Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. A231, 116—130 (1955).
33. Szymski F., Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique. J. de math. pures et appliquées, Série 9, 11, 67 (1932); см. также Abhandl. d. III. Intern. Mech. Kongr. Stockholm I, 249 (1930).
34. Tao L. N., Donovan W. F., Through-flow in concentric and excentric annuli of fine clearance with and without relative motion of the boundaries. Trans. ASME 77, 1291—1301 (1955).
35. Theodorsen Th., Regnier A., Experiments on drag of revolving discs, cylinders, and streamline rods at high speeds. NACA Rep. 793 (1944).
36. Timme A., Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln. Ing.-Arch. 25, 205—225 (1957).
37. Watson J., A solution of the Navier—Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity. Quart. J. Mech. Appl. Math. 11, 302—325 (1958).
38. Watson J., The two-dimensional laminar flow near the stagnation point of a cylinder which has an arbitrary transverse motion. Quart. J. Mech. Appl. Math. 12, 175—190 (1959).

Г л а в а VI

Ползущие движения

§ 1. Дифференциальные уравнения ползущего движения

В этой главе мы рассмотрим некоторые приближенные решения уравнений Навье — Стокса для предельного случая, в котором силы трения значительно больше, чем силы инерции. Так как силы инерции пропорциональны квадрату скорости, силы же трения пропорциональны первой степени скорости, то очевидно, что движения с преобладающей ролью сил трения возникают при очень малых скоростях или, в более общем случае, при очень малых числах Рейнольдса. Решения уравнений Навье — Стокса, получаемые путем отбрасывания в последних инерционных членов, пригодны для $Re \ll 1$, т. е. для чисел Рейнольдса, меньших единицы. В этом можно сразу убедиться из безразмерной записи (4.2) уравнений Навье — Стокса. В самом деле, инерционные члены отличаются от членов, зависящих от вязкости, присутствием множителя $Re = \rho Vl/\mu$. Правда, в каждом отдельном случае следует тщательно выяснить, из каких величин должно быть составлено это число Рейнольдса. Такого рода течения, для которых число Рейнольдса весьма мало, называются *ползущими движениями*. Необходимо отметить, что в практических приложениях ползущие движения встречаются, если не считать некоторых особых случаев, довольно редко¹⁾.

Отбросив в уравнении Навье — Стокса для несжимаемой жидкости (3.34) инерционные члены, мы получим

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta \mathbf{w}, \quad (6.1)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ есть оператор Лапласа. Кроме того, мы имеем уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (6.2)$$

В скалярной записи уравнения (6.1) и (6.2) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.4)$$

Границные условия для этой системы уравнений такие же, как и для полных уравнений Навье — Стокса, а именно в соответствии с условием прилипания

¹⁾ Для шара, падающего в воздухе ($\nu = 0,14 \text{ см}^2/\text{сек}$), число Рейнольдса $Re = Vd/\nu$ равно единице, если диаметр шара равен 1 мм, а скорость $V = 1,4 \text{ см}/\text{сек}$.

жидкости к стенкам нормальная и касательная составляющие скорости на стенках должны быть равны нулю, т. е.

$$w_n = 0, \quad w_t = 0 \text{ на стенках.} \quad (6.5)$$

Одно важное свойство ползущих движений можно сразу обнаружить из уравнения (6.1), если составить дивергенцию от обеих его частей и учесть, что в правой части операции div и Δ можно переменить местами. Тогда, с учетом уравнения (6.2), мы получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \Delta p = 0. \quad (6.6)$$

Следовательно, при всяком ползущем движении давление p таково, что оно удовлетворяет уравнению Лапласа. Таким образом, давление $p(x, y, z)$ является гармонической функцией.

Уравнения плоского ползущего движения можно преобразовать к особенно простому виду, если ввести функцию тока ψ посредством соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функция тока $\psi(x, y)$, как уже было показано в § 4 главы IV, должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \Delta \psi = 0.$$

В этом можно убедиться и непосредственно из уравнений (6.3), для чего достаточно из первых двух уравнений этой системы исключить давление p .

Таким образом, функция тока $\psi(x, y)$ плоского ползущего движения является бигармонической функцией.

В следующих параграфах мы рассмотрим в качестве примеров ползущего движения три класса течений: 1) течение Стокса около шара; 2) течение между цапфой и подшипником (гидродинамическая теория смазки); 3) течение Хил-Шоу.

§ 2. Обтекание шара

Наиболее старое из известных решений для ползущего движения принадлежит Г. Стоксу, рассмотревшему обтекание шара потоком, имеющим постоянную по численному значению

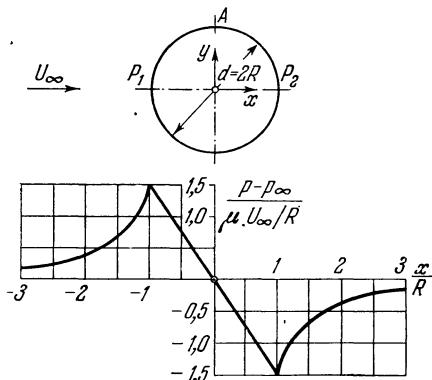


Рис. 6.1. Распределение давления при течении Стокса около шара.

на бесконечности скорость U_∞ , постоянную по численному значению и направлению [12]. Не входя в подробности вычислений, приведем только окончательные результаты. Желающих ознакомиться с вычислениями отсылаем к изложению Л. Прандтля [9]. Совместим центр шара с началом координат и направим положительную ось x параллельно скорости U_∞ (рис. 6.1); радиус шара пусть равен R . Тогда, решив систему уравнений (6.3) и (6.4), мы получим следующие формулы для составляющих скорости и для давления:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_\infty \left[\frac{3}{4} \frac{Rx^2}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{R}{r} \left(3 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 1 \right], \\ v &= U_\infty \frac{3}{4} \frac{Rxy}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right), \\ w &= U_\infty \frac{3}{4} \frac{Rxz}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right), \\ p - p_\infty &= -\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty Rx}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Легко убедиться в том, что значения (6.7) действительно удовлетворяют уравнениям (6.3) и (6.4) и что на всей поверхности шара скорость равна нулю. Давление на поверхности шара равно

$$p - p_\infty = -\frac{3}{2} \mu \frac{x}{R^2} U_\infty. \quad (6.7a)$$

Следовательно, давление имеет максимальное и минимальное значения в точках P_1 и P_2 , и эти значения равны соответственно

$$p_{1,2} - p_\infty = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R}. \quad (6.7b)$$

Распределение давления вдоль меридиана шара, а также вдоль оси x (до и после шара) изображено на рис. 6.1. Последняя из формул (6.7) позволяет легко вычислить также распределение касательных напряжений на поверхности шара. Наибольшее значение касательное напряжение имеет в точке A , где оно равно

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R},$$

т. е. численно совпадает с абсолютным значением повышения и соответственно понижения давления в точках P_1 и P_2 . Проинтегрировав давление и касательное напряжение по всей поверхности шара, мы найдем полное сопротивление шара:

$$W = 6\pi\mu U_\infty R. \quad (6.8)$$

Это есть известная *формула Стокса* для сопротивления шара. Отметим, что одна треть этого сопротивления возникает вследствие разностей давления, а две трети — вследствие сил трения. Необходимо также отметить, что сопротивление пропорционально первой степени скорости.

Придадим теперь формуле Стокса такой же вид, какой имеют установленные на основании опыта законы сопротивления при больших числах Рейнольдса. Для этой цели представим сопротивление W как произведение коэффициента сопротивления c_W на площадь πR^2 поперечного сечения шара и на динамическое давление $\rho U_\infty^2/2$; мы получим

$$W = c_W \pi R^2 \frac{\rho}{2} U_\infty^2. \quad (6.9)$$

Заменив W его значением из формулы (6.8), мы найдем коэффициент сопротивления

$$c_W = \frac{24}{Re}, \quad (6.10)$$

где $Re = U_\infty d/\nu$ есть число Рейнольдса. Сравнение формулы (6.10) с результатами измерения (рис. 1.5, кривая 1) показывает, что она верна только в области чисел Рейнольдса $Re < 1$.

Линии тока впереди и позади шара при рассматриваемом ползущем движении симметричны относительно оси, проходящей через центр шара перпендикулярно к направлению скорости набегающего потока. В самом деле, при изменении направления скорости на противоположное (перемена знака у составляющих скорости и давления) система уравнений (6.3) и (6.4) переходит в самое себя. Картина линий тока при вязком обтекании шара изображена на рис. 6.2 в том виде, в каком она представляется наблюдателю, мимо которого шар движется со скоростью U_∞ . На этом же рисунке изображены распределения скоростей для некоторых поперечных сечений. Мы

видим, что шар увлекает за собой в своей окрестности довольно широкий слой жидкости, ширина которого по каждую сторону шара равна примерно диаметру шара. Совсем иное получается при движении шара с очень большим числом Рейнольдса; в этом случае ширина увлекаемого слоя, т. е. толщина пограничного слоя, чрезвычайно мала.

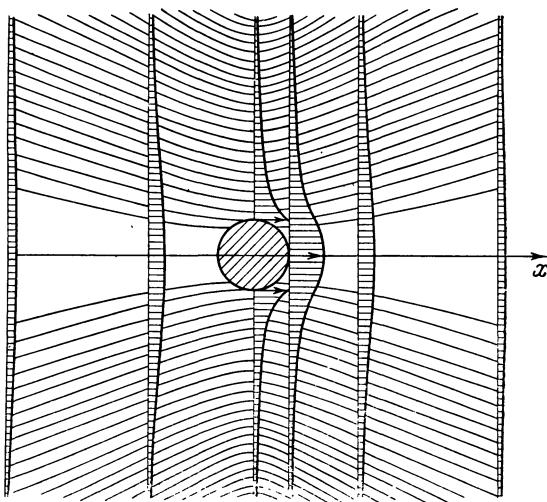


Рис. 6.2. Картина линий тока и распределение скоростей при течении Стокса около шара.

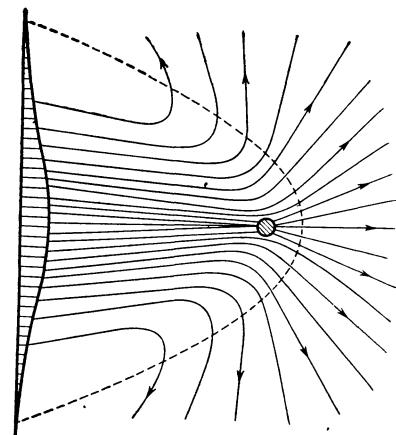


Рис. 6.3. Картина линий тока для течения около шара. По Озену.

Поправка Озена. Решение Стокса было улучшено К. Озеном^[8] путем частичного учета инерционных членов в дифференциальных уравнениях Навье — Стокса. Для этой цели Озен принял, что составляющие u , v , w скорости течения в окрестности шара определяются следующими формулами:

$$u = U_\infty + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad (6.11)$$

где u' , v' , w' суть возмущающие скорости, вообще малые по сравнению со скоростью U_∞ набегающего на шар потока, но в ближайшей окрестности шара сравнимые со скоростью U_∞ . При использовании значений (6.11) инерционные члены в уравнениях Навье — Стокса распадаются на две группы, например:

$$U_\infty \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad U_\infty \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \dots \text{ и } \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad u' \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \dots$$

Вторую группу, как состоящую из членов второго порядка малости по сравнению с членами первой группы, можно отбросить, после чего уравнения Навье — Стокса (3.32) вместе с уравнением неразрывности примут вид

$$\left. \begin{aligned} \rho U_\infty \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u', \quad \rho U_\infty \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v', \quad \rho U_\infty \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta w', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Границные условия остаются такими же, как для уравнений Навье — Стокса. Уравнения Озена, подобно уравнениям (6.7), линейны.

На рис. 6.3 изображена картина линий тока течения Озена для наблюдателя, покоящегося относительно жидкости, находящейся на большом расстоянии от шара, следовательно, для наблюдателя, мимо которого шар движется со скоростью U_∞ . Теперь картина линий тока не одинакова впереди и позади шара, как это было при решении Стокса, что, впрочем, сразу видно

из уравнений (6.12). В самом деле, уравнения (6.12), в противоположность уравнениям (6.7), при перемене знака у составляющих скорости и у давления не переходят сами в себя. Далее, из рис. 6.3 мы видим, что при течении Озена жидкость перед шаром вытесняется во все стороны почти так же, как и при течении Стокса, однако позади шара линии тока теснее примыкают одна к другой; это означает, что здесь теперь скорость больше, чем в случае течения Стокса. Таким образом, в случае течения Озена позади шара имеется такое спутное течение, какое наблюдается при экспериментальном изучении обтекания тел при очень больших числах Рейнольдса.

Для коэффициента сопротивления решение Озена дает формулу

$$c_w = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right), \quad (6.13)$$

где по-прежнему $Re = U_\infty d/\nu$ есть число Рейнольдса. Результаты измерений (рис. 1.5; кривая 2) показывают, что формула (6.13) более или менее пригодна вплоть до числа Рейнольдса $Re = 5$.

§ 3. Гидродинамическая теория смазки

Другим, на этот раз технически очень важным примером течения с преобладающей ролью вязкости может служить течение в слое смазочного масла между двумя частями машины, движущимися одна относительно другой, например между цапфой и подшипником. Такое течение обладает примечательным свойством: при быстром движении разности давлений в нем могут достигать чрезвычайно больших значений, вследствие чего тонкая пленка масла, находящаяся между цапфой и подшипником, поддерживает цапфу, предохраняя ее от непосредственного соприкосновения с подшипником. Наиболее существенные особенности течения масла между движущимися частями машины проще всего можно выяснить на примере ползуна и плоской опорной поверхности, образующих между собой малый угол δ (рис. 6.4). Примем, что обе скользящие одна по другой поверхности имеют в направлении, перпендикулярном к направлению движения, очень большое протяжение, следовательно, течение масла можно рассматривать как плоское¹⁾. Для того чтобы иметь дело со стационарным движением, будем считать ползун неподвижным, а опорную поверхность — движущейся вдоль ползуна со скоростью U . Ось x направим параллельно движению опорной поверхности, а ось y — перпендикулярно к этой поверхности. Высоту щели $h(x)$ между ползуном и опорной поверхностью будем предполагать весьма малой по сравнению с длиной ползуна l .

В § 1 главы V мы рассмотрели течение между параллельными плоскими стенками с наличием градиента давления (течение Күэтта). На течение между ползуном и опорной поверхностью можно смотреть как на обобщение течения Күэтта, с той только разницей, что течение смазочного масла происходит между стенками, наклоненными одна относительно другой. Поэтому теперь конвективное ускорение i и di/dx не равно нулю. Однако оценка сил инерции и сил трения сразу показывает, что, несмотря на существование конвективного ускорения, силы трения в практически важных случаях

¹⁾ Двумерная теория смазки впервые была дана О. Рейнольдсом, см. Phil. Trans. Roy. Soc. Part. I (1886). [Перевод этой статьи на русский язык помещен в сб. «Гидродинамическая теория смазки», Москва 1934. На три года раньше опубликования работы О. Рейнольдса в «Инженерном журнале» была напечатана статья Н. П. Петрова «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости», в которой были даны основы гидродинамической теории смазки. Статья Н. П. Петрова перепечатаана в указанном выше сборнике, а также в книге: Петров Н. П., Гидродинамическая теория смазки (избранные работы), Москва 1948.—Прим. перев.]

все же весьма значительно превышают силы инерции. Из членов, зависящих от трения, наибольшее значение имеет член $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, входящий в уравнение движения для направления x ; поэтому в качестве оценки сравнительной роли сил инерции и сил трения можно взять следующее отношение:

$$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила трения}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\rho U l}{l}}{\frac{\mu U}{h^2}} = \frac{\rho U l}{\mu} \left(\frac{h}{l} \right)^2.$$

Таким образом, можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами трения, если так называемое приведенное число Рейнольдса

$$Re^* = \frac{Ul}{v} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (6.14)$$

значительно меньше единицы¹⁾.

Для рассматриваемого случая дифференциальные уравнения ползущего движения (6.3) допускают дальнейшее упрощение. Прежде всего, уравнение

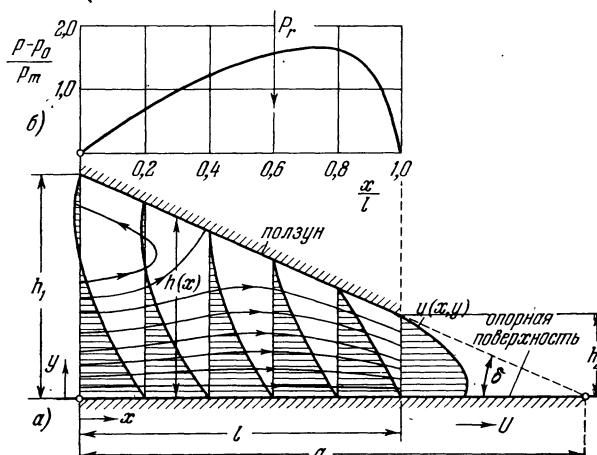


Рис. 6.4. Ползун на плоской опорной поверхности ($a/l = 1,57$): а) течение в щели между ползуном и опорной поверхностью; б) распределение давления под ползуном.

движения для направления y можно вообще отбросить, так как поперечная скорость v очень мала по сравнению со скоростью u . Далее, в уравнении для направления x можно пренебречь членом $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ по сравнению с членом $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, так как первый в $(l/h)^2$ раз меньше второго. Распределение давления должно быть, очевидно, таким, чтобы давление p_0 в начале ползуна и давление p в конце ползуна были одинаковы. Переход давления dp/dx в направлении x теперь, в отличие от течения между параллельными стенками, уже не постоянный, а переменный. Очень неболь-

шой поперечный перепад dp/dy можно совсем не учитывать. В результате всех этих упрощений вместо трех уравнений (6.3) ползущего движения остается только одно уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.15)$$

Что касается уравнения неразрывности, то запишем его в виде условия, что количество жидкости Q , протекающее в единицу времени через поперечное сечение, одинаково для каждого поперечного сечения; следовательно, будем иметь

$$Q = \int_0^{h(x)} u dy = \text{const.} \quad (6.16)$$

¹⁾ Приведем численный пример. Пусть $U = 10 \text{ м/сек}$, $l = 100 \text{ мм}$, $v = 40 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, $h = 0,2 \text{ мм}$. Тогда число Рейнольдса, составленное для длины ползуна, равно $Ul/v = 25000$, но приведенное число Рейнольдса $Re^* = 0,1$. Следовательно, силами инерции можно пренебречь

Граничными условиями будут

$$\left. \begin{array}{ll} u = U & \text{при } y = 0; \\ p = p_0 & \text{при } x = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} u = 0 & \text{при } y = h; \\ p = p_0 & \text{при } x = l, \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

Решение уравнения (6.15), удовлетворяющее граничным условиям (6.17), одинаково с решением (5.5) для течения между параллельными стенками и имеет вид

$$u = U \left(1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{h^2 p'}{2\mu} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (6.18)$$

где для краткости введено обозначение

$$p' = \frac{dp}{dx}.$$

Градиент давления p' должен быть таким, чтобы удовлетворялись и уравнение неразрывности (6.16), и оба граничных условия для давления. Подставив значение u , определяемое формулой (6.18), в равенство (6.16), мы получим

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3 p'}{12\mu}, \quad (6.18a)$$

откуда найдем

$$p' = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) \quad (6.19)$$

или, после интегрирования,

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q \int_0^x \frac{dx}{h^3}. \quad (6.20)$$

Условие, что $p = p_0$ при $x = l$, дает для Q значение

$$Q = \frac{U}{2} \frac{\int_0^l \frac{dx}{h^2}}{\int_0^l \frac{dx}{h^3}}. \quad (6.21)$$

Таким образом, количество протекающей жидкости Q будет известно, если задана форма щели $h(x)$. Зная Q , мы можем вычислить по формуле (6.19) градиент давления, а по формуле (6.20) — распределение давления вдоль длины ползуна.

Величины

$$b_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^2} \quad \text{и} \quad b_2(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^3}, \quad (6.22)$$

которые входят в равенство (6.20), зависят только от геометрической формы щели между ползуном и опорной поверхностью. Их отношение

$$c(x) = \frac{b_1(x)}{b_2(x)}, \quad (6.23)$$

имеющее размерность длины, играет важную роль в теории смазки. Для полной длины щели оно равно

$$H = c(l) = \frac{\int_0^l \frac{dx}{h^2}}{\int_0^l \frac{dx}{h^3}}. \quad (6.24)$$

Величина H иногда называется *характеристической шириной*. С ее помощью формула (6.21) может быть записана в более кратком виде

$$Q = \frac{1}{2} U H, \quad (6.25)$$

из которого сразу видна ее физическая интерпретация. Формуле (6.20), определяющей давление, теперь можно придать вид

$$p(x) = p_0 + 6\mu U b_1(x) - 12\mu Q b_2(x), \quad (6.26)$$

откуда для градиента давления получим выражение

$$p' = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{H}{h} \right), \quad (6.27)$$

показывающее, что давление имеет максимум или минимум в том сечении, в котором ширина h щели равна характеристической ширине H .

Часто желательно, чтобы в щели поддерживался положительный избыток давления $p - p_0$. Необходимое для этого условие можно вывести из предыдущего уравнения. Примем, что $p = p_0$ при $x = 0$ и что при $x = x_H$ ширина щели равна H . Тогда должно быть

$$\begin{cases} h(x) > H \text{ при } 0 < x < x_H \text{ в предположении, что } p' > 0, \\ h(x) < H \text{ при } x_H < x < l \text{ в предположении, что } p' < 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

Эти условия приводят к клиновидной форме щели, суживающейся в направлении течения и допускающей как положительный, так и отрицательный градиент dh/dx . Так как характеристическая ширина H зависит от формы щели в целом, то направление градиента давления в поперечном сечении не может быть определено из значения dh/dx только в одном поперечном сечении.

В случае щели, образованной плоскими стенками, можно принять, что

$$h(x) = \delta(a - x),$$

где a и δ суть постоянные (рис. 6.4). Выполнив вычисления, мы получим

$$Q = U \delta \frac{a(a-l)}{2a-l},$$

после чего найдем распределение давления

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \frac{x(l-x)}{h^2(2a-l)}. \quad (6.29)$$

Формуле (6.29) можно придать несколько более простой вид, если ввести в нее две ширины: h_1 при входе и h_2 при выходе (см. рис. 6.4). Теперь характеристическая ширина будет равна

$$H = \frac{2h_2 h_1}{h_1 + h_2}, \quad (6.30)$$

и для выполнения условия положительного избытка давления [соотношение (6.28)] необходимо, чтобы щель суживалась в направлении движения ползуна. В новых обозначениях распределение давления примет вид

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \frac{l}{h_1^2 - h_2^2} \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2}. \quad (6.31)$$

Проинтегрировав это выражение, мы найдем результирующую силу давления:

$$p = \int_0^l p dx = \frac{6\mu U l^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1} \right], \quad (6.32)$$

где $k = h_1/h_2$. Аналогичным образом найдем результирующую касательных напряжений:

$$F = - \int_0^l \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0 dx = \frac{\mu U l}{(k-1) h_2} \left[4 \ln k - \frac{6(k-1)}{k+1} \right]. \quad (6.33)$$

Интересно отметить [6], что результирующая сила давления при $k = 2,2$ имеет максимум, равный

$$P_{\max} \approx 0,16 \frac{\mu U l^2}{h_2^2}.$$

Соответствующее значение результирующей касательных сил равно

$$F = F_1 \approx 0,75 \frac{\mu U l}{h_2}.$$

Коэффициент трения P/F пропорционален h_2/l и может быть сделан очень малым.

Нетрудно вычислить координату x_c центра давления: она равна

$$x_c = \frac{1}{2} l \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{k^2 - 1 - 2k \ln k}{(k^2 - 1) \ln k - 2(k-1)^2} \right]. \quad (6.34)$$

При небольших углах наклона ползуна к опорной поверхности ($k \approx 1$) распределение давления, определяемое уравнением (6.29), приближенно параболическое; характеристическая ширина и центр давления лежат в поперечном сечении с координатой, очень близкой к $x = l/2$. Введя обозначение

$$h_{cp} = h(l/2),$$

мы найдем для среднего избыточного давления под ползуном величину

$$p_{cp} = \mu U \frac{l^2}{(2a - l) h_{cp}^2}. \quad (6.35)$$

Сравнивая этот результат с аналогичным результатом для ползущего течения около шара [формула (6.76)], мы видим, что под ползуном давление повышается в $(l/h_{cp})^2$ раз больше, чем в передней точке шара. Так как порядок величины l/h_{cp} составляет от 500 до 1000 ($l = 0,1$ м, $h_{cp} = 0,1 \div 0,2$ мм), то из сказанного следует, что в тонком слое масла под ползуном могут возникать очень высокие давления¹⁾. Возникновение столь высоких давлений

¹⁾ Так, например, при $U = 10$ м/сек, $\mu = 40 \cdot 10^{-4}$ кГсек/м², $l = 0,1$ м, $a = 2l = 0,2$ м мы имеем

$$h_{cp} = 0,2 \text{ мм}, \quad \frac{\mu U}{2a - l} = 0,133 \text{ кГ/м}^2,$$

следовательно,

$$p_{cp} = 0,133 \cdot 500^2 = 3,3 \text{ кГ/см}^2.$$

при сравнительно медленном движении является характерным свойством течения смазочного масла в узкой щели между ползуном и опорной поверхностью. Необходимо подчеркнуть, что основную роль в этом явлении играет наклонное положение одной из стенок относительно другой.

На рис. 6.4 изображены распределение скоростей, картина линий тока и распределение давления для случая плоского течения между ползуном и опорной поверхностью. Мы видим, что около неподвижной стенки в области возрастания давления возникает такое же возвратное течение, как в канале с параллельными стенками, если давление в нем увеличивается в направлении перемещения подвижной стенки (см. рис. 5.2).

Распределение давления и подъемную силу для ползуна конечной ширины, а также для ползуна со сферическим основанием на плоской опорной поверхности вычислил В. Фрессель [2]. Выполненные им же эксперименты подтвердили правильность его вычислений.

Во многих случаях, когда ширина ползуна конечная, сделанного выше предположения об одномерном характере течения недостаточно, и необходимо принять во внимание существование составляющей скорости w в направлении z , перпендикулярном к плоскости рисунка 6.4. Уравнение (6.18а) должно быть теперь дополнено уравнением

$$Q_z = \int_0^h w dy = \frac{1}{2} h W - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6.36)$$

и уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h w dy = 0, \quad (6.37)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial z} (hW) \right], \quad (6.38)$$

где W есть составляющая скорости на границе слоя смазки в направлении z при заданном x . Уравнение (6.38) известно под названием *уравнения Рейнольдса гидродинамической теории смазки*.

В случае цапфы и подшипника обязательно должно существовать смещение центра цапфы относительно центра подшипника, так как иначе не будет щели переменной высоты, а вместе с тем — и подъемной силы. Теория вращения цапфы в подшипнике широко разработана на основе изложенных выше соображений многочисленными учеными, в том числе А. Зоммерфельдом [11], Л. Гюмбелем [3] и Г. Фогельполем [13], [14]¹). Созданная теория применена также к подшипнику конечной ширины [1], [6]. Для такого подшипника подъемная сила, вследствие падения давления к боковым концам подшипника, значительно меньше. Большая часть теоретических исследований выполнена в предположении, что вязкость смазочного масла постоянна, т. е. не зависит от температуры. Между тем в действительности вследствие трения выделяется большое количество тепла, что приводит к значительному нагреванию масла, а так как вязкость масла с возрастанием температуры сильно уменьшается (см. таблицу 1.2, стр. 22), то это влечет за собой значи-

¹) Более строгую теорию см. в работе: Жуковский Н. Е. и Чаплыгин С. А., О трении смазочного слоя между шипом и подшипником. Труды Отделения физических наук: Общества любителей естествознания, XII (1904); вновь напечатано в томе I «Избранных сочинений» Н. Е. Жуковского, Москва 1948, в «Избранных трудах по механике и математике» С. А. Чаплыгина, Москва 1954, а также в сб. «Гидродинамическая теория смазки», Москва 1934.— Прим. перев.

тельное уменьшение подъемной силы. Это обстоятельство побудило Ф. Наме [7] распространить гидродинамическую теорию смазки также на случай вязкости, зависящей от температуры; подробнее об этом будет сказано в главе XII.

При больших окружных скоростях вращения цапфы и при высоких температурах масла (малая вязкость) приведенное число Рейнольдса Re^* , определяемое формулой (6.14), может стать близким к единице или даже больше единицы. Это означает, что теперь силы инерции сравнимы с силами трения, а потому выводы, сделанные на основе изложенной теории, становятся сомнительными. Можно попытаться распространить теорию на более высокие значения приведенного числа Рейнольдса следующим образом: использовав полученное выше решение, вычислить отброшенные ранее инерционные члены и затем найти улучшенное решение, учтя инерционные члены как известные активные силы. Такой способ сходен со способом, примененным Озеном с целью улучшить решение Стокса для обтекания шара. Соответствующие вычисления выполнены В. Калертом [5]. Они показали, что при повышении приведенного числа Рейнольдса примерно до $Re^* = 5$ силы инерции вносят в полученное ранее распределение давления поправки, не превышающие 10% (и для случая плоского ползуна, и для случая цапфы в подшипнике). Представление о совпадении теории с экспериментальными исследованиями можно получить из работ Г. Фогель-поля [14], [15].

§ 4. Течение Хил-Шоу

Другое весьма примечательное решение уравнений ползущего движения в трехмерном случае, т. е. уравнений (6.3) и (6.4), получается для течения между двумя параллельными плоскими пластинами, расположенными одна от другой на малом расстоянии. Если между обеими пластинами поместить цилиндрическое тело с произвольным поперечным сечением, вплотную прилегающее своими основаниями к пластинам, то при течении жидкости между пластинами возникает такая же картина линий тока, как при потенциальном обтекании рассматриваемого тела. Таким путем Г. Хил-Шоу [4] определил картины линий тока для потенциального течения около тел самой различной формы. В том, что решение уравнений ползущего движения (6.3) и (6.4) действительно дает такие же линии тока, какие получаются при течении без трения, нетрудно убедиться следующим образом.

Воспользуемся прямоугольной системой координат, начало которой поместим в середине между обеими пластинами, оси x и y расположим в плоскости, параллельной пластинам, а ось z направим перпендикулярно к пластинам. Расстояние между пластинами обозначим через $2h$. Пусть поток набегает на тело параллельно оси x со скоростью U_∞ . На большом расстоянии от тела течение будет происходить так же, как в канале с параллельными стенками. В таком канале, как мы уже знаем из § 1 главы V, имеет место параболическое распределение скоростей. Следовательно, в условиях настоящей задачи мы будем иметь

$$u = U_\infty \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = \infty.$$

Решение уравнений (6.3) и (6.4) мы можем взять в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad v = v_0(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad w \equiv 0, \\ p &= -\frac{2\mu}{h^2} \int_{x_0}^x u_0(x, y) dx = -\frac{2\mu}{h^2} \int_{y_0}^y v_0(x, y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

где $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ и $p_0(x, y)$ суть распределение скоростей и распределение давления при двумерном потенциальном обтекании рассматриваемого тела. Следовательно, функции u_0 , v_0 и p_0 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Сразу видно, что решение (6.39) удовлетворяет уравнению неразрывности (6.4) и третьему из уравнений движения (6.3), т. е. уравнению движения для направления z . В том, что решение (6.39) удовлетворяет и двум другим уравнениям движения, легко убедиться путем подстановки в них выражений (6.39). При этом необходимо только учесть, что, поскольку функции u_0 и v_0 относятся к потенциальному течению, для них выполняется условие отсутствия вращения частиц, т. е.

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0;$$

следовательно, эти функции удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta u_0 = 0$, $\Delta v_0 = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Первые два из уравнений (6.3) упрощаются и приводятся к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Решение (6.39) удовлетворяет и этим уравнениям, в чем легко убедиться подстановкой в них выражений (6.39). Таким образом, распределение скоростей и распределение давления (6.39) действительно являются решением дифференциальных уравнений ползущего движения. Течение, определяемое уравнениями (6.39), имеет такие же линии тока, как и плоское потенциальное обтекание рассматриваемого тела, причем линии тока во всех слоях $z = \text{const}$, параллельных пластинам, конгруэнтны. Решение (6.39) удовлетворяет условию прилипания на обеих пластинах $z = \pm h$, но не удовлетворяет условию прилипания на поверхности тела.

В случае течения Хил-Шоу, так же как и в случае течения смазочного масла в щели между ползуном и опорной поверхностью, отношение сил инерции к силам трения определяется приведенным числом Рейнольдса

$$Re^* = \frac{U_\infty L}{v} \left(\frac{h}{L_i} \right)^2 \ll 1,$$

где L есть характерный линейный размер тела в плоскости xy . Как только число Re^* становится больше единицы, силы инерции начинают играть существенную роль, и получаются отклонения от решения (6.39).

Решение (6.39) можно улучшить таким же способом, как это было сделано в случае решения Стокса для обтекания шара или в случае решения для ползущего течения. Для этой цели инерционные члены вычисляются из первого приближения и затем вводятся в уравнения в качестве внешних сил. Для случая течения Хил-Шоу около круглого цилиндра это было сделано Ф. Ригельсом [10].

При $Re^* > 1$ жидкие струйки, расположенные в различных параллельных стенкам слоях, больше не конгруэнтны. Частицы жидкости, движущиеся вблизи обеих пластин, отклоняются при обтекании тела сильнее, чем частицы в середине между пластинами, так как скорость первых больше скорости вторых. Вследствие этого возникает своего рода размыв

линий тока, который позади обтекаемого тела выражен сильнее, чем впереди (рис. 6.5).

Решения, получаемые для ползущих движений, по своей природе ограничены очень малыми числами Рейнольдса. Правда, существует принципиальная возможность распространения этих решений на область более высоких чисел Рейнольдса методом последовательных приближений. Такая попытка была сделана для всех рассмотренных в этой главе ползущих движений. Однако вычисления получаются во всех случаях столь сложными и трудоемкими, что не удается выйти за пределы первого приближения. Поэтому такой путь совершенно непригоден для теоретического проникновения в область средних по величине чисел Рейнольдса, в которой силы трения и силы инерции имеют величины одинакового порядка во всем течении. Эта область средних по величине чисел Рейнольдса до настоящего времени теоретически не исследована, в связи с чем особую ценность приобретает возможность интегрирования уравнений Навье — Стокса для другого предельного случая — случая очень больших чисел Рейнольдса. Эта возможность приводит к теории пограничного слоя, которой мы посвятим следующие главы.

Рис. 6.5. Течение Хил-Шоу около круглого цилиндра при $Re^* = 4$. По Ригельсу [10].

Литература к главе VI

1. Bauer K., Einfluss der endlichen Breite des Gleitlagers auf Tragfähigkeit und Reibung. Forschg. Ing.-Wes. 14, 48—62 (1943).
2. Fössel W., Reibungswiderstand und Tragkraft eines Gleitschuhs endlicher Breite. Forschg. Ing.-Wes. 13, 65—75 (1942).
3. Gumbel L., Everling E., Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1925.
4. Hele-Shaw H. S., Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions. Trans. Inst. Nav. Arch. XI, 25 (1898); см. также Nature 58, 34 (1898) и Roy. Inst. Proc. 16, 49 (1899).
5. Kahler W., Der Einfluss der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie. Ing.-Arch. 16, 321—342 (1948).
6. Michell A. G. M., Z. Math. u. Phys. 52, 123 (1905); см. также Ostwalds Klassiker № 248. [Имеется русский перевод в сб. «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, Москва 1934.]
7. Nahme F., Beiträge zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. Ing.-Arch. 11, 191—209 (1940).
8. Oseen C. W., Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Ark. f. Math. Astron. och Fys. 6, № 29 (1910).
9. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids. В книге: Durgan W. F., Aerodynamic Theory III, 34—208 (1935). [Имеется русский перевод: Дюранд В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]
10. Riegels F., Zur Kritik des Hele-Shaw-Versuches. ZAMM 18, 95—106 (1938).
11. Sommerfeld A., Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z. Math. u. Phys. 50, 97 (1904); Zur Theorie der Schmiermittelreibung, Z. Techn. Physik 2, 58 (1921). [Имеется русский перевод обеих статей в сб. «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, Москва 1934.]
12. Stokes G. G., On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Camb. Phil. Soc. 9, Part II, 8—106 (1851) или Collected Papers III, 55.
13. Vogelphol G., Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forschungsheft 386 (1937).
14. Vogelphol G., Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze. Z. VDI 91, 379 (1949).
15. Vogelphol G., Betriebssichere Gleitlager. Springer-Verlag, Berlin 1958.

Часть вторая

Ламинарные пограничные слои

Глава VII

Уравнения пограничного слоя при плоском течении. Пограничный слой на пластине

§ 1. Составление уравнений пограничного слоя для течения вдоль плоской пластины

Перейдем к рассмотрению второго предельного случая, случая очень малой вязкости или, в более общем виде, случая очень большого числа Рейнольдса. Знаменательный успех в исследовании движений жидкости при больших числах Рейнольдса был достигнут в 1904 г. Л. Прандтлем [16], показавшим, каким образом проявляет себя вязкость при больших числах Рейнольдса и каким путем можно упростить дифференциальные уравнения Навье — Стокса для того, чтобы получить их приближенные решения в предельном случае очень малой вязкости.

С целью наиболее физически наглядного пояснения способа, позволяющего упростить уравнения Навье — Стокса для случая очень малой вязкости, остановимся на простом примере плоского течения около тонкого цилиндрического тела (рис. 7.1). На некотором расстоянии от поверхности тела внутри жидкости преобладают, вследствие малой вязкости, силы инерции, действие же вязкости там почти не проявляется. Скорость течения почти до самой поверхности тела имеет порядок скорости V вдали от тела. Картина линий тока, а также распределение скоростей внутри жидкости практически имеют такой же вид, как и при потенциальном течении жидкости без трения. Однако более точные наблюдения показывают, что жидкость не скользит по поверхности тела, как

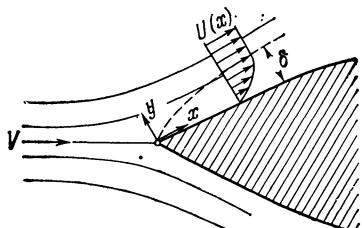


Рис. 7.1. Пограничный слой на стенке.

при потенциальном течении, а прилипает к ней. Переход от нулевой скорости на стенке к полной скорости, существующей на некотором расстоянии от стенки, совершается в очень тонком слое, называемом *пограничным слоем* или *слоем трения*. Следовательно, мы должны различать в рассматриваемом течении две области, между которыми, правда, нельзя провести резкой границы:

1. Первая область — очень тонкий слой в непосредственной близости от тела. В этой области градиент скорости du/dy в направлении, перпендикулярном к стенке, очень велик (пограничный слой), а вязкость μ , как бы она ни была мала, оказывает существенное влияние на течение, поскольку здесь касательное напряжение $\tau = \mu du/dy$, вызванное трением, может принимать большие значения.

2. Вторая область — все остальное течение вне пограничного слоя. В этой области градиент скорости не достигает таких больших значений, как в пограничном слое, поэтому действие вязкости здесь не играет роли и можно считать, что течение здесь потенциальное.

Как правило, пограничный слой тем тоньше, чем меньше вязкость или, в более общей формулировке, чем больше число Рейнольдса. В главе V мы выяснили на основании некоторых точных решений уравнений Навье — Стокса, что толщина пограничного слоя пропорциональна корню квадратному из кинематической вязкости, т. е. $\delta \sim \sqrt{v}$. Далее, при упрощениях, которые несколько ниже будут сделаны в уравнении Навье — Стокса с целью получения из них уравнений пограничного слоя, принимается, что толщина пограничного слоя очень мала по сравнению с некоторым характерным линейным размером L тела, т. е. $\delta \ll L$. О том, какой именно размер тела надо выбрать за характерный, будет сказано в следующем абзаце. Таким образом, решения уравнений пограничного слоя представляют собой по существу асимптотические решения для очень больших чисел Рейнольдса.

Приступим теперь к упрощению уравнений Навье — Стокса для течения в пограничном слое. Для этой цели прежде всего произведем оценку отдельных членов этих уравнений с точки зрения порядка их величины. Напомним, что мы рассматриваем сейчас двумерную задачу. Примем сначала, что обтекаемая жидкостью стенка плоская (см. рис. 7.1). Направим ось x вдоль стенки, а ось y — перпендикулярно к стенке. Перепишем уравнения Навье — Стокса в безразмерной форме, для чего все скорости отнесем к скорости V набегающего потока, а все длины — к характерному линейному размеру тела L , который выберем так, чтобы безразмерная величина du/dx в рассматриваемой области течения не превышала по порядку единицу. Давление и время сделаем безразмерными, разделив их соответственно на ρV^2 и на L/V . Полученные безразмерные величины обозначим для упрощения записи опять теми же буквами. Наконец, введем число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{v},$$

которое, согласно нашему основному предположению, должно быть очень велико. В результате уравнения Навье — Стокса (3.32) или (4.4) для рассматриваемой плоской задачи примут вид:

$$\text{для направления } x \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7.1)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & \delta & \frac{1}{\delta} & & \delta^2 & 1 & \frac{1}{\delta^2} \\ \text{для направления } y \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). & \delta^2 & \delta & 1 & & & & & \end{array} \quad (7.2)$$

Безразмерным уравнением неразрывности будет

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.3)$$

Границными условиями будут: прилипание жидкости к стенкам, т. е.

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0,$$

и совпадение скорости u на внешнем крае пограничного слоя со скоростью U внешнего течения, т. е.

$$u = U \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Разделим толщину пограничного слоя δ на характерный линейный размер тела L , т. е. сделаем эту толщину безразмерной. Такая безразмерная толщина — будем обозначать ее той же буквой δ — на основании сделанного выше предположения должна быть весьма мала по сравнению с единицей, т. е.

$$\delta \ll 1.$$

Приступим теперь к оценке отдельных членов уравнений (7.1), (7.2) и (7.3) с целью отбросить численно малые члены и тем самым упростить уравнения. Из уравнения неразрывности сразу видно, что, поскольку величина du/dx имеет порядок единицы, такой же порядок имеет и величина dv/dy . Но так как на стенке скорость $v = 0$, то отсюда следует, что в пограничном слое величина скорости v имеет порядок δ . Поэтому такой же порядок δ имеют в пограничном слое и величины dv/dx и d^2v/dx^2 . Величина d^2u/dx^2 имеет порядок единицы. Полученные в результате этой оценки порядки подписаны в уравнениях (7.1) — (7.3) под соответствующими величинами.

Далее, примем, что величина локального ускорения du/dt имеет такой же порядок, как и величина конвективного ускорения du/dx . Это означает, что очень внезапные ускорения, например подобные тем, которые возникают при сильных волнах давления, исключаются из рассмотрения. Члены, зависящие от вязкости, входят в уравнения (7.1) и (7.2) с малым множителем $1/\text{Re}$. Тем не менее некоторые из этих членов должны быть, на основании предыдущих рассуждений, по своей величине одного порядка с инерционными членами по крайней мере в непосредственной близости от стенки. Следовательно, в близком к стенке слое жидкости некоторые из вторых производных скорости должны быть очень велики. Согласно сказанному выше такими производными могут быть только d^2u/dy^2 и d^2v/dy^2 . Так как составляющая скорости, параллельная стенке, изменяется в тонком слое, имеющем толщину δ , от нуля на стенке до единицы на границе с внешним течением, то

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2},$$

в то время как

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}.$$

Подписав эти оценки под соответствующими величинами в уравнениях (7.1) и (7.2), мы увидим из первого уравнения, что величина членов, зависящих от вязкости, имеет в пограничном слое одинаковый порядок с инерционными членами только при условии, что величина числа Рейнольдса имеет порядок $1/\delta^2$, т. е. при условии, что

$$\frac{1}{\text{Re}} = \delta^2. \tag{7.4}$$

Таким образом, для течения, в котором число Рейнольдса велико, можно упростить первое уравнение движения, отбросив для этого величину d^2u/dx^2 , как малую по сравнению с d^2u/dy^2 . Уравнение неразрывности остается для больших Re неизменным. Что касается второго уравнения движения, то из него видно, что величина dp/dy имеет порядок δ ; следовательно, величина разности давлений поперек пограничного слоя, которую можно было бы вычислить путем интегрирования второго уравнения, имеет порядок δ^2 , т. е. очень мала, и поэтому давление в поперечном направлении пограничного слоя остается практически постоянным. Его можно принять равным тому давлению, которое существует на внешнем крае пограничного слоя и которое определяется здесь течением без трения. Таким образом, давление в пограничном слое как бы создается внешним течением, и его следует рас-

сматривать как известную функцию, зависящую только от продольной координаты x и от времени t .

На внешней границе пограничного слоя продольная скорость u переходит в скорость $U(x, t)$ внешнего течения. Так как здесь уже нет сильного градиента скорости в направлении, перпендикулярном к стенке, то теперь в уравнении (7.1) при большом числе Рейнольдса отпадают все члены, зависящие от вязкости. Поэтому для внешнего течения уравнение (7.1), если вернуться опять к размерным величинам, принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.5)$$

Для стационарного течения $\partial U / \partial t = 0$, а давление зависит только от x , и уравнение (7.5) принимает после замены частных производных на обыкновенные еще более простой вид:

$$U \frac{dU}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (7.5a)$$

Проинтегрировав это уравнение, мы получим уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = \text{const.} \quad (7.6)$$

Границные условия для внешнего течения приближенно такие же, как для течения без трения. Пограничный слой очень тонок, а поперечная скорость v на его внешнем крае очень мала ($v/V \sim \delta/L$). Следовательно, потенциальное обтекание рассматриваемого тела, имеющее на стенах тела нормальную составляющую скорости, равную нулю, можно рассматривать как весьма хорошее приближение для внешнего течения вязкой жидкости. Поэтому для определения перепада давления в продольном направлении пограничного слоя достаточно составить уравнение Бернулли (7.5) для совпадающей со стенкой линии тока потенциального течения, считаемого заданным.

Итак, после всех выполненных упрощений от двух уравнений Навье — Стокса остается только одно, которое, если опять вернуться к размерным величинам, принимает вместе с уравнением неразрывности следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.8)$$

причем граничными условиями будут

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = U(x, t) \quad \text{при } y = \infty. \quad (7.9)$$

Система уравнений (7.7) и (7.8) называется *уравнениями Прандтля для пограничного слоя*. Скорость $U(x, t)$ потенциального течения следует рассматривать как известную функцию, определяющую посредством уравнения (7.5) распределение давления. Кроме того, для момента времени $t = 0$ должно быть задано соответствующее условиям задачи течение в пограничном слое во всей области рассматриваемых значений x и y .

Для стационарного течения система уравнений (7.7) и (7.8) принимает более простой вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$(7.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$(7.11)$$

причем граничными условиями будут

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = U(x) \quad \text{при } y = \infty. \quad (7.12)$$

Кроме того, в начальном поперечном сечении $x = x_0$ должен быть задан начальный профиль скоростей $u(x_0, y)$. Следовательно, задача расчета течения в пограничном слое сводится к расчету дальнейшего развития заданного начального профиля продольных скоростей при заданном потенциальном течении.

Упрощение уравнений Навье — Стокса, полученное Прандтлем, с математической точки зрения весьма значительно. Правда, теперь, в противоположность дифференциальному уравнению ползущего движения, сохраняется нелинейный характер уравнений Навье — Стокса, однако из трех первоначальных уравнений плоской задачи с переменными u , v , r одно уравнение, а именно уравнение движения для направления, перпендикулярного к стенке, полностью отпадает. Соответственно этому сокращается на единицу число неизвестных, и остается система уравнений только с двумя неизвестными u и v . Давление r уже не является неизвестной величиной, так как оно может быть определено из уравнения Бернулли, составленного для потенциального течения около рассматриваемого тела, причем это течение следует считать заданным. Кроме того, в единственном из оставшихся уравнений движения один из двух членов, зависящих от вязкости, теперь отсутствует.

В заключение заметим, что из формулы (7.4) получается следующая оценка для толщины пограничного слоя:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{V \operatorname{Re}}} = \sqrt{\frac{v}{VL}}, \quad (7.13)$$

что подтверждает прежнюю оценку $\delta \sim \sqrt{v}$, полученную из точных решений уравнений Навье — Стокса. Ниже мы увидим, что для случая пластины, обтекаемой параллельно своей плоскости, численный множитель, переведящий пропорциональность (7.13) в равенство, равен приближенно 5 при условии, что L обозначает расстояние от передней кромки пластины.

Предыдущие рассуждения были проведены для плоской стенки. Однако они легко переносятся на случай искривленных стенок [19]. При этом выясняется, что уравнения пограничного слоя (7.10) — (7.12) сохраняют свою применимость, правда, при условии, что радиус кривизны стенки не претерпевает очень больших изменений, как это имеет место, например, на острых кромках.

Приведенный выше вывод уравнений пограничного слоя был с самого начала основан на физической предпосылке о существовании такого слоя жидкости, в котором основную роль играют силы трения. В противоположность этому была сделана попытка вывести уравнения Прандтля для пограничного слоя из уравнений Навье — Стокса чисто математическим путем, без привлечения физически наглядных представлений [18].

§ 2. Отрыв пограничного слоя

Из предыдущих рассуждений можно сделать некоторые существенные выводы о физических свойствах пограничного слоя, не производя интегрирования уравнений. Прежде всего можно выяснить, при каких обстоятельствах происходит перенос жидкости, заторможенной в пограничном слое, во внешнее течение, иными словами, при каких обстоятельствах возникает *отрыв течения* от стенки. Если вдоль контура тела имеется область возрастающего давления, то в общем случае жидкость, заторможенная в пограничном слое и обладающая поэтому небольшой кинетической энергией,

не в состоянии слишком далеко продвинуться в область высокого давления. Вместо этого она отклоняется в сторону от области высокого давления, отрывается при этом от тела и оттесняется от стенки во внешнее течение (рис. 7.2). Кроме того, вблизи стенки заторможенные частицы жидкости под действием градиента давления обычно начинают двигаться в сторону, противоположную направлению внешнего течения. Точку отрыва мы будем определять как границу между прямым и возвратным течениями в прилегающем к стенке слое, следовательно, в точке отрыва должно соблюдаться равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (7.14)$$

Это означает, что профиль скоростей имеет в точке отрыва пограничного слоя касательную, образующую нульевой угол с нормалью к стенке в точке отрыва. Профили же скоростей позади точки отрыва имеют вблизи стенки участки с направлением скорости против основного течения (рис. 7.2, б).

Для выяснения вопроса, возникает ли отрыв пограничного слоя и если возникает, то в какой именно точке, необходимо в общем случае выполнить интегрирование уравнений пограничного слоя. Обычно точка отрыва является тем местом, до которого только и возможен расчет пограничного слоя. В самом деле, уже совсем немного позади точки отрыва толщина слоя, в котором проявляет свое действие трение, становится столь значительной, что предположения, положенные в основу составления уравнений пограничного слоя, больше не соблюдаются. При обтекании тел с тупой кормовой частью оторвавшийся пограничный слой сильно оттесняет потенциальное течение от тела. В таких случаях давление, создаваемое в пограничном слое внешним течением, необходимо определять из опыта, так как теперь на внешнее течение оказывают большое влияние процессы, связанные с отрывом.

В том, что при стационарном течении отрыв пограничного слоя может возникнуть только в зоне замедленного течения ($dp/dx > 0$), легко убедиться также путем рассмотрения связи между градиентом давления dp/dx и распределением скоростей $u(y)$, вытекающей из уравнений пограничного слоя. В самом деле, вследствие граничных условий

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0$$

из уравнения (7.10) сразу следует, что

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}. \quad (7.15)$$

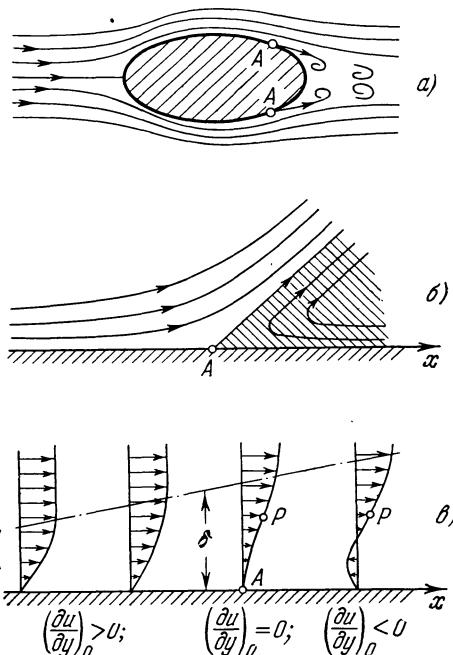


Рис. 7.2. Отрыв пограничного слоя: а) обтекание тела с отрывом (A — точка отрыва); б) линии тока вблизи точки отрыва; в) распределение скоростей вблизи точки отрыва (P — точка перегиба).

Далее, если мы продифференцируем уравнение (7.10) по y , то получим

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0. \quad (7.16)$$

Следовательно, в непосредственной близости от стенки кривизна профиля скоростей определяется исключительно перепадом давления, а потому вместе с переменой знака градиента давления меняет свой знак вблизи

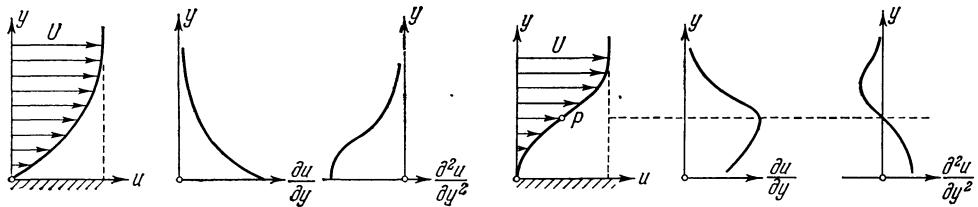


Рис. 7.3. Распределение скоростей в пограничном слое при понижении давления в направлении течения.

Рис. 7.4. Распределение скоростей в пограничном слое при возрастании давления в направлении течения.

стенки и кривизна профиля скоростей. Согласно равенству (7.15) для течения, в котором давление понижается в направлении движения (ускоренное течение, $dp/dx < 0$), величина $\partial^2 u / \partial y^2$ на стенке меньше нуля, а потому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

по всей толщине пограничного слоя (рис. 7.3). Для области течения, в которой давление повышается в направлении движения (замедленное течение, $dp/dx > 0$), величина $\partial^2 u / \partial y^2$ на стенке больше нуля, но так как на некотором расстоянии от стенки всегда $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$, то в этом случае внутри пограничного слоя должно быть место, в котором

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Это место есть точка перегиба профиля скоростей в пограничном слое (рис. 7.4)¹⁾.

Таким образом, в области замедленного внешнего течения профиль скоростей в пограничном слое всегда имеет точку перегиба. С другой стороны, профиль скоростей в точке отрыва, имея здесь касательную, образующую нулевой угол с нормалью к стенке, обязательно должен обладать точкой перегиба. Отсюда следует, что отрыв пограничного слоя может наступить только в том случае, если скорость внешнего течения при обтекании тела уменьшается.

§ 3. Замечание по поводу интегрирования уравнений пограничного слоя

Для интегрирования уравнений пограничного слоя при плоском течении, как нестационарном [уравнения (7.7) и (7.8)], так и стационарном [уравнения (7.10) и (7.11)], часто сначала удовлетворяют уравнению неразрывности, для чего вводят функцию тока $\Psi(x, y, t)$, т. е. полагают

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.17)$$

¹⁾ Наличие точки перегиба у профиля скоростей в пограничном слое имеет существенное значение для устойчивости этого профиля (переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную); см. главу XVI.

Подставив эти выражения составляющих скорости в уравнение (7.7), мы получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (7.18)$$

т. е. дифференциальное уравнение третьего порядка. Границные условия определяются условием прилипания на стенке, следовательно, должно быть

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{на стенке.}$$

Далее, в момент времени $t = 0$ должно быть задано распределение скоростей

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

во всем пространстве. Сравнивая уравнение (7.18) для функции тока с аналогичным уравнением, полученным из системы (4.10) полных дифференциальных уравнений Навье — Стокса, мы видим, что в результате упрощений, сделанных при выводе уравнений пограничного слоя, порядок дифференциального уравнения для функции тока понизился с четвертого до третьего.

§ 4. Сопротивление трения

Целью интегрирования уравнений пограничного слоя является получение распределения скоростей, а вместе с ним — и положения точки отрыва. Зная распределение скоростей в пограничном слое, легко вычислить сопротивление, которое возникает вследствие трения движущейся жидкости о поверхность тела. Для этого следует проинтегрировать касательное напряжение на стенке по всей поверхности тела. Касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

В случае плоского обтекания цилиндрического тела мы получим для сопротивления трения формулу

$$W_{tp} = b \sum_{s=0}^l \tau_0 \cos \phi ds, \quad (7.19)$$

где b есть высота тела, ϕ — угол, образуемый касательной к поверхности тела с направлением скорости U_∞ набегающего потока, а s — координата, измеряемая вдоль поверхности тела (рис. 7.5). Интегрирование следует выполнить вдоль всей обтекаемой поверхности от передней критической точки до задней кромки, конечно, при условии, что не происходит отрыва. Так как

$$\cos \phi ds = dx,$$

где x измеряется в направлении, параллельном направлению скорости набегающего потока, то формулу (7.19) можно переписать в следующем виде:

$$W_{tp} = b \mu \int_{x=0}^l \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad (7.20)$$

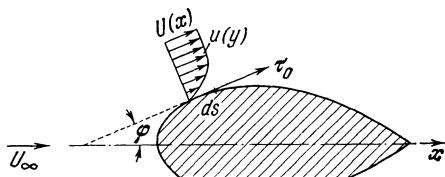


Рис. 7.5. К вычислению сопротивления трения.

причем и в этом случае интегрирование должно быть выполнено вдоль всей обтекаемой поверхности от передней критической точки до задней кромки.

Таким образом, для вычисления сопротивления трения требуется знание градиента скорости на стенке. Этот градиент может быть определен только путем интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя. Если отрыв пограничного слоя возникает до задней кромки обтекаемого тела, то вычисление по формуле (7.20) следует произвести только до точки отрыва. Далее, если ламинарный пограничный слой в каком-либо месте переходит в турбулентный, то интегрирование в формуле (7.20) следует выполнить до точки перехода. Позади этого места сопротивление трения подсчитывается иначе, а именно в соответствии с законами турбулентного течения, о чем будет сказано подробно ниже, в главе XXII.

При отрыве пограничного слоя распределение давления при подходящих обстоятельствах значительно отклоняется от теоретического распределения, соответствующего потенциальному течению жидкости без трения, что влечет за собой появление сопротивления давления. Следовательно, теория пограничного слоя объясняет возникновение не только сопротивления трения, но и сопротивления давления. Однако для вычисления величины сопротивления давления теория пограничного слоя не дает простого способа. О приближенном определении сопротивления давления будет сказано в главе XXV.

§ 5. Пограничный слой на пластине

Прежде чем перейти в следующей главе к изложению ряда общих свойств дифференциальных уравнений пограничного слоя, рассмотрим здесь один конкретный случай, который позволит нам сразу войти в существо дела. Простейшим примером применения уравнений пограничного слоя является течение вдоль очень тонкой плоской пластины. Такое течение было исследовано в гётtingенской диссертации Г. Блазиуса [2] как первая иллюстрация применения уравнений Прандтля. Расположим начало координат в передней точке пластины, а ось x направим вдоль пластины параллельно направлению набегающего потока, имеющего скорость U_∞ (рис. 7.6). Длину пластины примем бесконечной, а течение будем предполагать стационарным. Так как в рассматриваемом случае скорость потенциального течения постоянна, то

$$\frac{dp}{dx} \equiv 0,$$

и уравнения пограничного слоя (7.10) — (7.12) принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.22)$$

причем граничными условиями будут

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = U_\infty \quad \text{при } y = \infty. \quad (7.23)$$

Так как вся рассматриваемая система не имеет какой-либо характерной длины, то само собой напрашивается предположение, что профили скоростей $u(y)$ на различных расстояниях x от переднего края пластины аффинно-подобны между собой, т. е. могут быть приведены в совпадение один с другим, если для u и y подобрать соответствующие масштабы¹⁾. В качестве

¹⁾ С более общей точки зрения вопрос об аффинности (или «подобии») профилей скоростей в пограничном слое будет рассмотрен в главе VIII. Более строгая теория показывает, что излагаемые ниже соображения не могут быть распространены на непосредственную окрестность передней кромки пластины; см. об этом ниже, на стр. 138.

масштаба для u выберем скорость U_∞ набегающего потока, а в качестве масштаба для y — толщину пограничного слоя $\delta(x)$, возрастающую с увеличением координаты x . Тогда предположение о том, что все профили скоростей в пограничном слое аффинно-подобны между собой, может быть записано в виде

$$\frac{u}{U_\infty} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

причем функция φ должна быть одной и той же для всех расстояний x от передней кромки пластины.

Для оценки толщины пограничного слоя прибегнем к следующему способу. На основании ранее рассмотренных точных решений уравнений Навье — Стокса мы получили для толщины пограничного слоя, например, на пластине, внезапно приведенной в движение (см. § 1 главы V), оценку

$$\delta \sim \sqrt{vt},$$

где t есть время, отсчитанное от момента возникновения движения. В применении к рассматриваемой задаче мы можем взять за t время, которое требуется частице жидкости для того, чтобы продвинуться от передней кромки пластины до точки с координатой x . Если частица течет вне пограничного слоя, то это время равно

$$t = \frac{x}{U_\infty}.$$

Следовательно, в нашем случае для толщины пограничного слоя мы будем иметь оценку

$$\delta \sim \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}.$$

Введем теперь вместо координаты y другую, безразмерную координату, разделив для этого y на δ , т. е. положим

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

или, после замены δ его значением,

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}. \quad (7.24)$$

Далее, с целью интегрирования уравнения неразрывности введем, как было указано в § 3 настоящей главы, функцию тока $\psi(x, y)$. Примем, что

$$\psi = \sqrt{vxU_\infty} f(\eta), \quad (7.25)$$

где $f(\eta)$ есть безразмерная функция тока. Тогда для продольной составляющей u скорости мы получим выражение

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta). \quad (7.26)$$

где штрих у буквы f означает дифференцирование по η , а для поперечной составляющей v — выражение

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (7.27)$$

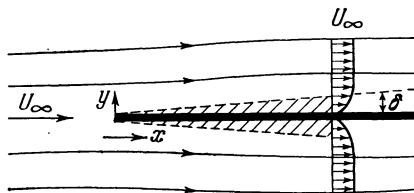


Рис. 7.6. Пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

Подставив эти выражения u и v в уравнение (7.21), мы получим для определения безразмерной функции тока $f(\eta)$ уравнение

$$-\frac{U_\infty^2}{2x} \eta f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x} (\eta f' - f) f'' = v \frac{U_\infty^2}{xv} f'''$$

или, после упрощения,

$$2f''' + ff'' = 0, \quad (7.28)$$

т. е. обыкновенное дифференциальное уравнение. Граничными условиями на основании равенств (7.23), (7.26) и (7.27) будут

$$\left. \begin{array}{l} f = 0, \quad f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \\ f' = 1 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{array} \right\} \quad (7.29)$$

Таким образом, применив аффинное преобразование, определяемое формулами (7.24) и (7.25), мы заменили два уравнения в частных производных (7.21) и (7.22) одним обыкновенным дифференциальным уравнением для функции тока. Полученное уравнение — нелинейное и третьего порядка, следовательно, трех граничных условий (7.29) достаточно для полной определенности решения.

Аналитические вычисления, необходимые для решения дифференциального уравнения (7.28), довольно затруднительны. Г. Блазиус получил решение, применив разложение функции $f(\eta)$ в степенной ряд в окрестности точки $\eta = 0$ и асимптотическое разложение для больших η и затем сокнув оба разложения в некоторой подходящим образом выбранной точке η . Этот способ подробно изложен Л. Прандтлем в работе [17]. Позднее Л. Бэрстону [1] и С. Голдстейн [8] еще раз решили это уравнение несколько иным способом.

Таблица 7.1. Значения функции $f(\eta)$ для пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.
По Л. Хоуарту [11]

$\eta = \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''	$\eta = \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78420	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,8	1,23099	0,81452	0,18401	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
				8,8	7,07923	1,00000	0,00000

До этого К. Тёпфер [20] решил дифференциальное уравнение Блазиуса (7.28) путем численного интегрирования по способу Рунге — Кутта. Затем Л. Хоуарт [11] вновь решил это уравнение, выполнив все вычисления с большой точностью. Значения f , f' , f'' , полученные Хоуартом, даны в таблице 7.1. В этой связи упомянем также о новом методе интегрирования, указанном Д. Мексином [14].

Распределение продольной скорости

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$$

изображено на рис. 7.7. Мы видим, что теперь профиль скоростей, по сравнению со случаем течения в окрестности критической точки (рис. 5.10), имеет

вблизи стенки очень небольшую кривизну, но зато дальше от стенки он очень быстро приближается к асимптоте. На самой стенке профиль скоростей

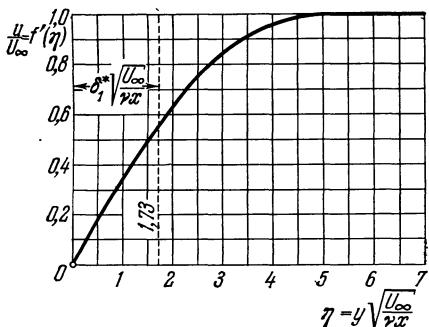


Рис. 7.7. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине. По Блазиусу [2].

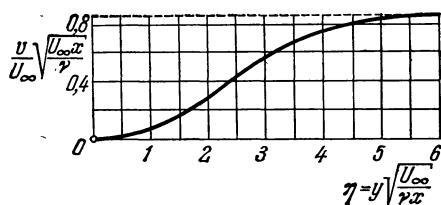


Рис. 7.8. Поперечная скорость в пограничном слое на плоской пластине.

течения вдоль пластины имеет точку перегиба, так как при $y = 0$ вторая производная $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$.

Распределение поперечной скорости, определяемое формулой (7.27), изображено на рис. 7.8. Примечательно, что на внешнем крае пограничного слоя, т. е. при $\eta \rightarrow \infty$, поперечная скорость не равна нулю; вычисления дают для нее значение

$$v_\infty = 0,8604 U_\infty \sqrt{\frac{v}{x U_\infty}}.$$

Следовательно, на внешнем крае пограничного слоя имеется составляющая скорости, направленная перпендикулярно к плоскости пластины. Это происходит потому, что жидкость на своем пути вдоль пластины несколько оттесняется от стенки вследствие нарастания толщины пограничного слоя вниз по течению. Отрыва пограничного слоя при продольном обтекании плоской пластины не возникает, так как при таком течении перепад давления равен нулю.

Сопротивление трения. Полученное решение для распределения скоростей позволяет легко вычислить сопротивление трения. Согласно формуле (7.19) сопротивление трения на одной стороне пластины равно

$$W = b \int_{x=0}^l \tau_0 dx, \quad (7.30)$$

где b есть ширина, а l — длина пластины. Местное касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_0(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} f''(0) = \alpha \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad (7.31)$$

причем, согласно таблице 7.1, $f''(0) = \alpha = 0,332$. Следовательно, безразмерное касательное напряжение на стенке равно

$$\frac{1}{2} c_f = \frac{\tau_0(x)}{\rho U_\infty^2} = 0,332 \sqrt{\frac{v}{U_\infty x}} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}. \quad (7.32)$$

Подставив в формулу (7.30) вместо $\tau_0(x)$ его выражение (7.31), мы получим для сопротивления трения пластины, смачиваемой с одной стороны, величину

$$W = \alpha \mu b U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{v}} \int_{x=0}^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \alpha b U_\infty \sqrt{\mu \rho l U_\infty},$$

а для сопротивления пластины, смачиваемой с обеих сторон, величину

$$2W = 4 \alpha b U_\infty \sqrt{\mu \rho l U_\infty} = 1,328 b \sqrt{U_\infty^3 \mu \rho l}. \quad (7.33)$$

В то время как при ползущем движении сопротивление трения пропорционально первой степени скорости, теперь оно пропорционально полуторной степени скорости. Следует обратить внимание также на то, что сопротивление трения пропорционально не длине пластины, а только корню квадратному из длины. Причина этого заключается в следующем: на задних участках пластины толщина пограничного слоя больше, чем на передних, поэтому на задних участках касательное напряжение на стенке меньше, чем на передних, а это означает, что задние участки вносят в полное сопротивление относительно меньшую долю, чем передние участки. Далее, введем в рассмотрение, как это обычно принято, коэффициент сопротивления

$$c_f = \frac{2W}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 F},$$

где через $F = 2bl$ обозначена смоченная поверхность. Подставив сюда вместо $2W$ его выражение (7.33), мы получим формулу

$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}},$

(7.34)

где $Re_l = U_\infty l / v$ есть число Рейнольдса, составленное для длины пластины и скорости набегающего потока. Этот закон Блазиуса для сопротивления продольно обтекаемой пластины применим только в области ламинарного течения, т. е. для чисел Рейнольдса

$$Re_l = \frac{U_\infty l}{v} < 5 \cdot 10^5 \div 10^6.$$

На рис. 21.2 (стр. 575) закону Блазиуса соответствует кривая 1. В области турбулентного течения, т. е. для $Re_l > 10^6$, сопротивление значительно больше значений, определяемых формулой (7.34).

Толщина пограничного слоя. Толщина пограничного слоя не может быть определена точно, так как влияние трения в пограничном слое уменьшается по мере удаления от стенки асимптотически. Составляющая скорости u , параллельная стенке, асимптотически переходит в скорость потенциального течения [функция $f'(\eta)$ асимптотически приближается к единице]. Если за толщину пограничного слоя принять то расстояние от стенки, на котором скорость $u = 0,99 U_\infty$, то из таблицы 7.1 мы найдем, что такое расстояние равно приближенно $\eta \approx 5,0$, и, следовательно, толщина пограничного слоя будет

$$\delta \approx 5,0 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}. \quad (7.35)$$

С физической точки зрения в качестве меры для толщины пограничного слоя более оправдана толщина вытеснения δ_1 , определяемая равенством (2.6) (см. также рис. 2.3). Как уже было сказано в § 2 главы I, под толщиной вытеснения понимается то расстояние, на котором потенциальное течение оттесняется наружу вследствие уменьшения скорости в пограничном слое. Влияние трения, уменьшая скорость течения, уменьшает тем самым и количество жидкости, протекающей в единицу времени, на величину

$$\int_{y=0}^{\infty} (U_{\infty} - u) dy.$$

С другой стороны, уменьшение количества жидкости, протекающей в потенциальном потоке, равно $U_{\infty}\delta_1$, где δ_1 есть толщина вытеснения. Приравняв обе эти величины, мы получим для определения δ_1 уравнение

$$U_{\infty}\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U_{\infty} - u) dy,$$

откуда

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy. \quad (7.36)$$

Заменив в этой формуле отношение u/U_{∞} его выражением согласно равенству (7.26), мы будем иметь

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} \int_{\eta=0}^{\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} [\eta_1 - f(\eta_1)],$$

где значение η_1 соответствует некоторой точке, лежащей вне пограничного слоя. Взяв для функции $f(\eta)$ ее первое асимптотическое приближение, мы получим

$$\eta_1 - f(\eta_1) = 1,7208,$$

и поэтому

$$\delta_1 = 1,7208 \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}}. \quad (7.37)$$

Расстояние от стенки $y = \delta_1$ отмечено на рис. 7.7. Именно на это расстояние линии тока потенциального течения оттесняются наружу от стенки вследствие действия трения. Таким образом, ранее вычисленная толщина пограничного слоя δ [формула (7.35)], определяемая как расстояние от стенки, на котором скорость действительного течения отличается от скорости потенциального течения только на 1%, круглым числом в три раза больше толщины вытеснения δ_1 .

В дальнейшем нам придется пользоваться в качестве характеристики пограничного слоя еще одной величиной, называемой *толщиной потери импульса* δ_2 и определяемой следующим образом. Вследствие трения поток импульса в пограничном слое уменьшается по сравнению с потоком импульса в потенциальном течении на величину

$$\rho \int_{y=0}^{\infty} u (U_{\infty} - u) dy.$$

С другой стороны, это же уменьшение потока импульса равно $\rho U_{\infty}^2 \delta_2$, следовательно,

$$\rho U_{\infty}^2 \delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u (U_{\infty} - u) dy,$$

откуда находим толщину потери импульса

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy. \quad (7.38)$$

Вычислив интеграл для случая пластины, обтекаемой в продольном направлении, мы получим

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} \int_{\eta=0}^{\infty} f' (1-f') d\eta = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}}. \quad (7.39)$$

Заметим еще, что непосредственно на переднем крае пластины теория пограничного слоя неприменима, так как здесь допущение о том, что

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|,$$

не оправдывается. Использование теории пограничного слоя возможно только после того, как число Рейнольдса $U_{\infty}x/v$, составленное для текущей длины пластины x , достигнет некоторого определенного значения. Особенности течения вблизи переднего края пластины могут быть выявлены только из полных уравнений Навье — Стокса. Соответствующие исследования выполнены Г. Ф. Кэррьером и Ц. Ц. Линем [5], а также Б. А. Болеем и М. Б. Фридманом [3].

Выражение (7.34), определяющее сопротивление трения, можно рассматривать как первый член разложения в ряд по степеням $1/\sqrt{Re}$. Примечательно, что второй член этого разложения может быть вычислен без дополнительного интегрирования. Знание же этого члена расширяет область применимости формулы (7.34) на меньшие числа Рейнольдса. Как показал И. Имаи [12], для определения второго члена разложения следует вычислить поток импульса через площадь достаточно большого круга с центром, расположенным на передней кромке пластины.

Таким образом И. Имаи получил для коэффициента трения пластины формулу

$$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} + \frac{2,326}{Re_l}. \quad (7.40)$$

В работе [12] даны также дальнейшие члены этого ряда и приведено выражение для местного коэффициента трения. Поправка, вносимая в величину коэффициента c_f вторым членом формулы (7.40), составляет при $Re_l = 10^4$ примерно 2% от первого члена, а при $Re_l = 10^6$ — круглым числом 0,2% от первого члена. См. в связи с этим также некоторые новые работы М. Ван Дайка [7].

Экспериментальные исследования. Измерения для проверки изложенной выше теории были выполнены И. М. Бюргерсом [4] и Б. Г. ван дер Хегге-Цейненом [10], а затем М. Ханзеном [9]. В более позднее время результаты особенно тщательных и детальных измерений опубликованы И. Никурадзе [15]. Все эти измерения показали, что на развитие пограничного слоя довольно сильное влияние оказывают, во-первых, профиль передней кромки пластины и, во-вторых, слабый градиент давления внешнего течения (если только он имеется). При измерениях, выполненных И. Никурадзе на пластине, обтекавшейся потоком воздуха, на эти обстоятельства было обращено особое внимание. На рис. 7.9 изображено полученное И. Никурадзе распределение скоростей в ламинарном пограничном слое для различных расстояний от передней кромки пластины. Мы видим, что измерения хорошо подтверждают предсказанную теорией аффинность профилей скоростей на различных расстояниях x от передней кромки пластины. Форма измеренных

профилей скоростей также хорошо совпадает с теоретической формой. На рис. 2.19 уже была изображена зависимость безразмерной толщины пограничного слоя $\delta \sqrt{U_\infty v x}$ от числа Рейнольдса, составленного для текущей длины пластины x . До тех пор, пока течение в пограничном слое ламинарное, эта безразмерная толщина остается постоянной и по своему численному значению приблизительно совпадает со значением, определяемым формулой (7.35). Однако течение в пограничном слое остается ламинарным только до определенного числа Рейнольдса $U_\infty x / v$, при больших же числах Рейнольдса оно становится турбулентным. На рис. 2.19 переход течения

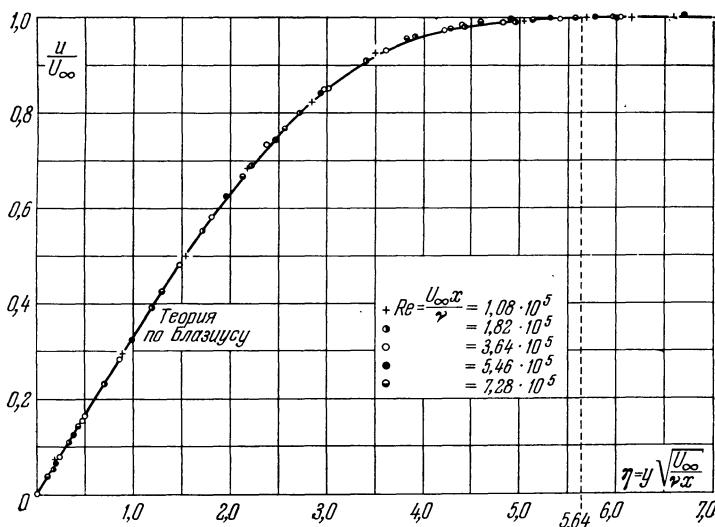


Рис. 7.9. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. По измерениям Никурадзе [16].

в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную резко заметен по перелому кривой кверху; этот перелом показывает, что в турбулентном пограничном слое толщина слоя возрастает при увеличении текущей длины пластины значительно быстрее, чем в ламинарном пограничном слое. Согласно измерениям ван дер Хегге-Цайнена и Ханзена, переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную происходит при критическом числе Рейнольдса, равном

$$\frac{U_\infty x}{v} = 3 \cdot 10^5.$$

Если число Рейнольдса составить не для текущей длины пластины x , а для толщины вытеснения δ_1 , то в соответствии с формулой (7.37) вместо числа Рейнольдса $U_\infty x / v = 3 \cdot 10^5$ мы будем иметь

$$\frac{U_\infty \delta_1}{v} = 950.$$

Новые измерения, о которых будет сказано в главе XVI, показали, что для потока воздуха, весьма тщательно освобожденного от возмущений, критическое число Рейнольдса может иметь значительно большие значения, достигающие примерно до $U_\infty x / v = 3 \cdot 10^6$.

Формула для сопротивления трения плоской пластины при ламинарном обтекании также подвергалась тщательной экспериментальной проверке.

С одной стороны, местное касательное напряжение на стенке можно определить косвенным путем по формуле (7.31), подставляя в нее измеренный наклон профиля скоростей к стенке. С другой стороны, в последнее время выполнены непосредственные измерения касательного напряжения на стенке при

помощи небольшой плитки, заделанной заподлицо со стенкой и имеющей возможность немногого перемещаться вдоль нее. Результаты этих весьма тщательных измерений, осуществленных Г. В. Липманом и С. Дхаваном [6], [13], представлены на рис. 7.10. На ординатах отложены измеренные значения местного коэффициента трения

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2},$$

а на абсциссах — соответствующие значения числа Рейнольдса $Re_x = U_\infty x / v$, составленного для текущей длины x . В области чисел Рейнольдса от $Re_x = 2 \cdot 10^5$ до $6 \cdot 10^5$ возможна как ламинарная, так и турбулентная форма течения. Косвенные и прямые измерения касательного напряжения

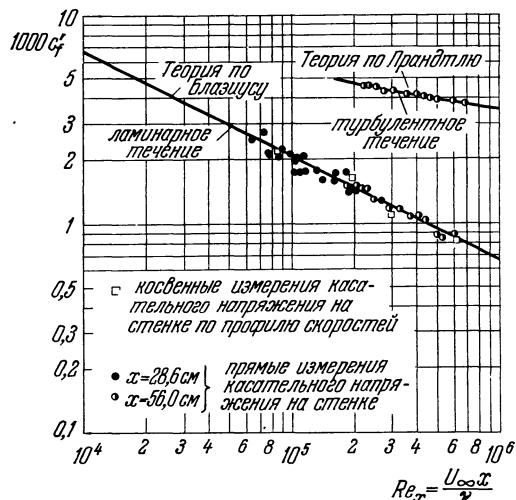


Рис. 7.10. Местный коэффициент трения $c'_f = \tau_0 / \frac{\rho}{2} U_\infty^2$ плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, по косвенным и прямым измерениям касательного напряжения. По Липману и Дхавану [6], [13]. Теоретические кривые — для ламинарного течения по формуле (7.32); для турбулентного течения — по формуле (21.12).

хорошо совпадают между собой. Результаты измерений блестяще подтверждают закон сопротивления Блазиуса

$$c'_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$

для ламинарного течения [формула (7.32)]. Для турбулентного течения результаты измерений также хорошо совпадают с теоретической формулой Прандтля (21.12), вывод которой будет дан в главе XXI.

Литература к главе VII

1. Bairstow L., Skin friction. J. Roy. Aero. Soc. **19**, 3 (1925).
2. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. **56**, 1—37 (1908). Английский перевод: NACA TM 1256.
3. Boley B. A., Friend m a M. B., On the viscous flow around the leading edge of a flat plate. JASS **26**, 453—454 (1959).
4. Burgers J. M., Proc. of the First Internat. Congr. for Applied Mechanics, Delft 1924.
5. Carrier G. F., Lin C. C., On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quart. Appl. Math. **VI**, 63—68 (1948).
6. Dhawan S., Direct measurements of skin friction. NACA Rep. 1121 (1953).
7. van Dyke M., Higher approximations in boundary layer theory. Part 1: General analysis. J. Fluid Mech. **14**, 161—177 (1962). Part 2: Application to leading edges. J. Fluid Mech. **14**, 481—495 (1962). Part 3: Parabola in uniform stream. J. Fluid Mech. **19**, 145—159 (1964).
8. Goldstein S., Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, 1—30 (1930); см. также Modern Developments in Fluid Dynamics, т. 1, 135, Oxford 1938 [Имеется русский перевод: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. 1, ИЛ, Москва 1948.]

9. H a n s e n M., Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM 8, 185—199 (1928); NACA TM 585 (1930).
10. v a n d e r H e g g e Z i j n e n B. G., Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Тезисы доклада, Delft 1924.
11. H o w a r t h L., On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London A 164, 547—579 (1938).
12. I m a i I., Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. JAS 24, 155—156 (1957).
13. L i e p m a n n H. W., D h a w a n S., Direct measurements of local skin friction in low-speed and high-speed flow. Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. 869, 1951.
14. M e k s y n G., New methods in laminar boundary layer theory. London 1961.
15. N i k u r a d s e J., Laminare Reibungsschichten an der längsangeströmten Platte. Монография, Zentrale f. wiss. Berichtswesen, Berlin 1942.
16. P r a n d t l L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlung d. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, 484—491. Вновь напечатано в «Vier Abhdl. zur Hydro- u. Aerodynamik», Göttingen 1927; см. также Gesammelte Abhandl., т. II, 575—584 (1961); английский перевод: NACA TM 452 (1928).
17. P r a n d t l L., The mechanics of viscous fluids. В книге: D u r a n d W. F., Aerodynamic Theory III, 34—208 (1935). [Имеется русский перевод: Д ю р а н д В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]
18. S c h m i d t H., S c h r ö d e r K., Laminare Grenzschichten. Ein kritischer Literaturbericht. Luftfahrtforschung 19, 65—97 (1942).
19. T o l l m i e n W., Grenzschichttheorie. Статья в Handb. d. Exper. Physik IV, часть 1, 241—287 (1934).
20. T ö p f e r C., Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius, «Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung». Z. Math. Phys. 60, 397—398 (1912).
21. W e y l H., Concerning the differential equations of some boundary layer problems. Proc. Nat. Acad. Sci. Washington 27, 578—583 (1941).
22. W e y l H., On the differential equations of the simplest boundary layer problems. Ann. Math. 43, 381—407 (1942).

Г л а в а VIII

Общие свойства уравнений пограничного слоя

Прежде чем перейти в следующей главе к дальнейшим примерам расчета пограничного слоя, остановимся сначала на некоторых общих свойствах уравнений пограничного слоя, причем ограничимся рассмотрением только стационарного двумерного течения несжимаемой жидкости.

Хотя уравнения пограничного слоя значительно проще уравнений Навье — Стокса, все же в математическом отношении они остаются настолько трудными, что по поводу их решений можно сделать только немного общих выводов. Необходимо прежде всего отметить, что уравнения Навье — Стокса являются относительно координат уравнениями эллиптического типа, в то время как уравнения Прандтля для пограничного слоя принадлежат к параболическому типу. Упрощающие допущения, положенные в основу вывода уравнений пограничного слоя, привели к тому, что стало возможным принимать давление поперек пограничного слоя постоянным, а давление вдоль стенки считать совпадающим с давлением внешнего течения и поэтому рассматривать его как заданную функцию. Эти обстоятельства сделали ненужным уравнение движения в направлении, перпендикулярном к стенке, что с физической точки зрения можно истолковать следующим образом: частицы жидкости при своем движении поперек пограничного слоя не обладают массой и не испытывают замедления вследствие трения. Очевидно, что при столь глубоком изменении уравнений движения следует ожидать, что их решения могут иметь некоторые особые математические свойства, и, наоборот, нельзя ожидать, чтобы результаты вычислений во всех случаях совпадали с результатами наблюдения действительных течений.

§ 1. Зависимость развития пограничного слоя от числа Рейнольдса

Упрощающие допущения, сделанные при выводе уравнений пограничного слоя, выполняются тем лучше, чем больше число Рейнольдса. Это дает основание рассматривать теорию пограничного слоя как теорию асимптотического интегрирования уравнений Навье — Стокса при очень больших числах Рейнольдса. Поэтому сначала выясним, каким образом развитие пограничного слоя на заданном теле определенной формы зависит от числа Рейнольдса.

Уже при выводе уравнений пограничного слоя из уравнений Навье — Стокса мы придали последним безразмерный вид, разделив для этого все скорости на скорость U_∞ набегающего потока, а все длины — на характерную длину L тела. Будем обозначать безразмерные величины теми же буквами, как и размерные, но с добавлением штриха; следовательно, будем писать

$$\frac{u}{U_\infty} = u', \quad \dots, \quad \frac{x}{L} = x', \quad \dots$$

Тогда уравнения пограничного слоя для стационарного плоского течения примут вид

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (8.2)$$

причем граничными условиями будут

$$u' = v' = 0 \quad \text{при } y' = 0; \quad u' = U'(x') \quad \text{при } y' = \infty.$$

В уравнении (8.1) через Re обозначено число Рейнольдса, составленное для скорости U_∞ набегающего потока и для характерной длины L , т. е.

$$\text{Re} = \frac{U_\infty L}{v}.$$

Из уравнений (8.1) и (8.2) мы видим, что при заданной форме тела, а следовательно при заданном потенциальном течении $U'(x')$, развитие пограничного слоя зависит только от одного параметра Re . Путем дальнейшего преобразования уравнений (8.1) и (8.2) можно привести их к такому виду, который не содержит числа Рейнольдса. В самом деле, положив

$$v'' = v' \sqrt{\text{Re}} = \frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}} \quad (8.3)$$

и

$$y'' = y' \sqrt{\text{Re}} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}}, \quad (8.4)$$

мы получим вместо уравнений (8.1) и (8.2) следующие:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \quad (8.6)$$

с граничными условиями

$$u' = 0, \quad v'' = 0 \quad \text{при } y'' = 0; \quad u' = U' \quad \text{при } y'' = \infty.$$

В уравнениях (8.5) и (8.6) число Рейнольдса отсутствует. Это означает, что решения системы уравнений (8.5) и (8.6), т. е. $u'(x', y'')$ и $v''(x', y'')$, также не зависят от числа Рейнольдса. Изменение числа Рейнольдса влечет за собой только аффинное преобразование пограничного слоя, увеличивающее поперечную координату и скорость в поперечном направлении в $1/\sqrt{\text{Re}}$ раз. Иными словами, для заданного тела безразмерные составляющие скорости

$$\frac{u}{U_\infty} \quad \text{и} \quad \frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}}$$

являются функциями безразмерных координат

$$\frac{x}{L} \quad \text{и} \quad \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}},$$

и эти функции не зависят больше от числа Рейнольдса.

Практическое применение этого закона подобия относительно числа Рейнольдса состоит в том, что достаточно выполнить для заданного тела один только расчет пограничного слоя в указанных безразмерных переменных, чтобы сразу же получить картину развития пограничного слоя для всех

чисел Рейнольдса, при которых течение еще остается ламинарным. Отсюда, в частности, следует, что положение точки отрыва на теле не зависит от числа Рейнольдса, но угол, под которым отходит от тела линия тока, начинающаяся в точке отрыва (см. рис. 7.2), с увеличением числа Рейнольдса уменьшается в отношении $1/\sqrt{Re}$.

Что касается отрыва течения от тела, то он остается и при предельном переходе $Re \rightarrow \infty$, т. е. при переходе к жидкости, лишенной трения. Следовательно, для тел такой формы, которая приводит к отрыву течения, теория пограничного слоя даже в предельном случае $Re \rightarrow \infty$ дает совершенно иную картину течения, чем теория потенциального течения жидкости без трения. Сказанное еще раз подтверждает то, на что мы обратили особое внимание в § 5 главы IV, а именно: предельный переход к жидкости, лишенной трения, следует производить не в дифференциальных уравнениях Навье — Стокса, а в решениях этих уравнений, так как иначе могут получаться результаты, лишенные физического смысла.

§ 2. «Подобные» решения уравнений пограничного слоя

Другим весьма важным вопросом, возникающим при решении уравнений пограничного слоя, является вопрос об условиях, при которых существуют «подобные» решения. Под «подобными» решениями мы будем понимать такие, для которых продольная составляющая скорости обладает следующим свойством: профили скоростей $u(x, y)$ в двух различных поперечных сечениях x отличаются один от другого только масштабом координат x и y ¹. Следовательно, для «подобных» решений профили скоростей во всех сечениях x , перпендикулярных к стенке, можно привести в совпадение, если построить их в безразмерном виде, разделив для этого координаты x и y на соответствующие масштабы. Будем называть такие профили скоростей также *аффинно-подобными профилями*. В качестве масштаба для скорости u наиболее удобно взять соответствующую сечению x скорость потенциального течения $U(x)$, так как тогда безразмерная скорость $u(x)$ в каждом сечении будет изменяться от нуля до единицы. В качестве масштаба для расстояния y следует взять некоторую величину $g(x)$, пропорциональную толщине пограничного слоя в рассматриваемом сечении. Следовательно, требование «подобия» сводится к тому, чтобы продольная составляющая $u(x, y)$ скорости в пограничном слое удовлетворяла в любых сечениях x_1 и x_2 уравнению

$$\frac{u\left[x_1, \frac{y}{g(x_1)}\right]}{U(x_1)} = \frac{u\left[x_2, \frac{y}{g(x_2)}\right]}{U(x_2)}. \quad (8.7)$$

Одним из примеров «подобного» в указанном смысле решения уравнений пограничного слоя является рассмотренный в § 5 главы VII пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. Масштабным множителем для u там была скорость U_∞ набегающего потока, а масштабным множителем для y — длина

$$g(x) = \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}},$$

пропорциональная толщине пограничного слоя. Профили скоростей, построенные в безразмерных координатах u/U_∞ и $y/g = y\sqrt{U_\infty/vx} = \eta$, получились совпадающими для всех сечений x (см. рис. 7.7). Плоское и пространственное течения в окрестности критической точки, рассмотренные в § 2

¹⁾ В советской литературе «подобные» решения называются также «автомодельными» решениями. — Прим. ред.

главы V, также являются «подобными» решениями уравнений пограничного слоя.

Вопрос о «подобных» решениях важен прежде всего с математической точки зрения. Если имеются «подобные» решения, то, как мы сейчас увидим, дифференциальные уравнения пограничного слоя, представляющие собой систему уравнений в частных производных, могут быть сведены к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, что в математическом отношении означает, конечно, существенное упрощение. Примером такого упрощения может служить опять пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении; в самом деле, после выполнения преобразования подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{v_x}}$$

[уравнение (7.24)] мы получили для функции тока $f(\eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (7.28).

Выясним теперь, при каких потенциальных течениях (вне пограничного слоя) возможны «подобные» решения уравнений пограничного слоя, причем ограничимся случаем стационарного плоского течения несжимаемой жидкости. Этот вопрос впервые был весьма подробно исследован С. Голдстейном [4], а затем еще раз — В. Манглером [10].

Для стационарного плоского течения несжимаемой жидкости уравнения пограничного слоя (7.10) и (7.11), выведенные в § 1 главы VII, принимают, с учетом уравнения (7.5а), следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

причем граничными условиями будут

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad u = U \quad \text{при } y = \infty.$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности путем введения функции тока $\psi(x, y)$, т. е. положив, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (8.9)$$

и граничными условиями будут

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad \text{при } y = \infty.$$

Так же, как и в § 1 настоящей главы, перейдем к безразмерным величинам, разделив для этого все длины на некоторую подходящим образом выбранную длину L , а все скорости — на некоторую подходящим образом выбранную скорость U_∞ . Тем самым мы введем в расчет число Рейнольдса

$$Re = \frac{U_\infty L}{v}.$$

Одновременно введем для поперечной координаты y безразмерный масштабный множитель $g(x)$, следовательно, положим

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y \sqrt{Re}}{L g(x)} \quad (8.10)$$

[поперечная координата y умножена на \sqrt{Re} из тех же соображений, как и в предыдущем параграфе, см. равенство (8.4)]. Безразмерную функцию тока $f(\xi, \eta)$ возьмем в виде

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{LU(x)g(x)} \cdot \sqrt{Re}. \quad (8.11)$$

Таким образом, составляющие u и v скорости будут

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} = U f', \\ -\sqrt{Re} \cdot v &= \sqrt{Re} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = Lf \frac{d}{dx}(Ug) + Ug \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

где штрих у f означает дифференцирование по η , а у g — дифференцирование по x . Из равенств (8.12) сразу видно, что профили скоростей будут «подобны» в указанном выше смысле в том случае, если функция тока зависит только от одной переменной η , определяемой вторым из равенств (8.10), следовательно, при условии, что зависимость f от ξ отпадает! Но в этом случае уравнение в частных производных (8.9) для функции тока должно свестись к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $f(\eta)$. Если мы теперь исследуем, при каких условиях возможно указанное упрощение уравнения (8.9), то тем самым найдем условия, которым должно удовлетворять потенциальное течение $U(x)$ для того, чтобы существовали «подобные» решения.

Введя в уравнение (8.9) безразмерные переменные (8.10) и (8.11), мы получим для $f(\xi, \eta)$ дифференциальное уравнение

$$f'' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = \frac{U}{U_\infty} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (8.13)$$

где через α и β обозначены для сокращения следующие функции от x :

$$\alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx}(Ug), \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 U', \quad (8.14)$$

причем

$$U' = \frac{dU}{dx}.$$

Границными условиями для уравнения (8.13) будут

$$f = 0, f' = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } f' = 1 \text{ при } \eta = \infty.$$

«Подобные» решения будут существовать только в том случае, если f и f' не зависят от ξ , т. е. если правая часть уравнения (8.13) исчезает. Но тогда одновременно не должны зависеть от x коэффициенты α и β в левой части уравнения (8.13), т. е. эти коэффициенты должны быть постоянными. Это дает два уравнения для определения скорости $U(x)$ потенциального течения и масштабного множителя $g(x)$ для поперечной координаты. Таким образом, для существования «подобных» решений уравнений пограничного слоя функция тока $f(\eta)$ должна удовлетворять следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$f'' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0 \quad (8.15)$$

с граничными условиями

$$f = 0, f' = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } f' = 1 \text{ при } \eta = \infty. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.15) впервые было выведено В. М. Фокнером и Сильвией Скэн [2], а его решения подробно были исследованы Д. Р. Хартри [7]. К уравнению (8.15) мы еще вернемся в следующей главе.

Теперь нам остается выяснить, для каких $U(x)$ и $g(x)$ возможны «подобные» решения. Из уравнений (8.14), мы имеем

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{d}{dx} (g^2 U),$$

следовательно, если $2\alpha - \beta \neq 0$, то

$$\frac{U}{U_\infty} g^2 = (2\alpha - \beta) \frac{x}{L}. \quad (8.17)$$

Далее, из тех же уравнений (8.14) мы получаем

$$\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} gg' U$$

или, после умножения обеих частей на U'/U ,

$$(\alpha - \beta) \frac{U'}{U} = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \frac{g'}{g} = \beta \frac{g'}{g},$$

откуда после интегрирования находим

$$\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{\alpha-\beta} = K g^\beta, \quad (8.18)$$

где K есть постоянная. Исключив из уравнений (8.17) и (8.18) g , мы получим сначала распределение скоростей потенциального течения, а затем — масштабный множитель g :

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \left[(2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha-\beta}}, \quad (8.19)$$

$$g = \sqrt{(2\alpha - \beta) \frac{x}{L}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{-1/2}. \quad (8.20)$$

Случай, когда $2\alpha - \beta = 0$, должен быть исключен.

Из уравнений (8.14) видно, что у функций α и β общего множителя не может быть, так как если бы он существовал, то его всегда можно было бы ввести в функцию g . Следовательно, до тех пор, пока $\alpha \neq 0$, можно без ограничения общности принять, что $\alpha = +1$. Далее, для физического истолкования потенциального течения (8.19) целесообразно ввести новую постоянную m , связанную с β соотношением

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \quad (8.21)$$

или

$$\beta = \frac{2m}{m+1}.$$

Подставив это значение β , а также $\alpha = 1$ в равенства (8.19) и (8.20), мы получим

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{1+m} \left(\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \right)^m, \quad (8.22)$$

$$g = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{x}{L} \frac{U_\infty}{U}}. \quad (8.23)$$

Следовательно, вторая из формул (8.10), устанавливающая преобразование поперечной координаты, принимает вид

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{v_x}}. \quad (8.24)$$

Итак, мы пришли к следующему результату: уравнения пограничного слоя имеют «подобные» решения в том случае, если скорость потенциального течения пропорциональна некоторой степени длины дуги, измеряемой вдоль стенки от критической точки. Такого рода потенциальные течения действительно возникают при обтекании окрестности передней критической точки клинообразного тела с углом раствора $\pi\beta$ (рис. 8.1). Как легко подсчитать, при таком потенциальном течении скорость равна

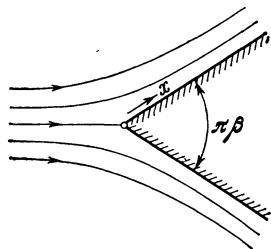


Рис. 8.1. Течение около клина; в непосредственной окрестности вершины имеет место теоретическое потенциальное распределение скоростей $U(x) = Cx^m$.

$\alpha = 1$ и $\beta = 1$ дифференциальное уравнение (8.15) переходит в ранее рассмотренное уравнение (5.39). Аналогичным образом формула преобразования для поперечной координаты (8.24) после подстановки в нее $U/x = a$ переходит в формулу (5.38), использованную в § 2 главы V.

б) Если $\beta = 0$, то $m = 0$. В этом случае скорость $U(x)$ постоянна и равна U_∞ , т. е. имеем мы обтекание плоской пластины в продольном направлении. Формула (8.24) принимает вид

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2vx}}.$$

Это выражение η отличается от выражения (7.24) только множителем $1/\sqrt{2}$, в связи с чем дифференциальное уравнение

$$f'' + ff' = 0,$$

которое получается из уравнения (8.15) после подстановки $\beta = 0$, отличается от ранее решенного уравнения (7.28) отсутствием множителя 2 в первом члене. После пересчета на одинаковые η оба дифференциальных уравнения совпадут одно с другим.

Решения для других значений m будут рассмотрены ниже, в главе IX.

Случай $\alpha = 0$. Ранее исключенный случай $\alpha = 0$ приводит, как это видно из уравнения (8.19), при всех значениях β к потенциальным течениям со скоростью $U(x)$, пропорциональной $1/x$. В зависимости от знака перед U такие потенциальные течения представляют собой либо течения около источника, либо течения около стока, которые можно рассматривать как течения в расширяющемся и соответственно в суживающемся канале с плоскими стенками. И эти течения мы рассмотрим подробно в главе IX.

Наконец, второй, не рассмотренный выше случай, когда $2\alpha - \beta = 0$, также приводит к «подобным» решениям, если только $U(x)$ пропорционально e^{rx} , где r есть положительная или отрицательная постоянная. На подробностях, связанных с этим случаем, здесь мы не можем останавливаться.

Вопрос о «подобных» решениях для уравнений пограничного слоя при нестационарном течении исследован Г. Шу [18]. В § 4 главы XII мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении сжимаемых пограничных слоев.

§ 3. Проблема «продолжения» решения. Контурные связи

При расчете пограничного слоя вдоль тела с заданным контуром часто возникает следующая задача: до некоторого сечения x пограничный слой задан; требуется продолжить его вдоль контура тела, т. е. вдоль стенки за пределы сечения x . Для решения этой задачи, называемой *задачей продолжения*, можно воспользоваться, например, численным методом (см. § 10 и 11 главы IX), основанным на разложении функции $u(x, y)$, определяющей профиль скоростей в заданном сечении x , в степенной ряд относительно y с коэффициентами $a_v(x)$, зависящими от x . Следовательно, необходимо оперировать рядом

$$u(x, y) = a_1 y + \frac{a_2}{2!} y^2 + \frac{a_3}{3!} y^3 + \dots \quad (8.26)$$

При использовании такого ряда встает весьма важный и глубокий вопрос: могут ли все коэффициенты a_1, a_2, \dots иметь произвольные значения или же они как-то связаны один с другим и, может быть, определенным образом зависят от внешнего, т. е. потенциального, течения $U(x)$? Сейчас мы покажем, что только некоторые из коэффициентов a_1, a_2, \dots могут быть выбраны произвольно, остальные же связаны со свободно выбираемыми коэффициентами определенными соотношениями, которые называются *контурными связями*. С некоторыми такими связями мы уже познакомились в § 2 главы VII. А именно, из равенства (7.15) следует, что кривизна профиля скоростей $u(y)$ около контура (стенки) определяется перепадом давления потенциального течения, что в настоящей постановке вопроса приводит к соотношению

$$\mu a_2 = \frac{dp}{dx}.$$

Далее, из равенства (7.16) следует, что

$$a_3 = 0.$$

Эти соотношения и являются контурными связями для коэффициентов a_2 и a_3 .

Для вывода контурных связей в общем виде будем исходить из безразмерных уравнений пограничного слоя (8.5) и (8.6), но с целью упрощения записи не будем пользоваться штрихами для обозначения безразмерных величин; тогда уравнения (8.5) и (8.6) примут вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (8.27a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8.27b)$$

причем граничными условиями будут

$$u = 0, v = 0 \text{ при } y = 0 \text{ (на стенке),}$$

$$u = U \quad \text{при } y = \infty.$$

Таким образом, в уравнениях (8.27a) и (8.27b)

$$x \text{ заменяет собой } \frac{x}{L},$$

$$y \quad \» \quad \» \quad \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}},$$

$$u \quad \» \quad \» \quad \frac{u}{U_\infty},$$

$$v \quad \» \quad \» \quad \frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty L}{v}},$$

$$p \quad \» \quad \» \quad \frac{p}{\rho U_\infty^2}.$$

Внеся в уравнение неразрывности (8.27б) вместо u его выражение через ряд (8.26) и выполнив интегрирование по y , мы найдем поперечную составляющую v скорости:

$$-v = \frac{a'_1}{2!} y^2 + \frac{a'_2}{3!} y^3 + \frac{a'_3}{4!} y^4 + \dots,$$

причем штрихи обозначают дифференцирование по x . Затем, подставив это выражение v , а также выражение u , определяемое рядом (8.26), в уравнение (8.27а), далее, для сокращения записи обозначение

$$f(x) = \frac{dp}{dx}$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях y , мы получим для коэффициентов a_1, a_2, \dots следующие уравнения или готовые значения:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &\text{ выбор свободен, } a_2 = f(x); \quad a_3 = 0; \\ a_4 &= a_1 a'_1, \text{ следовательно, выбор свободен;} \\ a_5 &= 2a_1 f'; \quad a_6 = 2ff'; \\ a_7 &= 4a_1^2 a''_1 - a_1 a'^2_1, \text{ следовательно, выбор свободен;} \\ a_8 &= 10a_1^2 f'' - 13a_1 a'_1 f' + 9(a_1 a''_1 + a'^2_1) f; \\ a_9 &= 40a_1 ff'' - 16a_1 f'^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Таким образом, свободно могут быть выбраны только коэффициенты $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$. Все остальные коэффициенты связаны с $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$ контурными связями.

Как показали Л. Прандтль [14] и Г. Гёртлер [5], для возможности решения сформулированной выше задачи продолжения необходимо, чтобы контурные связи (8.28) с достаточной степенью точности удовлетворялись как для исходного профиля скоростей, так и для дальнейших профилей $u(x, y)$, расположенных вниз по течению. Отдельные подробности численного решения такой задачи продолжения будут показаны в § 10 и 11 главы IX. Как установил К. Шрёдер [17], грубое нарушение контурных связей при решении задачи продолжения приближенным численным способом приводит к совершенно беспорядочному виду последовательно вычисляемых профилей скоростей. При расчете плоского ламинарного пограничного слоя приближенными способами, излагаемыми в главе X, контурные связи также играют важную роль.

Смыкание пограничного слоя с внешним, т. е. с потенциальным, течением также налагает некоторые общие ограничения на вычислительные операции. Этому вопросу посвящены исследования В. Толмина [19], Ф. Ригельса [16] и А. Бетца [1]. В работе К. Никкеля [13] даны некоторые оценки для толщины вытеснения пограничного слоя, а также для касательного напряжения на стенке, а тем самым — и для положения точки отрыва, причем все это сделано без точного решения уравнений пограничного слоя.

§ 4. Преобразование уравнений пограничного слоя в уравнение теплопроводности

В 1927 г. Р. Мизес [11] указал на возможность примечательного преобразования уравнений пограничного слоя к виду, более четко раскрывающему их математические особенности. Для такого преобразования прямоугольные координаты x и y заменяются новыми независимыми переменными: координатой $\xi = x$ и функцией тока ψ . Вычислим в новых координатах $\xi = x$, $\eta = \psi$ производные $du/d\xi$ и $dv/d\xi$. Имея в виду,

ЧТО

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

мы найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + u \frac{\partial u}{\partial \psi}.$$

Внеся эти выражения в уравнение (7.10), мы получим

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} = vu \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right).$$

Далее, введем так называемое полное давление

$$g = p + \frac{\rho}{2} u^2 \quad (8.29)$$

(весыма малой величиной $\rho v^2/2$ мы пренебрегаем); тогда предыдущее уравнение, если опять перейти от ξ к x , примет вид

$$\frac{\partial g}{\partial x} = vu \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}, \quad (8.30)$$

причем необходимо помнить, что теперь

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho} [g - p(x)]}.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение для определения полного давления $g(x, \psi)$. Границными условиями будут

$$g = p(x) \quad \text{при } \psi = 0; \quad g = p(x) + \frac{\rho}{2} U^2 = \text{const} \quad \text{при } \psi = \infty.$$

Для получения картины течения в плоскости xy следует перейти от переменной ψ опять к переменной y посредством преобразования

$$y = \int \frac{d\psi}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \int_{\psi=0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{g - p(x)}}$$

Уравнение (8.30) сходно с уравнением теплопроводности. В самом деле, уравнение одномерного распространения тепла, например в стержне, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (8.31)$$

где T есть температура, t — время, x — координата, измеряющая длину, и a — коэффициент температуропроводности (подробности см. в главе XII). Правда, уравнение (8.30), в отличие от уравнения (8.31), нелинейное, так как в него вместо температуропроводности a входит величина vu , зависящая как от независимой переменной x , так и от зависимой переменной g . На стенке, где $\psi = 0$, $u = 0$, $g = p$, уравнение (8.30) имеет неудобную для исследования особую точку. В самом деле, левая часть уравнения принимает на стенке значение

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \neq 0;$$

в правой же части мы имеем множитель $u = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} = \infty.$$

Существование этой особой точки внутренне связано с особым поведением профиля скоростей на стенке, обусловленным контурными связями (см. § 3 настоящей главы), и сильно затрудняет выполнение численного интегрирования. Подробное исследование уравнения (8.30) дано Л. Прандтлем [14], знавшим это преобразование задолго до появления работы Р. Мизеса, но не опубликовавшим его¹⁾.

Практическую проверку уравнения (8.30) выполнил Г. И. Люккерт [9] на примере пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине. Критические замечания к полученным результатам дали Л. Розенхэд и Дж. Симпсон [16].

Для пограничного слоя с повышением давления уравнение Мизеса (8.30) было проинтегрировано А. Р. Митчелом и Дж. Томсоном [12] численным методом продолжения. Наличие особой точки на стенке было введено в расчет посредством соответствующим образом подобранным разложения скорости вблизи стенки в ряд, причем были учтены контурные связи.

§ 5. Теорема импульсов и теорема энергии для пограничного слоя

Полный расчет пограничного слоя для заданного тела путем решения дифференциальных уравнений требует во многих случаях столь обширной вычислительной работы, что может быть выполнен только на электронных вычислительных машинах. Это особенно ясно будет видно из примеров, которые будут рассмотрены в главе IX (см., в частности, § 11). Поэтому в тех случаях, когда точное решение уравнений пограничного слоя невозможно при умеренной затрате времени, возникает необходимость применения приближенных способов, и притом иногда даже таких, которые оставляют желать лучшего в смысле точности. Для получения приближенных способов необходимо отказаться от требования, чтобы дифференциальные уравнения пограничного слоя удовлетворялись для каждой частицы жидкости, и ограничиться, во-первых, выполнением граничных условий и контурных связей на стенке и при переходе к внешнему течению и, во-вторых, выполнением только суммарного соотношения, получаемого из дифференциальных уравнений пограничного слоя как некоторое среднее по толщине слоя. Такое среднее дает *уравнение импульсов*, получающееся из уравнения движения посредством интегрирования по толщине пограничного слоя. В дальнейшем, излагая приближенные способы решения уравнений пограничного слоя, мы неоднократно будем пользоваться уравнением импульсов, которое часто называется также *интегральным соотношением Кармана* [8].

Выведем это соотношение, причем ограничимся случаем стационарного плоского течения несжимаемой жидкости, следовательно, будем исходить из уравнений (7.10) и (7.11) и граничных условий (7.12). Пронтегрируем уравнение движения (7.10) по y от $y = 0$ (стенка) до $y = h$, причем h выберем так, чтобы слой $y = h$ лежал всюду вне пограничного слоя; мы получим

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{du}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (8.32)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 79 работы Л. Прандтля [14], а также письмо Л. Прандтля в журнал ZAMM 8, 249 (1928).

В правую часть мы ввели вместо $\mu(\partial u / \partial y)_0$ касательное напряжение τ_0 на стенке; поэтому уравнение (8.32) можно применять как к ламинарным, так и к турбулентным течениям, если в последнем случае под u и v понимать осредненные по времени составляющие скорости. Далее, проинтегрировав уравнение неразрывности по y , мы найдем поперечную скорость

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Подставив это выражение v в уравнение (8.32), мы получим

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (8.32a)$$

Проинтегрировав по частям второй член в левой части, мы найдем

$$\int_{y=0}^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

и уравнение (8.32a) примет вид

$$\int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho},$$

или

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^h (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (8.32b)$$

Так как в обоих интегралах подынтегральные выражения вне пограничного слоя равны нулю, то в качестве верхнего предела интегрирования можно взять также $h \rightarrow \infty$. Кроме того, в первом интеграле можно переменить последовательность дифференцирования по x и интегрирования по y , так как верхний предел не зависит от x .

Введем теперь в расчет толщину вытеснения δ_1 и толщину потери импульса δ_2 , определяемые (см. § 5 главы VII) соотношениями

$$\delta_1 U = \int_{y=0}^{\infty} (U - u) dy \quad (\text{толщина вытеснения}), \quad (8.33)$$

$$\delta_2 U^2 = \int_{y=0}^{\infty} u (U - u) dy \quad (\text{толщина потери импульса}). \quad (8.34)$$

Тогда уравнение (8.32b) примет вид

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx}.$$

(8.35)

Это и есть *уравнение импульсов для плоского несжимаемого пограничного слоя*. Поскольку о касательном напряжении τ_0 не было сделано никаких особых допущений, уравнение (8.35) можно применять и к ламинарным, и к турбулентным течениям. В приведенной здесь записи уравнение импульсов впервые было выведено Е. Грушвитцем [6]. Оно широко используется для приближенных способов расчета ламинарного и турбулентного пограничного слоя (см. главы X, XI и XXII).

Аналогичным образом К. Вигхардт [21] ¹⁾ вывел *уравнение энергии* для ламинарного пограничного слоя. Приведем этот вывод. Умножим уравнение движения на u и затем проинтегрируем по y от $y = 0$ до $y = h > \delta(x)$. Подставив в полученное равенство вместо v его значение из уравнения неразрывности, мы будем иметь

$$\rho \int_0^h \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) - uU \frac{dU}{dx} \right] dy = \mu \int_0^h u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy.$$

Проинтегрировав второй член в подынтегральном выражении в левой части по частям, мы найдем

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h (U^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Первый и третий члены подынтегрального выражения в левой части можно представить в следующем виде:

$$\int_0^h \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uU \frac{dU}{dx} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h u \frac{d}{dx} (u^2 - U^2) dy.$$

Наконец, проинтегрировав по частям правую часть и учитя равенство (7.16), получим *уравнение энергии*

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty u (U^2 - u^2) dy = \mu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (8.36)$$

Здесь мы опять заменили верхний предел интегрирования $y = h$ на $y = \infty$ на том основании, что вне пограничного слоя подынтегральные выражения в левой и правой частях равны нулю. Величина $\mu (\partial u / \partial y)^2$ в правой части равенства (8.36) представляет собой энергию единицы объема, преобразующуюся в течение единицы времени вследствие трения в тепло (так называемая *диссипация*, подробнее см. в главе XII). Величина $\rho (U^2 - u^2)/2$ в левой части равенства (8.36) означает механическую энергию (сумму энергии давления и кинетической энергии), теряемую в пограничном слое вследствие понижения скорости течения в нем по сравнению со скоростью потенциального течения. Следовательно, величина

$$\frac{\rho}{2} \int_0^\infty u (U^2 - u^2) dy$$

есть не что иное, как поток потери энергии, а вся левая часть равенства (8.36) дает изменение потока потери энергии на единицу длины в направлении x .

Введем в дополнение к толщине вытеснения δ_1 и толщине потери импульса δ_2 толщину потери энергии δ_3 , определяемую соотношением

$$U^3 \delta_3 = \int_0^\infty u (U^2 - u^2) dy. \quad (8.37)$$

¹⁾ Значительно раньше это уравнение было выведено Л. С. Лейбензоном; см. его работу «Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя», Труды ЦАГИ, вып. 240 (1935) или «Собрание трудов», т. IV, Москва 1955.—Прим. перев.

Тогда уравнение (8.36) можно будет переписать в виде

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2v \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (8.38)$$

Это соотношение выражает собой теорему энергии для плоского ламинарного пограничного слоя при несжимаемом течении¹⁾.

Для того чтобы сделать представление о толщине вытеснения, толщине потери импульса и толщине потери энергии более наглядным, вычислим их для простого линейного распределения скоростей в пограничном слое (рис. 8.2); мы получим для них следующие значения:

$$\text{толщина вытеснения: } \delta_1 = \frac{1}{2} \delta,$$

$$\text{толщина потери импульса: } \delta_2 = \frac{1}{6} \delta,$$

$$\text{толщина потери энергии: } \delta_3 = \frac{1}{4} \delta.$$

Распространение изложенного в этом параграфе приближенного метода на осесимметричный и трехмерный пограничные слои будет дано в главе XI. Приближенные методы для температурного пограничного слоя будут изложены в § 7 главы XII, для сжимаемого пограничного слоя — в § 4 главы XIII и для пограничного слоя при нестационарном течении — в главе XV.

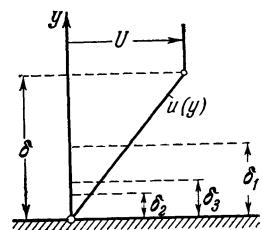


Рис. 8.2. Пограничный слой с линейным распределением скоростей; δ — толщина пограничного слоя; δ_1 — толщина вытеснения; δ_2 — толщина потери импульса; δ_3 — толщина потери энергии.

Литература к главе VIII

1. B e t z A., Zur Berechnung des Überganges laminarer Grenzschichten in die Aussenströmung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», 63—70, Braunschweig 1955.
2. F a l k n e r V. M., S k a n S. W., Some approximate solutions of the boundary layer equations. Phil. Mag. 12, 865—896 (1931); ARC-Report 1314 (1930).
3. G e i s T h., Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», 294—303, Braunschweig 1955.
4. G o l d s t e i n S., A note on the boundary layer equations. Proc. Cambr. Phil. Soc. 35, 338—340 (1939).
5. G ö r t l e r H., Weiterentwicklung eines Grenzschichtprofiles bei vorgegebenem Druckverlauf. ZAMM 19, 129—140 (1939); см. также J. Roy. Aero. Soc. 45, 35—50 (1941).
6. G r u s c h w i t z E., Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch. 2, 321—346 (1931).
7. H a r t r e e D. R., On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, Part II, 223—239 (1937).
8. v. K á r m á n Th., Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233—253 (1921). Английский перевод: NACA TM 1092; см. также Collect. Works, т. II, 70—97, London 1956.
9. L u c k e r t H. J., Über die Integration der Differentialgleichung einer Gleitschicht in zäher Flüssigkeit. Диссертация, Berlin 1933. Напечатана в Schriften d. math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. d. Universität Berlin 1, 245 (1933).
10. M a n g l e r W., Die «ähnlichen» Lösungen der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. ZAMM 23, 241—251 (1943).

¹⁾ Для турбулентного течения теорема энергии записывается в виде следующего соотношения:

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

11. v. Mises R., Bemerkungen zur Hydrodynamik. ZAMM 7, 425—431 (1927).
12. Mitchell A. R., Thomson J. Y., Finite difference methods of solution of the von Mises boundary layer equations with special reference to conditions near the singularity. ZAMP 9, 26—37 (1958). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1959, № 4 (56).]
13. Nickel K., Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten. Ing.-Arch. 31, 85—100 (1961).
14. Prandtl L., Zur Berechnung der Grenzschichten. ZAMM 18, 77—82 (1938); см. также Gesammelte Abhdlgn. II, 663—672; J. Roy. Aero. Soc. 45, 35—40 (1941) и NACA TM 959 (1940).
15. Riegels F., Zaat J., Zum Übergang von Grenzschichten in die ungestörte Strömung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 42—45 (1947).
16. Rosenhead L., Simpson J. H., Note on the velocity distribution in the wake behind a flat plate placed along the stream. Proc. Cambr. Phil. Soc. 32, 285—291 (1936).
17. Schröder K., Verwendung der Differenzenrechnung zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Math. Nachr. 4, 439—467 (1951).
18. Schuh H., Über die «ähnlichen» Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung in inkompressibler Strömung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», 147—152. Braunschweig 1955.
19. Tollmien W., Über das Verhalten einer Strömung längs einer Wand am äusseren Rand ihrer Reibungsschicht. В книге «Betz-Festschrift», 218—224 (1945).
20. Teterivin N., Lin C. C., A general integral form of the boundary layer equation for incompressible flow with an application to the calculation of the separation point of turbulent boundary layers. NACA-Rep. 1046 (1951).
21. Wieghardt K., Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 231—242 (1948).
22. Brown S. N., Stewartson K., Laminar separation. Статья в Annual Review of Fluid Mech. (ed. W. R. Sears) 1, Palo Alto, Calif. Annual Reviews, Inc. (1969).

Г л а в а IX

Точные решения уравнений пограничного слоя для стационарного плоского течения

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые точные решения дифференциальных уравнений пограничного слоя. Под точными решениями мы будем понимать такие, которые представляют собой полные решения уравнений пограничного слоя, безразлично, получаются ли они аналитическим или численным способом. В противоположность этому в главе X мы рассмотрим приближенные решения, получающиеся не из дифференциальных уравнений, а из некоторых интегральных соотношений, например из уравнения импульсов или уравнения энергии, выведенных в § 5 предыдущей главы.

Сначала мы остановимся на точных аналитических решениях. Такие решения охватывают сравнительно узкий класс задач. Получение аналитических решений уравнений пограничного слоя наталкивается, как правило, на весьма значительные математические трудности, как мы это уже видели на примере продольного обтекания пластины. Подлежащие решению дифференциальные уравнения обычно являются нелинейными и в большей части случаев могут быть решены только путем разложения в ряд или же численным способом.

Перепишем уравнения пограничного слоя для стационарного плоского течения вместе с граничными условиями:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9.2)$$

$$u = 0, \quad v = 0 \text{ при } y = 0; \quad u = U(x) \text{ при } y = \infty \quad (9.3)$$

[см. уравнения (7.10) и (7.11) и условия (7.12) в § 1 главы VII]. Кроме граничных условий должен быть задан профиль скоростей $u(0, y)$ в начальном поперечном сечении, относительно которого мы будем предполагать, что оно проходит через точку с координатой $x = 0$. Для интегрирования уравнения неразрывности целесообразно ввести функцию тока $\psi(x, y)$, т. е. принять, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда для функции тока мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (9.4)$$

[см. уравнение (7.18) в § 3 главы VIII], причем граничными условиями будут

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ (на стенке),} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= U(x) \quad \text{при } y = \infty.\end{aligned}$$

§ 1. Течение около клина

Особенно простым классом точных решений уравнений пограничного слоя являются «подобные» решения, уже рассмотренные в § 2 главы VIII и обладающие тем свойством, что для них профили скоростей $u(x, y)$ на различных расстояниях x от передней точки обтекаемого тела могут быть приведены в совпадение посредством соответствующего выбора масштабов для координат x и y . При существовании «подобного» решения система уравнений в частных производных (9.1) и (9.2) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению. В § 2 главы VIII мы показали, что «подобные» решения существуют в том случае, когда скорость потенциального течения пропорциональна степени текущего расстояния x , измеряемого от передней критической точки, т. е. если

$$U(x) = u_1 x^m.$$

Преобразование подобия для независимой переменной y , приводящее систему уравнений (9.1) и (9.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению, имеет, согласно формуле (8.24), следующий вид:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{v_x}} = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{v} x^{\frac{m-1}{2}}}. \quad (9.5)$$

Уравнение неразрывности интегрируется путем введения функции тока, которую в соответствии с формулами (8.11) и (8.23) следует взять в виде

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} V \sqrt{vu_1} x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta).$$

Тогда составляющие u и v скорости будут

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 x^m f'(\eta) = U f'(\eta), \\ v &= -\sqrt{\frac{m+1}{2} vu_1 x^{m-1}} \left[f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Внеся эти значения u и v в уравнение движения (9.1), сделав далее для сокращения записи подстановку (8.21), т. е.

$$m = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad \frac{2m}{m+1} = \beta, \quad (9.7)$$

и отбросив общий множитель всех членов $m u_1 x^{2m-1}$, мы получим для $f(\eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad (9.8)$$

уже известное нам из § 1 главы VIII [см. уравнение (8.15)]. Граничными условиями будут

$$f = 0, \quad f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad f' = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Уравнение (9.8) впервые было выведено В. М. Фокнером и Сильвией Скэн, а решения его позже были исследованы Д. Р. Хартри (см. литературу).

туру к главе VIII). Результат этого исследования изображен графически на рис. 9.1. Мы видим, что для ускоренного течения ($m > 0, \beta > 0$) профили скоростей не имеют точки перегиба, а для замедленного течения ($m < 0, \beta < 0$) они имеют такую точку. Отрыв пограничного слоя происходит при $\beta = -0,199$, т. е. при $m = -0,091$. Отсюда следует, что ламинарный пограничный слой может прилегать к телу без отрыва только при очень малых замедлениях течения.

К. Стюартсон [49] тщательно исследовал всю совокупность решений уравнения (9.8) и обнаружил, что в области повышения давления ($-0,199 < \beta < 0$) существует, кроме решения Хартри, другое решение, которому соответствует профиль скоростей с возвратным течением (см. § 6 главы X).

Потенциальное течение с распределением скоростей

$$U(x) = u_1 x^m$$

возникает при обтекании клиновидного тела вблизи передней критической точки (см. рис. 8.1). Угол раствора этого клина равен $\pi\beta$ и определяется формулой (9.7). Плоское течение вблизи критической точки ($\beta = 1, m = 1$), а также пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении ($\beta = 0, m = 0$), представляют собой частные случаи обтекания клиновидного тела и в то же время частные случаи «подобных» решений.

Примечателен случай, когда $\beta = 1/2, m = 1/3$. Дифференциальное уравнение для $f(\eta)$ при этих значениях β и m принимает вид

$$f'' + ff'' + \frac{1}{2}(1 - f'^2) = 0.$$

Произведем в этом уравнении подстановку

$$\eta = \xi \sqrt{2}, \quad \frac{df}{d\eta} = \frac{d\varphi}{d\xi};$$

тогда мы получим для $\varphi(\xi)$ уравнение

$$\varphi'' + 2\varphi\varphi'' + 1 - \varphi'^2 = 0,$$

которое совпадает с дифференциальным уравнением (5.47) осесимметричного течения вблизи критической точки. Это означает, что расчет пограничного слоя осесимметричного течения вблизи критической точки можно свести к расчету пограничного слоя плоского течения около клина с углом раствора $\pi\beta = \pi/2$.

К более общему рассмотрению связи между плоским и осесимметричным пограничными слоями мы вернемся ниже, в главе XI.

Если в качестве независимой переменной воспользоваться вместо величины η , определяемой формулой (9.5), величиной

$$\bar{\eta} = y \sqrt{\frac{U(x)}{vx}},$$

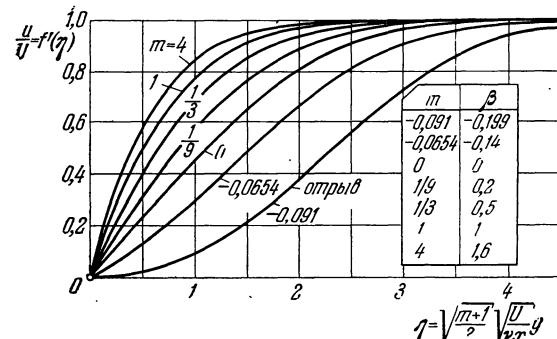


Рис. 9.1. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое при обтекании клина течением с теоретическим потенциальным распределением скоростей $\bar{U}(x) = u_1 x^m$. Показатель степени m и угол β (рис. 8.1) при вершине клина связаны между собой соотношением (9.7).

то тогда дифференциальное уравнение для функции $f'(\eta) = u/U$ будет иметь вид

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f'^2) = 0. \quad (9.8a)$$

В частном случае, когда $m = 0$, это уравнение переходит в уравнение (7.28) для продольно обтекаемой пластины.

§ 2. Течение в суживающемся канале

С течением около клина родственно потенциальное течение

$$U(x) = \frac{u_1}{-x}, \quad (9.9)$$

которое также приводит к «подобным» решениям и для $u_1 > 0$ может быть истолковано как плоское течение в суживающемся канале с плоскими стенками (течение со стоком, рис. 9.2). Количество протекающей жидкости при полном угле раствора 2π и при высоте слоя, равной единице, составляет

$$Q = 2\pi u_1.$$

Выполнив преобразование подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{-xv}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_1}{v}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Q}{2\pi v}} \quad (9.10)$$

и введя функцию тока

$$\psi(x, y) = -\sqrt{vu_1} f(\eta),$$

мы найдем составляющие u и v скорости:

$$u = U f', \quad v = -\sqrt{vu_1} \frac{\eta}{x} f'. \quad (9.11)$$

Внеся эти значения в уравнение (9.1), мы получим для функции тока дифференциальное уравнение

$$f''' - f'^2 + 1 = 0. \quad (9.12)$$

Границные условия вытекают из условий (9.3) и будут

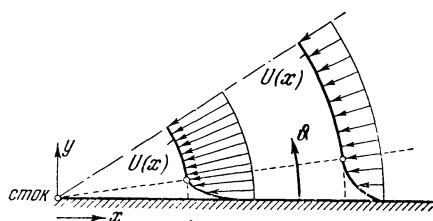
$$\begin{aligned} f' &= 0 && \text{при } \eta = 0, \\ f' &= 1, f'' = 0 && \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Рис. 9.2. Течение в суживающемся канале.

И это течение является частным случаем «подобных» решений, исследованных в общей форме в § 2 главы VIII. В самом деле, уравнение (9.12) можно получить из общего дифференциального уравнения (8.15) для «подобных» течений в пограничном слое, если в уравнении (8.15) положить $\alpha = 0$, $\beta = +1$. Рассматриваемый частный случай является одним из тех редких случаев, когда дифференциальные уравнения пограничного слоя интегрируются в замкнутой форме.

Умножив уравнение (9.12) на f'' и проинтегрировав его один раз, мы получим

$$f''^2 - \frac{2}{3} (f' - 1)^2 (f' + 2) = a,$$



где a есть постоянная интегрирования. Так как при $\eta \rightarrow \infty$ производные $f' = 1$, $f'' = 0$, то $a = 0$ и поэтому

$$\frac{df'}{d\eta} = \sqrt{\frac{2}{3}} (f' - 1)^2 (f' + 2).$$

Проинтегрировав это уравнение, мы найдем

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{f'} \frac{df'}{\sqrt{(f'-1)^2 (f'+2)}},$$

причем аддитивная постоянная интегрирования опять равна нулю, так как согласно граничным условиям $f' = 1$ при $\eta = \infty$. Полученный интеграл может быть вычислен в замкнутой форме и равен

$$\eta = \sqrt{2} \left\{ \operatorname{Ar th} \frac{\sqrt{2+f'}}{\sqrt{3}} - \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

или, после решения относительно $f' = u/U$ и замены $\operatorname{Arth} \sqrt{2/3}$ его значением 1,146,

$$f' = \frac{u}{U} = 3 \operatorname{th}^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1,146 \right) - 2. \quad (9.13)$$

Преобразованию (9.10) можно придать другой вид, если ввести полярный угол $\vartheta = y/x$ и подставить $Q = 2\pi r U$, где r есть радиальное расстояние от источника; тогда мы получим

$$\eta = \vartheta \sqrt{\frac{Ur}{v}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Ur}{v}}. \quad (9.14)$$

Распределение скоростей (9.13) изображено на рис. 9.3. Примерно при $\eta = 3$ пограничный слой смыкается с потенциальным течением. Следовательно, толщина пограничного слоя равна

$$\delta = 3x \sqrt{\frac{v}{Ur}},$$

т. е. и здесь она одного порядка с величиной $1/\sqrt{Re}$.

Приведенное выше решение впервые было дано К. Польгаузеном [39]. Как уже было сказано в п. 12 § 2 главы V (стр. 108), течение в расширяющемся канале также является, согласно Г. Хамелю, точным решением уравнений Навье — Стокса. Некоторые численные результаты этого решения представлены на рис. 5.14. См. в связи с этим работу Б. Л. Ривза и Ч. Дж. Киппенхана [42а].

§ 3. Течение около цилиндра (ряд Блазиуса)

Рассмотренные выше «подобные» решения уравнений пограничного слоя охватывают сравнительно узкий класс течений, который почти полностью исчерпывается приведенными примерами продольного обтекания плоской пластины, плоского и осесимметричного течений вблизи критической точки, течения около клина и течения в суживающемся канале. Способ расчета пограничного слоя для общего случая двумерного течения около цилиндрического тела с осью, перпендикулярной к направлению течения, впервые был дан Г. Блазиусом [4]. Впоследствии этот способ был

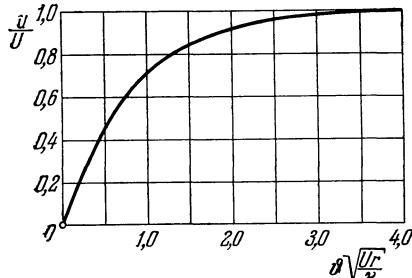


Рис. 9.3. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое при течении в суживающемся канале.

усовершенствован К. Хименцем [30] и Л. Хоуартом [31]. Следует различать два случая поперечного обтекания цилиндрического тела, которые мы будем называть симметричным и несимметричным случаями; в симметричном случае поперечное сечение тела имеет ось симметрии, параллельную направлению набегающего потока на большом расстоянии от тела, в несимметричном же случае поперечное сечение такой оси не имеет.

В обоих случаях скорость потенциального течения представляется в виде степенного ряда относительно переменной x , которая означает расстояние от критической точки, измеряемое вдоль контура тела. Распределение скоростей в пограничном слое представляется таким же степенным рядом относительно x , но уже не с постоянными коэффициентами, а с переменными, причем эти переменные коэффициенты являются функциями координаты y , измеряемой в направлении, перпендикулярном к стенке (ряд Блазиуса). Л. Хоуарту удалось найти для распределения скоростей такой ряд, в котором коэффициенты-функции, зависящие от y , имеют универсальный характер, т. е. не зависят от величин, определяющих форму обтекаемого профиля. Это обстоятельство имеет особую важность, так как оно дает возможность вычислить коэффициенты-функции заранее и раз навсегда. Имея таблицы этих функций, довольно просто рассчитать пограничный слой около заданного тела, конечно, при условии, что табулирование указанных функций выполнено для достаточно большого числа членов ряда.

Однако применение намеченного в общих чертах способа Блазиуса сильно ограничивается тем, что для тонких тел, особенно важных в практическом отношении, требуется брать очень большое число членов ряда, больше, чем это возможно для составления таблиц с допустимой затратой времени. Причина этого заключается в следующем: для тонких тел, например для эллипса, обтекаемого в направлении длинной оси, или для крылового профиля, скорость потенциального течения вблизи критической точки возрастает очень резко, а дальше, позади критической точки, она изменяется на большом участке профиля незначительно, приближенное же представление такого рода функции в виде степенного ряда с малым числом членов получается плохим. Тем не менее способ Блазиуса не теряет практической ценности для тонких тел. В самом деле, в тех случаях, когда сходимости ряда недостаточно, чтобы довести расчет по способу Блазиуса до точки отрыва, можно поступить следующим образом: рассчитать по способу Блазиуса, т. е. аналитически и притом с большой точностью, только ближайший от критической точки участок пограничного слоя, а затем вести расчет дальше численно, например методом продолжения.

Перейдем к более подробному изложению способа Блазиуса для симметричного случая, а затем применим его к круглому цилинду. Пусть скорость потенциального течения дана в виде ряда

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + u_7 x^7 + u_9 x^9 + u_{11} x^{11} + \dots \quad (9.15)$$

Коэффициенты u_1, u_3, \dots зависят исключительно от формы тела; будем считать их известными. Умножив ряд (9.15) на его производную, т. е. на dU/dx , мы получим для определения давления ряд

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} = & u_1^2 x + 4u_1 u_3 x^3 + x^5 (6u_1 u_5 + 3u_3^2) + \\ & + x^7 (8u_1 u_7 + 8u_3 u_5) + x^9 (10u_1 u_9 + 10u_3 u_7 + 5u_5^2) + \\ & + x^{11} (12u_1 u_{11} + 12u_3 u_9 + 12u_5 u_7) + \dots \quad (9.16) \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности проинтегрируем опять путем введения функции тока $\psi(x, y)$. Для дальнейших вычислений необходимо подобрать подходящее выражение для функции тока, а вместе с ним — и для состав-

ляющих u и v скорости. Само собой напрашивается представить функцию тока $\psi(x, y)$, по аналогии с рядами (9.15) и (9.16), также в виде степенного ряда, но с коэффициентами, зависящими от y . Очевидно, что если степенной ряд для U оборвать на члене x^k , то ряд (9.16) для давления оборвется на члене x^{2k-1} . Отсюда следует, что если для функции U взять приближение в виде степенного ряда до члена x^k , то функцию ψ необходимо представить рядом, доходящим до члена x^{2k-1} . Если же ряд для ψ оборвать раньше, что в приложениях иногда неизбежно, то это приведет при расчете пограничного слоя к ошибке, которая, очевидно, будет возрастать с увеличением расстояния от критической точки и, следовательно, в любом случае потребует особого исследования. Наконец, подбирая ряд для ψ , необходимо, как уже было сказано, взять для его коэффициентов, являющихся функциями расстояния y от стенки, такие выражения, которые не зависели бы от коэффициентов u_1, u_3, \dots , характеризующих профиль обтекаемого тела, так как только при соблюдении этого условия указанные коэффициенты-функции могут быть вычислены раз навсегда.

Введем вместо расстояния y от стенки безразмерную координату

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{v}}, \quad (9.17)$$

которая получается из аналогичной координаты (7.24), введенной Блазиусом для расчета пограничного слоя на пластине, путем замены величины U_∞ первым членом ряда (9.15), т. е. величиной $u_1 x$. По аналогии с рядом (9.16), определяющим давление, возьмем для функции тока ряд

$$\begin{aligned} \psi = \sqrt{\frac{v}{u_1}} \{ & u_1 x f_1(\eta) + 4u_3 x^3 f_3(\eta) + 6u_5 x^5 f_5(\eta) + \\ & + 8u_7 x^7 f_7(\eta) + 10u_9 x^9 f_9(\eta) + 12u_{11} x^{11} f_{11}(\eta) + \dots \}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Для того чтобы коэффициенты-функции f_1, f_3, \dots не зависели от величин, характеризующих рассматриваемый профиль, т. е. от коэффициентов u_1, u_3, \dots , необходимо представить функции f_i , начиная с f_5 , в виде следующих сумм:

$$\left. \begin{aligned} f_5 &= g_5 + \frac{u_3^2}{u_1 u_5} h_5, \\ f_7 &= g_7 + \frac{u_3 u_5}{u_1 u_7} h_7 + \frac{u_3^3}{u_1^2 u_7} k_7, \\ f_9 &= g_9 + \frac{u_3 u_7}{u_1 u_9} h_9 + \frac{u_5^2}{u_1 u_9} k_9 + \frac{u_3^2 u_5}{u_1^2 u_9} j_9 + \frac{u_3^4}{u_1^3 u_9} q_9, \\ f_{11} &= g_{11} + \frac{u_3 u_9}{u_1 u_{11}} h_{11} + \frac{u_5 u_7}{u_1 u_{11}} k_{11} + \frac{u_3^2 u_7}{u_1^2 u_{11}} j_{11} + \\ & + \frac{u_3 u_6^2}{u_1^2 u_{11}} q_{11} + \frac{u_3^3 u_5}{u_1^3 u_{11}} m_{11} + \frac{u_3^5}{u_1^4 u_{11}} n_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Тогда, обозначив штрихами дифференцирование по η , мы получим для составляющих u и v скорости следующие ряды:

$$u = u_1 x f'_1 + 4u_3 x^3 f'_3 + 6u_5 x^5 f'_5 + 8u_7 x^7 f'_7 + 10u_9 x^9 f'_9 + 12u_{11} x^{11} f'_{11} + \dots, \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} v = -\sqrt{\frac{v}{u_1}} [& u_1 f_1 + 12u_3 x^2 f_3 + 30u_5 x^4 f_5 + 56u_7 x^6 f_7 + \\ & + 90u_9 x^8 f_9 + 132u_{11} x^{10} f_{11} + \dots]. \end{aligned} \quad (9.20a)$$

Подставив в дифференциальное уравнение движения (9.1) вместо U, u, v их выражения (9.16), (9.20) и (9.20a) и приравняв коэффициенты при

одинаковых степенях x , мы получим для определения функций f_1, f_3, \dots систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Первые четыре уравнения этой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_1'^2 - f_1 f_1'' &= 1 + f_1''', \\ 4f_1' f_3' - 3f_1'' f_3 - f_1 f_3'' &= 1 + f_3''', \\ 6f_1' g_5' - 5f_1'' g_5 - f_1 g_5'' &= 1 + g_5''', \\ 6f_1' h_5' - 5f_1'' h_5 - f_1 h_5'' &= \frac{1}{2} + h_5''' - 8(f_3'^2 - f_3 f_3''). \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Границные условия для функций f_1, f_3, \dots получаются из условий (9.3) и будут

$$\left. \begin{aligned} f_1 = f_1' = 0, \quad f_3 = f_3' = 0, \quad g_5 = g_5' = 0, \quad h_5 = h_5' = 0 &\quad \text{при } \eta = 0; \\ f_1' = 1, \quad f_3' = \frac{1}{4}, \quad g_5' = \frac{1}{6}, \quad h_5' = 0 &\quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Дифференциальные уравнения (9.21) для коэффициентов-функций f_1, f_3, \dots все имеют третий порядок, и каждый из этих коэффициентов должен удовлетворять трем граничным условиям (9.22). Только первое из уравнений системы (9.21), определяющее функцию f_1 , нелинейное. Оно тождественно с уравнением (5.39), полученным в § 2 главы V для плоского течения вблизи критической точки. Все остальные дифференциальные уравнения системы (9.21) линейные, причем входящие в них коэффициенты определяются предыдущими функциями.

Функции f_1 и f_3 были вычислены уже К. Хименцем [30]. Графики функций f_1 и f_3 изображены на рис. 9.4; функция f_1' представлена также на рис. 5.10 и в таблице 5.1 (там она обозначена через φ'). Л. Хоуарт [31] улуч-

шил таблицу значений функции f_3 , Н. Фресслинг [14] вычислил g_5 и h_5 , а затем А. Ульрих [54] продолжил вычисление коэффициентов-функций вплоть до члена ряда (9.18) в девятой степени включительно. Наконец, А. Н. Тиффорд [52] вычислил коэффициенты-функции для члена x^{11} и уточнил значения ранее вычисленных функций. В таблице 9.1 (стр. 166 и 167) для всех коэффициентов-функций! вплоть до члена x^{11} включительно даны их первые производные, необходимые для вычисления составляющей скорости u по формулам (9.19) и (9.20). Кроме того, в таблице 9.1 даны для значения $\eta = 0$ вторые производные всех функций, необходимые для определения касательного напряжения на стенке и положения точки отрыва (см. приводимый ниже пример). Таким образом, в настоящее время для симметричного случая полностью табулированы коэффициенты-функции для первых шести членов ряда Блазиуса (9.18).

Пример: обтекание круглого цилиндра. Применим изложенный способ расчета пограничного слоя к обтеканию круглого цилиндра, причем для получения однозначных соотношений возьмем в качестве основы для расчета теоретическое потенциальное распределение давления, хотя в литературе за такую основу обычно берется экспериментальное распределение давления. Пусть потенциальное течение набегает на круглый цилиндр радиуса R со скоростью U_∞ , направленной параллельно оси x , и пусть обтекание цилиндра происходит без циркуляции.

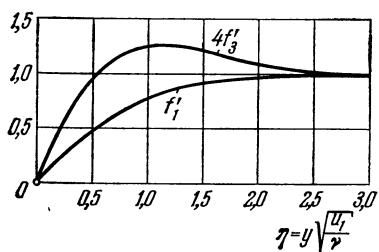


Рис. 9.4. Функции f'_1 и $4f'_3$ ряда Блазиуса (см. таблицы 5.1 и 9.1).

Распределение скоростей около цилиндра при таком обтекании определяется формулой

$$U(x) = 2U_\infty \sin \frac{x}{R} = 2U_\infty \sin \varphi. \quad (9.23)$$

Развернув $\sin(x/R)$ в степенной ряд, мы получим для скорости $U(x)$ разложение вида (9.15), а именно:

$$U(x) = 2U_\infty \left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{R} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{x}{R} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{x}{R} \right)^7 + \frac{1}{9!} \left(\frac{x}{R} \right)^9 - \frac{1}{11!} \left(\frac{x}{R} \right)^{11} + \dots \right]. \quad (9.24)$$

На рис. 9.5 показано, как функция (9.23), т. е. скорость потенциального течения, приближенно представляется степенным рядом (9.24), если последний оборвать сначала на члене с первой степенью x , а затем последовательно на членах с более высокими степенями x . Мы видим, что для получения хорошего приближения скорости $U(x)$ посредством ряда (9.24) вплоть до задней критической точки следует взять в этом ряде члены до x^9 включительно, а это влечет за собой необходимость, в соответствии со сказанным выше, сохранить в ряде (9.20) для u члены с показателями не до $k = 9$, а до $2k - 1 = 17$, т. е. члены до x^{17} включительно. Только тогда при разложении скорости U в ряд можно будет вычислить все члены до x^9 включительно. Но так как коэффициенты-функции в таблице 9.1 затабулированы только до x^{11} включительно, то необходимо оборвать ряд для u и прежде временно, что приводит к какой-то ошибке, которую необходимо оценить.

Из сравнения рядов (9.24) и (9.15) мы имеем

$$u_1 = \frac{2U_\infty}{R}, \quad u_3 = -\frac{2}{3!} \frac{U_\infty}{R^3}, \quad u_5 = +\frac{2}{5!} \frac{U_\infty}{R^5}, \quad \dots \quad \left. \right\} \quad (9.24a)$$

следовательно,

$$\eta = \frac{y}{R} \sqrt{\frac{2U_\infty R}{v}}.$$

Подставив эти выражения u_1, u_3, u_5, \dots в ряд (9.20) и разделив все члены на U_∞ , мы получим

$$\frac{u}{U_\infty} = 2 \left\{ \frac{x}{R} f'_1 - \frac{4}{3!} \left(\frac{x}{R} \right)^3 f'_3 + \frac{6}{5!} \left(\frac{x}{R} \right)^5 f'_5 - \frac{8}{7!} \left(\frac{x}{R} \right)^7 f'_7 + \frac{10}{9!} \left(\frac{x}{R} \right)^9 f'_9 - \frac{12}{11!} \left(\frac{x}{R} \right)^{11} f'_{11} + \dots \right\}, \quad (9.25)$$

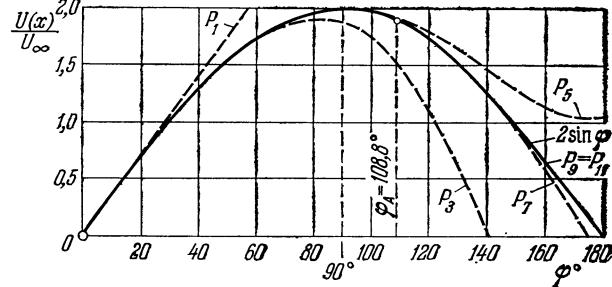


Рис. 9.5. Приближение скорости потенциального течения около круглого цилиндра посредством степенного ряда (9.24), оборванного на члене с x в первой степени (кривая P_1), на члене с x в третьей степени (кривая P_3), на члене с x в пятой степени (кривая P_5) и т. д.

Таблица 9.1. Значения первых шести членов ряда Блазиуса (9.18)
По А. Н. Тиф

η	f'_1	f'_3	g'_5	h'_5	g'_7	h'_7	k'_7	g'_9	h'_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,2266	0,1251	0,1072	0,0141	0,0962	0,0173	0,0016	0,0884	0,0112
0,4	0,4145	0,2129	0,1778	0,0117	0,1563	0,0030	0,0044	0,1413	-0,0079
0,6	0,5663	0,2688	0,2184	-0,0011	0,1879	-0,0286	0,0096	0,1669	-0,0417
0,8	0,6859	0,2997	0,2366	-0,0177	0,1994	-0,0637	0,0174	0,1740	-0,0760
1,0	0,7779	0,3125	0,2399	-0,0331	0,1980	-0,0925	0,0271	0,1700	-0,1019
1,2	0,8467	0,3133	0,2341	-0,0442	0,1896	-0,1102	0,0369	0,1604	-0,1157
1,4	0,8968	0,3070	0,2239	-0,0499	0,1782	-0,1159	0,0452	0,1489	-0,1176
1,6	0,9323	0,2975	0,2123	-0,0504	0,1665	-0,1114	0,0506	0,1375	-0,1101
1,8	0,9568	0,2871	0,2012	-0,0468	0,1558	-0,0997	0,0525	0,1276	-0,0965
2,0	0,9732	0,2775	0,1916	-0,0406	0,1469	-0,0839	0,0510	0,1195	-0,0798
2,2	0,9839	0,2695	0,1839	-0,0332	0,1400	-0,0669	0,0466	0,1132	-0,0628
2,4	0,9905	0,2632	0,1781	-0,0257	0,1349	-0,0507	0,0402	0,1087	-0,0470
2,6	0,9946	0,2586	0,1740	-0,0189	0,1313	-0,0367	0,0330	0,1055	-0,0337
2,8	0,9970	0,2554	0,1712	-0,0133	0,1288	-0,0254	0,0257	0,1033	-0,0231
3,0	0,9984	0,2532	0,1694	-0,0089	0,1273	-0,0168	0,0191	0,1020	-0,0152
3,2	0,9992	0,2519	0,1682	-0,0057	0,1263	-0,0107	0,0135	0,1011	-0,0096
3,4	0,9996	0,2510	0,1675	-0,0035	0,1257	-0,0065	0,0091	0,1006	-0,0058
3,6	0,9998	0,2506	0,1671	-0,0021	0,1254	-0,0038	0,0059	0,1003	-0,0034
3,8	0,9999	0,2503	0,1669	-0,0012	0,1252	-0,0021	0,0036	0,1002	-0,0019
4,0	1,0000	0,2501	0,1668	-0,0006	0,1251	-0,0011	0,0021	0,1001	-0,0010

η	f''_1	f''_3	g''_5	h''_5	g''_7	h''_7	k''_7	g''_9	h''_9
0	1,2326	0,7244	0,6347	0,1192	0,5792	0,1829	0,0076	0,5399	0,1520

где

$$\left. \begin{aligned}
 f'_5 &= g'_5 + \frac{10}{3} h'_5, \\
 f'_7 &= g'_7 + 7h'_7 + \frac{70}{3} k'_7, \\
 f'_9 &= g'_9 + 12h'_9 + \frac{136}{5} k'_9 + 84j'_9 + 280q'_9, \\
 f'_{11} &= g'_{11} + \frac{55}{3} h'_{11} + 66k'_{11} + 220j'_{11} + \\
 &\quad + 462q'_{11} + 1540m'_{11} + \frac{15400}{3} n'_{11}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.25a)$$

Профили скоростей, определенные таким путем для различных ϕ , изображены на рис. 9.6. Профили для углов ϕ , больших 90° , имеют точку перегиба, так как они лежат в области повышения давления. Вычислив на основе распределения скоростей (9.25) касательное напряжение τ_0 на стенке, мы получим

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} \sqrt{\frac{2U_\infty R}{v}} &= 8 \left\{ \frac{x}{R} f''_1(0) - \frac{4}{3!} \left(\frac{x}{R}\right)^3 f''_3(0) + \frac{6}{5!} \left(\frac{x}{R}\right)^5 f''_5(0) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{7!} \left(\frac{x}{R}\right)^7 f''_7(0) + \frac{10}{9!} \left(\frac{x}{R}\right)^9 f''_9(0) - \frac{12}{11!} \left(\frac{x}{R}\right)^{11} f''_{11}(0) + \dots \right\} \quad (9.26)
 \end{aligned} \right.$$

для плоского пограничного слоя на цилиндре (симметричный случай).
Форду [52]

k'_9	j'_9	q'_9	g'_{11}	h'_{11}	k'_{11}	j'_{11}	q'_{11}	m'_{11}	n'_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,0019	0,0125	-0,0062	0,0824	0,0074	-0,0041	0,0165	0,0237	-0,0359	0,0103
-0,0112	0,0288	-0,0124	0,1299	-0,0145	-0,0368	0,0371	0,0514	-0,0721	0,0206
-0,0311	0,0525	-0,0190	0,1511	-0,0489	-0,0799	0,0651	0,0863	-0,1095	0,0307
-0,0501	0,0833	-0,0262	0,1553	-0,0816	-0,1181	0,0992	0,1267	-0,1489	0,0406
-0,0639	0,1171	-0,0341	0,1498	-0,1046	-0,1428	0,1342	0,1666	-0,1895	0,0503
-0,0704	0,1480	-0,0423	0,1397	-0,1152	-0,1520	0,1641	0,1995	-0,2288	0,0595
-0,0703	0,1710	-0,0502	0,1283	-0,1146	-0,1474	0,1841	0,2202	-0,2627	0,0678
-0,0649	0,1829	-0,0567	0,1175	-0,1055	-0,1330	0,1919	0,2266	-0,2874	0,0747
-0,0562	0,1827	-0,0640	0,1083	-0,0911	-0,1131	0,1876	0,2190	-0,2996	0,0796
-0,0460	0,1718	-0,0625	0,1008	-0,0746	-0,0912	0,1731	0,2001	-0,2982	0,0822
-0,0359	0,1528	-0,0610	0,0951	-0,0581	-0,0701	0,1515	0,1737	-0,2834	0,0820
-0,0267	0,1290	-0,0568	0,0910	-0,0432	-0,0516	0,1263	0,1436	-0,2575	0,0790
-0,0190	0,1037	-0,0504	0,0882	-0,0308	-0,0364	0,1003	0,1133	-0,2237	0,0733
-0,0129	0,0795	-0,0426	0,0863	-0,0210	-0,0246	0,0761	0,0854	-0,1858	0,0655
-0,0085	0,0581	-0,0344	0,0851	-0,0138	-0,0160	0,0552	0,0616	-0,1476	0,0563
-0,0053	0,0406	-0,0265	0,0843	-0,0087	-0,0100	0,0383	0,0425	-0,1121	0,0463
-0,0032	0,0271	-0,0195	0,0839	-0,0052	-0,0060	0,0255	0,0281	-0,0814	0,0365
-0,0019	0,0173	-0,0137	0,0836	-0,0030	-0,0035	0,0162	0,0178	-0,0565	0,0275
-0,0010	0,0106	-0,0092	0,0835	-0,0017	-0,0019	0,0099	0,0108	-0,0375	0,0199
-0,0006	0,0062	-0,0059	0,0834	-0,0009	-0,0010	0,0057	0,0063	-0,0238	0,0137
k''_9	j''_9	q''_9	g''_{11}	h''_{11}	k''_{11}	j''_{11}	q''_{11}	m''_{11}	n''_{11}
0,0572	0,0607	-0,0308	0,5100	0,1323	0,0742	0,0806	0,1164	-0,1796	0,0516

или, если подставить сюда выражения (9.25а) для коэффициентов-функций и численные значения из таблицы 9.1,

$$\frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty R}{v}} = 6,973 \frac{r_x}{R} - 2,732 \left(\frac{x}{R} \right)^3 + 0,292 \left(\frac{x}{R} \right)^5 - 0,0183 \left(\frac{x}{R} \right)^7 + \\ + 0,000043 \left(\frac{x}{R} \right)^9 - 0,000115 \left(\frac{x}{R} \right)^{11} + \dots \quad (9.26a)$$

Зависимость этого напряжения от угла ϕ для круглого цилиндра графически изображена на рис. 9.7.

Для определения положения точки отрыва следует левую часть равенства (9.26а) заменить нулем, так как в точке отрыва касательное напряжение τ_0 исчезает. Тогда, введя обозначение

$$X_{\text{отр}} = \left(\frac{x_{\text{отр}}}{R} \right),$$

мы получим уравнение

$$6,973 - 2,732 X_{\text{отр}} + 0,292 X_{\text{отр}}^2 - \\ - 0,0183 X_{\text{отр}}^3 + 0,000043 X_{\text{отр}}^4 - 0,000115 X_{\text{отр}}^5 = 0.$$

Решив его, мы найдем положение точки отрыва:

$$\varphi_{\text{отр}} = 108,8^\circ.$$

Если бы мы оборвали ряд для u на члене x^7 , то тогда для положения точки отрыва мы получили бы угол $\varphi_{\text{отр}} = 109,6^\circ$. В настоящее время можно достичь еще большей точности при помощи численных методов (см. п. 3 § 3 главы X).

В том, что ряд Блазиуса, оборванный на члене x^9 , дает распределение скоростей с приемлемой точностью вплоть до точки отрыва, можно убедиться также путем проверки, в какой мере удовлетворяется при таком

обрыве первая контурная связь, имеющая, в соответствии с формулой (7.15), следующий вид:

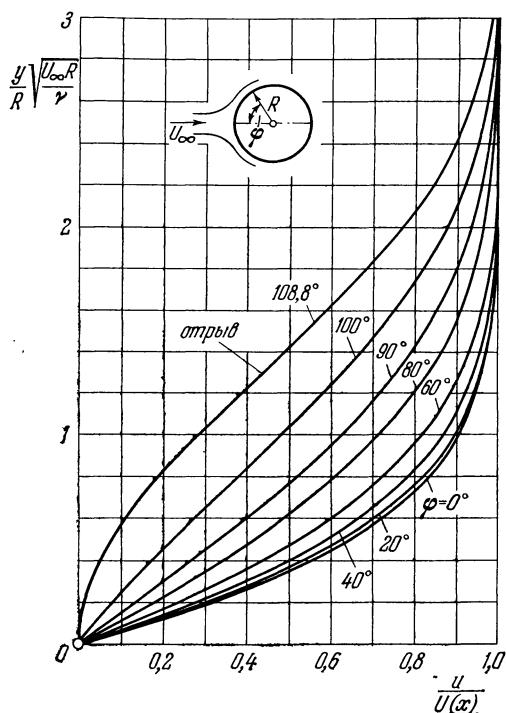
$$U \frac{dU}{dx} = -v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0}. \quad (9.27)$$

На рис. 9.8 показаны для сравнения значения кривизны профиля скоростей на стенке, вычисленные на основании равенства (9.25) (штриховая кривая), и точные значения $U dU/dx$, вычисленные на основании равенства (9.23) (сплошная кривая). Мы видим, что получается полное совпадение даже несколько дальше точки отрыва пограничного слоя. Таким образом, для круглого цилиндра ряд Блазиуса, оборванный на члене x^{11} , удовлетворяет первой контурной связи даже несколько дальше точки отрыва пограничного слоя. Однако отсюда вовсе не следует, что обрванный ряд Блазиуса всегда в такой же мере хорошо передает и распределение скоростей. Соответствующую проверку выполнил Г. Гёттлер [22], используя для этой цели экспериментальное распределение давления, найденное для круглого

Рис. 9.6. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на круглом цилиндре; φ — азимут, отсчитываемый от критической точки.

цилиндра К. Хименцем [30]. Проверка точности отрыва распределение скоростей, начиная с некоторого отклонения от точного решения, полученного численным методом.

Как уже было упомянуто, в случае обтекания тонких тел для получения распределения скоростей вплоть до точки отрыва требуется взять в ряде Блазиуса значительно большее количество членов, чем это было сделано выше. Однако определение дальнейших коэффициентов-функций, сверх уже вычисленных, наталкивается на очень большие трудности, которые заключаются не столько в том, что с прибавлением каждого нового члена в ряде Блазиуса увеличивается число подлежащих решению дифференциальных уравнений, сколько в том, что для вычисления коэффициентов-функций при всех высоких степенях x требуется знать коэффициенты-функции при менее высоких степенях x с все более и более возрастающей точностью. Именно это обстоятельство и ограничивает использование метода



Блазиуса. В этой связи упомянем, что в недавнее время Г. Гёртлер указал для распределения скоростей другое разложение в ряд, обладающее значительно лучшей сходимостью (см. § 5 настоящей главы).

Л. Хоуарт [31] распространил метод Блазиуса на несимметричный случай. Однако табулирование коэффициентов-функций было сделано только для ряда, оборванныго на члене x^2 . Н. Фрёсслинг [14] применил метод Блазиуса также к осесимметричному случаю, к которому мы вернемся ниже, в главе XI.

Экспериментальные измерения распределения давления около круглого цилиндра были выполнены еще К. Хименцем в его диссертации [30] и положены им в основу своего расчета пограничного слоя. Измерения Хименца показали, что точка отрыва лежит при азимуте $\varphi_{\text{отр}} = 81^\circ$, в то время как вычисления, основанные на использовании экспериментального распределения давления, дали для этого азимута значение $\varphi_{\text{отр}} = 82^\circ$. Впоследствии весьма тщательные измерения распределения давления около круглого цилиндра были выполнены О. Флаксбартом (см. рис. 1.9). Они показали, что изменение давления вдоль контура цилиндра сильно зависит от числа Рейнольдса. При *докритических* числах Рейнольдса минимум давления получается уже при $\varphi = 70^\circ$, а затем давление на всей

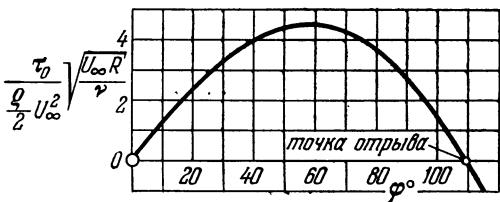


Рис. 9.7. Зависимость касательного напряжения на стенке круглого цилиндра от угла φ при ламинарном пограничном слое.

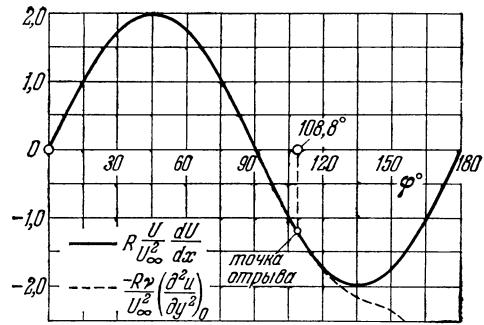


Рис. 9.8. Проверка первой контурной связи [соотношение (9.27)] для ламинарного пограничного слоя на круглом цилиндре (рис. 9.6). Первая контурная связь выполняется даже несколько дальше точки отрыва.

задней половине цилиндра остается почти постоянным. При *сверхкритических* числах Рейнольдса минимум давления лежит примерно при $\varphi = 90^\circ$, т. е. совпадает с минимумом теоретического потенциального распределения давления, и вообще вся картина распределения давления получается более близкой к теоретическому потенциальному распределению, чем при докритических числах Рейнольдса. При переходе от докритических чисел Рейнольдса к *сверхкритическим*, происходящем при критическом числе Рейнольдса, равном примерно $U_\infty D/\nu = 3 \cdot 10^5$, коэффициент сопротивления круглого цилиндра внезапно резко уменьшается (см. рис. 1.4), что объясняется изменением формы течения в пограничном слое — оно становится из ламинарного турбулентным (см. § 6 главы XVIII).

Ламинарный пограничный слой на круглом цилиндре был исследован также А. Томом [51] до числа Рейнольдса $U_\infty D/\nu = 28\,000$ и А. Фэйджем [9] при числах Рейнольдса $U_\infty D/\nu$ от $1,0 \cdot 10^5$ до $3,3 \cdot 10^5$. Некоторые сведения о сопротивлении давления и сопротивлении трения в области докритических чисел Рейнольдса имеются в работе Л. Шиллера и В. Линке [44]. При числах Рейнольдса между 60 и 5000 позади цилиндра образуется вихревая дорожка с правильной структурой (рис. 2.7 и 2.8). Частоты отрыва вихрей в такой дорожке тщательно исследованы Г. Бленком, Д. Фуксом и Г. Либерсоном, а недавнее время — А. Рошко (см. § 3 главы II).

§ 4. Пограничный слой для потенциального течения $U(x) = U_0 - ax^n$

Другой класс точных решений уравнений пограничного слоя указали Л. Хоуарт [32] и И. Тани [50]. Эти решения получаются в том случае, когда внешним течением является потенциальное течение

$$U(x) = U_0 - ax^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.28)$$

Очевидно, что такое течение можно рассматривать как обобщение продольного обтекания плоской пластины (см. § 5 главы VII), в которое оно переходит при $a = 0$. Л. Хоуарт исследовал простейший случай, когда $n = 1$, следовательно, когда течение (9.28) можно понимать как потенциальное течение в канале, одна часть которого ограничена параллельными стенками (скорость U_0), а другая часть, примыкающая к первой, — сходящимися ($a < 0$) или расходящимися ($a > 0$) стенками¹). И в этом случае профили скоростей в пограничном слое не аффинны между собой. Л. Хоуарт вводит, подобно тому как это было сделано при исследовании продольного обтекания плоской пластины, вместо y новую переменную

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_0}{vx}} \quad (9.29)$$

и для сокращения записи пользуется обозначением

$$x^* = \frac{ax}{U_0}$$

($x^* > 0$ при замедленном, $x^* < 0$ при ускоренном течении). Тогда способом, аналогичным примененному в § 3 настоящей главы для обтекания цилиндра, можно представить функцию тока $\psi(x, y)$ в виде ряда по степеням x с коэффициентами, являющимися функциями от y . Выполнив это, мы получим

$$\psi(x, y) = \sqrt{U_0 vx} [f_0(\eta) - (8x^*) f_1(\eta) + (8x^*)^2 f_2(\eta) - + \dots]. \quad (9.30)$$

Следовательно, продольная скорость равна

$$u = \frac{U_0}{2} [f'_0(\eta) - (8x^*) f'_1(\eta) + (8x^*)^2 f'_2(\eta) - + \dots]. \quad (9.31)$$

Подставив это значение u в уравнение движения (9.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $f_0(\eta), f_1(\eta), \dots$. Первые три дифференциальных уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f''_0 + f_0 f''_0 &= 0, \\ f''_1 + f_0 f''_1 - 2f'_0 f'_1 + 3f''_0 f_1 &= -1, \\ f''_2 + f_0 f''_2 - 4f'_0 f'_2 + 5f''_0 f_2 &= -\frac{1}{8} + 2f'^2_1 - 3f'_1 f''_1. \end{aligned}$$

Границными условиями будут

$$\begin{aligned} f_0 = f'_0 = 0, \quad f_1 = f'_1 = 0, \quad f_2 = f'_2 = 0 &\quad \text{при } \eta = 0; \\ f'_0 = 2, \quad f'_1 = \frac{1}{4}, \quad f'_2 = 0 &\quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Только первое из этих уравнений нелинейное, причем оно совпадает с аналогичным уравнением для продольного обтекания плоской пластины²). Все остальные уравнения линейные и все содержат в своих левых частях первую функцию f_0 , в то время как неоднородные члены состоят из других функций f_v . Л. Хоуарт решил первые семь таких уравнений (до f_6 включительно) и составил таблицы для f_0, f_1, \dots, f_6 .

¹⁾ Если уравнение (9.28) для $n = 1$ записать в виде $U(x) = U_0(1 - x/L)$, то это течение можно понимать как потенциальное течение вдоль плоской стенки, начинающееся при $x = 0$, а при $x = L$ наталкивающееся на вторую стенку, неограниченную и перпендикулярную к пластине, т. е. в этом случае мы имеем течение, аналогичное заторможенному течению около критической точки $x = L$, изображенном на рис. 2.15.

²⁾ Заметим, что используемая здесь независимая переменная η отличается от аналогичной переменной в § 3 главы VII присутствием множителя $1/2$.

Для полученных значений f_v ряд (9.31) хорошо сходится в области $-0,1 \leq x^* \leq 0,1$. При замедленном течении ($x^* > 0$) точка отрыва пограничного слоя лежит при $x^* = 0,12$, но при таком значении x^* сходимость ряда (9.31) уже не обеспечена. Для доведения своего расчета до точки отрыва Л. Хоуарт применяет вблизи этой точки численный метод продолжения (см. § 10 настоящей главы). Профили скоростей для некоторых значений x^* как при ускоренном, так и при замедленном течении изображены на рис. 9.9.

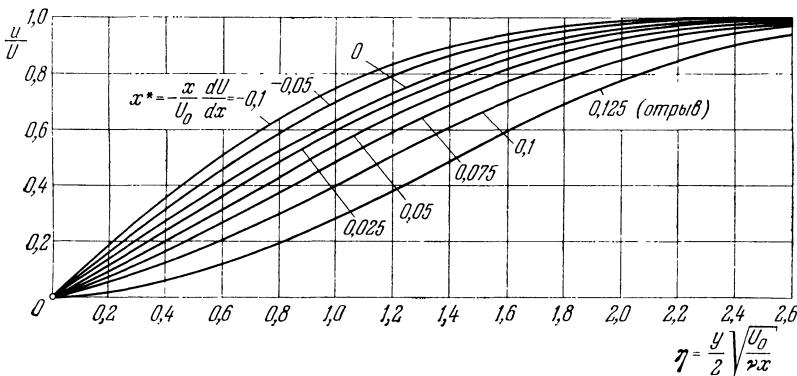


Рис. 9.9. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое для случая внешнего течения $U(x) = U_0 - ax$. По Хоуарти [32].

Мы видим, что и в этом случае все профили скоростей при замедленном течении имеют точку перегиба. Расчеты Л. Хоуарта впоследствии были проверены Д. Р. Хартри [29]; полученные им результаты подтвердили правильность вычислений Л. Хоуарта. Д. К. Ф. Лей [34] еще более точно выполнил расчеты для случая $a/U_0 = 0,125$, и при этом в особенности тщательно вблизи точки отрыва. У него получилось, что эта точка лежит при $x^* = 0,1198$.

И. Тани [50] продолжил расчеты Л. Хоуарта для случаев, когда $n > 1$ (при $a > 0$). Однако в своей работе он не приводит таблицу для вычисленных им коэффициентов-функций и только указывает полученные результаты для $n = 2, 4$ и 8 . И при таких значениях n сходимость применяемого ряда недостаточна для точного определения положения точки отрыва; поэтому вблизи точки отрыва И. Тани прибегнул к методу продолжения, использованному Л. Хоуартом.

§ 5. Ряд Гёртлера

В то время как ряд Блазиуса (§ 3 настоящей главы) позволяет рассчитать пограничный слой на любом цилиндрическом теле, обтекание которого начинается с критической точки, ряды Л. Хоуарта и И. Тани (§ 4 настоящей главы) пригодны только для плоских пластин при их обтекании потенциальным течением $U(x) = U_0 - ax^n$, причем на более или менее значительном расстоянии от критической точки или от передней кромки пластины сходимость этих рядов неудовлетворительна. Это объясняется прежде всего тем, что для выполнения граничных условий на внешней границе требуется брать много членов этих рядов.

Г. Гётлер поставил перед собой задачу обобщить результаты своих предшественников и подобрать такие новые ряды, которые обладали бы лучшей сходимостью по сравнению со старыми рядами. Для получения своего ряда, пригодного для любой формы передней кромки обтекаемого тела, Г. Гётлер ввел следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{1}{v} \int_0^x U(x) dx, \quad (9.32)$$

$$\eta = \frac{y U(x)}{\sqrt{2v \int_0^x U(x) dx}}. \quad (9.33)$$

а функцию тока взял в виде

$$\psi(x, y) = v \sqrt{2\xi} F(\xi, \eta). \quad (9.34)$$

Определив отсюда составляющие скорости u , v и подставив их в дифференциальные уравнения пограничного слоя (9.1) и (9.2), мы получим для определения функции $F(\xi, \eta)$ уравнение в частных производных

$$F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_\eta^2) = 2\xi(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}), \quad (9.35)$$

где

$$\beta(\xi) = 2 \frac{U'(x)}{U^2(x)} \int_0^\infty U(x) dx. \quad (9.36)$$

Границные условия (9.3) для функции $F(\xi, \eta)$ принимают вид

$$\left. \begin{array}{ll} F=0, & F_\eta=0 \text{ при } \eta=0; \\ F_\eta=1 & \text{при } \eta=\infty. \end{array} \right\} \quad (9.37)$$

Параметры, определяющие частный вид рассматриваемого потенциального течения $U(x)$, входят в дифференциальное уравнение (9.35) только через посредство одного коэффициента $\beta(\xi)$. Этот коэффициент можно представить в виде

$$\beta(\xi) = \frac{1}{\eta_0^2(x)} \frac{\delta_1^2(x) U'(x)}{v}, \quad (9.38)$$

где

$$\eta_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F(\xi, \eta)], \quad (9.39)$$

а $\delta_1(x)$ есть толщина вытеснения пограничного слоя, определяемая формулой (8.33). В простейшем частном случае, когда $\beta(\xi) = \beta_0 = \text{const}$, получаются, очевидно, рассмотренные в § 1 настоящей главы «подобные» решения, для которых β_0 означает угол при вершине клина (рис. 8.1).

Далее можно показать, что если скорость $U(x)$ внешнего течения представить в виде степенного ряда, то величину $\beta(\xi)$ также можно разложить в ряд по возрастающим степеням ξ , причем коэффициенты ряда для $\beta(\xi)$ можно вычислить по заданному распределению скоростей $U(x)$. Наконец, развернув в ряд безразмерную функцию тока $F(\xi, \eta)$, можно найти универсальные, не зависящие от частного вида рассматриваемой задачи коэффициенты-функции. Эти коэффициенты-функции и были вычислены Г. Гёртлером [25], показавшим, что новый ряд обладает лучшей сходимостью по сравнению с рядом Блазиуса¹⁾.

Новый ряд позволяет исследовать большое число случаев, для которых до настоящего времени были известны только приближенные решения. Сравнение с результатами других точных решений показывает, что новый ряд может быть использован почти до самой точки отрыва. Решение, получаемое посредством нового ряда, иногда может быть улучшено применением подходящего численного метода продолжения (см. § 10 настоящей главы).

§ 6. Спутное течение позади плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении

Применение уравнений пограничного слоя не связано обязательным наличием твердых стенок. Эти уравнения могут применяться и в том случае, когда внутри потока имеется слой жидкости, в котором преобладающую роль играют силы трения. Такой случай имеет место при соприкосновении внутри потока двух слоев жидкости, текущих с разными скоростями, как это, например, происходит в спутном течении позади тела или при истечении жидкости из отверстия. В этом и следующих параграфах мы рассмотрим два примера таких течений. В дальнейшем, при изучении турбулентности, мы вновь с ними встретимся.

В качестве первого примера возьмем спутное течение позади плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении (рис. 9.10). На задней кромке пластины оба профиля скоростей в пограничных слоях над и под пластиной сливаются в один профиль, образуя профиль скоростей спутного течения. Скорость этого течения в его центральной части по мере удаления от пластины уменьшается, а ширина течения — увеличивается.

¹⁾ Однако большое количество численных расчетов показало, что сходимость нового ряда не всегда удовлетворительна.

Размеры впадин профиля скоростей спутного течения непосредственно связаны с сопротивлением тела. Однако, как мы увидим ниже, в остальном форма профиля скоростей на большом расстоянии от тела не зависит от формы тела (с точностью до некоторого масштабного множителя); в непосредственной же близости за телом форма профиля скоростей спутного течения, конечно, определяется пограничным слоем около тела и отрывом пограничного слоя (если только он происходит).

Зная распределение скоростей в спутном течении, мы можем вычислить с помощью теоремы импульсов сопротивление пластины. Для этой цели мысленно построим около пластины прямоугольную контрольную поверхность AA_1BB_1 так, как показано на рис. 9.10. Пусть граничная плоскость A_1B_1 , параллельная плоскости пластины, удалена от последней настолько, что она всюду располагается в области невозмущенной скорости U_∞ . Пусть, далее, на всей контрольной поверхности давление постоянно, следовательно, силы давления не дают составляющих потока импульса сквозь контрольную поверхность. При составлении такого потока необходимо иметь в виду, что вследствие неразрывности через граничную поверхность A_1B_1 жидкость должна вытекать наружу и при этом в количестве, равном разности между количеством, втекающим через поперечное сечение AA_1 , и количеством, вытекающим через поперечное сечение BB_1 . Граничная плоскость AB не дает составляющей потока импульса в направлении x , так как на ней поперечная скорость из соображений симметрии равна нулю. Баланс составляющих импульса в направлении x дан в следующей таблице:

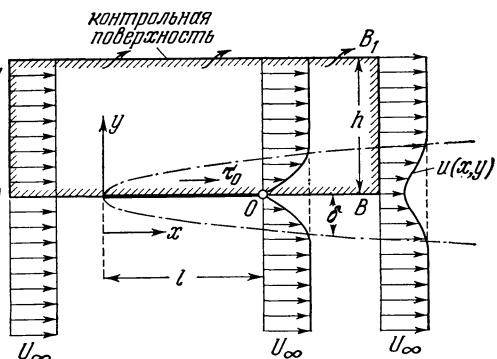


Рис. 9.10. Применение теоремы импульсов для определения сопротивления продольно обтекаемой пластины по распределению скоростей в спутном течении.

Граница контрольной поверхности	Количество протекающей жидкости	Составляющая импульса в направлении x
AB	0	0
AA_1	$b \int_0^h U_\infty dy$	$\rho b \int_0^h U_\infty^2 dy$
BB_1	$-b \int_0^h u dy$	$-\rho b \int_0^h u^2 dy$
A_1B_1	$-b \int_0^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho b \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
Сумма площадей граничных поверхностей равна площади контрольной поверхности	Сумма количества протекающей жидкости равна нулю	Сумма потоков импульса равна сопротивлению

В этой таблице количества жидкости, втекающие внутрь контрольной поверхности, считаются положительными, а количества жидкости, вытекающие наружу,— отрицательными. Через b обозначена ширина пластины. Полный поток импульса в направлении x равен в рассматриваемом случае сопротивлению W пластины, смоченной с одной стороны. Таким образом, мы имеем

$$W = b\rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy. \quad (9.40)$$

Замена в этом интеграле верхнего предела $y = h$ на $y = \infty$ допустима потому, что для $y > h$ подынтегральное выражение исчезает. Сопротивление пластины, смоченной с двух сторон, равно

$$2W = b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_{\infty} - u) dy. \quad (9.41)$$

Эта формула справедлива не только для плоской пластины, но и для любого цилиндрического тела при условии, что интеграл взят на таком большом расстоянии позади тела, на котором статическое давление остается невозмущенным. При продольном обтекании плоской пластины формула (9.41) применима на любом расстоянии позади пластины, так как при таком обтекании разности давлений отсутствуют как в продольном, так и в поперечном направлении. Более того, формула (9.41) применима даже в пределах длины самой пластины; в этом случае она дает сопротивление части пластины от передней кромки до рассматриваемого места. Интеграл в формулах (9.41) и (9.40) физически означает потерю импульса вследствие трения и тождественно совпадает с произведением толщины потери импульса δ_2 на квадрат невозмущенной скорости U_{∞} [см. формулу (8.34)]; поэтому формулу (9.40) мы можем переписать также в следующем виде:

$$W = b\rho U_{\infty}^2 \delta_2. \quad (9.42)$$

Вычислим теперь распределение скоростей в спутном течении позади продольно обтекаемой плоской пластины на большом расстоянии x позади пластины. Это вычисление может быть выполнено двумя способами: 1) путем подхода к рассматриваемому месту x спереди, т. е. исходя из профиля скоростей в пограничном слое на задней кромке пластины, вычисленного по способу Блазиуса; 2) путем подхода сзади. Последний способ представляет собой своего рода асимптотическое решение на больших расстояниях позади тела, не зависящее от формы тела; при таком решении скорость спутного течения, равная

$$u_1(x, y) = U_{\infty} - u(x, y), \quad (9.43)$$

предполагается настолько малой по сравнению с U_{∞} , что можно пренебречь при вычислениях членами, в которые скорость u_1 входит в квадрате.

Вычисление «спереди» было выполнено С. Голдстейном [15] методом продолжения, который подробно будет изложен ниже, в § 10 настоящей главы. Исходным профилем при таком вычислении, на котором мы здесь не будем останавливаться, является профиль скоростей пограничного слоя на задней кромке пластины, определенный по способу Блазиуса. Асимптотическое вычисление «сзади» было выполнено В. Толмином [53]. Коротко на нем остановимся, так как оно является типичным для всех задач, связанных со спутным течением; мы встретимся с ним вновь при изучении турбулентного спутного течения, в практическом отношении более важного, чем ламинарное спутное течение.

Так как в уравнении движения пограничного слоя (9.1) член, содержащий давление, в рассматриваемом случае равен нулю, то после подстановки в это уравнение значения $u_1(x, y)$ из уравнения (9.43) и последующего отбрасывания членов, квадратичных относительно u_1 и v_1 , мы получим

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (9.44),$$

причем граничными условиями будут

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u_1 = 0 \quad \text{при } y = \infty.$$

И в этом случае уравнение в частных производных (9.44) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению путем преобразования подобия. Примем так же, как мы это сделали при расчете пограничного слоя на плоской пластине, что

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}$$

[см. равенство (7.24)]; кроме того, для скорости u_1 возьмем следующее выражение:

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{l} \right)^{-1/2} g(\eta), \quad (9.45)$$

где l есть длина пластины (см. рис. 9.10). Координата x взята в степени $-1/2$ потому, что интеграл в правой части формулы (9.41), определяющей сопротивление пластины, смоченной с обеих сторон, не должен зависеть от x . Отбросив в подынтегральном выражении формулы (9.41) члены, квадратичные относительно u_1 , мы приведем эту формулу к виду

$$2W = b\rho U_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy.$$

Подставив сюда вместо u_1 его выражение (9.45), мы будем иметь

$$2W = b\rho U_\infty^2 C \sqrt{\frac{vl}{U_\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) d\eta. \quad (9.46)$$

Далее, внеся то же выражение u_1 в уравнение (9.44) и разделив последнее на

$$CU_\infty^2 \left(\frac{x}{l} \right)^{-1/2} l x^{-1},$$

мы получим для функции $g(\eta)$, определяющей скорость спутного течения, дифференциальное уравнение

$$g'' + \frac{1}{2} \eta g' + \frac{1}{2} g = 0, \quad (9.47)$$

причем граничными условиями будут

$$g' = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \quad \text{и} \quad g = 0 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Проинтегрировав один раз, мы получим

$$g' + \frac{1}{2} \eta g = 0,$$

так как постоянная интегрирования при $\eta = 0$ исчезает вследствие первого граничного условия. Проинтегрировав еще раз, мы найдем

$$g = e^{-\eta^2/4}. \quad (9.48)$$

Мультиплекативную постоянную интегрирования можно без ограничения общности принять равной единице, так как распределение скоростей (9.45) уже содержит в себе свободную мультиплекативную постоянную C . Эту постоянную мы найдем из условия, что сопротивление пластины, определяемое формулой (9.46) как потеря импульса, должно быть равно сопротивлению трения той же пластины.

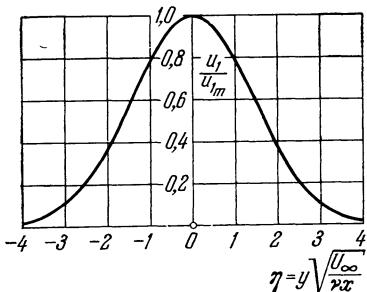


Рис. 9.11. Асимптотическое распределение скоростей в плоском ламинарном спутном течении [уравнение (9.49)].

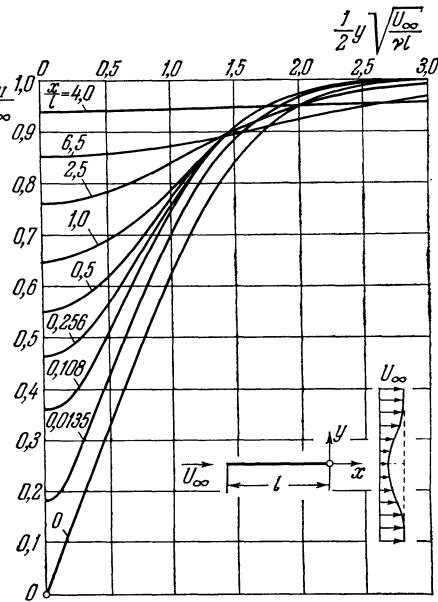


Рис. 9.12. Распределение скоростей в ламинарном спутном течении позади плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении.

Вычислив интеграл, входящий в формулу (9.46), мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} d\eta = 2\sqrt{\pi},$$

а потому

$$2W = 2\sqrt{\pi} C b \rho U_{\infty}^2 \sqrt{\frac{vl}{U_{\infty}}}. \quad (9.49)$$

В то же время сопротивление трения пластины, смоченной с обеих сторон, определяется формулой (7.33) и равно

$$2W = 1,328 b \rho U_{\infty}^2 \sqrt{\frac{vl}{U_{\infty}}}. \quad (9.49)$$

Отсюда следует, что $2C\sqrt{\pi} = 1,328$, т. е.

$$C = \frac{0,664}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, скорость спутного течения позади плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, равна

$$\frac{U_1}{U_{\infty}} = \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{l} \right)^{-1/2} e^{-y^2 U_{\infty}/4xv}. \quad (9.49)$$

Распределение скоростей, соответствующее этому асимптотическому решению, изображено на рис. 9.11. Примечательно, что по форме оно совпадает с кривой Гаусса для нормального распределения ошибок. Согласно сде-

ланному предположению формула (9.49) справедлива только для больших расстояний позади пластины, а именно, согласно подсчетам В. Толмина, примерно для значений $x > 3l$. Вычисление второго приближения асимптотического решения путем подхода сзади выполнил С. Голдстейн [16].

Расчет спутного течения путем подхода спереди произвел, как уже было сказано, С. Голдстейн [15] методом продолжения. Представление обо всем поле скоростей в спутном течении дает рис. 9.12.

Спутное течение позади пластины, а также позади любого другого тела в действительности в большей части случаев является турбулентным, а не ламинарным. Даже если пограничный слой остается ламинарным до конца пластины, как это бывает при малых числах Рейнольдса, примерно до $Re_l < 10^6$, спутное течение все же получается турбулентным, так как в нем профили скоростей, все без исключения имеющие точку перегиба, особенно неустойчивы. Именно поэтому спутное течение становится турбулентным уже при сравнительно малых числах Рейнольдса. Турбулентное спутное течение, называемое также *аэродинамической тенью*, мы подробно рассмотрим в главе XXIV.

§ 7. Плоская струя

Другим примером течения без ограничивающих стенок, допускающим применение теории пограничного слоя, является истечение струи из отверстия. Мы рассмотрим здесь только плоскую задачу, следовательно, струю, вытекающую из длинной узкой щели. После истечения струя смешивается с окружающей жидкостью. Эта задача была решена Г. Шлихтингом [45] и У. Бикли [3]. И в этом случае течение в действительности получается обычно турбулентным, а не ламинарным. Тем не менее мы подробно остановимся на рассмотрении ламинарной струи, так как турбулентная струя, которой мы займемся в главе XXIV, математически исследуется совершенно таким же способом.

Вследствие трения струя захватывает с боков некоторую часть покоящейся жидкости и увлекает ее за собой. В результате возникает течение, картина линий тока которого изображена на рис. 9.13. Введем систему координат, начало которой лежит в щели, а ось x совпадает с осью струи. Вследствие трения струя расширяется вниз по течению, в то время как средняя скорость течения уменьшается. С целью упрощения расчета примем, что щель бесконечно узка, поэтому для того, чтобы количество протекающей жидкости, а также импульс имели конечные значения, скорость в щели должна быть бесконечно большой. Так же, как и в предыдущем примере, градиентом давления dp/dx в направлении x можно пренебречь, поскольку давление в струе определяется постоянным давлением окружающего струю покоящегося воздуха. Но тогда полный импульс J в направлении x не должен зависеть от координаты x , следовательно, мы будем иметь

$$J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \text{const.} \quad (9.50)$$

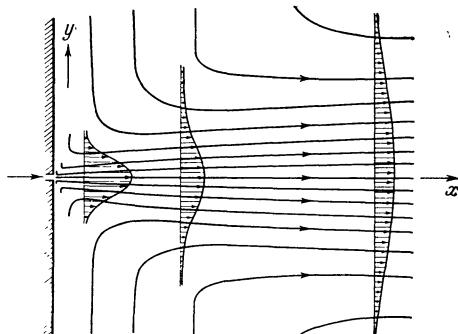


Рис. 9.13. Ламинарная плоская свободная струя.

Для того чтобы найти подходящее выражение для распределения скоростей, следует учесть, что и теперь, подобно тому как это было при продольном обтекании плоской пластины, профили скоростей $u(x, y)$ должны быть аффинно-подобны между собой, так как в рассматриваемой задаче также не имеется какой-либо характерной длины. Поэтому предположим, что скорость u является функцией от y/b , где b есть подходящим образом определенная ширина струи. Примем эту ширину пропорциональной x^q , в соответствии с чем функцию тока возьмем в виде

$$\psi \sim x^p f\left(\frac{y}{b}\right) = x^p f\left(\frac{y}{x^q}\right).$$

Оба неизвестных показателя p и q определим из следующих условий: 1) поток импульса в направлении x не зависит от координаты x [равенство (9.50)]; 2) в уравнении (9.1) инерционные члены и член, зависящий от трения, одинаковы по порядку своих величин. Эти условия дают для определения p и q два уравнения:

$$2p - q = 0, \quad 2p - 2q - 1 = p - 3q,$$

откуда

$$p = 1/3, \quad q = 2/3.$$

Введем новую независимую переменную

$$\eta = \frac{1}{3x^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}}$$

(постоянный множитель добавлен с целью упрощения последующих вычислений). Тогда функция тока примет вид

$$\psi = v^{1/2} x^{1/3} f(\eta),$$

следовательно, составляющие скорости будут равны

$$u = \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta), \quad v = -\frac{v^{1/2}}{3x^{2/3}} (f - 2\eta f'). \quad (9.51)$$

Подставив эти значения в уравнение (9.1) без члена $U dU/dx$, который согласно предположению равен нулю, мы получим для определения функции тока $f(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$f'^2 + ff'' + f''' = 0, \quad (9.52)$$

причем граничными условиями будут

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = 0 \quad \text{при } y = \infty$$

или, после перехода к переменным η и f ,

$$f = 0, \quad f'' = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad f' = 0 \quad \text{при } \eta = \infty. \quad (9.53)$$

Интегрирование уравнения (9.52) выполняется чрезвычайно просто. Проинтегрировав один раз, мы получим

$$ff' + f'' = 0.$$

Постоянная интегрирования равна нулю вследствие граничных условий при $\eta = 0$. Получившееся дифференциальное уравнение второго порядка легко было бы проинтегрировать еще раз, если бы его первый член содержал множитель 2. Этого можно достичь посредством преобразования подобия

$$\xi = a\eta, \quad f = 2aF(\xi),$$

где a есть свободная постоянная, которую мы определим ниже. Выполнив такое преобразование, мы приведем предыдущее уравнение к виду

$$F'' + 2FF' = 0, \quad (9.54)$$

причем штрих означает здесь дифференцирование по ξ . Граничными условиями теперь будут

$$F = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } F' = 0 \text{ при } \xi = \infty. \quad (9.55)$$

Проинтегрировав один раз уравнение (9.54), мы получим

$$F' + F^2 = 1. \quad (9.56)$$

Постоянную интегрирования мы взяли равной единице на том основании, что без ограничения общности можно принять $F'(0) = 1$, так как в выражение функции f входит, кроме F , еще свободная постоянная a . Дифференциальное уравнение (9.56) представляет собой уравнение Риккати и может быть проинтегрировано в замкнутой форме. Выполнив интегрирование, мы найдем

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1-F^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+F}{1-F} = \operatorname{Ar th} F.$$

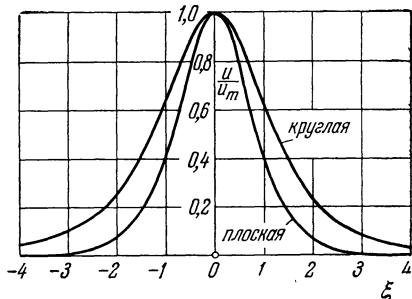


Рис. 9.14. Распределение скоростей в плоской и круглой свободных струях [формулы (9.58) и (11.15)]. Для плоской струи $\xi = 0,275 K^{1/3} y / (v x)^{2/3}$, для круглой $\xi = -0,244 K'^{1/2} y / ux$ (через K и K' обозначен кинематический импульс J/ρ).

Обратив это решение, мы получим исковую функцию тока:

$$F = \operatorname{th} \xi = \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}}. \quad (9.57)$$

Наконец, подставив найденное значение F в первое из равенств (9.51) и имея в виду, что

$$\frac{dF}{d\xi} = 1 - \operatorname{th}^2 \xi,$$

мы получим

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \operatorname{th}^2 \xi). \quad (9.58)$$

Распределение скоростей, вычисленное по этой формуле, изображено на рис. 9.14.

Остается вычислить постоянную a . Для этого воспользуемся условием (9.50), согласно которому поток импульса в направлении x не зависит от координаты x . Подставив значение u , определяемое формулой (9.58), в равенство (9.50), мы будем иметь

$$J = \frac{8}{3} \rho \alpha^3 v^{1/2} \int_0^\infty (1 - \operatorname{th}^2 \xi)^2 d\xi = \frac{16}{9} \rho \alpha^3 v^{1/2}. \quad (9.59)$$

Пусть поток импульса J есть заданная для струи постоянная. Она пропорциональна избытку давления, под которым струя вытекает из щели. Введя понятие *кинематического импульса* $J/\rho = K$, мы получим из равенства (9.59), что

$$\alpha = 0,8255 \left(\frac{K}{v^{1/2}} \right)^{1/3}.$$

Таким образом, распределение скоростей будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} u &= 0,4543 \left(\frac{K^2}{\nu x} \right)^{1/3} (1 - \operatorname{th}^2 \xi), \\ v &= 0,5503 \left(\frac{Kv}{x^2} \right)^{1/3} [2\xi (1 - \operatorname{th}^2 \xi) - \operatorname{th} \xi], \end{aligned} \right\} \quad (9.60)$$

где

$$\xi = 0,2752 \left(\frac{K}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}.$$

Поперечная скорость на краю струи равна

$$v_\infty = -0,550 \left(\frac{Kv}{x^2} \right)^{1/3}. \quad (9.61)$$

Расход струи, т. е. количество жидкости, протекающей в струе внутри слоя толщиной в единицу, равен

$$Q = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u dy = 3,3019 (Kvx)^{1/3}. \quad (9.62)$$

Следовательно, по мере удаления от щели расход увеличивается, как и должно быть, так как струя увлекает за собой с боков покоящуюся жидкость. Расход растет также с увеличением импульса.

Аналогичная осесимметричная задача, когда струя вытекает из небольшого круглого отверстия, будет рассмотрена в главе XI. Для сжимаемой жидкости плоская ламинарная струя, вытекающая из узкой щели, исследована Бай Ши-и [37] и М. Кшивоблоцким [38].

Измерения, выполненные Э. Н. Андраде [1] для плоской ламинарной струи, очень хорошо подтверждают приведенные выше теоретические результаты. Струя остается ламинарной примерно до $Re = 30$ (это число Рейнольдса составлено для скорости истечения и для ширины щели). Плоская и круглая турбулентные струи будут рассмотрены в главе XXIV. Сводное изложение всех задач струйного течения можно найти в книге Бай Ши-и [38].

§ 8. Ламинарный слой на границе раздела двух потоков

В качестве следующего примера, иллюстрирующего возможности применения уравнений пограничного слоя, рассмотрим вкратце ламинарный слой на границе раздела двух параллельных течений с различными скоростями. Постановка задачи схематически изображена на рис. 9.15: два первоначально раздельных и невозмущенных параллельных течения, имеющих различные скорости U_1 и U_2 , вследствие трения начинают взаимодействовать. В результате возникает распределение скоростей, показанное на рис. 9.15 слева наверху. Можно принять, что переход от скорости U_1 к скорости U_2 осуществляется в тонкой зоне перемещивания и что поперечная составляющая скорости v везде мала по сравнению с продольной составляющей u . Тогда к обеим областям I и II можно применить дифференциальное уравнение пограничного слоя (9.1), причем принять, что член, учитывающий давление, равен нулю.

Совершенно так же, как и в случае пограничного слоя на пластине (§ 5 глава VII), введем безразмерную поперечную координату

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_1}{\nu x}}$$

и функцию тока

$$\psi = \sqrt{\nu U_1 x} f.$$

Тогда для определения безразмерной функции тока f мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ff'' + 2f' = 0. \quad (9.63)$$

Границными условиями с учетом того, что $u/U_1 = f'$, будут

$$f' = 1 \text{ при } \eta = +\infty; \quad f' = \frac{U_2}{U_1} = \lambda \text{ при } \eta = -\infty. \quad (9.64)$$

В плоскости раздела $y = 0$, а потому также $\eta = 0$; кроме того, в этой плоскости $\partial\phi/\partial x = 0$, следовательно, здесь граничным условием будет

$$f = 0 \text{ при } \eta = 0. \quad (9.65)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (9.63) с граничными условиями (9.64) и (9.65) не допускает решения в замкнутой форме и может быть решено только численным способом. Посредством асимптотических разложений при $\eta \rightarrow -\infty$ и $\eta \rightarrow +\infty$ и путем разложения в ряд в точке $\eta = 0$ можно получить точные численные решения этого уравнения, некоторые из которых указаны Р. К. Локком [35].

На рис. 9.15 изображены профили скоростей для $\lambda = U_2/U_1 = 0$ и $0,5$. Улучшенное численное решение для $\lambda = 0$ дано В. Дж. Христианом [7]. Этот частный случай представляет собой не что иное, как перемешивание между широкой однородной струей и прилегающим неподвижным воздухом. Такое течение часто называется плоской полуструктурой.

Р. К. Локк [35] рассмотрел задачу о ламинарном слое на границе раздела между двумя параллельными течениями также для случая, когда обе струи кроме различных скоростей имеют также различные значения плотности и вязкости. Примером такого течения может служить движение воздуха над поверхностью воды. В этом случае в качестве нового параметра наряду с отношением скоростей λ появляется безразмерная величина $\kappa = \rho_2 \mu_2 / \rho_1 \mu_1$. И для этого случая Локк указал несколько точных, а также приближенных решений. Последние решения получены посредством использования уравнения импульсов пограничного слоя. Другой приближенный метод предложен О. Э. Поттером [40].

Плоская полуструктура сжимаемой жидкости рассмотрена Д. Р. Чепменом [5]. Такого рода сжимаемые течения играют некоторую роль при расчете оторвавшихся свободных слоев в спутных струях [6], [8].

§ 9. Плоское течение в начальном участке канала

Плоский пограничный слой образуется также при течении в начальном участке канала, т. е. в участке, следующем за входным поперечным сечением. На большом расстоянии от входа в канал, ограниченный плоскими параллельными стенками, скорость распределяется по ширине, как мы уже выяснили в главе V, параболически. Пусть во входном поперечном сечении скорость по всей ширине канала одинакова и равна U_0 . Вследствие трения на обеих стенках канала образуется пограничный слой, который сначала, т. е. на небольших расстояниях от входа в канал, развивается совершенно так же, как на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. В результате течение в канале разбивается на три зоны: одну центральную, в которой жидкость движется на некотором

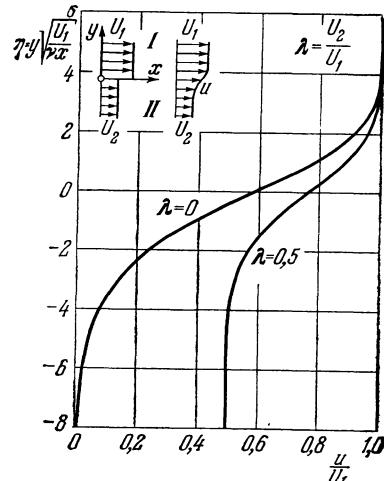


Рис. 9.15. Распределение скоростей в ламинарном слое на границе раздела двух потоков. По Р. К. Локку [35].

участке ширины канала с одинаковой скоростью,— будем называть эту зону *ядром течения* — и на две боковые, образованные пограничными слоями. Так как через каждое поперечное сечение должно протекать одно и то же количество жидкости, то уменьшение расхода вследствие трения в боковых зонах, очевидно, компенсируется увеличением расхода в центральной зоне, т. е. увеличением скорости в ядре течения. Следовательно, теперь в противоположность тому, как это было при продольном обтекании пластины, пограничный слой развивается под действием ускоренного внешнего течения. Затем на более удаленном расстоянии от входа в канал оба пограничных слоя сливаются, и наконец профиль скоростей асимптотически переходит в параболический профиль течения Хагена — Пуазейля.

Для аналитического исследования развития течения в начальном участке можно поступить следующим образом. Сначала течение рассчитывается путем «подхода спереди», т. е. исследуется развитие пограничного слоя под действием ускоренного течения в ядре.

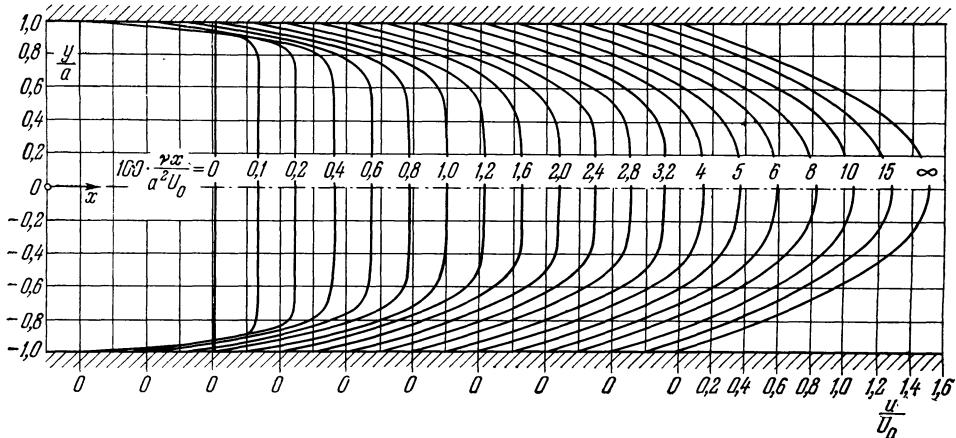


Рис. 9.16. Распределение скоростей ламинарного течения в начальном участке канала.

Затем выполняется исследование путем «подхода сзади»— вычисляется отклонение распределения скоростей от параболического распределения по мере приближения к входному поперечному сечению. В обоих случаях результаты представляются в виде ряда. Если затем в полученных рядах взять достаточно большое число членов, то можно суммировать оба эти ряда в каком-нибудь промежуточном поперечном сечении, а именно в таком, для которого пригодны оба ряда. Таким путем получится распределение скоростей на протяжении всего начального участка. Подобного рода расчет был выполнен Г. Шлихтингом [46]. Приведем его здесь в общих чертах.

Введем систему координат, ось x которой совместим с осью канала (рис. 9.16). При расчете путем подхода сзади будем отсчитывать поперечную координату y от оси канала, а при расчете путем подхода спереди — от одной из стенок, причем будем обозначать ее в отличие от y через y' . Скорость во входном поперечном сечении пусть равна U_0 . Скорость в ядре течения обозначим через $U(x)$. Ширина канала пусть равна $2a$.

Начнем с расчета путем подхода спереди. Прежде всего, на основании уравнения неразрывности мы имеем

$$\int_{y'=0}^a u dy = U_0 a. \quad (9.66)$$

Введем в расчет толщину вытеснения δ_1 , определяемую равенством (8.33):

$$\int_0^a (U - u) dy = U \delta_1.$$

Отсюда, используя равенство (9.66), мы получим

$$U(x) = U_0 \frac{a}{a - \delta_1} = U_0 \left[1 + \frac{\delta_1}{a} + \left(\frac{\delta_1}{a} \right)^2 + \dots \right]. \quad (9.67)$$

Непосредственно после входа в канал пограничный слой развивается так же, как на пло-

ской пластине, свободно обтекаемой в продольном направлении. Для такой пластины на основании формулы (7.37) мы имеем

$$\frac{\delta_1}{a} = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{a^2 U_0}} = 1,72 \varepsilon = K_1 \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{vx}{a^2 U_0}} \quad (9.68)$$

есть безразмерная длина, которую можно рассматривать как длину, характерную для входа в трубу. Ряд (9.67) мы можем переписать теперь в следующем виде:

$$U(x) = U_0 (1 + K_1 \varepsilon + K_2 \varepsilon^2 + \dots), \quad (9.69)$$

причем $K_1 = 1,72$. Таким образом, мы представили скорость $U(x)$ в ядре течения в виде ряда относительно \sqrt{vx} . Но в то время как коэффициент K_1 известен из решения Блазиуса для продольного обтекания плоской пластины, все остальные коэффициенты K_2, K_3, \dots могут быть определены последовательно только после расчета исследуемого пограничного слоя.

Далее, совершенно так же, как и при продольном обтекании плоской пластины, введем новую переменную

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0}{vx}} y'$$

[см. формулу (7.24)] и представим функцию тока $\psi(x, y')$ и скорость $u(x, y')$ в пограничном слое в виде таких же рядов по степеням ε , как и для скорости $U(x)$ ядра течения; мы будем иметь

$$\psi(x, y') = U_0 a [\varepsilon f_0(\eta) + \varepsilon^2 f_1(\eta) + \dots], \quad (9.70)$$

$$u(x, y') = U_0 [f'_0(\eta) + \varepsilon f'_1(\eta) + \dots]. \quad (9.71)$$

Подставив выражения (9.69), (9.70) и (9.71) в уравнение движения (9.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , мы получим систему дифференциальных уравнений для определения f_0, f_1, \dots . Дифференциальное уравнение для первого приближения имеет такой же вид, как и уравнение, полученное Г. Блазиусом для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, а именно:

$$f_0 f''_0 + 2 f'_0 f'''_0 = 0,$$

причем граничными условиями будут

$$f_0 = f'_0 = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad f'_0 = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Решение этого уравнения дано в § 5 главы VII. Дифференциальное уравнение для второго приближения имеет вид

$$2 f''_1 + f_0 f''_1 - f'_0 f'_1 + 2 f''_0 f_1 = -K_1 \quad (9.72)$$

с граничными условиями

$$f_1 = f'_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad f'_1 = K_1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Для следующих приближений получаются уравнения, построенные аналогичным образом.

При расчете путем подхода сзади примем, что скорость течения равна

$$u = u_0(y) - u'(x, y),$$

где $u_0(y)$ означает параболическое распределение скоростей, следовательно,

$$u_0(y) = \frac{3}{2} U_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right),$$

а $u'(x, y)$ есть добавочная скорость, при разложении которой в ряд можно в первом приближении пренебречь ее квадратичными членами. Приняв для u' выражение

$$\frac{u'}{U_0} = C_1 e^{-\lambda_1 \varepsilon^2} \psi_1 \left(\frac{y}{a} \right) + C_2 e^{-\lambda_2 \varepsilon^2} \psi_2 \left(\frac{y}{a} \right), \quad (9.73)$$

мы получим для определения функции тока ψ_1 дифференциальное уравнение

$$\psi_1''' + 3\lambda_1 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \psi_1'' + \psi_1' \right] = 0 \quad (9.74)$$

с λ_1 в качестве собственного значения. Границные условия для этого уравнения получаются следующим образом. Из условий, что $v = 0$ и $\partial u / \partial y = 0$ при $y = 0$, вытекает, что

$$\psi_1 = \psi_1'' = 0 \quad \text{при } y = 0$$

и, кроме того,

$$\psi_1' = 1 \quad \text{при } y = 0,$$

так как коэффициент C_1 можно выбрать свободно. Далее, из условий $u = v = 0$ при $y = a$ следует, что

$$\psi_1 = \psi_1'' = 0 \quad \text{при } y = a.$$

Численный расчет дал для λ_1 значение $\lambda_1 = 18,75$, а для коэффициента C_1 при смыкании решений, найденных путем подхода спереди и сзади, получилось значение $C_1 = -0,3485$.

Полная картина распределения скоростей в различных поперечных сечениях начального участка изображена на рис. 9.16. Мы видим, что параболическое распределение скоростей достигается примерно при

$$\frac{\nu x}{a^2 U_0} = 0,16,$$

чему соответствует длина начального участка

$$l_{\text{нач}} = 0,16a \frac{U_0 a}{\nu} = 0,04(2a) \text{ Re},$$

где Re есть число Рейнольдса, составленное для ширины канала. Таким образом, при числах Рейнольдса $\text{Re} = 2000$ и 5000 длина начального участка, который требуется для того, чтобы в канале возникло параболическое распределение скоростей, равна соответственно 80 - и 200 -кратной ширине канала. Следовательно, при небольшой длине канала или при больших числах Рейнольдса параболическое распределение скоростей не успевает разиться.

Приближенный расчет плоского течения в начальном участке канала на основе теоремы импульсов (см. главу X), а также многочисленные измерения распределения скоростей вплоть до достижения турбулентного состояния выполнены Г. Ханеманом и Л. Эретом [27], [28]. Течение в начальном участке трубы будет рассмотрено в § 2 главы XI.

§ 10. Метод продолжения

Рассмотренные в предыдущих параграфах примеры показывают, что аналитический расчет пограничного слоя в большей части случаев очень трудоемок и обычно вообще не может быть выполнен с практически допустимой затратой времени. В связи с этим в тех случаях, когда аналитический расчет не ведет к цели, возникает настоятельная необходимость найти другие способы расчета. Для этой цели пригодны, во-первых, приближенные способы, использующие вместо дифференциальных уравнений интегральные соотношения, получаемые из теоремы импульсов и теоремы энергии. Однако такие способы (они будут подробно рассмотрены в главах X и XI), хотя и ведут обычно очень быстро к цели, ограничены в своей точности. Другим способом, заменяющим аналитический расчет, является так называемый *метод продолжения*. Он заключается в следующем: профиль скоростей $u(x_0, y)$, заданный в сечении x_0 , аналитическим или численным путем продолжается на последующие сечения, расположенные вниз по течению. Приемы аналитического или численного продолжения исходного профиля основаны, как и все ранее рассмотренные решения, на дифференциальных уравнениях пограничного слоя, и поэтому в отношении своей точности они равноценны аналитическим решениям.

Ограничимся пояснением метода продолжения на стационарном плоском течении. Для такого течения уравнения пограничного слоя имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9.76)$$

Задача продолжения состоит, как только что было сказано, в построении на основании уравнений (9.75) и (9.76) профилей скоростей для всех сечений при заданном распределении давления. Следовательно, считается заданным профиль скоростей $u(x_0, y)$ в начальном сечении $x = x_0$ и, кроме того, распределение давления

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v f(x). \quad (9.77)$$

Требуется найти профили скоростей $u(x, y)$ для всех $x > x_0$.

Постановка такой задачи продолжения была сделана Л. Прандтлем уже в 1904 г. в его первой работе, посвященной пограничному слою. Однако прошло довольно много времени, прежде чем удалось найти практически удовлетворительный путь осуществления метода продолжения. Причина этого заключается в том, что профили скоростей в пограничном слое имеют около стенки особые точки.

Впервые аналитическим решением задачи продолжения занялся С. Голдстейн [15]. Он брал в качестве исходного профиля различные кривые, но во всех случаях сходимость рядов получалась очень умеренной, вследствие чего эти аналитические решения в целом не давали удовлетворительных результатов. Поэтому впоследствии пришлось отказаться от аналитического приема решения задачи продолжения и перейти к численным приемам.

Основная идея численного метода продолжения [19], [41] состоит в следующем. Прежде всего, исходя из заданного профиля $u(x_0, y)$, определяют соответствующее изменение скорости $\partial u(x_0, y)/\partial x$ в направлении x , после чего, пользуясь соотношением

$$u(x_0 + \Delta x, y) = u(x_0, y) + \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} \Delta x, \quad (9.78)$$

строят профиль в сечении $x_0 + \Delta x$. Применив такой же прием к профилю $u(x_0 + \Delta x, y)$, получают профиль $u(x_0 + 2\Delta x, y)$ и так далее. Таким образом, задача заключается в том, чтобы по заданному профилю $u(x_0, y)$ и заданному градиенту давления dp/dx найти градиент скорости $\partial u(x_0, y)/\partial x$. Воспользуемся уравнением неразрывности и преобразуем левую часть уравнения (9.75) следующим образом:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = -u^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right).$$

Тогда уравнение (9.75) примет вид

$$-u^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x) \right],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) = v \frac{1}{u^2} \left[f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

откуда после интегрирования получим

$$v = vu \int_0^y \frac{1}{u^2} \left[f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dy.$$

Это равенство, имея в виду соотношение $\partial v/\partial y = -\partial u/\partial x$, мы можем заменить следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial y} \left\{ u \int_0^y \frac{1}{u^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x) \right] dy \right\}.$$

Наконец, выполнив операцию дифференцирования по y , мы найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{1}{u^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x) \right] dy + \frac{1}{u} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x) \right] \right\}. \quad (9.79)$$

Правая часть этого равенства содержит операции дифференцирования и интегрирования только по y , следовательно, для заданного начального профиля $u(x_0, y)$ она может быть вычислена. Таким путем мы найдем значение $\partial u(x_0, y)/\partial x$ и, использовав соотношение (9.78), перейдем к профилю $u(x_0 + \Delta x, y)$ в сечении $x_0 + \Delta x$ при условии, что производная $\partial u/\partial x$ остается ограниченной. Однако из равенства (9.79) сразу видно, что такой переход к следующему сечению не приведет к результату, если скорость u где-либо внутри течения проходит через нулевое значение. Следовательно, указанный прием вычисления производной $\partial u/\partial x$ неприменим к тем сечениям, в которых наблюдается возвратное течение. Вычисление правой части равенства (9.79) требует особой тщательности также на стенке ($y = 0$), где вследствие условия прилипания всюду $u = 0$. Здесь оба члена внутри квадратных скобок дают неопределенность вида $0 : 0$, при раскрытии которой необходимо соблюдать осторожность. Легко видеть, что функция $\partial u/\partial x$ остается регулярной только в том случае, если на стенке выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x)$ квадратически исчезает. Это означает, что на стенке должно быть

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=0}} = f(x_0) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=0}} = 0.$$

Иными словами, численный метод продолжения приводит к результату только тогда, когда заданный профиль скоростей $u(x_0, y)$ удовлетворяет первым двум контурным связям (8.28). Тогда раскрытие неопределенности $0 : 0$ в равенстве (9.79) приводит к значению

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_0} = v \frac{\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{y=0}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}} y + (\dots) y^2.$$

Таким образом, вторая и третья производные скорости u по y в начальном поперечном сечении при $y = 0$ не могут иметь произвольные значения; напротив, они должны иметь вполне определенные значения, равные соответственно $f(x_0)$ и нулю. Далее, для построения последующего профиля скоростей решающую роль играет значение четвертой производной скорости u по y при $y = 0$. При следующем шаге расчета новый профиль будет содержать производную $\partial^4 u / \partial y^4$. Применив к этому шагу предыдущие соображения о пределах, мы увидим, что пятая и шестая производные скорости u по y при $y = 0$ также должны удовлетворять контурным связям и что для перехода к следующему сечению решающую роль играет значение седьмой производной $\partial^7 u / \partial y^7$.

Если исходный профиль скорости $u(x_0, y)$ задан, как это обычно бывает, в виде таблицы или кривой, то определение высших производных по табличным значениям или графически по кривой с требуемой для расчета точностью возможно далеко не всегда. Г. Гётлер [19] показал, что в таких случаях целесообразно развернуть функцию $u(x_0, y)$, определяющую профиль скоростей в начальном сечении $x = x_0$ и заданную например, в виде таблицы, в ряд по степеням y :

$$u(x_0, y) = a_1 y + \frac{a_2}{2!} y^2 + \frac{a_3}{3!} y^3 + \dots,$$

коэффициенты которого зависят от x . Решающим обстоятельством для успеха этого приема является такой подбор коэффициентов a_n , чтобы они удовлетворяли контурным связям (8.28). Трудность вычисления подобного рода коэффициентов делает предложенный Г. Гёртлером способ довольно утомительным.

§ 11. Разностные методы

Старые методы. Г. Гёртлер [20] видоизменил только что рассмотренный метод продолжения, заменив дифференциальное уравнение пограничного слоя разностным уравнением. Это значительно упростило и улучшило численный расчет и позволило при пользовании настольным арифмометром сократить время расчета *одного* шага (для 10—15 точек профиля) до одного часа. В указанной работе Г. Гёртлер сравнил результаты своего приближенного расчета с точными профилями скоростей, полученными Л. Хоуартом (см. § 4 настоящей главы) для пограничного слоя в замедляющемся течении. Совпадение получилось весьма удовлетворительным. Г. Виттинг в своих двух работах [55], [56] еще больше упростил оба разностных метода. Разностный метод, сходный с методом Гёртлера, еще раньше был предложен К. Шрёдером [47]. Этот метод был использован А. В. Квики и К. Шрёдером [42] для расчета ряда численных примеров пограничного слоя на волнистых стенках. При этом выяснилось, что ламинарный пограничный слой очень чувствителен к периодическим колебаниям давления. Правда, эта чувствительность оказывается в основном только вблизи стенок, по мере же удаления от них волнистость линий тока сглаживается. Расчеты ламинарных пограничных слоев на волнистых стенках выполнил также Г. Гёртлер [21], [23]. Полученные им результаты были подтверждены последующими расчетами Квики и Шрёдера.

Современные методы. В последние годы для выполнения трудоемких численных расчетов все в большей мере используются в качестве мощного вспомогательного средства электронно-вычислительные машины. В связи с этим в настоящее время разрабатываются методы расчета пограничного слоя, позволяющие использовать такие машины. Изложим здесь в общих чертах один разностный метод, особенно удобный для расчета на электронно-вычислительных машинах¹⁾.

Так как этот метод пригоден также для расчета осесимметричных пограничных слоев, то выпишем уравнения пограничного слоя в безразмерных координатах в следующем общем виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.80)$$

$$\frac{\partial(r^j u)}{\partial x} + \frac{\partial(r^j v)}{\partial y} = 0 \quad (9.81)$$

(см. § 1 главы VIII). Границными условиями будут

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{и} & \quad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \\ u &= U & & \text{при} \quad y = \infty. \end{aligned}$$

При плоском течении $j = 0$, при осесимметричном течении $j = 1$ [см. уравнения (11.27)].

Для применения разностного метода производные, входящие в дифференциальные уравнения (9.80) и (9.81), заменяются конечноразностными отношениями. Далее, полу бесконечная полоса, ограниченная стенкой, прямой $x = x_i$ и подходящим образом определенной внешней границей пограничного слоя, покрывается сеткой из двух семейств прямых, параллельных соответственно осям x и y (рис. 9.17). Пусть $x = x_i$ есть сечение пограничного слоя, в котором профиль скоростей задан. Для дальнейших вычислений существенно, чтобы расстояния Δy в направлении y между прямыми сетки были одинаковыми. Расстояния Δx в направлении x обычно также выбирают одинаковыми. Решение первоначальной задачи, т. е. решение дифференциальных уравнений (9.80) и (9.81), дало бы искомые значения во всех точках рассматриваемой области течения. В отличие от этого решение разностных уравнений может дать искомые значения только в узлах построенной сетки, т. е. в точках пересечения проведенных прямых, параллельных соответственно осям x и оси y .

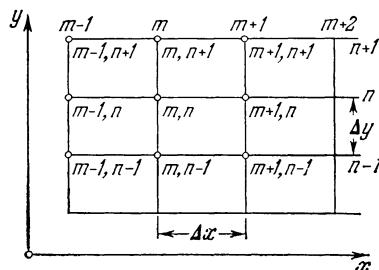


Рис. 9.17. Схема узлов сетки для расчета пограничного слоя разностным методом.

¹⁾ Следующий ниже текст любезно предоставлен в мое распоряжение Ирмой Флюрге-Лотц, Р. Т. Девисом и Т. К. Фаннелёпом.

Каждый узел сетки отмечается двойным индексом (m, n) . Зависимая переменная — продольная скорость u — предполагается известной на прямых $x = x_m$ и $x = x_{m+1}$. Подлежат определению неизвестные значения u вдоль прямой $x = x_{m+1} = x_m + \Delta x$.

Использование схемы центральных конечных разностей приводит в направлении x к погрешности обрыва процесса порядка $(\Delta x)^2$, а в направлении y — к погрешности порядка $(\Delta y)^2$, т. е. получается уравновешенная система. Поэтому применим для нашего расчета именно такую схему. Необходимые формулы для конечноразностных отношений можно найти в любом руководстве по численному анализу, см., например, [57].

Для частных производных продольной скорости u получим следующие выражения через конечноразностные отношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3u_{m+1, n} - 4u_{m, n} + u_{m-1, n}}{2\Delta x} + \frac{1}{3} \Delta x^2 u_{xxx} + \dots, \quad (9.82)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{m+1, n+1} - u_{m+1, n-1}}{2\Delta y} - \frac{1}{6} \Delta y^2 u_{yyy} + \dots, \quad (9.83)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{m+1, n+1} - 2u_{m+1, n} + u_{m+1, n-1}}{\Delta y^2} - \frac{1}{12} \Delta y^2 u_{yyyy} + \dots \quad (9.84)$$

Для линеаризации разностных уравнений используем соотношение

$$u_{m+1, n} = 2u_{m, n} - u_{m-1, n} + \Delta x^2 u_{xx} + \dots \quad (9.85)$$

В линеаризованной форме выражения вида u ($\partial u / \partial x$) заменяются следующими:

$$[2u_{m, n} - u_{m-1, n}] \left[\frac{3u_{m+1, n} - 4u_{m, n} + u_{m-1, n}}{2\Delta x} \right].$$

После подстановки этих разностных выражений в уравнения пограничного слоя мы получим разностное уравнение

$$A_n u_{m+1, n-1} + B_n u_{m+1, n} + C_n u_{m+1, n+1} = F_n, \quad (9.86)$$

причем

$$A_n = -\frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v_{m, n} - v_{m-1, n}) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}, \quad (9.87)$$

$$B_n = \frac{3}{2} (2u_{m, n} - u_{m-1, n}) + \frac{2\Delta x}{(\Delta y)^2}, \quad (9.88)$$

$$C_n = \frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v_{m, n} - v_{m-1, n}) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2} \quad (9.89)$$

$$F_n = \frac{1}{2} (2u_{m, n} - u_{m-1, n}) (4u_{m, n} - u_{m-1, n}) - \Delta x \left(\frac{dp}{dx} \right)_{m+1, n}. \quad (9.90)$$

$N - 1$ уравнений (9.86), из которых каждое содержит три неизвестных $u_{m+1, n-1}$, $u_{m+1, n}$ и $u_{m+1, n+1}$ ($n = 2, 3, \dots, N$), связаны одно с другим и могут быть решены как система совместных алгебраических уравнений, так как общее число неизвестных равно числу уравнений. Матрица, соответствующая неизвестным $u_{m+1, n}$, такова, что допускает использовать прямой путь решения, не требующий составления обратной матрицы. Это приводит к значительному сокращению времени вычислительной работы.

Уравнение (9.86) представляет собой рекуррентное соотношение, которое может быть решено простым способом, особенно пригодным для использования на электронно-вычислительной машине. Для этого перепишем уравнение (9.86) еще раз, причем опустим индекс $m + 1$. Мы получим

$$A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} = F_n, \quad 2 \leq n \leq N - 1, \quad (9.91)$$

причем граничными условиями будут

$$u_1 = 0, \quad u_N = U, \quad (9.92)$$

где u_N есть значение u на внешней границе пограничного слоя. Далее примем, что имеет место соотношение¹⁾

$$u_n = E_n u_{n+1} + D_n. \quad (9.93)$$

Если мы используем граничное условие $u_1 = 0$ и потребуем, чтобы соотношение (9.93) соблюдалось независимо от ширины шага Δy , то найдем, что

$$E_1 = 0, \quad D_1 = 0. \quad (9.94)$$

¹⁾ Обоснование можно найти в работе Р. Д. Рихтмиера [43].

Далее, из соотношения (9.93) следует

$$u_{n-1} = E_{n-1} u_n + D_{n-1}. \quad (9.95)$$

Внеся это выражение u_{n-1} в уравнение (9.91) и решив его относительно u_n , мы получим

$$u_n = \frac{-C_n}{B_n + A_n E_{n-1}} u_{n+1} + \frac{F_n - A_n D_{n-1}}{B_n + A_n E_{n-1}}. \quad (9.96)$$

Сравнив соотношения (9.96) и (9.93), мы найдем

$$E_n = \frac{-C_n}{B_n + A_n E_{n-1}}, \quad D_n = \frac{F_n - A_n D_{n-1}}{B_n + A_n E_{n-1}}. \quad (9.97)$$

Имея соотношения (9.97) и значения (9.94), мы можем последовательно вычислить все E_n и D_n для возрастающих n ($n = 2, 3, \dots, N - 1$). Далее, так как значение u_{n+1} при $n = N - 1$ известно из второго равенства (9.92), то мы можем последовательно определить из соотношения (9.93) все u_n для убывающих n ($n = N - 1, N - 2, \dots, 2$). На этом определение продольной скорости и заканчивается.

После того, как значения $u_{m+1,n}$ вычислены для всех n , можно определить из уравнения неразрывности значения $v_{m+1,n}$, поступая для этого в точности так же, как при вычислении значений $u_{m+1,n}$. Для численного решения уравнения неразрывности удобно представить его в виде

$$v = -\frac{1}{r^j} \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} (r^j u) dy. \quad (9.98)$$

Выполнив квадратуру при помощи правила трапеций, мы получим

$$v_{m+1,n} = v_{m+1,n-1} - \frac{\Delta y}{2r^j} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r^j u)_{m+1,n} + \frac{\partial}{\partial x} (r^j u)_{m+1,n-1} \right] - \frac{\Delta y^3}{12} \frac{1}{r^j} [r^j u(x, \eta)]_{xyy}, \quad (9.99)$$

где η есть некоторое значение между $(n-1)\Delta y$ и $n\Delta y$. Мы видим, что принятая схема центральных разностей при каждом шаге на расстояние Δy дает погрешность порядка $(\Delta x^2 \Delta y)$ и $(\Delta y)^3$. Решение начинается от стенки, на которой v равно нулю. Так как r и u при каждом шаге поперек пограничного слоя известны, то сначала мы можем определить v на расстоянии одного шага от стенки, затем на расстоянии двух шагов и т. д., пока не будет достигнута внешняя граница пограничного слоя.

Внешняя граница пограничного слоя считается достигнутой, когда после нескольких последовательных шагов Δy скорость v остается постоянной внутри некоторого наперед заданного предела точности. Этот контроль относительно внешней границы следует выполнять при каждом шаге Δx .

При расчете пограничного слоя представляют интерес, кроме составляющих скоростей u и v , также некоторые другие величины, например касательное напряжение на стенке и толщина вытеснения. Эти вычисления можно выполнить, используя различные приближения для значения du/dy на стенке. В частности, соотношение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \approx \frac{1}{6\Delta y} (18u_{m+1,2} - 9u_{m+1,3} + 2u_{m+1,4}), \quad (9.100)$$

дает градиент скорости на стенке с точностью, совпадающей с точностью разностных уравнений (см. [57]). Толщину вытеснения можно определить по формуле (7.36) с помощью правила Симпсона.

Изложенный метод конечных разностей сводит задачу расчета пограничного слоя, т. е. задачу интегрирования уравнений в частных производных, к более простой задаче, а именно к решению системы линейных алгебраических уравнений. Так как рассмотренный численный метод всегда устойчив, то ширина шага определяется только погрешностью обрыва процесса, поэтому ее можно выбрать довольно большой, что позволяет сильно сократить время расчета. При пользовании современными быстродействующими электронно-вычислительными машинами полный расчет ламинарного пограничного слоя на крыловом профиле можно выполнить в течение немногих минут.

О применении разностного метода для расчета сжимаемых ламинарных пограничных слоев можно найти сведения в работах [13] и [43]. Недавно Т. Фаннелоп и Ирма Флюгге-Лотт [12a] выполнили рассмотренным разностным методом расчет сжимаемого ламинарного пограничного слоя на волнистой стенке.

Другой неявный метод решения уравнений несжимаемого пограничного слоя недавно предложен А. М. О. Смитом и Д. В. Клаттером [48]. И этот метод пригоден для расчета

на электронно-вычислительных машинах и дает высокую точность при малой затрате времени. Им можно пользоваться также для расчета сжимаемого пограничного слоя.

О результатах особенно точного численного решения дифференциальных уравнений пограничного слоя на круглом цилиндре, полученных посредством применения разностного метода, будет сказано в п. 3 § 3 главы X.

Литература к главе IX

1. Andrade E. N., The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet. The plane jet Proc. Phys. Soc., London 51, 784—794 (1939).
2. Baxter D. C., Flügge-Lotz I., The solution of compressible laminar boundary problems by a finite difference method. Part. II: Further discussion of the method and computation of examples. Techn. Rep. № 110, Div. Eng. Mech. Stanford Univ. (1957); сокращенное изложение: ZAMP 9b, 81—96 (1958).
3. Bickley W., The plane jet. Phil. Mag., Ser. 7, 23, 727—731 (1939).
4. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. 56, 1—37 (1908). Английский перевод в NACA TM 1256.
5. Chapman D. R., Laminar mixing of a compressible fluid. NACA TN 1800 (1949).
6. Chapman D. R., Theoretical analysis of heat transfer in regions of separated flow. NACA TN 3792 (1956).
7. Christian W. J., Improved numerical solution of the Blasius problem with three-point boundary condition. JASS 28, 911—912 (1961).
8. Denison M. R., Baum E., Compressible free shear layer with finite initial thickness. AIAA J. 1, 342—349 (1963).
9. Fage A., The airflow around a circular cylinder in the region, where the boundary separates from the surface. Phil. Mag. 7, 253 (1929).
10. Fage A., Falkner V. M., Further experiments on the flow round a circular cylinder. ARC RM 1369 (1921).
11. Falkner V. M., A further investigation of solution of boundary layer equations. ARC-RM 1884 (1939).
12. Falkner V. M., Simplified calculation of the laminar boundary layer. ARC-RM 1895 (1941).
- 12a. Fannelöp T., Flügge-Lotz I., The compressible boundary layer along a wave-shaped wall. Ing.-Arch. 33, 24—35 (1963).
13. Flügge-Lotz I., Blottner F. G., Computation of the compressible laminar boundary layer flow including displacement interaction using finite difference methods. Stanford Univ. Div. Eng. Mech. Techn. Rep. № 131 (1962). Сокращенное изложение в J. de Mécanique 2, 397—423 (1963).
14. Frössling N., Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds. Univ. Arsskr. N. F. Avd. 2, 36, № 4 (1940); см. также NACA TM 1432.
15. Goldstein S., Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, Part I, 1—30 (1930).
16. Goldstein S., On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body. Proc. Roy. Soc. A 142, 545—562 (1933).
17. Goldstein S. (редактор). Modern developments in fluid dynamics, т. I, 105. Clarendon Press, Oxford 1938. [Имеется русский перевод: «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости», под ред. С. Гольдштейна т. I. ИЛ, Москва 1948.]
18. Goldstein S., On laminar boundary layer flow near a position of separation. Quart. J. Mech. Appl. Math. 1, 43—69 (1948).
19. Görtler H., Weiterentwicklung eines Grenzschichtprofiles bei gegebenem Druckverlauf. ZAMM 19, 129—140 (1939); см. также J. Roy. Aero. Soc. 45, 35—50 (1941).
20. Görtler H., Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 173—187 (1948).
21. Görtler H., Einfluss einer schwachen Wandwelligkeit auf den Verlauf der laminaren Grenzschichten, Teil I und II. ZAMM 25/27, 233—244 (1947) и 28, 13—22 (1948).
22. Görtler H., Zur Approximation stationärer laminarer Grenzschichtströmungen mit Hilfe der abgebrochenen Blasiusschen Reihe. Arch. d. Math. 1, вып. 3, 235—240 (1949).
23. Görtler H., Reibungswiderstand einer schwach gewellten längsangeströmten Platte. Arch. d. Math. 1, 450—453 (1949).
24. Görtler H., Eine neue Reihenentwicklung für laminare Grenzschichten. ZAMM 32, 270—271 (1952).
25. Görtler H., Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten. Bericht № 34 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt 1957.
26. Görtler H., Wittling H., Zu den Tanischen Grenzschichten. Österr. Ing.-Arch. 11, 111—122 (1957).

27. H a h n e m a n n H., E h r e t L., Der Druckverlust der laminaren Strömung in der Anlaufstrecke von geraden, ebenen Spalten. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 21—36 (1941).
28. H a h n e m a n n H., E h r e t L., Der Strömungswiderstand in geraden, ebenen Spalten unter Berücksichtigung der Einlaufverluste. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 186—207 (1942).
29. H a r t r e e D. R., A solution of the laminar boundary layer equation for retarded flow. ARC RM 2426 (1949).
30. H i e m e n z K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Диссертация, Göttingen 1911, Dingl. Polytechn. J. 326, 321—324, 244—348, 357—362, 372—376, 391—393, 407—410 (1911).
31. H o w a r t h L., On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. ARC RM 1632 (1935).
32. H o w a r t h L., On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London A 919, 164, 547—579 (1938).
33. K r z y w o b l o c k i M. Z., On steady, laminar two-dimensional jets in compressible viscous gases far behind the slit. Quart. Appl. Math. 7, 313 (1949).
34. L e i g h D. C. F., The laminar boundary layer equation: A method of solution by means of an automatic computer. Proc. Cambr. Phil. Soc. 51, 320—332 (1955).
35. L o c k R. C., The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. Quart. J. Mech. Appl. Math. 4, 42—63 (1951).
36. M i l l s R. H., A note on some accelerated boundary layer velocity profiles. JAS 5, 325—327 (1938).
37. P a i S. I., Two-dimensional jet mixing of a compressible fluid. JAS 16, 463—469 (1949). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1950, № 1.]
38. P a i S. I., Fluid dynamics of jets. D. van Nostrand Company, New York 1954. [Имеется русский перевод: Б а й Ш и - и, Теория струй, Физматгиз, Москва 1960.]
39. P o h l h a u s e n K., Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM 1, 252—268 (1921).
40. P o t t e r O. E., Laminar boundary layers at the interface of co-current parallel streams. Quart. J. Mech. Appl. Math. 10, 302 (1957).
41. P r a n d t l L., Zur Berechnung der Grenzschichten. ZAMM 18, 77—82 (1938); см. также J. Roy. Aero. Soc. 45, 35—50 (1941); NACA TM 959 (1940) и Gesammelte Abhdlg. II, 663—678.
42. Q u i c k A. W., S c h r ö d e r K., Verhalten der laminaren Grenzschicht bei periodisch schwankendem Druckverlauf. Math. Nachr. 8, 217—238 (1953).
- 42a. R e e v e s B. L., K i p p e n h a n C. J., A particular class of similar solutions of the equations of motion and energy of a viscous fluid. JASS 29, 38—47 (1962).
43. R i c h t m a y e r R. D., Difference methods for initial value problems. Interscience-Publishers, Inc., New York 1957.
44. S c h i l l e r L., L i n k e W., Druck- und Reibungswiderstand des Zylinders bei Reynoldsschen Zahlen 5000 bis 40 000. ZMF 24, 193—198 (1933).
45. S c h l i c h t i n g H., Laminare Strahlausbreitung. ZAMM 13, 260—263 (1933).
46. S c h l i c h t i n g H., Laminare Kanaleinlaufströmung. ZAMM 14, 368—373 (1934).
47. S c h r ö d e r K., Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Math. Nachr. 4, 439—467 (1951).
48. S m i t h A. M. O., C l u t t e r D. W., Solution of the incompressible laminar boundary layer equations. AIAA J. 1. 2062—2071 (1963).
49. S t e w a r t s o n K., Further solutions of the Falkner—Skan equation. Proc. Cambr. Phil. Soc. 50, 454—465 (1954).
50. T a n i I., On the solution of the laminar boundary layer equations. J. Phys. Soc. Japan 4, 149—154 (1949). См. также книгу «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 193—200.
51. T h o m A., The laminar boundary layer of the front part of a cylinder. ARC RM 1176 (1928); см. также ARC RM 1194 (1929).
52. T i f f o r d A. N., Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers. Part 4: Universal series solutions. WADC Techn. Rep., 53—288, Part 4 (1954).
53. T o l l m i e n W., Grenzschichten. Статья в Handb. d. Exper. Physik IV, часть 1, 241—287 (1934).
54. U l r i c h A., Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder. Arch. d. Math. 2, 33—41 (1949).
55. W i t t i n g H., Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschichttheorie. Arch. d. Math. 4, 247—256 (1953).
56. W i t t i n g H., Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görthler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. ZAMP 4, 376—397 (1953).
57. Анонимная работа: Interpolation and allied tables. Prepared by H. M. Nautical Almanae Office. Her Majesty's Stationery Office (1956).
58. B l o t t n e r F. G., Finite difference methods of solution of the first-order boundary-layer equations. AIAAJ 8, 193—205 (1970).

Г л а в а X

Приближенные способы решения уравнений пограничного слоя для стационарных плоских течений

Примеры точного решения уравнений пограничного слоя, рассмотренные в предыдущих главах, показывают, что в большей части случаев интегрирование этих уравнений сопряжено с весьма большими математическими трудностями. Необходимо также иметь в виду, что почти все из рассмотренных примеров носят довольно частный характер. Между тем для практических целей наиболее важен общий случай обтекания тела любой заданной формы. Решение такой общей задачи посредством изложенных выше аналитических методов полностью невозможно, а метод численного интегрирования (метод продолжения) требует столь длительного времени, что при большом количестве необходимых расчетов его практическая ценность сводится к нулю.

В связи с этим возникает настоятельная необходимость найти такие приближенные способы расчета пограничного слоя, которые в тех случаях, когда точное решение невозможно без значительной затраты времени, быстро вели бы к цели, хотя бы даже ценой понижения точности расчета. Как показали Т. Карман [9] и К. Польгаузен [14], можно получить простой приближенный способ, если отказаться от удовлетворения дифференциальных уравнений пограничного слоя для каждой отдельной жидкой струйки и вместо этого ограничиться удовлетворением этих уравнений только в среднем по толщине пограничного слоя. Для этой цели необходимо воспользоваться теоремой импульсов и заменить дифференциальные уравнения пограничного слоя интегральным соотношением, получающимся из уравнения движения путем его интегрирования по толщине пограничного слоя. Теорему импульсов для пограничного слоя мы уже вывели в § 5 главы VIII. Она является основой для приближенного способа расчета пограничного слоя, который будет рассмотрен в настоящей главе.

Прежде чем перейти к изложению этого способа для общего случая плоского и осесимметричного пограничного слоя с наличием градиента давления вдоль стенки, поясним его сущность на случае обтекания плоской пластины в продольном направлении. Особенностью такого случая является отсутствие градиента давления вдоль стенки. Кроме того, для продольного обтекания плоской пластины мы знаем точное решение уравнений пограничного слоя (§ 5 главы VII), что дает удобную возможность для проверки эффективности приближенного способа, хотя бы в рассматриваемом частном случае.

§ 1. Применение теоремы импульсов к плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении

Проведем около пластины контрольную поверхность так, как это изображено на рис. 10.1. На основании теоремы импульсов поток импульса через такую неподвижную в пространстве поверхность равен сопротивлению трения $W(x)$ части пластины от ее передней кромки ($x = 0$) до сечения x .

Подробности применения теоремы импульсов к продольному обтеканию плоской пластины были изложены в § 6 главы IX, поэтому, не повторяя выводов, напомним только, что согласно формуле (9.40) сопротивление трения односторонне смоченной пластины равно

$$W(x) = b\rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy. \quad (10.1)$$

Для вычисления этого интеграла необходимо подставить в него распределение скоростей $u(y)$ в сечении x . С другой стороны, сопротивление трения можно представить как интеграл от касательного напряжения τ_0 на стенке, взятый вдоль пластины, т. е. в виде

$$W(x) = b \int_0^x \tau_0(x) dx. \quad (10.2)$$

Сравнив равенства (10.1) и (10.2), мы получим

$$\tau_0(x) = \rho \frac{d}{dx} \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy. \quad (10.3)$$

Это уравнение можно вывести также чисто формальным путем из уравнений (7.21)

и (7.22) пограничного слоя на плоской пластине. Для этого достаточно, используя уравнение неразрывности, заменить в уравнении движения $d\nu/dy$ на $-du/dx$, затем выполнить интегрирование от $y = 0$ до $y = \infty$, и, наконец, учесть, что $\mu(du/dy)_{y=0} = \tau_0$.

Введя в уравнение (10.3) толщину потери импульса δ_2 , определяемую равенством (8.34), мы получим

$$U_{\infty}^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (10.4)$$

Это уравнение выражает собой теорему импульсов для продольного обтекания плоской пластины. Оно является частным случаем общего уравнения (8.35), выражающим теорему импульсов для плоского пограничного слоя около любого тела. Физический смысл уравнения (10.4) заключается в том, что касательное напряжение на стенке равно потере импульса в пограничном слое (в рассматриваемом случае градиент давления не дает никакой составляющей импульса).

Уравнение (10.4) пока еще не содержит никаких допущений, позволяющих выполнить приближенный расчет пограничного слоя. Прежде чем перейти к выполнению этого расчета, укажем на одно соотношение между τ_0 и δ_2 , которое получается из уравнения (10.4), если в последнее вместо τ_0 подставить его точное значение (7.32), равное

$$\frac{\tau_0}{\rho U_{\infty}^2} = \alpha \sqrt{\frac{v}{U_{\infty} x}},$$

где $\alpha = 0,332$. Выполнив затем интегрирование уравнения (10.4), мы получим

$$\delta_2 = \int_0^x \frac{\tau_0}{\rho U_{\infty}^2} dx = 2\alpha \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}},$$

или

$$\delta_2 = 2 \frac{\tau_0}{\rho U_{\infty}^2} x. \quad (10.5)$$

Перейдем теперь к выполнению приближенного расчета пограничного слоя, образующегося при продольном обтекании плоской пластины, используя для этого уравнение (10.3) или (10.4). Сущность этого приближенного способа состоит в выборе подходящего выражения для распределения скоростей $u(y)$ в пограничном слое, и притом такого, которое удовлетворяет важнейшим граничным условиям для $u(y)$ и, кроме того, содержит один свободный параметр, например подходящим образом выбранную толщину пограничного слоя. Этот свободный параметр определяется затем из уравнения импульсов (10.3).

С целью выбора подходящего выражения для распределения скоростей используем свойство аффинности профилей скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. Следовательно, примем, что

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = f(\eta), \quad (10.6)$$

где

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

есть безразмерное расстояние от стенки, полученное делением размерного расстояния y на толщину пограничного слоя $\delta(x)$, а функция $f(\eta)$ зависит только от η и не содержит никакого свободного параметра. Именно это свойство функции $f(\eta)$ и выражает сделанное предположение об аффинности всех профилей скоростей. Далее, с учетом граничных условий для распределения скоростей u функция f должна исчезать на стенке ($\eta = 0$) и должна быть равна единице для больших значений η . Хотя все точные решения уравнений пограничного слоя показывают, что переход пограничного слоя в потенциальное течение происходит асимптотически, тем не менее для приближенного расчета целесообразно произвести смыкание пограничного слоя с потенциальным течением на конечном расстоянии от стенки, следовательно, ввести в расчет конечную толщину пограничного слоя $\delta(x)$. Впрочем, эта толщина не имеет какого-либо особого физического смысла и играет только роль вспомогательной расчетной величины.

После того как распределение скоростей задано уравнением (10.6), т. е. выбрано определенное выражение для функции $f(\eta)$, можно вычислить интеграл в правой части равенства (10.3). В самом деле, выполнив подстановку (10.6), мы получим

$$\int_{y=0}^{\infty} u(U_\infty - u) dy = U_\infty^2 \delta(x) \int_{\eta=0}^1 f(1-f) d\eta. \quad (10.7)$$

Теперь, имея определенное выражение для $f(\eta)$, можно сразу вычислить интеграл в правой части равенства (10.7). Введя для сокращения записи обозначение

$$\alpha_1 = \int_0^1 f(1-f) d\eta, \quad (10.8)$$

перепишем предыдущее равенство в следующем виде:

$$\int_{y=0}^{\infty} u(U_\infty - u) dy = U_\infty^2 \delta_2 = \alpha_1 \delta U_\infty^2$$

или

$$\delta_2 = \alpha_1 \delta. \quad (10.9)$$

Для дальнейших вычислений используем также толщину вытеснения δ_1 , определяемую равенством (8.33). Положив для сокращения записи

$$\alpha_2 = \int_0^1 (1 - f) d\eta, \quad (10.10)$$

мы получим

$$\delta_1 = \alpha_2 \delta. \quad (10.11)$$

Далее, внеся в выражение для касательного напряжения на стенке распределение скоростей $f(\eta)$, мы будем иметь

$$\frac{\tau_0}{\rho} = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{vU_\infty}{\delta} f'(0) = \beta_1 \frac{vU_\infty}{\delta}, \quad (10.12)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$\beta_1 = f'(0). \quad (10.13)$$

Подставив выражение (10.12) в уравнение (10.4), мы получим с учетом соотношения (10.9), что

$$U_\infty^2 \alpha_1 \frac{d\delta}{dx} = \beta_1 \frac{vU_\infty}{\delta}, \quad \text{или} \quad \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{v}{U_\infty}. \quad$$

Проинтегрируем это уравнение, имея в виду, что при $x = 0$ начальное значение $\delta = 0$. Тогда в качестве первого результата приближенного расчета мы найдем

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}. \quad (10.14)$$

Внеся это выражение $\delta(x)$ в равенство (10.12), мы определим касательное напряжение на стенке:

$$\tau_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta_1}{2}} \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}. \quad (10.15)$$

Далее, подставив $\tau_0(x)$ в формулу

$$2W = 2b \int_0^l \tau_0 dx$$

и выполнив интегрирование, мы найдем полное сопротивление трения пластины, смоченной с обеих сторон:

$$2W = 2b \sqrt{2\alpha_1 \beta_1} \sqrt{\mu p l U_\infty^3}. \quad (10.16)$$

Наконец, исключив из равенств (10.11) и (10.14) толщину пограничного слоя δ , мы определим толщину вытеснения

$$\delta_1 = \alpha_2 \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}. \quad (10.17)$$

Сравнив приближенные формулы (10.17), (10.15), (10.16) для толщины вытеснения, касательного напряжения на стенке и сопротивления с соответствующими точными формулами (7.37), (7.31) и (7.33), мы увидим, что приближенный расчет, основанный на теореме импульсов, во всех случаях совершенно правильно передает структуру точных формул, т. е. форму зависимостей δ_1 , $\tau_0(x)$ и $2W$ от текущей длины x , скорости набегающего потока U_∞ и кинематической вязкости v . Соотношение (10.5), связывающее толщину потери импульса и касательное напряжение на стенке, также

может быть получено путем приближенного расчета, в чем легко убедиться, выполнив простые вычисления. Числа α_1 , α_2 и β_1 , оставшиеся пока неизвестными, могут быть определены только после того, как функция $f(\eta)$ будет задана в явном виде, т. е. после того, как будет сделано специальное предположение о распределении скоростей (10.6).

При задании функции $f(\eta)$ должны быть выполнены определенные граничные условия для профиля скоростей $u(y)$ и, следовательно, для самой функции $f(\eta)$. Во всяком случае должны быть выполнены: условие прилипания, т. е. равенство $u = 0$ при $y = 0$, и условие смыкания с потенциальным течением, т. е. равенство $u = U$ при $y = \delta$. Другими граничными условиями являются непрерывность изменения касательной и непрерывность изменения кривизны профиля скоростей $u(y)$ при смыкании последнего с потенциальным течением, т. е. соблюдение равенств

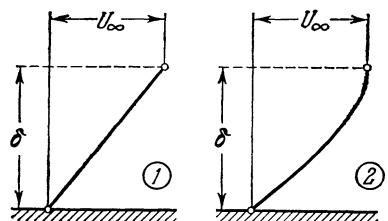


Рис. 10.2. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении: (1) — линейное приближение, (2) — кубическое приближение по формуле, указанной в таблице 10.1.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \delta.$$

Для плоской пластины обязательно также условие

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0,$$

которому удовлетворяет точное решение [см. равенство (7.15)].

Примеры. Проверим пригодность изложенного способа приближенного расчета пограничного слоя на некоторых примерах. Качество приближенного расчета, очевидно, в значительной мере зависит от того, насколько удачно выбрано распределение скоростей (10.6). Как уже упоминалось, выбранная функция $f(\eta)$ в любом случае должна исчезать при $\eta = 0$, так как иначе не будет выполнено условие прилипания на стенке. Далее, функция $f(\eta)$ должна иметь при больших значениях η постоянное значение, равное единице. Переход функции $f(\eta)$ к единичному значению может происходить при грубом приближении с изломом, а при более хорошем приближении — с непрерывным изменением производной $df/d\eta$. Какая бы форма ни была выбрана для функции $f(\eta)$, числа

$$\delta_1 \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad \delta_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad \frac{\tau_0}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}, \quad c_f \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}},$$

которые легко определить посредством формул (10.8)–(10.17), всегда будут безразмерными.

Результаты расчета для четырех частных видов функции $f(\eta)$, из которых первые два изображены на рис. 10.2, сведены в таблицу 10.1. Линейная функция удовлетворяет только условиям $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$; кубическая функция — дополнительно еще двум условиям $f'(1) = 0$ и $f''(0) = 0$, а функция четвертой степени — также условию $f''(1) = 0$. Функция $\sin(\frac{\pi}{2}\eta)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция четвертой степени, за исключением условия $f''(1) = 0$. Полиномы третьей и четвертой степени, а также функция $\sin(\frac{\pi}{2}\eta)$ дают для касательного напряжения на стенке значения, отличающиеся от точного значения меньше чем на 3%, что следует рассматривать как вполне хороший результат. Значения толщины вытеснения δ_1 , даваемые указанными приближениями, также удовлетворительно совпадают с точными значениями.

Таблица 10.1. Результаты приближенного расчета пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении

	Распределение скоростей $\frac{u}{U_\infty} = f(\eta)$	α_1	α_2	β_1	$\delta_1 \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}$	$\frac{\tau_0}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}$	$c_f \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$
1	$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1,732	0,289	1,155	3,00
2	$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	1,740	0,323	1,292	2,70
3	$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2	1,752	0,343	1,372	2,55
4	$f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	1,741	0,327	1,310	2,66
5	Точное	—	—	—	1,721	0,332	1,328	2,59

$$\delta_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} = \frac{2\tau_0}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}; \quad c_f = \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}} = 2\delta_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}.$$

Итак, изложенный способ приближенного расчета пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине дает вполне удовлетворительные результаты. Особо следует подчеркнуть чрезвычайную простоту приближенного расчета по сравнению с точным решением.

§ 2. Применение теоремы импульсов к обтеканию с градиентом давления

Изложенный в предыдущем параграфе приближенный расчет пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине можно распространить на общий случай плоского пограничного слоя с наличием градиента давления вдоль обтекаемой стенки. Впервые это было сделано К. Польгаузеном [14], однако мы приведем здесь способ К. Польгаузена не в его первоначальном, а в современном виде, разработанном Г. Хольштейном и Т. Боленом [7]. Введем, как и раньше, систему координат, в которой x означает длину дуги вдоль обтекаемой стенки, а y — расстояние от стенки. Будем исходить из уравнения импульсов для плоского пограничного слоя, которое получается из уравнения движения путем его интегрирования по y от $y = 0$ (стенка) до значения $y = h(x)$, соответствующего точкам за пределами пограничного слоя. Такое интегрирование мы уже выполнили в § 5 главы VIII и получили уравнение (8.35), которое перепишем теперь в следующем виде:

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1) U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (10.18)$$

Если выбрать для распределения скоростей подходящее выражение и с его помощью вычислить толщину потери импульса, толщину вытеснения и касательное напряжение на стенке, то совершенно таким же путем, как в предыдущем параграфе для пограничного слоя на плоской пластине, мы получим из уравнения (10.18) обыкновенное дифференциальное уравнение для определения толщины пограничного слоя. При выборе выражения для распределения скоростей следует руководствоваться теми же сообра-

жениями, как и при расчете пограничного слоя на плоской пластине, т. е. следует подобрать распределение скоростей так, чтобы были выполнены необходимые условия на стенке и на внешней границе при смыкании с потенциальным течением. Кроме того, в общем случае, когда вдоль обтекаемой стенки имеется градиент давления, следует предусмотреть, что профили скоростей могут быть как без точки перегиба (область понижения давления), так и с точкой перегиба (область возрастания давления). Далее, для того чтобы приближенный расчет мог дать также положение точки отрыва, следует предусмотреть выполнение условия $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$, т. е. возможность существования профиля скоростей, имеющего на стенке касательную, совпадающую с нормалью к стенке. Но зато теперь нельзя требовать, чтобы профили скоростей в различных сечениях были аффинно-подобны между собой. Введем вместо размерного расстояния y от стенки безразмерное расстояние

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

и, следуя К. Польгаузену, возьмем зависимость скорости u от η в виде полинома четвертой степени, т. е. примем, что

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (10.19)$$

при $0 \leq \eta \leq 1$, но в то же время

$$\frac{u}{U} = 1$$

при $\eta \geq 1$. Это означает, что теперь, как и в случае продольного обтекания плоской пластины, ставится требование о смыкании пограничного слоя с потенциальным течением на конечном расстоянии $y = \delta(x)$ от стенки.

Для определения свободных постоянных a, b, c, d потребуем, чтобы выполнялись граничные условия

$$\left. \begin{array}{ll} u = 0, & \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx} \quad \text{при } y = 0, \\ u = U, & \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \delta. \end{array} \right\} \quad (10.20)$$

Эти условия, как показывают уравнения (7.10) и (7.11) и условия (7.12), выполняются и для точных решений.

Так как функция (10.19), выбранная для распределения скоростей, с самого начала удовлетворяет условию прилипания, то условий (10.20) вполне достаточно для определения постоянных a, b, c, d . Особенно важно второе из условий (10.20) при $y = 0$, совпадающее с условием (7.15), обязательным для каждого точного решения. Это условие определяет кривизну профиля скоростей вблизи стенки и обеспечивает требуемое точным решением отсутствие точки перегиба в области понижения давления и, наоборот, наличие такой точки в области повышения давления (см. § 2 главы VII и рис. 7.3 и 7.4). Введя для сокращения записи безразмерную величину

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (10.21)$$

и выполнив простые вычисления, мы найдем для коэффициентов a, b, c, d следующие значения:

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad b = -\frac{\Lambda}{2}; \quad c = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad d = 1 - \frac{\Lambda}{6}.$$

Внеся эти значения a , b , c , d в уравнение (10.19), мы получим

$$\frac{u}{U} = F(\eta) + \Lambda G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{\Lambda}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4), \quad (10.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1 - \eta)^3 (1 + \eta), \\ G(\eta) &= \frac{1}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6} \eta (1 - \eta)^3. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Из уравнения (10.22) мы видим, что профили скоростей, рассматриваемые как функции от $\eta = y/\delta(x)$, образуют семейство кривых, зависящих от одного безразмерного параметра Λ , называемого *формпараметром*. Величину Λ можно представить также в следующем виде:

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{dU}{dx} = - \frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu U},$$

откуда виден ее физический смысл: она представляет собой отношение сил давления к силам трения. Правда, чтобы придать формпараметру Λ настоящий физический смысл, следует в выражении для Λ заменить толщину пограничного слоя δ физически определенной величиной, например толщиной потери импульса, что ниже и будет сделано.

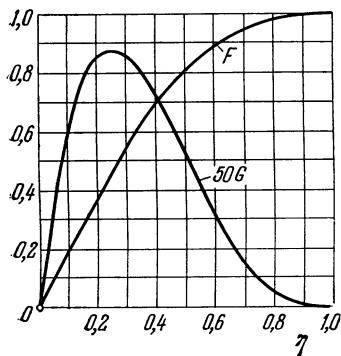


Рис. 10.3. Графики функций $F(\eta)$ и $G(\eta)$, определяющих распределение скоростей в пограничном слое [см. уравнения (10.22) и (10.23)].

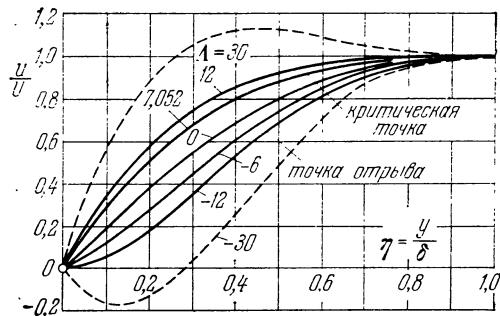


Рис. 10.4. Однопараметрическое семейство профилей скоростей [уравнение (10.22)].

Графики обеих функций $F(\eta)$ и $G(\eta)$, определяемых уравнениями (10.23) и в сумме дающих распределение скоростей (10.22), изображены на рис. 10.3. Профили скоростей для различных значений формпараметра Λ показаны на рис. 10.4. Профиль, соответствующий значению $\Lambda = 0$, получается для $dU/dx = 0$, следовательно, либо для продольного обтекания плоской пластины, когда градиент давления всюду равен нулю, либо для обтекания криволинейной стенки, но только в том сечении, в котором скорость потенциального течения имеет максимум или минимум. Для $\Lambda = 0$ распределение скоростей (10.22) тождественно совпадает с полиномом четвертой степени, использованным в предыдущем параграфе (см. таблицу 10.1) при расчете пограничного слоя на плоской пластине. Профиль скоростей в точке отрыва определяется условием $(du/dy)_0 = 0$, следовательно, в этом случае $a = 0$ и $\Lambda = -12$. Для профиля скоростей в передней критической точке формпараметр равен, как будет показано ниже, $\Lambda = 7,052$. Значениям $\Lambda > 12$ соответствуют в пограничном слое значения $u/U > 1$, что при стационарном пограничном слое невозможно. Позади точки отрыва, для

которой, как только что было указано, $\Lambda = -12$, возможность расчета пограничного слоя отпадает. Таким образом, формпараметр Λ может изменяться только в промежутке $-12 \leq \Lambda \leq +12$.

Прежде чем приступить к определению из уравнения импульсов толщины пограничного слоя $\delta(x)$ (совершенно таким же путем, как и в предыдущем параграфе для продольного обтекания плоской пластины), необходимо вычислить те значения толщины потери импульса δ_2 , толщины вытеснения δ_1 и касательного напряжения на стенке τ_0 , которые соответствуют положенному в основу расчета распределению скоростей (10.22). Подставив это распределение в равенства (8.33) и (8.34), мы будем иметь

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta,$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [F(\eta) + \Lambda G(\eta)] [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta.$$

Заменив $F(\eta)$ и $G(\eta)$ их выражениями (10.23) и выполнив интегрирование, мы получим

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}; \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}. \quad (10.24)$$

Далее, подставив распределение скоростей (10.22) в равенство

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0},$$

мы найдем

$$\frac{\tau_0 \delta}{\mu U} = 2 + \frac{\Lambda}{6}. \quad (10.25)$$

Для определения пока еще неизвестного формпараметра $\Lambda(x)$, следовательно, и для определения толщины $\delta(x)$ из уравнения (10.21) используем уравнение импульсов (10.18). Умножив его на δ_2/vU , мы придадим ему безразмерную форму

$$\frac{U \delta_2 \delta'_2}{v} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{U' \delta_2^2}{v} = \frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U}. \quad (10.26)$$

Толщина пограничного слоя δ явно не входит в это уравнение. В этом обстоятельстве нет ничего удивительного, так как толщина δ вводится в приближенный расчет в качестве довольно произвольной величины и, следовательно, не имеет особого физического смысла. Зато в уравнение (10.26) входят физически важные величины: толщина вытеснения δ_1 , толщина потери импульса δ_2 и касательное напряжение τ_0 на стенке. Поэтому целесообразно вычислить из уравнения импульсов (10.26) сначала величину δ_2 , а затем уже, посредством второго из соотношений (10.24), перейти к δ . Для этой цели, следуя Г. Хольштейну и Т. Болену [7], введем наряду с первым формпараметром Λ , определяемым равенством (10.21), *второй формпараметр*

$$\kappa = \frac{\delta_2^2}{v} \frac{dU}{dx}, \quad (10.27)$$

отличающийся от первого только заменой толщины пограничного слоя δ на толщину потери импульса δ_2 . Если для сокращения записи применить обозначение

$$Z = \frac{\delta_2^2}{v}, \quad (10.28)$$

то мы будем иметь

$$\kappa = Z \frac{dU}{dx}. \quad (10.29)$$

Между вторым и первым формпараметрами существует универсальное соотношение

$$\kappa = \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)^2 \Lambda, \quad (10.30)$$

которое легко вывести из равенств (10.21), (10.27) и (10.24). Введем, далее, для сокращения записи обозначения

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}}{\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}} = f_1(\kappa), \quad (10.31)^1$$

$$\frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) = f_2(\kappa). \quad (10.32)$$

Внеся значения (10.27), (10.28), (10.31) и (10.32) в уравнение импульсов (10.26) и имея в виду, что

$$\frac{\delta_2 \delta'_2}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{dZ}{dx},$$

мы получим

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(\kappa)] \kappa = f_2(\kappa). \quad (10.33)$$

Наконец, введем для сокращения записи еще одно обозначение:

$$F(\kappa) = 2f_2(\kappa) - 4\kappa - 2\kappa f_1(\kappa) \quad (10.34)$$

или в раскрытом виде, с учетом соотношения (10.30),

$$F(\kappa) = 2 \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \left[2 - \frac{116}{315} \Lambda + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072} \Lambda^3 \right]. \quad (10.35)$$

Теперь мы можем переписать уравнение импульсов (10.33) в следующем сокращенном виде:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\kappa)}{U}, \text{ где } \kappa = ZU'.$$

(10.36)

Дифференциальное уравнение (10.36) нелинейно и первого порядка. Оно позволяет определить величину $Z = \delta^2/\nu$ как функцию от текущей длины x . Сложный вид функции $F(\kappa)$ не служит существенным затруднением для интегрирования уравнения (10.36), так как функция $F(\kappa)$ универсальна, т. е. не зависит от формы тела и, следовательно, может быть вычислена раз навсегда. Значения функций $\kappa(\Lambda)$, $f_1(\kappa)$, $f_2(\kappa)$ и $F(\kappa)$ [формулы (10.30), (10.31), (10.32) и (10.35)] даны в таблице 10.2. График вспомогательной функции $F(\kappa)$ изображен ниже на рис. 10.6.

¹⁾ Величина $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ также называется формпараметром; она играет особую роль для турбулентного пограничного слоя, см. главу XXII. Для ламинарных пограничных слоев величина H_{12} лежит в пределах примерно от 2,3 до 3,5 (см. таблицу 10.2), а для турбулентных пограничных слоев — в пределах примерно от 1,3 до 2,2. При переходе ламинарной формы течения в турбулентную формпараметр H_{12} сильно уменьшается (см. рис. 16.5).

Таблица 10.2 Вспомогательные функции
для приближенного расчета ламинарного пограничного слоя.
По Хольштейну и Болену [7]

Λ	x	$F(x)$	$f_1(x) = \frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$	$f_2(x) = \frac{\delta_2 \tau_0}{\mu U}$
15	0,0884	-0,0658	2,279	0,346
14	0,0928	-0,0885	2,262	0,351
13	0,0941	-0,0914	2,253	0,354
12	0,0948	-0,0948	2,250	0,356
11	0,0941	-0,0912	2,253	0,355
10	0,0919	-0,0800	2,260	0,351
9	0,0882	-0,0608	2,273	0,347
8	0,0831	-0,0335	2,289	0,340
7,8	0,0819	-0,0271	2,293	0,338
7,6	0,0807	-0,0203	2,297	0,337
7,4	0,0794	-0,0132	2,301	0,335
7,2	0,0781	-0,0051	2,305	0,333
7,052	0,0770	0	2,308	0,332
7	0,0767	0,0021	2,309	0,331
6,8	0,0752	0,0102	2,314	0,330
6,6	0,0737	0,0186	2,318	0,328
6,4	0,0721	0,0274	2,323	0,326
6,2	0,0706	0,0363	2,328	0,324
6	0,0689	0,0459	2,333	0,321
5	0,0599	0,0979	2,361	0,310
4	0,0497	0,1579	2,392	0,297
3	0,0385	0,2255	2,427	0,283
2	0,0264	0,3004	2,466	0,268
1	0,0135	0,3820	2,508	0,252
0	0	0,4698	2,554	0,235
-1	-0,0140	0,5633	2,604	0,217
-2	-0,0284	0,6609	2,647	0,199
-3	-0,0429	0,7640	2,716	0,179
-4	-0,0575	0,8698	2,779	0,160
-5	-0,0720	0,9780	2,847	0,140
-6	-0,0862	1,0877	2,921	0,120
-7	-0,0999	1,1981	2,999	0,100
-8	-0,1130	1,3080	3,085	0,079
-9	-0,1254	1,4167	3,176	0,059
-10	-0,1369	1,5229	3,276	0,039
-11	-0,1474	1,6257	3,383	0,019
-12	-0,1567	1,7241	3,500	0
-13	-0,1648	1,8169	3,627	-0,019
-14	-0,1715	1,9033	3,765	-0,037
-15	-0,1767	1,9820	3,916	-0,054

Интегрирование дифференциального уравнения, определяющего толщину потери импульса. По поводу интегрирования уравнения (10.36) необходимо сделать прежде всего следующее указание: расчет необходимо начать в передней критической точке $x = 0$. В этой точке скорость $U = 0$, в то время как производная dU/dx имеет конечное, отличающееся от нуля значение, если только передняя часть тела не представляет собой заостренную кромку с нулевым углом. Если бы в передней критической точке функция $F(x)$ имела конечное не равное нулю значение, то угловой коэффициент dZ/dx интегральной кривой был бы равен здесь бесконечности. Но функция $F(x)$ именно такова, что она имеет в передней критической точке нулевое значение, и это обеспечивает для начального углового коэффициента интегральной кривой физически возможное значение. Для определения тех

значений формпараметров κ и Λ , при которых функция $F(\kappa)$ принимает нулевое значение, следует приравнять нулю выражение в квадратных скобках равенства (10.35); тогда мы получим

$$F(\kappa) = 0 \quad \text{при } \kappa = \kappa_0 = 0,0770,$$

т. е. при $\Lambda = \Lambda_0 = 7,052$.

Следовательно, как уже было указано выше, в передней критической точке первый формпараметр равен $\Lambda = 7,052$. Поскольку функция $F(\kappa)$ имеет в передней критической точке нулевое значение, угловой коэффициент интегральной кривой в этой точке принимает неопределенное значение 0/0. Однако эту неопределенность легко раскрыть простым предельным переходом, выполнив который мы найдем начальное значение функции Z и начальный угловой коэффициент интегральной кривой:

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{\kappa_0}{U'_0} = \frac{0,0770}{U'_0}; \\ \left(\frac{dZ}{dx} \right)_0 &= -0,0652 \frac{U''_0}{U'^2_0} \end{aligned} \right\} \quad (10.36a)$$

(индексом нуль мы отмечаем значения в критической точке).

Зная эти начальные значения, нетрудно проинтегрировать уравнение (10.36), например, способом изоклин. Результат такого интегрирования для симметричного крылового профиля, установленного под нулевым углом атаки, изображен на рис. 10.5. Расчет начинается в передней критической точке, где формпараметры имеют значения $\Lambda_0 = 7,052$ и $\kappa_0 = 0,0770$, и заканчивается после достижения точки отрыва, в которой $\Lambda = -12$ и $\kappa = -0,1567$. В расчете, кроме самой скорости $U(x)$ потенциального течения, используется только первая ее производная по длине дуги; лишь в критической точке необходимо вычислить также вторую производную d^2U/dx^2 для определения начального углового коэффициента интегральной кривой¹⁾.

Таким образом, если для исследуемого тела потенциальное течение задано, т. е. скорость течения $U(x)$ и ее первая производная dU/dx известны как функции длины дуги x , то расчет пограничного слоя производится следующим способом.

1. Путем интегрирования уравнения (10.36) определяется функция $Z(x)$ и второй формпараметр $\kappa(x)$. По известному формпараметру $\kappa(x)$ из уравнения (10.27) вычисляется толщина потери импульса $\delta_2(x)$, а затем определяется положение точки отрыва.

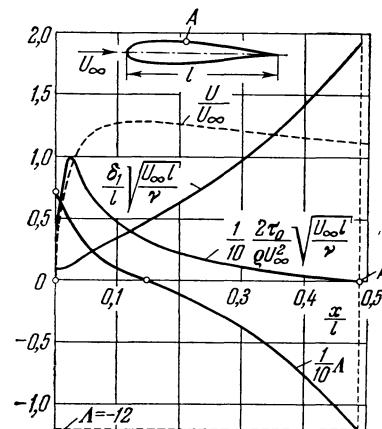


Рис. 10.5. Результат расчета пограничного слоя приближенным методом Польгаузена и Хольштейна — Болена [1] для симметричного профиля Жуковского J 015 при угле атаки $\alpha = 0^\circ$;ср. с рис. 10.12. А — точка отрыва.

¹⁾ Сам К. Польгаузен вместо уравнения (10.36) получил дифференциальное уравнение для функции $z = \delta^2/v$, построенной аналогично функции Z . Дифференциальное уравнение Польгаузена содержит наряду с $U(x)$ и dU/dx также вторую производную d^2U/dx^2 , которую можно определить из заданного потенциального течения обычно только путем двукратного графического дифференцирования. Видоизменение способа К. Польгаузена, предложенное Г. Хольштейном и Т. Боленом, приводит к дифференциальному уравнению, совсем не содержащему второй производной d^2U/dx^2 , что значительно упрощает весь расчет.

2. Из уравнения (10.30) по уже известному второму формпараметру определяется первый формпараметр $\Lambda(x)$ (таблица 10.2 на стр. 202).

3. Из уравнений (10.31) и (10.32) определяются толщина вытеснения δ_2 и касательное напряжение τ_0 на стенке (таблица 10.2).

4. Из уравнения (10.24) определяется толщина пограничного слоя $\delta(x)$.

5. Наконец, из уравнения (10.22) вычисляется распределение скоростей.

Если скорость U потенциального течения и ее производная dU/dx даны в готовом, т. е. подсчитанном, виде, то опытному вычислителю с помощью логарифмической линейки для всего расчета требуется около двух часов времени.

Квадратура. А. Вальц [26] показал, что интегрирование уравнения (10.36) можно с хорошим приближением свести к квадратуре. В самом деле, функция $F(x)$ мало уклоняется от прямой

$$F(x) = a - bx.$$

Если потребовать, чтобы уклонение было наименьшим в интервале между критической точкой и точкой, в которой скорость имеет максимум (рис. 10.6), то для постоянных a и b получатся значения

$$a = 0,470, \quad b = 6.$$

Рис. 10.6. Вспомогательная функция $F(x)$ для расчета ламинарного пограничного слоя по методу Хольштейна — Болена; кривая (1) дает точные значения функции $F(x)$ [уравнение (10.35)], а кривая (2) — линейное приближение $F(x) = 0,470 - 6x$; S — критическая точка, M — точка с максимумом скорости.

Уравнение (10.36) можно переписать теперь в следующем виде:

$$U \frac{dZ}{dx} = a - bx,$$

или, если вместо Z и x подставить их выражения (10.28) и (10.27),

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{U\delta_2^2}{v} \right) = a - (b - 1) \frac{U\delta_2^2}{v} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}.$$

Это дифференциальное уравнение относительно переменной $U\delta_2^2/v$ можно проинтегрировать в замкнутой форме. В результате мы получим

$$\frac{U\delta_2^2}{v} = \frac{a}{U^{b-1}} \int_0^x U^{b-1} dx$$

или, после замены a и b их значениями,

$$\frac{U\delta_2^2}{v} = \frac{0,470}{U^5} \int_{x=0}^x U^5 dx. \quad (10.37)$$

Таким образом, решение уравнения (10.36) сведено к простой квадратуре.

При помощи соотношения (10.37) легко найти приближенное решение задачи отыскания потенциального течения для заданного пограничного слоя.

Введя в это соотношение формпараметр κ , определяемый равенством (10.27), и сделав подстановку

$$V(x) = \int_0^x U^5 dx, \quad (10.38)$$

мы получим

$$V \cdot V'' = \frac{\kappa(x)}{0,094} V'^2. \quad (10.39)$$

Решение этого дифференциального уравнения дано в работе [2] и имеет вид

$$V(x) = \exp \left(\int \int \left(1 - \frac{\kappa(x)}{0,094} \right) dx \right). \quad (10.40)$$

Выполнив интегрирование при заданном формпараметре $\kappa(x)$, мы получим внешнее течение $U(x)$. В частности, для $\kappa = \text{const}$ мы будем иметь

$$U(x) \approx x^{0,47-5\kappa}. \quad (10.41)$$

В этой связи см. также § 6 настоящей главы.

§ 3. Сравнение приближенного расчета с точными решениями

1. Продольное обтекание плоской пластины. Для продольного обтекания плоской пластины способ Польгаузена сводится, как следует из уравнения (10.22), к приближению, указанному в третьей строке таблицы 10.1. В этом легко убедиться также непосредственно из уравнения (10.36). В самом деле, в рассматриваемом случае $U(x) = U_\infty$, $U' \equiv 0$, поэтому $\kappa = \Lambda \equiv 0$ и, на основании уравнения (10.36),

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(0)}{U_\infty} = \frac{0,4698}{U_\infty}.$$

Отсюда, имея в виду, что начальное значение Z (при $x = 0$) равно нулю, находим

$$Z = \frac{0,4698x}{U_\infty},$$

или

$$\delta_2 = 0,686 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

в полном соответствии с результатом, указанным в таблице 10.1. Сравнение параметров пограничного слоя, полученных путем приближенного расчета и путем точного решения, дано в той же таблице 10.1. Мы видим, что совпадение получается удовлетворительным.

2. Плоское течение в окрестности критической точки. Для плоского течения в окрестности критической точки, при котором скорость потенциального течения равна

$$U(x) = U'x,$$

точное решение дано в § 2 главы V. Из этого решения для толщины вытеснения, толщины потери импульса и касательного напряжения на стенке получаются значения, указанные в таблице 10.3.

Таблица 10.3. Сравнение параметров пограничного слоя
плоского течения в окрестности критической точки,
полученных путем приближенного расчета и точного решения

	$\delta_1 \sqrt{\frac{U'}{v}}$	$\delta_2 \sqrt{\frac{U'}{v}}$	$\frac{\tau_0}{\mu U} \sqrt{\frac{v}{U'}}$	$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$
Приближенный расчет по Польгаузену	0,641	0,278	1,19	2,31
Точное решение	0,648	0,292	1,234	2,21

Приближенный расчет приводит к следующим результатам. Толщина потери импульса, как это следует из уравнения (10.27) с учетом соотношения $Z_0 = x_0/U'$, равна

$$\delta_2 \sqrt{\frac{U'}{v}} = \sqrt{x_0} = \sqrt{0,0770} = 0,278.$$

Для толщины вытеснения соотношение (10.31) дает значение

$$\delta_1 \sqrt{\frac{U'}{v}} = f_1(x_0) \sqrt{x_0} = 0,641.$$

Наконец, касательное напряжение на стенке, как показывает соотношение (10.32), равно

$$\frac{\tau_0}{\mu U} \sqrt{\frac{v}{U'}} = \frac{f_2(x_0)}{\sqrt{x_0}} = \frac{0,332}{0,278} = 1,19.$$

Таким образом, и в этом случае результат приближенного расчета удовлетворительно совпадает с точным решением.

3. Обтекание круглого цилиндра. К. Польгаузен в работе [14] сравнил результаты своего приближенного расчета с решением К. Хименца, полученным для круглого цилиндра посредством ряда Блазиуса, в котором были сохранены три первых члена (§ 3 главы IX). В качестве основы для сравнения К. Польгаузен использовал экспериментальное распределение давления на поверхности круглого цилиндра, полученное К. Хименцем. Решение К. Хименца дало для азимута точки отрыва $\phi = 82,0^\circ$, в то время как К. Польгаузен получил $\phi = 81,5^\circ$. Что касается толщины пограничного слоя вблизи точки отрыва, то у К. Польгаузена она получилась значительно больше, чем у К. Хименца. Однако в целом такое сравнение нельзя считать обоснованным, так как ряд Блазиуса только с тремя членами недостаточен для получения надежного распределения скоростей вблизи точки отрыва.

Ниже мы приводим для круглого цилиндра с теоретическим потенциальным распределением скоростей сравнение приближенного расчета по Польгаузену, а также точного решения, полученного посредством ряда Блазиуса, оборванного на члене с x^{11} (§ 3 главы IX), с численным решением, полученным В. Шёнауэром с большой точностью при помощи электронно-вычислительной машины непосредственно из дифференциального уравнения. Это сравнение показывает, что метод, основанный на использовании ряда Блазиуса, дает весьма высокую точность почти до ближайшей окрестности точки отрыва. Однако в непосредственной окрестности точки отрыва результат получается не вполне точным даже в случае ряда, оборванного на члене с x^{11} . На рис. 10.7 изображены графики толщины вытеснения δ_1 , толщины потери импульса δ_2 и касательного напряжения τ_0 на стенке. Мы видим, что согласно новым численным результатам В. Шёнауэра [18a] толщина вытеснения,

толщина потери импульса и касательное напряжение на стенке изменяются вблизи точки отрыва несколько иначе, чем это показывают прежние расчеты. В частности, согласно В. Шёнауэру отрыв происходит несколько раньше, а именно при азимуте $\varphi_{отр} = 104,5^\circ$ (вместо $\varphi_{отр} = 109,5^\circ$ согласно приближению Польгаузена и $\varphi_{отр} = 108,8^\circ$ на основании разложения в ряд Блазиуса до члена с x^{11}). К аналогичному результату пришел несколько раньше Р. М. Териилл [24a]. Сравнение распределений скоростей u/U , полученных в результате приближенного расчета и точного решения (рис. 10.8), показывает, что в области ускоренного внешнего течения ($0 < \varphi < 90^\circ$) совпадение получается почти полным, но после перехода через точку минимума давления оба распределения начинают отходить одно от другого, причем по мере приближения к точке отрыва расходжение быстро увеличивается.

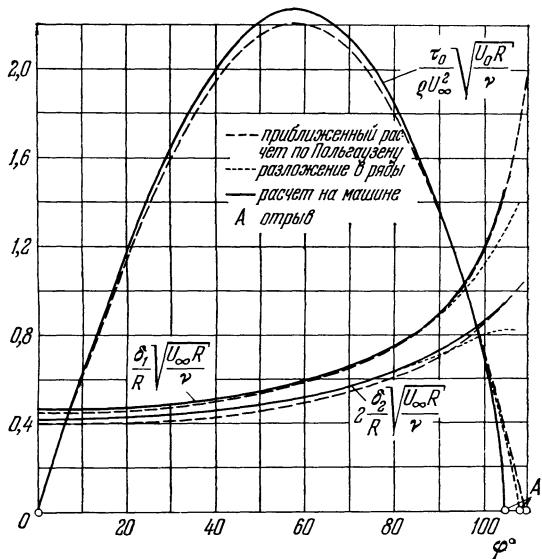


Рис. 10.7. Сравнение приближенного решения по методу Польгаузена с точным решением для круглого цилиндра; δ_1 — толщина вытеснения; δ_2 — толщина потери импульса; τ_0 — касательное напряжение на стенке.

К аналогичным результатам пришел и Г. Гёртлер [5], сравнивший приближенный расчет по Польгаузену с точным решением для пограничного слоя, получающегося при внешнем потенциальном течении $U(x) = U_0 - ax$ (см. § 4 главы IX).

Общий критерий для оценки надежности приближенного расчета пограничного слоя до сих пор не найден, и, по-видимому, его трудно найти. Тем не менее, только что приведенные, а также другие сравнительные расчеты и измерения позволяют считать, что в области ускоренного потенциального течения приближенный способ Польгаузена дает вполне удовлетворительные результаты, но становится ненадежным в области замедленного потен-

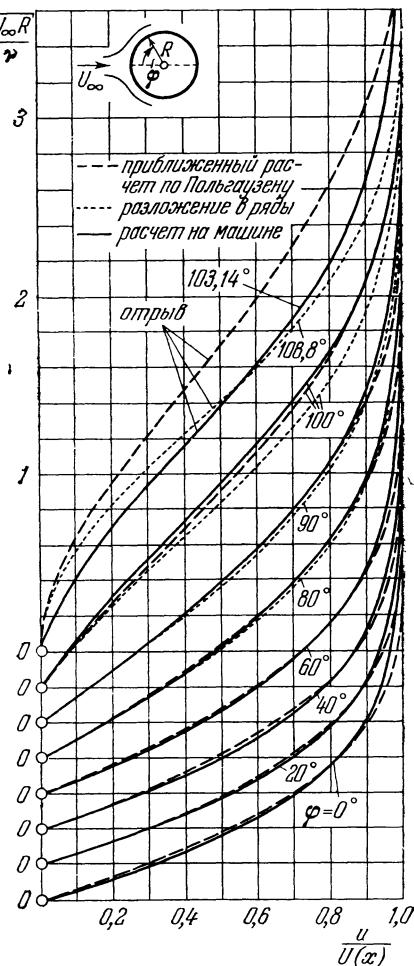


Рис. 10.8. Профили скоростей для круглого цилиндра. Сравнение приближенного решения по методу Польгаузена с точным решением.

циального течения при приближении к точке отрыва. Что касается определения положения точки отрыва, то способ Польгаузена дает возможность это сделать только с некоторой неуверенностью, особенно в тех случаях, когда точка отрыва лежит далеко позади точки с минимальным давлением¹⁾. В связи с этим отметим, что приближенный расчет по Польгаузену, если он выполняется на основе уравнения (10.36) способом изоклин, непригоден в области сильного понижения давления, когда $\Lambda > 12$ ($\kappa > 0,095$), так как кривая, изображающая зависимость $\kappa(\Lambda)$ от Λ , при $\Lambda = 12$ поворачивает назад (см. таблицу 10.2). В этом случае приближенный расчет по Польгаузену не может быть продолжен дальше значения $\kappa = 0,095$. Впрочем, для $\Lambda > 12$ получаются вообще невозможные профили скоростей с отношением $u/U > 1$ (рис. 10.4). Если вместо уравнения (10.36) пользоваться уравнением (10.37), то указанные трудности отпадают.

Из допущения, что профили скоростей зависят только от одного параметра, необходимо следует, что положение точки отрыва определяется также одним этим параметром. Однако, как показал И. Тани [24], положение точки отрыва зависит и от закона изменения давления во внешнем течении.

§ 4. Другие примеры приближенного расчета пограничного слоя

Приведем еще несколько примеров приближенного расчета ламинарного пограничного слоя по Польгаузену, взятых из работы Г. Шлихтинга и А. Ульриха [18]. Первая группа примеров относится к обтеканию одного

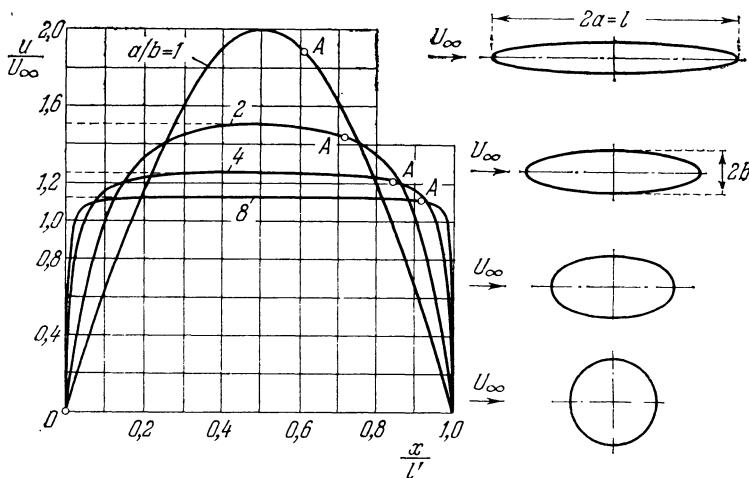


Рис. 10.9. Теоретическое потенциальное распределение скоростей около эллиптических цилиндров с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8$ при обтекании в направлении, параллельном большой оси; A — положение точки отрыва.

круглого и трех эллиптических цилиндров. Расчет пограничного слоя на эллиптических цилиндрах производился для случая обтекания

¹⁾ См., например, работу Г. Б. Шубауэра [19]. В этой работе Г. Шубауэр исследовал обтекание эллиптического цилиндра с отношением осей $a:b = 2,96:1$, происходившее параллельно большой оси. Измерения показали, что при таком обтекании точка, в которой давление принимает минимальное значение, имеет координату $x/b = 1,3$, а отрыв наступает в точке $x/b = 1,99$. Приближенный расчет по Польгаузену дал для профилей скоростей очень хорошее совпадение с результатами измерений вплоть до точки с минимумом давления, но в то же время он привел к выводу, что отрыв пограничного слоя совсем не возникает. Д. Мексин [12] разработал численный метод, который в рассмотренном примере дал для положения точки отрыва координату $x/b = 2,02$. В методе Мексина уравнение пограничного слоя преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, сходное с уравнением (9.8) Фокнера и Скэн.

параллельно большой оси. Отношение осей этих цилиндров составляло $a/b = 1; 2; 4; 8$. Теоретические потенциальные распределения скоростей для круглого и эллиптических цилиндров изображены на рис. 10.9. Максимум скорости равен

$$\frac{U_m}{U_\infty} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Графики толщины вытеснения δ_1 , формпараметра Λ и касательного напряжения τ_0 на стенке даны на рис. 10.10. Для сравнения показаны также

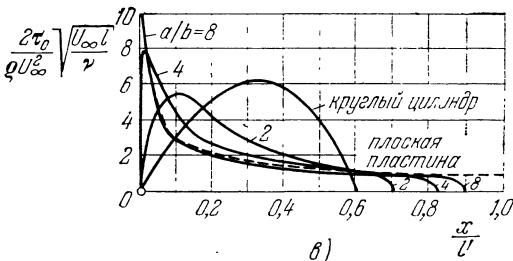
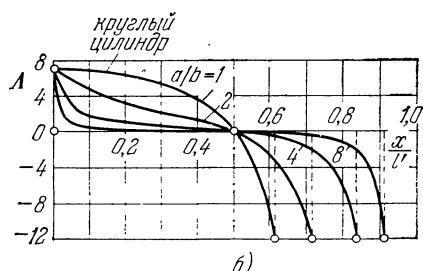
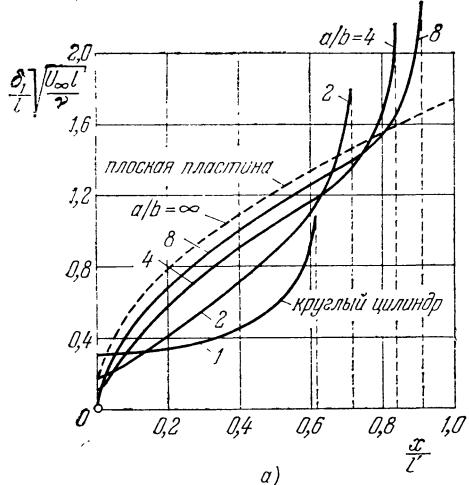


Рис. 10.10. Результат расчета пограничного слоя на эллиптических цилиндрах с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8$ на основе теоретического потенциального распределения скоростей, изображенного на рис. 10.9. а) Толщина вытеснения пограничного слоя; б) формпараметр; в) касательное напряжение на стенке (l' — половина полной длины эллипса).

соответствующие результаты для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении. На круглом цилиндре точка отрыва лежит, как уже было сказано, при $x/l' = 0,609$ (l' есть половина длины окружности), т. е. при азимуте $\phi = 109,5^\circ$. По мере утонения цилиндра, т. е. при увеличении отношения осей a/b , точка отрыва перемещается все более и более назад. Положение точки отрыва во всех четырех случаях отмечено также на кривых распределения скоростей (рис. 10.9). Для эллиптического цилиндра с отношением осей $a/b = 8$ полученные результаты очень мало отличаются от аналогичных результатов для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении. Для эллиптического цилиндра с отношением осей $a/b = 4$ на рис. 10.11 изображены также профили скоростей в пограничном слое.

Другие примеры расчета пограничного слоя на эллиптическом цилиндре, в частности и для обтекания параллельно малой оси, а также примеры расчета пограничного слоя на эллипсоиде вращения можно найти в работе И. Преча [16].

Г. Шлихтинг и А. Ульрих выполнили приближенный расчет пограничного слоя по Польгаузену также для симметричного обтекания симметричного профиля Жуковского. Распределение скоростей потенциального течения и профили скоростей в пограничном слое изображены на рис. 10.12.

Минимальное давление в потенциальном течении получается в точке $x/l' = 0,141$, т. е. очень близко от передней критической точки. Последующее повышение давления происходит очень постепенно, поэтому точка отрыва пограничного слоя лежит далеко позади точки с минимальным давлением,

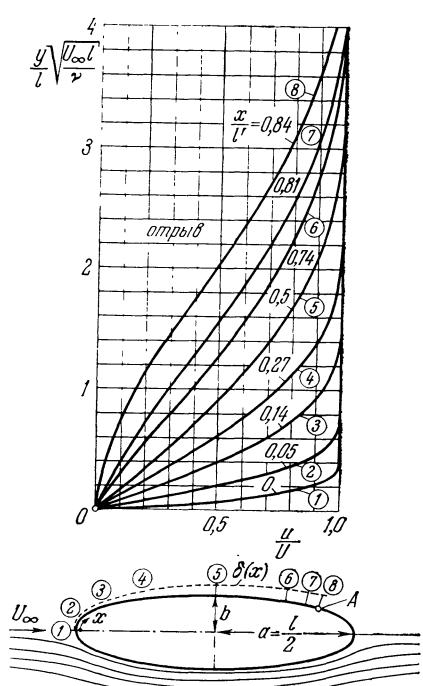


Рис. 10.11. Профили скоростей в ламинарном пограничном слое на эллиптическом цилиндре с отношением осей $a/b=4$.

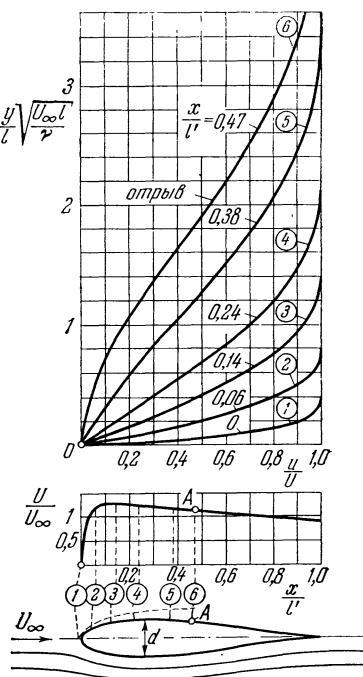


Рис. 10.12. Профили скоростей в ламинарном пограничном слое и теоретическое потенциальное распределение скоростей для профиля Жуковского J 015 с относительной толщиной $d/l = 0,15$ при угле атаки $\alpha = 0^\circ$.

а именно при $x/l' = 0,470$. Так как у профиля Жуковского задняя кромка заканчивается острием с нулевым углом, то теоретическое потенциальное распределение скоростей дает здесь для скорости значение, не равное нулю. Другие примеры расчета пограничного слоя на профилях Жуковского разной толщины и кривизны и при обтекании на разных углах атаки можно найти в работе К. Буссмана и А. Ульриха [3].

§ 5. Другие способы приближенного расчета пограничного слоя

Обзор весьма многочисленных приближенных способов расчета стационарных плоских пограничных слоев имеется в недавно вышедшей книге «Laminar boundary layers» [17].

В конце § 3 настоящей главы мы отметили, что в области повышения давления приближенный расчет пограничного слоя способом Польгаузена обладает некоторыми недостатками. Это побудило Т. Кармана и К. Б. Милликена [8] разработать другой способ приближенного расчета пограничного слоя, основанный на использовании преобразования уравнений пограничного слоя, указанного Р. Мизесом (§ 4 главы VIII). Однако практическое выполнение расчета способом Кармана — Милликена требует довольно большой работы. Приближенный способ, весьма сходный с изложенным

в § 2 настоящей главы, указан Б. Твэйтсом [25] ¹⁾. Этот способ заключается в следующем. Вместо того, чтобы исходить из некоторого полинома, аппроксимирующего распределение скоростей в пограничном слое, берется связь между формпараметрами

$$\frac{\delta_2}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{и} \quad \frac{\delta_2^2}{U} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{\delta_2^2}{v} \frac{dU}{dx} = -\kappa,$$

вытекающая из точных решений, соответствующих потенциальному течению $U(x) = u_1 x^m$. Тогда применение теоремы импульсов дает уравнение, совпадающее по форме с уравнением (10.36) и также разрешаемое посредством квадратуры. Конечный результат лишь немного отличается от соотношения (10.37), однако в качестве критерия отрыва он дает значение формпараметра $\kappa = -0,082$, лучше совпадающее с точными решениями, чем значение $\kappa = -0,1567$, получаемое по способу К. Польгаузена.

Способ Польгаузена основан на аппроксимации распределения скоростей в пограничном слое полиномом четвертой степени. В связи с этим возникла мысль улучшить способ Польгаузена путем аппроксимации распределения скоростей полиномом более высокой степени. Конечно, при этом появляются дополнительные коэффициенты, вследствие чего выбранное распределение скоростей должно удовлетворять большему количеству граничных условий на стенке и на внешней границе пограничного слоя. Такого рода способ с использованием для распределения скоростей полинома шестой степени разработали и довели до практически пригодного вида Г. Шлихтинг и А. Ульрих [18]. Результаты, даваемые этим способом для параметров пограничного слоя и для положения точки отрыва, мало чем отличаются от результатов, получаемых посредством использования полинома четвертой степени. Однако использование полинома шестой степени дает следующее преимущество: более высокие производные скорости пограничного слоя, взятые по расстоянию от стенки, могут быть определены значительно точнее, чем посредством полинома четвертой степени, что иногда весьма важно для исследования устойчивости профилей скоростей в пограничном слое (см. главы XVI и XVII). Другие случаи такого однопараметрического представления распределения скоростей рассмотрены и сравнены с точными решениями в работе В. Манглера [11]. Для аппроксимации распределения скоростей возможно применение не только полиномов, но и других выражений. Такие возможности были испробованы рядом исследователей. Так, например, А. Вальц [27] в основу своего способа приближенного расчета положил однопараметрическое семейство профилей скоростей, вычисленных Д. Р. Хартри (§ 1 главы IX), и аппроксимировал их посредством степенных выражений с дробными показателями степени. А. Бетц [1] предложил аппроксимировать эти профили посредством простого ряда. А. М. О. Смит предложил приближенный способ, основанный на аппроксимации отдельных участков распределения скоростей внешнего течения функциями вида $U(x) = u_1 x^m$ и на последующем составлении решения из подобных решений, соответствующих взятым участкам (см. гл. IX). По простоте и точности этот способ не уступает способам А. Вальца и Б. Твэйтса.

Рассмотренные выше способы приближенного расчета пограничного слоя имеют ту общую особенность, что все они основаны на замене дифференциальных уравнений пограничного слоя уравнением импульсов, т. е. интегральным соотношением, удовлетворяющим уравнению движения только в среднем. Кроме того, во всех этих способах удовлетворяются определенные условия для профиля скоростей на стенке (контурные связи) и на внешнем крае пограничного слоя.

¹⁾ Аналогичный способ значительно раньше был предложен в СССР Н. Е. Кошиным и Л. Г. Лойцянским (ДАН СССР XXXVI, 9 (1942)). — Прим. перев.

Возникает мысль, нельзя ли существенно улучшить все такого рода способы приближенного расчета, если наряду с уравнением импульсов использовать еще одно физически существенное условие, также представляющее собой некоторое интегральное соотношение, удовлетворяющее уравнению движения только в среднем по толщине пограничного слоя. Такое новое интегральное соотношение дает теорема энергии в виде уравнения (8.36). Однако если, кроме условий на стенке и на внешнем крае пограничного слоя, необходимо удовлетворить также одновременно и уравнению импульсов, и уравнению энергии, то в уравнение профиля скоростей следует ввести два свободных параметра. Первая попытка создания такого двухпараметрического способа была сделана В. Г. Л. Саттоном [22], правда, только для продольного обтекания пластины. После того, как вопрос о возможности создания двухпараметрического способа был подробно рассмотрен В. Манглером [10], К. Вигхардтом [29] также разработал такой способ и испробовал его на отдельных примерах. В качестве свободного параметра К. Вигхардт взял, во-первых, ту же величину

$$\kappa = \frac{U' \delta_2^2}{v},$$

которая используется в способе Польгаузена — Хольштейна, и, во-вторых, величину

$$\frac{\delta_2}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0,$$

представляющую собой не что иное, как безразмерный угловой коэффициент профиля скоростей около самой стенки. Для аппроксимации профиля скоростей был взят полином одиннадцатой степени. Численное интегрирование двух совместных дифференциальных уравнений, определяющих оба свободных параметра, конечно, требует значительно большего времени, чем интегрирование одного уравнения при однопараметрическом способе. В связи с этим было предложено производить расчет пограничного слоя до точки минимума давления однопараметрическим способом, а дальше — двухпараметрическим способом. Сравнение расчетов, выполненных К. Вигхардтом для отдельных примеров, с точными решениями показало, что новый способ дает хорошие результаты вплоть до точки отрыва.

А. Вальц [27] упростил способ Вигхардта, придав ему опять однопараметрическую форму. При выполнении одновременно и уравнения импульсов, и уравнения энергии этого удалось достичь путем отказа от первой контурной связи, выполнение которой во всех предыдущих способах считалось весьма существенным. Расчеты, проведенные для ряда примеров, показали, что выполнение уравнения энергии, по-видимому, важнее, чем соблюдение первой контурной связи.

Иного рода приближенный способ разработали Н. А. В. Пирси и Дж. Г. Престон [13], правда, только для расчета пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине. В этом способе для распределения скоростей берется сначала грубое приближение, а затем выполняется ряд последовательных квадратур. Получаемые приближения быстро сходятся к точному решению. Как показал Г. Шу [20], способ Пирси и Престона применим также к температурным пограничным слоям. Впоследствии это было подтверждено работой И. Тани [23].

В недавнее время М. Р. Хэд [6], следуя пути, указанному Вигхардтом, опубликовал другой двухпараметрический способ, также основанный на одновременном выполнении уравнения импульсов и уравнения энергии и, кроме того, условий на стенке и на внешней границе пограничного слоя. Этот способ, применимый также к пограничным слоям с произвольно расположенным отсасыванием, отличается от ранее рассмотренных способов

выбором двухпараметрического семейства профилей скоростей. А именно, эти профили аппроксимируются не аналитически каким-либо полиномом, а численно рассчитываются в каждой точке. Этим достигается значительно большая свобода выбора профилей скоростей, что дает возможность с большой точностью аппроксимировать эти профили и при отсасывании, и при сдувании пограничного слоя. Сравнение примерных расчетов, выполненных по способу М. Р. Хэда, с точными решениями показывает очень хорошее совпадение получаемых результатов.

§ 6. Ламинарное течение с возрастанием давления

В практических задачах важную роль играют движения жидкости с возрастанием давления в направлении течения, т. е. замедленные течения. При существовании таких течений всегда желательно, чтобы не возникал отрыв потока от стенки, так как иначе неизбежна большая потеря энергии. Известным примером замедленного течения является течение над второй половиной верхней, т. е. подсасывающей, стороны крылового профиля. На этой стороне давление на некотором расстоянии от носика достигает минимума, а затем, по мере продвижения к концу профиля, начинает возрастать, вследствие чего возникает опасность отрыва. Другим примером может служить течение в расширяющемся канале (диффузоре), используемое для преобразования кинетической энергии в энергию давления. Если угол расширения канала слишком велик, то и здесь возникает опасность отрыва.

Покажем на ряде примеров, что ламинарное течение в состоянии преодолеть без отрыва только очень небольшое возрастание давления. Между тем в практических условиях возрастание давления в направлении течения часто бывает более или менее значительным, но отрыва тем не менее не происходит. Объясняется это тем, что в практических условиях течения, как правило, бывают турбулентными, а турбулентные течения, как мы увидим ниже, в состоянии преодолевать без отрыва значительно более высокое возрастание давления, чем ламинарные течения. Наиболее известным примером такой разницы между ламинарным и турбулентным течениями в отношении их способности преодолевать возрастание давления может служить обтекание круглого цилиндра и шара: как только оно из ламинарного превращается в турбулентное, точка отрыва перемещается вниз по течению на довольно большое расстояние. Так как возрастание давления в направлении течения, кроме того, способствует переходу ламинарного течения в турбулентное, то в практических условиях течения с возрастанием давления почти всегда бывают турбулентными. Тем не менее целесообразно выяснить некоторые основные условия, предотвращающие отрыв пограничного слоя, именно на примере ламинарного течения, прежде всего потому, что явления ламинарного течения легче доступны для аналитического исследования, чем явления турбулентного течения.

Для предотвращения отрыва существуют разные возможности. Наиболее простая из них состоит в создании такого возрастания давления вдоль обтекаемой стенки, которое исключало бы возникновение отрыва. Несколько ниже мы найдем оценку для максимально допустимого повышения давления. Другую возможность дает искусственное воздействие на течение в пограничном слое, например, путем отсасывания слоя внутрь обтекаемой стенки, путем ускорения течения пограничного слоя посредством вдувания в него быстро движущейся струи жидкости или путем установки небольшого добавочного крыла, видоизменяющего течение пограничного слоя в опасном месте так, чтобы исключить возможность отрыва. Обо всех этих способах подробно будет сказано в главе XIV.

Определим максимально допустимое возрастание давления, при котором еще не наступает отрыв пограничного слоя, способом, указанным Л. Прандтлем [15]. Пусть пограничный слой около крылового профиля (рис. 10.13) развивается под воздействием заданного градиента давления потенциального течения. Применив способ Кармана — Польгаузена (§ 2 настоящей главы), доведем расчет этого пограничного слоя до точки O , лишь немного не доходящей до точки отрыва, и потребуем, чтобы, начиная от сюда, давление изменилось вниз по течению так, чтобы форма профиля скоростей в пограничном слое больше не изменялась. Иными словами, потребуем, чтобы, начиная от точки O , формпараметр Λ оставался постоянным. Так как точке отрыва соответствует значение формпараметра $\Lambda = -12$, то в качестве только что указанного постоянного значения формпараметра Λ

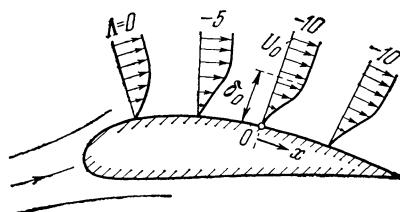


Рис. 10.13. Развитие пограничного слоя с предупреждением ламинарного отрыва.

выберем $\Lambda = -10$. Этому значению Λ соответствуют, согласно таблице 10.2, значения второго формпараметра κ и функции $F(\kappa)$, равные $\kappa = -0,1369$, $F(\kappa) = 1,523$. Следовательно, для предупреждения отрыва скорость потенциального течения $U(x)$ и толщина потери импульса $\delta_2(x)$ должны быть связаны между собой, в соответствии с равенствами (10.28) и (10.29), соотношением

$$\frac{\delta_2^2}{v} = Z = \frac{0,1369}{-U'(x)}.$$

Отсюда, взяв производную от Z по x , мы получим

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{0,1369 U''}{U'^2},$$

или

$$U \frac{dZ}{dx} = 0,1369 \frac{UU''}{U'^2} = 0,1369 \sigma, \quad (10.42)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$\sigma = \frac{UU''}{U'^2}. \quad (10.43)$$

С другой стороны, дальнейшее развитие пограничного слоя при $x > 0$ определяется уравнением импульсов (10.36), которое после подстановки в него вместо $F(\kappa)$ его найденного выше численного значения, соответствующего формпараметру $\Lambda = -10$, принимает вид

$$U \frac{dZ}{dx} = F(\kappa) = 1,523. \quad (10.44)$$

Из уравнений (10.42) и (10.44) вытекает, что формпараметр сохраняет свое постоянное значение $\Lambda = -10$ при условии, если

$$0,1369\sigma = 1,523,$$

откуда

$$\sigma = \frac{UU''}{U'^2} = 11,13 \approx 11. \quad (10.45)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } \sigma > 11 & \text{отрыва не возникает,} \\ \text{при } \sigma < 11 & \text{отрыв возникает.} \end{array} \right\} \quad (10.45a)$$

Таким образом, пограничный слой в состоянии преодолеть возрастание давления, если $\sigma > 11$; если же $\sigma < 11$, то возникает отрыв. При $\sigma = 11$, когда Λ сохраняет постоянное значение $\Lambda = -10$, пограничный слой находится в состоянии, близком к отрыву.

Полученный результат позволяет сразу сделать качественный вывод о характере потенциального течения, исключающем возможность отрыва. А именно, в соответствии с равенством (10.45) необходимым условием для предупреждения отрыва в замедленном течении ($U' < 0$) является неравенство

$$U'' > 0,$$

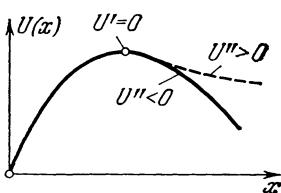


Рис. 10.14. Теоретическое потенциальное распределение скоростей при ламинарном пограничном слое с отрывом и без отрыва.

т. е. модуль отрицательного градиента скорости должен уменьшаться в направлении течения (рис. 10.14). Следовательно, если кривая $U(x)$ после прохождения через максимум загибается вниз ($U'' < 0$), то в любом случае наступает отрыв, если же она загибается вверх ($U'' > 0$), то возможно, что отрыв не возникнет. Даже в предельном случае, когда $U'' = 0$, т. е. когда скорость уменьшается с увеличением текущей длины x по линейному закону, обязательно возникает отрыв. Это заключение полностью совпадает с результатом, полученным Л. Хоуартом (§ 4 главы IX) путем решения дифференциальных уравнений пограничного слоя для случая, когда скорость потенциального течения уменьшается по линейному закону. Достаточное условие для предотвращения отрыва пограничного слоя выражается неравенством

$$U'' > 11 \frac{U'^2}{U}.$$

Вычислим теперь, какое потенциальное течение и какое нарастание толщины пограничного слоя соответствуют предельному случаю $\sigma = 11$, при котором пограничный слой

всегда находится в состоянии, близком к отрыву. Из соотношения (10.45) мы имеем

$$\frac{U''}{U'} = 11 \frac{U'}{U},$$

или, после интегрирования,

$$\ln U' = 11 \ln U + \ln (-C_1),$$

или

$$\frac{U'}{U^{11}} = -C_1,$$

где C_1' есть постоянная интегрирования. Повторив интегрирование, мы получим

$$\frac{1}{10} U^{-10} = C_1' x + C_2. \quad (10.46)$$

Пусть при $x = 0$ скорость потенциального течения равна $U(x) = U_0$; в таком случае

$$C_2 = \frac{1}{10} U_0^{-10}.$$

Положив, далее, $C_1' U_0^{10} = C_1$, из уравнения (10.46) найдем

$$U(x) = \frac{U_0}{(1 + 10C_1 x)^{1/10}}. \quad (10.47)$$

Это и есть то предельное распределение скоростей, при котором пограничный слой еще может преодолеть возрастание давления без отрыва. Постоянную C_1 можно выразить через толщину пограничного слоя δ_0 в начальной точке $x = 0$. В самом деле, мы имеем

$$\Lambda = U' \frac{\delta^2}{v} = -10,$$

откуда

$$\delta = \sqrt{\frac{10v}{-U'}}.$$

Вычислив значение U' из равенства (10.47), мы получим

$$U' = -\frac{C_1 U_0}{(1 + 10C_1 x)^{11/10}},$$

следовательно,

$$\delta = \sqrt{\frac{10v}{C_1 U_0}} (1 + 10C_1 x)^{11/20}.$$

Наконец, из условия, что $\delta = \delta_0$ при $x = 0$, мы найдем

$$C_1 = 10 \frac{v}{U_0 \delta_0^2}.$$

Таким образом, пограничный слой будет находиться в состоянии, совсем близком к отрыву, если скорость потенциального течения и толщина пограничного слоя будут равны

$$U(x) = U_0 \left(1 + 100 \frac{vx}{U_0 \delta_0^2} \right)^{-0,1}, \quad (10.48)$$

$$\delta(x) = \delta_0 \left(1 + 100 \frac{vx}{U_0 \delta_0^2} \right)^{0,55}. \quad (10.49)$$

Из полученного результата следует, что ламинарный пограничный слой в состоянии преодолеть без отрыва только очень небольшое замедление течения, порядок величины которого составляет приблизительно $x^{-0,1}$, т. е. практически скорость должна лишь немного отличаться от постоянной величины. Толщина пограничного слоя $\delta \sim x^{0,55}$, следовательно, ее возрастание происходит лишь немного быстрее, чем при продольном обтекании плоской пластины, при котором, как мы знаем из § 5 главы VII, $\delta \sim x^{0,5}$.

В качестве другого примера замедленного течения рассмотрим течение в расширяющемся канале с плоскими стенками (рис. 10.15). Такое течение является противоположностью течения в суживающемся канале, исследованного в § 2 главы IX. Будем обозначать радиальное расстояние от источника, находящегося в точке O , через x . Пусть стена

начинается при $x = a$, и пусть здесь скорость потенциального течения равна U_0 . Скорость потенциального течения на расстоянии x от источника равна

$$U(x) = U_0 \frac{a}{x}, \quad (10.50)$$

следовательно,

$$U'(x) = -U_0 \frac{a}{x^2}, \quad U''(x) = 2U_0 \frac{a}{x^3}.$$

Составив безразмерное число σ , определяющее в соответствии с формулой (10.45) отрыв, мы увидим, что оно равно $\sigma = 2$; поэтому согласно критерию (10.45а) в данном случае

обязательно должен произойти отрыв. Таким образом, при течении жидкости в расширяющемся канале с плоскими стенками отрыв возникает при любом угле раствора канала. Этот пример особенно наглядно показывает незначительную способность ламинарного течения преодолевать возрастание давления без отрыва. Как показали расчеты К. Польгауэна [14], точка отрыва лежит при $x_{\text{отр}}/a = 1,21$ и таким образом, не зависит от угла раствора канала.

Полученный результат справедлив, однако, только до тех пор, пока вытесняющее действие пограничных слоев на стенках канала пренебрежимо мало. Между тем при очень малых углах раствора этого не происходит. В этом случае пограничные слои, преодолев определенный начальный участок (см. § 9 главы IX), заполняют все поперечное сечение канала, в результате чего асимптотически

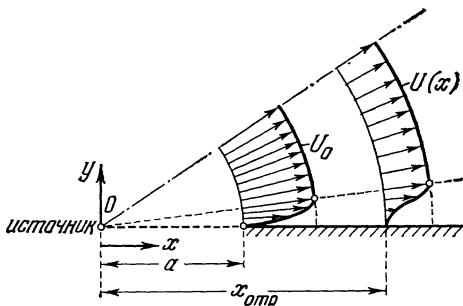


Рис. 10.15. Ламинарный пограничный слой в расширяющемся канале. Отрыв наступает при $x_{\text{отр}}/a = 1,21$ независимо от угла раствора канала.

развивается течение в канале, рассмотренное в п. 12 § 2 главы V. Если угол раствора канала не превышает критического значения, зависящего от числа Рейнольдса, отрыв не возникает.

Литература к главе X

1. B e t z A., Reihendarstellung der Geschwindigkeitsverteilung in laminaren Grenzschichten. Arch. d. Math. 2, 220—222 (1950).
2. B r a d s h a w P., Approximate solution of the «inverse problem» of boundary layer theory. J. Roy. Aero. Soc. 64, 225—226 (1960).
3. B u s s m a n n K., U l r i c h A., Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes. Предварительное сообщение для Jb. dt. Luftfahrtforschung 1943 в Tech. Berichte 10, вып. 9 (1943); NACA TM 1185 (1947).
4. G l a u e r t M. B., L i g h t h i l l M. J., The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. Proc. Roy. Soc. A 230, 188—203 (1955).
5. G ö r t l e r H., Zur Approximation stationärer laminarer Grenzschichtströmungen mit Hilfe der abgebrochenen Blasiuschen Reihe. Arch. d. Math. 1, 235—240 (1949).
6. H e a d M. R., An approximate method of calculating the laminar boundary layer in twodimensional incompressible flow. ARC RM 3123 (1957).
7. H o l s t e i n H., B o h l e n T., Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsverfahren von K. Pohlhausen genügen. Lilienthal-Bericht S 10, 5—16 (1940).
8. v. K á r m á n Th., M i l l i k a n C. B., On the theory of laminar boundary layers involving separation. NACA Rep. 504 (1934); см. также Collect. Works III, 81—119.
9. v. K á r m á n Th., Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233—252 (1921); NACA TM 1092 (1946); см. также Collect. Works II, 70—97.
10. M a n g l e r W., Ein Verfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 18—20 (1941).
11. M a n g l e r W., Das Impulsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM 24, 251—256 (1944).
12. M e k s y D., Integration of the boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. A 237, 543—559 (1956).
13. P i e r c y N. A. V., P r e s t o n J. H., A simple solution of the flat plate problem of skin friction and heat transfer. Phil. Mag. (7) 21, 995—1005 (1936).
14. P o h l h a u s e n K., Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM 1, 252—268 (1921).

15. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids. В книге: D u r a n d W. F., Aerodynamic Theory III, 34—208 (1935). [Имеется русский перевод: Д ю р э н д В.Ф., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, 1939.]
16. Gretsch J., Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Anströmung. Luftfahrtforschung 18, 397—402 (1941).
17. Rosenhead L. (редактор), Laminar boundary layers. Clarendon Press, Oxford 1963.
18. Schlichting H., Ulrich A., Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 8—35 (1942); см. также Bericht S 10 der Lilienthalgesellschaft, 75—135 (1940).
- 18a. Schönauber W., Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Grenzschichtgleichung für stationäre, laminare, inkompressible Strömung, Ing.-Arch. 33, 173—189 (1964).
19. Schubauer G. B., Airflow in a separating laminar boundary layer. NACA Rep. 527 (1935).
20. Schuh H., Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an der ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und das Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen. ZAMM 25/27, 54—60 (1947) и Österr. Ing.-Arch. 2, 346 (1948); NACA TM 1275.
21. Smith A. M. O., Rapid laminar boundary-layer calculations by piecewise application of similar solutions. JAS 23, 901—912 (1956).
22. Suttorp W. C. L., An approximate solution of the boundary layer equations for a flat plate. Phil. Mag. 23, 1146—1152 (1937).
23. Tani I., On the approximate solution of the laminar boundary layer equations. JAS 21, 487—495 (1954).
24. Tani I., On the solution of the laminar boundary layer equations. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», 193—200, Braunschweig 1955.
- 24a. Terrill R. M., Laminar boundary layer flow near separation with and without suction. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 253, 55—100 (1960).
25. Thwaites B., Approximate calculation of the laminar boundary layer. Aero. Quart. 1, 245—280 (1949).
26. Walz A., Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht. Lilienthal-Bericht 141, 8—12 (1941).
27. Walz A., Anwendung des Energiesatzes von Wieghardt auf einparametrische Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 243—248 (1948).
28. Watson E. J., Preston J. H., An approximate solution of two flat plate boundary layer problems. ARC RM 2537 (1951).
29. Wieghardt K., Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 231—242 (1948).
30. Wieghardt K., On a simple method for calculating laminar boundary layers. Aero. Quart. 5, 25—38 (1954).
31. Abbott D. E., Bethel H. E., Application of the Galerkin-Kantorovich-Dorodnitsyn method of integral relations to the solutions of steady laminar boundary layer. Ing.-Arch. 37, 110—124 (1968).

Г л а в а XI

Осесимметричные и трехмерные пограничные слои

В двух предыдущих главах, излагая способы расчета пограничного слоя, мы ограничились рассмотрением двумерного случая, в котором составляющие скорости зависят только от двух пространственных координат, следовательно, в направлении третьей координатной оси никакой скорости нет. Способы расчета общего случая пространственного пограничного слоя, когда составляющие скорости имеются во всех трех координатных направлениях и при этом зависят от всех трех координат, до настоящего времени почти не разработаны вследствие больших математических трудностей. Некоторые сведения о первых попытках такого расчета будут даны в конце настоящей главы.

Что касается расчета осесимметричного пограничного слоя, то он лишь немногим сложнее, чем расчет двумерного пограничного слоя. Осесимметричный пограничный слой образуется, например, при осевом обтекании тела вращения или при истечении осесимметричной струи. В главе V, посвященной точным решениям уравнений Навье — Стокса, мы уже рассмотрели осесимметричные пограничные слои, образующиеся при вращении в жидкости диска и при пространственном течении в окрестности критической точки.

В настоящей главе мы разберем некоторые другие примеры стационарного осесимметричного пограничного слоя, допускающие исследование на основе дифференциальных уравнений. Кроме того, мы покажем, как можно распространить на осесимметричный случай приближенные способы расчета пограничного слоя, рассмотренные в предыдущей главе. Наконец, в конце главы мы коротко остановимся на расчете трехмерных пограничных слоев. Примеры нестационарного осесимметричного пограничного слоя мы рассмотрим в главе XV вместе с примерами нестационарного двумерного пограничного слоя.

§ 1. Точные решения для осесимметричных пограничных слоев

1. Вращательное движение жидкости над неподвижным основанием. В главе V мы рассмотрели течение, которое возникает вблизи диска, вращающегося в покоящейся жидкости. С этим течением сходно течение, возникающее вблизи неподвижной плоской стенки в том случае, когда на большом расстоянии от стенки происходит вращение жидкости с постоянной угловой скоростью (рис. 11.1). Такой случай был исследован У. Т. Бёдевадтом [8]. При вращении диска в покоящейся жидкости (см. § 2 главы V) главный эффект заключается в том, что в тонком вовлеченном во вращение слое вблизи диска жидкость отбрасывается наружу вследствие действия центробежных сил. Взамен этой жидкости, оттекающей наружу в радиальном направлении, к диску притекает жидкость в осевом направлении. Аналогичный эффект, но с переменой направления движения жидкости возникает в случае вращения жидкости над неподвижным основанием.

Теперь для частиц жидкости, находящихся на большом расстоянии от стенки, центробежная сила и радиальный градиент давления взаимно уравновешиваются. Для частиц же жидкости, находящихся вблизи стенки, окружная скорость вследствие торможения понижена, поэтому здесь центробежная сила значительно уменьшена, между тем как направленный внутрь радиальный градиент давления остается таким же, как и на большом расстоянии от стенки. В результате вблизи стенки возникает направленное внутрь радиальное течение, которое в свою очередь вызывает, вследствие условия неразрывности, восходящее течение в осевом направлении (рис. 11.1). Такое течение, возникающее в пограничном слое и имеющее совсем другое направление, чем внешнее течение, будем называть в дальнейшем *вторичным течением*. Впервые вторичное течение было исследовано Э. Грушвитцем [37] в криволинейном канале.

Вторичное течение, возникающее при вращении жидкости над неподвижным основанием, легко наблюдать в чашке чая. Путем сильного помешивания ложкой чай приводится во вращательное движение, после чего ложка вынимается из чашки и жидкость предоставляется самой себе. Через короткое время вблизи дна чашки возникает радиальное движение, направленное внутрь и ясно видимое благодаря чаинкам, собирающимся в середине дна чашки.

Для аналитического исследования рассматриваемой задачи воспользуемся цилиндрическими координатами r , ϕ , z (рис. 11.1). Плоскость $z = 0$ совместим с неподвижной стенкой. Будем считать, что на большом расстоянии от стенки жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью ω . Составляющие скорости в радиальном, окружном и осевом направлениях обозначим соответственно через u , v , w . Вследствие осевой симметрии все производные по ϕ в уравнениях Навье — Стокса выпадают. Решение, которое мы сейчас получим, будет точным решением уравнений Навье — Стокса, так как те члены этих уравнений, которые исчезли бы при переходе к уравнениям пограничного слоя вследствие упрощающих допущений, выпадают здесь сами собой. Совершенно такое же положение мы имели и при решении задачи вращения диска в покоящейся жидкости.

Уравнения Навье — Стокса (3.36) и уравнение неразрывности принимают в условиях настоящей задачи следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = v \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (11.1d)$$

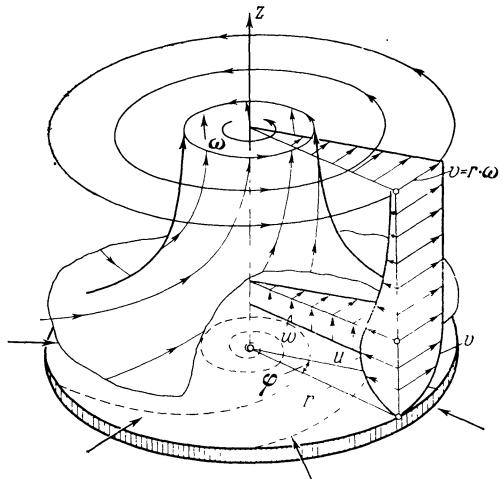


Рис. 11.1. Вращательное движение жидкости над неподвижным основанием; u , v , w — составляющие скорости соответственно в радиальном, окружном и осевом направлениях. Вблизи диска окружная скорость вследствие трения заторможена. В результате возникает вторичное течение, направленное радиально внутрь диска.

Граничными условиями будут

$$\left. \begin{array}{l} u=0, \quad v=0, \quad w=0 \quad \text{при } z=0; \\ u=0, \quad v=r\omega \end{array} \right\} \quad \text{при } z=\infty. \quad (11.2)$$

Так же, как и при исследовании вращения диска в покоящейся жидкости (§ 2 главы V), введем вместо z безразмерную координату

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{v}}, \quad (11.3)$$

а для составляющих скорости возьмем следующие выражения:

$$u = r\omega F(\zeta), \quad v = r\omega G(\zeta), \quad w = \sqrt{v\omega} H(\zeta). \quad (11.4)$$

На большом расстоянии от стенки течение происходит без трения, поэтому для радиального градиента давления мы имеем здесь выражение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V^2}{r}$$

или, если учесть, что $V = r\omega$,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2. \quad (11.5)$$

Решая задачу в рамках теории пограничного слоя, примем, что градиент давления (11.5) существует и в слое жидкости вблизи стенки, где проявляет

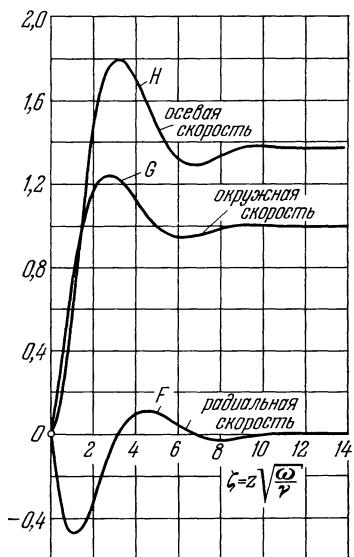


Рис. 11.2. Распределение скоростей в пограничном слое, образующемся при вращении жидкости вблизи неподвижного основания [формулы (11.4) и таблица 11.1]. По Бёдевадту [8].

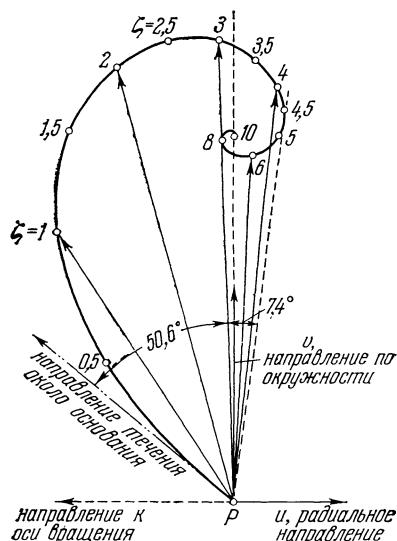


Рис. 11.3. Векторная диаграмма горизонтальной составляющей скорости в пограничном слое, образующемся при вращении жидкости вблизи неподвижного основания. По Бёдевадту

свое действие трение. Подставив выражения (11.4) и (11.5) в уравнения (11.1а, б, г), мы получим совершенно так же, как и в § 2 главы V, следующую

Таблица 11.1. Значения функций F , G , H , определяющих распределение скоростей при вращательном движении жидкости над неподвижным основанием.
По Дж. Э. Нидалу [11]¹⁾

ζ	F	G	H	ζ	F	G	H
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	7,0	-0,0084	0,9530	1,2585
0,5	-0,3487	0,3834	0,1944	7,5	-0,0223	0,9693	1,2751
1,0	-0,4788	0,7354	0,6241	8,0	-0,0268	0,9857	1,3004
1,5	-0,4496	1,0134	1,0987	8,5	-0,0243	0,9991	1,3264
2,0	-0,3287	1,1924	1,4929	9,0	-0,0179	1,0078	1,3477
2,5	-0,1762	1,2721	1,7459	9,5	-0,0102	1,0119	1,3617
3,0	-0,0361	1,2714	1,8496	10,0	-0,0033	1,0121	1,3683
3,5	0,0663	1,2182	1,8308	10,5	0,0018	1,0099	1,3689
4,0	0,1227	1,1413	1,7325	11,0	0,0047	1,0065	1,3654
4,5	0,1371	1,0640	1,5995	11,5	0,0057	1,0031	1,3601
5,0	0,1210	1,0016	1,4685	12,0	0,0052	1,0003	1,3546
5,5	0,0878	0,9611	1,3632	12,5	0,0038	0,9984	1,3500
6,0	0,0499	0,9427	1,2944	∞	0,0000	1,0000	1,3494
6,5	0,0162	0,9407	1,2620				

1) По личному сообщению К. Миссанса.

систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + HF' - F'' + 1 &= 0, \\ 2GF + HG' - G'' &= 0, \\ 2F + H' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} F &= 0, \quad G = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } \zeta = 0; \\ F &= 0, \quad G = 1 \quad \text{при } \zeta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Что касается градиента давления в направлении z , то, если подходить к решению задачи с точки зрения теории пограничного слоя, его следует принять равным нулю. Но можно также определить градиент давления из уравнения (11.1в) после вычисления составляющих скорости u и v ; тогда мы получим точное решение уравнений Навье — Стокса.

Систему уравнений (11.6) при граничных условиях (11.7) У. Бёдевандт [8] решил путем представления функций F , G и H в виде степенных рядов в окрестности точки $\zeta = 0$ и в виде асимптотического разложения для $\zeta = \infty$. Это решение потребовало довольно кропотливых вычислений. Впоследствии оно было улучшено Дж. Э. Нидалом в неопубликованной работе. Найденные им значения функций F , G и H даны в таблице 11.1 и графически изображены на рис. 11.2. Кроме того, на рис. 11.3 дана полярная диаграмма, изображающая изменение результирующей горизонтальной скорости, представляющей собой геометрическую сумму составляющих u и v . Угол между результирующей горизонтальной скоростью и окружным направлением зависит только от высоты над неподвижным основанием. Векторы на рис. 11.3 показывают своим направлением значение этого угла для разных высот ζ . Мы видим, что отклонение результирующей горизонтальной скорости от окружного направления движения жидкости на большой высоте больше всего у стенки; оно составляет здесь $50,6^\circ$ и направлено внутрь.

На высоте $\zeta = 4,63$ получается наибольшее отклонение наружу, равное $7,4^\circ$. Следовательно, наибольшая разность направлений результирующей горизонтальной скорости около стенки и на высоте над нею достигает 58° . Примечательно также, что осевая составляющая скорости w зависит только от высоты ζ , но не зависит от расстояния r от оси вращения, причем всюду $w > 0$, т. е. везде происходит восходящее движение. Как уже упоминалось, это восходящее движение возникает потому, что вблизи стенки течение, вследствие выпадения из игры центробежных сил, направлено по радиусам внутрь. На большой высоте восходящее течение, как показывает рис. 11.2, затухает, так как там происходит радиальное движение жидкости наружу. Однако в целом в радиальном направлении преобладает движение жидкости внутрь, т. е. к оси вращения. Полное количество жидкости, протекающей по направлению к оси вращения через поверхность цилиндра радиуса R , равно

$$Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u dz = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} \int_0^{\infty} F(\zeta) d\zeta = -\pi R^2 \sqrt{\omega v} H(\infty).$$

Подставив сюда численное значение $H(\infty)$ из таблицы 11.1, мы получим

$$Q = -1,380\pi R^2 \sqrt{\omega v}. \quad (11.8)$$

Ровно такое же количество жидкости поднимается вверх в осевом направлении. Наибольшее значение скорость восходящего движения имеет на высоте $\zeta = 3,1$, где она равна

$$w = 1,80 \sqrt{v\omega}.$$

Примечательно также, что в рассматриваемом случае слой жидкости, на который распространяется трение, значительно толще, чем при вращении диска в покоящейся жидкости. Примем за толщину пограничного слоя δ ту высоту, на которой отклонение окружной скорости от скорости внешнего течения составляет 2%. Тогда для вращательного движения жидкости над неподвижным основанием мы найдем, что

$$\delta = 8 \sqrt{\frac{v}{\omega}},$$

в то время как для вращения диска в покоящейся жидкости мы имели

$$\delta = 4 \sqrt{\frac{v}{\omega}}.$$

С только что рассмотренным течением в известной мере родственно течение, вызываемое вихревым источником, находящимся между двумя параллельными стенками. Такое течение было исследовано Г. Фогельпольем [105]. Для очень малых чисел Рейнольдса получается распределение скоростей, почти совпадающее с параболическим распределением при течении Хагена—Пузейля. С увеличением числа Рейнольдса и при одновременном развитии пограничного слоя профиль скоростей все более и более приближается к прямоугольной форме. Аналогичное турбулентное течение было рассмотрено К. Пфляйдерером [71]. См. в связи с этим также работу Э. Беккера [5].

Аналогичные явления наблюдаются в закрученном сходящемся потоке, возникающем при истечении через коническую воронку (рис. 11.4). Потенциальное течение вызывается стоком с расходом Q в вершине конуса и потенциальным вихрем с вихревой напряженностью Γ вокруг оси конуса. Для решения дифференциальных уравнений пограничного слоя такого течения К. Гарбш [28] применил метод итераций, который очень быстро привел к

хорошему приближению. Частный случай такого течения (при $\Gamma = 0$, чистый сток) был исследован А. М. Бинни и Д. П. Хариссоном [6]. Другой частный случай (при $Q = 0$, чистый вихрь) был рассмотрен Дж. Тэйлором [66] и Дж. К. Куком [16]. В обоих случаях для расчета пограничного слоя был использован приближенный способ такого же типа, как изложенный в главе X. Во втором случае ($Q = 0$) на стенке воронки образуется пограничный слой, в котором имеется, кроме составляющих скорости u и v , также составляющая w в направлении образующей конуса. Ядро же течения, в котором трение отсутствует, будучи чистым вихревым течением, имеет только окружную скорость v . Указанное вторичное течение в пограничном слое, проходящее со скоростью w , переносит жидкость к вершине конуса. См. в связи с этим также работу Г. Э. Вебера [106].

2. Круглая струя. В § 7 главы IX мы исследовали движение плоской ламинарной струи. Рассмотрим теперь круглую струю, т. е. струю, вытекающую из небольшого круглого отверстия и затем смещающуюся с окружающей покоящейся жидкостью. Решение этой задачи изложим по Г. Шлихтингу [81]. Движение круглой струи так же, как и плоской, в действительности почти всегда турбулентное. Тем не менее мы довольно подробно остановимся на ламинарной круглой струе, поскольку для нее получается такое же дифференциальное уравнение, как и для турбулентной, к которой мы вернемся в главе XXIV.

Давление в круглой струе так же, как и в плоской, можно принять постоянным. Возьмем систему координат с началом в центре отверстия и осью x , совпадающей с осью струи. Радиальное расстояние в струе будем измерять координатой y . Составляющие скорости в осевом и радиальном направлениях пусть будут соответственно u и v . Вследствие постоянства давления поток импульса в направлении x по-прежнему постоянен и равен

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 y \, dy = \text{const.} \quad (11.9)$$

Уравнения движения (3.36) и уравнение неразрывности (3.37) после упрощений, используемых в теории пограничного слоя, принимают во взятой системе координат следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (11.10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0, \quad (11.10b)$$

причем граничными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} v &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \\ u &= 0 \quad \text{при } y = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

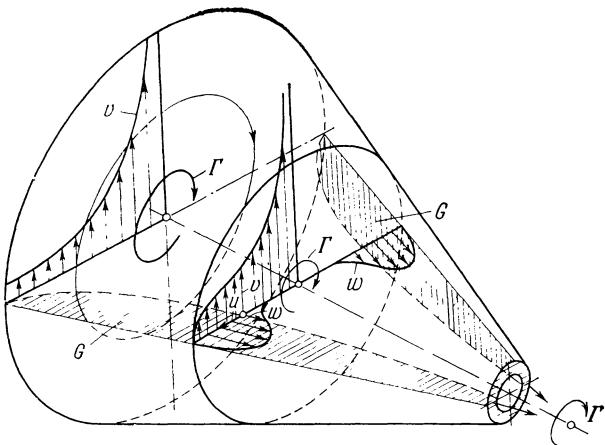


Рис. 11.4. Закрученное течение в конической воронке. G — пограничный слой на стенке воронки с вторичным течением, направленным к вершине конуса. По Дж. И. Тэйлору [66].

Профили скоростей $u(x, y)$ по-прежнему можно считать аффинными между собой. Пусть ширина струи пропорциональна x^n . Примем, что функция тока

$$\psi \sim x^p F(\eta),$$

где $\eta = y/x^n$.

Для определения показателей степени p и n опять воспользуемся, во-первых, условием (11.9) о независимости импульса от x и, во-вторых, предположением, что те инерционные члены и члены, зависящие от вязкости, которые входят в уравнение (11.10а), имеют одинаковый порядок величины. Мы имеем

$$u \sim x^{p-2n}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim x^{p-2n-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim x^{p-3n}, \quad \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim x^{p-4n};$$

следовательно, для определения p и n получаем два уравнения:

$$2p - 4n + 2n = 0, \quad 2p - 4n - 1 = p - 4n,$$

откуда

$$p = n = 1.$$

Таким образом,

$$\psi = vx F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x},$$

в соответствии с чем составляющие u и v скорости будут

$$u = \frac{v}{x} \frac{F'}{\eta}, \quad v = \frac{v}{x} \left(F' - \frac{F}{\eta} \right). \quad (11.12)$$

Подставив эти выражения в уравнение (11.10а), мы получим для определения функции тока $F(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{FF'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{FF''}{\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right),$$

проинтегрировав которое один раз найдем

$$FF' = F' - \eta F''. \quad (11.13)$$

Границными условиями будут

$$u = u_m \quad \text{и} \quad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

а это требует, чтобы было

$$F' = 0 \quad \text{и} \quad F = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Так как u есть четная функция от η , то функция F'/η должна быть также четной, а потому F' будет нечетной, а F — четной функцией от η . Если мы разложим функцию F в ряд по степеням η , то постоянный член в этом ряде будет равен нулю, так как $F(0) = 0$. Таким образом, одну постоянную интегрирования мы определили. Далее, введем новую переменную $\xi = \gamma\eta$, где γ есть постоянная. Очевидно, что если $F(\eta)$ есть решение уравнения (11.13), то решением будет также функция $F(\eta\gamma) = F(\xi)$. Но дифференциальное уравнение

$$F \frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{d\xi} - \xi \frac{d^2F}{d\xi^2}$$

с граничными условиями $F = 0, F' = 0$ при $\xi = 0$ имеет своим решением

$$F = \frac{\xi^2}{1 + \frac{\xi^2}{4}}. \quad (11.14)$$

Подставив это выражение F в равенства (11.12), мы получим

$$u = \frac{v}{x} \gamma^2 \frac{1}{\xi} \frac{dF}{d\xi} = \frac{v}{x} \frac{2\gamma^2}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2},$$

$$v = \frac{v}{x} \gamma \left(\frac{dF}{d\xi} - \frac{F}{\xi} \right) = \frac{v}{x} \gamma \frac{\xi - \frac{\xi^3}{4}}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2},$$

причем $\xi = \gamma y/x$. Остается найти постоянную γ , которая определяется заданным импульсом и одновременно является второй постоянной интегрирования. Внеся найденное значение u в формулу (11.9), мы найдем для импульса величину

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 y dy = \frac{16}{3} \pi \rho \gamma^2 v^2.$$

Введем кинематический импульс $K' = J/\rho$ и подставим значение γ , выраженное через K' , в формулы для составляющих скорости u и v ; мы будем иметь

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{K'}{vx} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2}, \quad (11.15)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K'}}{x} \frac{\xi - \frac{\xi^3}{4}}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2}, \quad (11.16)$$

причем

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \frac{\sqrt{K'}}{v} \frac{y}{x}. \quad (11.17)$$

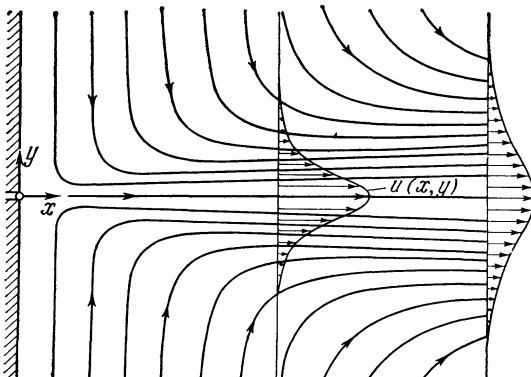


Рис. 11.5. Картина линий тока в ламинарной круглой струе.

Картина линий тока, полученная на основании формул (11.15) и (11.16), изображена

на рис. 11.5. Зависимость продольной скорости u от ξ показана на рис. 9.14 вместе с такой же зависимостью для плоской струи.

Объем жидкости, протекающей в струе в одну секунду, равен

$$Q = 2\pi \int_0^\infty uy dy.$$

Очевидно, что с удалением от отверстия расход Q вследствие бокового притекания жидкости возрастает. Вычислив интеграл, мы получим

$$Q = 8\pi vx. \quad (11.18)$$

Сравнив эту формулу с аналогичной формулой (9.62) для плоской струи, мы увидим, что количество жидкости, протекающей через определенное сечение круглой ламинарной струи, в отличие от случая плоской струи не зависит от импульса струи, т. е. не зависит от избыточного давления, под которым струя вытекает из отверстия. Струя, вытекающая под большим давлением (с большой скоростью), получается более узкой, чем струя, вытекающая под умеренным давлением (с малой скоростью). Последняя увлекает

за собой сравнительно большее количество покоящейся жидкости, и притом именно столько, что в обоих случаях при равных значениях кинематической вязкости расход Q на одном и том же расстоянии от отверстия получается одинаковым.

Для конических струйных течений с добавочной радиальной составляющей скорости в кольцеобразном источнике Г. В. Сквайр [89], [90] получил наряду с решениями уравнений пограничного слоя также решения полных уравнений Навье — Стокса, что позволило сравнить те и другие решения в отношении точности. В таких радиальных струях скорости также обратно пропорциональны расстоянию от источника. Полученные результаты можно распространить и на случай турбулентных струй, если только заменить кинематическую вязкость на кажущуюся кинематическую вязкость (см. главу XXIV). Случай, когда плоская или осесимметричная струя встречает на своем пути перпендикулярную к ней стенку и затем растекается вдоль этой стенки, рассмотрен М. Б. Глауэртом [32] как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Для сжимаемой жидкости ламинарная круглая струя рассчитана М. Кшивоблоцким [51] и Д. К. Пэком [69]. В области дозвукового течения плотность на оси струи больше, а температура меньше, чем на краях струи. Эти разности обратно пропорциональны квадрату расстояния от отверстия для истечения. Для слабо закрученной струи Г. Гёртлер [35] указал способ расчета распределения момента количества движения вниз по течению от отверстия для истечения. Этот расчет показал, что с увеличением расстояния от отверстия момент количества движения уменьшается быстрее, чем скорость на оси струи.

3. Круглая спутная струя. Система уравнений (11.10а) и (11.10б) позволяет рассчитать также круглую спутную струю, возникающую позади тела вращения, обтекаемого в осевом направлении. Расчет производится совершенно так же, как в случае плоского спутного течения, подробно рассмотренного в § 6 главы IX. Пусть U_∞ есть скорость набегающего течения, а $u(x, y)$ — скорость в спутной струе. Тогда разность

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (11.19)$$

будет *скоростью спутной струи* [см. формулу (9.43)]. Эта скорость на большом расстоянии позади тела очень мала по сравнению со скоростью U_∞ , и поэтому членами, квадратичными относительно u_1 , можно пренебречь. При таком упрощающем допущении уравнение (11.10а) после подстановки в него вместо u_1 выражения (11.19) принимает вид

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{v}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (11.20)$$

Зависимость скорости спутного течения $u_1(x, y)$ от продольной координаты x и от радиальной координаты y определим из условия, что сопротивление на больших расстояниях позади тела, вычисленное по импульсу спутной струи, не должно зависеть от координаты x , т. е. должно иметь место равенство

$$W = 2\pi\rho U_\infty \int_{y=0}^{\infty} u_1 \cdot y \cdot dy = \text{const.} \quad (11.21)$$

Это равенство удовлетворяется, если принять для u_1 выражение

$$u_1 = CU_\infty \frac{f(\eta)}{x}, \quad (11.22)$$

где

$$\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}. \quad (11.23)$$

Равенство (11.22) аналогично равенству (9.45) для плоской задачи. Подставив выражения (11.22) и (11.23) в уравнение (11.20), мы получим для определения $f(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$(\eta f')' + 2\eta^2 f' + 4\eta f = 0 \quad (11.24)$$

с граничными условиями

$$f' = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } f = 0 \text{ при } \eta = \infty.$$

Легко убедиться, что решением уравнения (11.24) будет

$$f(\eta) = e^{-\eta^2}, \quad (11.25)$$

т. е. по структуре оно такое же, как и решение (9.48) для плоской задачи. Следовательно, скорость спутного течения равна

$$u_1(x, y) = U_\infty \cdot \frac{C}{x} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{U_\infty y^2}{vx}\right).$$

Постоянную C следует определить из соотношения (11.21) для сопротивления. Для нее получается выражение

$$C = \pi d c_w \frac{\text{Re}}{32},$$

где c_w есть коэффициент сопротивления, отнесенный к лобовой площади тела вращения, а $\text{Re} = U_\infty d/v$ — число Рейнольдса для тела вращения. Таким образом, окончательно для скорости спутного течения получаем формулу

$$\frac{u_1(x, y)}{U_\infty} = \frac{\pi c_w}{32} \left(\frac{d}{x} \text{Re} \right) e^{-\eta^2}. \quad (11.26)$$

Распределение скоростей, определяемое формулой (11.26), изображено на рис. 9.11.

4. Пограничный слой на теле вращения. С практической точки зрения большую важность представляет пограничный слой на теле вращения, обтекаемом в направлении оси вращения.

Уравнения пограничного слоя для такой осесимметричной задачи были составлены Э. Болтьце [9]. Введем криволинейную систему координат (рис. 11.6), причем координату x будем измерять вдоль дуги меридиана тела вращения, начиная от критической точки, а координату y — по нормали к поверхности тела. Контур тела пусть задан зависимостью $r(x)$ радиуса сечения, перпендикулярного к оси вращения, от координаты x .

Предположим, что этот контур нигде не имеет острых выступов, следовательно, производная d^2r/dx^2 не принимает очень больших значений. Пусть, далее, толщина пограничного слоя везде значительно меньше радиуса тела вращения, т. е. $\delta \ll r$. Составляющие скорости, параллельную и перпендикулярную к стенке, обозначим соответственно через u и v , а скорость потенциального течения — через $U(x)$. Как показал Э. Болтьце, уравнения пограничного слоя в принятой системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11.27a)$$

$$\frac{\partial (ur)}{\partial x} + \frac{\partial (vr)}{\partial y} = 0, \quad (11.27b)$$

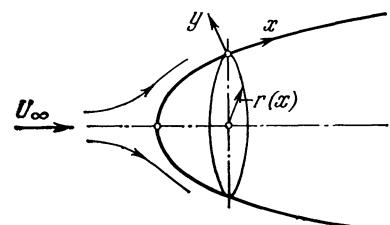


Рис. 11.6. Система координат для пограничного слоя на теле вращения.

причем граничными условиями являются

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = U(x, t) \quad \text{при } y = \infty. \quad (11.28)$$

Мы видим, что уравнение движения для направления x остается таким же, как и для плоской задачи. Оценка порядка величин членов, входящих в уравнение движения для направления y , показывает, что величина градиента давления в направлении, перпендикулярном к стенке, имеет порядок

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{u^2}{r} \sim 1.$$

Следовательно, величина разности давлений на внутреннем и внешнем краях пограничного слоя имеет такой же порядок, как и толщина пограничного слоя δ , а потому в рассматриваемой задаче по-прежнему можно считать, что перепад давления $\partial p / \partial x$ потенциального течения передается без изменения внутрь пограничного слоя.

В этом параграфе мы рассмотрим только стационарное обтекание тела вращения, поэтому для интегрирования уравнений (11.27а) и (11.27б) целесообразно ввести функцию тока $\psi(x, y)$. Легко видеть, что мы удовлетворим уравнению неразрывности (11.27б), если выберем функцию тока так, чтобы составляющие скорости u и v были равны соответственно

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (11.29a)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi^1. \quad (11.29b)$$

Подставив эти выражения u и v в уравнение (11.27а), мы получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (11.30)$$

причем граничными условиями будут

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U(x) \quad \text{при } y = \infty.$$

Для расчета пограничного слоя на произвольном теле вращения постулим так же, как это было сделано в § 3 главы IX для пограничного слоя на цилиндрическом теле с произвольным поперечным сечением. А именно, разложим скорость потенциального течения $U(x)$ в ряд по степеням x , а функцию тока представим в виде аналогичного ряда, но с коэффициентами, зависящими от расстояния y от стенки (ряд Блазиуса). И теперь можно так подобрать эти коэффициенты-функции, чтобы они не зависели от параметров, определяющих рассматриваемую частную задачу. Иными словами, можно сделать коэффициенты-функции универсальными и вычислить их раз навсегда. Приведем в кратких чертах такое решение уравнения (11.30), следуя изложению Н. Фрёсслинга [27].

¹⁾ Уравнению неразрывности можно удовлетворить также посредством следующей функции тока:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}.$$

Э. Болтьце использовал такую функцию тока для расчета нестационарного осесимметричного пограничного слоя, см. § 2 главы XV.

Пусть контур тела задан рядом

$$r(x) = r_1x + r_3x^3 + r_5x^5 + \dots, \quad (11.31)$$

а скорость потенциального течения — рядом

$$U(x) = u_1x + u_3x^3 + u_5x^5 + \dots \quad (11.32)$$

Введем вместо координаты y , измеряющей расстояние от стенки, безразмерную координату

$$\eta = y \sqrt{\frac{2u_1}{v}}. \quad (11.33)$$

Функцию тока представим по аналогии с рядом (11.32) в виде

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{v}{2u_1}} \{ u_1 x f_1(\eta) + 2u_3 x^3 f_3(\eta) + 3u_5 x^5 f_5(\eta) + 4u_7 x^7 f_7(\eta) + \dots \} \quad (11.34)$$

(ряд Блазиуса). Следовательно, составляющей u скорости будет

$$u = u_1 x f'_1 + 2u_3 x^3 f'_3 + 3u_5 x^5 f'_5 + 4u_7 x^7 f'_7 + \dots, \quad (11.35)$$

где штрих означает дифференцирование по η . Для того чтобы коэффициенты-функции $f_1(\eta)$, $f_3(\eta)$, \dots не зависели от параметров, определяющих рассматриваемую частную задачу, т. е. от u_1 , u_3 , \dots и от r_1 , r_3 , \dots , представим их в виде следующих сумм:

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= g_3 + \frac{r_3 u_1}{r_1 u_3} h_3, \\ f_5 &= g_5 + \frac{r_5 u_1}{r_1 u_5} h_5 + \frac{u_3^2}{u_1 u_5} k_5 + \frac{r_3 u_3}{r_1 u_5} j_5 + \frac{r_3^2 u_1}{r_1^2 u_5} q_5, \\ f_7 &= g_7 + \frac{r_7 u_1}{r_1 u_7} h_7 + \frac{r_3^2 u_3}{r_1^2 u_7} j_7 + \frac{u_3^3}{u_1^2 u_7} k_7 + \frac{r_5 u_3}{r_1 u_7} l_7 + \\ &\quad + \frac{u_3 u_5}{u_1 u_7} p_7 + \frac{r_3^2 u_1}{r_1^2 u_7} q_7 + \frac{r_3 r_5 u_1}{r_1^2 u_7} v_7 + \frac{r_3 u_3^2}{r_1 u_1 u_7} t_7 + \frac{r_5 u_5}{r_1 u_7} z_7. \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

Подставив выражения (11.31), (11.32), (11.35) и (11.36) в уравнение (11.30), предварительно умноженное на r , и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , мы получим систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов-функций f_1 , g_3 , h_3 , \dots . Первые три уравнения этой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f''_{12} &= -f_1 f''_1 + \frac{1}{2} (f_1'^2 - 1), \\ g'''_3 &= -f_1 g''_3 + 2f_1 g'_3 - 2f''_1 g_3 - 1, \\ h'''_3 &= -f_1 h''_3 + 2f'_1 h'_3 - 2f''_1 h_3 - \frac{1}{2} f_1 f''_1. \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

Граничными условиями будут следующие:

все функции и их первые производные равны нулю при $\eta = 0$;

$$\left. \begin{aligned} f'_1 &= 1, \quad g'_3 = \frac{1}{2}, \quad g'_5 = \frac{1}{3}, \quad g'_7 = \frac{1}{7}, \quad \text{все остальные} \\ &\quad \text{первые производные равны нулю} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Первое из уравнений (11.37) тождественно совпадает с уравнением (5.47), полученным в § 2 главы V для пространственного течения в окрестности критической точки ¹⁾. Уравнения, определяющие коэффициенты-функции при членах x^3 и x^5 , решены Н. Фрёсслингом в цитированной выше работе.

¹⁾ В этом легко убедиться, если учесть, что $\eta = \zeta \sqrt{2}$ и $df_1/d\eta = d\phi/d\zeta$.

Полученные значения даны в таблице 11.2. Следующие десять коэффициентов-функций при члене x^7 вычислены Ф. В. Шолькемайером [85]. Зависимость первой производной f'_1 от η изображена на рис. 5.10 ($f' \equiv \varphi'$).

Таблица 11.2 Значения коэффициентов-функций ряда Блазиуса для расчета пограничного слоя на теле вращения.
По Фресслингу [27]

η	f'_3	g'_3	h'_3	g'_5	h'_5	k'_5	j'_5	q'_5	$\eta = 0$
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
0,2	0,1755	0,1896	0,0090	0,1612	0,0101	0,0255	0,0058	-0,0049	$f''_1 = 0,9277$
0,4	0,3341	0,3400	0,0176	0,2838	0,0198	0,0324	0,0107	-0,0096	
0,6	0,4669	0,4535	0,0254	0,3709	0,0285	0,0241	0,0137	-0,0140	$g''_3 = 1,0475$
0,8	0,5833	0,5334	0,0316	0,4270	0,0354	0,0051	0,0134	-0,0176	
1,0	0,6811	0,5842	0,0358	0,4576	0,0399	-0,0195	0,0096	-0,0204	$h''_3 = 0,0448$
1,2	0,7614	0,6110	0,0377	0,4683	0,0417	-0,0447	0,0025	-0,0222	
1,4	0,8258	0,6193	0,0372	0,4645	0,0409	-0,0665	-0,0064	-0,0229	$g''_5 = 0,9054$
1,6	0,8761	0,6144	0,0346	0,4515	0,0379	-0,0819	-0,0156	-0,0226	$h''_5 = 0,0506$
1,8	0,9142	0,6015	0,0306	0,4335	0,0334	-0,0897	-0,0234	-0,0212	
2,0	0,9422	0,5845	0,0258	0,4139	0,0279	-0,0899	-0,0287	-0,0192	$k''_5 = 0,1768$
2,2	0,9622	0,5666	0,0207	0,3952	0,0223	-0,0838	-0,0310	-0,0167	$j''_5 = 0,0291$
2,4	0,9760	0,5500	0,0158	0,3787	0,0170	-0,0733	-0,0304	-0,0139	
2,6	0,9853	0,5358	0,0116	0,3652	0,0124	-0,0605	-0,0275	-0,0111	$q''_5 = -0,0244$
2,8	0,9912	0,5245	0,0081	0,3549	0,0086	-0,0474	-0,0232	-0,0085	
3,0	0,9949	0,5161	0,0054	0,3473	0,0058	-0,0352	-0,0184	-0,0062	
3,2	0,9972	0,5102	0,0035	0,3420	0,0037	-0,0249	-0,0137	-0,0044	
3,4	0,9985	0,5061	0,0022	0,3385	0,0023	-0,0168	-0,0097	-0,0029	
3,6	0,9992	0,5036	0,0013	0,3363	0,0013	-0,0109	-0,0065	-0,0019	
3,8	0,9996	0,5020	0,0007	0,3350	0,0008	-0,0067	-0,0042	-0,0012	
4,0	0,9998	0,5011	0,0004	0,3342	0,0004	-0,0040	-0,0025	-0,0007	
4,2	0,9999	0,5006	0,0002	0,3338	0,0002	-0,0022	-0,0015	-0,0004	
4,4	0,9999	0,5003	0,0002	0,3336	0,0001	-0,0012	-0,0008	-0,0002	
4,6	1,0000	0,5001	0,0000	0,3334	0,0000	-0,0006	-0,0004	-0,0001	
4,8	1,0000	0,5000		0,3334	0,0000	-0,0003	-0,0002	0,0000	
5,0				0,3334		-0,0001	0,0001	0,0000	
5,2				0,3334		0,0000	0,0000		
5,4				0,3333					

Пример: шар. Применим изложенный метод к расчету пограничного слоя на шаре, причем так же, как и в ранее рассмотренном случае обтекания круглого цилиндра (§ 3 главы IX), положим в основу расчета теоретическое потенциальное распределение скоростей.

Для шара радиуса R , на который набегает потенциальное течение со скоростью U_∞ , теоретическое потенциальное распределение скоростей определяется формулой

$$U(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{x}{R} = \frac{3}{2} U_\infty \sin \varphi. \quad (11.38)$$

Как показывает рис. 1.10, действительное (определенное из эксперимента) распределение скоростей при больших, так называемых сверхкритических числах Рейнольдса не очень сильно отличается от теоретического потенциального распределения. Так как коэффициенты-функции ряда Блазиуса для осесимметричной задачи вычислены для членов до x^7 включительно, то в равенстве (11.38) синус следует заменить его степенным рядом до члена x^7 включительно. Из рис. 9.5 мы видим, что такая замена дает хорошее

приближение синуса на довольно большом протяжении после максимального значения скорости. Радиус сечения, проведенного через шар перпендикулярно к направлению набегающего потока, равен

$$r(x) = R \sin \frac{x}{R}. \quad (11.39)$$

Сравнив степенные ряды, получающиеся в результате разложения функций (11.38) и (11.39), с рядами (11.32) и (11.31), мы найдем для коэффициентов u_1, u_3, \dots и r_1, r_3, \dots следующие значения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R}; \quad u_3 = -\frac{1}{4} \frac{U_\infty}{R^3}; \quad u_5 = \frac{1}{80} \frac{U_\infty}{R^5}; \quad u_7 = -\frac{1}{3360} \frac{U_\infty}{R^7}; \\ r_1 &= 1; \quad r_3 = -\frac{1}{6} \frac{1}{R^2}; \quad r_5 = \frac{1}{120} \frac{1}{R^4}; \quad r_7 = -\frac{1}{5040} \frac{1}{R^6}. \end{aligned}$$

Подставив найденное значение u_1 в равенство (11.33), мы получим

$$\eta = \frac{y}{R} \sqrt{\frac{3U_\infty R}{v}}.$$

Далее, подставив значения u_1, u_3, \dots и r_1, r_3, \dots в равенство (11.35), мы найдем распределение скоростей

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_\infty} &= \frac{3}{2} \frac{x}{R} f'_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^3 (g'_3 + h'_3) + \frac{3}{80} \left(\frac{x}{R} \right)^5 \left[g'_5 + h'_5 + \frac{10}{3} k'_5 + \frac{10}{3} j'_5 + \frac{10}{3} q'_5 \right] - \\ &- \frac{1}{180} \left(\frac{x}{R} \right)^7 \left[g'_7 + h'_7 + \frac{7}{3} k'_7 + \frac{7}{3} j'_7 + 7l'_7 + 7p'_7 + \frac{7}{3} q'_7 + \frac{7}{3} t'_7 + 7v'_7 + 7z'_7 \right]. \quad (11.40) \end{aligned}$$

Вычисленные по этой формуле профили скоростей построены на рис. 11.7. Для определения положения точки отрыва мы имеем уравнение

$$1 - 0,3925 X_{\text{отр}} + 0,0421 X_{\text{отр}}^2 - 0,00259 X_{\text{отр}}^3 = 0,$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$X_{\text{отр}} = \left(\frac{x_{\text{отр}}}{R} \right)^2.$$

Решив это уравнение, мы найдем

$$\frac{x_{\text{отр}}}{R} = 1,913,$$

следовательно,

$$\Phi_{\text{отр}} = 109,6^\circ,$$

т. е. азимут точки отрыва лишь немногого отличается от соответствующего азимута для круглого цилиндра (стр. 168).

Относительно возможности применения изложенного способа для расчета пограничного слоя на теле вращения любой формы следует повторить все сказанное в § 3 главы IX для плоской задачи. Вычисление коэффициентов-функций для членов ряда Блазиуса выше x^7 требует практически недопустимой затраты времени. Между тем для практически важного случая

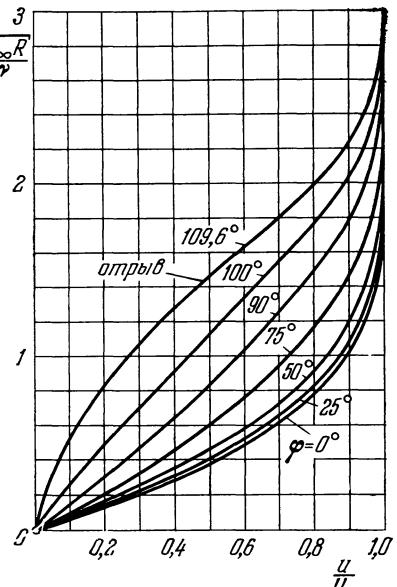


Рис. 11.7. Распределение скоростей в пограничном слое на шаре.

обтекания тонких тел необходимо брать в ряде Блазиуса значительно большее количество членов. Это обстоятельство весьма сильно ограничивает практическое применение изложенного способа. О дальнейших результатах для шара см. § 2 настоящей главы.

Поперечная кривизна пограничного слоя. Как мы уже отметили, условие, что толщина пограничного слоя везде очень мала по сравнению с радиусом тела вращения ($\delta \ll r$), является существенным допущением для совпадения уравнения движения (11.27а) осесимметричного течения с аналогичным уравнением плоского случая. Однако при обтекании длинного тонкого цилиндра и вообще любого длинного тонкого тела вращения указанное условие не соблюдается. Толщина пограничного слоя вдоль поверхности такого тела растет все больше и больше и в конце концов становится сравнимой с радиусом тела. При этом вследствие сравнительно большой кривизны поверхности тела трехмерный характер осесимметричного пограничного слоя дает себя знать в поперечном направлении — возникает поперечная кривизна пограничного слоя.

Случай осесимметричного пограничного слоя на внешней поверхности тонкого цилиндра радиуса $r_0 = a = \text{const}$ при однородном внешнем течении рассмотрен Р. А. Себаном и Р. Бондом [79]. В полученные ими результаты Г. Р. Келли [60] внес некоторые численные поправки. Затем М. Б. Глауэрт и М. Дж. Лайтхилл [33] получили решения один раз на основе приближенного метода Польгаузена (см. § 2 главы XI), а другой раз — путем асимптотического разложения в ряды. Независимо от них такое же асимптотическое разложение применил К. Стюартсон [91]. Течение вдоль образующей прямого цилиндра с произвольным поперечным сечением исследовано Дж. К. Куоком [17] посредством разложения в ряд Блазиуса, а также приближенным методом Польгаузена.

Общий случай осесимметричного пограничного слоя на теле вращения с контуром, зависящим от текущей длины x , в частности на круглом цилиндре и конусе, рассмотрен Р. Ф. Пробстейном и Д. Эллиотом [74]. Выяснилось, что в таких течениях с градиентом давления поперечная кривизна действует как дополнительный благоприятный градиент давления, способствующий повышению касательного напряжения на стенке и поэтому замедляющий отрыв пограничного слоя.

§ 2. Приближенные решения для осесимметричных пограничных слоев. Течение в начальном участке трубы

1. Приближенный метод расчета пограничных слоев на невращающихся телах вращения. Приближенный метод решения уравнений стационарного плоского пограничного слоя, подробно изложенный в главе X, может быть распространен также на осесимметричные пограничные слои. Для пограничного слоя на неподвижном теле вращения, обтекаемом в осевом направлении, приближенный способ расчета впервые был указан К. Б. Милликеном [64]. Несколько позже С. Томотика [101], [102] распространил метод Польгаузена, рассмотренный в главе X для плоской задачи и основанный на предположении, что распределение скоростей в пограничном слое аппроксимируется полиномом четвертой степени, на осесимметричную задачу.

Мы изложим здесь приближенный расчет осесимметричного пограничного слоя в той форме, которая была дана Г. Хольштейном и Т. Боленом для плоской задачи и затем распространена Ф. В. Шолькемайером [85] на осесимметричную задачу. Уравнение импульсов для осесимметричной задачи выводится из уравнений (11.27а) и (11.27б) совершенно так же, как это было сделано в § 5 главы VIII для плоской задачи. Выполнив необходимые вычисления, мы получим¹⁾

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1) U \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{\delta_2}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (11.41)$$

где $r(x)$ по-прежнему обозначает радиус поперечного сечения тела вращения (см. рис. 11.6). Применив такие же рассуждения, как и в § 2 главы X, мы получим для определения величины $Z = \delta^2/v$ дифференциальное

¹⁾ Мы используем здесь для толщины вытеснения δ_1 и толщины потери импульса δ_2 те же определения, какие были использованы в плоской задаче [см. соотношения (8.33) и (8.34), в которых u означает координату, перпендикулярную к стенке]. Однако для пограничного слоя на теле вращения иногда применяются несколько иные определе-

уравнение

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(x)] x + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} x = f_2(x).$$

Величина x и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют здесь тот же смысл, как и в плоской задаче, и определяются равенствами (10.27), (10.31) и (10.32). По-прежнему введя для сокращения записи функцию $F(x)$, определяемую равенством (10.34), перепишем предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{U} \left\{ F(x) - 2x \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} \right\}; \quad x = ZU'. \quad (11.42)$$

Как легко видеть, это уравнение посредством подстановки

$$\bar{Z} = r^2 Z \quad (11.43)$$

приводится к виду

$$\frac{d\bar{Z}}{dx} = \frac{r^2}{U} F(x); \quad x = \frac{\bar{Z}U'}{r^2}. \quad (11.44)$$

Уравнение (11.44) обладает по сравнению с уравнением (11.42) тем преимуществом, что не содержит производной dr/dx .

В рассматриваемом случае точке отрыва по-прежнему соответствуют значения формпараметра $\Lambda = -12$, т. е. $x = -0,1567$. Однако в критической точке Λ и x имеют теперь другие начальные значения. Вычислим их для тела вращения с круглой носовой частью. В передней критической точке такого тела ($x = 0$) мы имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} \right) = 1;$$

следовательно, выражение в фигурных скобках в уравнении (11.42) становится равным $F(x) - 2x$. Из таких же соображений, как и при решении плоской задачи, начальное значение формпараметра x , т. е. его значение в критической точке, определяется из условия

$$F(x) - 2x = 0,$$

откуда после простых вычислений находим

$$\Lambda_0 = +4,716, \quad x_0 = 0,05708.$$

Таким образом, в критической точке начальные значения для интегральной кривой уравнения (11.42) будут

$$Z_0 = \frac{x_0}{U'_0} = \frac{0,05708}{U'_0}, \quad \left(\frac{dZ}{dx} \right) = 0. \quad (11.45)$$

Равенство начального углового коэффициента нулю вполне понятно, так как для тела вращения в критической точке вследствие симметрии всегда $U''_0 = 0$.

ния [107], а именно: для толщины вытеснения

$$\delta_1 U = \int_0^\infty (U - u) \left(1 + \frac{y}{r} \right) dy,$$

для толщины потери импульса

$$\delta_2 U^2 = \int_0^\infty u (U - u) \left(1 + \frac{y}{r} \right) dy.$$

Множитель $(1 + y/r)$ под знаком интеграла учитывает, что скорость u на расстоянии y от стенки относится к объему жидкости, протекающему через кольцевую полоску шириной dy и в $(1 + y/r)$ раз большему объема, протекающего вдоль плоской поверхности шириной $2\pi r$.

Как показали Н. Ротт и Л. Ф. Крабтри [77], решение уравнения (11.44) можно свести к квадратуре таким же способом, как это было сделано в § 2 главы X для плоского случая, но теперь для толщины потери импульса вместо соотношения (10.37) получается соотношение

$$\frac{U\delta_2^2}{v} = \frac{0,470}{r^2 U^5} \int_0^x r^2 U^5 dx. \quad (11.46)$$

Некоторые примеры расчета по изложенному способу даны в работах Ф. В. Шолькемайера [85] и И. Преча [73]. Расчеты пограничного слоя на шаре, основанные на теоретическом потенциальном распределении скоростей и на измеренном распределении давления, выполнил С. Томотика [102], причем он провел сравнение полученных результатов с измерениями А. Фэйджа [25]. Результаты других измерений имеются в работе В. Мёллера [65]. В этой связи упомянем также о теоретических и экспериментальных исследованиях пограничного слоя в осесимметричном насадке, выполненных А. Михалке [63].

Течение в начальном участке круглой трубы. Остановимся вкратце на ламинарном течении в начальном участке круглой трубы. Эта осесимметричная задача, по существу, не является задачей о пограничном слое, но она может быть решена методами теории пограничного слоя. Во входном поперечном сечении ($x = 0$) профиль скоростей имеет прямоугольную форму, но затем под воздействием трения он постепенно вытягивается и, наконец, на некотором расстоянии от входа в трубу принимает форму параболы. Аналогичную плоскую задачу (течение в начальном участке канала) мы рассмотрели в § 9 главы IX, применив для расчета дифференциальные уравнения пограничного слоя. Приближенный расчет ламинарного течения в начальном участке круглой трубы выполнил Л. Шиллер [80], приняв, что импульс, падение давления и силы трения взаимно уравновешиваются, т. е. исходя из того же допущения, которое лежит в основе расчета пограничного слоя способом импульсов. Профили скоростей в начальном участке Л. Шиллер заменил прямолинейным отрезком в середине трубы (ядро течения) и кусками двух парабол с боков отрезка. Каждая из этих парабол примыкает к стенке, давая здесь нулевую скорость, а затем плавно, по касательной переходит в прямолинейный отрезок. Куски парабол при входе в трубу располагаются по ширине, равной нулю, а затем, по мере удаления от входа, становятся все шире, пока, наконец, на некотором расстоянии от входа не сливаются в одну общую параболу. Это расстояние и является теоретической длиной начального участка. Л. Шиллер нашел для этой длины значение

$$\frac{xv}{R^2 u} = 0,115.$$

Измерения И. Никурадзе (рис. 11.8) показывают, что на протяжении первой трети начального участка (примерно до $xv/R^2 u = 0,04$) развитие профиля скоростей хорошо совпадает с расчетом Шиллера. Дальше же вниз по течению переход измеренного профиля в параболический профиль Пуазейля происходит медленнее, чем это следует из приближенного расчета Шиллера. Так как ядро течения движется с ускорением, то падение давления в начальном участке происходит сильнее, чем в развившемся течении. Дополнительная потеря давления в начальном участке составляет

$$\Delta p = 1,16 \frac{\rho \bar{u}^2}{2}.$$

Приближенное решение этой задачи дано Г. Лангхааром [55]. Течение в начальном участке круглой трубы исследовалось также Б. Пуннисом [75].

Некоторое сходство с течением в начальном участке имеет течение в трубе, закрученное в начальном поперечном сечении так, что имеет здесь некоторый момент количества движения, постепенно затухающий по мере продвижения вниз по течению. Такое течение было исследовано Л. Толботом [94], а также Л. Коллатцем и Г. Гёртлером [13]. Определение затухания окружной скорости (при условии, что ее начальное значение мало по сравнению с осевой скоростью течения Хагена — Пуазейля) сводится

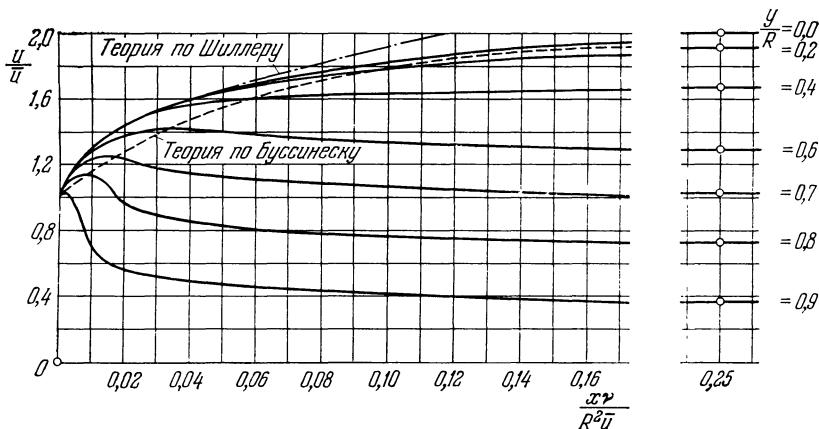


Рис. 11.8. Распределение скоростей в начальном участке круглой трубы при ламинарном течении. Измерения — по Никурадзе (из книги Прандтля — Титенса, т. II), теория — по Шиллеру [80].

к краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Для этой задачи были вычислены пять первых собственных значений. По Толботу при числе Рейнольдса $Re = 10^3$ окружная скорость почти полностью затухает на расстоянии сорока диаметров трубы от входного сечения, что хорошо совпадает с результатами эксперимента.

2. Пограничные слои на вращающихся телах вращения. В качестве простейшего примера пограничного слоя на вращающемся теле мы рассмотрели в § 2 главы V пограничный слой на диске, вращающемся в неподвижной жидкости. При таком течении жидкость, увлекаемая пограничным слоем, отбрасывается наружу под действием центробежной силы и заменяется жидкостью, притекающей к диску в направлении оси вращения. Обобщением этого случая является пограничный слой на вращающемся диске (радиус R , угловая скорость ω), обтекаемом в направлении оси вращения со скоростью U_∞ . Такое течение характеризуется двумя параметрами: числом Рейнольдса и числом $U_\infty/\omega R$, представляющим собой отношение скорости набегающего течения к окружной скорости. Для ламинарного течения эта задача решена точно мисс М. Д. Ханнах [38] ¹⁾ и А. Н. Тиффордом [98], а приближенно — Г. Шлихтингом и Э. Труккенбродтом [82]. Для турбулентного течения приближенное решение дано Э. Труккенбродтом [104]. На рис. 11.9 изображена полученная Г. Шлихтингом и Э. Труккенбродтом зависимость коэффициента момента сопротивления

$$C_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5}$$

1) В работе [38] фактически решается родственная задача, в которой внешнее поле создается источником в бесконечности.

от числа Рейнольдса и от параметра $U_\infty/\omega R$. Подчеркнем, что в этой формуле M означает момент сопротивления жидкости вращению только передней стороны диска, следовательно, момент сопротивления кормовой части

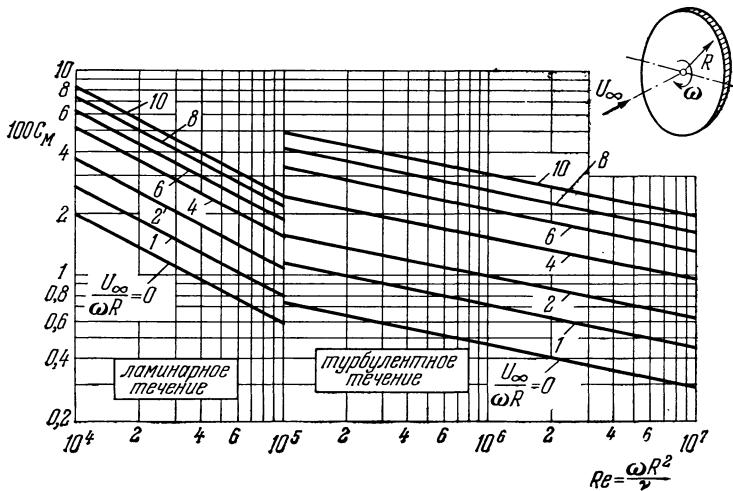


Рис. 11.9. Коэффициент $C_M = M / \left(\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5 \right)$ момента сопротивления M вращающегося диска, обтекаемого в осевом направлении. M — момент сопротивления только передней стороны диска. По Шлихтингу и Труккенбродту [62], [104].

не учитывается. Это оправдано по следующей причине. Можно считать, что обтекающее диск течение отрывается от краев диска и застойная область, образующаяся позади диска и частично вместе с ним вращающаяся, не вносит сколько-нибудь существенной доли в момент сопротивления.

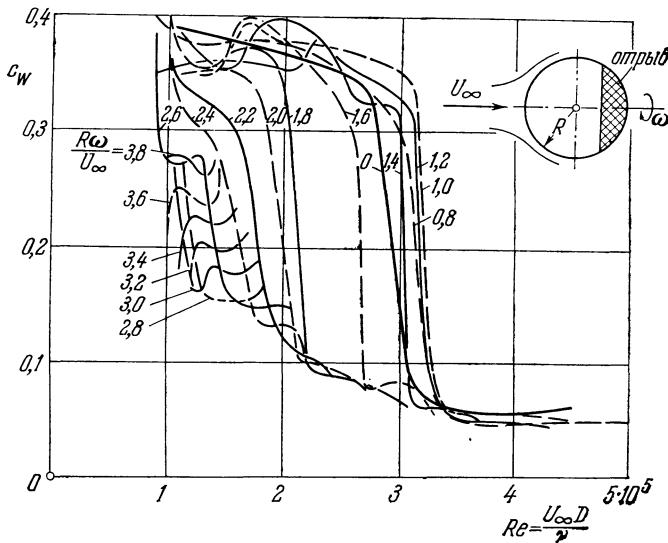


Рис. 11.10. Коэффициент сопротивления вращающегося шара, обтекаемого в направлении оси вращения. По измерениям Лютхандера и Ридберга [69].

Из рис. 11.9 видно, что при постоянном числе оборотов диска момент сопротивления с увеличением скорости набегающего течения U_∞ значительно возрастает.

Весьма сходно с упомянутым в главе V (стр. 106) течением между двумя вращающимися дисками течение внутри круглого цилиндрического сосуда с вращающейся крышкой. Такое течение, исследованное Д. Гроне [36], обладает двумя особенностями. Во-первых, движение свободного от трения ядра течения внутри цилиндра формируется под воздействием пограничного слоя, образующегося на внутренней стенке цилиндра, в то время как обычно действие пограничного слоя на внешнее течение проявляется самое большое в оттеснении последнего от стенки. Во-вторых, при рассматриваемом течении возникает совсем необычный случай: пограничный слой получается замкнутым. Впрочем, такое явление наблюдается и в исследованном Г. Людвигом [58] течении в канале, находящемся во вращающейся системе, если только угловая скорость этой системы достаточно велика. В этом случае внутри канала можно различить две области: ядро течения, свободное от трения, и пограничные слои на боковых стенках, дающие начало вторичному течению. Теория такого течения показывает, что вследствие вращения сильно возрастает коэффициент трения, что хорошо подтверждается измерениями.

К. Визельсбергер [108], а также С. Лютхандер и А. Ридберг [59] экспериментально исследовали сопротивление вращающихся тел за круглой формы (например, шара или тонкого тела вращения), обтекаемых в направлении оси вращения. Измерения показали, что в этих случаях сопротивление сильно зависит от вращения. На рис. 11.10 изображена зависимость коэффициента сопротивления вращающегося шара, обтекаемого в направлении оси вращения, от числа Рейнольдса, при котором возникает скачкообразное уменьшение коэффициента сопротивления, сильно зависит от параметра $R\omega/U_\infty$. То же самое имеет место и в отношении положения точки отрыва. На рис. 11.11 показано влияние вращения шара на отрыв ламинарного пограничного слоя по расчетам Н. Э. Хоскина [42]. При значении параметра $R\omega/U_\infty = 5$ точка отрыва лежит приблизительно на 10° впереди точки отрыва при отсутствии вращения шара. Физическая причина этого явления заключается в следующем: на жидкость, заключенную в пограничном слое и вращающуюся вместе с ним, действует центробежная сила, которая оказывает такой же эффект, как дополнительное понижение давления по направлению к плоскости экватора.

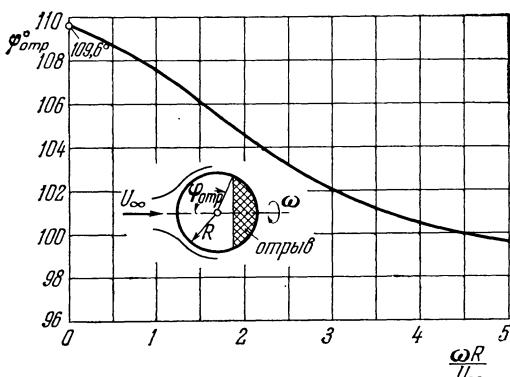


Рис. 11.11. Положение точки отрыва ламинарного пограничного слоя на вращающемся шаре, обтекаемом в направлении оси вращения. По Хоскину [42].

Попытка теоретического объяснения этих весьма сложных явлений в пограничных слоях на вращающихся телах вращения, обтекаемых в направлении оси вращения, сделана в работах Г. Шлихтинга [83], Э. Труккенброта [103] и О. Парра [70]. Во всех этих работах для исследования был использован приближенный метод, изложенный в начале этого параграфа. Хотя при обтекании вращающегося тела вращения в направлении оси вращения осевая симметрия пограничного слоя сохраняется, однако наряду с составляющей скорости в меридианном направлении появляется, вследствие вращения, также составляющая скорости в окружном направлении. По этой причине при применении для расчета пограничного слоя теоремы импульсов необходимо составить уравнение импульсов дважды: один раз для меридианного направления x и другой раз для окружного направления z . Для тела вращения, имеющего угловую скорость ω и обтекаемого в направлении

оси вращения, эти уравнения имеют вид

$$U^2 \frac{d\delta_{2x}}{dx} + U \frac{dU}{dx} (2\delta_{2x} + \delta_{1x}) + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} (U^2 \delta_{2z} + v_0^2 \delta_{2z}) = \frac{\tau_{x0}}{\rho}, \quad (11.47)$$

$$\frac{v_0}{r^3} \frac{d}{dx} (Ur^3 \delta_{2xz}) = - \frac{\tau_{z0}}{\rho}. \quad (11.48)$$

Входящие в эти уравнения составляющие касательного напряжения на стенке определяются формулами

$$\tau_{x0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0, \quad \tau_{z0} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 \quad (11.49)$$

(u есть координата, перпендикулярная к стенке), а значения толщины вытеснения и толщины потери импульса — формулами

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1x} &= \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy; & \delta_{2x} &= \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy; \\ \delta_{2z} &= \int_{y=0}^{\infty} \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 dy; & \delta_{2xz} &= \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \frac{w}{w_0} dy. \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

В формулах (11.50) окружная составляющая скорости $w(x, z)$ отнесена к местной окружной скорости $w_0 = r\omega$. Уравнения (11.47) и (11.48) позволяют рассчитать пограничный слой как для ламинарного, так и для турбулентного течения, причем в последнем случае для касательного напряжения на стенке следует взять несколько иные выражения, чем (11.49) [см. по этому поводу работу [70] и § 3 главы XXII.] Кроме момента сопротивления в отдельных случаях удалось вычислить и сопротивление трения, причем выяснилось, что оно возрастает при увеличении параметра $\omega R/U_\infty$. См. в связи с этим работы К. Р. Иллингвортса [46], а также С. Т. Чу и А. Н. Тиффорда [12]. И. Ямага [110] распространил приближенный способ Г. Шлихтинга [83] на скимаемые течения. Р. Сэдни [88] рассмотрел ламинарный пограничный слой на вращающемся круглом конусе, обтекаемом сверхзвуковым потоком под углом к оси вращения. Дж. К. Мартин [63] исследовал эффект Магнуса для вращающихся под небольшим углом к оси вращения.

Ламинарный пограничный слой на шаре, вращающемся в неподвижной жидкости, рассмотрел Л. Хоуартом [43] и С. Д. Нигамом [68]. Б. С. Фэднис [24] распространил полученные результаты на пограничный слой на эллипсоиде вращения. На полюсах пограничный слой ведет себя так же, как на вращающемся диске, а в области экватора — так же, как на вращающемся цилиндре. Происходит притекание жидкости к полюсам и оттекание от экватора. Последнее при одинаковой площади экваториального сечения и одинаковой угловой скорости тем больше, чем тоньше тело. Однако явления, происходящие в плоскости экватора, где встречаются один с другим и затем оттекают наружу пограничные слои, движущиеся с обеих полусфер, не могут быть исследованы с помощью теории пограничного слоя.

В закрученном течении возникающем в осевых гидравлических машинах позади направляющего колеса, иногда образуется около втулки этого колеса резко выраженная застойная зона. Течение в такой зоне тщательно изучено К. Баммертом и Г. Клёукенсом [4]. Возникновение этой застойной зоны связано с повышением давления в радиальном направлении наружу. Это повышение давления в радиальном направлении, вызываемое закрученным течением, приводит к тому, что в кольцевом пространстве позади направляющего колеса, свободном от лопаток, повышение давления в осевом направлении вдоль втулки происходит значительно сильнее, чем во внешнем течении. Влияние пограничного слоя играет при этом подчиненную роль. В этой связи упомянем также работу К. Баммерта и И. Шёна [3] о течении жидкости во вращающемся полом вале. Здесь на выходном конце под совместным действием центробежных сил и сил трения образуется воронкообразное зеркало жидкости.

§ 3. Связь между осесимметричными и плоскими пограничными слоями

Из предыдущего изложения видно, что расчет осесимметричного пограничного слоя в общем случае несколько труднее расчета плоского пограничного слоя. В самом деле, течение в плоском пограничном слое, образующемся, например, на цилиндре при его обтекании в направлении, перпендикулярном к его оси, зависит только от теоретического потенциального

распределения скоростей $U(x)$; течение же в осесимметричном пограничном слое, образующемся, например, на теле вращения, обтекаемом в осевом направлении, зависит не только от распределения скоростей $U(x)$, но и от формы тела, поскольку в уравнение неразрывности явно входит переменный радиус $r(x)$ сечения тела, перпендикулярного к оси вращения. В этом параграфе мы рассмотрим подробно связь между плоскими и осесимметричными пограничными слоями. Перепишем еще раз уравнения пограничного слоя (7.10) и (7.11) для стационарной плоской задачи и такие же уравнения (11.27а) и (11.27б) для осесимметричной задачи, причем все величины, относящиеся к плоской задаче, отметим черточкой сверху. Мы будем иметь для плоской задачи

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

а для осесимметричной задачи

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.52)$$

Напомним, что уравнения (11.52) составлены для системы криволинейных координат, из которых координата x измеряется вдоль дуги меридиана тела вращения, а координата y — по нормали к стенке; соответственно этому измеряются и составляющие скорости u и v . Величина r во втором уравнении системы (11.52) означает расстояние точки поверхности тела от оси симметрии, измеренное по перпендикуляру к оси. Обе системы отличаются одна от другой только своими вторыми уравнениями, а именно в уравнение неразрывности осесимметричной задачи входит радиус $r(x)$, отсутствующий в уравнении неразрывности плоской задачи. Первые уравнения обеих систем полностью совпадают.

В связи с этим возникает естественный вопрос, не существует ли такое преобразование, которое позволяет использовать решения уравнений плоского пограничного слоя для отыскания решений уравнений осесимметричного пограничного слоя. На существование такой общей связи между осесимметричными и плоскими пограничными слоями указал В. Манглер [62] ¹⁾.

Эта связь позволяет свести расчет осесимметричного ламинарного пограничного слоя на теле вращения к расчету ламинарного пограничного слоя на цилиндрическом теле. При таком способе расчета рассматриваемому теоретическому потенциальному обтеканию тела вращения сопоставляется теоретическое потенциальное обтекание некоторого цилиндрического тела. Распределение скоростей около этого цилиндрического тела может быть вычислено по указанным ниже формулам преобразования. Преобразование Манглера применимо также для пограничных слоев в сжимаемых течениях и для температурных пограничных слоев при ламинарном течении. Здесь мы изложим это преобразование только для несжимаемых течений.

¹⁾ Несколько раньше эта связь была установлена Е. И. Степановым. См. его статью в «Прикладной математике и механике» 11, № 1 (1947). — Прим. перев.

Формулы преобразования Манглера для пересчета координат и скоростей осесимметричной задачи в соответствующие координаты и скорости плоской задачи имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx; & \bar{y} &= \frac{r(x)}{L} y; \\ \bar{u} &= u; & \bar{v} &= \frac{L}{r} \left(v + \frac{r'}{r} y u \right); \\ \bar{U} &= U, \end{aligned} \right\} \quad (11.53)$$

где L есть постоянная длина. Имея в виду соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{r^2}{L^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{r^2}{r} \bar{y} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{r}{L},$$

мы легко убедимся, что уравнения (11.52) после преобразования (11.53) действительно переходят в уравнения (11.51).

Таким образом, расчет пограничного слоя на теле вращения радиуса $r(x)$ с теоретическим потенциальным распределением скоростей $U(x)$ можно свести к расчету плоского пограничного слоя с распределением скоростей $\bar{U}(\bar{x})$, причем должно быть $U = \bar{U}$, а координаты x и \bar{x} должны быть связаны между собой первым из соотношений (11.53). Выполнив вычисление скоростей u, v плоского пограничного слоя, необходимо вернуться к скоростям u, v осесимметричного пограничного слоя посредством формул преобразования (11.53).

Поясним способ Манглера на конкретном примере. Рассмотрим осесимметричное течение в окрестности критической точки. Для такого течения

$$r(x) = x, \quad U(x) = u_1 x,$$

следовательно,

$$\bar{x}_i = \frac{x^3}{3L^2},$$

а потому

$$x_i = \sqrt[3]{3L^2 \bar{x}},$$

в соответствии с чем для распределения скоростей плоского потенциального течения, отвечающего рассматриваемому осесимметричному течению, мы получаем формулу

$$\bar{U}(\bar{x}) = u_1 \sqrt[3]{3L^2 \bar{x}},$$

или

$$\bar{U}(\bar{x}) = C \bar{x}^{1/3},$$

где C есть постоянная. Это плоское потенциальное течение принадлежит рассмотренному в § 1 главы IX классу течений $U = Cx^m$ около клина, причем в данном случае $m = 1/3$, и в соответствии с формулой (9.7), угол раствора клина равен

$$\beta = \frac{2m}{m+1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, плоское течение, соответствующее осесимметричному течению в окрестности критической точки, представляет собой течение около клина, имеющего угол раствора $\pi\beta = \pi/2$. В том, что осесимметричное течение в окрестности критической точки можно свести к такому плоскому течению около клина, мы убедились из других соображений в § 1 главы IX.

§ 4. Трехмерные пограничные слои

До недавнего времени при расчете пограничных слоев ограничивались почти исключительно случаями плоского и осесимметричного течений. Осесимметричная задача в известной мере сходна с плоской задачей, поскольку и в той и в другой заданное потенциальное течение зависит только от одной координаты, а обе составляющие скорости в пограничном слое — только от двух координат. В трехмерной задаче потенциальное течение, существующее за пределами пограничного слоя, зависит уже от двух координат на поверхности стенки, а скорость течения в пограничном слое имеет все три составляющие, которые в самом общем случае зависят от всех трех координат. Примерами таких трехмерных течений в пограничном слое, являющихся одновременно точными решениями уравнений Навье — Стокса, могут служить течение вблизи диска, вращающегося в покоящейся жидкости (§ 2 главы V), и вращательное движение жидкости над неподвижным основанием (§ 1 настоящей главы). Если линии тока трехмерного потенциального течения прямолинейны, но сходятся или расходятся, то по сравнению со случаем плоского потенциального течения получается в. основном только изменение толщины пограничного слоя. Если же линии тока потенциального течения искривлены, то, кроме продольного перепада давления, в течении имеется также поперечный перепад давления. Давление в потенциальном течении, как мы знаем, передается без изменений в пограничный слой. Следовательно, наличие поперечного перепада давления в потенциальном течении должно проявлять себя в пограничном слое в виде вторичных течений. В самом деле, в то время как вне пограничного слоя поперечный перепад давления уравновешивается центробежной силой, внутри пограничного слоя это равновесие нарушается, так как здесь центробежная сила вследствие уменьшения скорости становится меньше; в результате возникает перенос жидкости внутрь, т. е. по направлению к вогнутой стороне линий тока потенциального течения. С примером такого явления мы уже познакомились при рассмотрении вращательного движения жидкости над неподвижным основанием; там в пограничном слое происходил радиальный перенос жидкости по направлению к оси вращения.

При течении в межлопаточном канале турбинной или насосной решетки и при обтекании поворотной лопатки в пограничных слоях на боковых стенках лопаток также возникают вторичные течения. Причиной их возникновения является кривизна линий тока внешнего течения. В межлопаточном канале вторичное течение направлено от напорной поверхности одной лопатки к подсасывающей поверхности соседней лопатки. К этому вторичному течению, вызванному обтеканием боковой стенки, присоединяется еще влияние пограничного слоя на самих лопатках, вследствие чего течение через межлопаточный канал представляет собой весьма сложную трехмерную задачу, которая исследована пока только экспериментально [39].

1. Пограничный слой на скользящем цилиндре. В техническом отношении большой интерес представляет трехмерный пограничный слой, образующийся на крыле при таком его обтекании, когда передняя кромка не перпендикулярна к скорости набегающего течения. Подобного рода случай имеет место при боковом скольжении обычного крыла или при обычном движении стреловидного крыла. Из практики известно, что при таких движениях крыла на его подсасывающей стороне в пограничном слое возникает интенсивный перенос жидкости по направлению к консольной части, что весьма неблагоприятно отражается на аэродинамических свойствах крыла.

При двумерном движении в пограничном слое геометрическая форма обтекаемого тела влияет на поле течения только косвенно, а именно — через

распределение скоростей в потенциальном течении, которое одно только и входит в расчет. Напротив, при трехмерном пограничном слое его воздействие на поле течения осуществляется, во-первых, через посредство внешнего распределения скоростей и, во-вторых, непосредственно геометрической формой обтекаемого тела. Например, в случае обтекания тела вращения изменение радиуса с расстоянием вдоль контура тела, выражаемое функцией $R(x)$, явно входит в дифференциальные уравнения пограничного слоя [см. уравнение (11.276)].

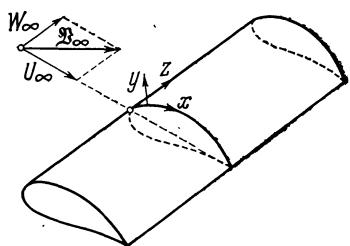


Рис. 11.12. Система координат для трехмерного пограничного слоя.

Для составления уравнений пограничного слоя ограничимся рассмотрением только простейшего случая, а именно предположим, что обтекаемое тело либо представляет собой плоскость, либо ограничено такой искривленной поверхностью, которая может быть развернута в плоскость (рисунок. 11.12). Координаты на поверхности стенки обозначим через x и z , а в направлении, перпендикулярном к стенке, как обычно,— через y . Пусть вектор скорости \mathfrak{W} потенциального течения имеет составляющие $U(x, z)$ и $W(x, z)$; следовательно, при установившемся движении распределение давления в потенциальном течении определяется уравнением

$$p + \frac{1}{2} \rho [U^2 + W^2] = \text{const.} \quad (11.54)$$

Возьмем уравнения Навье — Стокса (3.32) для трехмерного течения и произведем для случая очень большого числа Рейнольдса такую же оценку отдельных членов уравнений, как и в § 1 главы VII для плоского течения. Прежде всего, мы увидим следующее: в уравнениях для направлений x и z в членах, зависящих от вязкости, производные по координатам, параллельным стенке, значительно меньше, чем производные по координате, перпендикулярной к стенке, и поэтому соответствующие члены могут быть отброшены. Далее, из уравнения движения в направлении y мы опять увидим, что производная $\partial p / \partial y$ очень мала и, следовательно, также может быть отброшена. Таким образом, давление в пограничном слое зависит только от координат x и z , но не от координаты y . Это означает, что давление потенциального течения передается внутрь пограничного слоя без изменения. Наконец, мы увидим, что ни один из конвективных членов в общем случае нельзя отбросить. В результате мы получим следующие уравнения для трехмерного пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11.55a)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (11.55b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (11.55c)$$

причем граничными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} u &= v = w = 0 && \text{при } y = 0; \\ u &= U, \quad w = W && \text{при } y = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11.56)$$

Градиенты давления $\partial p / \partial x$ и $\partial p / \partial z$ следует считать известными, поскольку известно распределение давления (11.54) в потенциальном течении. Таким

образом, мы имеем систему из трех уравнений для определения трех неизвестных u , v , w . Для

$$W \equiv 0 \quad \text{и} \quad w \equiv 0$$

эта система переходит в известные уравнения (7.10) и (7.11) двумерного пограничного слоя.

Каких-либо точных решений системы уравнений (11.55), кроме упомянутых выше, до настоящего времени не найдено. Т. Гайс [29], [30] исследовал те частные случаи этой системы, которые приводят к «подобным» решениям. В этих случаях, аналогично тому как это было в двумерных пограничных слоях, возникающих при обтекании клина (см. § 1 главы IX), профили скоростей в направлении обеих осей подобны один другому, что позволяет привести систему уравнений (11.55) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Значительно доступнее для аналитического исследования частный случай системы уравнений (11.55), получающийся тогда, когда скорость потенциального течения зависит только от координаты x , а не от обеих координат x и z , следовательно, когда

$$U = U(x), \quad W = W(x). \quad (11.57)$$

С этим случаем при одновременном условии, что $W = \text{const}$, мы встречаемся, например, при косом обтекании цилиндра, а с некоторым приближением — также при боковом скольжении крыла конечного размаха на режиме с нулевой подъемной силой. Поскольку теперь все производные по z равны нулю, система уравнений (11.55) значительно упрощается. Имея в виду, что $W = W_\infty = \text{const}$ и что

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx},$$

мы получим

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

причем граничными условиями будут по-прежнему условия (11.56). Теперь скорость w входит только во второе уравнение. Это обстоятельство позволяет определить сначала u и v из первого и третьего уравнений (решение будет таким же, как и в плоской задаче), а затем уже найти w из второго уравнения, которое линейно относительно w . Поэтому рассматриваемый частный случай довольно прост для численного расчета. Между прочим, уравнение для составляющей скорости w совпадает с уравнением для распределения температуры в двумерном пограничном слое при условии, что число Прандтля равно единице (см. главу XII).

Если $U(x) = U_\infty = \text{const}$, то рассмотренный частный случай становится еще более простым; он переходит в продольное обтекание плоской пластины, но не в направлении, перпендикулярном к передней кромке, а в косом направлении (плоская пластина с боковым скольжением). В этом специальном случае член $U dU/dx$ в первом уравнении системы (11.58) отпадает и второе уравнение делается тождественным первому, если только

заменить в нем w на u . Следовательно, решения $u(x, y)$ и $w(x, y)$ связаны между собой соотношением

$$w(x, y) = \text{const} \cdot u(x, y),$$

или

$$\frac{w}{u} = \frac{W_\infty}{U_\infty}.$$

Это означает, что при косом обтекании плоской пластины результирующая обеих составляющих скорости, параллельных стенке, в каждой точке пограничного слоя параллельна скорости потенциального течения. Таким образом, косое обтекание (боковое скольжение) пластины не оказывает никакого влияния на развитие пограничного слоя (*принцип автономности*).

При турбулентном пограничном слое на плоской пластине с боковым скольжением правые части первых двух уравнений (11.58) должны быть дополнены членами, учитывающими кажущееся турбулентное трение (глава XIX). Поэтому теперь оба эти уравнения нельзя перевести одно в другое перестановкой u и w . Это означает, что при турбулентном пограничном слое на скользящей плоской пластине линии тока внутри пограничного слоя не параллельны направлению внешнего течения, что подтверждается и экспериментом [2]. В работе [2] установлено также, что толщина вытеснения турбулентного пограничного слоя на скользящей пластине нарастает в направлении течения несколько сильнее, чем на нескользящей пластине. Это обстоятельство также показывает, что принцип автономности неприменим при турбулентном пограничном слое.

Расчет трехмерного пограничного слоя на скользящем цилиндре посредством уравнений (11.58) можно выполнить способом, аналогичным применяемому при расчете плоского пограничного слоя на цилиндре, обтекаемом перпендикулярно к его оси (§ 3 главы IX). Для этой цели скорость потенциального течения $U(x)$ представляется в виде ряда по степеням координаты x , отсчитываемой по дуге на поверхности цилиндра от критической точки. Тогда для такого течения с критической линией в случае симметричного цилиндра мы будем иметь

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + \dots,$$

$$W(x) = W_\infty = \text{const}.$$

Для составляющих $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ скорости течения в пограничном слое берутся такие же ряды по степеням x , но с коэффициентами, зависящими от координаты y (ряды Блазиуса). От координаты z , направленной вдоль образующей цилиндра, течение в пограничном слое не зависит. Введем новую переменную

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{v}} \quad (11.59)$$

и напишем

$$u(x, y) = u_1 x f'_1(\eta) + 4u_3 x^3 f'_3(\eta) + \dots, \quad (11.60a)$$

$$v(x, y) = -\sqrt{\frac{v}{u_1}} \{ u_1 f_1(\eta) + 12u_3 x^2 f_3(\eta) + \dots \}, \quad (11.60b)$$

$$w(x, y) = W_\infty \left\{ g_0(\eta) + \frac{u_3}{u_1} x^2 g_2(\eta) + \dots \right\}. \quad (11.60b)$$

Для функций f_1 , f_3 , ... мы получим в точности такие же дифференциальные уравнения, как и уравнения (9.21), для решения которых имеется

таблица 9.1. Вычисление составляющей w впервые было выполнено В. Р. Сирсом [86]. Позднее полученные результаты были улучшены Г. Гёрлером [34]. Для функций g_0, g_2, \dots , определяющих поперечное течение вдоль образующей цилиндра, получаются следующие линейные дифференциальные уравнения:

$$g_0'' + f_1 g_0' = 0, \quad (11.61a)$$

$$g_2'' + f_1 g_2' - 2f_2 g_0 = -12f_3 g_0'. \quad (11.61b)$$

Границными условиями будут

$$g_0 = 0, g_2 = 0, \dots \text{при } \eta = 0;$$

$$g_0 = 1, g_2 = 0, \dots \text{при } \eta = \infty.$$

Решение уравнения, определяющего g_0 , получается путем квадратуры (Л. Прандтль [72]) и имеет вид

$$g_0(\eta) = \frac{\int\limits_0^{\eta} \left\{ \exp \left(- \int\limits_0^{\eta} f_1 d\eta \right) \right\} d\eta}{\int\limits_0^{\infty} \left\{ \exp \left(- \int\limits_0^{\eta} f_1 d\eta \right) \right\} d\eta}, \quad (11.62)$$

причем $f_1(\eta)$ есть решение для плоского течения с критической точкой. График функции $g_0(\eta)$ изображен на рис. 11.13, а значения функций $g_0(\eta)$ и $g_2(\eta)$ даны в таблице 11.3 (стр. 246). Расчет пограничного слоя на скользящем цилиндре при теоретическом потенциальном распределении скоростей

$$U(x) = u_1 x^m$$

(см. главу IX) дан в двух работах Дж. К. Кука [14], [15].

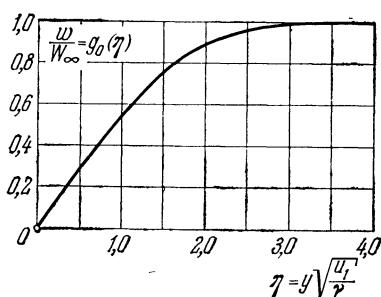


Рис. 11.13. Ламинарный пограничный слой на цилиндре, обдуваемом в косом направлении [течение с критической линией]. Распределение для составляющей скорости вдоль оси цилиндра (см. таблицу 11.3).

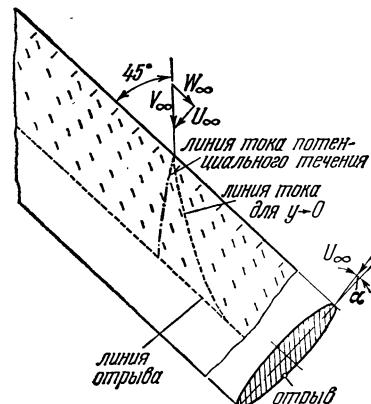


Рис. 11.14. Течение в пограничном слое на скользящем эллиптическом цилиндре, установленном под углом атаки 45° . По Дж. М. Уэйлу [101].

Приближенный метод. Для получения приближенных решений Л. Прандтль в своей работе [72] наметил программу, основанную на использовании теоремы импульсов в том виде, как это было пояснено в § 2 настоящей главы. В частности, уравнения для обтекания скользящего цилиндра получаются из уравнений (11.47) — (11.50), если в первые два из них формально подставить $r = \text{const}$, а для толщины потери импульса в окружном

Таблица 11.3 Значения функций $g_0(\eta)$ и $g_2(\eta)$
для течения с критической линией,
вычисленные по формуле (11.62) и уравнению (11.61б).
По Г. Гёттлеру [34]

$\eta = \nu \sqrt{\frac{u_1}{v}}$	$g_0(\eta)$	$g_2(\eta)$	$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{v}}$	$g_0(\eta)$	$g_2(\eta)$	$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{v}}$	$g_0(\eta)$	$g_2(\eta)$
0	0	0	1,9	0,8702	0,3714	3,7	0,9986	0,0141
0,1	0,0570	0,0521	2,0	0,8913	0,3414	3,8	0,9990	0,0107
0,2	0,1141	0,1040	2,1	0,9098	0,3102	3,9	0,9993	0,0079
0,3	0,1709	0,1554	2,2	0,9257	0,2784	4,0	0,9995	0,0058
0,4	0,2275	0,2056	2,3	0,9393	0,2469	4,1	0,9997	0,0042
0,5	0,2836	0,2538	2,4	0,9509	0,2165	4,2	0,9998	0,0031
0,6	0,3389	0,2992	2,5	0,9606	0,1876	4,3	0,9998	0,0020
0,7	0,3932	0,3408	2,6	0,9686	0,1607	4,4	0,9999	0,0016
0,8	0,4462	0,3778	2,7	0,9753	0,1362	4,5	0,9999	0,0010
0,9	0,4975	0,4092	2,8	0,9807	0,1141	4,6	1,0000	0,0008
1,0	0,5469	0,4345	2,9	0,9850	0,0945	4,7	1,0000	0,0005
1,1	0,5941	0,4531	3,0	0,9885	0,0774	4,8	1,0000	0,0004
1,2	0,6388	0,4647	3,1	0,9913	0,0628	4,9	1,0000	0,0002
1,3	0,6809	0,4692	3,2	0,9934	0,0503	5,0	1,0000	0,0002
1,4	0,7200	0,4668	3,3	0,9951	0,0399	5,1	1,0000	0,0001
1,5	0,7562	0,4580	3,4	0,9964	0,0312	5,2	1,0000	0,0000
1,6	0,7892	0,4431	3,5	0,9973	0,0243	5,3	1,0000	0,0000
1,7	0,8193	0,4232	3,6	0,9981	0,0185	5,4	1,0000	0,0000
1,8	0,8462	0,3989						

направлении использовать формулу

$$\delta_{2xz} = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{w}{W_\infty} \right) dy.$$

Приближенный метод, основанный на этих уравнениях, предложен В. Динеманом [20].

Аналогичный приближенный метод применен Дж. М. Уайлдом [109] для расчета течения с критической линией, возникающего при скользящем движении цилиндра. На рис. 11.14 изображена картина линий тока, полученная в результате такого расчета для скользящего эллиптического цилиндра с отношением осей $6 : 1$, установленного под углом атаки α , дающим коэффициент подъемной силы 0,47. Короткие штрихи, которыми вычерчена линия тока для $y \rightarrow 0$, отмечают направление результирующей скорости, параллельной стенке, в непосредственной близости от последней, т. е. направление $\lim_{y \rightarrow 0} (w/u)$.

Для сравнения показано также направление потенциального течения. Мы видим, что в пограничном слое направление рассматриваемого течения сильно отклонено от направления потенциального течения в сторону того конца цилиндра, который расположен ниже по течению. Существование этого поперечного течения следует иметь в виду при экспериментальном изучении обтекания скользящего крыла с помощью прикрепленных к его поверхности шерстинок.

Стреловидное крыло. Поперечное течение, возникающее в пограничном слое на скользящем цилиндре, имеет существенное значение для аэродинамических свойств стреловидных крыльев. У скользящего и стреловидного крыльев последовательные их сечения сдвинуты одно относительно

другого. Это приводит к тому, что при больших значениях коэффициента подъемной силы на подсасывающей стороне крыла вблизи его носка возникает сильное падение давления по направлению к консольной части крыла (рис. 11.15). Частицы жидкости, заторможенные в пограничном слое, следуют этому градиенту давления, вследствие чего возникает сильное поперечное течение, направленное к консольной части крыла, как это отчетливо показывает пристенная линия тока на рис. 11.14. Как показали измерения Р. Т. Джонса [48] и В. Якобса [47], в результате такого поперечного течения происходит сильное утолщение пограничного слоя на консольной части крыла, что в свою очередь влечет за собой преждевременный отрыв течения от крыла. По этой причине у самолетов со стреловидными крыльями воздушный поток отрывается от крыла прежде всего на его консольной части, в области элерона, что может привести к весьма опасному «сваливанию на крыло». Можно уменьшить наклонность воздушного потока к срыву в консольной части крыла, если установить на крыле перегородки, препятствующие оттеканию пограничного слоя к консольной части крыла. На рис. 11.16 изображен самолет со стреловидным крылом, на каждой половине которого установлено по одной перегородке. О предохраняющих свойствах таких перегородок против преждевременного отрыва потока от крыла сообщил В. Либе [56]. В работе М. Х. Куэйхо, Б. М. Жаке

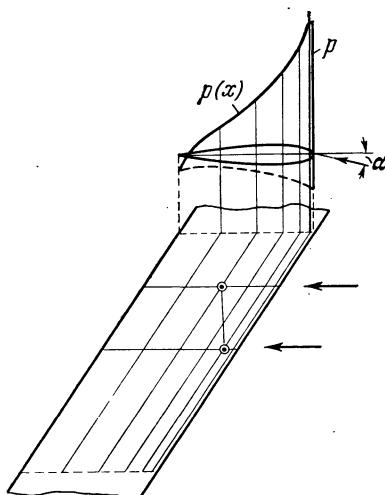


Рис. 11.15. К объяснению возникновения поперечного течения на скользящем крыле, установленном под ненулевым углом атаки. Кривые постоянного давления (изобары) на подсасывающей стороне крыла. Здесь, вблизи передней кромки, возникает сильный градиент давления в направлении, перпендикулярном к главному течению. Этот градиент и является причиной поперечного течения.

Рис. 11.16. Реактивный истребитель «Де Хэвилленд Д. Н. 110» со стреловидным крылом, на котором около внутренних концов элеронов установлены перегородки (по одной на каждой половине крыла). Эти перегородки препятствуют утолщению пограничного слоя на консольных частях крыла. По В. Либе [56].

й В. Д. Вольхарта [76] содержатся многочисленные измерения, проведенные на самолетных моделях с перегородками на крыльях. Дж. Блек [7] и Д. Кюхеман [54] в своих работах приводят подробности о весьма сложных течениях в пограничных слоях на стреловидных крыльях. Согласно исследованиям А. Даза [19], перегородки на стреловидном крыле оказывают существенное влияние на течение в пограничном слое не только с наружной стороны перегородки, но и с внутренней.

Наряду со случаем $W = \text{const}$ [уравнение (11.57)] были рассмотрены также другие допущения о скорости внешнего течения. Г. Г. Лус [7] исследовал трехмерный пограничный слой на плоской пластине при потенциальном внешнем течении

$$U = \text{const}, \quad W = a_0 + a_1 x.$$

А. Г. Ханзен и Г. Ц. Херциг [40] распространяли исследование Г. Г. Луса на более общий случай

$$U = \text{const}, \quad W = \sum_n a_n x^n.$$

Так как эти внешние течения не свободны от вращения частиц, то может случиться, что скорость в пограничном слое окажется больше скорости во внешнем течении. Это произойдет в тех местах, в которые вторичные течения, возникшие в пограничном слое, переносят жидкость из областей с высокой энергией. Далее, может быть и такой случай, когда в пограничном слое сразу возникнет возвратное течение, противоположное направлению основного течения, однако это возвратное течение совсем не будет означать отрыва от обтекаемой стенки, так как дальше вниз по течению оно исчезнет. И это явление объясняется переносом энергии вторичным течением. Из этого примера видно, что при трехмерных пограничных слоях определение отрыва слоя от обтекаемой стенки связано с трудностями, так как связь возвратного течения с касательным напряжением уже не столь простая, как при плоском течении [41], [66]. Как показал Л. Э. Фогарти [28], такое же распадение системы уравнений пограничного слоя на автономные уравнения, как и в случае внешнего течения $U = U(x)$, $W = W(x)$ [уравнения (11.57)], получается при обтекании бесконечно длинного крыла, вращающегося вокруг вертикальной оси (несущий винт вертолета). Это означает, что вращение не влияет на составляющую скорости в направлении хорды крыла, следовательно, и на отрыв пограничного слоя. Вследствие вращения возникают только сравнительно небольшие радиальные скорости.

Решение системы уравнений (11.55) с граничными условиями (11.56) возможно также в том частном случае, когда внешнее течение представляет собой двумерное основное течение в сочетании со слабым возмущающим течением, а именно когда

$$U(x, z) = U_0(x) + U_1(x, z), \quad |U_1| \ll U_0,$$

$$W(x, z) = W_1(x, z), \quad W_1 \ll U_0.$$

В этом случае течение в пограничном слое также распадается на двумерный пограничный слой и на слабое возмущение, дифференциальные уравнения которого после линеаризации распадаются на автономные системы. Примеры течений такого вида указаны А. Мэйджеем [60], [61] и Г. С. Таном [95].

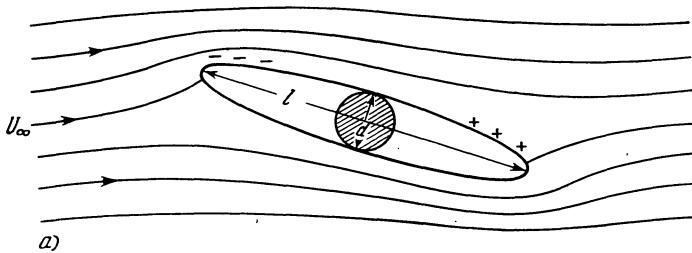
2. Пограничные слои на других телах. В тех случаях, когда внешнее течение не может быть разложено на два простых течения, как это было выше, течение в пограничном слое имеет еще более сложную структуру, чем раньше. Простым примером может служить обтекание косо поставленного тела вращения. В этом случае в пограничном слое возникают скорости, направление которых очень сильно отличается от направления внешнего течения в том же самом месте, другими словами, возникает очень сильное вторичное течение. Представление о сложной структуре таких трехмерных пограничных слоев дает картина течения (рис. 11.17, б) в пограничном слое на верхней половине косо поставленного эллипсоида вращения (рис. 11.17, а). Эта картина течения была сделана видимой Э. А. Эйхельброннером и А. Ударом [21] при помощи окрашенных жидких струек, вытекавших из отверстий на верхней половине поверхности эллипсоида вращения. В частности, эта картина показывает, что поведение трехмерного пограничного слоя в области повышения давления значительно отличается от поведения двумерного (плоского) пограничного слоя. В то время как при плоском течении достаточно сильное повышение давления в направлении течения в общем случае вызывает оттеснение жидкости, текущей в пограничном слое, от стенки внутрь течения и тем самым обуславливает отрыв пограничного слоя (рис. 7.2, б), при трехмерном течении жидкость, текущая в пограничном слое, в области повышения давления может отклоняться вдоль стенки в боковом направлении без отрыва. Такое поведение отчетливо видно на рис. 11.17, б: в области повышения давления вблизи задней критической точки (ср. с рис. 11.17, а) жидкие струйки сильно отклоняются в боковом направлении, но при этом по-прежнему прилегают к поверхности эллипсоида. Теоретически вычисленная картина линий тока (рис. 11.17, в) качественно хорошо совпадает с картиной течения на рис. 11.17, б.

Очевидно, что при столь сложной структуре трехмерного пограничного слоя установление критерия его отрыва от обтекаемого тела представляет собой непростую задачу. Этой задаче посвящены исследования косого обтекания конусов, выполненные В. Дж. Рейнбердом, Р. С. Креббом и Л. С. Юревичем [76а].

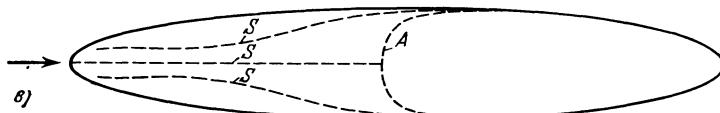
Для численного расчета рассмотренного трехмерного пограничного слоя Л. Прандтль [72] предложил воспользоваться криволинейной системой координат, причем в качестве координатных линий взять линии равного потенциала и линии тока внешнего течения. Это было выполнено Э. А. Эйхельброннером и А. Ударом [21] для ламинарного погранич-

ного слоя. Как уже было сказано выше, получилось хорошее качественное совпадение с картиной течения, изображенной на рис. 11.17, б. См. в связи с этим также работу Р. Тиммана [69].

Распространение метода Польгаузена на вращающиеся системы выполнено Г. Юнгклаусом [49]. Полученные им результаты применены для расчета относительного течения во вращающемся канале (эта задача имеет важное значение для теории центробежного



a)



б)

Рис. 11.17. Течение в трехмерном пограничном слое на верхней половине эллипсоида вращения с отношением осей $l/d = 6$, обтекаемого под углом атаки 10° . а) Схематическая картина линий тока (вид сбоку). б) Фото обтекания верхней половины эллипсоида (снимок сделан в гидродинамическом канале ONE-RA в Шатийоне под Баньё (Париж)). Число Рейнольдса $U_\infty l/v \approx 2 \cdot 10^4$. Течение в пограничном слое было сделано видимым при помощи окрашенных жидкими струек, вытекавших из отверстий на поверхности эллипсоида. В области повышения давления в окрестности задней критической точки линии тока в пограничном слое сильно отклоняются в сторону, что указывает на отрыв трехмерного пограничного слоя. в) Теоретически вычисленные пристенные линии тока (S) и теоретическая линия отрыва (A). Хорошее качественное совпадение с экспериментальной картиной течения на рис. б) По Э. А. Эйхельброннеру и А. Удару [21], [22].

насоса). Метод Г. Юнгклауса позволяет рассчитать также отрыв пограничного слоя, причем результаты хорошо подтверждаются измерениями.

Наконец, упомянем о пограничном слое внутри двугранного угла, образованного двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, обтекаемыми в направлении их линии пересечения. Расчет такого трехмерного пограничного слоя выполнен Г. Ф. Кэррьером [11] и К. Герстеном [31]. Такую же задачу, но для случая сжимаемого течения с теплопередачей рассмотрел М. З. Кшивоблоцки [62], следуя пути, указанному в работе Кэррьера.

Родственной с только что рассмотренной задачей является расчет пограничного слоя вдоль плоской пластины, имеющей кроме передней кромки также боковую кромку, параллельную направлению обтекания («четвертьбесконечная пластина»). Исходные предпосылки, позволяющие теоретически решить эту задачу, принадлежат К. Стоартсону и Л. Хоупарту [62] и К. Стоартсону [63]. Наличие боковой кромки обуславливает появление в пограничном слое вторичного течения, которое, среди прочих последствий, вызывает

повышение касательного напряжения на стенке. Этот вывод подтверждается экспериментальными исследованиями Дж. В. Элдера [23], выполненными для пластин конечной ширины. Однако детали течения в пограничном слое непосредственно на самой боковой кромке остаются пока неясными, что, впрочем, в полной мере относится и к деталям течения непосредственно на передней кромке.

Сводные обзоры о трехмерных пограничных слоях опубликованы В. Р. Сирсом [87], Ф. К. Муром [67], Дж. К. Куком и М. Г. Холлом [18], а также Г. Шлихтингом [84].

Литература к главе XI

1. Andrade E. N., Tsien H. S., The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet. Proc. Phys. Soc. London **49**, 381—391 (1937).
2. Ashkenas H., Riddell F. R., Investigation of the turbulent boundary layer on a yawed flat plate. NACA TN 3383 (1955).
3. Bammert K., Schönen J., Die Strömung von Flüssigkeiten in rotierenden Hohlwellen. Z. VDI **90**, 81—87 (1948).
4. Bammert K., Kläukens H., Nabentwasser hinter Leiträdern von axialen Strömungsmaschinen. Ing.-Arch. **17**, 367 (1949); см. также Bammert K., Z. VDI **92**, 777 (1950).
5. Becker E., Berechnung der Reibungsschichten mit schwacher Sekundärströmung nach dem Impulsverfahren. ZFW **7**, 163—175 (1959); см. также Mitteilg. aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung № 13 (1956) и ZAMM-Sonderheft, 3—8 (1956).
6. Binnie A. M., Harris D. P., The application of boundary layer theory to swirling liquid flow through a nozzle. Quart. J. Mech. Appl. Math. **3**, 89—106 (1950).
7. Black J., A note on the vortex patterns in the boundary layer flow of a sweep-back wing. J. Roy. Aero. Soc. **56**, 279 (1952).
8. Bödewadt Ü. T., Die Drehströmung über festem Grund. ZAMM **20**, 241—253 (1940).
9. Boltze E., Grenzschichten an Rotationskörpern. Диссертация, Göttingen 1908.
10. Burgers J. M., Some considerations on the development of boundary layer in the case of flows having a rotational component. Kon. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam, **45**, № 1—5, 13—25 (1941).
11. Carrier G. F., The boundary layer in a corner. Quart. Appl. Math. **4**, 367—370 (1946).
12. Chu S. T., Tifford A. N., The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution. JAS **21**, 345—346 (1954).
13. Collatz L., Görtler H., Rohrströmung mit schwachem Drall. ZAMP **5**, 95—110 (1954).
14. Cooke J. C., The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders. Proc. Cambr. Phil. Soc. **46**, 645—648 (1950).
15. Cooke J. C., Pohlhausen's method for three dimensional laminar boundary layers. Aero. Quart. **3**, Part I, 51—60 (1951).
16. Cooke J. C., On Pohlhausen's method with application to a swirl problem of Taylor. JAS **19**, 486—490 (1952).
17. Cooke J. C., The flow of fluids along cylinders. Quart. J. Mech. Appl. Math., **10**, 312—321 (1957).
18. Cooke J. C., Hall M. G., Boundary layers in three dimensions. В книге «Progress in Aeronautical Sciences», т. 2, Pergamon Press, London 1962.
19. Das A., Untersuchungen über den Einfluss von Grenzschichtzäunen auf die aerodynamischen Eigenschaften von Pfeil- und Deltaflügeln. Диссертация, Braunschweig 1959; ZFW **7**, 227—242 (1959).
20. Diemann W., Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur, ZAMM **33**, 89—109 (1953).
21. Eichelbrenner E. A., Oudart A., Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle. Application à un corps fuselé incliné sur le vent. ONERA-Publication № 76, Chatillon 1955.
22. Eichelbrenner E. A., Décollement laminaire en trois dimensions sur un obstacle fini. ONERA-Publication № 89, Chatillon 1957.
23. Elder J. W., The flow past a flat plate of finite width. J. Fluid Mech. **9**, 133—153 (1960).
24. Fadnis B. S., Boundary layer on rotating spheroids. ZAMP **V**, 156—163 (1954).
25. Fage A., Experiments on a sphere at critical Reynolds-numbers. ARC RM 1766 (1936).
26. Fogarty L. E., The laminar boundary layer on a rotating blade. JAS **18**, 247—252 (1951).

27. Frössling N., Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds. Univ. Arsskr. N. F., Avd. 2, 35, № 4 (1940).
28. Garbsch K., Über die Grenzschicht an der Wand eines Trichters mit innerer Wirbel- und Radialströmung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 471—486; см. также ZAMM-Sonderheft, 11—27 (1956).
29. Geis Th., Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 294—303.
30. Geis Th., Ähnliches dreidimensionale Grenzschichten. J. Rat. Mech. Analysis 5, 643—686 (1956).
31. Gersten K., Corner interference effects. A GARD-Report № 299 (1959).
32. Glauert M. B., The wall jet. J. Fluid Mech. 1, 625—643 (1956).
33. Glauert M. B., Light hill M. J., The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. Proc. Roy. Soc. London A 230, 188—203 (1955).
34. Görtler H., Die laminare Grenzschicht am schiebenden Zylinder. Arch. d. Math. 3, вып. 3, 216—231 (1952).
35. Görtler H., Decay of swirl in an axially symmetrical jet far from the orifice. Revista Math. Hisp.-Amer. IV, Ser. 14, 143—178 (1954).
36. Grohne D., Zur laminaren Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel. ZAMM-Sonderheft der Göttinger Strömungstagung 17—20 (1956).
37. Gruschwitz E., Turbulente Reibungsschichten mit Sekundärströmung. Ing.-Arch. 6, 355—365 (1935).
38. Hannahn D. M., Forced flow against a rotating disc. ARC RM 2772 (1952).
39. Hansen A. G., Herzog H. Z., Costello G. R., A visualization study of secondary flows in cascades. NACA TN 2947 (1953).
40. Hansen A. G., Herzog H. Z., Cross flows in laminar incompressible boundary layers. NACA TN 3651 (1956).
41. Hayes W. D., The three-dimensional boundary layer. NAVORD-Rep. 1313 (1951).
42. Hoskin N. E., The laminar boundary layer on a rotating sphere. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 127—131.
43. Howarth L., Note on the boundary layer on a rotating sphere. Phil. Mag. VII, 42, 1308—1315 (1951).
44. Howarth L., The boundary layer in three-dimensional flow. Part I. Phil. Mag. VII, 42, 239—243 (1951). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1952, № 3 (13).]
45. Howarth L., The boundary layer in three-dimensional flow. Part. II: The flow near a stagnation point. Phil. Mag. VII, 42, 1433—1440 (1951).
46. Illingworth C. R., The laminar boundary layer of a rotating body of revolution. Phil. Mag. 44, 351—389 (1953). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1954, № 2 (24).]
47. Jacobson W., Systematische Sechskomponentenmessungen an Pfleilflügeln. Ing.-Arch. 18, 344—362 (1950).
48. Jones R. T., Effects of sweep-back on boundary layer and separation. NACA-Rep. 884 (1947).
49. Jungclaus G., Grenzschichtuntersuchungen in rotierenden Kanälen und bei scherenden Strömungen. Mitteilg. aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, № 11, Göttingen 1955.
50. Kelly H. R., A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. Readers' Forum, JAS 21, 634 (1954).
51. Krywoblocki M. Z., On steady, laminar round jets in compressible viscous gases far behind the mouth. Österr. Ing-Arch. 3, 373 (1949).
52. Krywoblocki M. Z., On the boundary layer in a corner by use of the relaxation method. GANITA, т. VII, № 2, 77—112 (1956).
53. Küchemann D., Aircraft shapes and their aerodynamics for flight at supersonic speeds. В книге Advances in Aeronautical Sciences 3, 221—252 (1962).
54. Küchemann D., The effect of viscosity on the type of flow on swept wings. Proc. Symposium Nat. Phys. Lab. (NPL) 1955.
55. Langhaar H., Steady flow in the transition length of a straight tube. J. Appl. Mech. 9, A 55—A 58 (1942).
56. Liebe W., Der Grenzschichtzaun. Interavia 7, 4, 215—217 (1952).
57. Loos H. G., A simple laminar boundary layer with secondary flow. JAS 22, 35—40 (1955). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1956, № 2 (36).]
58. Ludwieg H., Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System. Ing.-Arch. 19, 296 (1951).
59. Luthander S., Rydb erg A., Experimentelle Untersuchungen über den Luftwiderstand bei einer um eine mit der Windrichtung parallelen Achse rotierenden Kugel. Phys. Z. 36, 552—558 (1935).
60. Magerr A., Three-dimensional laminar boundary layer with small cross-flow. JAS 21, 835—845 (1954).

61. M a g e r A., Thick laminar boundary layer under sudden perturbation. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 21—33.
62. M a n g i e r W., Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMM 28, 97—103 (1948).
63. M a r t i n J. C., On the Magnus effects caused by the boundary-layer displacement thickness on the bodies of revolution at small angles of attack. JAS 24, 421—429 (1957).
- 63a. M i c h a l k e A., Theoretische und experimentelle Untersuchungen einer rotations-symmetrischen laminaren Düsengrenzschicht. Ing.-Arch. 31, 268—279 (1962).
64. M i l l i k a n C. B., The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. Trans. ASME 54, № 2, 29—43 (1932).
65. M ö l l e r W., Experimentelle Untersuchungen zur Hydrodynamik der Kugel. Phys. Z. 39, 57—80 (1938).
66. M o o g e F. K., Three-dimensional laminar boundary layer flow. JAS 20, 525—534 (1953).
67. M o o g e F. K., Three-dimensional boundary layer theory. В сб. «Advances in Appl. Mech.», IV, 159—228 (1956). [Имеется русский перевод в сб. «Проблемы механики», вып. II, ИЛ, Москва 1959.]
68. N i g a m S. D., Note on the boundary layer on a rotating sphere. ZAMP V, 151—155 (1954).
69. P a c k D. C., Laminar flow in an axially symmetrical jet of compressible fluid, far from the orifice. Proc. Cambr. Phil. Soc. 50, 98—104 (1954).
70. P a r r O., Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Dreh-körpern bei axialer Anströmung. Диссертация, Braunschweig 1962. Ing.-Arch. 32, 393—413 (1963); см. также Die Strömung um einen axial angestromten rotierenden Drehkörper. Jb. Schiffbautechn. Ges. 53, 260—271 (1959) и Flow in the three-dimensio-nal boundary layer on a spinning body of revolution. AIAA J. 2, 362—363 (1964).
71. P f l e i d e r e r C., Untersuchungen auf dem Gebiet der Kreiselradmaschinen. VDI-Forschungsheft № 295 (1927).
72. P r a n d t l L., Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. В сб. «Betz-Festschrift», 1945, 134—141 или Ges. Abhdlg. 2, 679—686 (1961).
73. P r e t s c h J., Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rota-tionsellipsoiden bei symmetrischer Anströmung. Luftfahrtforschung 18, 397—402 (1941).
74. P r o b s t e i n R. F., E l l i o t D., The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary-layer flow. JAS 23, 208—224 (1956).
75. P u n n i s B., Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr. Диссерта-ция, Göttingen 1947.
76. Q u e i j o M. J., J a q u e t B. M., W o l h a r t W. D., Windtunnel investi-gation at low speed of the effects of chordwise wing fences and horizontal-tail position on the static longitudinal stability characteristics of an airplane model with a 35° swept-back wing. NACA Rep. 1203 (1954).
- 76a. R a i n b i r d W. J., C r a b b e R. S., J u r e w i c z L. S., The flow separation about cones at incidence. Nat. Res. Coun. Canada, DMENAE Quart. Bull. 1963 (2).
77. R o t t N., C r a b b e r e L. F., Simplified laminar boundary layer calculation for bodies of revolution and for yawed wings. JAS 19, 553—565 (1952).
78. S a l j n i k o v V., Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern. DVL-Bericht № 133 (1960).
79. S e b a n R. A., B o n d R., Skin-friction and heat-transfer characteristics of a la-minar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow. JAS 18, 671—675 (1951).
80. S c h i l l e r L., Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Forschg. Ing.-Wes., вып. 428 (1922), а также ZAMM 2, 96—106 (1922) и Phys. Z. 23, 14 (1922).
81. S c h l i c h t i n g H., Laminare Strahlausbreitung. ZAMM 13, 260—263 (1933).
82. S c h l i c h t i n g H., T r u c k e n b r o d t E., Die Strömung an einer angebla-senen rotierenden Scheibe. ZAMM 32, 97—111 (1952).
83. S c h l i c h t i n g H., Die laminare Strömung um einen axial angestromten rotie-renden Drehkörper. Ing.-Arch. 21, 227—244 (1953).
84. S c h l i c h t i n g H., Three-dimensional boundary layer flow. Lecture at the IX Convention of the International Association for Hydraulic Research at Dubrovnik (Jugoslavia), Sept. 1961. Proceedings of the «Neuvième Assemblée Générale de l'Asso-ciation Internationale de Recherches Hydrauliques» Dubrovnik, 1262—1290; см. так-же DFL-Bericht № 195 (1961). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1964, № 3 (85).]
85. S c h o l k e m e y e r F. W., Die laminare Reibungsschicht an rotationssymmetri-schen Körpern. Диссертация, Braunschweig 1943. Выдержки в Arch. d. Math. 1, 270—277 (1949).
86. S e a r s W. R., The boundary layer of yawed cylinders. JAS 15, 1, 49—52 (1948).
87. S e a r s W. R., Boundary layers in three-dimensional flow. Appl. Mech. Rev. 7, 281—285 (1954).

88. Sednay R., Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow. JAS 24, 430—436 (1957).
89. Squire H. B., The round laminar jet. Quart. J. Mech. Appl. Math. 4, 321—329 (1951).
90. Squire H. B., Radial jets. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 47—54.
91. Stewartson K., The asymptotic boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. Quart. Appl. Math. 13, 113—122 (1955).
92. Stewartson K., Howarth L., On the flow past a quarter infinite plate using Oseen's equations. J. Fluid Mech. 7, 1—21 (1960).
93. Stewartson K., Viscous flow past a quarter infinite plate. JAS 28, 1—10 (1961).
94. Talbot L., Laminar swirling pipe flow. Journ. Appl. Mech. 21, 1—7 (1954).
95. Tan H. S., On laminar boundary layer over a rotating blade. JAS 20, 780—781 (1953).
96. Taylor G. I., The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer. Quart. J. Mech. Appl. Math. 3, 129—139 (1950).
97. Tetervin N., Boundary-layer momentum equations for three-dimensional flow. NACA TN 1479 (1947).
98. Tifford A. N., Chu S. T., On the flow around a rotating disc in a uniform stream. JAS 19, 284—285 (1952).
99. Timman R., The theory of three-dimensional boundary layers. В книге «Boundary Layer Effects in Aerodynamics. Proceedings of a Symposium held at NPL», London 1955.
100. Timman R., Zaat J. A., Eine Rechenmethode für dreidimensionale laminare Grenzschichten. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 432—445.
101. Tomotika S., Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream. ARC-Report 1678 (1935).
102. Tomotika S., Mai I., On the transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer of a sphere. Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo 13, 389—423 (1938) и Tomotika S., Proc. Phys. Math. Soc. Japan 20 (1938).
103. Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angestromten rotierenden Drehkörpern. Ing.-Arch. 22, 21—35 (1954).
104. Truckenbrodt E., Die turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe. ZAMM 34, 150—162 (1954).
105. Vogelohl G., Die Strömung der Wirbelquelle zwischen ebenen Wänden mit Berücksichtigung der Wandreibung. ZAMM 24, 289—294 (1944).
106. Weber H. E., The boundary layer inside a conical surface due to swirl. J. Appl. Mech. 23, 587—592 (1956).
107. Wieghardt K., Einige Grenzschichtmessungen an Rotationskörpern. Schifstechnik 3, 102—103 (1955/56).
108. Wieselsberger C., Über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers. Phys. Z. 28, 84—88 (1927).
109. Wild J. M., The boundary layer of yawed infinite wings. JAS 16, 41—45 (1949).
110. Yamaga J., An approximate solution of the laminar boundary layer on a rotating body of revolution in uniform compressible flow. Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 295—298 (1956).
111. Nield J. E., Heat transfer for the Bödewadt problem. Диссертация, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 1971.
112. Fannelöp T. K., A method of solving the three-dimensional laminar boundary-layer equations with application to a lifting reentry body. AIAA J. 6, 1075—1084 (1968).
113. Dwyer H. A., Solution of a three-dimensional boundary-layer flow with separation. AIAA J. 6, 1336—1342 (1968).

Г л а в а XII

Температурные пограничные слои в ламинарном течении¹⁾

§ 1. Составление уравнения энергии

Явление теплопередачи между твердым телом и жидкостью или газообразной текущей средой представляет собой проблему механики потоков. В этом явлении на механическое течение налагается тепловой поток, и в общем случае оба эти потока влияют один на другой. Для того чтобы найти распределение температуры, необходимо связать гидродинамические уравнения движения с уравнением теплопроводности. Из чисто наглядных соображений понятно, что распределение температуры около нагреваемого тела, обтекаемого жидкостью, часто должно обладать особенностями, характерными для пограничного слоя. В самом деле, вообразим тело, помещенное в поток жидкости и нагреваемое так, что его температура остается все время выше температуры жидкости. Если скорость течения более или менее велика, то очевидно, что повышением температуры, вызываемое нагреваемым телом, будет распространяться только на тонкий слой в непосредственной близости от тела и на узкий след позади тела (см. рис. 4.2). Преобладающая часть процесса выравнивания температур между нагреваемым телом и более холодной окружающей средой будет происходить в тонком слое в непосредственной близости от тела. Этот слой, по аналогии с пограничным слоем течения, называется *температурным или тепловым пограничным слоем*. Очевидно, что в процессе такого выравнивания температур гидродинамические явления и явления теплопроводности оказывают друг на друга сильное влияние.

Прежде всего мы должны составить уравнение теплового баланса для движущейся частицы жидкости и присоединить это уравнение к гидродинамическим уравнениям движения. В сжимаемой жидкости тепловой баланс движущейся частицы определяется ее внутренней энергией, теплопроводностью, конвекцией тепла посредством течения и возникновением тепла вследствие внутреннего трения. В сжимаемой среде к перечисленным слагающим теплового баланса следует присоединить работу расширения (или работу сжатия) при изменении объема. Кроме того, в любом случае всегда происходит излучение тепла, однако при умеренной разности температур оно не играет существенной роли, и поэтому в дальнейшем мы не будем его учитывать.

Уравнение теплового баланса составим с самого начала для сжимаемой среды. Рассмотрим объем $\Delta V = dx dy dz$, масса которого равна

$$\Delta M = \rho \Delta V,$$

и проследим за этим объемом при его движении вместе с остальной жидкостью. Количество тепла DQ , подводимое к этому элементу объема в проме-

¹⁾ За переработку этой главы я благодарен К. Герстену.

жуток времени Dt , расходуется, с одной стороны, на увеличение полной энергии DE_G , а с другой стороны, на выполнение работы DA , следовательно, имеет место соотношение

$$\frac{DQ}{Dt} = \underbrace{\frac{DE_G}{Dt}}_{\text{энергия}} + \underbrace{\frac{DA}{Dt}}_{\text{работка}} (\text{дж/сек})^1. \quad (12.1)$$

Все входящие в это соотношение производные — субстанциальные. В общем случае они распадаются на локальные и конвективные составляющие.

Так как мы условились не учитывать излучение тепла, то подвод тепла возможен только вследствие теплопроводности. Согласно Фурье, поток тепла q ($\text{дж}/\text{м}^2\text{сек}$) через площадь F , иными словами, количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени, пропорционален градиенту температуры в направлении, перпендикулярном к площади F , т. е.

$$\frac{1}{F} \frac{DQ}{Dt} = q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (12.2)$$

где λ ($\text{дж}/\text{м сек град}$) есть коэффициент теплопроводности. Знак минус показывает, что поток тепла считается положительным в направлении, в котором температура уменьшается. Следовательно, через левую грань элемента объема $\Delta V = dx dy dz$ (рис. 12.1), перпендикулярную к направлению x , в объем ΔV в единицу времени поступает количество тепла

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz,$$

а через правую грань, перпендикулярную к направлению x , из объема ΔV в единицу времени уходит количество тепла

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz.$$

Таким образом, в элемент объема ΔV подводится вследствие теплопроводности в промежуток времени Dt в направлении x количество тепла

$$DQ_x = Dt dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Полный подвод тепла вследствие теплопроводности в элемент объема ΔV в промежуток времени Dt равен

$$DQ = Dt \Delta V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]. \quad (12.3)$$

Изменение полной энергии DE_G , если пренебречь изменением потенциальной энергии, обусловленным полем тяжести, состоит из изменения внутренней энергии $DE = \rho \Delta V De$, где e есть удельная внутренняя энергия, и изменения кинетической энергии $D \left(\frac{1}{2} \rho \Delta V w^2 \right)$, где $w(u, v, w)$ есть вектор скорости. Следовательно, мы имеем

$$\frac{DE_G}{Dt} = \rho \Delta V \left[\frac{De}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (12.4)$$

¹⁾ В качестве единицы работы и энергии здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться джоулем; 1 джоуль (дж) = 1 ньютонметру ($\text{н}\cdot\text{м}$).

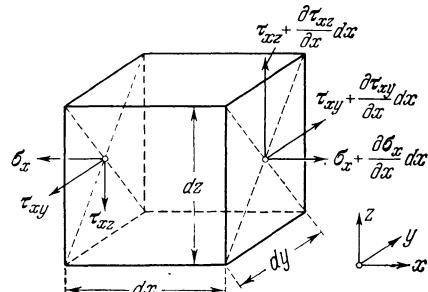


Рис. 12.1. Касательные напряжения на элементе объема.

Для определения работы DA подсчитаем сначала работу, выполненную в элементе объема ΔV в единицу времени, например, нормальным напряжением σ_x . Согласно рис. 12.1 мы получим

$$DA_{\sigma_x} = -dy dz \left[-u\sigma_x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \right] = -\Delta V \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x). \quad (12.5)$$

Знак минус поставлен потому, что на основании соотношения (12.1) работу, подведенную к газу извне, следует считать отрицательной. Следовательно, полной работой, выполненной в элементе объема ΔV в промежуток времени Dt всеми нормальными и касательными напряжениями, будет

$$DA = -\Delta V \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_z) \right]. \quad (12.6)$$

В этом выражении $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zy}$ означают напряжения, определяемые равенствами (3.20) и (3.25). Внеся выражения (12.3), (12.4) и (12.6) в уравнение (12.1) и приняв во внимание уравнения (3.11), после промежуточных преобразований получим

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi, \quad (12.7)$$

где функция Φ равна

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (12.8)$$

и называется *диссилиативной функцией*.

Уравнение (12.7) имеющее общий характер, для большей части практических случаев может быть преобразовано к соответствующему специальному виду. При этом, однако, необходимо проводить строгое различие между случаем идеального газа и случаем несжимаемой жидкости. Последняя не может рассматриваться как предельный случай идеального газа. В самом деле, для идеального газа изменение внутренней энергии и изменение энтальпии равны соответственно

$$De = c_v DT \quad \text{и} \quad Di = c_p DT,$$

в то время как для несжимаемой жидкости эти величины равны соответственно

$$De = c DT \quad \text{и} \quad Di = c DT + \frac{1}{\rho} Dp.$$

Для идеального газа, если учесть уравнение неразрывности (3.1), взяв его в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (12.9)$$

и, кроме того, принять во внимание, что

$$c_p DT = c_v DT + D \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (12.10)$$

уравнение (12.7) принимает после некоторых преобразований следующий вид:

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \mu \Phi.} \quad (12.11)$$

Это уравнение называется *уравнением энергии*. Входящая в него величина c_p ($\text{дж}/\text{кг град}$) носит название *удельной теплоемкости при постоянном давлении, отнесеной к единице массы}*. В общем случае c_p зависит от температуры. При постоянном коэффициенте теплопроводности λ уравнение (12.11) упрощается и принимает вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{Dp}{Dt} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi. \quad (12.12)$$

Для несжимаемой среды $\operatorname{div} w = 0$. В этом случае $D\Phi = c DT$ и уравнение (12.7) при постоянном λ принимает более простой вид:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi. \quad (12.13)$$

§ 2. Повышение температуры, возникающее вследствие адиабатического сжатия

В тепловом балансе сжимаемого течения важную роль играет повышение температуры, вызываемое динамическими изменениями давления. Для выполнения последующих расчетов целесообразно сравнить разность температур, возникающую вследствие выделения тепла при трении, с разностью температур, возникающей вследствие сжатия. Поэтому прежде всего вычислим повышение температуры, возникающее вследствие сжатия при течении без трения. Если в таком течении давление и скорость вдоль линии тока изменяются, то вдоль этой линии тока изменяется также температура. С целью упрощения исследования примем, что изменение состояния происходит адиабатически. Это вполне допустимо, так как в общем случае вследствие малой теплопроводности и большой скорости, с которой происходят изменения состояния, не возникает сколько-нибудь заметного теплообмена с окружающей средой.

В частности, вычислим повышение температуры $(\Delta T)_{\text{ад}} = T_0 - T_\infty$, возникающее при адиабатическом изменении состояния в передней критической точке обтекаемого тела вследствие повышения здесь давления от p_∞ до p_0 (рис. 12.2).

Предположим, что течение стационарное и происходит без трения. Тогда, если пренебречь теплопроводностью, уравнение энергии (12.11) сильно упрощается и принимает вид

$$\rho c_p w \frac{dT}{ds} = w \frac{dp}{ds}.$$

Это уравнение устанавливает связь между изменением температуры и изменением давления вдоль линии тока; s есть координата, измеряемая вдоль линии тока, а $w(s)$ — скорость вдоль линии тока. Разделив обе части полученного уравнения на ρw и проинтегрировав вдоль линии тока, мы получим

$$c_p (T - T_\infty) = \int_{s_\infty}^s \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Для сжимаемого течения в соответствии с уравнением Бернуlli мы имеем

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

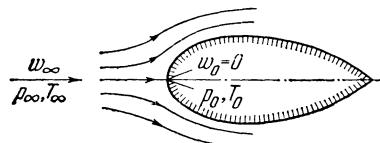


Рис. 12.2. К вычислению повышения температуры, возникающего в критической точке при адиабатическом сжатии; $(\Delta T)_{\text{ад}} = T_0 - T_\infty$.

Таблица 12.1 Физические характеристики некоторых веществ ($1 \text{ дж} = 1 \text{ н}\cdot\text{м}$; $1 \text{ кДж}/\text{кг град} = 10^3 \text{ н}^2/\text{сек}^2\text{град}$)

Вещество	Температура		Удельная теплоемкость c_p		Теплопроводность λ		Температуропроводность		Вязкость $\mu \cdot 10^6$		Кинемат. вязкость $\nu \cdot 10^6$		Число Прандтля P_r
	t °C	T °K	$\frac{\text{кДж}}{\text{кг град}}$	$\frac{\text{ккал}}{\text{кг град}}$	$\frac{\partial \lambda}{\text{ж сек град}}$	$\frac{\lambda \text{кал}}{\text{ж час град}}$	$\alpha \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$	$\alpha \cdot 10^4 \frac{\text{м}^2}{\text{час}}$	$\frac{\kappa_2}{\text{ж сек}}$	$\frac{\kappa_1}{\text{ж}^2}$	$\frac{\kappa^2}{\text{сек}}$		
Вода (при 1 ат)	20	293	4,183	0,999	0,598	0,514	0,143	5,16	1 000	102,5	1,006	7,03	
	40	313	4,179	0,998	0,627	0,539	0,151	5,44	654	66,6	0,658	4,35	
	60	333	4,191	1,001	0,650	0,560	0,159	5,71	470	47,9	0,478	3,01	
	80	353	4,199	1,003	0,670	0,575	0,164	5,91	354	36,1	0,364	2,22	
	100	373	4,215	1,007	0,681	0,586	0,169	6,08	276	28,1	0,294	1,75	
Ртуть	20	293	0,138	0,033	9,3	8	5	180	1 560	159	0,115	0,023	
Моторное масло «Rotring» (1 ат)	20	293	1,84	0,439	0,145	0,125	0,088	3,18	796 000	81 192	892	10 100	
	40	313	1,92	0,459	0,143	0,123	0,084	3,04	204 000	20 808	231	2 750	
	60	333	2,00	0,479	0,141	0,121	0,081	2,92	71 300	7 262	82	1 020	
	80	353	2,10	0,499	0,140	0,120	0,078	2,81	31 500	3 213	37	471	
Воздух (1 ат)	-50	223	1,006	0,240	0,0205	0,0176	13,1	473	14,6	1,49	9,5	0,72	
	0	273	1,006	0,240	0,0242	0,0208	19,2	693	17,1	1,74	13,6	0,71	
	50	323	1,006	0,240	0,0278	0,0239	26,2	942	19,6	2,00	18,6	0,71	
	100	373	1,009	0,241	0,0310	0,0267	33,6	1210	21,8	2,22	23,8	0,71	
	200	473	1,028	0,245	0,0368	0,0316	49,7	1790	25,9	2,64	35,9	0,71	
	300	573	1,048	0,250	0,0430	0,0369	69,0	2480	29,6	3,02	49,7	0,72	

Внеся значение интеграла в предыдущее уравнение, мы найдем повышение температуры, возникающее вследствие адиабатического сжатия:

$$T - T_{\infty} = \frac{1}{2c_p} (w_{\infty}^2 - w^2), \quad (12.14a)$$

где w_{∞} есть скорость набегающего на тело потока в бесконечности (рис. 12.2). В частности, повышение температуры в критической точке ($w = 0$) равно

$$T_0 - T_{\infty} = (\Delta T)_{\text{ад}} = \frac{w_{\infty}^2}{2c_p}. \quad (12.14b)$$

Температура T_0 , которую текущая среда принимает при скорости, равной нулю, называется *температурой торможения* или *температурой покоя*. Разность $(\Delta T)_{\text{ад}} = T_0 - T_{\infty}$ между температурой торможения и температурой набегающего течения называется *повышением температуры вследствие адиабатического сжатия*.

Уравнение (12.14a), которое также можно назвать уравнением Бернулли для сжимаемого течения, выведено в предположении, что движение в потоке обратимо, т. е. энтропия остается постоянной вдоль линии тока. В действительности уравнение (12.14a) имеет более общий характер, чем это может показаться на первый взгляд; а именно, оно применимо к любому одномерному течению, например к течению через узкое сопло (при условии, что отсутствует теплообмен с внешней средой), независимо от того, остается энтропия постоянной или нет. Уравнение (12.14a) можно рассматривать приближенно как правильное также вдоль линии тока стационарного трехмерного течения¹⁾. Для воздуха, удельная теплоемкость которого равна $c_p = 1,006 \text{ кдж/кг град}$, повышение температуры вследствие адиабатического сжатия при скорости течения $w_{\infty} = 100 \text{ м/сек}$ составляет

$$(\Delta T)_{\text{ад}} = \frac{100^2}{2 \cdot 1,006 \cdot 10^3} = 5,0^\circ \text{ С.}$$

График уравнения (12.14) для воздуха изображен на рис. 12.3. Значения удельной теплоемкости c_p , коэффициента теплопроводности λ и некоторых других физических характеристик для воды, ртути, моторного масла и воздуха даны в таблице 12.1.

§ 3. Теория подобия в теплопередаче

Если при движении жидкости разности температур приводят к появлению разностей плотности, то к активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

¹⁾ Ср. с уравнением (10) на стр. 761 книги «Modern Developement in Fluid Dynamics. High-Speed Flow» edited by L. Howarth, Clarendon Press, 1953. [Имеется русский перевод: Х о у а р т Л., Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. I, II, ИЛ, Москва 1956. — Прим. перев.]

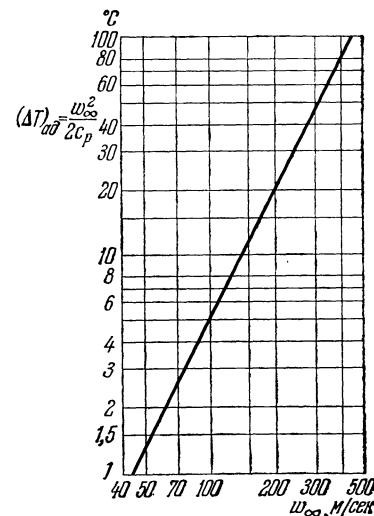


Рис. 12.3. Повышение температуры при адиабатическом сжатии в критической точке для воздуха по формуле (12.14); $c_p = 1,006 \text{ кдж/кг град.}$

Пусть β есть коэффициент кубического расширения, который для совершенного газа равен $\beta = 1/T$, и $\vartheta = T - T_\infty$ — повышение температуры нагретой частицы жидкости по сравнению с температурой частиц, оставшихся ненагретыми. Тогда относительным изменением объема нагретой частицы будет $\varrho\vartheta$ и, следовательно, архимедова подъемная сила на единицу объема будет равна $\rho g \vartheta$, где ρ есть плотность жидкости до нагревания, а \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения с составляющими g_x , g_y , g_z . Будем учитывать в уравнениях Навье — Стокса только эту массовую силу, а коэффициент вязкости будем считать постоянным. Тогда уравнения Навье — Стокса (3.29) и уравнение неразрывности (3.30) для стационарного сжимаемого течения примут вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (12.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \beta \vartheta + \mu \left[\Delta u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{w} \right], \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \beta \vartheta + \mu \left[\Delta v + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{w} \right], \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \beta \vartheta + \mu \left[\Delta w + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{w} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнение энергии (12.12), которое при постоянных физических характеристиках c_p , λ и μ принимает вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\ &\quad + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Phi, \end{aligned} \quad (12.17)$$

причем диссипативная функция Φ по-прежнему определяется равенством (12.8). Наконец, для газов следует еще добавить уравнение состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (12.18)$$

Таким образом, в общем случае сжимаемой среды мы имеем систему из шести уравнений (12.15) — (12.18) с шестью неизвестными u , v , w , p , ρ , T ¹⁾. Для несжимаемых сред (жидкостей) последнее уравнение, а также члены $u \partial p / \partial x$ и т. д., учитывающие в уравнении энергии работу сжатия, отпадают, и остаются пять уравнений для пяти неизвестных u , v , w , p , T .

Прежде чем перейти к рассмотрению известных решений системы уравнений (12.15) — (12.18), остановимся сначала на некоторых соображениях о подобии [82], которые покажут нам, от каких безразмерных параметров зависят решения этих уравнений. Для этой цели введем в уравнения (12.16) и (12.17) безразмерные величины совершенно таким же путем, как мы это сделали в § 1 главы IV при выводе закона подобия Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса. Длины отнесем к некоторой подходящим образом выбранной характерной длине l , скорость — к скорости U_∞ набегающего потока, давление — к удвоенному динамическому давлению $\rho_\infty U_\infty^2$, а плотность — к плотности ρ_∞ набегающего течения. Разность $\vartheta = T - T_\infty$ между температурой в какой-либо точке потока и температурой на большом

¹⁾ Так как мы приняли коэффициент вязкости постоянным, то полученная система уравнений пригодна только для течений с умеренной разностью температур. При больших разностях температур (свыше 50°) следует учитывать зависимость μ от температуры. В этом случае уравнения Навье — Стокса сохраняют свой полный вид (3.29) и к полученной системе из шести уравнений следует присоединить еще эмпирический закон $\mu(T)$ [см. уравнение (13.3)]. Тогда мы будем иметь семь уравнений для семи неизвестных u , v , w , p , ρ , T , μ .

расстоянии от тела сделаем безразмерной, разделив ее на разность температур тела и жидкости на большом расстоянии от тела, т. е. на $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$. Для полученной безразмерной температуры $(T - T_\infty)/(\Delta T)_0$ введем обозначение Φ^* . Такой же звездочкой отметим и все остальные безразмерные величины. Тогда, если мы ограничимся плоской задачей, первое из уравнений движения (12.16) после замены в нем g_x на $g \cos \alpha$ и уравнение энергии (12.17) примут вид

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{g \beta l (\Delta T)_0}{U_\infty^2} \rho^* \Phi^* \cos \alpha + \\ + \frac{\mu}{\rho_\infty c_p U_\infty l} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (12.19)$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p U_\infty l} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) + \\ + \frac{U_\infty^2}{c_p (\Delta T)_0} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\mu U_\infty}{\rho_\infty c_p l (\Delta T)_0} \Phi^*. \quad (12.20)$$

В последнем уравнении через Φ^* обозначена безразмерная диссипативная функция, определяемая равенством (12.8):

$$\Phi^* = 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2.$$

Из уравнений (12.19) и (12.20) мы видим, что их решения зависят от следующих пяти безразмерных величин:

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty l}{\mu}; \quad \frac{g \beta l (\Delta T)_0}{U_\infty^2}; \quad \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p U_\infty l}; \quad \frac{U_\infty^2}{c_p (\Delta T)_0} \frac{\mu U_\infty}{\rho c_p l (\Delta T)_0}.$$

Первая из этих величин есть уже известное нам число Рейнольдса. Четвертая и пятая величины отличаются одна от другой только множителем Re , следовательно, всего мы имеем только *четыре* различных безразмерных величины. Вторая из них может быть представлена в виде произведения двух множителей:

$$\frac{g \beta l (\Delta T)_0}{U_\infty^2} = \frac{g \beta l^3 (\Delta T)_0}{v^2} \frac{v^2}{U_\infty^2 l^2} = Gr \frac{1}{Re^2}.$$

Первый множитель, т. е. величина

$$Gr = \frac{g \beta l^3 (\Delta T)_0}{v^2}, \quad (12.21)$$

называется *числом Грасгофа*. Третья из указанных безразмерных величин также может быть представлена в виде произведения двух сомножителей:

$$\frac{\lambda}{\rho_\infty c_p U_\infty l} = \frac{a}{U_\infty l} = \frac{a}{v} \frac{v}{U_\infty l} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re},$$

где

$$a = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p} \quad (12.22)$$

есть коэффициент температуропроводности ($м^2/сек$). Безразмерная величина

$$Pr = \frac{v}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (12.23)$$

называется *числом Прандтля*¹⁾ и зависит только от физических характе-

¹⁾ В теории теплопроводности используется также безразмерное число

$$Pe = \frac{U_\infty l}{a},$$

называемое *числом Пекле* и связанное с числом Прандтля соотношением $Pe = Pr \cdot Re$.

ристик среды. Для воздуха $\text{Pr} \approx 0,7$, а для воды при 20°C $\text{Pr} \approx 7$. Для масел, вследствие их большей вязкости, число Прандтля значительно больше и достигает 1000 (см. таблицу 12.1). Наконец, четвертая из указанных выше безразмерных величин непосредственно связана с повышением температуры, вызываемым адиабатическим сжатием и вычисленным в предыдущем параграфе [формула (12.14)]. В самом деле,

$$\frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} = 2 \frac{(\Delta T)_{\text{ад}}}{(\Delta T)_0} = E_c^{-1}. \quad (12.24)$$

Безразмерная величина E_c называется **числом Эккерта**. Величина $E_c = U_\infty^2/c(\Delta T)_0$ сохраняет смысл и для несжимаемых жидкостей, однако наглядное ее толкование в связи с повышением температуры, вызываемым адиабатическим сжатием, теперь отпадает. Отсюда вытекает следующий вывод: выделение тепла вследствие трения и сжатия существенно для температурного поля только в том случае, когда скорость набегающего потока U_∞ столь велика, что повышение температуры $(\Delta T)_{\text{ад}}$, вызываемое адиабатическим сжатием, по своей величине одного порядка с наперед заданной разностью температур $(\Delta T)_0$ тела и потока вдали от тела.

Число Эккерта E_c связано с числом Маха Ma . В самом деле, согласно уравнению состояния идеальных газов мы имеем

$$\frac{p_\infty}{p_\infty} = RT_\infty = T_\infty(c_p - c_v) = c_p T_\infty \frac{\kappa - 1}{\kappa},$$

где $\kappa = c_p/c_v$ есть отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Отсюда для скорости звука получаем соотношение

$$c_\infty^2 = \frac{\kappa p_\infty}{\rho_\infty} = T_\infty c_p (\kappa - 1).$$

Поэтому

$$E_c = \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} = \frac{U_\infty^2}{c_p T_\infty} \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0} = (\kappa - 1) \frac{U_\infty^2}{c_\infty^2} \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0} = (\kappa - 1) Ma^2 \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0},$$

следовательно,

$$E_c = (\kappa - 1) Ma^2 \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0}, \quad (12.25)$$

где $Ma = U_\infty/c_\infty$ есть число Маха. Таким образом теплота, возникающая вследствие трения и сжатия, играет существенную роль только в тех случаях, когда скорость набегающего потока и скорость звука сравнимы по своей величине и заданная разность температур по порядку величины такая же, как абсолютная температура окружающей среды, что имеет место при полете ракет на очень большой высоте.

Из приведенных соображений о подобии следует, что поля скоростей и температур, получаемые в качестве решений системы уравнений (12.13) — (12.18), зависят от следующих четырех безразмерных величин:

$$\left. \begin{array}{l} \text{числа Рейнольдса } Re = \frac{U_\infty l}{v}, \\ \text{числа Прандтля } Pr = \frac{v}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \\ \text{числа Грасгофа } Gr = \frac{g \beta l^3 (\Delta T)_0}{v^2}, \\ \text{числа Эккерта } E_c = \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0}. \end{array} \right\} \quad (12.26)$$

1) Отношение двух температур $2(\Delta T)_{\text{ад}}/(\Delta T)_0$ иногда называют **числом Шидфта**.

Если $(\Delta T)_0 \approx T_\infty$, то число Эккерта определяется согласно равенству (12.25) только значением числа Маха $Ma = U_\infty/c_\infty$. Условия подобия для течений с теплопередачей рассмотрены также в работе П. Фишера [30a].

В практических задачах в большей части случаев не требуется знать все особенности температурного и скоростного полей. В отношении температурного поля обычно необходимо знать в первую очередь количество тепла, передаваемого от обтекаемого тела к жидкости (или наоборот). Это количество тепла можно выразить через коэффициент теплопередачи α , определяемый либо для каждой отдельной точки обтекаемой поверхности, либо для всей поверхности в виде некоторого среднего значения. Произведение коэффициента теплопередачи на разность температур стенки и жидкости, находящейся на большом расстоянии от стенки, и дает то количество тепла $q(x)$, которое переходит в рассматриваемой точке x от тела к жидкости через единицу площади в единицу времени (*поток тепла*). Таким образом,

$$q(x) = \alpha(x)(T_w - T_\infty) = \alpha(x)(\Delta T)_0. \quad (12.27)$$

За единицу измерения коэффициента теплопередачи α в системе единиц килограмм-масса, метр, секунда обычно принимается $\text{дж}/\text{м}^2 \text{сек град}$.

На границе между твердым телом и жидкостью теплопередача осуществляется только посредством теплопроводности. Поток тепла, согласно Фурье, пропорционален градиенту температуры в направлении, перпендикулярном к стенке, и равен, в соответствии с формулой (12.2),

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (12.28)$$

Из сопоставления равенств (12.27) и (12.28) мы видим, что вместо местного размерного коэффициента теплопередачи $\alpha(x)$ можно ввести безразмерный коэффициент теплопередачи $Nu(x)$, определяемый следующим способом:

$$Nu(x) = \frac{\alpha(x)l}{\lambda} = - \left(\frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right)_{n^*=0} = - \frac{l}{(\Delta T)_0} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}.$$

Число Nu называется *числом Нуссельта* [70]. Пользуясь этим безразмерным числом, можно представить поток тепла $q(x)$ формулой

$$q = \frac{\lambda}{l} Nu(T_w - T_\infty) = \frac{\lambda}{l} Nu(\Delta T)_0. \quad (12.29)$$

Из всего сказанного выше можно ожидать, что скоростное и температурное поля, а также число Нуссельта являются функциями, во-первых, координаты точки, а во-вторых, безразмерных чисел Re , Pr , Gr , Ec , следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{U_\infty} &= f_1(s^*, Re, Pr, Gr, Ec), \\ \frac{T - T_\infty}{(\Delta T)_0} &= f_2(s^*, Re, Pr, Gr, Ec), \\ Nu &= f_3(s^*, Re, Pr, Gr, Ec). \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

В каждом из этих соотношений три безразмерные координаты точки обозначены одной буквой s^* . Второе соотношение показывает, что для подобных явлений должно быть одинаковым также отношение $T_\infty/(\Delta T)_0$ (см. работу [30a]). Если вместо местного безразмерного коэффициента теплопередачи взять средний безразмерный коэффициент теплопередачи для всей поверхности тела, для чего надо выполнить интегрирование по поверхности рассматриваемого тела, то координаты точки выпадут, и вместо третьего соотношения мы получим

$$Nu_{cp} = f(Re, Pr, Gr, Ec). \quad (12.30a)$$

В задачах, которым будут посвящены следующие параграфы, нам придется иметь дело с распределением скоростей, распределением температур и коэффициентом теплопередачи не в их самом общем виде (12.30), а в более частном, зависящем от специфических особенностей задачи, и поэтому при решении отдельных задач достаточно будет учитывать не все из перечисленных параметров, а только некоторые.

Как показывает соотношение (12.25), зависимость температурного поля, а вместе с ним и коэффициента теплопередачи от безразмерного числа Эккерта E_s проявляется в случае значительной разности температур (от 50 до 100 градусов) только при очень больших скоростях течения — порядка скорости звука, а в случае умеренной скорости течения — только при малых разностях температур (около нескольких градусов). Далее, архимедова подъемная сила, входящая в уравнение (12.19) и вызванная разностями температур, уже при умеренно больших скоростях становится малой по сравнению с силами инерции и силами трения, в связи с чем отпадает зависимость теплопередачи от числа Грасгофа. Следовательно, для такого рода течений, называемых *вынужденными конвективными течениями*,

$$Nu_{cp} = f(Re, Pr).$$

Число Грасгофа играет существенную роль при очень малых скоростях течения, и притом вызванных именно архимедовой подъемной силой; подобного рода случай мы имеем, например, в восходящем потоке воздуха около нагретой пластины, поставленной вертикально. Для таких течений, называемых *естественными конвективными течениями*, отпадает зависимость теплопередачи от числа Рейнольдса, следовательно, для них

$$Nu_{cp} = f(Gr, Pr).$$

Примеры вынужденных и естественных конвективных течений мы рассмотрим в §§ 5—8 настоящей главы.

§ 4. Составление уравнений температурного пограничного слоя

Как уже было сказано в самом начале настоящей главы, во многих случаях из чисто наглядных соображений ясно, что температурное поле в окрестности обтекаемого нагреватого тела обладает свойствами, характерными для пограничного слоя. Применяя такое выражение, мы имеем в виду следующее: повышение температуры, вызываемое нагретым телом, распространяется в основном только на узкую зону в непосредственной близости от тела; за пределами же этой зоны повышение температуры получается незначительным. Такое распределение температуры особенно резко выражено в тех случаях, когда коэффициент теплопроводности λ мал, как это имеет место для жидкостей и газов. В этих случаях вблизи тела возникает резкий температурный градиент в направлении, перпендикулярном к стенке, и только в тонком, прилежащем к стенке слое теплопередача посредством теплопроводности по своей величине имеет одинаковый порядок с теплопередачей посредством конвекции. С другой стороны, можно предполагать, что при обтекании ненагреватого тела повышение температуры вследствие трения получается при больших числах Рейнольдса более или менее значительным также только в тонком слое вблизи тела, так как только здесь трение вызывает заметное преобразование кинетической энергии в тепловую. Следовательно, и в этом случае можно ожидать, что в сочетании с динамическим пограничным слоем образуется температурный пограничный слой. Но тогда очевидно, что в уравнении энергии, дающем распределение температур, можно произвести такого же рода упрощения, какие были сделаны в уравнениях Навье — Стокса при выводе уравнений пограничного слоя (§ 1 главы VII).

В предыдущем параграфе мы привели одно из уравнений движения и уравнение энергии к безразмерному виду (12.19) и (12.20), разделив для этого все скорости на скорость набегающего потока U_∞ , все длины — на некоторую характерную длину l , а температуру — на разность температур $(\Delta T)_0$ нагретого тела и жидкости вдали от тела. В настоящем параграфе мы рассмотрим для простоты только плоскую задачу, причем примем, что главное направление течения совпадает с направлением x ; кроме того, физические характеристики жидкой среды примем постоянными. В таком случае уравнения (12.19) и (12.20) можно переписать в следующем виде:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Gr}{Re^2} \rho \vartheta \cos \alpha + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (12.31a)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta_D \frac{1}{\delta_D} \quad 1 \quad \delta_D^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta_D^2}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + Ec \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + Ec \frac{1}{Re} \Phi. \quad (12.31b)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta_D \frac{1}{\delta_T} \quad \delta_T^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta_T^2} \quad 1 \quad 1 \quad \delta_D \delta_D \quad \delta_D^2 \quad \frac{1}{\delta_D^2}$$

Звездочки, примененные ранее для обозначения безразмерных величин, сейчас для упрощения записи мы отбросили.

В § 1 главы VII мы уже произвели оценку отдельных величин, определяющих динамический пограничный слой. Полученные там порядки величин вновь подпишем под соответствующими членами уравнений (12.31a), причем толщину динамического пограничного слоя обозначим через δ_D , а толщину температурного пограничного слоя — через δ_T . Наиболее существенный результат этой оценки заключался в том, что величина сил трения имеет одинаковый порядок с силами инерции только в том случае, если толщина динамического пограничного слоя δ_D удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\delta_D}{l} \right)^2 \sim \frac{1}{Re}. \quad (12.32)$$

Этот результат позволил нам пренебречь в первом уравнении движения величиной $\partial^2 u / \partial x^2$ по сравнению с величиной $\partial^2 u / \partial y^2$ и, кроме того, целиком отбросить второе уравнение движения. Отсюда мы пришли к выводу, что градиент давления поперек пограничного слоя пропорционален толщине δ_D пограничного слоя, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \delta_D,$$

и, следовательно давление в пограничном слое зависит только от координаты x . Сейчас в уравнении (12.31a) без оценки остался только член Gr/Re^2 . Легко видеть, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если

$$Gr \approx Re^2.$$

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Произведем теперь аналогичную оценку и для отдельных членов уравнения энергии. Для жидкостей и газов безразмерное число, входящее в виде множителя в члены, зависящие от теплопроводности, а именно число

$$\frac{\lambda}{\rho_\infty c_p U_\infty l} = \frac{\lambda}{c_p \mu} \frac{1}{Re} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re},$$

очень мало при больших числах Рейнольдса, так как число Прандтля имеет для газов порядок 1, а для жидкостей — от 10 до 1000. Следовательно, члены, зависящие от теплопроводности, могут быть одинаковы по своему порядку с членами, зависящими от конвекции тепла, только в том случае, если температурный градиент $\partial\theta/\partial y$ очень велик, т. е. если вблизи обтекаемого тела имеется слой с резким изменением температуры в направлении, перпендикулярном к стенке, короче говоря, если имеется температурный пограничный слой. Пусть δ_T есть толщина этого слоя. Тогда для членов, зависящих от конвекции и трения, мы получим оценки, поданные под каждым из этих членов¹⁾. Из этих оценок видно, что при учете теплопроводности членом $\partial^2\theta/\partial x^2$ можно пренебречь по сравнению с членом $\partial^2\theta/\partial y^2$ и что перенос тепла вследствие теплопроводности будет одного порядка с переносом тепла вследствие конвекции только в том случае, если толщина температурного пограничного слоя удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\delta_T}{l}\right)^2 \sim \frac{1}{Re \cdot Pr}. \quad (12.33)$$

Связав это соотношение с соотношением (12.32) для толщины динамического пограничного слоя, мы получим

$$\frac{\delta_T}{\delta_D} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \quad (12.34)$$

Соотношение (12.34) дает наглядное толкование числу Прандтля. Оно показывает, что в газах толщина температурного пограничного слоя примерно одного порядка с толщиной динамического пограничного слоя (так как для газов число Прандтля близко к единице), в жидкостях же температурный пограничный слой тоньше динамического пограничного слоя.

Оценка остальных членов в уравнении энергии с учетом упрощений, произведенных в уравнении движения, показывает, что в диссипативной функции следует сохранить только член $(du/dy)^2$, следовательно,

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{1}{\delta_D^2}.$$

Таким образом, количество тепла, возникающее вследствие трения, более или менее значительно только при условии, что

$$Ec = \frac{U_{\infty}^2}{c_p (\Delta T)_0} \sim 1.$$

Для газов это условие можно сформулировать следующим образом: количество тепла, возникающее вследствие трения, получается существенным только в том случае, когда повышение температуры, вызванное адиабатическим сжатием, по своей величине одного порядка с разностью температур обтекаемого тела и жидкости. То же самое относится и к теплу, возникающему вследствие сжатия.

Вернемся к размерной записи уравнений и учтем зависимость вязкости от температуры. Тогда, после выполненных упрощений, мы получим

¹⁾ Так как числа Прандтля для разных жидкостей могут отличаться по своей величине одно от другого на несколько порядков (см. таблицу 12.1), то нельзя ожидать, чтобы настоящая оценка была одинаково пригодна и при $Pr \rightarrow 0$ и при $Pr \rightarrow \infty$. В этом случае лучше оценивать результат на основе решения уравнений (12.43) и (12.49а).

для плоского движения сжимаемой жидкости следующую систему уравнений, называемых *уравнениями пограничного слоя*:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (12.35a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx} + \rho g_x \beta (T - T_\infty), \quad (12.35b)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx}, \quad (12.35v)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (12.35g)$$

$$\mu = \mu(T). \quad (12.35d)$$

Так как в рамках теории пограничного слоя давление следует рассматривать как заданную активную силу, то в полученных пяти уравнениях мы имеем пять неизвестных ρ , u , v , T , μ .

Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$) и для постоянной вязкости система уравнений (12.35) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.36a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} + \rho g_x \beta (T - T_\infty), \quad (12.36b)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (12.36v)$$

т. е. остается только три уравнения для трех неизвестных u , v , T .

§ 5. Общие свойства температурных пограничных слоев

1. Вынужденные и естественные конвективные течения. Дифференциальные уравнения (12.36b) и (12.36v) для динамического и температурного пограничных слоев по своей структуре сходны между собой. Они различаются только двумя последними членами в уравнении (12.36b) и последним членом в уравнении (12.36v). В общем случае между полем скоростей и температурным полем существует двусторонняя связь, т. е. распределение температуры зависит от распределения скоростей и, наоборот, распределение скоростей зависит от распределения температуры. В том частном случае, когда архимедову подъемную силу в уравнении движения (12.36b) можно отбросить, а вязкость считать не зависящей от температуры, двусторонняя связь превращается в одностороннюю, а именно, распределение скоростей становится независимым от распределения температуры. Архимедову подъемную силу в уравнении (12.36b) можно не учитывать при сравнительно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур. Такие течения называются *вынужденными конвективными течениями* (см. сказанное по этому поводу на стр. 264). Их противоположностью являются *естественные конвективные течения*, в которых архимедова подъемная сила играет существенную роль. В естественных течениях скорости очень малы, а разности температур значительны. Причиной естественных течений является подъемная сила, возникающая в поле тяжести Земли вследствие разности плотностей среды. Примером естественных течений может служить течение около вертикально поставленной нагретой пластины. Вынужденные течения можно подразделить на две группы, смотря по тому, следует или не следует учитывать тепло, возникающее вследствие трения или сжатия; течения первой группы имеют большие скорости, а течения

второй группы — умеренные скорости. Температурное поле в любом случае зависит от поля скоростей. При умеренных скоростях течения, когда теплом, возникающим вследствие трения и сжатия, можно пренебречь, зависимость температурного поля от поля скоростей определяется исключительно числом Прандтля. В этом случае определенному полю течения соответствует однопараметрическое семейство распределений температуры с числом Прандтля \Pr в качестве параметра. Если скорость течения велика и притом число Эккerta

$$Ec = \frac{2(\Delta T)_{\text{ад}}}{(\Delta T)_0}$$

сравнимо с единицей, то должно учитываться тепло, возникающее вследствие трения и сжатия. Следовательно, это тепло должно учитываться в том случае, когда повышение температуры вследствие трения и сжатия сравнимо с разностью температур, заданной граничными условиями, т. е. с разностью температур тела и газа (или жидкости). Если заданная разность температур по своей величине имеет порядок средней абсолютной температуры, то тепло, возникающее вследствие трения и сжатия, начинает играть существенную роль только при скоростях набегающего потока, сравнимых со скоростью звука.

Весьма важное значение имеет то обстоятельство, что в рассматриваемом случае дифференциальное уравнение температурного пограничного слоя, в отличие от дифференциального уравнения динамического пограничного слоя, линейно. Это обстоятельство значительно облегчает интегрирование уравнения и, кроме того, дает возможность получать новые решения из уже известных решений способом наложения.

2. Теплоизолированная стенка. Необходимо подчеркнуть, что граничные условия для температурного поля допускают большее разнообразие, чем для скоростного поля. На поверхности обтекаемого жидкостью или газом тела можно задать не только постоянную или переменную температуру, но и поток тепла, что, в соответствии с формулой (12.28), сводится к заданию температурного градиента на стенке. Частным случаем такой постановки задачи является так называемая задача о *теплоизолированной стенке*, которая рассматривается в предположении, что поток тепла от стени к жидкости отсутствует, следовательно, должно выполняться условие на стенке

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} = 0.$$

Для осуществления этого условия наружный слой тела должен быть полностью непроницаем для тепла. Тогда тепло, возникающее вследствие трения в протекающей мимо тела жидкости, будет до тех пор нагревать стенку, пока не установится состояние $(\partial T / \partial n)_{n=0} = 0$. В результате температура стени станет выше температуры жидкости, находящейся на достаточно большом расстоянии от стени. Эта температура называется *равновесной температурой стени*¹⁾. Практически с теплоизолированной стенкой мы сталкиваемся в так называемом пластинчатом термометре, измеряющем температуру текущей среды с помощью пластинки, помещенной в поток так, чтобы ее обтекание происходило в продольном направлении. Нагревание пластинки теплом, возникающим вследствие трения, создает одновременно ошибку показания такого термометра, которую необходимо вычесть из его показания, чтобы получить истинную температуру текущей среды²⁾.

¹⁾ В подлиннике применяется термин «собственная температура стени». — Прим. перев.

²⁾ По этой причине в более старой литературе задачу о теплоизолированной стенке называют также задачей о пластинчатом термометре.

3. Аналогия между теплопередачей и сопротивлением трения. В вынужденном конвективном течении существует примечательная связь между теплопередачей и сопротивлением трения в пограничном слое, на которую в ее простейшей форме указал О. Рейнольдс [76] еще в 1874 г.; поэтому эту связь называют также *аналогией Рейнольдса*.

В § 1 главы VIII было показано, что все решения уравнений двумерного пограничного слоя в несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{u}{U_\infty} = f_1 \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l} \sqrt{\text{Re}} \right), \quad (12.37\text{a})$$

$$\frac{v}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}} = f_2 \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l} \sqrt{\text{Re}} \right), \quad (12.37\text{b})$$

где $\text{Re} = U_\infty l / v$. Имея это в виду и пренебрегая теплом, возникающим вследствие сжатия и трения, мы можем сразу указать форму всех решений уравнения температурного пограничного слоя (12.36в). А именно, такой формой будет

$$\vartheta^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = f_3 \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l} \sqrt{\text{Re}}, \text{Pr} \right). \quad (12.37\text{в})$$

Поэтому для плотности потока тепла на основании равенства (12.28) мы получим выражение

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\lambda}{l} (T_w - T_\infty) \sqrt{\text{Re}} \cdot \bar{f}_3 \left(\frac{x}{l}, \text{Pr} \right), \quad (12.37\text{г})$$

следовательно, местным числом Нуссельта будет

$$\text{Nu} = \frac{q l}{\lambda (T_w - T_\infty)} = \sqrt{\text{Re}} \cdot \bar{f}_3 \left(\frac{x}{l}, \text{Pr} \right). \quad (12.38)$$

Это весьма важное соотношение показывает, что если пренебречь теплом, возникающим вследствие сжатия и трения, то для *всех* ламинарных пограничных слоев число Нуссельта пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса. Таким образом, упрощения, на основе которых выводятся уравнения пограничного слоя, приводят к тому, что вместо общей связи (12.30) между числом Нуссельта и числом Рейнольдса, имеющей место для полных уравнений Навье — Стокса, получается более простая связь (12.38).

На основании соотношения (12.37а) местное касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_\infty}{l} \sqrt{\text{Re}} \bar{f}_1 \left(\frac{x}{l} \right), \quad (12.38\text{а})$$

следовательно, местный безразмерный коэффициент трения равен

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \bar{f}_1 \left(\frac{x}{l} \right). \quad (12.38\text{б})$$

Скombинировав соотношение (12.38) с соотношением (12.38б), мы получим

$$\text{Nu} = \frac{1}{2} c'_f \text{Re} f \left(\frac{x}{l}, \text{Pr} \right). \quad (12.39)$$

В этой наиболее общей форме аналогия Рейнольдса имеет место, как уже было сказано, для *всех* ламинарных пограничных слоев.

Если, в частности, имеют место *подобные* решения, т. е. если рассматриваются внешние течения вида $U(x) = u_1 x^m$, то, согласно сказанному в § 1 главы IX, распределением скоростей будет

$$\frac{u}{U(x)} = F_1 \left(y \sqrt{\frac{U(x)}{vx}} \right), \quad (12.39a)$$

$$\frac{v}{U(x)} \sqrt{\frac{U(x)x}{v}} = F_2 \left(y \sqrt{\frac{U(x)}{vx}} \right). \quad (12.39b)$$

В этом случае из уравнения температурного пограничного слоя сразу следует, что

$$\vartheta^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = F_3 \left(y \sqrt{\frac{U(x)}{vx}}, \Pr \right). \quad (12.39b)$$

Если ввести местное число Нуссельта, составленное для координаты x , то по аналогии с равенством (12.38) мы получим

$$\text{Nu}_x = \frac{c_{fx}}{\lambda} = \sqrt{\text{Re}_x} \cdot F(m, \Pr), \quad (12.40)$$

где $\text{Re}_x = xU(x)/v$. Какой вид имеет функция $F(m, \Pr)$, мы увидим ниже, в п. 2 § 7 настоящей главы [см. соотношение (12.87) и рис. 12.14]. Между числом Нуссельта и местным коэффициентом трения

$$c'_{fx} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} [U(x)]^2} = 2 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \bar{F}(m) \quad (12.40a)$$

существует общая связь

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c'_{fx} \text{Re}_x \bar{F}(m, \Pr), \quad (12.41)$$

аналогичная связи (12.39).

Рассмотрим особенно простое течение: продольное обтекание плоской пластины ($m = 0$). В этом случае, если число Прандтля равно единице, получается полное совпадение дифференциальных уравнений (12.36б) и (12.36в), определяющих скорость и температуру. Это означает, что тождественно совпадают и решения этих уравнений, т. е. имеет место тождество

$$F_3 \left(y \sqrt{\frac{u_1}{vx}}, 1 \right) \equiv F_1 \left(y \sqrt{\frac{u_1}{vx}} \right) \quad (m=0). \quad (12.41a)$$

Отсюда следует

$$\bar{F}(0, 1) = 1,$$

и поэтому для продольно обтекаемой плоской пластины из соотношения (12.41) мы получаем

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c'_{fx} \text{Re}_x \quad (m=0, \Pr=1). \quad (12.41b)$$

Это и есть простейшая форма аналогии между коэффициентом теплопередачи и коэффициентом трения, указанная еще О. Рейнольдсом.

Предыдущие рассуждения применимы сначала только к ламинарным неожиданным течениям при постоянной температуре стенки и при пренебрежении теплом, возникающим вследствие трения. Однако полученные результаты можно распространить также на другие случаи, например на обтекание плоской пластины с учетом тепла, возникающего и вследствие трения [см. соотношения (12.81) и начало стр. 285], и вследствие сжатия (см. § 3 главы XIII). Однако наиболее существенно то, что аналогия Рейнольдса находит применение также при турбулентных течениях и играет там важную роль при расчете теплопередачи (см. главу XXIII).

4. Влияние числа Прандтля. Из предыдущего изложения следует, что число Прандтля является наиболее важным параметром для температурного пограничного слоя и для теплопередачи, причем как в случае вынужденных, так и в случае свободных конвективных течений. Согласно определению число Прандтля $\text{Pr} = \nu/a$ представляет собой отношение двух величин, характеризующих свойства, связанные с переносом импульса (вязкость) и переносом тепла (теплопроводность). Если способность вещества к переносу импульса, т. е. вязкость, особенно велика, то влияние стенки, уменьшающее импульс (условие прилипания), также велико, следовательно, это влияние проникает далеко внутрь течения, иными словами, толщина динамического пограничного слоя получается сравнительно большой. Аналогичное имеет место и для температурного пограничного слоя. Из сказанного понятно, что при вынужденных конвективных течениях число Прандтля является непосредственной мерой отношения толщин обоих пограничных слоев, на что уже указывало соотношение (12.34).

Частный случай, когда $\text{Pr} = 1$, т. е. когда оба пограничных слоя приближенно одинаково толстые (при обтекании плоской пластины они в точности одинаково толстые), был подробно рассмотрен выше. Однако представляют интерес также оба предельных значения числа Прандтля, т. е. очень малое и очень большое числа Прандтля. Оба эти случая схематически представлены на рис. 12.4. Мы видим, что в случае $\text{Pr} \rightarrow 0$, приближенно имеющем место для жидкостей металлов (например, для ртути), при расчете температурного пограничного слоя можно пренебречь динамическим пограничным слоем и заменить профиль скоростей $u(x, y)$ скоростью $U(x)$ невязкого внешнего течения, зависящей только от координаты x . Тогда уравнение энергии (12.36в) принимает особенно простой вид:

$$U(x) \frac{\partial T}{\partial x} - y \frac{dU}{dx} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{Pr} \rightarrow 0). \quad (12.42)$$

Следовательно, в этом предельном случае температурный пограничный слой не зависит от динамического пограничного слоя.

Для продольного обтекания плоской пластины [$U(x) = U_\infty = \text{const}$] с постоянной температурой стенки T_w сразу получается дифференциальное уравнение (5.17), с которым мы уже встретились в главе V. Его решением будет

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right), \quad (12.43)$$

где

$$\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{ax}{U_\infty}}.$$

Отсюда, используя равенство (12.29), найдем число Нуссельта

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \sqrt{\frac{U_\infty x}{\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Re}_x \text{Pr}} \quad (\text{Pr} \rightarrow 0). \quad (12.44a)$$

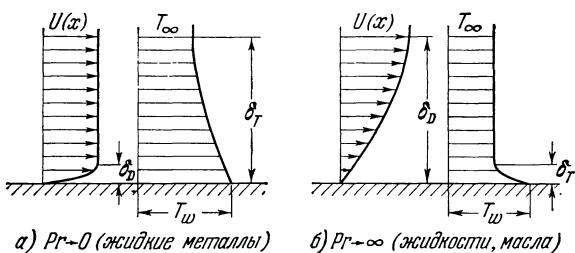


Рис. 12.4. Распределение скоростей и распределение температуры в пограничных слоях при очень малом и очень большом числах Прандтля.

Для течения в окрестности критической точки [$U(x) = u_{1x}$] получим

$$Nu_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{Re_x Pr} \quad (Pr \rightarrow 0), \quad (12.44b)$$

где $Re_x = Ux/v$.

Другой предельный случай, $Pr \rightarrow \infty$, уже давно был исследован М. А. Левеком [58] на основе весьма правдоподобного предположения, что весь температурный пограничный слой лежит внутри области, в которой скорость в динамическом пограничном слое зависит от y еще линейно. Такой случай может иметь место также при средних числах Прандтля, а именно тогда, когда развитие температурного пограничного слоя начинается в такой точке $x = x_0$ обтекаемой стенки, в которой имеет место скачок температуры (см. рис. 12.16), и притом уже после того, как динамический пограничный слой немного развился. Предположим, что в уравнении энергии (12.36в) для распределения скоростей u можно взять выражение $u = (\tau_0/\mu) y$, и кроме того примем, что зависимость профиля скоростей от x пренебрежимо мала по сравнению со значительно более быстрым развитием температурного пограничного слоя. Тогда, как показал М. А. Левек (см. также работы [86] и [87]), при помощи преобразования

$$\eta = \frac{y \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}}}{\left(9a \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}} dx \right)^{1/3}}, \quad (12.45)$$

где x_0 есть точка стенки, в которой происходит скачок температуры (см. рисунок 12.16), и при пренебрежении теплом, возникающим вследствие трения, можно преобразовать уравнение энергии к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} - 3\eta^2 \frac{dT}{d\eta} = 0. \quad (12.46)$$

При помощи неполных гамма-функций это уравнение можно решить в замкнутой форме. Для числа Нуссельта получается выражение

$$Nu_x = \frac{\alpha(x-x_0)}{\lambda} = \frac{x-x_0}{0,8930} \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}} \left[9a \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}} dx \right]^{-1/3} \quad (Pr \rightarrow \infty) \quad (12.47)^1$$

или

$$Nu_x = 0,5384 Pr^{1/3} \frac{x-x_0}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dx}{v} \right)^{-1/3} \quad (Pr \rightarrow \infty). \quad (12.48)$$

В частном случае продольно обтекаемой пластины при $x_0 = 0$ мы имеем, согласно формуле (7.31),

$$\tau_0 = 0,332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{v_x}},$$

и поэтому

$$Nu_x = 0,339 Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \quad (Pr \rightarrow \infty). \quad (12.49a)$$

¹⁾ $0,8930 = \left(\frac{1}{3}\right)! = 0,5384 = 9^{-1/3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)! \right]^{-1}$, причем $z! = \Gamma(z+1)$.

Ниже, на основании рис. 12.14, будет показано, что эта формула дает хорошее приближение также при средних числах Прандтля. Для течения в окрестности критической точки соответствующая формула имеет вид

$$\text{Nu}_x = 0,661 \sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{1/3} \quad (\text{Pr} \rightarrow \infty). \quad (12.49b)$$

Аналогичные простые асимптотические приближенные формулы получаются также для свободного конвективного течения около вертикальной плоской пластины; см. работу [55], а также формулы (12.118а) и (12.118б).

§ 6. Точные решения для распределения температуры в вязком течении

Перейдем к расчету температурного поля в различных вязких течениях. Из большого многообразия возможных случаев выберем такие, которые допускают наиболее простое теоретическое решение. Выше изложению способов расчета пограничного слоя мы предполагали некоторые примеры точного решения уравнений Навье-Стокса (глава V). Аналогичным образом поступим и теперь: остановимся сначала на некоторых случаях точного определения распределения температуры, указанных Г. Шлихтингом [78]. Будем рассматривать стационарные плоские течения несжимаемой жидкости в горизонтальной плоскости, которую совместим с плоскостью xy . Физические характеристики жидкости примем постоянными. Для такого течения система уравнений (12.15) — (12.17), т. е. система, в которой никаких упрощений с целью перехода к уравнениям пограничного слоя еще не сделано, принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.50a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (12.50b)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (12.50b)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi, \quad (12.51)$$

где

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

1. Течение Күэтта. Особенно простое точное решение системы (12.50) и (12.51) получается для течения Күэтта, т. е. для течения между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна покоятся, а другая движется в своей собственной плоскости с постоянной скоростью U_1 (рис. 12.5). При отсутствии градиента давления в направлении x гидродинамические уравнения имеют решение

$$u(y) = U_1 \frac{y}{h}, \quad v \equiv 0, \quad p = \text{const.}$$

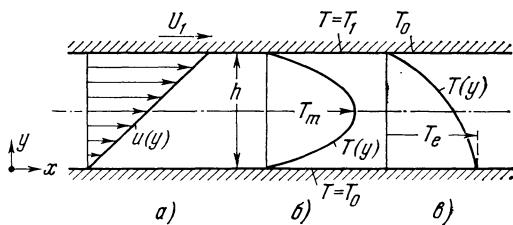


Рис. 12.5. Распределение скоростей и температуры в течении Күэтта: а) распределение скоростей; б) распределение температуры с учетом тепла, возникающего вследствие трения, для случая, когда обе стени имеют одинаковую температуру; в) распределение температуры с учетом тепла, возникающего вследствие трения, для случая, когда нижняя стена теплоизолирована.

Очень простое решение для распределения температуры получается при следующих граничных условиях, определяющих температуру на стенках:

$$\left. \begin{array}{l} T = T_0 \text{ при } y = 0, \\ T = T_1 \text{ при } y = h, \end{array} \right\} \quad (12.52a)$$

т. е. при постоянном значении температуры вдоль каждой стенки. Так как для течения Куэтта диссилиативная функция равна $\Phi = (\partial u / \partial y)^2$, то уравнение для распределения температуры принимает вид

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12.52b)$$

Это уравнение при граничных условиях (12.52a) дает для распределения температуры решение, не зависящее от x . Поскольку $v \equiv 0$, а T не зависит от x , вся левая часть уравнения (12.52b), представляющая перенос тепла посредством конвекции, отпадает. Следовательно, возникающее при течении поле температур обусловлено только теплопроводностью в поперечном направлении и теплом, образующимся вследствие трения. Отбросив в уравнении (12.52b) члены, равные нулю, мы получим

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (12.52b)$$

или, после замены производной du/dy ее выражением U_1/h ,

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \frac{U_1^2}{h^2}.$$

Это уравнение имеет следующее решение, удовлетворяющее граничным условиям (12.52a):

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\mu U_1^2}{2\lambda(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

Введя обозначение $T_1 - T_0 = (\Delta T)_0$, представим безразмерный параметр

$$\frac{\mu U_1^2}{\lambda (T_1 - T_0)}$$

в виде произведения

$$\frac{\mu U_1^2}{\lambda (T_1 - T_0)} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{U_1^2}{c_p (\Delta T)_0} = \text{Pr} \cdot \text{Ec}.$$

Следовательно, этот параметр может быть выражен через число Прандтля и через число Эккерта [см. равенства (12.26)]. Таким образом, в рассматриваемом случае, в котором конвекция тепла отсутствует, температурное поле зависит только от произведения $\text{Pr} \cdot \text{Ec}$. Если ввести для сокращения записи обозначение $y/h = \eta$, то окончательно для распределения температуры мы получим уравнение

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \eta + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \eta (1 - \eta). \quad (12.53)$$

Мы видим отсюда, что распределение температуры складывается из двух частей: линейной и параболической. Линейная часть соответствует обычному распределению температуры в состоянии покоя жидкости, когда никакого тепла вследствие трения не возникает. На эту линейную часть налагается параболическое распределение, зависящее от тепла, возникающего вследствие трения при движении жидкости. Распределение температуры для различных значений безразмерного параметра $\text{Ec} \cdot \text{Pr}$ изображено на рис. 12.6. Примечательно следующее обстоятельство: если заданная разность температур обеих стенок $T_1 - T_0 > 0$, то теплопередача от верхней стенки

к жидкости происходит только при условии, что скорость движения U_1 верхней стенки остается меньше определенного значения. Скорость движения, при которой теплопередача на верхней стенке меняет свое направление, определяется из условия равенства нулю градиента температуры на верхней стенке. Из уравнения (12.53) следует, что

$$\left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=h} = 0$$

при

$$\frac{\mu U_1^2}{2\lambda} = T_1 - T_0.$$

Таким образом, если

$$\frac{\mu U_1^2}{2\lambda} < T_1 - T_0 \text{ или } \text{Pr} \cdot \text{Ec} < 2, \quad (12.54a)$$

то тепло переходит от верхней стенки к жидкости, т. е. происходит охлаждение верхней стенки; если же

$$\frac{\mu U_1^2}{2\lambda} > T_1 - T_0 \text{ или } \text{Pr} \cdot \text{Ec} > 2, \quad (12.54b)$$

то тепло переходит от жидкости к верхней стенке, т. е. происходит нагревание верхней стенки.

Рассмотренный пример показывает, что тепло, возникающее вследствие трения, оказывает существенное влияние на охлаждающее действие жидкости, обтекающей стенку. При больших скоростях течения может даже наступить такое состояние, когда более теплая, чем жидкость, стенка будет не охлаждаться, а, наоборот, нагреваться теплом, возникающим в текущей жидкости вследствие трения. Это явление имеет фундаментальное значение для проблемы охлаждения обтекаемой стенки при большой скорости течения. Мы с ним вновь встретимся ниже, при рассмотрении других случаев температурного пограничного слоя.

Если при течении Куэтта обе стенки имеют одинаковую температуру ($T_1 = T_0$), то, как это следует из уравнения (12.53), возникает симметричное относительно средней оси параболическое распределение температуры

$$T(y) - T_0 = -\frac{\mu U_1^2}{2\lambda} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right),$$

изображенное на рис. 12.5, б. Максимальное повышение температуры вследствие возникновения тепла при трении получается в середине между обеими пластиинами и равно

$$T_m - T_0 = \frac{\mu U_1^2}{8\lambda}. \quad (12.55)$$

Полученное решение пригодно также для сжимаемой среды при условии, что не учитывается зависимость вязкости от температуры. В этом случае максимальное повышение температуры в середине между обеими пластиинами можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\frac{T_m - T_0}{T_0} = \frac{\kappa - 1}{8} \text{Pr} \cdot \text{Ma}^2, \quad (12.55a)$$

где $\text{Ma} = U_1/c_0$ есть число Маха, а c_0 — скорость звука, соответствующая температуре T_0 . Примечательно, что максимальное повышение температуры не зависит от расстояния между обеими пластиинами. Это вполне понятно,

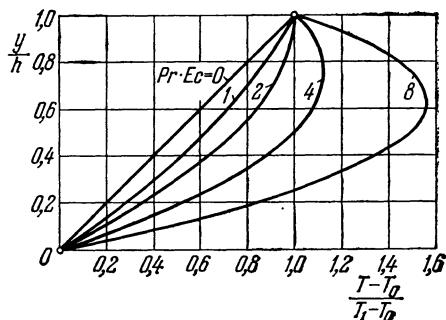


Рис. 12.6. Распределение температуры в течении Куэтта для случая неодинаковой температуры обеих стенок и с учетом тепла, возникающего вследствие трения (T_0 — температура нижней стенки, T_1 — температура верхней стенки).

так как в данном случае тепло, возникающее вследствие трения, отводится к неподвижной и движущейся стенкам равными долями.

Рассмотренное распределение температуры наблюдается при течении смазочного масла в щели между цапфой и подшипником и играет здесь важную роль. Это течение подробно исследовано Г. Фогельполем [118]. При малых размерах щели и большой вязкости смазочного масла такое течение получается ламинарным. Тепло, возникающее в смазочном слое вследствие трения, вызывает значительное нагревание даже при умеренных скоростях движения, как это показывает следующий численный пример. Вязкость смазочного масла при умеренной температуре (примерно при 30° С), согласно таблице 12.1, равна $\mu = 0,4 \text{ кг/м сек}$, коэффициент теплопроводности масла равен $\lambda = 0,14 \text{ дж/м сек град}$. Подставив эти значения в формулу (12.55), мы найдем, что

$$\text{при } U_1 = 5 \text{ м/сек} \quad T_m - T_0 = 9^\circ \text{ С},$$

а

$$\text{при } U_1 = 10 \text{ м/сек} \quad T_m - T_0 = 36^\circ \text{ С}.$$

Следовательно, повышение температуры масла получается столь значительным, что уже нельзя не учитывать зависимость коэффициента вязкости от температуры. Обобщение указанного выше решения на случай переменной вязкости выполнил Р. Наме [69]. Распределение скоростей по ширине щели теперь уже не получается линейным.

Из уравнения (12.51) можно получить другое важное решение для распределения температуры, если поставить в качестве условия, что все тепло, возникающее вследствие трения, передается только на одну из стенок, на другой же стенке никакой теплопередачи не происходит (теплоизолированная стенка). Пусть непроницаема для тепла нижняя, т. е. неподвижная стенка, тогда граничными условиями для температуры будут

$$T = T_0 \text{ при } y = h, \quad \frac{dT}{dy} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (12.56)$$

При этих граничных условиях уравнение (12.51) дает распределение температуры

$$T(y) - T_0 = \mu \frac{U_1^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (12.57)$$

изображенное на рис. 12.5, в. Следовательно, происходит повышение температуры нижней стенки на величину

$$T(0) - T_0 = T_e - T_0 = \frac{\mu U_1^2}{2\lambda}. \quad (12.58)$$

Температура T_e также называется равновесной температурой стенки (или соответственно пластиинчатого термометра). Сравнив формулы (12.58) и (12.55), мы увидим, что максимальное нагревание жидкости в середине канала для случая, когда обе стенки имеют одинаковую температуру, составляет четвертую часть равновесной температуры стенки, т. е.

$$T_e - T_0 = 4(T_m - T_0). \quad (12.59)$$

Выше мы привели критерий (12.54) охлаждения верхней стенки для случая, когда обе стенки имеют разные температуры. Используя значение равновесной температуры, определяемое формулой (12.58), мы можем сформулировать этот критерий в следующей простой форме:

$$T_1 - T_0 \geq T_e - T_0: \quad \left. \begin{array}{l} \text{охлаждение} \\ \text{нагревание} \end{array} \right\} \text{верхней стенки.} \quad (12.60)$$

Распространение этого решения на течение Күэтта с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры, дано Г. М. де Гроффом [37], а на течение сжимаемой среды с учетом теплопередачи — К. Р. Иллингвортом [45а] и А. Дж. А. Морганом [67а].

2. Течение в канале. Другое весьма простое точное решение для распределения температуры получается в случае плоского течения в канале с параллельными стенками (рис. 12.7).

Такое течение, согласно Пуазейлю, имеет параболическое распределение скоростей

$$u(y) = u_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right);$$

следовательно, уравнение (12.52в) принимает вид

$$\lambda \frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4\mu u_m^2}{h^4} y^2.$$

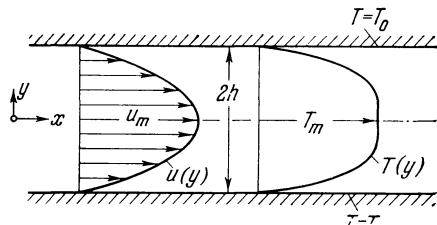


Рис. 12.7. Распределение скоростей и температуры при течении в канале с учетом тепла, возникающего вследствие трения.

Если мы опять потребуем, чтобы обе стени имели одинаковую температуру, т. е. чтобы было $T = T_0$ при $y = \pm h$, то решением этого уравнения будет

$$T(y) - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu u_m^2}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^4 \right]. \quad (12.61)$$

Таким образом, распределение температуры изображается параболой четвертой степени (см. рис. 12.7). Максимальное повышение температуры получается в середине канала и равно

$$T_m - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu u_m^2}{\lambda}. \quad (12.62)$$

Обобщение этого решения на случай вязкости, изменяющейся с температурой, получено Г. Хаузенблазом [42]. Соответствующее решение для трубы с круглым поперечным сечением дано У. Григулом [36].

Точное решение уравнений температурного пограничного слоя получается также для течений в суживающемся и расширяющемся каналах. Эти течения были рассмотрены в п. 12 § 2 главы V. Указанное там решение Г. Хамеля для динамического пограничного слоя было распространено К. Миллсапом и К. Польгаузеном [67] на температурный пограничный слой. На рис. 12.8 изображено распределение температуры при различных числах Прандтля для течения в суживающемся канале. Вследствие диссипации, которая особенно велика вблизи стенок, профили температур имеют характер, свойственный пограничному слою, причем этот характер выражен тем сильнее,

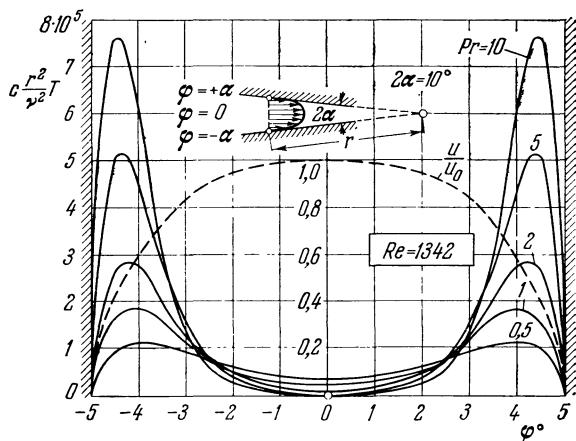


Рис. 12.8. Распределение температуры в суживающемся канале с углом раствора $2\alpha = 10^\circ$ при различных числах Прандтля. Число Рейнольдса равно 1342. Соответствующее распределение скоростей изображено на рис. 5.14. Вследствие диссипации, которая особенно велика вблизи стенок, получаются профили температур с четко выраженным характером пограничного слоя. По К. Миллсапу и К. Польгаузену [67].

чем больше число Прандтля. Для сравнения на тот же рис. 12.8 перенесен профиль скоростей с рис. 5.14. Некоторые другие решения уравнений Навье-Стокса и уравнения энергии, принадлежащие к классу подобных решений, указаны Б. Л. Ривзом и Ч. Дж. Киппенханом [75].

§ 7. Температурные пограничные слои при вынужденном конвективном течении

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров температурного пограничного слоя при вынужденном конвективном течении, причем используем уравнения пограничного слоя (12.36). Расчет температурного пограничного слоя на теле любой формы так же, как и расчет динамического пограничного слоя на произвольном теле, связан с довольно большими трудностями. Поэтому сначала мы остановимся на более простом случае температурного пограничного слоя — на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

1. Плоская пластина, обтекаемая в продольном направлении. Рассмотрим течение несжимаемой среды с постоянными, т. е. не зависящими от температуры, физическими характеристиками. Поместим начало координат на передней кромке пластины, ось x расположим в плоскости пластины, а ось y направим перпендикулярно к пластине. Если мы примем архимедову подъемную силу равной нулю и учтем, что градиент давления $dp/dx = 0$, то уравнения пограничного слоя (12.36) примут вид [14], [73]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.63a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (12.63b)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12.63v)$$

Границыми условиями будут

$$u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = U_\infty \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty.$$

Поле скоростей не зависит от температурного поля. Поэтому сначала можно решить гидродинамические уравнения (12.63а) и (12.63б) и полученный результат использовать для определения температурного поля. Уравнения (12.63б) и (12.63в) сразу позволяют обнаружить важную связь между распределением скоростей и распределением температуры. В самом деле, пренебрежем в уравнении (12.63в) членом $\mu (\partial u / \partial y)^2$, т. е. теплом, возникающим вследствие трения, и, кроме того, предположим, что между физическими характеристиками жидкости существует соотношение

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\lambda}{c_p \rho}$$

или, что то же самое, $v = a$, т. е. число Прандтля $Pr = 1$. В таком случае уравнение (12.63в), если заменить в нем T на u , тождественно совпадет с уравнением (12.63б). Но при пренебрежении теплом, возникающим вследствие трения, температурное поле может существовать только при условии, что температуры стенки и внешнего течения различны, например, $T_w - T_\infty > 0$ (охлаждение). Таким образом, мы пришли к следующему важному результату: при малых скоростях продольного обтекания плоской пла-

стинь распределение скоростей и распределение температуры в пограничном слое совпадают, если число Прандтля равно единице. В этом случае мы имеем

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{U_\infty} \quad (\text{Pr} = 1). \quad (12.64)$$

Этот результат соответствует соотношению (12.37в), на основе которого была выведена практически очень важная аналогия Рейнольдса между теплопередачей и сопротивлением трения.

Для решения гидродинамических уравнений Г. Блазиус ввел, как мы знаем из § 5 главы VII, новые переменные

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad \psi = \sqrt{vxU_\infty} f(\eta)$$

[см. формулы (7.24) и (7.25); ψ есть функция тока]. Следовательно, составляющими u , v скорости течения будут

$$u = U_\infty f'(\eta), \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU_\infty}{x}} (\eta f' - f).$$

Для определения функции $f(\eta)$ получается, как было показано в § 5 главы VII, обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ff'' + 2f''' = 0$$

с граничными условиями

$$f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad f' = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Решение этого уравнения дано в таблице 7.1 (стр. 134).

Подставив указанные значения u и v в уравнение (12.63в) и сохранив второй член правой части, учитывающий тепло, возникающее вследствие трения, мы получим для распределения температуры $T(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{dT}{d\eta} = -\text{Pr} \frac{U_\infty^2}{2c_p} f''^2. \quad (12.65)$$

Общее решение этого уравнения целесообразно искать в виде

$$T(\eta) - T_\infty = C \vartheta_1(\eta) + \frac{U_\infty^2}{2c_p} \vartheta_2(\eta), \quad (12.66)$$

т. е. в виде наложения двух решений, из которых первое, $\vartheta_1(\eta)$, представляет собой общее решение однородного уравнения, а второе, $\vartheta_2(\eta)$, — частное решение неоднородного уравнения. Граничные условия для функций $\vartheta_1(\eta)$ и $\vartheta_2(\eta)$ целесообразно подобрать так, чтобы функция $\vartheta_1(\eta)$ давала решение задачи об охлаждении пластины (при заранее заданной постоянной разности температур $T_w - T_\infty$ стенки и внешнего течения), а функция $\vartheta_2(\eta)$ — решение задачи о теплоизолированной стенке. Таким образом, функцию $\vartheta_1(\eta)$ следует определить из уравнения

$$\vartheta_1'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \vartheta_1' = 0 \quad (12.67)$$

с граничными условиями

$$\vartheta_1 = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \vartheta_1 = 0 \quad \text{при } \eta = \infty,$$

а функцию $\vartheta_2(\eta)$ — из уравнения

$$\vartheta_2'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \vartheta_2' = -2 \text{Pr} f''^2 \quad (12.68)$$

с граничными условиями

$$\vartheta_2 = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \vartheta_2 = 0 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Имея значение $\vartheta_2(0)$, можно определить постоянную C , входящую в уравнение (12.66), так, чтобы было удовлетворено граничное условие $T = T_w$ при $\eta = 0$. Мы получим

$$C = T_w - T_\infty - \frac{U_\infty^2}{2c_p} \vartheta_2(0). \quad (12.68a)$$

Задача об охлаждении. Решение уравнения (12.67) впервые было дано Э. Польгаузеном [73] и может быть представлено в виде

$$\vartheta_1(\eta, \text{Pr}) = \frac{\int\limits_{\xi=0}^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi}{\int\limits_{\xi=0}^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi} \quad (12.69)$$

поэтому при $\text{Pr} = 1$ мы имеем

$$\vartheta_1(\eta) = 1 - f'(\eta) = 1 - \frac{u}{U_\infty}.$$

Следовательно, при $\text{Pr} = 1$ распределение скоростей и распределение температуры, в соответствии с ранее полученным уравнением (12.64), тождественно совпадают.

Взяв производную от $\vartheta_1(\eta, \text{Pr})$, вычислив ее значение на стенке ($\eta = 0$) и имея в виду, что $f''(0) = 0,332$, мы найдем градиент температуры на стенке:

$$-\left(\frac{d\vartheta_1}{d\eta}\right)_0 = a_1(\text{Pr}) = \frac{(0,332)^{\text{Pr}}}{\int\limits_0^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi}. \quad (12.70)$$

Таким образом, величина a_1 есть функция только числа Прандтля Pr . Некоторые значения этой величины, вычисленные Э. Польгаузеном, даны

Таблица 12.2. Значения безразмерных величин a_1 и b , определяемых формулами (12.70) и (12.75), для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении

Pr	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7,0	10,0	15,0
a_1	0,276 0,770	0,293 0,835	0,307 0,895	0,320 0,950	0,332 1,000	0,344 1,050	0,645 2,515	0,730 2,965	0,835 3,535

в таблице 12.2. Для средних чисел Прандтля они могут быть интерполированы с хорошим приближением посредством формулы

$$a_1 = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (0,6 < \text{Pr} < 10). \quad (12.71a)$$

Для очень малых чисел Прандтля в соответствии с формулой (12.44а) получаем

$$a_1 = 0,564 \sqrt{\text{Pr}} \quad (\text{Pr} \rightarrow 0), \quad (12.71b)$$

а для очень больших чисел Прандтля в соответствии с формулой (12.49а) находим

$$a_1 = 0,339 \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (\text{Pr} \rightarrow \infty). \quad (12.71c)$$

Распределение температуры, вычисленное по формуле (12.69), изображено на рис. 12.9 для ряда значений числа Прандтля Pr . Кривая, соответствующая значению $\text{Pr} = 1$, дает, на основании сказанного выше, одновременно и распределение скоростей. Для чисел Прандтля $\text{Pr} > 1$

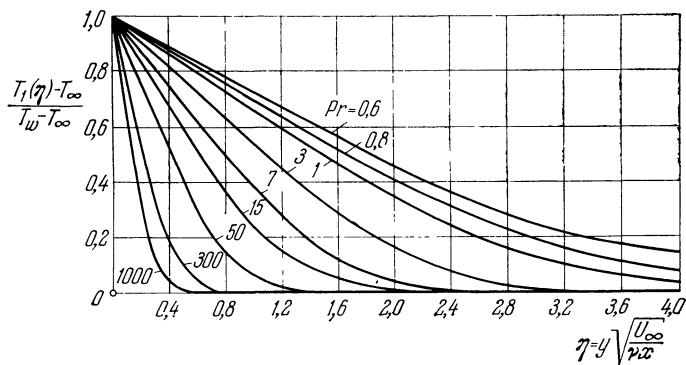


Рис. 12.9. Распределение температуры в ламинарном пограничном слое на нагретой плоской пластине, обтекаемой с небольшой скоростью в продольном направлении, при различных числах Прандтля (без учета тепла, возникающего вследствие трения).

температурный пограничный слой тоньше динамического пограничного слоя. Так, например, для масла с числом Прандтля $\text{Pr} = 1000$ толщина температурного пограничного слоя составляет примерно только одну десятую толщины динамического пограничного слоя.

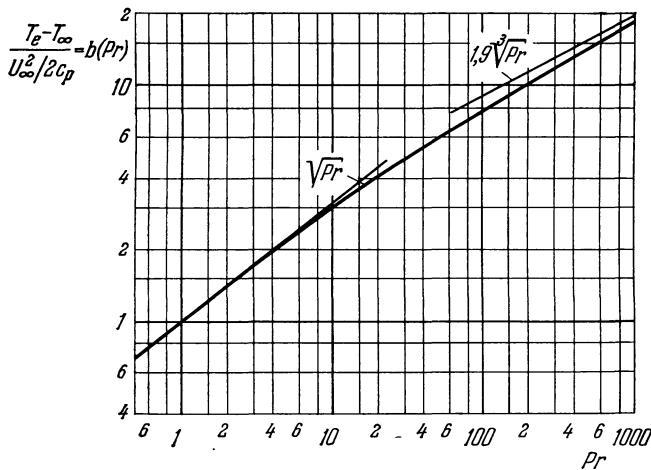


Рис. 12.10. Зависимость равновесной температуры T_e ненагретой плоской пластины, обтекаемой со скоростью U_∞ в продольном направлении, от числа Прандтля Pr . По Э. Эккерту и О. Древитцу [11] и Д. Мексину [65]. При больших числах Прандтля, согласно Мексину [65], $b = 1.9 \text{ Pr}^{1/3}$.

Задача о теплоизолированной стенке. Применив к уравнению (12.68) метод вариации постоянных, найдем его интеграл

$$\vartheta_2(\eta, \text{Pr}) = 2 \text{Pr} \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} \left(\int_0^{\xi} [f''(\tau)]^{2-\text{Pr}} d\tau \right) d\xi. \quad (12.72)$$

При $\text{Pr} = 1$ решение (12.72) принимает вид

$$\vartheta_2(\eta) = 1 - f'^2(\eta). \quad (12.73)$$

Таким образом, тепло, возникающее вследствие трения, вызывает повышение температуры стенки до величины T_{2w} , определяемой, в соответствии с уравнением (12.66) и решением (12.72), формулой

$$T_{2w} - T_\infty = T_e - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2c_p} b(\Pr), \quad (12.74)$$

где

$$b(\Pr) = \vartheta_2(0, \Pr). \quad (12.75)$$

Температуру T_e также можно назвать *равновесной температурой стенки*. Формула (12.74) показывает, что при постоянном значении числа Прандтля разность между равновесной температурой стенки и температурой потока на большом удалении от стенки пропорциональна повышению температуры $U_\infty^2/2c_p$, возникающему в критической точке вследствие адиабатического сжатия и уже вычисленному в § 2 настоящей главы (рис. 12.3). Некоторые значения величины $b(\Pr)$ даны в таблице 12.2. Для не слишком больших \Pr они могут быть интерполированы с хорошим приближением посредством формулы

$$b = \sqrt{\Pr}.$$

Значения b для более высоких чисел Прандтля вычислены Д. Мексином [16] и могут быть взяты из рис. 12.10. В предельном случае $\Pr \rightarrow \infty$ получается формула

$$b(\Pr) = 1.9\Pr^{1/3}.$$

Примечательно, что при $\Pr = 1$ величина b в точности равна единице. Следовательно, при продольном обтекании плоской пластины газом с числом Прандтля $\Pr = 1$ и со скоростью U_∞ тепло, возникающее вследствие трения, нагревает пластину так, что температура ее повышается на величину, равную повышению температуры в критической точке вследствие адиабатического торможения течения от скорости U_∞ до

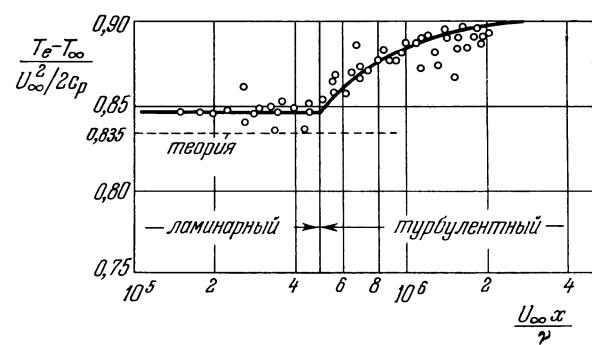


Рис. 12.11. Результаты измерения равновесной температуры плоской пластины, обтекаемой воздухом в продольном направлении, при ламинарном и турбулентном пограничном слое; теоретическое распределение — для числа Прандтля $\Pr = 0,73$. По Эккерту и Вайзе [16].

На рис. 12.11 изображены результаты измерений [12], [16] равновесной температуры продольно обтекаемой плоской пластины при различных числах Рейнольдса $U_\infty x/v$. В ламинарной области результаты измерений довольно хорошо совпадают с теорией. При переходе ламинарного течения в турбулентное равновесная температура стенки внезапно возрастает.

Распределение температуры в случае теплоизолированной стенки можно представить в следующей безразмерной записи:

$$\frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_{2w} - T_\infty} = \frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_e - T_\infty} = \frac{\vartheta_2(\eta, \Pr)}{b(\Pr)}.$$

Следует отметить, что теоретическое распределение температуры в ламинарном пограничном слое, определенное по формуле (12.75), не является точным, так как оно не учитывает влияния турбулентности на температуру в критической точке. Однако оно дает качественное представление о поведении температуры в ламинарном режиме.

На рис. 12.12 изображены результаты измерений [12], [16] равновесной температуры продольно обтекаемой плоской пластины при различных числах Рейнольдса $U_\infty x/v$. В ламинарной области результаты измерений довольно хорошо совпадают с теорией. При переходе ламинарного течения в турбулентное равновесная температура стенки внезапно возрастает.

Распределение температуры в случае теплоизолированной стенки можно представить в следующей безразмерной записи:

На рис. 12.12 это распределение изображено для различных значений числа Прандтля Pr .

Приняв во внимание соотношения (12.74) и (12.75), мы получим для постоянной C , определяемой равенством (12.68а), выражение

$$C = (T_w - T_\infty) - (T_e - T_\infty) = T_w - T_e.$$

Таким образом, полное решение (12.66) принимает следующий окончательный вид:

$$T(\eta) - T_\infty = [(T_w - T_\infty) - (T_e - T_\infty)] \vartheta_1(\eta, Pr) + \frac{U_\infty^2}{2c_p} \vartheta_2(\eta, Pr), \quad (12.76)$$

где разность $T_e - T_\infty$ определяется соотношением (12.74). Отсюда для безразмерного распределения температуры получаем

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{Ec}{2} b(Pr) \right] \vartheta_1(\eta, Pr) + \frac{Ec}{2} \vartheta_2(\eta, Pr). \quad (12.76a)$$

На рис. 12.13 это безразмерное распределение изображено для различных значений числа Эккерта

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{c_p(T_w - T_\infty)}.$$

Мы видим, что при $b \cdot Ec > 2$ пограничный слой благодаря теплу, возникающему вследствие трения, имеет температуру более высокую, чем

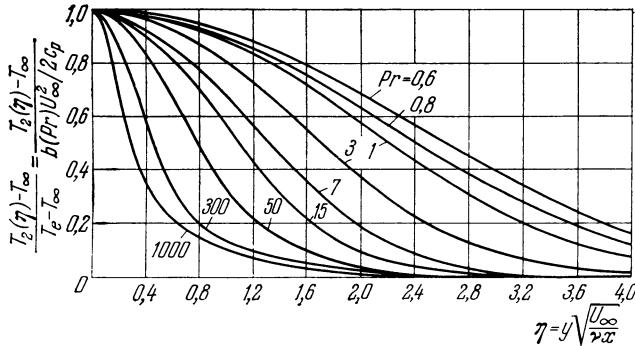


Рис. 12.12. Повышение температуры в ламинарном пограничном слое на ненагретой плоской пластине, обтекаемой с большой скоростью в продольном направлении, при различных числах Прандтля (теплоизолированная стенка).

стенка, и поэтому в таких случаях обтекающий пластину воздух не может вызвать ее охлаждение.

Теплопередача. Поток тепла от пластины к жидкости на расстоянии x от передней кромки равен, согласно формуле (12.2),

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0},$$

или, после перехода к новой переменной η ,

$$q(x) = -\lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0}. \quad (12.77)$$

Для всей пластины (ширина b , длина l) теплоотдача в единицу времени с обеих сторон пластины равна

$$Q = 2b \int_0^l q(x) dx.$$

Выполнив интегрирование, мы получим

$$Q = 4b\lambda \sqrt{\frac{U_{\infty l}}{v}} \left(-\frac{dT}{d\eta} \right)_0. \quad (12.78)$$

а) Тепло, возникающее вследствие трения, не учитывается. В этом случае, в соответствии с решением (12.69),

$$T(\eta) - T_{\infty} = (T_w - T_{\infty}) \vartheta_1(\eta).$$

Температурный градиент на стенке равен

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -a_1(T_w - T_{\infty}).$$

Подставив вместо a_1 его значение (12.71а), мы будем иметь

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} (T_w - T_{\infty}).$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= 0,332 \lambda \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{vx}} (T_w - T_{\infty}), \\ Q &= 1,328 b \lambda \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_l} (T_w - T_{\infty}). \end{aligned} \right\} \quad (12.79)$$

Введя для $q(x)$ и Q безразмерные коэффициенты в форме числа Нуссельта так, как это сделано в соотношении (12.29), т. е. положив, что

$$q(x) = \frac{\lambda}{x} \text{Nu}_x (T_w - T_{\infty}), \quad Q = 2bl \frac{\lambda}{l} \text{Nu}_{cp} (T_w - T_{\infty}),$$

мы получим

$$\left. \begin{aligned} \text{Nu}_x &= 0,564 \sqrt{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_x} && \text{при } \text{Pr} \rightarrow 0, \\ \text{Nu}_x &= 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_x} && \text{при } 0,6 < \text{Pr} < 10, \\ \text{Nu}_x &= 0,339 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_x} && \text{при } \text{Pr} \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12.79a)$$

Посредством интегрирования найдем для среднего числа Нуссельта формулу

$$\frac{\text{Nu}_{cp}}{\sqrt{\text{Re}_l}} = 2 \frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (12.79b)$$

Не останавливаясь на доказательстве, приведем формулы для местного и среднего числа Нуссельта при турбулентном течении:

$$\text{Nu}_x = 0,0296 \sqrt[3]{\text{Pr}} (\text{Re}_x)^{0,8}, \quad (12.79b)$$

$$\text{Nu}_{cp} = 0,037 \sqrt[3]{\text{Pr}} (\text{Re}_l)^{0,8}. \quad (12.79c)$$

Подсчет теплопередачи по этим формулам хорошо совпадает с результатами измерений Ф. Элиаса [27], А. Эдварда и Б. Н. Фарбера [24], а также Дж. Кестина, П. Ф. Медера и Г. Э. Ванга [50].

б) Тепло, возникающее вследствие трения, учитывается. Теперь, в соответствии с решением (12.76), температурный градиент на стенке равен

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -a_1(T_w - T_e) = -0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} (T_w - T_e),$$

где T_e есть равновесная температура стенки, которая в случае теплоизолированной стенки определяется по формуле

$$T_e - T_{\infty} = b(\text{Pr}) \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} = \sqrt{\text{Pr}} \frac{U_{\infty}^2}{2c_p}, \quad (12.80)$$

причем для $b(\Pr)$ следует взять соответствующее значение из таблицы 12.2. Если число Прандтля $\Pr = 1$, то, введя в эту формулу число Маха $\text{Ma} = U_\infty/c_\infty$, определяемое формулой (12.25), мы получим

$$T_e = T_\infty \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right) \quad \text{при} \quad \Pr = 1.$$

Подставив указанное выше значение $(dT/d\eta)_0$ в формулы (12.77) и (12.78), мы найдем местный и полный потоки тепла:

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= 0,332 \lambda \sqrt[3]{\Pr} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (T_w - T_e), \\ Q &= 1,328 b \sqrt[3]{\Pr} \sqrt{\text{Re}_l} (T_w - T_e). \end{aligned} \right\} \quad (12.81)$$

Вводить в расчет коэффициент теплопередачи $a(x)$ [соотношение (12.27)] или число Нуссельта [соотношение (12.29)], т. е. величины, отнесенные к разности температур $T_w - T_\infty$, не имеет смысла, так как теперь поток тепла не пропорционален этой разности. Это обстоятельство побудило Э. Эккерта и В. Вайзе [13] предложить ввести в расчет число Нуссельта Nu^* , отнесенное к разности температур $T_w - T_e$. Можно ожидать, что в первом приближении (пригодном также для сжимаемых течений) для чисел Nu_x^* и Nu_{cp}^* получатся такие же формулы, как и формулы (12.79a) и (12.79b) для Nu_x и Nu_{cp} . Если же мы сохранили бы число Нуссельта, отнесенное к разности температур $T_w - T_\infty$, то первая из формул (12.81) дала бы вместо соотношения (12.79a) следующее:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= 0,332 \sqrt[3]{\Pr} \sqrt{\text{Re}_x} \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{2} \text{Ec} b(\Pr) \right], \end{aligned}$$

т. е. привела бы к выводу, что $\text{Nu}_x = 0$ при $b \cdot \text{Ec} = 2$ и $\text{Nu}_x < 0$ при $b \cdot \text{Ec} > 2$ (ср. с рис. 12.13).

Тепло, возникающее вследствие трения, сильно снижает охлаждающее действие жидкости, обтекающей пластину. В самом деле, если трение не приводило бы к образованию тепла, то пластина отдавала бы жидкости тепло ($q > 0$) до тех пор, пока $T_w > T_\infty$. Поскольку же вследствие трения возникает тепло, теплоотдача от пластины к жидкости происходит, в соответствии с формулами (12.81), только до тех пор, пока $T_w > T_e$. Подставив в последнее неравенство вместо T_e его выражение (12.80), мы получим в качестве условий для перехода тепла от стенки к жидкости или, наоборот, от жидкости к стенке неравенства

$$T_w - T_\infty \geq \sqrt{\Pr} \frac{U_\infty^2}{2c_p} \quad (12.82)$$

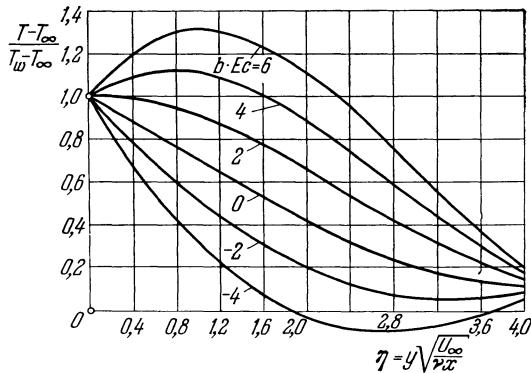


Рис. 12.13. Распределение температуры в ламинарном пограничном слое на нагретой ($\text{Ec} > 0$) и, соответственно, охлажденной ($\text{Ec} < 0$) плоской пластине, обтекаемой с большой скоростью в продольном направлении, с учетом тепла, возникающего вследствие трения [формула (12.78)]. Число Прандтля $\Pr = 0,7$ (воздух). Температура стенки T_w поддерживается постоянной. Кривая $b \cdot \text{Ec} = 0$ соответствует случаю без учета тепла, возникающего вследствие трения. Кривая $b \cdot \text{Ec} = 2$ соответствует случаю теплопроводированной пластины; $\text{Ec} = U_\infty^2/c_p(T_w - T_\infty); b \cdot \text{Ec} = 0,835$. При $b \cdot \text{Ec} > 2$ нагретая стенка не охлаждается протекающим мимо нее более холодным воздухом, так как тепловая прослойка, образующаяся благодаря выделению тепла из-за трения, мешает охлаждению.

Поясним это условие численным примером. Пусть пластина обтекается воздухом со скоростью $U_\infty = 200 \text{ м/сек}$. Для воздуха $\Pr = 0,7$, $c_p = 1,006 \text{ кДж/кг град}$, поэтому

$$\sqrt{\Pr} \frac{U_\infty^2}{2c_p} = 16^\circ.$$

Следовательно, поток воздуха охлаждает стенку только до тех пор, пока $T_w - T_\infty > 16^\circ$. Если же разность температур стенки и внешнего течения меньше 16° , то на пластину будет переходить из протекающего около нее воздуха часть тепла, возникающего вследствие трения. В частности, нагревание пластины происходит и в том случае, когда стенка и внешнее течение имеют одинаковые температуры.

Теплопередача при физических характеристиках жидкости, зависящих от температуры, исследована Г. Шу [85] для случая продольно обтекаемой пластины. Температурный пограничный слой на пластине в потоке с линейным распределением температуры рассмотрен в работе [102].

2. Другие подобные решения уравнений температурного пограничного слоя. Как мы видели, при продольном обтекании плоской пластины и для распределения скоростей и для распределения температуры получаются подобные профили. Это означает, что профили в различных точках x обтекаемой пластины могут быть приведены в совпадение один с другим посредством подходящего изменения масштаба в направлении y . Так как в динамических пограничных слоях такое подобие профилей имеет место не только при обтекании пластины, а также и в других случаях, например при обтекании клина (§ 1 главы IX), то сама собой напрашивается мысль выяснить, не существуют ли другие подобные решения также для уравнения энергии. Подробно этот вопрос изложен в работе [108]. Здесь мы рассмотрим случай обтекания клина, следовательно, примем, что распределение скоростей во внешнем течении определяется уравнением

$$U(x) = u_1 x^m.$$

Предположим, что распределение температуры стенки также удовлетворяет степенному закону вида

$$T_w(x) - T_\infty = (\Delta T)_0 = T_1 x^n.$$

Случай $n = 0$ соответствует постоянной температуре стенки, случай $n = (1 - m)/2$ — постоянному потоку тепла q . Выполним аффинное преобразование, введя для этого новую переменную

$$\eta = y \sqrt{\frac{U(x)}{v_x}}.$$

Тогда для определения скорости $u = U(x) \cdot f'(\eta)$ мы получим уже известное нам уравнение

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1 - f'^2) = 0 \quad (12.83)$$

[см. уравнение (9.8а)], а для определения безразмерной температуры $\vartheta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ — уравнение

$$\vartheta'' + \frac{m+1}{2} \Pr \cdot f\vartheta' - n \Pr \cdot f'\vartheta = -\Pr \cdot Ec \cdot x^{2m-n} f''^2 \quad (12.84)$$

с граничными условиями

$$\vartheta = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

В уравнении (12.84) $Ec = u_1^2/c_p T_1$ есть число Эккерта для рассматриваемой задачи.

Из уравнения (12.84) видно, что если пренебречь теплом, возникающим вследствие трения, то правая часть уравнения становится равной нулю и решение задачи приводит всегда к подобным профилям. Если же сохранить правую часть уравнения, т. е. учитывать тепло, возникающее вследствие трения, то подобные решения будут существовать только тогда, когда правая часть уравнения не будет зависеть от x . Это будет только в том случае, когда $2m - n = 0$, т. е. при неизменной связи между распределением скоростей внешнего течения и распределением температуры на стенке. Следовательно, при постоянной температуре стенки подобные решения могут быть только в случае плоской пластины ($m = n = 0$). Если условие $2m - n = 0$ выполнено, то для каждой пары значений m и Pr существует определенное число Ec_e , при котором не происходит никакой теплопередачи [$\vartheta'(0) = 0$]. В этом случае распределение температуры на стенке, которая опять называется равновесной температурой T_e , имеет вид

$$\frac{T_e - T_\infty}{U^2/2c_p} = 2c_p \frac{T_1 x^{2m}}{u_1^2 x^{2m}} = \frac{2}{\text{Ec}_e} = b(m, \text{Pr}). \quad (12.85)$$

Значения функции $b(m, \text{Pr})$ вычислены Э. Бруном [5]. Для частного случая $m = 0$ они даны в таблице 12.2.

Если не учитывать тепло, возникающее вследствие трения, то уравнение (12.84) принимает, как уже было сказано, более простой вид

$$\vartheta'' + \frac{m+1}{2} \text{Pr} \cdot f \vartheta' - n \text{Pr} \cdot f' \vartheta = 0. \quad (12.86)$$

Решения этого уравнения при различных значениях параметров m , n и Pr исследованы многими авторами [61], [95], [28], [29], [46], [30], [68], [112]. Как показал Э. Эккерт [15], при $n = 0$ местное число Нуссельта равно

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = F(m, \text{Pr}) = \left\{ \int_0^\infty \exp \left[-\text{Pr} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta \right\}^{-1}, \quad (12.87)$$

причем

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = -\sqrt{\frac{U(x) \cdot x}{v}} \vartheta'(0) = -\sqrt{\text{Re}_x} \vartheta'(0). \quad (12.88)$$

График функции $F(m, \text{Pr})$ для различных значений параметра $\beta = 2m/(m+1)$ построен на рис. 12.14 по численным данным Г. Л. Эванса [29]. На том же рисунке изображены асимптотические приближения для очень малых чисел Прандтля [по формуле (12.42)] и для очень больших чисел Прандтля по формуле (12.47); см. также работу [87]. Для продольного обтекания плоской пластины ($m = 0$) вместо формулы (12.88) получаются в предельных случаях $\text{Pr} \rightarrow 0$ и $\text{Pr} \rightarrow \infty$ формула (12.44а) и соответственно (12.49а), а для течения в окрестности критической точки ($m = 1$) — формула (12.44б) и соответственно (12.49б). В частном случае профиля с отрывом пограничного слоя ($m = -0,091$) при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ имеет место, как показано в работе [28], другое асимптотическое приближение.

3. Температурные пограничные слои на телах любой формы с постоянной температурой стенки. Расчет распределения температуры в ламинарном пограничном слое на теле любой формы выполнен Н. Фрёсслингом [33] как для плоской, так и для осесимметричной задачи. В этом расчете тепло, возникающее вследствие трения и сжатия, не учитывается. Распределение скоростей $U(x)$ в потенциальном течении около рассматриваемого тела представляется в виде степенного ряда по длине дуги x , измеряемой вдоль контура тела (ряд Блазиуса, см. § 3 главы IX), т. е. в виде ряда

$$U = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots$$

Для соответствующего распределения скоростей в пограничном слое берется ряд

$$u(x, y) = u_1 x f_1(y) + u_3 x^3 f_3(y) + \dots,$$

а для распределения температуры — аналогичный ряд

$$T(x, y) = T_0 + x T_1(y) + x^3 T_3(y) + \dots$$

Далее, таким же способом, как и в § 3 главы IX, для $T_1(y)$, $T_3(y)$, ... выводятся обыкновенные дифференциальные уравнения, в которые входят коэффициенты-функции f_1 , f_3 , ..., определяющие распределение скоростей,

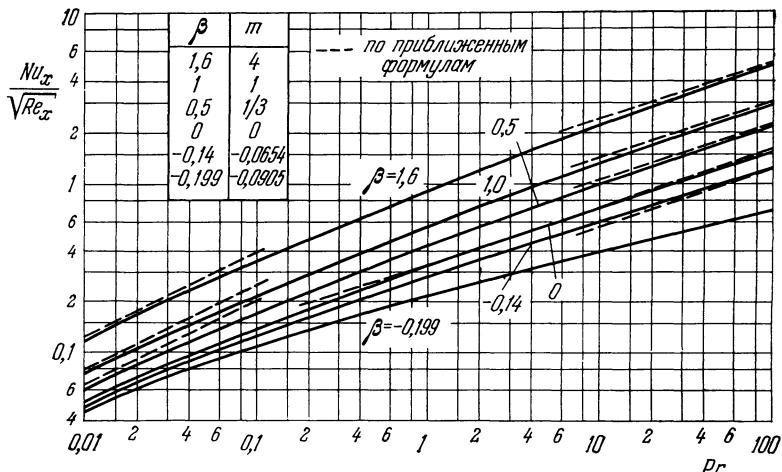


Рис. 12.14. Зависимость местного числа Нуссельта от числа Прандтля и параметра m внешнего течения с распределением скоростей $U(x) = u_1 x^m = u_1 x^\beta / (2-\beta)$ (обтекание клина). Температура стенки предполагается постоянной; тепло, возникающее вследствие трения, не учитывается. Асимптотическое приближение при $\text{Pr} \rightarrow 0$.

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi(2-\beta)}} \text{Pr}^{1/2}.$$

Асимптотическое приближение при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ и $\beta \neq -0,199$ — по формуле (12.47); при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ и $\beta = -0,199$ — по формуле

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,224 \text{Pr}^{1/4}.$$

Приближение при средних числах Прандтля и $\beta = 0$ — по формуле (12.71а).

но зависящие теперь также от числа Прандтля. Н. Фрёсслинг определил путем численного интегрирования первые функции $T_v(y)$ как для плоской, так и для осесимметричной задачи, но только для числа Прандтля $\text{Pr} = 0,7$. Конечно, такой способ расчета температурного пограничного слоя столь же кропотлив, как и аналогичный способ для динамического пограничного слоя. Особенно он утомителен для тонких тел, так как в этом случае для получения необходимой точности требуется брать в степенных рядах большое количество членов.

В частном случае, когда $\text{Pr} = 1$ и когда тепло, возникающее вследствие трения, не учитывается, для распределения температуры в пограничном слое на цилиндре произвольной формы получается такое же дифференциальное уравнение, как и при косом обтекании цилиндра для попечерной составляющей скорости (т. е. для составляющей скорости в направлении образующей «скользящего» цилиндра), в чем легко убедиться, если сравнить уравнения (12.63в) и (11.58). Эту связь, на которую было указано

уже в § 3 главы XI, Д. Голанд [35] использовал для определения распределения температуры в пограничном слое на цилиндре особой формы.

Соответствующее обобщение ряда Гётлера на расчет температурных пограничных слоев (см. § 5 главы IX) выполнено Э. Враге [116] и Э. М. Спарроу [97]. Оба метода применимы к любым распределениям температуры на стенке (см. следующий пункт настоящего параграфа). Сравнение расчетов температурного пограничного слоя на основе ряда Блазиуса и на основе ряда Гётлера выполнено Н. Фрёсслингом [34].

Близи критической точки цилиндра распределение скоростей потенциального течения имеет вид

$$U(x) = u_1 x$$

($m = \beta = 1$). Здесь, если пренебречь теплом, возникающим вследствие трения и сжатия, для местного числа Нуссельта, определяемого соотношением (12.87), получается формула

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F(\Pr, 1) = A(\Pr). \quad (12.89)$$

График функции $A(\Pr)$ изображен на рис. 12.14 для случая $\beta = 1$, а некоторые ее численные значения даны в таблице 12.3 (стр. 290).

Для круглого цилиндра

$$U(x) = 2U_\infty \sin \frac{x}{R},$$

поэтому $u_1 = 4\frac{U_\infty}{D}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} &= \frac{\alpha x}{\lambda} \sqrt{\frac{D v}{4U_\infty x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha D}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{U_\infty D}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Nu_D}{\sqrt{Re_D}} = A(\Pr). \quad (12.90) \end{aligned}$$

При малых числах Рейнольдса подсчеты по этой формуле дают хорошее совпадение с измерениями Э. Шмидта и К. Веннера [83] (рис. 12.15). С другой стороны, эти измерения показывают, что отношение $Nu_D/\sqrt{Re_D}$ систематически зависит от числа Рейнольдса, и эта зависимость не учитывается теорией. Так, например, при числе Рейнольдса $Re = 1,7 \cdot 10^5$ измеренное значение числа Нуссельта в критической точке на 10—15% выше теоретического значения. К этому обстоятельству мы вернемся в п. 7 § 7 настоящей главы, где будет показано, что эти отклонения вызываются турбулентностью внешнего течения и ее изменением с числом Рейнольдса.

Для численного расчета температурного пограничного слоя вместо рассмотренных точных способов значительно проще приближенные способы. Эти приближенные способы сходны с приближенными способами расчета динамического пограничного слоя, основанными на использовании теоремы

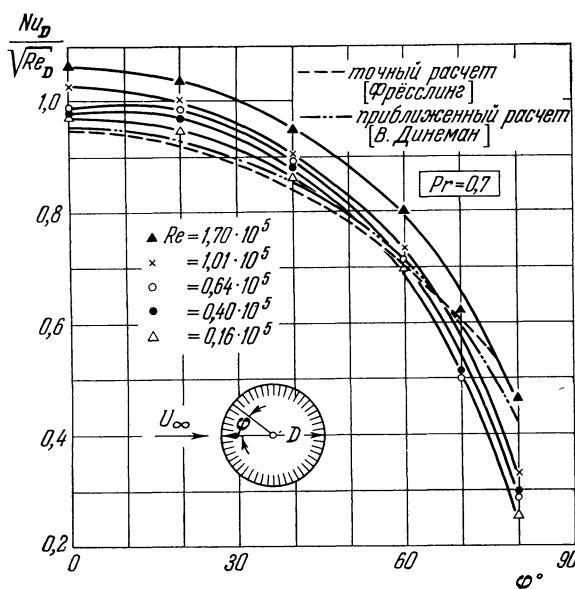


Рис. 12.15. Местный коэффициент теплопередачи для круглого цилиндра. Сравнение измерений с теорией. Число Нуссельта Nu_D и число Рейнольдса составлены для диаметра цилиндра $D = 100$ мм. Измерения по Э. Шмидту и К. Веннеру [83]. Теория по Фресслингу [33] и В. Динеману [8]. Каждующееся влияние числа Рейнольдса объясняется изменением турбулентности во внешнем течении при изменении числа Рейнольдса (см. п. 7 § 7 настоящей главы).

Таблица 12.3. Значения функции A , необходимые для расчета теплопередачи вблизи критической точки цилиндра, для разных чисел Прандтля. По Сквайру [105]

Pr	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7,0	10	15
A	0,466	0,495	0,521	0,546	0,570	0,592	1,18	1,34	1,54

импульсов и подробно изложенными в главе X. Пренебрежем теплом, возникающим вследствие трения и сжатия, и проинтегрируем уравнение распределения температуры (12.35в) от $y = 0$ до $y = \infty$; мы получим *уравнение потока тепла*

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [u(T - T_{\infty})] dy = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (12.91)$$

где $a = \lambda/\rho c_p$ есть коэффициент температуропроводности [см. равенство (12.22)]. Это уравнение, называемое иногда также *уравнением энергии*¹⁾, соответствует уравнению импульсов (8.35) для динамического пограничного слоя.

Из многочисленных способов решения уравнения (12.91) остановимся на способе Г. Б. Сквайра [106], поскольку он особенно прост и непосредственно связан с приближенным методом Польгаузена для расчета динамического пограничного слоя (глава X). Для того чтобы вычислить интеграл в левой части уравнения (12.91), введем безразмерные ординаты

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad \text{для динамического пограничного слоя,}$$

$$\eta_T = \frac{y}{\delta_T} \quad \text{для температурного пограничного слоя}$$

и примем, что распределение скоростей и распределение температуры аппроксимируются следующими полиномами:

$$u = U(x)(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) = U(x)F(\eta), \quad (12.92a)$$

$$T - T_{\infty} = (T_w - T_{\infty})(1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4) = (T_w - T_{\infty})L(\eta_T). \quad (12.92b)$$

Полином (12.92a) совпадает с полиномом (10.23), примененным в приближенном способе Польгаузена для расчета динамического пограничного слоя на пластине. Полином для распределения температуры подобран так, чтобы при $\delta_T = \delta$ профиль скоростей и профиль температуры совпадали, как это имеет место при обтекании пластины при числе Прандтля $\text{Pr} = 1$ [см. соотношение (12.64)]. Подставим выражения (12.92a) и (12.92b) в левую часть уравнения (12.91) и введем для сокращения записи обозначение $\Delta = \delta_T/\delta$. Выполнив интегрирование, мы получим

$$\frac{d}{dx} [\delta_T U H(\Delta)] = 2 \frac{a}{\delta_T}, \quad (12.93)$$

где $H(\Delta)$ есть универсальная функция от $\Delta = \delta_T/\delta$, равная

$$H = \int_0^{\infty} F(\eta) L(\eta_T) d\eta_T. \quad (12.94)$$

¹⁾ Не смешивать с уравнением (8.38).

Выполнив квадратуру, мы найдем

$$H(\Delta) = \frac{2}{15}\Delta - \frac{3}{140}\Delta^3 + \frac{1}{180}\Delta^4 \quad \text{при } \Delta < 1,$$

$$H(\Delta) = \frac{3}{10} - \frac{3}{10}\frac{1}{\Delta} + \frac{2}{15}\frac{1}{\Delta^2} - \frac{3}{140}\frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{180}\frac{1}{\Delta^5} \quad \text{при } \Delta > 1.$$

Некоторые значения функции $H(\Delta)$, вычисленные В. Динеманом [8], даны в таблице 12.4.

Таблица 12.4. Значения функции $H(\Delta)$

Δ	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4
H	0,0873	0,0980	0,1080	0,1175	0,1345	0,1492

Проинтегрировав уравнение (12.93), мы получим

$$(\delta_T U H)^2 = 4a \int_0^x U H dx. \quad (12.95)$$

Применив формулу (10.37) и учитя, что на основании формулы (10.24)¹⁾ $\delta/\delta_2 = 315/37$, мы найдем толщину δ динамического пограничного слоя:

$$\delta^2 = 34 \frac{v}{U^6} \int_{x=0}^x U^5 dx. \quad (12.96)$$

Разделив равенство (12.95) на равенство (12.96), мы получим

$$\Delta^2 H(\Delta) = \frac{4}{34} \frac{1}{Pr} \frac{\int_0^x U^4 dx}{\int_0^x U^5 dx}. \quad (12.97)$$

Так как $H(\Delta)$ известно из таблицы 12.4, то уравнение (12.97) позволяет определить $\Delta(x)$. Вычисление лучше всего вести способом последовательных приближений, причем в качестве первого приближения взять $\Delta = \text{const}$. Это дает

$$\Delta^2 H(\Delta) = \frac{4}{34} \frac{1}{Pr} \frac{\int_0^x U^4 dx}{\int_0^x U^5 dx}. \quad (12.97a)$$

Вычислив отсюда H и подставив найденное значение в правую часть уравнения (12.97), мы сумеем определить более точное значение Δ . Обычно вполне достаточно двух итераций.

Для местного потока тепла получаем

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = 2(T_w - T_\infty) \frac{\lambda}{\delta_T};$$

следовательно, местное число Нуссельта, составленное для длины l , равно

$$Nu_x = \frac{q(x)}{T_w - T_\infty} \frac{l}{\lambda} = 2 \frac{l}{\delta_T}. \quad (12.98)$$

¹⁾ Для простоты мы будем всюду предполагать, что рассматривается динамический пограничный слой на пластине, для которого $\Lambda = 0$.

Таким образом, расчет температурного пограничного слоя и, в частности, определение местного числа Нуссельта вдоль заданного тела производится следующим образом:

- 1) из уравнений (12.97) и (12.97а) определяется $\Delta(x)$;
- 2) из уравнения (12.96) определяется $\delta(x)$;
- 3) по известным $\Delta(x)$ и $\delta(x)$ определяется $\delta_t(x)$, после чего по формуле (12.98) вычисляется местное число Нуссельта.

Пластина, обтекаемая в продольном направлении. Применим изложенное приближенное решение к продольно обтекаемой плоской пластине и сравним его с точным решением. Для продольного обтекания плоской пластины $U(x) = U_\infty$, и из уравнения (12.97) следует

$$\Delta^2 H(\Delta) = \frac{4}{34} \frac{1}{Pr}.$$

Приближенным решением этого уравнения, отличающимся от точного решения не более чем на 5%, является $\Delta = Pr^{-1/3}$. Из уравнения (12.96) находим толщину пограничного слоя

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}.$$

Зная Δ и δ , определяем по формуле (12.98) местное число Нуссельта, составленное для текущей длины x пластины:

$$Nu_x = 0,343 Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}. \quad (12.99)$$

Точное решение, получаемое из уравнения (12.97а), вместо численного множителя 0,343 имеет множитель 0,332.

Кроме только что изложенного способа расчета температурного пограничного слоя предложены многие другие приближенные способы. Упомянем, например, о способах Э. Эккерта [15], Э. Эккерта и Дж. Н. Б. Ливингуда [19, 21], В. Динемана [8], Г. И. Мерка [66], Марии Скопец [92], а также А. Г. Смита и Д. Б. Сполдинга [93]. В этих способах, в противоположность способу Г. Б. Сквайра, используются результаты подобных решений, полученные в предыдущем пункте настоящего параграфа для обтекания клина. Это улучшает точность расчета. В работе Д. Б. Сполдинга и В. М. Пэна [96] дан критический обзор различных приближенных способов и, в частности, сравнена их точность с точным решением Н. Фрёсслинга для круглого цилиндра. По-видимому, из простых способов наиболее точны способы Г. И. Мерка [66] и Смита — Сполдинга [93]. В последней работе показано, что при числе Прандтля $Pr = 0,7$ для подобных решений, получаемых при обтекании клина, с хорошим приближением соблюдается следующее соотношение:

$$\frac{U(x)}{v} \frac{d(\delta_T^2)}{dx} = 46,72 - 2,87 \frac{\delta_T^2}{v} \frac{dU}{dx}. \quad (12.100)$$

При $\beta = 0$ (пластина) и $\beta = 1$ (критическая точка) это соотношение выполняется точно. Если предположить, что соотношение (12.100) имеет вполне общий характер, то сразу получается простая квадратурная формула для определения толщины δ_t температурного пограничного слоя:

$$\left(\frac{\delta_T}{l} \right)^2 \frac{U_\infty l}{v} = \frac{46,72}{\left(\frac{U(x)}{U_\infty} \right)^{2,87}} \int_0^{x/l} \left(\frac{U(x)}{U_\infty} \right)^{1,87} d\left(\frac{x}{l} \right) \quad (Pr = 0,7), \quad (12.101)$$

где U_∞ и l суть постоянные величины, характерные для рассматриваемой задачи. Эта формула соответствует квадратурной формуле (10.37) А. Вальца

для толщины потери импульса. Вычислив по формуле (12.101) δ_T , можно определить местное число Нуссельта по-прежнему по формуле (12.98). В критической точке имеет место соотношение

$$\left(\frac{\delta_T}{l} \right)^2 \frac{U_\infty l}{v} = \frac{16,28}{d \left(\frac{U}{U_\infty} \right)} \quad (\text{Pr} = 0,7). \quad (12.102)$$

Весьма упрощенные способы расчета как для плоского, так и для осесимметричного случая даны в работах Х. Дж. Аллена и Б. К. Лука [1] и Э. Эккера и В. Вайзе [13].

Расчет распределения температуры в пограничном слое с учетом тепла, возникающего вследствие трения и сжатия, выполнен Э. Эккертом и О. Древитцем [14]. В общем случае при течении газа количество тепла, возникающего вследствие сжатия, по своей величине одного порядка с количеством тепла, возникающим вследствие трения. Поэтому дифференциальное уравнение для распределения температуры уже нельзя привести к уравнению первого порядка, как это было возможно при обтекании плоской пластины. Это обстоятельство значительно затрудняет вычисления. В частности, Э. Эккер и О. Древитц провели расчет температурного пограничного слоя для случая обтекания клина, когда распределение скоростей потенциального течения определяется уравнением

$$U(x) = u_1 x^m$$

(расчет динамического пограничного слоя для такого распределения скоростей внешнего течения был выполнен Д. Р. Хартри, см. § 1 главы IX). Температурный пограничный слой, возникающий при обтекании клина, исследован также в работе А. Н. Тиффорда [11].

4. Температурные пограничные слои на телах с любым распределением температуры. Выше, за исключением п. 2, в котором были рассмотрены подобные решения при обтекании клина, предполагалось, что разность температур между телом и внешним течением, вызывающая поток тепла, постоянна. Расчет температурного пограничного слоя и теплопередачи при переменной вдоль стенки температуре $T_w(x)$, конечно, значительно труднее, особенно потому, что теперь местный поток тепла зависит не только от местной разности температур $T_w(x) - T_\infty$, но также, и притом весьма сильно, от «предварительной истории» пограничного слоя.

Распространение способа расчета, основанного на разложении в ряд Блазиуса, на произвольные распределения температуры на стенке, было выполнено К. Р. Гухой и К. С. Ихом [38], а также Н. Фрёслингом [33а]. Соответствующее обобщение способа расчета, использующего ряд Гёттлера, было сделано Э. М. Спарроу [97] и Г. А. Хассаном [41]. Частный случай, когда профили скоростей в пограничном слое аппроксимируются степенной функцией, а температура на стенке — степенным рядом, исследован Д. Р. Дэйвисом и Д. Э. Бурном [7]. Приближенные способы для расчета температурного пограничного слоя при переменной температуре стенки были предложены Д. Р. Чепменом и М. В. Рубезиным [6], И. Клейном и М. Трибусом [51], П. Л. Доноугом и Дж. Н. Б. Ливингстоном [9], М. Дж. Лайтхиллом [62], Г. Шу [86], Г. С. Амброком [2], Д. Б. Спидингом [94], Э. Эккертом, Дж. П. Хартнеттом и Р. Биркебаком [22], Б. Ле-Фюром [56], [57] и Г. Шлихтингом [79].

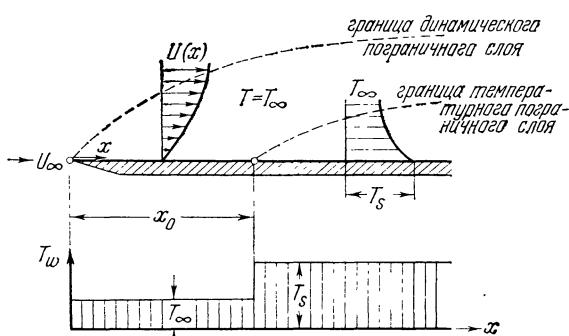


Рис. 12.16. Развитие динамического и температурного пограничных слоев при скачкообразном изменении температуры стенки в точке $x = x_0$ (стандартная задача).

Изложенный в предыдущем пункте способ Г. Б. Сквайра также может быть применен, после соответствующего обобщения, к рассматриваемому случаю [107]. В большей части предложенных способов тепло, возникающее вследствие трения, в случае несжимаемого течения не учитывается.

Так как дифференциальное уравнение температурного пограничного слоя линейно, то его общее решение можно представить в виде линейной комбинации некоторых стандартных решений. Одно из таких стандартных решений можно получить, если исследовать пограничный слой на плоской стенке, на которой температура от точки $x = 0$ до точки $x = x_0$ постоянна и равна температуре T_∞ внешнего течения, а в точке $x = x_0$ проходит внезапное увеличение температуры до значения T_S (рис. 12.16). Если решением этой задачи является

$$\vartheta(x, y, x_0) = \frac{T(x, y, x_0) - T_\infty}{T_S - T_\infty}, \quad (12.103)$$

то при произвольном распределении температуры $T_S(x)$ на стенке решением будет

$$T(x, y) - T_\infty = \int_0^x \vartheta(x, y, x_0) dT_S(x_0), \quad (12.104)$$

Совершенно аналогичным образом из распределения потока тепла

$$q(x, x_0) = q^*(x, x_0) (T_S - T_\infty)$$

стандартной задачи (рис. 12.16) получается поток тепла при произвольном распределении температуры $T_S(x)$ на стенке:

$$q(x) = \int_0^x q^*(x, x_0) dT_S(x_0). \quad (12.105)$$

В правые части обоих соотношений (12.104) и (12.105) входят интегралы Стильтеса. При непрерывном распределении $T_S(x)$ ($x > 0$) соотношение (12.104) можно переписать в более простом виде:

$$T(x, y) - T_\infty = \int_0^x \vartheta(x, y, x_0) \frac{dT_S}{dx_0} dx_0. \quad (12.106)$$

Аналогичным образом можно переписать и соотношение (12.105).

Полученные результаты позволили М. Дж. Лайтхиллу [62] получить из соотношения (12.48) следующую формулу для потока тепла на стенке с распределением температуры $T_S(x)$:

$$q(x) = 0,5384 \left(\frac{\rho \Pr}{\mu^2} \right)^{1/3} \sqrt{\tau_0(x)} \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x \sqrt{\tau_0(z)} dz \right)^{-1/3} dT_S(x_0). \quad (12.107)$$

Строго говоря, эта формула применима только в предельном случае $\Pr \rightarrow \infty$. Более хорошее совпадение с точными подобными решениями в области $0 < \beta < 1$ получается, как указал М. Дж. Лайтхилл [62], если заменить численный множитель 0,5384 на 0,487. Формулу (12.107) вывел несколько иным путем также Г. В. Липман [60], получив при этом для численного множителя значение 0,523.

Как показывает рис. 12.14, общее асимптотическое разложение неприменимо к профилю с отрывом. Поэтому в точке отрыва формула Лайтхилла (12.107) не может дать правильного результата. Улучшение расчета теплопередачи предложено Д. Б. Спайдингом [94]. Для стандартной задачи, изображенной на рис. 12.16, определение потока тепла на стенке приводит к двум уравнениям:

$$q_{n+1}^*(x, x_0) = \frac{q_{n+1}(x, x_0)}{T_S - T_\infty} = \left(\frac{\rho \Pr}{\mu^2} \right)^{1/3} \sqrt{\tau_0(x)} \left[\int_{x_0}^x \sqrt{\tau_0(x)} F(\chi_n) dx \right]^{-1/3}, \quad (12.108)$$

$$\chi_{n+1}(x, x_0) = -\frac{\lambda}{\tau_0(x)} \frac{dp}{dx} \frac{1}{q_{n+1}^*(x, x_0)}, \quad (12.109)$$

которые решаются методом последовательных приближений. Выражение для функции $F(\chi)$ берется из известных подобных решений и приводится в работе [94]. Некоторые численные значения этой функции даны в таблице 12.5. Процесс итерации начинается со значения $F(\chi_0) = 6,4$. Из уравнения (12.108) определяется значение $q_1^*(x, x_0)$, а затем из

Таблица 12.5. Значения функции $F(\chi)$,
используемой для расчета температурного
пограничного слоя при произвольном
распределении температуры на стенке.
По Д. Б. Сполдингу [94]

χ	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$F(\chi)$	3,5	3,8	4,3	5,1	6,4	8,5	11,6	15,8

уравнения (12.109) — значение $\chi_1(x, x_0)$. Найденное значение $\chi_1(x, x_0)$ вносится в уравнение (12.108), вычисляется следующее приближение $q_2^*(x, x_0)$ и т. д. К сожалению, и этот способ расчета неприменим вблизи точки отрыва, так как здесь $\tau_0 \rightarrow 0$ и поэтому функция $\chi(x, x_0)$ принимает бесконечное значение.

Довольно точный способ расчета, учитывающий также тепло, возникающее вследствие трения, предложен Б. Ле-Фюром [56], [57]. Этот способ обобщен также на сжимаемые течения.

5. **Температурные пограничные слои на телах вращения и на вращающихся телах.** Расчет осесимметричных температурных пограничных слоев не представляет никаких особых дополнительных трудностей, так как уравнение энергии остается таким же, как и для плоских течений. Поэтому большая часть способов расчета, разработанных для плоских течений, может быть перенесена на осесимметричные течения, см., например, работы [1], [13], [86]. Кроме того, посредством преобразования Манглера (§ 3 главы XI) расчет осесимметричного течения может бытьведен к расчету плоского течения [53].

В ряде работ исследованы температурные пограничные слои на вращающихся телах вращения. Решения для диска, вращающегося в неподвижном воздухе (ср. п. 11 § 2 главы V), даны в работах [103], [104], [140]. Аналогичная задача для вращающегося шара решена С. Н. Сингхом [91] (см. п. 2 § 2, глава XI).

Осьевое обтекание вращающегося диска (см. п. 2 § 2 главы XI) исследовано А. Н. Тиффордом и С. Т. Чу [113], а осьевое обтекание вращающегося шара — И. Зикманом [90]. Другие решения для вращающихся тел имеются в работах [3] и [110]. Универсальный приближенный метод расчета температурных пограничных слоев, основанный на способе Г. Шлихтинга (см. главу XI, [83]), разработан И. Ямагой [117].

6. **Измерения коэффициента теплопередачи на круглом цилиндре и на других телах.** Измерения коэффициента теплопередачи при обтекании разных тел (главным образом круглого цилиндра) имеются в работах Р. Хильперта [44], а также Э. Шмидта и К. Веннера [83]. Р. Хильперт произвел измерения коэффициента теплопередачи на круглом цилиндре при его обтекании воздухом в направлении, перпендикулярном к оси, причем охватил очень широкую область чисел Рейнольдса. На рис. 12.17 изображена зависимость среднего по окружности цилиндра коэффициента теплопередачи Nu_{cp} от числа Рейнольдса Re (оба числа составлены для диаметра цилиндра). В первом приближении число Nu_{cp} пропорционально \sqrt{Re} , что совпадает с теоретической зависимостью между этими числами при ламинарном продольном обтекании плоской пластины [формулы (12.79а) и (12.79б)] и при ламинарном обтекании любого тела вблизи критической точки [формула (12.90)].

Для круглого цилиндра, а также для других тел местный коэффициент теплопередачи сильно изменяется вдоль поверхности тела. На рис. 12.18 изображены результаты измерений для круглого цилиндра, выполненные Э. Шмидтом и К. Веннером. Мы видим, что в ламинарном пограничном слое местный коэффициент теплопередачи уменьшается с удалением от критической точки и достигает минимума недалеко от точки отрыва пограничного

слоя. При турбулентном течении местный коэффициент теплопередачи позади точки отрыва имеет почти такую же величину, как и в ламинарном пограничном слое на передней стороне цилиндра. (См. в связи с этим также работы [54], [77].) Результаты измерений, изображенные на рис. 12.18 и относящиеся к передней части круглого цилиндра, где течение ламинарно, сравняны на рис. 12.15 с теорией. За основу построения теоретических кривых на рис. 12.15 взято измеренное распределение скоростей во внешнем течении, которое в области передней половины цилиндра приближенно совпадает с потенциальным теоретическим распределением скоростей. Измерением теплопередачи на круглом цилиндре с вдуванием в пограничный слой другой

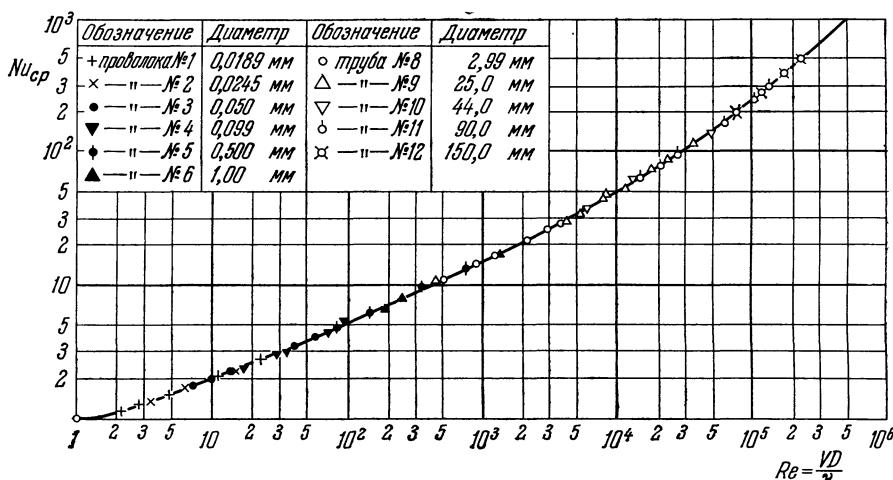


Рис. 12.17. Зависимость числа Нуссельта Nu_{cr} для круглого цилиндра от числа Рейнольдса Re . По Р. Хильперту [44]. Температура поверхности цилиндра равна около 100° С. Сравнение с измерениями И. Кестина и П. Ф. Медера [50a] позволяет сделать заключение, что степень турбулентности ε равна приблизительно 0,9%.

жидкости (для охлаждения посредством испарения) занимались Д. Джонсон и Дж. П. Хартнетт [48a]. В двух работах Э. Эккерта и В. Вайзе [13], [16] опубликованы измерения средней равновесной температуры и местного распределения равновесной температуры для ненагретого цилиндра, обтекаемого воздухом в продольном и поперечном направлениях. При этих измерениях скорость потока доводилась почти до скорости звука. Для продольного обтекания измерения привели к среднему значению

$$(T_e - T_\infty) \frac{2c_p}{U_\infty^2} = 0,84,$$

которое хорошо совпадает с формулой (12.80) для плоской пластины и показывает, что в рассматриваемом случае равновесная температура не зависит от числа Маха. При поперечном обтекании это значение лежит в пределах от 0,6 до 0,8 и лишь очень слабо зависит от числа Маха.

Р. Эйххорн, Э. Эккерт и А. Д. Андерсон [26] произвели измерения теплопередачи вдоль круглого цилиндра с переменной температурой стенки, обтекаемого в осевом направлении. При учете кривизны стенки получилось хорошее совпадение с теорией. Обзоры новых работ, посвященных проблеме теплопередачи, время от времени публикуются в International Journal of Heat and Mass Transfer (см., например, статью [23]).

Температурный пограничный слой на поверхности тела можно сделать видимым путем фотографирования картины течения методом интерференции. На рис. 12.19 изображена такая фотография течения около лопаток турбины. Смещение интерференционных полос является мерой изменения плотности в рассматриваемом месте по сравнению с начальным состоянием (например, по сравнению с невозмущенным течением). В области потенциального течения изменение плотности возникает в основном только вследствие изменения давления, но в пограничном слое существенную

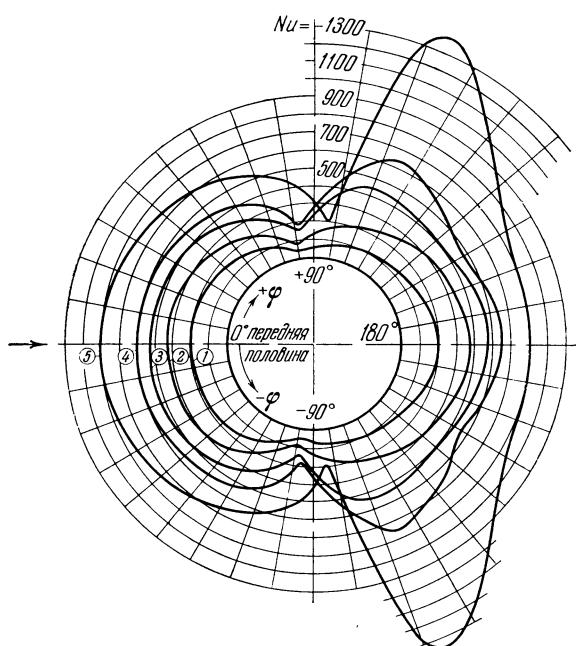


Рис. 12.18. Распределение местного коэффициента теплопередачи на круглом цилиндре при различных числах Рейнольдса. Кривые (1) и (2) — для области докритических чисел Рейнольдса; кривые (3) и (4) — для критической области; кривая (5) — для области сверхкритических чисел Рейнольдса. Кривая (1): $Re = 39\,800$; кривая (2): $Re = 101\,300$; кривая (3): $Re = 170\,000$; кривая (4): $Re = 257\,600$; кривая (5): $Re = 426\,000$. По измерениям Э. Шмидта и К. Веннера [83].

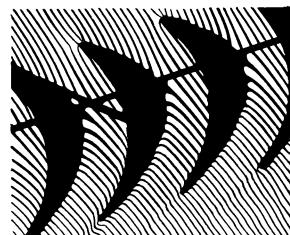


Рис. 12.19. Температурный пограничный слой на лопатках турбины, сделанный видимым посредством интерференционных полос. Угол натекания $\beta_1 = 40^\circ$; отношение расстояния между лопатками к их длине $t/l = 2,18$; число Рейнольдса $Re = 1,97 \cdot 10^5$. Смещение интерференционных полос пропорционально изменениям плотности. Резкие изгибы интерференционных полос вблизи стенок отмечают внешнюю границу температурного пограничного слоя. По Э. Экктерту.

роль играет также нагревание вследствие трения. Внимательно рассматривая рис. 12.19, можно заметить, что вблизи поверхности тела интерференционные полосы резко изгибаются. Это объясняется значительным дополнительным изменением плотности от нагревания теплом, возникающим вследствие трения. Следовательно, положение точек резкого изгиба определяет толщину температурного пограничного слоя. Для придания видимости температурному пограничному слою при естественных конвективных течениях имеется предложенный Э. Шмидтом [81] более удобный способ, так называемый шлирный метод, о котором будет сказано в следующем параграфе.

7. Влияние турбулентности внешнего течения. Рассматривая выше теплопередачу в ламинарных пограничных слоях, мы предполагали, что внешнее течение также ламинарно. Однако в большей части практических случаев, в частности при испытаниях в аэродинамических трубах, внешнее течение в какой-то мере турбулентно, т. е. в каждой точке течения наблюдаются колебания (пульсации) скорости и по величине, и по направлению. На осредненное по времени стационарное течение налагаются три составляющие пульсационной скорости, средние значения которых за достаточно длинный промежуток времени равны нулю. Влияние таких пульсаций на динамический пограничный слой более подробно

будет рассмотрено в главе XV, посвященной нестационарным пограничным слоям. Здесь же мы остановимся на влиянии турбулентности внешнего течения только на температурный пограничный слой и на теплопередачу.

Известную трудность представляет выбор величин, характеризующих пульсационное движение. Так как пульсации при турбулентности носят случайный характер, то два турбулентных течения, строго говоря, не могут быть подобны одно другому.

Однако эксперименты показали, что пульсационное движение практически может быть достаточно точно описано посредством некоторых осредненных значений. Такими осредненными значениями являются степень турбулентности ε , определение которой будет дано в п. 1 § 4 главы XVI, и характерная длина L , о которой будет сказано в § 4 главы

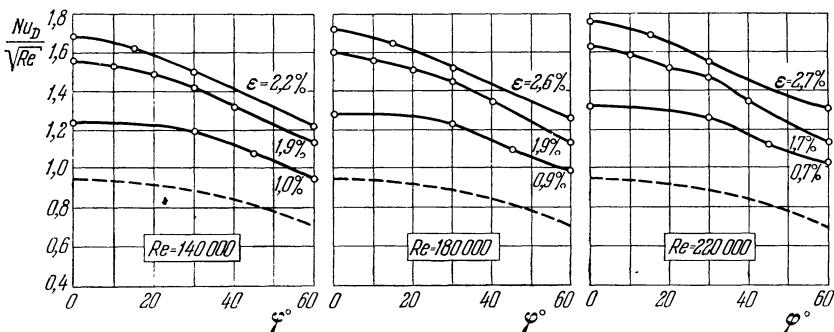


Рис. 12.20. Зависимость местного числа Нуссельта Nu_D на круглом цилиндре от азимута ϕ и степени турбулентности ε внешнего течения. По И. Кестину, П. Ф. Медеру и Г. Г. Соджину [40]. Штриховые кривые — теория по Н. Фресслингу. Для степени турбулентности указаны приближенные значения.

XVIII. Если длина L мала по сравнению с размерами тела, что на практике обычно и бывает, то для описания пульсационного движения достаточно указания степени турбулентности ε . Поэтому можно предполагать, что для геометрически подобных тел с постоянной температурой, помещенных в параллельные изотермические течения с турбулентным пульсационным движением, число Нуссельта зависит не только от числа Прандтля и от числа Рейнольдса, но также от степени турбулентности. Следовательно, местное и среднее числа Нуссельта в общем случае будут

$$Nu_x = f_1 (Re_x, Pr, \varepsilon), \quad (12.110a)$$

$$Nu_{cp} = f_2 (Re, Pr, \varepsilon) \quad (12.110b)$$

[см. равенства (12.30) и (12.30a)].

Турбулентность внешнего течения влияет на теплопередачу от обтекаемого тела к жидкости двумя существенно различными путями. Во-первых, повышенная турбулентность внешнего течения приводит к перемещению точки, в которой ламинарное течение в пограничном слое переходит в турбулентное, ближе к переднему концу обтекаемого тела. В свою очередь турбулентный характер пограничного слоя вызывает повышенную теплопередачу. Этот эффект подробнее будет рассмотрен в главе XVI.

К этому эффекту присоединяется второй аналогичный эффект, который особенно сильно выражен в ламинарных пограничных слоях. На рис. 12.20 изображена зависимость местного числа Нуссельта на круглом цилиндре от азимута ϕ при различных числах Рейнольдса и при различных степенях турбулентности внешнего течения по измерениям И. Кестина, П. Ф. Медера и Г. Г. Соджина [40]. Для сравнения на том же рисунке проведены теоретические кривые, полученные Н. Фресслингом [33] для внешнего течения, свободного от турбулентности. Измерения, изображенные на рис. 12.20, аналогичны измерениям, показанным на рис. 12.18. Из рис. 12.20 видно, какое сильное влияние на теплопередачу оказывает турбулентность внешнего течения. В самом деле, повышение степени турбулентности примерно на 2,5% вызывает повышение числа Нуссельта на 80%.

Однако самым примечательным и неожиданным является следующее обстоятельство: на продольно обтекаемой плоской пластине указанный эффект отсутствует. Измерения И. Кестина, П. Ф. Медера и Г. Э. Ванга [50б] показали, что в области ламинарного пограничного слоя на плоской пластине степень турбулентности не оказывает никакого влияния на местное число Нуссельта. К такому же выводу, пришли А. Эдвардс и Б. Н. Фарбер [34]. Эти результаты дают основание предполагать, что турбулентность внешнего течения влияет на местную теплопередачу только при наличии градиента давления.

Некоторое подтверждение этому предположению дают эксперименты, опубликованные в работе [50^a]: посредством искусственного создания градиента давления удалось сильно повысить теплопередачу при повышении турбулентности внешнего течения также на плоской пластине. Качественное объяснение этого явления можно вывести, как это показано в работе [50^b], из теории Ц. Ц. Линя (см. главу XV). Влияние турбулентности внешнего течения на теплопередачу рассмотрено также в работах [3^a], [6^a], [34^a], [34^b], [42^a], [64], [77^a], [87^a] и [10^a]¹⁾.

§ 8. Температурные пограничные слои при естественном конвективном течении

Течения, единственной причиной которых является неодинаковость плотности, вызванная разностью температур, называются *естественными конвективными течениями* в отличие от вынужденных конвективных течений, вызываемых внешними причинами. Естественное конвективное течение возникает, например, около вертикально поставленной нагретой пластины или около горизонтально расположенного нагретого цилиндра и обладает обычно свойствами, характерными для пограничного слоя, особенно в тех случаях, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности малы.

В случае *вертикально поставленной нагретой пластины* давление в каждой горизонтальной плоскости равно весовому давлению и, следовательно, постоянно. Причиной движения является исключительно разность между весом и архимедовой подъемной силой, обусловленная силой притяжения Земли. Тепло, возникающее вследствие трения, не будем учитывать. Вместо температуры T введем безразмерную температуру

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

Тогда, имея в виду, что $dp/dx = 0$ и что коэффициент теплового расширения равен $\beta = 1/T_\infty$, мы приведем уравнения пограничного слоя (12.36) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.111)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \vartheta, \quad (12.112)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (12.113)$$

где $a = \lambda/\rho c_p$ есть коэффициент температуропроводности. Э. Польгаузен, использовав экспериментальные результаты, полученные Э. Шмидтом и В. Бекманом [80] при измерении температурного и скоростного полей около вертикально поставленной нагретой пластины при естественной конвекции, показал следующее: два уравнения в частных производных, которые получаются из уравнений (12.111) и (12.112) после введения функции тока посредством соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

могут быть сведены к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, если применить аффинное преобразование

$$\eta = c \frac{y}{\sqrt[4]{x}}, \quad \psi = 4\nu cx^{3/4}\zeta(\eta),$$

¹⁾ Исчерпывающая сводка работ, посвященных этому вопросу, дана в статье И. Кестина [119].

где

$$c = \sqrt[4]{\frac{g(T_w - T_\infty)}{4v^2 T_\infty}}. \quad (12.114)$$

Тогда составляющими u и v скорости будут

$$u = 4vx^{1/2}c^2\zeta', \quad v = vcx^{-1/4}(\eta\zeta' - 3\zeta).$$

Подставив эти выражения u и v в уравнения (12.112) и (12.113) и имея в виду равенство (12.114), мы получим для определения функции $\zeta(\eta)$ и распределения температуры $\vartheta(\eta)$ дифференциальные уравнения

$$\zeta'' + 3\zeta\zeta'' - 2\zeta'^2 + \vartheta = 0, \quad (12.115a)$$

$$\vartheta'' + 3Pr\zeta\vartheta' = 0 \quad (12.115b)$$

с граничными условиями

$$\zeta = \zeta' = 0, \quad \vartheta = 1 \quad \text{при } \eta = 0,$$

$$\zeta' = 0, \quad \vartheta = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Решения этих уравнений для различных значений числа Прандтля графически изображены на рис. 12.21 и 12.22.

На рис. 12.23 и 12.24 показано сравнение этих решений с измерениями Э. Шмидта и В. Бекмана [80]. Совпадение получается очень хорошо. Из найденных результатов следует, что толщина динамического и температурного пограничных слоев пропорциональна $x^{1/4}$.

Теплопередача. Количество тепла, переходящее от пластины к жидкости в точке x через единицу площади в единицу времени, равно

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0.$$

Подставив вместо T его выражение через ϑ , мы получим

$$q(x) = -\lambda cx^{-1/4} \left(\frac{d\vartheta}{d\eta} \right)_0 (T_w - T_\infty),$$

причем, в соответствии с рис. 12.21,

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\eta} \right)_0 = -0,508$$

при $Pr = 0,733$. Полное количество тепла, переходящее к жидкости от всей пластины, равно

$$Q = b \int_0^l q(x) dx = 0,508 \frac{4}{3} bl^{3/4} c \lambda (T_w - T_\infty),$$

где b есть ширина пластины. Если ввести среднее число Нуссельта посредством соотношения

$$Q = b \lambda \text{Nu}_{cp} (T_w - T_\infty),$$

то мы будем иметь

$$\text{Nu}_{cp} = 0,677 cl^{3/4}.$$

Заменив c его выражением (12.114), мы получим

$$\text{Nu}_{cp} = 0,478 (\text{Gr})^{1/4}, \quad (12.116)$$

где

$$\text{Gr} = \frac{gl^3(T_w - T_\infty)}{v^2 T_\infty} \quad (12.117)$$

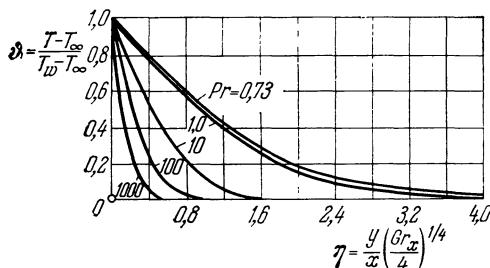


Рис. 12.21. Распределение температуры в ламинарном пограничном слое на вертикально поставленной нагретой плоской пластине при естественной конвекции; теоретические кривые по Польгаузену [73] и С. Остреху [72].
 $Gr = (gx^3/v^2)(T_w - T_\infty)/T_\infty$ — число Грасгофа.

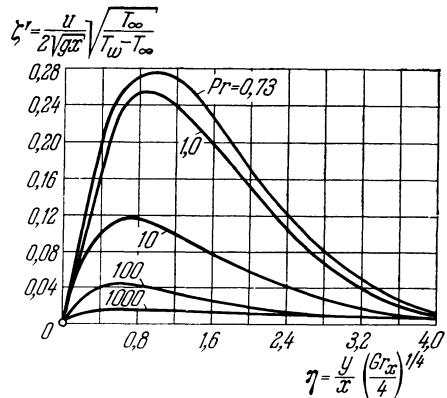


Рис. 12.22. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на вертикально поставленной нагретой плоской пластине при естественной конвекции (ср. с рис. 12.21).

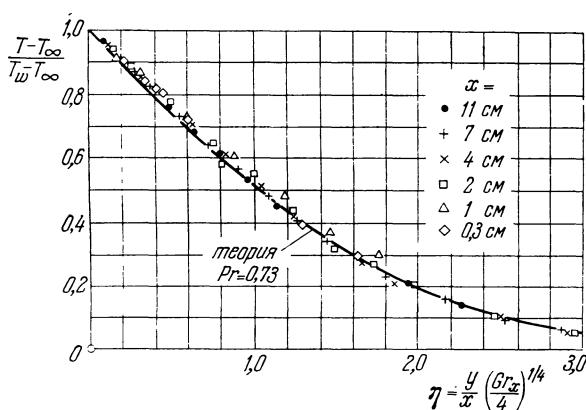


Рис. 12.23. Распределение температуры в ламинарном пограничном слое на вертикально поставленной нагретой плоской пластине при естественной конвекции в воздухе; x — расстояние от нижней кромки пластины. По Э. Шмидту и В. Бекману [80].

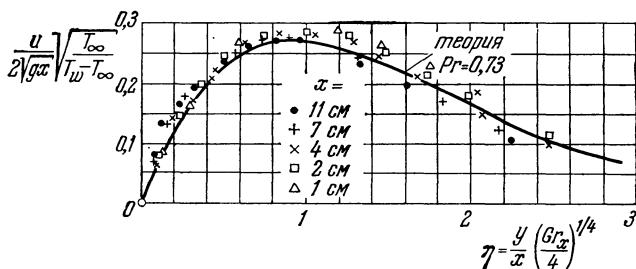


Рис. 12.24. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на вертикально поставленной нагретой плоской пластине при естественной конвекции в воздухе. По Э. Шмидту и В. Бекману [80].

есть число Грасгофа, которое для жидкостей можно представить также в виде

$$Gr = \frac{g l^3 \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2}.$$

На рис. 12.25 результаты теоретического расчета коэффициента теплопередачи при свободном конвективном течении сравнены с измерениями, выполненными Э. Р. Г. Эккертом и Т. В. Джексоном [18] на нагретых вертикальном цилиндре и плоских пластинах. При $Gr \cdot Pr < 10^8$ течение ламинарное, при $Gr \cdot Pr > 10^{10}$ течение турбулентное. Совпадение измерений с теоретическим расчетом весьма хорошее.

На рис. 12.25 результаты теоретического расчета коэффициента теплопередачи при свободном конвективном течении сравнены с измерениями, выполненными Э. Р. Г. Эккертом и Т. В. Джексоном [18] на нагретых вертикальном цилиндре и плоских пластинах. При $Gr \cdot Pr < 10^8$ течение ламинарное, при $Gr \cdot Pr > 10^{10}$ течение турбулентное. Совпадение измерений с теоретическим расчетом весьма хорошее.

Расчеты Э. Польгаузена были продолжены Г. Шу [84] для больших чисел Прандтля. Решениям при очень малых числах Прандтля посвящена работа Э. М. Спарроу и Дж. Л. Грегга [100]. Предельные случаи $Pr \rightarrow 0$ и $Pr \rightarrow \infty$ рассмотрены Э. Ж. Ле-Февром [55]. Для среднего числа Нуссельта он получил формулы

$$\frac{Nu_{cp}}{(Gr \cdot Pr)^{1/4}} = 0,800 \quad (Pr \rightarrow 0), \quad (12.118a)$$

$$\frac{Nu_{cp}}{(Gr \cdot Pr)^{1/4}} = 0,670 \quad (Pr \rightarrow \infty). \quad (12.118b)$$

Некоторые значения среднего числа Нуссельта даны в таблице 12.6.

Некоторые значения среднего числа Нуссельта даны в таблице 12.6. Расчеты теплопередачи для случая, когда вязкость зависит от температуры, выполнил Т. Хара [39]. Влияние на пограничный слой на пластине отсасывания и вдувания при естественной конвекции исследовано в работах [25] и [98]. Другие возможные подобные решения для естественных

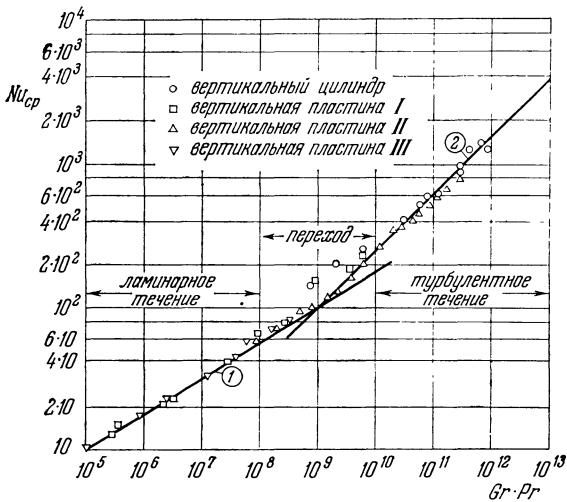


Рис. 12.25. Среднее число Нуссельта для свободного конвективного течения около вертикально поставленной плоской пластины. По Э. Р. Г. Эккерту и Т. В. Джексону [18]. Кривая (1) — ламинарное течение: $Nu_{cp} = 0,555(Gr \cdot Pr)^{1/4}$, $Gr \cdot Pr < 10^8$. Кривая (2) — турбулентное течение: $Nu_{cp} = 0,0210(Gr \cdot Pr)^{2/5}$; $Gr \cdot Pr > 10^8$.

расчеты теплопередачи для случая, когда вязкость зависит от температуры, выполнил Т. Хара [39]. Влияние на пограничный слой на пластине отсасывания и вдувания при естественной конвекции исследовано в работах [25] и [98]. Другие возможные подобные решения для естественных

Таблица 12.6. Значения коэффициента теплопередачи для вертикально поставленной нагретой плоской пластины при естественной ламинарной конвекции. По работам [72], [73], [84] и [100]

Pr	0	0,003	0,008	0,01	0,02	0,03	0,72	0,73	1	2	10	100	1000	∞
$\frac{Nu_{cp}}{(Gr \cdot Pr)^{1/4}}$	0	0,182	0,228	0,242	0,280	0,305	0,516	0,518	0,535	0,568	0,620	0,653	0,665	0,670

конвективных течений рассмотрены К. Т. Янгом [118]. Выяснилось, в частности, что распределения температуры на пластине вида $T_w - T_\infty = T_1 x^n$ также приводят к подобным решениям. В этом случае вместо дифференциальных уравнений (12.115) получаются следующие:

$$\zeta'' + (n+3)\zeta\zeta'' - 2(n+1)\zeta'^2 + \vartheta = 0, \quad (12.119a)$$

$$\vartheta'' - Pr[4n\zeta' - (n+3)\zeta\vartheta'] = 0. \quad (12.119b)$$

Решения этих уравнений даны Э. М. Спарроу и Дж. Л. Греггом [101]. В работе [99] исследованы подобные решения для свободной и вынужденной конвекции, происходящих одновременно. В этом случае распределение скоростей во внешнем течении должно быть пропорционально x^m (обтекание клина), а распределение температуры на пластине — пропорционально x^{2m-1} .

Измерения коэффициента теплопередачи на нагретой пластине, поставленной вертикально в масле, выполнены Г. Г. Лоренцем [63]. Эти измерения привели к формуле

$$Nu_{cp} = 0,555 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4},$$

т. е. к вполне удовлетворительному совпадению с теоретическим результатом, особенно если иметь в виду, что теория не учитывает зависимости вязкости от температуры, которая для масла довольно значительна.

Ламинарный температурный пограничный слой на нагретом теле при естественной конвекции очень просто сделать видимым посредством шлирного метода, указанного Э. Шмидтом [81]. Для этой цели параллельно поверхности, отдающей тепло, направляется параллельный пучок света. Этот пучок, проходя в нагретом пограничном слое, дает на экране позади тела теневое изображение, позволяющее судить о толщине температурного пограничного слоя и о местном коэффициенте теплопередачи. Такое теневое изображение возникает следующим образом. Вследствие градиента плотности в направлении, перпендикулярном к нагретой поверхности, лучи света отклоняются наружу, и притом сильнее всего там, где градиент плотности имеет наибольшее значение, т. е. непосредственно около тела. Если экран достаточно удален от тела, то изображение всего пространства, занятого нагретым слоем, получается на экране в виде темного ядра, заключающего в себе и изображение нагретого тела. Лучи света, отклоненные из температурного поля наружу, дают на экране светлую зону, окружающую темное ядро. Внешняя граница светлой зоны очерчивается теми лучами, которые прошли около самой поверхности нагретого тела. Их отклонение пропорционально градиенту плотности у поверхности и, следовательно, местному коэффициенту теплопередачи. На рис. 12.26 изображен такой шлирный снимок температурного пограничного слоя на вертикально поставленной нагретой плоской пластине. Контур пластины внутри темного ядра обозначен белыми штрихами. Очертания границ темного ядра и светлой зоны показывают, что толщина температурного пограничного слоя пропорциональна $x^{1/4}$, а местный коэффициент теплопередачи пропорционален $x^{-1/4}$. На рис. 12.27 изображен снимок того же пограничного слоя, полученный Э. Зёнгеном и Э. Эккертом [10] методом интерференционных полос.

Тела другой формы. Естественная конвекция около горизонтально расположенного нагреветого круглого цилиндра исследована аналогичным способом Р. Херманом [43]. Для среднего коэффициента теплопередачи он

Рис. 12.26. Шлирный снимок температурного пограничного слоя на вертикально поставленной нагретой плоской пластине.
По Э. Шмидту [81].

Рис. 12.27. Интерференционная картина температурного пограничного слоя на вертикально поставленной нагретой плоской пластине.
По Э. Зёнгену и Э. Эккерту [10].

получил при числе Прандтля $\text{Pr} = 0,7$ формулу

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,372 (\text{Gr})^{1/4},$$

где число Грасгофа составлено для диаметра. Измерения К. Иодльбауэра [48], выполненные для воздуха при числе Грасгофа $\text{Gr} = 10^5$, привели к формуле

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,395 (\text{Gr})^{1/4},$$

т. е. к удовлетворительному совпадению с теорией. Измерения теплопередачи на цилиндре, поставленном вертикально в воде и этиленгликоле [114], показали, что при ламинарном течении ($\text{Pr} \cdot \text{Gr} = 2 \cdot 10^8 \div 4 \cdot 10^{10}$)

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,726 (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4},$$

а при турбулентном течении ($\text{Pr} \cdot \text{Gr} = 4 \cdot 10^{10} \div 9 \cdot 10^{11}$)

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,0674 [\text{Gr} \cdot \text{Pr}^{1,29}]^{-1/3}.$$

Для шара Дж. И. Шелл [89] получил теоретическую формулу

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,429 (\text{Gr})^{1/4},$$

хорошо подтвержденную измерениями в воздухе.

Литература к главе XII

1. Allen H. J., Look B. C., A method for calculating heat transfer in the laminar flow regions of bodies. NACA Rep. 764 (1943).
2. Амброк Г. С., Влияние переменности температуры поверхности на теплообмен при ламинарном пограничном слое. Журн. тех. физики 27, 812—821 (1957).
3. B j o r k l u n d I. S., K a y s W. M., Heat transfer between concentric rotating cylinders. J. Heat Transfer 81, 175—186 (1959).
- 3a. B ü y ü k t ü r A. R., K e s t i n J. and M a e d e r P. F., Influence of combined pressure gradient and turbulence on the transfer of heat from a plate. Int. J. Heat Mass. Transfer 7, 1175—1186 (1964).
4. T e n B o s c h M., Die Wärmeübertragung. Berlin 1936.
5. B r u n E. A., Selected Combustion Problems, т. II, 185—198, AGARD, Pergamon Press, London 1956.
6. C h a p m a n D. R., R u b e s i n M. W., Temperature and velocity profiles in the compressible, laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. JAS 16, 547—565 (1949).
- 6a. C o m i n g s E. W., C l a p p J. T. and T a y l o r J. F., Air turbulence and transfer processes; Flow normal to cylinders. Ind. and Eng. Chemistry 40, 1076—1082 (1948).
7. D a v i e s D. R., B o u r n e D. E., On the calculation of heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layers. I. The laminar case. Quart. J. Mech. Appl. Math. 9, 457—467 (1956); см. также Quart. J. Mech. Appl. Math. 12, 337—339 (1959).
8. D i e n e m a n n W., Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Диссертация, Braunschweig 1951, ZAMM 33, 89—109 (1953); выдержки в JAS 18, 64—65 (1951).
9. D o n o u g h e P. L., L i v i n g o o d J. N. B., Exact solutions of laminar boundary layer equations with constant property values for porous wall with variable temperature. NACA Rep. 1229 (1955).
10. E c k e r t E. R. G., D r a k e R. M., Heat and Mass Transfer. McGraw Hill, New York 1959. [Имеется русский перевод: Эккерт Э. и Дрейк Р., Теория тепло- и массообмена, Госэнергоиздат, Москва 1961.]
11. E c k e r t E., D r e w i t z O., Der Wärmeübergang an eine mit grosser Geschwindigkeit längsangeströmte Platte. Forschg. Ing.-Wes. 11, 116—124 (1940).
12. E c k e r t E., Temperaturmessungen in schnell strömende Gasen. Z. VDI 84, 813—817 (1940).
13. E c k e r t E., W e i s e W., Die Temperatur unbeheizter Körper in einem Gasstrom hoher Geschwindigkeit. Forschg. Ing.-Wes. 12, 40—50 (1941).
14. E c k e r t E., D r e w i t z O., Die Berechnung des Temperaturfeldes in der laminaren Grenzschicht schnell angeströmter unbeheizter Körper. Luftfahrtforschung 19, 189—196 (1942).
15. E c k e r t E., Die Berechnung des Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. VDI-Forschungsheft 416 (1942).

16. Eckert E., Weise W., Messung der Temperaturverteilung auf der Oberfläche schnell angestromter unbeheizter Körper. *Forschg. Ing.-Wes.* **13**, 246—254 (1942).
17. Eckert E., Wärme- und Stoffaustausch. 2-е изд., Berlin 1959.
18. Eckert E. R. G., Jackson T. W., Analysis of turbulent free convection boundary layer on a flat plate. *NACA Rep.* 1015 (1951).
19. Eckert E. R. G., Livingood J. N. B., Method for calculation of laminar heat transfer in air flow around cylinders of arbitrary cross-section (including large temperature differences and transpiration cooling). *NACA Rep.* 1118 (1953).
20. Eckert E. R. G., Diaguita A. J., Experimental investigation of freeconvection heat transfer in vertical tube at large Grashof numbers. *NACA Rep.* 1211 (1955).
21. Eckert E. R. G., Livingood J. N. B., Calculations of laminar heat transfer around cylinders of arbitrary cross-section and transpiration cooled walls with application to turbine blade cooling. *NACA Rep.* 1220 (1955).
22. Eckert E. R. G., Hartnett J. P., Birkbeck R., Simplified equations for calculating local and total heat flux to non-isothermal surface. *JAS* **24**, 549—551 (1957).
23. Eckert E. R. G., Irvine Jr. T. F., Sparrow E. M., Ibele W. E., Heat transfer, a review of current literature. *Int. J. Heat Mass Transfer* **3**, 222—248 (1961).
24. Edwards A., Furber B. N., The influence of freestream turbulence on heat transfer by convection from an isolated region of a plane surface in parallel air flow. *Proc. Inst. Mech. Eng.* **170**, 941 (1956).
25. Eichhorn R., The effect of mass transfer on free convection. *J. Heat Transfer* **82**, 260—263 (1960).
26. Eichhorn R., Eckert E. R. G., Anderson A. D., An experimental study of the effects of nonuniform wall temperature on heat transfer in laminar and turbulent axisymmetric flow along a cylinder. *J. Heat Transfer* **82**, 349—359 (1960).
27. Elias F., Der Wärmeübergang einer geheizten Platte an strömende Luft. *Abhlg. Aerodyn. Inst. T. H. Aachen*, вып. 9 (1930); *ZAMM* **9**, 434—453 (1929) и **10**, 1—14 (1930).
28. Evans H. L., Mass transfer through laminar boundary layers. 3a. Similar solutions to the b-equation when $B = 0$ and $\sigma \geq 0,5$. *Int. J. Heat Mass Transfer* **3**, 26—41 (1961).
29. Evans H. L., Mass transfer through laminar boundary layers. 7. Further similar solutions to the b-equation for the case $B = 0$. *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 35—37 (1962).
30. Fage A., Falkner V. M., Relation between heat transfer and surface friction for laminar flow. *ARC RM* 1408 (1931).
- 30a. Fischer P., Ähnlichkeitsbedingungen für Strömungsvorgänge mit gleichzeitigem Wärmeübergang. *ZAMM* **43**, T 122—T 125 (1963).
31. Frick C. W., McCullough G. B., A method for determining the rate of heat transfer from a wing or streamlined body. *NACA Rep.* 830 (1945).
32. Fritzsch A. F., Bodnarescu M., Kirschner O., Esdorn H., Probleme der Wärmeübertragung. *VDI-Forschungsheft* 450 (1955).
33. Frössling N., Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer Grenzschichtströmung. *Lunds Univ. Arssk.*, N. F., Avd. 2, 36, № 4 (1940); см. также *NACA TM* 1432 и *Lunds Univ. Arssk.*, N. F. Avd. 2, 154, № 3 (1958).
- 33a. Frössling N., Calculating by series expansion of the heat transfer in laminar, constant property boundary layers at non isothermal surfaces. *Archiv für Fysik* **14**, 143—151 (1958).
34. Frössling N., Problems of heat transfer across laminar boundary layers. В книге: Theory and Fundamental Research in Heat Transfer. Proc. Ann. Meeting of the American Soc. of Mech. Engrs. (под ред. J. A. Clark'a), Pergamon Press, 1963, 181—202.
- 34a. Giedt W. H., Investigation of variation of point unit heat-transfer coefficient around a cylinder normal to an air stream. *Trans. ASME* **71**, 375—381 (1949).
- 34b. Giedt W. H., Effect of turbulence level of incident air stream on local heat transfer and skin friction on a cylinder. *JAS* **18**, 725—730, 766 (1951).
35. Goland L., A theoretical investigation of heat transfer in the laminar flow regions of airfoils. *JAS* **17**, 436—440 (1950).
36. Grigull U., Wärmeübertragung in laminarer Strömung mit Reibungswärme. *Chemie-Ingenieur-Technik*, 480—483 (1955).
37. de Groot H. M., On viscous heating. *JAS* **23**, 395—396 (1956).
38. Guha C. R., Yih C. S., Laminar convection of heat from two-dimensional bodies with variable wall temperatures. *Proc. 5th Mid. Conf. Fluid Mech.* 1957, 29—40.
39. Hara T., Heat transfer by laminar free convection about a vertical flat plate with large temperature difference. *Bull. JSME* **1**, 251—254 (1958).
40. Hartnett J. P., Heat transfer from a nonisothermal disk rotating in still air. *J. Appl. Mech.* **26**, 672—673 (1959).
41. Hassan H. A., On heat transfer to laminar boundary layers. *JASS* **26**, 464 (1959).

42. H a u s e n b l a s H., Die nicht isotherme Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren. Ing.-Arch. 18, 151—166 (1950).
- 42a. v a n d e r H e g g e Z i j n e n B. G., Heat transfer from horizontal cylinders to a turbulent air flow. Appl. Sci. Res. A 7, 205—223 (1957).
43. H e r m a n n R., Wärmeübertragung bei freier Strömung am waagerechten Zylinder in zweiatomigen Gasen. VDI-Forschungsheft 379 (1936).
44. H i l p e r t R., Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom. Forschg. Ing.-Wes. 4, 215—224 (1933).
45. H o w a r t h L., Velocity and temperature distribution for a flow along a flat plate. Proc. Roy. Soc. London A 154, 364 (1936).
- 45a. I l l i n g w o r t h C. R., Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid. Proc. Cambr. Phil. Soc. 46, 469—478 (1950).
46. I m a i I., On the heat transfer to constant property laminar boundary layer with power function free stream velocity and wall temperature distributions. Quart. Appl. Math. 16, 33—45 (1958).
47. J a c o b M., Heat transfer, т. I и II, New York, 1949 и 1957.
48. J o d l b a u e r K., Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld um ein geheiztes Rohr bei freier Konvektion. Forschg. Ing.-Wes. 4, 157—172 (1933).
- 48a. J o h n s o n D. V., H a r t n e t t J. P., Heat transfer from a cylinder in cross-flow with transpiration cooling. J. Heat Transfer 85, 173—179 (1963).
49. K e s t i n J., M a e d e r P. F., S o g i n H. H., The influence of turbulence on the transfer of heat to cylinders near the stagnation point. ZAMP 12, 115—132 (1961).
50. K e s t i n J., M a e d e r P. F., W a n g H. E., On boundary layers associated with oscillating streams. Appl. Sci. Res. A 10, 1 (1961).
- 50a. K e s t i n J., M a e d e r P. F., Influence of turbulence on transfer of heat from cylinders. NACA TN 4018 (1954).
506. K e s t i n J., M a e d e r P. F., W a n g H. E., Influence of turbulence on the transfer of heat from plates with and without a pressure gradient. Int. J. Heat Mass. Transfer 3, 133—154 (1961).
- 50b. K e s t i n J. and P e r s e n L. N., The transfer of heat across a turbulent boundary layer at very high Prandtl numbers. Int. J. Heat and Mass Transfer 5, 355—371 (1962).
51. K l e i n J., T r i b u s M., Forced convection from non-isothermal surfaces. Heat Transfer Symposium, Engineering Research Institute, University of Michigan, август 1952.
52. K n u d s e n J. G., K a t z D. L., Fluid Dynamics and Heat Transfer. McGraw-Hill, New York 1958.
53. K o S. Y., Calculation of local heat transfer coefficients on slender surfaces of revolution by the Mangler transformation. JAS 25, 62—63 (1958).
54. К р у ж и л и н Г. Н., Теплопередача круглого цилиндра в поперечном потоке воздуха при числах Рейнольдса $Re = 6000 \div 425\,000$. Журнал техн. физики 5, 289—297 (1938).
55. L e F e v r e E. J., Laminar free convection from a vertical plane surface. Mech. Eng. Res. Lab., Heat 113 (Gt. Britain), 1956.
56. L e F u r B., Nouvelle méthode de résolution par itération des équations dynamique et thermique de la couche limite laminaire. Publ. Sci. et Techn. du Ministère de l'Air, № 383 (1962).
57. L e F u r B., Convection de la chaleur en régime laminaire dans le cas d'un gradient de pression et d'une température de paroi quelconques, le fluide étant à propriétés physiques constantes. Int. J. Heat Mass. Transfer 1, 68—80 (1960).
58. L e v e q u e M. A., Les lois de la transmission de chaleur par convection. Ann. Mines 13, 201—239 (1928).
59. L e v y S., Heat transfer to constant property laminar boundary layer flows with powerfunction free-stream velocity and wall temperature variation. JAS 19, 341—348 (1952).
60. L i e p m a n n H. W., A simple derivation of Lighthills heat transfer formula. J. Fluid Mech. 3, 357—360 (1958).
61. L i e t z k e A. F., Theoretical and experimental investigation of heat transfer by laminar natural convection between parallel plates. NACA Rep. 1223 (1955).
62. L i g h t h i l l M. J., Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. London A 202, 359—377 (1950).
63. L o r e n z H. H., Die Wärmeübertragung an einer ebenen senkrechten Platte an Öl bei natürlicher Konvektion. Z. Techn.-Physik 362 (1934).
64. M a i s e l D. S., S h e r w o o d T. K., Evaporation of liquids into turbulent gas streams. Chem. Eng. Progr. 46, 131—138 (1950).
65. M e k s y n D., Plate Thermometer. ZAMP 11, 63—68 (1960).
66. M e r k H. J., Rapid calculations for boundary layer heat transfer using wedge solutions and asymptotic expansions. J. Fluid Mech. 5, 460—480 (1959).
67. M i l l s a p s K., P o h l h a u s e n K., Thermal distribution in Jeffery-Hamel flows between non-parallel plane walls. JAS 20, 187—196 (1953).

- 67a. Morgan A. J. A., On the Couette flow of a compressible viscous, heat conducting, perfect gas. JAS 24, 315—316 (1957). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1958, № 6 (52).]
68. Morgan G. W., Pipkin A. C., Warner W. H., On heat transfer in laminar boundary layer flows of liquids having a very small Prandtl number. JAS 25, 173—180 (1958).
69. Nahrme R., Beiträge zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. Ing.-Arch. 11, 191—209 (1940).
70. Nußelt W., Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. Ges. Ing. 38, 477 (1915).
71. Oldroyd J. G., Calculations concerning theoretical values of boundary layer thickness and coefficients of friction and heat transfer for steady two-dimensional flow in an incompressible boundary layer with main stream velocity $U \sim x^m$ or $U \sim e^x$. Phil. Mag. 36, 587 (1945).
72. Ostrach S., An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force. NACA Rep. 1111 (1953).
73. Pohlhausen E., Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. ZAMM 1, 115 (1921).
74. Prandtl L., Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand in Flüssigkeiten. Phys. Z. 11, 1072—1078 (1910); см. также Ges. Abhdlg. II, 585—596 (1961).
75. Reeves B. L., Kippenhahn Ch. J., On a particular class of similar solutions of the equations of motion and energy of a viscous fluid. JASS 29, 38—47 (1962).
76. Reynold O., On the extent and action of the heating surface for steam boilers. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. 14, 7—12 (1874).
77. Richardson E. G., The aerodynamic characteristics of a cylinder having a heated boundary layer. Phil. Mag. 23, 681 (1937).
- 77a. Sato K., Sage B. H., Thermal transfer in turbulent gas streams; Effect of turbulence on macroscopic transport from spheres. Trans. ASME 80, 1380—1388 (1958).
78. Schlichting H., Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung. ZAMM 31, 78—83 (1951).
79. Schlichting H., Der Wärmeübergang an einer längsangeströmten Platte mit veränderlicher Wandtemperatur. Forschg. Ing.-Wes. 17, 1—8 (1951).
80. Schmidt E., Beckmann W., Das Temperatur-und Geschwindigkeitsfeld von einer Wärme abgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Forschg. Ing.-Wes. 1, 391 (1930).
81. Schmidt E., Schlierenaufnahmen der Temperaturfelder in der Nähe wärmeabgebender Körper. Forschg. Ing.-Wes. 3, 181 (1932).
82. Schmidt E., Einführung in die technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik. Изд. 8, Berlin 1960.
83. Schmidt E., Wenner K., Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylinders. Forschg. Ing.-Wes. 12, 65—73 (1941).
- 83a. Schmidt E., Thermische Auftriebsströmungen und Wärmeübergang. Vierte Ludwig-Prandtl-Gedächtnisvorlesung. ZFW 8, 273—284 (1960).
84. Schuh H., Einige Probleme bei freier Strömung zäher Flüssigkeiten; в книге «Göttinger Monographien», т. B, Grenzschichten, 1946.
85. Schuh H., Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an einer ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und für das Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen. ZAMM 25/27, 54—60 (1947).
86. Schuh H., Ein neues Verfahren zum Berechnen des Wärmeüberganges in ebenen und rotationssymmetrischen laminaren Grenzschichten bei konstanter und veränderlicher Wandtemperatur. Forschg. Ing.-Wes. 20, 36—47 (1954); см. также Schuh H., A new method for calculating laminar heat transfer on cylinders of arbitrary cross-section and on bodies of revolution at constant and variable wall temperature. KTH Aero. TN 33 (1953).
87. Schuh H., On asymptotic solutions for the heat transfer at varying wall temperatures in a laminar boundary layer with Hartree's velocity profiles. JAS 20, 146—147 (1953).
- 87a. Seban R. A., The influence of free stream turbulence on the local transfer from cylinders. Trans ASME, Ser. C (J. Heat Transfer) 82, 101—107 (1960).
88. Shaw Yulan, Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection. JAS 16, 741—748 (1949).
89. Shell J. I., Die Wärmeübergangszahl von Kugelflächen. Bull. Acad. Sci. Nat. Belgrade 4, 189 (1938).
90. Siekmann J., The calculation of the thermal laminar boundary layer on a rotating sphere. ZAMP 13, 468—482 (1962); см. также AGARD Rep. 283 (1960).
91. Singhal S. N., Heat transfer by laminar flow from a rotating sphere. Appl. Sci. Res. A 9, 197—205 (1960).

92. С к о п е ц М. Б., Приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе при наличии теплообмена. Журн. техн. физики 29, 462—470 (1959).
93. Smith A. G., Spalding D. B., Heat transfer in a laminar boundary layer with constant fluid properties and constant wall temperature. J. Roy. Aero. Soc. 62, 60—64 (1958).
94. Spalding D. B., Heat transfer from surfaces of nonuniform temperature. J. Fluid Mech. 4, 22—32 (1958).
95. Spalding D. B., Evans H. L., Mass transfer through laminar boundary layers. 3. Similar solutions to the b -equation. Int. J. Heat Mass Transfer 2, 314—341 (1961).
96. Spalding D. B., Punn W. M., A review of methods for predicting heat-transfer coefficients for laminar uniform-property boundary layer flows. Int. J. Heat Mass Transfer 5, 239—250 (1962).
97. Sparrow E. M., The thermal boundary layer on a nonisothermal surface with non-uniform free stream velocity. J. Fluid Mech. 4, 321—329 (1958).
98. Sparrow E. M., Cess R. D., Free convection with blowing or suction. J. Heat Transfer 83, 387—389 (1961).
99. Sparrow E. M., Eichhorn R., Gregg J. L., Combined forced and free convection in a boundary layer flow. Physics of Fluids 2, 319—328 (1959).
100. Sparrow E. M., Gregg J. L., Details of exact low Prandtl number boundary layer solutions for forced and for free convection. NASA Memo 2-27-59 E (1959).
101. Sparrow E. M., Gregg J. L., Similar solutions for free convection from a nonisothermal vertical plate. Trans. ASME 80, 379—386 (1958).
102. Sparrow E. M., Gregg J. L., The effect of a nonisothermal free stream on boundary layer heat transfer. J. Appl. Mech. 26, 161—165 (1959).
103. Sparrow E. M., Gregg J. L., Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number. J. Heat Transfer 81, 249—251 (1959).
104. Sparrow E. M., Gregg J. L., Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk. J. Heat Transfer 81, 294—302 (1960).
105. Squire H. B., глава в книге «Modern Developments in Fluid Dynamics» (под ред. S. Goldstein'a), Oxford II, 623—627 (1938). [Имеется русский перевод: Г о л ъ д-ш т е й н Н., Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. II, ИЛ, Москва, 1948.]
106. Squire H. B., Heat transfer calculation for aerofoils. ARC RM 1986 (1942).
107. Squire H. B., Note on the effect of variable wall temperature on heat transfer. ARC RM 2753 (1953).
108. Stojanovic D., Similar temperature boundary layers. JASS 26, 571—574 (1959).
109. Sugawara S., Sato T., Komatsu H., Osaka H., The effect of free stream turbulence on heat transfer from a flat plate. NACA TM 1441 (1958).
110. Tien C. L., Heat transfer by laminar flow from a rotating cone. J. Heat Transfer 82, 252—253 (1960).
111. Tifford A. N., The thermodynamics of the laminar boundary layer of a heated body in a high speed gas flow field. JAS 12, 241—251 (1945).
112. Tifford A. N., Chu S. T., Heat transfer in laminar boundary layers subject to surface pressure and temperature distributions. Proc. Second Midwestern Conf. Fluid Mech. 1949, 363—377.
113. Tifford A. N., Chu S. T., On the flow and temperature field in forced flow against a rotating disc. Proc. Second U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1955, 793—800.
114. Touloukian Y. S., Hawkins G. A., Jakob M., Heat transfer by free convection from heated vertical surfaces to liquids. Trans. ASME 70, 13—23 (1948).
115. Vögelpohl G., Der Übergang der Reibungswärme von Lagern aus der Schmierschicht in die Gleitflächen.—Temperaturverteilung und thermische Anlaufstrecke in parallelen Schmierschichten bei Erwärmung durch innere Reibung. VDI-Forschungsheft 425 (1949).
116. Wrage E., Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Temperaturgrenzschichten. DVL-Bericht 81 (1958).
117. Yamaga J., An approximate solution of the laminar flow heat-transfer on a rotating axially symmetrical body surface in a uniform incompressible flow. J. Mech. Lab. Japan 2, № 1, 1—14 (1956).
118. Yang K. T., Possible similarity solutions for laminar free convection on vertical plates and cylinders. J. Appl. Mech. 28, 230—236 (1960).
119. Kestin J., The effect of free stream turbulence on heat transfer rates. Advances in Heat Transfer. Academic Press, New York, 3, 1—33 (1966).

Г л а в а XIII

Ламинарные пограничные слои при сжимаемом течении¹⁾

§ 1. Физические основы

Интерес к исследованию пограничных слоев при сжимаемом течении продиктован в первую очередь авиационной техникой, а в последние годы — ракетной техникой, в том числе и запуском искусственных спутников. При больших скоростях полета, во много раз превышающих скорость звука, в текущем газе возникает вследствие сжатия и трения столь сильное повышение температуры, что наряду с динамическим пограничным слоем всегда необходимо учитывать температурный пограничный слой и при этом иметь в виду, что оба этих пограничных слоя сильно влияют один на другой. Согласно формуле (12.14б) при скорости w_∞ повышение температуры, возникающее вследствие адиабатического сжатия, равно

$$(\Delta T)_{\text{ад}} = \frac{w_\infty^2}{2c_p}, \quad (13.1)$$

где c_p есть удельная теплоемкость при постоянном давлении, отнесенная к единице массы. Так как

$$\frac{\kappa p_\infty}{\rho_\infty} = c_\infty^2 = (\kappa - 1) c_p T_\infty,$$

то формулу (13.1) можно переписать в виде

$$\frac{(\Delta T)_{\text{ад}}}{T_\infty} = \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}_\infty^2, \quad (13.2)$$

где $\text{Ma}_\infty = w_\infty/c_\infty$ есть число Маха. Приблизительно такую же величину имеет и повышение температуры, возникающее в пограничном слое вследствие трения, как это будет показано ниже и как об этом уже было вскользь упомянуто в главе XII.

График формул (13.1) и (13.2) для воздуха, рассматриваемого как идеальный газ ($c_p = 1,006 \text{ кдж/кг град}$; $\kappa = 1,4$), изображен на рис. 13.1 в виде верхней кривой. Мы видим, что при скорости $w_\infty = 2 \text{ км/сек}$, которой соответствует число Маха $\text{Ma}_\infty = 6$, повышение температуры составляет около $\Delta T = 2000$ градусов. При дальнейшем повышении скорости температура текущего газа повышается чрезвычайно сильно, что приводит к изменению физических свойств идеального газа. В реальном газе высокая температура приводит к возникновению диссоциации и ионизации (к образо-

¹⁾ За переработку этой главы я благодарен Ф. В. Ригельсу. В частности, ему принадлежит обобщение преобразования Иллингвортса — Стюартсона, изложенное в п. 1 § 4 настоящей главы.

ванию плазмы). Так как на это расходуется определенная энергия, то в реальном газе возникают при больших скоростях значительно меньшие повышения температуры, чем в идеальном газе. Однако и в реальном газе при скорости $w_\infty \approx 8 \text{ км/сек}$, с которой обычно обращаются по орбите искусственные спутники, повышение температуры составляет около 10 000 градусов. Область чисел Маха $\text{Ma}_\infty > 6$, в которой возникают сильные отклонения между идеальным и реальным газами, называется областью гиперзвуковых течений. При таких течениях позади скачков уплотнения и в пограничном

слое на обтекаемом теле вследствие сильного нагрева возникают химические реакции (ионизация, диссоциация), которые сильно осложняют характер течения. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только такой области чисел Маха, в которой текущий газ еще удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Для воздуха эта область ограничена сверху числом Маха $\text{Ma}_\infty = 6$. В последние годы исследование пограничного слоя при гиперзвуковых скоростях с учетом химических реакций сильно продвинулось. Желающих ознакомиться с этой проблемой отсылаем к книге В. Г. Дорренса [27].

Рис. 13.1. Зависимость повышения температуры воздуха от скорости полета w_∞ и числа Маха Ma_∞ . Кривая с надписью «идеальный газ» соответствует формулам (13.1) и (13.2). На оси абсцисс отмечены первая космическая скорость $w_K = 7,9 \text{ км/сек}$ и вторая космическая скорость $w_F = 11,2 \text{ км/сек}$ (для спутника Земли).

всего коэффициент вязкости, уже воздуха, а также для большей части других газов динамическая вязкость значительно повышается с увеличением температуры. Для воздуха эта связь выражается следующей интерполяционной формулой, предложенной Д. М. Сатерлендом:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S_1}{T + S_1} \quad (13.3)$$

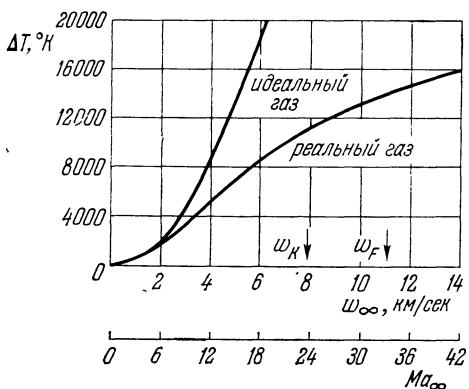
(см. работу Э. Р. Ван-Дрийста [28]). В этой формуле μ_0 есть коэффициент вязкости при начальной абсолютной температуре T_0 , а постоянная S_1 равна 110° К . Эта связь между вязкостью μ и температурой T изображена на рис. 13.2 в виде кривой 1. Для теоретических расчетов формула Сатерленда часто заменяется степенной формулой вида

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega, \quad (13.4)$$

причем

$$\frac{1}{2} < \omega < 1.$$

Графики этой формулы для значений $\omega = 0,5; 0,75$ и 1 изображены на рис. 13.2 в виде кривых 2, 3 и 4. Мы видим, что при очень высоких температурах формула (13.4) приближенно совпадает с формулой Сатерленда для значений ω , лежащих между 0,5 и 0,75, а при низких температурах — для значения $\omega = 1$. Такие физические характеристики газа, как удельная



теплоемкость c_p и число Прандтля Pr , могут рассматриваться с достаточным приближением постоянными и при высоких разностях температур (см. таблицу 12.1 на стр. 258).

Иногда связь между вязкостью и температурой принимается в виде

$$\frac{\mu}{\mu_0} = b \frac{T}{T_0}, \quad (13.4a)$$

причем постоянная b служит для того, чтобы аппроксимировать точную формулу (13.3) в желаемой окрестности (см. § 4 настоящей главы).

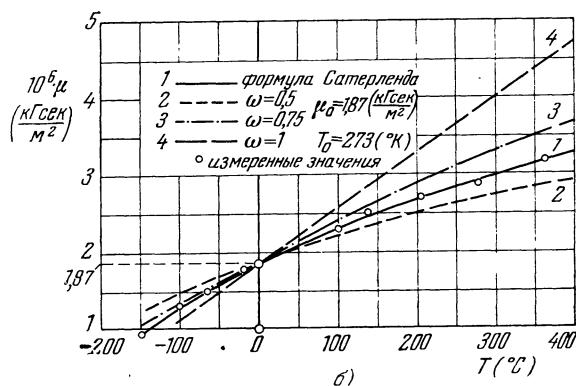
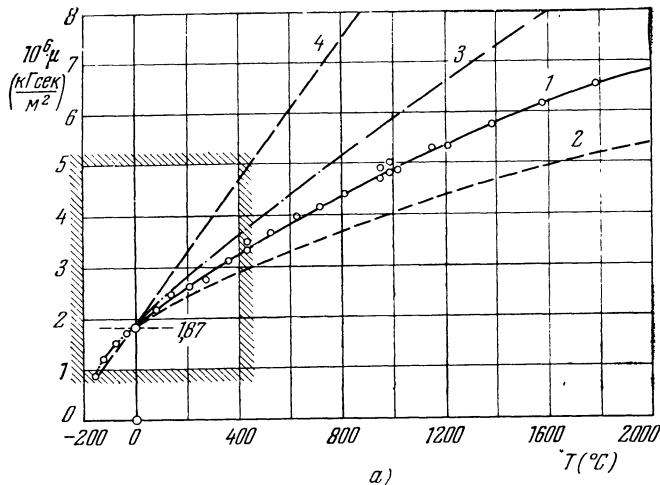


Рис. 13.2. Зависимость динамической вязкости μ воздуха от температуры T . Кривая (1) — измерения и формула (13.3) Саттерленда. Кривые (2), (3), (4) — степенной закон (13.4) при различных значениях ω .

Конечно, взаимное влияние динамического и температурного пограничных слоев значительно усложняет явления, происходящие при обтекании тел. При сжимаемом течении исследование пограничного слоя требует, по сравнению со случаем несжимаемого течения, введения по крайней мере следующих четырех дополнительных параметров:

- 1) числа Маха;
- 2) числа Прандтля;
- 3) закона $\mu(T)$, устанавливающего связь между вязкостью и температурой;

4) граничных условий для распределения температуры (с теплопередачей или без нее).

Очевидно, что это большое число новых параметров, прибавляющихся к уже известным параметрам для несжимаемых течений, делает число возможных случаев сжимаемого течения почти необозримым.

Перечень весьма обширной литературы о ламинарных сжимаемых пограничных слоях имеется в работах Г. Куэри [52] и А. Д. Янга [91]. Подробные сведения о специальных математических методах, примененных отдельными авторами, можно найти в работах Н. Кёрла [24] и К. Стюартсона [85а]. Турбулентным сжимаемым пограничным слоям посвящена глава XXIII настоящей книги.

§ 2. Связь между распределениями скоростей и температуры

В случае плоского сжимаемого пограничного слоя на теле произвольной формы, но при числе Прандтля $Pr = 1$ существует очень простая связь между распределением скоростей и распределением температуры. Эта связь, которую А. Буземан [9] и Л. Крокко [19а] использовали для расчета пограничного слоя на пластине, имеет большое значение для интегрирования уравнений сжимаемого пограничного слоя и формулируется очень просто: при любом законе вязкости $\mu(T)$ температура T зависит только от той составляющей u скорости в пограничном слое, которая параллельна стенке, т. е. $T = T(u)$. Следовательно, изотахи $u = \text{const}$ являются одновременно изотермами $T = \text{const}$.

Эту примечательную связь весьма просто вывести из дифференциальных уравнений сжимаемого пограничного слоя (12.35а), (12.35б) и (12.35в). Если пренебречь архимедовой подъемной силой, но учесть, что физические характеристики μ и λ зависят от температуры, то указанные уравнения примут вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (13.5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (13.6)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (13.7)$$

$$p = \rho RT. \quad (13.8)$$

Градиент давления определяется так же, как и в несжимаемом течении, невязким внешним течением, следовательно,

$$\frac{dp}{dx} = - \rho_1 U \frac{dU}{dx} = \rho_1 c_p \frac{dT_1}{dx}, \quad (13.9)$$

где $\rho_1(x)$ есть плотность, а $T_1(x)$ — температура на внешней границе пограничного слоя. Так как $d\rho/dy = 0$, то в каждой точке x по толщине пограничного слоя между плотностью ρ и температурой T существует соотношение

$$\rho(x, y) T(x, y) = \rho_1(x) T_1(x). \quad (13.10)$$

Введем теперь в уравнения пограничного слоя (13.5)–(13.7) предположение, что температура T зависит только от одной переменной u , т. е. что $T = T(u)$. Тогда, введя обозначение $T_u = dT/du$, мы получим из уравнения (13.7)

$$\rho c_p T_u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda T_u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Заменив левую часть этого уравнения правой частью уравнения (13.6), мы будем иметь

$$c_p T_u \left[-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = u \frac{dp}{dx} + T_u \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (T_{uu}\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

или

$$-\frac{dp}{dx} (c_p T_u + u) + T_u \left[c_p \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = (T_{uu}\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Введя число Прандтля $\Pr = \mu c_p / \lambda$, которое, согласно таблице 12.1, для газов в широкой области не зависит от температуры, мы получим

$$-\frac{dp}{dx} (c_p T_u + u) + c_p \frac{\Pr - 1}{\Pr} T_u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (T_{uu}\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Из этого уравнения видно, что сделанное выше допущение $T = T(u)$ является решением системы уравнений (13.5)–(13.7) в том случае, когда выполняются условия:

$$\text{при } \frac{dp}{dx} = 0 \quad \Pr = 1 \quad \text{и} \quad T_{uu} = -\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{1}{c_p}, \quad (13.11)$$

$$\text{а при } \frac{dp}{dx} \neq 0 \text{ дополнительно } T_u = 0 \text{ при } y = 0. \quad (13.11a)$$

Таким образом, сделанное выше утверждение о связи между распределениями температуры и скоростей доказано.

Зависимость температуры от скорости можно найти интегрированием уравнения (13.11). В общем случае мы будем иметь

$$T(u) = -\frac{u^2}{2c_p} + C_1 u + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть определены из граничных условий. При $dp/dx \neq 0$ мы получим $C_1 = 0$.

I. Т е п л о и з о л и р о в а н н а я с т е н к а. Граничными условиями будут

$$u = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \frac{dT}{du} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$u = U, \quad T = T_1 \quad \text{при} \quad y = \infty,$$

где $T_1(x)$ означает температуру на внешней границе пограничного слоя. Эти условия приводят к решению

$$T = T_1 + \frac{1}{2c_p} (U^2 - u^2), \quad (13.12)$$

откуда, положив $u = 0$, найдем равновесную температуру стенки $T = T_e$:

$$T_e = T_1 + \frac{U^2}{2c_p}. \quad (13.12a)$$

Введя число Маха $\text{Ma} = U/c_1$, где

$$c_1^2 = (\kappa - 1) c_p T_1,$$

перепишем соотношение (13.12a) в виде

$$T_e = T_1 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right) \quad (\Pr = 1). \quad (13.12b)$$

Разность $T_e - T_1$ представляет собой повышение температуры теплоизолированной стенки, вызываемое теплом, возникающим вследствие трения. Эта разность не зависит от закона вязкости $\mu(T)$.

II. Стенка, передающая тепло (плоская пластина, $dp/dx = 0$).

Температура стенки T_w поддерживается постоянной. В этом случае граничными условиями будут

$$u = 0, \quad T = T_w \text{ при } y = 0;$$

$$u = U_\infty, \quad T = T_\infty \text{ при } y = \infty.$$

Они приводят к решению

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty}\right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{\frac{U_\infty^2}{2c_p T_\infty}}{U_\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \quad (13.13)$$

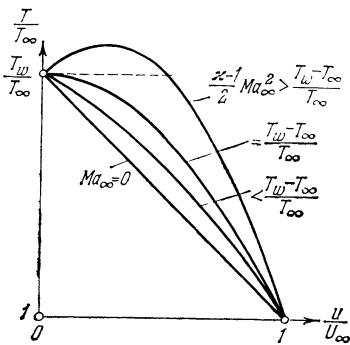
или, если ввести число Маха $\text{Ma}_\infty = U_\infty/c_\infty$,

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty}\right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{\frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_\infty^2}{U_\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right). \quad (13.13a)$$

В предельном случае $\text{Ma}_\infty \rightarrow 0$ решение (13.13a) переходит в решение (12.64), полученное в предыдущей главе для несжимаемого течения.

Связь между распределением скоростей и распределением температуры в сжимаемом ламинарном пограничном слое на плоской пластине [с учетом тепла, возникающего вследствие трения, уравнение (13.13)]. Число Прандтля $\text{Pr} = 1$. T_w — температура стенки, T_∞ — температура внешнего течения. Для $\frac{1}{2}(\kappa - 1) \text{Ma}_\infty^2 > (T_w - T_\infty)/T_\infty$ градиент

распределения температуры $(\partial T/\partial y)_w > 0$, и благодаря большому количеству тепла, возникающего вследствие трения, стена нагревается, несмотря на то, что $T_w > T_\infty$.



дит ли тепло от стенки к движущемуся газу или наоборот, разрешается сразу путем выяснения знака у градиента температуры на стенке. В самом деле, так как $(\partial u/\partial y)_w > 0$, то направление потока тепла определяется только знаком градиента температуры $(dT/dy)_w$. Продифференцировав соотношение (13.13), мы получим

$$\frac{U_\infty}{T_\infty} \left(\frac{dT}{du} \right)_w = 1 - \frac{T_w}{T_\infty} + \frac{U_\infty^2}{2c_p T_\infty}. \quad (13.14)$$

Если $(dT/dy)_w < 0$, то тепло переходит от стенки к газу; наоборот, если $(dT/dy)_w > 0$, то тепло переходит от газа к стенке. Следовательно, критерием перехода тепла от нагретой стенки к газу (или наоборот) при числе Прандтля $\text{Pr} = 1$ будет

$$T_w - T_\infty \geq \frac{U_\infty^2}{2c_p}, \quad \text{или} \quad \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \geq \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_\infty^2. \quad (13.15)$$

§ 3. Пограничный слой на продольно обтекаемой плоской пластине

Хотя вопрос о продольном обтекании плоской пластины очень широко рассмотрен в литературе, тем не менее остановимся на нем подробнее. Прежде всего перепишем общие соотношения между распределением скоростей и распределением температуры, выведенные в предыдущем параграфе, но придадим им несколько иной вид, соответствующий случаю продольно обтекаемой плоской пластины.

В случае *теплоизолированной* стенки в уравнении (13.12), определяющем распределение температуры в пограничном слое, следует положить $T_1 = T_\infty$ и $U = U_\infty$, и мы получим

$$T = T_\infty + \frac{1}{2c_p} (U_\infty^2 - u^2). \quad (13.16)$$

Уравнения (13.12а) и (13.12б), определяющие равновесную температуру стенки, после указанных замен примут вид

$$T_e = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \right) \quad (\text{Pr} = 1), \quad (13.17)$$

причем $Ma_\infty = U_\infty/c_\infty$ и $c_p^2 = (\kappa - 1)c_p T_\infty$. Примечательно, что равновесная температура стенки, при сжимаемом течении определяемая формулой (13.17), полностью совпадает с равновесной температурой стенки при несжимаемом течении, определяемой формулой (12.80), если в последней положить число Прандтля $\text{Pr} = 1$. При числах Прандтля, не равных единице, тепло, возникающее вследствие сжатия, как показали Г. В. Эммонс и Дж. Г. Брайнерд [32], лишь очень незначительно изменяет равновесную температуру по сравнению с ее значением (12.80) в несжимаемом течении. Следовательно, формулой (12.80) для равновесной температуры T_e в несжимаемом течении, т. е. формулой

$$\begin{aligned} T_e &= T_\infty + \sqrt{\text{Pr}} \frac{U_\infty^2}{2c_p} = \\ &= T_\infty \left(1 + \sqrt{\text{Pr}} \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \right), \end{aligned} \quad (13.18)$$

можно без каких-либо особых погрешностей пользоваться и в случае сжимаемого течения. Для воздуха ($\kappa = 1,4$; $\text{Pr} = 0,723$) формула (13.18) принимает вид

$$T_e = T_\infty (1 + 0,170 Ma_\infty^2). \quad (13.18a)$$

Зависимость повышения температуры стенки от числа Маха, вычисленная по этой формуле, изображена в виде графика на рис. 13.4.

Мы видим, что при числе Маха $Ma_\infty = 1$ нагревание стенки составляет круглым числом 45°C , при $Ma_\infty = 3$ — круглым числом 400°C , а при $Ma_\infty = 5$ — уже около 1200°C .

Формулу (13.18) принято записывать в более общем виде:

$$T_e = T_\infty + r \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + r \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \right), \quad (13.19)$$

где r есть так называемый *коэффициент восстановления*, представляющий собой отношение нагревания $T_e - T_\infty$ продольно обтекаемой пластины вследствие трения к нагреванию вследствие адиабатического сжатия, которое согласно формуле (12.14) равно

$$(\Delta T)_\text{ад} = \frac{U_\infty^2}{2c_p}.$$

Из сравнения формул (13.18) и (13.19) мы видим, что при ламинарном течении коэффициент восстановления равен

$$r = \sqrt{\text{Pr}}, \quad (13.19a)$$

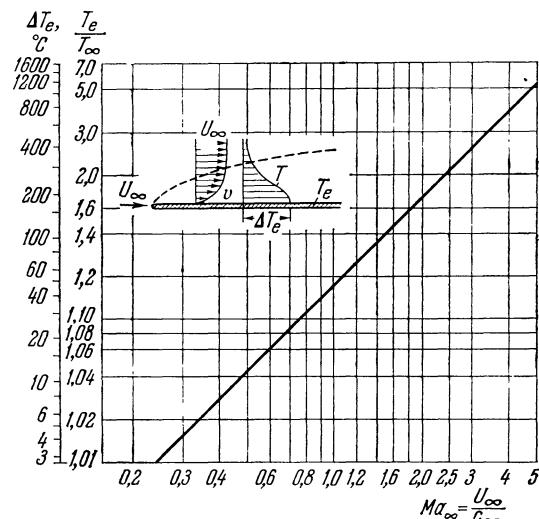


Рис. 13.4. Нагревание продольно обтекаемой плоской теплоизолированной пластины, вызванное выделением тепла в пограничном слое вследствие трения и вычисленное по формуле (13.18а). Построенная прямая изображает зависимость этого нагревания от числа Маха для воздуха. Число Прандтля $\text{Pr} = 0,7$; T_e — равновесная температура стенки; T_∞ — температура внешнего течения; $\Delta T_e = T_e - T_\infty$ — повышение температуры стенки; $T_\infty = 273^\circ\text{K}$.

следовательно, для воздуха при ламинарном течении

$$r = \sqrt{0,723} = 0,851. \quad (13.196)$$

На рис. 13.5 изображены результаты измерения Г. Р. Эбером [30] коэффициента восстановления для ламинарного пограничного слоя на конусах с различными углами раствора при сверхзвуковых скоростях. Эти измерения очень хорошо подтверждают теоретический закон $r = \sqrt{Pr}$. К аналогичному

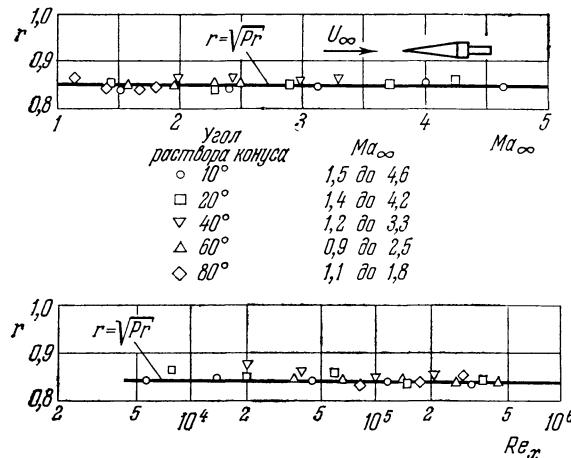


Рис. 13.5. Измеренные коэффициенты восстановления r для ламинарного пограничного слоя на конусах с различными углами раствора при различных числах Маха и при различных числах Рейнольдса. По Г. Р. Эберу [30]. Сравнение с теорией [формула (13.19a)].

пластине. Расчет выполнен для закона вязкости с показателем степени $\omega = 1$ и числа Прандтля $Pr = 1$. При построении кривых расстояние y от стенки сделано безразмерным путем деления на $\sqrt{v_\infty x / U_\infty}$, где v_∞ есть кинематическая вязкость внешнего течения. Мы видим, что при

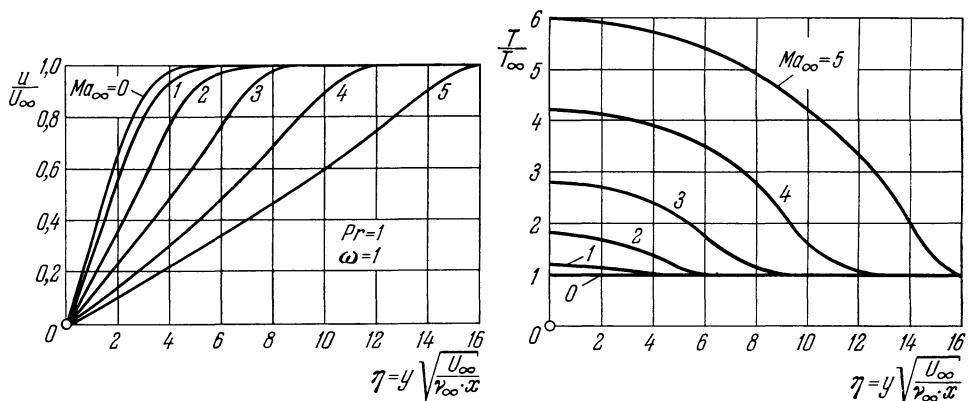


Рис. 13.6. Распределение скоростей и температуры в сжимаемом ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской теплоизолированной пластине. По Крокко [30]. Число Прандтля $Pr = 1$; $\omega = 1$; $x = 1,4$. На оси абсцисс отложены расстояния y от стенки, деленные на $\sqrt{v_\infty x / U_\infty}$.

возрастании числа Маха толщина пограничного слоя значительно увеличивается. При очень больших числах Маха распределение скоростей получается приближенно линейным по всей толщине пограничного слоя. При больших числах Маха температура в пограничном слое очень сильно возрастает, что объясняется образованием большого количества тепла вследствие трения.

Распределение скоростей и распределение температуры при отсутствии теплопередачи. Доведенные до конца расчеты распределения скоростей и распределения температуры для большого числа случаев сжимаемого течения имеются в двух работах В. Хантцше и Г. Вендта [41], [43], а также в работе Л. Крокко [20]. На рис. 13.6 изображены распределения скоростей и температуры при различных числах Маха, вычисленные Л. Крокко для пограничного слоя на теплоизолированной

Аналогичные расчеты для теплоизолированной стенки при числе Прандтля $Pr = 0,7$ (воздух) выполнены также в первой из названных выше работ В. Хантцше и Г. Венданта. Эти расчеты при высоких числах Маха дают результаты, заметно отличающиеся от результатов, полученных для числа Прандтля $Pr = 1$. Профили скоростей, изображенные на рис. 13.6 для различных чисел Маха, можно почти совместить один с другим, если расстояние от стенки y сделать безразмерным путем деления на $\sqrt{v_w x / U_\infty}$, где v_w означает кинематическую вязкость около самой стенки (рис. 13.7). Отсюда можно сделать вывод, что увеличение толщины пограничного слоя с возрастанием числа Маха (при постоянном числе Рейнольдса) объясняется в основном увеличением объема слоя, близкого к стенке, вследствие нагревания газа. На это обстоятельство обратил внимание уже А. Н. Тиффорд [87].

Коэффициент трения при отсутствии теплопередачи. Зависимость коэффициента трения c_f от числа Маха для теплоизолированной стенки по расчетам В. Хантцше и Г. Венданта изображена на рис. 13.8. Для закона вязкости с показателем степени $\omega = 1$ выражение $c_f \sqrt{Re}$ вообще не зависит от числа Маха. Для других значений ω коэффициент трения уменьшается с возрастанием числа Маха, и притом тем больше, чем меньше ω . На рис. 13.9 изображены графики коэффициента трения для теплоизолированной пластины, полученные разными авторами

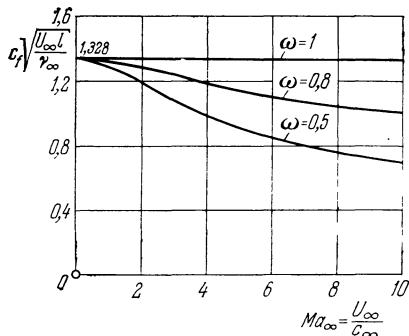


Рис. 13.8. Коэффициент трения плоской теплоизолированной пластины при сжимаемом ламинарном пограничном слое. Число Прандтля $Pr = 1$; $\kappa = 1,4$ (воздух). По Хантцше и Венданту [41].

при различных числах Прандтля Pr и при различных показателях степени ω закона вязкости. Из этого рисунка видно, что влияние числа Прандтля

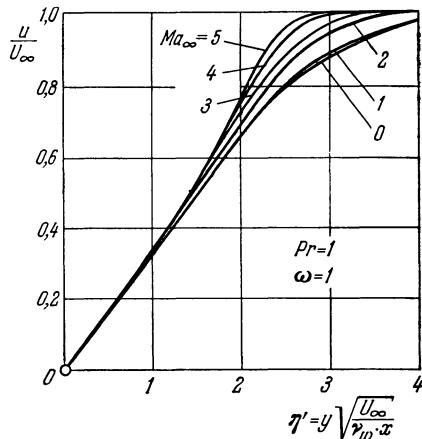


Рис. 13.7. Распределение скоростей в сжимаемом ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской теплоизолированной пластине. В отличие от рис. 13.6 на оси абсцисс отложены расстояния y от стенки, деленные на $\sqrt{v_w x / U_\infty}$. Величины v_w и v_∞ связаны между собой соотношением $\sqrt{v_w/v_\infty} = T_w T_\infty$. В координатах, использованных на этом рисунке, профили скоростей при различных числах Маха приближенно сливаются в одну кривую. Отсюда можно сделать вывод, что сильное увеличение толщины пограничного слоя при возрастании числа Маха (которое ясно видно из рис. 13.6) в основном объясняется увеличением объема текущей среды, связанным с нагреванием ее пристенного слоя.

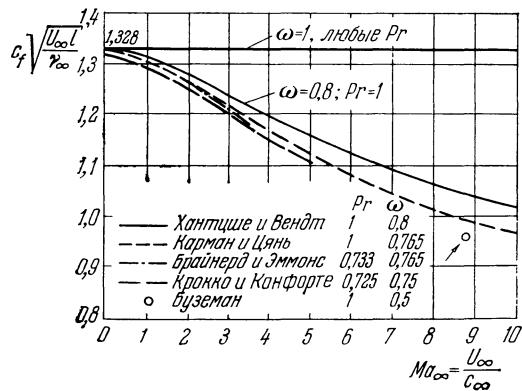


Рис. 13.9. Коэффициент трения продольно обтекаемой плоской теплоизолированной пластины при сжимаемом ламинарном пограничном слое. По Рубезину и Джонсону [88].

на коэффициент трения значительно меньше, чем влияние показателя степени ω закона вязкости.

На рис. 13.10 изображены некоторые результаты измерений для сжимаемого ламинарного пограничного слоя, полученные Р. М. О'Доннелем [26]. Эти измерения выполнены при числе Маха $Ma_\infty = 2,4$ и при различных числах Рейнольдса на наружной стороне очень тонкого и длинного круглого цилиндра, обтекаемого в осевом направлении. В качестве абсцисс для профилей взяты значения y/δ_2 , где δ_2 есть толщина потери импульса, определяемая формулой (13.75). Расположение полученных при этом точек показывает, во-первых, аффинность профилей скоростей на различных расстояниях от передней кромки и, во-вторых, хорошее совпадение с теоретическими результатами Д. Р. Чепмена и М. В. Рубезина [12].

Распределения скоростей и температуры при наличии теплопередачи. При наличии теплопередачи и при числе Прандтля $Pr = 1$ соотношение (13.13а), связывающее распределение скоростей и распределение температуры, можно переписать в следующем виде:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] + \frac{T_w - T_e}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right] \quad (Pr = 1), \quad (13.20)$$

причем для равновесной температуры T_e следует взять ее выражение (13.17). Это уравнение можно обобщить на случай чисел Прандтля, не равных единице, тогда мы получим

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + r \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] + \frac{T_w - T_e}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right], \quad (13.21)$$

причем для равновесной температуры T_e теперь следует взять выражение (13.18). Необходимо, однако, иметь в виду, что уравнение (13.21) является не точным, а приближенным уравнением. Условие передачи тепла от стенки к газу (или наоборот) получается из уравнения (13.21) в виде

$$T_w - T_\infty \geq \sqrt{Pr} \frac{U_\infty^2}{2c_p}, \quad (13.22)$$

т. е. полностью совпадает с условием (12.82) для несжимаемого течения.

Многочисленные примеры расчета распределения скоростей и распределения температуры при наличии теплопередачи имеются во второй из названных выше работ В. Хантце и Г. Вендта [43]. Некоторые результаты изображены на рис. 13.11 для того случая, когда температура стенки посредством охлаждения поддерживается на одном уровне с температурой внешнего течения ($T_w = T_\infty$). В этом случае одна часть тепла, возникшего вследствие трения, передается стенке, а другая часть — внешнему течению. Из сравнения распределений скоростей, изображенных на рис. 13.11 и 13.6, видно, что при наличии теплопередачи толщина пограничного слоя значительно меньше, чем в случае теплоизолированной стенки. Сравнение же распределений температур показывает, что при наличии теплопередачи максимальное повышение температуры в пограничном слое составляет только 20% повышения температуры в случае теплоизолированной стенки.

Так как при $\omega = 1$ коэффициент трения не зависит от числа Маха (рис. 13.8), то в этом случае теплопередача получается такая же, как и в несжимаемом течении [формулы (12.81)]. Сводка коэффициентов теплопередачи для ламинарного и турбулентного течений при высоких числах Маха, а также данные о нагревании при теплоизолированной стенке (коэффициент восстановления) имеются в работе Дж. Кэя [51]; см. также работу [90].

Далее, исследован также случай распределения температуры $T_w(x)$, переменного вдоль стенки. В частности, такое исследование выполнено Д. Р. Чепменом и М. В. Рубезиным [12] в предположении, что имеет место закон вязкости (13.4а). При этом выяснилось, что местный поток тепла

(т. е. количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени) определяется не только разностью температур $T_w(x) - T_e$, но в значительной мере и «предыдущей историей» пограничного слоя, т. е. совокупностью состояний пограничного слоя в сечениях, лежащих выше по течению относительно рассматриваемого места. Местное число Нуссельта, являющееся, в соответствии с формулой (12.29), коэффициентом пропорциональности между местным потоком тепла и разностью температур $T_w - T_\infty$ или, если учитывать тепло, возникающее вследствие трения, — коэффициентом пропорциональности между местным потоком тепла и разностью температур $T_w - T_e$, теряет свой смысл при переменной температуре стенки.

Расчеты пограничного слоя на пластине при сжимаемом течении, основанные на использовании теоремы импульсов теории пограничного слоя (глава X), выполнены Т. Карманом и Х. С. Цзянем [50] (см. рис. 13.9). Приближенные решения для плоской пластины даны также Ф. Буниолем и Э. А. Эйхельброннером [7], Д. Коулсом [17], Л. Крокко [21]

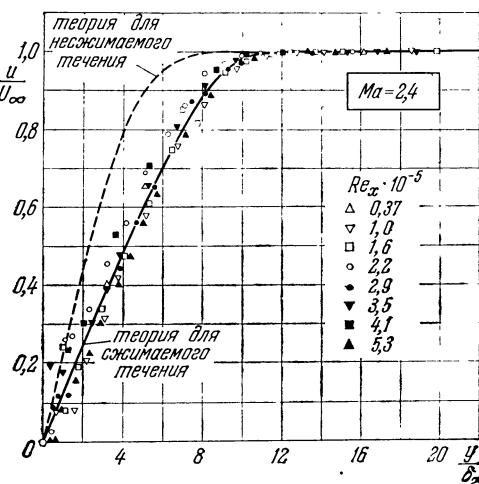


Рис. 13.10. Измерения распределения скоростей в ламинарном пограничном слое на длинном тонком цилиндре с теплоизолированной стенкой, обтекаемом со сверхзвуковой скоростью в осевом направлении. По Р. М. О'Доннелу [48]. Теоретическая кривая — по [12]. Число Маха $Ma_\infty = 2,4$.

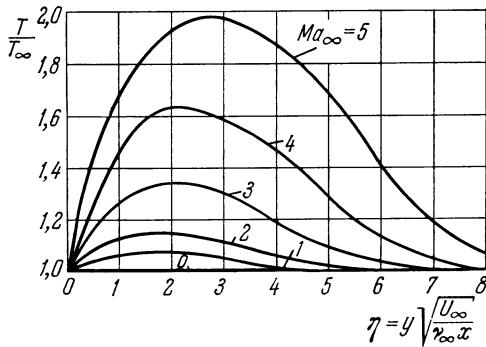
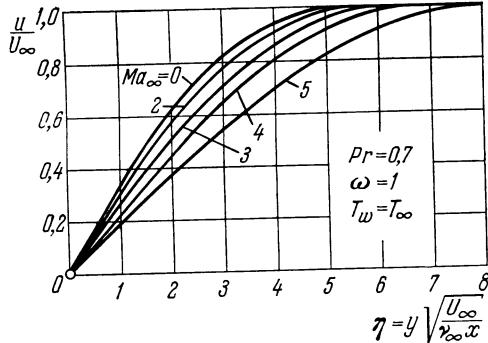


Рис. 13.11. Распределение скоростей и температуры в сжимаемом ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой пластине при наложении теплопередачи. По Хантцше и Венду [44]. Число Прандтля $Pr = 0,7$; $\omega = 1$; $x = 1,4$; $T_w = T_\infty$.

и Р. Дж. Монахэном [69]. Решения уравнений ламинарного пограничного слоя для случая переменных физических характеристик газа дали Л. Л. Мур [71], а также Г. Б. В. Янг и Э. Янсен [93].

§ 4. Пограничный слой с градиентом давления

1. Точные решения. Расчет пограничного слоя с градиентом давления вследствие большого числа параметров более труден, чем расчет пограничного слоя на пластине. Еще давно Л. Крокко [20] предложил преобразование, облегчающее интегрирование уравнений при одном из двух условий: 1) число Прандтля $Pr = 1$, закон вязкости $\mu(T)$ произвольный; 2) число Прандтля

произвольное, но $\mu(T) = \text{const}$, т. е. $\omega = 1$. Для частного случая теплоизолированной стенки, когда $\Pr = 1$ и $\omega = 1$, Л. Хоуарт [45], К. Р. Иллингворт [47] и К. Стюартсон [84] указали преобразование, посредством которого уравнениям пограничного слоя можно придать почти такой же вид, как при несжимаемом течении.

1.1. Преобразование Иллингворта — Стюартсона¹⁾. Мы выведем здесь преобразование Иллингворта — Стюартсона в несколько иной форме, чем в работе [84], и при этом не ограничимся только случаем теплоизолированной стенки. Кроме того, сначала примем число Прандтля произвольным, но постоянным. Закон вязкости $\mu(T)$ примем линейным, в виде (13.4а). Индексом 0 будем отмечать величины, относящиеся к критической точке внешнего течения. Постоянную b используем для того, чтобы аппроксимировать точную формулу Сатерленда (13.3) вблизи желаемого места. Если за такое место выбрать поверхность тела, температуру которой T_w примем постоянной, то на основании формул (13.3) и (13.4а) постоянную b следует взять равной

$$b = \sqrt{\frac{T_w}{T_0}} \frac{T_0 + S_1}{T_w + S_1}. \quad (13.23)$$

При преобразовании Иллингворта — Стюартсона вводятся две новые координаты \tilde{x}, \tilde{y} , определяемые равенствами

$$\tilde{x} = \int_0^x b \frac{p_1 c_1}{p_0 c_0} dx, \quad (13.24)$$

$$\tilde{y} = \frac{c_1}{c_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad (13.25)$$

где c означает скорость звука. Индексом 1 здесь и в дальнейшем отмечены значения величин в точке x внешнего течения (на внешней границе пограничного слоя).

Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} c_1^2 &= (\kappa - 1) c_p T_1 \\ c_0^2 &= (\kappa - 1) c_p T_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.26)$$

Так как температура T_1 зависит только от x , то также $c_1 = c_1(x)$. Далее, $p_1 = p_1(x)$, и поэтому $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ также есть функция только x . Напротив, \tilde{y} зависит и от x , и от y , так как плотность ρ в пограничном слое изменяется при изменении координаты y . Можно написать и наоборот, т. е.

$$x = x(\tilde{x}), \quad y = y(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Для дальнейших вычислений перепишем уравнения пограничного слоя (13.5) и (13.6) в координатах \tilde{x} и \tilde{y} . Уравнение неразрывности (13.5) будет тождественно удовлетворено, если ввести функцию тока $\psi(x, y)$ с производными

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} v. \quad (13.27)$$

¹⁾ В советской литературе это преобразование называют преобразованием А. А. Дородницына, доложившего о нем впервые в 1940 г., но опубликовавшего его по обстоятельствам военного времени только в 1942 г. (в журнале «Прикладная математика и механика» 6, 449—486). — Прим. перев.

Если рассматривать ψ как функцию от \tilde{x} и \tilde{y} , то мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{d\tilde{x}}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} = \frac{b p_1 c_1}{p_0 c_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} = \frac{c_1 \rho}{c_0 \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}, \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

и

так как $d\tilde{x}/dy = 0$. Имея в виду эти соотношения, получим для u выражение

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{c_1}{c_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \quad (13.29)$$

и аналогичное выражение для v . Далее, в результате небольших выкладок, при которых все члены, содержащие $d\tilde{y}/dx$, выпадут, мы найдем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^3 \frac{p_1 b}{p_0} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]. \quad (13.29a)$$

Если принять, что внешнее течение изэнтропическое, то удельная полная энталпия будет постоянной, т. е. будут иметь место равенства

$$h_1 = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_0; \quad h = c_p T + \frac{u^2}{2} \quad (13.30)^1)$$

или, на основании равенств (13.26),

$$c_1^2 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) u_1^2 = c_0^2. \quad (13.31)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{dx} = -\frac{1}{2} (\kappa - 1) \frac{u_1}{c_1^2} \frac{du_1}{dx}. \quad (13.32)$$

Внеся это выражение в уравнение (13.29a) и имея в виду, что $d\tilde{x}/dx = -b p_1 c_1 / p_0 c_0$, мы получим

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^3 \frac{p_1 b}{p_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{1}{2} (\kappa - 1) \frac{u^2}{c_1^2} u_1 \frac{du_1}{dx}. \quad (13.33)$$

Преобразуем уравнение движения (13.6). Его член, зависящий от трения, с учетом (13.4a) и уравнения состояния $p = p_1 = \rho R T$ принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_0 b p_1}{p_0} \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tilde{y}^3}. \quad (13.34)$$

Далее, член $-dp/dx$ с учетом соотношений (13.9) и (13.10) принимает вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{T}{\rho_1 T_1} \frac{dp_1}{dx} = \frac{T}{T_1} u_1 \frac{du_1}{dx}.$$

Внеся в правую часть безразмерную «температурную функцию» (безразмерную удельную полную энталпию)

$$S = \frac{c_p T + \frac{u^2}{2}}{c_p T_0} - 1 = \frac{i + \frac{u^2}{2}}{i_0} - 1 \quad (13.35)$$

и используя соотношения (13.26), мы получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \left\{ (1 + S) \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{u^2}{c_1^2} \right\} u_1 \frac{du_1}{dx}. \quad (13.36)$$

¹⁾ В этой главе мы будем обозначать скорость внешнего течения, ранее всегда обозначавшуюся через U , для простоты через u_1 .

Разделив уравнение (13.6) на ρ и подставив в него выражения (13.33), (13.34) и (13.36), мы будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y}^2} = (1 + S) \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^5 \frac{p_0}{p_1 b} u_1 \frac{du_1}{dx} + v_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tilde{y}^3}. \quad (13.37)$$

Далее, подставив

$$\tilde{u}_1 = \frac{c_0}{c_1} u_1, \quad (13.38)$$

мы получим

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{c_0} \left(\tilde{u}_1 \frac{dc_1}{dx} + c_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dx} \right)$$

или, с учетом соотношений (13.31) и (13.32),

$$u_1 \frac{du_1}{dx} = \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^5 \frac{b p_1}{p_0} \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dx}. \quad (13.39)$$

Наконец, введя обозначения

$$\tilde{u} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \quad (13.40)$$

и внеся выражения (13.39) и (13.40) в уравнение (13.37), мы получим преобразованное уравнение движения

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dx} (1 + S) + v_0 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^3}. \quad (13.41)$$

Это преобразованное уравнение отличается от соответствующего уравнения пограничного слоя для несжимаемого течения только присутствием множителя $(1 + S)$ при члене, учитывающем давление.

Для преобразования уравнения энергии умножим уравнение (13.6) на μ и сложим с уравнением (13.7). Тогда, введя число Прандтля $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$, мы получим

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_p T}{\text{Pr}} + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\}, \quad (13.42)$$

или, если использовать температурную функцию S , определяемую равенством (13.35),

$$\rho u \frac{\partial S}{\partial x} + \rho v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\text{Pr}-1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2 c_p T_0} \right) \right) \right\}. \quad (13.43)$$

Заменив в этом уравнении по образцу соотношений (13.28) производные по x и y производными по \tilde{x} и \tilde{y} и приняв во внимание соотношения (13.40) и равенство $\mu = b \mu_0 p_1 \rho_0 / p_0 \rho$, мы получим

$$\tilde{u} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = v_0 \left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\text{Pr}-1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left(\frac{u^2}{2 c_p T_0} \right) \right\}. \quad (13.44)$$

Далее, используя соотношения (13.26) и (13.30) и имея в виду, что

$$\frac{u}{u_1} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1}, \quad (13.45)$$

мы найдем

$$\frac{u^2}{2 c_p T_0} = \frac{\frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2} \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \right)^2, \quad (13.46)$$

где $\text{Ma}_1 = u_1/c_1$ есть число Маха внешнего течения. Так как

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial y},$$

то множитель перед $(\tilde{u}/\tilde{u}_1)^2$, входящий в равенство (13.46), можно вывести в уравнении (13.44) из-под знака производной $\partial^2/\partial \tilde{y}^2$. В результате преобразованное уравнение энергии примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} &= \\ = v_0 \left\{ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{Pr-1}{Pr} \left(\frac{\frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left[\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (13.48)$$

непосредственно вытекающим из соотношений (13.40), уравнения (13.41) и (13.47) являются новыми уравнениями пограничного слоя.

Границными условиями системы уравнений (13.5)–(13.7) были

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ для теплоизолированной стенки} \\ \text{или } T = T_w \text{ для теплопроводящей} \\ \text{стенки} \end{array} \right\} \text{при } y = 0,$$

$$u = u_1(x), \quad T = T_1(x) \quad \text{при } y = \infty.$$

Как легко видеть, для новой системы уравнений эти условия принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{или} \quad S = S_w \quad \text{при} \quad \tilde{y} = 0, \\ \tilde{u} = \tilde{u}_1(\tilde{x}) \quad S = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{y} = \infty. \end{array} \right\} \quad (13.49)$$

Предельные случаи. При $Pr = 1$ частным решением уравнения энергии (13.47) будет $S \equiv 0$. Вместе с соотношениями (13.30) оно приводит к найденной выше связи (13.12) между температурой и скоростью при обтекании теплоизолированной стенки. В этом случае уравнение (13.41) принимает в точности такой же вид, как соответствующее уравнение (9.1) для несжимаемого течения.

При обтекании пластины $dp/dx = 0$, следовательно, также $du_1/dx = 0$, а потому на основании уравнения (13.39), и $d\tilde{u}_1/d\tilde{x} = 0$. Тогда при $Pr = 1$ функция

$$S = S_w \left(1 - \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \right)$$

с постоянным S_w также будет частным решением уравнения (13.47), в чем легко убедиться путем подстановки. В этом случае из соотношения (13.45) и (13.30) после замены u_1 на U_∞ и T_1 на T_∞ получается найденное выше уравнение (13.13), связывающее температуру и скорость.

1.2. «Подобные» решения. Преобразование Иллингворт — Стюардсона позволило получить ряд точных решений уравнений пограничного слоя и, кроме того, дало возможность разработать очень большое число способов приближенных решений. Среди точных решений особую роль играют

«подобные» решения. В случае несжимаемого течения мы понимали под ними такие решения, для которых профили скоростей в двух различных точках x обтекаемого контура отличались один от другого только масштабами скорости u и расстояния y (§ 2 главы VIII). Там было показано, что такие «подобные» решения существуют для определенных внешних течений $u_1(x)$. В таких случаях уравнение в частных производных, определяющее функцию тока, заменяется обыкновенным дифференциальным уравнением, решение которого, конечно, значительно проще, чем решение уравнения в частных производных.

Опираясь на ряд работ, например на [45], [46], [47], Т. И. Ли и Х. Т. Нагамацу в своих двух блестящих исследованиях [55], [56] показали, что для сжимаемых пограничных слоев также существуют подобные решения. В динамическом пограничном слое для осуществления подобия по-прежнему требуется изменение масштаба продольной составляющей u скорости, а в температурном пограничном слое — изменение масштаба удельной полной энталпии $h = c_p T + u^2/2$, которая уже была введена в безразмерной форме как «температурная функция» S (13.35). Система уравнений в частных производных, определяющих u , v и T , заменяется двумя связанными между собой обычными дифференциальными уравнениями, определяющими функцию тока и полную энталпию.

Эти подобные решения уравнений сжимаемого пограничного слоя, будучи точными решениями, важны не только сами по себе, но также для оценки приближенных решений. Поэтому с помощью преобразования Иллингворта — Стюартсона покажем в общих чертах, как можно получить эти решения, и в заключение приведем некоторые численные результаты. При этом в дальнейшем мы будем исходить из следующих предположений: во-первых, имеет место закон вязкости (13.4а), следовательно, $\omega = 1$; во-вторых, число Прандтля $Pr = 1$, и, в-третьих, в случае теплопроводящей стенки температура T_w на стенке произвольна, но постоянна, следовательно, постоянна и функция S_w . В случае теплоизолированной стенки удельная полная энталпия, равная согласно уравнению (13.30)

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = c_p T_0,$$

постоянна по толщине пограничного слоя, следовательно, теперь $S \equiv 0$ (см. также конец предыдущего пункта). В этом случае подобие профилей полной энталпии является тривиальным фактом.

Введем в уравнения (13.41) и (13.37) функцию тока ψ и перепишем их в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{y}^2} = \tilde{u}_1 \frac{d \tilde{u}_1}{d \tilde{x}} (1 + S) + v_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tilde{y}^3}, \quad (13.50)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = v_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (13.51)$$

Для преобразования подобия введем новую переменную η и примем, что

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A \tilde{x}^q \tilde{u}_1^r f(\eta), \\ \tilde{y} &= B \tilde{x}^s \tilde{u}_1^t \eta, \\ S &= S(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

где A , B , q , r , s , t — постоянные, подлежащие определению, $f(\eta)$ — неизвестная функция тока и $S(\eta)$ — температурная функция, определяемая равенством (13.35) и зависящая от η .

После подстановки выражений (13.52) в уравнения (13.50) и (13.51) независимыми переменными в этих уравнениях будут \tilde{x} и η . Если потребовать, чтобы в полученных таким путем уравнениях выражения, содержащие \tilde{x} , выпали, то останутся обыкновенные дифференциальные уравнения для определения $f(\eta)$ и $S(\eta)$. Т. И. Ли и Х. Т. Нагамацу [55] выполнили необходимые вычисления и нашли, что существуют четыре класса решений для $\tilde{u}_1(\tilde{x})$. Затем К. Б. Коэн [14] доказал, что три из этих четырех классов могут быть сведены к случаю

$$\tilde{u} = K \tilde{x}^m \quad (13.53)$$

(K и m — постоянные). Четвертый случай

$$\tilde{u}_1 = K' e^{K'' \tilde{x}}$$

менее интересен, и поэтому мы не будем его рассматривать.

Прежде всего определим, какое внешнее течение $u_1 = u_1(x)$ соответствует степенной зависимости (13.53) между преобразованными координатами \tilde{u}_1 и \tilde{x} . Из соотношений (13.38) и (13.31) мы имеем

$$\frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{c_0^4}{c_0^2 + \frac{1}{2}(\kappa - 1)\tilde{u}_1^2}. \quad (13.54)$$

Далее, изменения состояния во внешнем течении происходят по адиабатическому закону

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\kappa.$$

Так как

$$\frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{\frac{p_1}{p_0}}{\frac{\rho_1}{\rho_0}},$$

то

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}, \quad (13.55)$$

и поэтому, на основании равенства (13.24) с учетом соотношений (13.53) и (13.54),

$$dx = \frac{1}{b} \left[1 + \frac{\kappa-1}{2c_0^2} K^2 \tilde{x}^{2m} \right]^{\frac{3\kappa-1}{2(\kappa-1)}} d\tilde{x}. \quad (13.56)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется в замкнутой форме только при частных значениях m . Если принять

$$m = m_0 = \frac{\kappa-1}{3-5\kappa}, \quad (13.57)$$

то показателем степени выражения в прямых скобках в уравнении (13.56) будет

$$\frac{3\kappa-1}{2(\kappa-1)} = -1 - \frac{1}{2m_0},$$

и интегрирование уравнения (13.56) даст

$$x = \frac{\tilde{x}}{b \left[1 + \frac{\kappa-1}{2c_0^2} K^2 \tilde{x}^{\frac{2(\kappa-1)}{3-5\kappa}} \right]^{\frac{3-5\kappa}{2(\kappa-1)}}}. \quad (13.58)$$

Отсюда, приняв во внимание соотношения (13.38), (13.53) и (13.54), мы получим

$$u_1 = \frac{c_1}{c_0} \tilde{u}_1 = K b^{\frac{x-1}{3-5x}} x^{3-5x} = K' x^{\frac{x-1}{3-5x}}. \quad (13.59)$$

Следовательно, в рассмотренном частном случае внешнее течение $u_1(x)$ также выражается степенной функцией, и притом даже с таким же показателем степени, как у $\tilde{u}_1(x)$. Для значений x , соответствующих одно-, двух- и трехатомным газам, получаются следующие значения показателя степени при x в уравнении (13.59):

Газ	x	$m = \frac{x-1}{3-5x}$
Одноатомный	$\frac{5}{3} = 1,67$	$-\frac{1}{8}$
Двухатомный или линейный многоатомный	$\frac{7}{5} = 1,40$	$-\frac{1}{10}$
Многоатомный нелинейный	$\frac{1}{3} = 1,33$	$-\frac{1}{11}$

Таким образом, для всех трех видов газа внешнее течение — замедленное.

При произвольном m уравнение (13.56) может быть проинтегрировано вообще только посредством разложения в ряд. На рис. 13.12 изображены

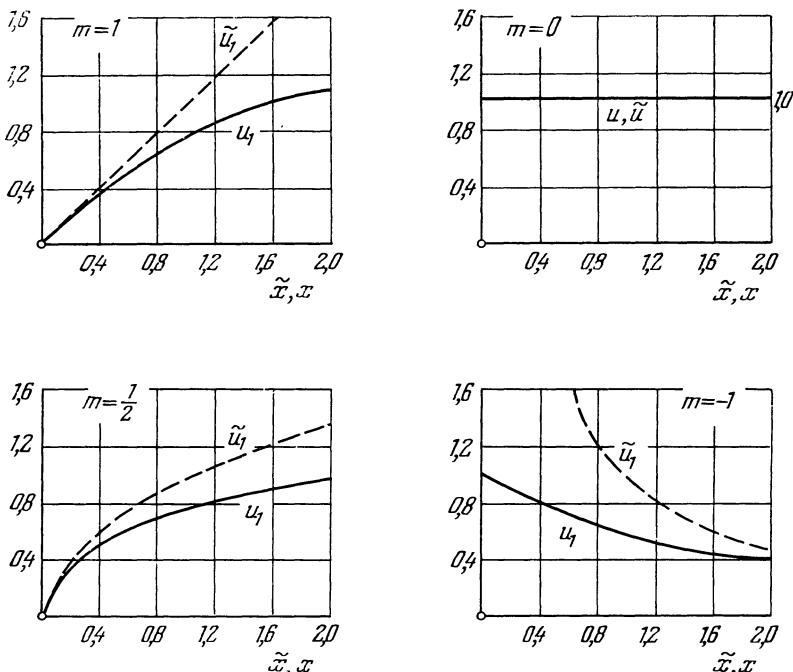


Рис. 13.12. Распределение скоростей внешнего течения, вычисленное при помощи преобразования Иллингвортса — Стюартсона для случая, когда $x = 7/5$. Скорость $\tilde{u}_1 = K \tilde{x}^m$ — по формуле (13.53); $u_1 = K' x^m$ — по формуле (13.59). Связь между x и \tilde{x} определяется соотношением (13.56), а связь между m и x — соотношением (13.57).

для $m = -1; 0; 0,5$ и $+1$ графики скорости $u_1(x)$, а также функции $\tilde{u}_1(\tilde{x}) = K \tilde{x}^m$ при $K = 1$, $b = 1$ и $x = 7/5$.

Если в преобразовании подобия (13.52) взять для постоянных A, B, q, r, s и t значения:

$$A = B = \sqrt{2v_0/(m+1)}, \quad q = r = s = 1/2, \quad t = -1/2,$$

то оно примет вид

$$\psi = f(\eta) \sqrt{\frac{2v_0}{m+1} \tilde{u}_1 \tilde{x}}, \quad S = S(\eta), \quad \eta = \tilde{y} \sqrt{\frac{(m+1)\tilde{u}_1}{2v_0 \tilde{x}}}, \quad (13.60)$$

и преобразованные уравнения пограничного слоя (13.50) и (13.51) при учете соотношения (13.53) перейдут в обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' &= \beta(f'^2 - 1 - S), \\ S'' + fS' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.61)$$

где штрихи означают дифференцирование по η . В первое из этих уравнений введена постоянная β , равная, как и раньше [см. равенство (9.7)],

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

и являющаяся параметром градиента давления внешнего течения.

Из равенства

$$\tilde{u} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{y}}$$

с учетом соотношений (13.60) легко выявляется смысл производной f' как безразмерного распределения скоростей в пограничном слое; в самом деле,

$$f' = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} = \frac{u}{u_1}. \quad (13.62)$$

Так как при $y = 0$ также $\eta = 0$, а при $y = \infty$ также $\eta = \infty$, то граничными условиями для системы (13.61) будут

$$\left. \begin{aligned} f &= f' = 0, & S &= S_w & \text{при } \eta = 0, \\ f' &= 1, & S &= 0 & \text{при } \eta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (13.63)$$

В случае *теплоизолированной стенки* ($S \equiv 0$) второе из уравнений (13.61) удовлетворяется тождественно, следовательно, остается решить только уравнение

$$f''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1).$$

Но это уравнение тождественно совпадает с уравнением (9.8) несжимаемого пограничного слоя на клине, исследованным Д. Р. Хартри при различных значениях β . Это исследование показало, что при всех $\beta < -0,199$ ($m < -0,0904$) наступает отрыв пограничного слоя. Следовательно, при значениях $m = -1/8$ и $m = -1/10$, указанных в приведенной выше таблице, на теплоизолированной стенке также наступает отрыв пограничного слоя.

В случае *теплопроводящей стенки* необходимо решить систему обоих уравнений (13.61). Так как температура на стенке T_w может быть задана произвольно, то решения системы (13.61) зависят не только от параметра β , но также от параметра $S_w = T_w/T_0 - 1$. Т. И. Ли и Х. Т. Нагамацу [56], а также К. Б. Коэн и Е. Решотко [15] получили решения для большого числа значений параметров β и S_w .

Примечательно, что для системы (13.61) с граничными условиями (13.63) при $\beta < 0$ (а также для теплоизолированной стенки, см. § 1 главы IX) существуют два физически возможных решения. Какое именно из этих решений

осуществляется в действительном эксперименте, зависит, по мнению К. Б. Коэна и Е. Решотко [15] от того начального поля давления, под действием которого развивается пограничный слой.

На рис. 13.13, а, б, в изображены распределения скоростей $u/u_1 = f'$ (в качестве абсцисс взяты безразмерные расстояния от стенки η) при различных значениях температуры стенки T_w и при различных β . Указанным на рисунке значениям S_w соответствуют (в порядке, отмеченном на рисунке): теплоизолированная стенка с температурой $T_w = T_0$, охлаждаемая стенка с температурой $T_w = 0,2T_0$ (теплопередача от пограничного слоя к стенке) и

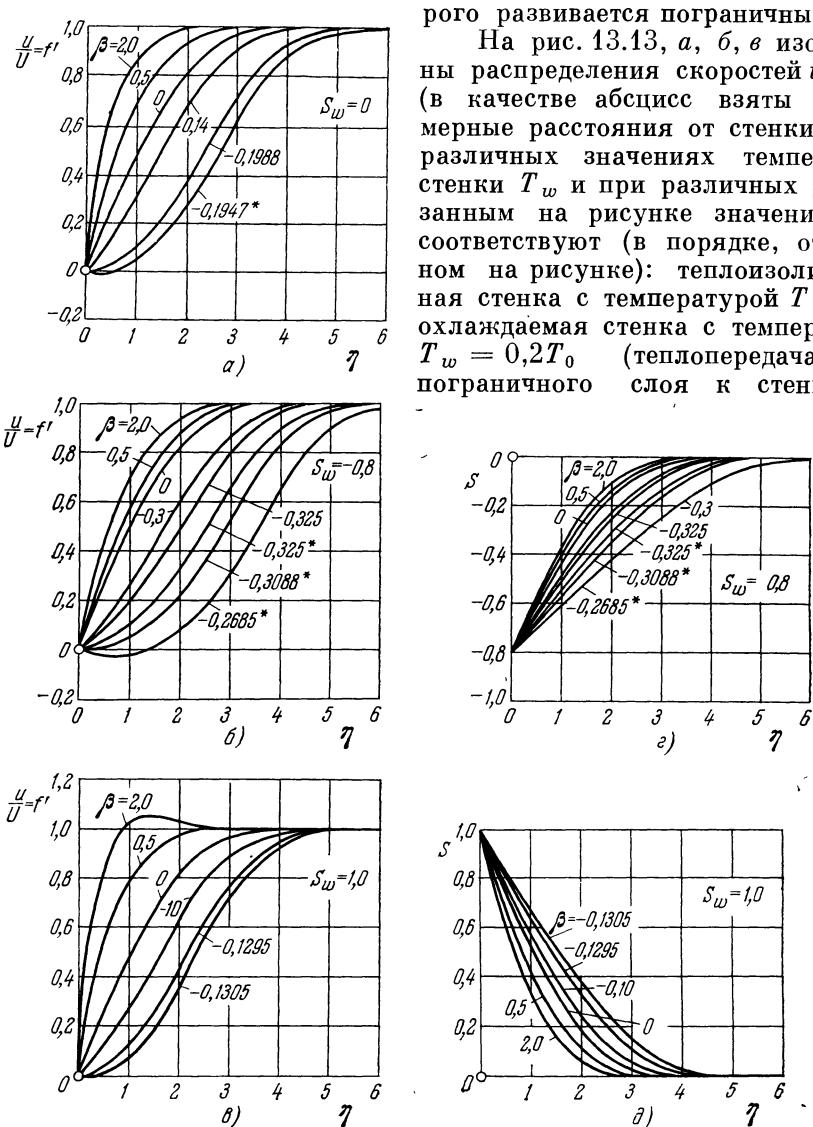


Рис. 13.13. Распределение скоростей и энталпии в сжимаемом ламинарном пограничном слое при наличии градиента давления и теплопередачи [формулы (13.62) и (13.35)]. По К. Б. Коэну и Е. Решотко [16]. Число Прандтля $Pr = 1$; $\omega = 1$; $U(x) = u_1(x)$ — скорость внешнего течения. а), б), в) — распределение скоростей; д), е), ж) — распределение энталпии. а) $S_w = 0$; $T_w = T_0$ — теплоизолированная стенка. б) $S_w = -0,8$; $T_w = 0,2T_0$ — охлаждаемая стенка. в), ж) $S_w = 1,0$; $T_w = 2T_0$ — нагреваемая стенка.

нагреваемая стенка с температурой $T_w = 2T_0$ (теплопередача от стенки к пограничному слою). В случае многозначных решений более низкие значения f' , соответствующие определенному значению параметра β , характеризующее давление, отмечены звездочками. Бросается в глаза, что в случае нагреваемой стенки и падения давления ($\beta > 0$) скорость в некоторой области значений η внутри пограничного слоя может стать больше скорости u_1 внешнего течения (рис. 13.13в). Причина этого заключается в сильном увеличении объем-

ма газа вследствие сильного повышения температуры в пограничном слое. В результате внешние силы давления сообщают газу в пограничном слое, ставшему вследствие нагревания более легким, большее ускорение, чем во внешнем течении, несмотря на то, что в пограничном слое действуют замедляющие движение силы трения.

На рис. 13.13, *г* и *д* изображено распределение безразмерной энталпии S в пограничном слое [соотношение (13.35)] для случаев $T_w = -0,2T_0$ и $T_w = 2T_0$. Мы видим, что градиент давления влияет на профили скоростей значительно сильнее, чем на распределение энталпии.

Для вычисления касательного напряжения τ воспользуемся соотношениями (13.10), (13.26), (13.29) и



Рис. 13.14. Распределение касательных напряжений в сжимаемом ламинарном пограничном слое при наличии градиента давления и теплопередачи [формула (13.64)]. По К. Б. Коэну и Е. Решотко [16]. Число Прандтля $Pr = 1$; $\omega = 1$. а) $S_w = 0$; $T_w = T_0$ — теплоизолированная стенка. б) $S_w = -0,8$; $T_w = 0,2T_0$ — охлаждаемая стенка. в) $S_w = 1,0$; $T_w = 2T_0$ — нагреваемая стенка.

законом адиабатического изменения состояния $p_1/p_0 = (\rho_1/\rho_0)^\kappa$. Мы получим

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = b \mu_0 \tilde{u}_1 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{2\kappa-1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{\tilde{u}_1}{v_0 x} f''(\eta)}. \quad (13.64)$$

На рис. 13.14, *а*, *б*, *в* изображены графики функции $f''(\eta)$ при различных значениях параметров β и S_w . При ускоренном внешнем течении ($\beta > 0$) максимум касательного напряжения лежит на стенке ($\eta = 0$). При замедленном внешнем течении ($\beta < 0$) максимум касательного напряжения удаляется от стенки тем больше, чем больше повышение давления, т. е. чем больше абсолютное значение отрицательного β . Введем местный коэффициент трения

$$c_f' = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_w u_1^2} \quad (13.65)$$

и число Рейнольдса $\text{Re}_w = u_1 x / v_w$, где индексом w отмечены значения на стенке. Можно показать, что имеет место соотношение

$$c'_f \sqrt{\text{Re}_w} = f''_w \sqrt{2(m+1) \frac{x}{\tilde{x}} \frac{dx}{dx}}. \quad (13.66)$$

На рис. 13.15 изображена зависимость f''_w от β при различных значениях S_w . Мы видим, что в случае нагреваемой стенки ($S_w > 0$) изменение давления влияет на величину f''_w , следовательно и на касательное напряжение на стенке, значительно сильнее, чем в случае охлаждаемой стенки ($S_w < 0$). В области отрицательных β каждому значению β , вследствие указанной выше двузначности решений, соответствуют два возможных касательных напряжения

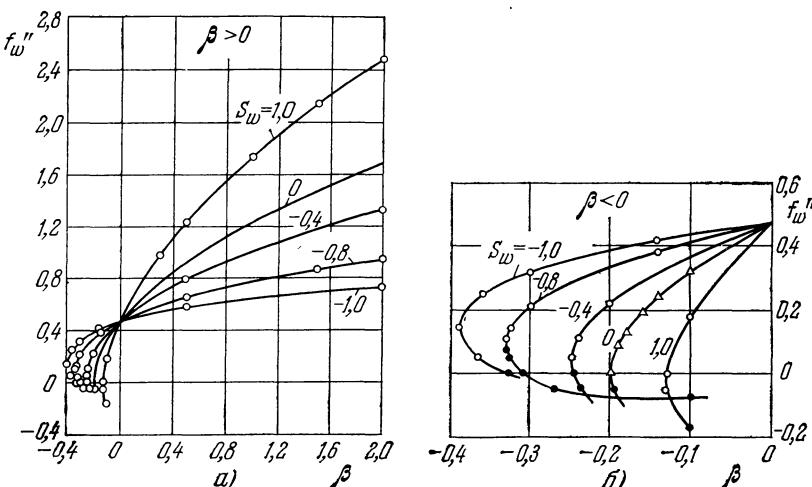


Рис. 13.15. Местный коэффициент трения в сжимаемом ламинарном пограничном слое при наличии градиента давления и теплопередачи [формула (13.66)]. По К. Б. Коэну и Е. Решотко [15]. Число Прандтля $\text{Pr} = 1$; $\omega = 1$; $S_w = 0$ — теплоизолированная стенка; $S_w < 0$ — охлаждаемая стенка; $S_w > 0$ — нагреваемая стенка

на стенке. В случае теплоизолированной стенки ($S_w = 0$) нижней ветви кривой соответствует отрицательное касательное напряжение на стенке, следовательно, возвратное течение. В случае нагреваемой стенки ($S_w > 0$) при достаточно малой разности $\beta - \beta_{\min}$ оба значения f''_w могут быть меньше нуля, т. е. также будет иметь место возвратное течение. Наконец, в случае охлаждаемой стенки ($S_w < 0$) оба значения f''_w могут быть больше нуля, т. е. при обоих значениях f''_w течение будет безотрывным. Далее из рис. 13.15 мы видим, что при повышении температуры стенки для отрыва ($f''_w = 0$) требуется меньшее повышение давления.

Если желательно перейти от переменной η к физическому расстоянию y от стенки, то следует воспользоваться соотношениями (13.8), (13.10), (13.24), (13.25) и (13.52); тогда после необходимых вычислений мы получим

$$y = b \frac{dx}{d\tilde{x}} \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{v_0 x}{\tilde{u}_1}} \int_0^{\eta} \frac{T}{T_0} d\eta. \quad (13.67)$$

Для вычисления y по этой формуле необходимо, во-первых, преобразовать множитель перед интегралом, используя соотношение (13.53) и связь между x и \tilde{x} , определяемую уравнением (13.56), а во-вторых, с по-

мощью соотношений (13.46) и (13.62) привести подынтегральное выражение к виду

$$\frac{T}{T_0} = 1 + S - \frac{u^2}{2c_p T_0} = 1 + S(\eta) - \frac{\frac{x-1}{2} Ma_i^2}{1 + \frac{x-1}{2} Ma_i^2} [f'(\eta)]^2. \quad (13.68)$$

Т. И. Ли и Х. Т. Нагамацу [56] удалось получить подобные решения и не прибегая к преобразованию Иллингворт — Стюартсона. Способ точного расчета при произвольном распределении давления и при наличии теплопередачи указан также В. Манглером [65].

Точный расчет трехмерного пограничного слоя на скользящем круглом цилиндре при наличии теплопередачи и при произвольном числе Прандтля выполнен Е. Решотко и И. Э. Беккуитом [78].

2. Приближенные способы. Весьма многочисленные приближенные способы расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя обычно основаны, как и аналогичные способы для несжимаемого течения, на теореме импульсов и теореме энергии пограничного слоя. Общей чертой всех этих приближенных способов расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя является их значительно большая сложность по сравнению с приближенными способами для несжимаемого течения, изложенными в главе X. Число известных приближенных способов для сжимаемого течения во много раз больше, чем для несжимаемого течения, что следует объяснить большим числом параметров, определяющих сжимаемый ламинарный пограничный слой. Сводные обзоры более старых приближенных способов расчета опубликованы А. Д. Янгом [91] и М. Мордуховым [73], а более новых — Н. Кёрлом [24].

Говоря о приближенных методах, необходимо всегда различать, применимы ли они только к теплоизолированной стенке или также к случаю обтекания с теплопередачей.

Для теплоизолированной стенки имеется способ Л. Хоуарта [45], а также несколько видоизмененный способ Г. Шлихтинга [82]. Оба эти способа предусматривают, что число Прандтля $Pr = 1$. Далее имеются способы Э. Грушвицца [40], И. А. Цаата [94], а также Ирмы Флюгге-Лотц и А. Ф. Джонсона [34], пригодные для любых чисел Прандтля. Последний способ в случае, когда $dp/dx = 0$, может быть применен также к теплопроводящей стенке. Все перечисленные способы предполагают, что $\omega = 1$.

В последние годы главное внимание уделялось пограничным слоям с теплопередачей. Из способов, пригодных только для числа Прандтля $Pr = 1$ и для $\omega = 1$, следует назвать способы М. Мордухова [73], К. Б. Коэна и Е. Решотко [16], Р. Дж. Монахэна [70] и Г. Путса [77]. Второй и третий способы служат для определения толщины потери импульса, коэффициента трения и коэффициента теплопередачи, а первый и четвертый позволяют определять также профили скоростей и температур. Если число Прандтля Pr и ω не очень сильно отличаются от единицы, то может быть использован способ Р. Э. Лакстона и А. Д. Янга [62].

Для произвольных чисел Прандтля применимы способы Н. Кёрла [22], [23] и Г. М. Лиллея [60]. В обоих способах используется закон вязкости (13.4а) с коэффициентом b , определяемым формулой (13.23) и зависящим самое большое еще только от x , следовательно, функция $\mu(T)$ предполагается линейной. Н. Кёрл [22], вычисляя параметры динамического пограничного слоя при повышении давления, предполагает известным профиль температур, но допускает при этом возможность переменной температуры стенки. В работе [23] того же автора указывается способ расчета теплопередачи, если известно распределение касательного напряжения на стенке. Г. М. Лиллей определяет поверхностное трение и коэффициент теплопередачи при переменной темпера-

туре стенки. Способы И. Гинцеля [39], а также Д. Н. Морриса и Дж. В. Смита [74] допускают использование произвольного закона вязкости, а последний способ предусматривает также возможность переменной температуры стенки.

К. Т. Янг [89] предложил способ, позволяющий значительно улучшить результаты, даваемые другими способами.

Теорема импульсов и теорема энергии. Выведем теорему импульсов и теорему энергии для сжимаемого ламинарного пограничного слоя, так как они являются основой для всех приближенных способов расчета. Будем исходить из основных уравнений (13.5)–(13.8) сжимаемого ламинарного пограничного слоя. Введем местную энталпию

$$i = c_p T \quad (13.69)$$

и полную энталпию единицы массы

$$h = i + \frac{u^2}{2} = c_p T + \frac{1}{2} u^2. \quad (13.70)$$

Тогда уравнению энергии (13.7) можно будет придать вид

$$\rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right). \quad (13.71)$$

Границными условиями будут

а) при наличии теплопередачи:

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{при } y = 0, \\ u = U(x), \quad i = i_1(x) \quad \text{при } y = \infty; \end{array} \right\} \quad (13.72a)$$

б) для случая теплоизолированной стенки:

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \\ u = U(x), \quad i = i_1(x) \quad \text{при } y = \infty. \end{array} \right\} \quad (13.72b)$$

Уравнения (13.5), (13.6), (13.8) и (13.71) вместе с границными условиями (13.72) образуют систему из четырех уравнений для четырех неизвестных u , v , ρ и i . Давление $p(x)$ следует считать известным из уравнения (13.9). Оно постоянно по толщине пограничного слоя, т. е. $dp/dy = 0$. Поэтому в каждом сечении пограничного слоя вдоль контура тела вследствие соотношения (13.10) имеют место равенства

$$\frac{i}{i_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (13.73)$$

где i_1 , T_1 и ρ_1 суть значения энталпии, температуры и плотности на внешней границе пограничного слоя.

Так же, как и в случае несжимаемого пограничного слоя, для приближенных способов расчета сжимаемого пограничного слоя вводятся понятия толщины вытеснения, толщины потери импульса и толщины потери энергии и, кроме того, два новых понятия: толщина увеличения энталпии δ_H и толщина потери скорости δ_u . Первые три понятия определяются так, чтобы в случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$, т. е. в случае несжимаемого течения, они совпадали с ранее определенными понятиями (8.33), (8.34) и (8.37). Итак, обозначив через δ толщину динамического пограничного слоя, мы введем следующие определения:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U} \right) dy \quad (\text{толщина вытеснения}), \quad (13.74)$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (\text{толщина потери импульса}) \quad (13.75)$$

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy \quad (\text{толщина потери энергии}), \quad (13.76)$$

$$\delta_H = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(\frac{i}{i_1} - 1 \right) dy \quad (\text{толщина увеличения энталпии}), \quad (13.77)$$

$$\delta_u = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (\text{толщина потери скорости}). \quad (13.78)$$

Из равенств (13.73), (13.74), (13.77) и (13.78) легко убедиться, что между δ_1 , δ_H и δ_u существует соотношение

$$\delta_1 - \delta_u = \delta_H. \quad (13.79)$$

Теорема импульсов и теорема энергии для сжимаемого пограничного слоя выводятся из уравнения движения (13.6) и соответственно из уравнения энергии (13.71) посредством интегрирования по y совершенно таким же образом, как это было сделано для несжимаемого течения. Имея в виду, что

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} = - \frac{Ma^2}{U} \frac{dU}{dx},$$

мы получим *теорему импульсов* в следующем виде:

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - Ma^2 \right) = - \frac{\mu_w}{\rho_1 U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w.} \quad (13.80)$$

Для получения уравнения *механической энергии* следует умножить уравнение (13.6) на u и проинтегрировать по y . Использовав уравнение неразрывности, после некоторых преобразований мы найдем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\rho_1 U^3 \delta_3) + \rho_1 U^2 \frac{dU}{dx} (\delta_1 - \delta_u) = \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (13.81)$$

В этом уравнении левая часть представляет собой механическую работу течения, а правая часть — диссиацию. В случае несжимаемого течения второй член левой части исчезает, так как при $\rho = \text{const}$ толщина увеличения энталпии $\delta_H = 0$, и уравнение (13.81) переходит в уравнение (8.38).

Далее, проинтегрировав по y уравнение (13.71), мы получим

$$\frac{d}{dx} (\rho_1 i_1 U \delta_H) + \rho_1 U^2 \frac{dU}{dx} \delta_H = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right)_w + \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (13.82)$$

Это уравнение, определяющее приращение энталпии, выражает собой теорему энергии. Левая часть уравнения (13.82) представляет собой изменение энталпии течения, а правая часть — тепло, подведенное в пограничный слой вследствие теплопередачи на стенке (индекс w) и диссиляции. Если учесть, что уравнение (13.81) определяет потерю механической энергии, а уравнение (13.82) — увеличение энталпии, то, вычтя из первого уравнения второе, мы получим приращение *полной энталпии* в направлении x , а именно:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_1 U \left(i_1 \delta_H - \frac{1}{2} U^2 \delta_3 \right) \right] = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right)_w. \quad (13.83)$$

Имея в виду выражение (13.70) для полной энталпии h единицы массы, мы можем переписать уравнение (13.83) в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (h - h_1) dy = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right)_w. \quad (13.84)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой приращение полной энталпии течения в направлении x , а правая часть — тепло, подводимое или отводимое через стенку.

Проинтегрировав уравнение (13.82) по x , мы получим

$$\frac{1}{2} U^2 \delta_3 = i_1 \delta_H + \frac{1}{\rho_1 U} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right)_w dx. \quad (13.85)$$

В случае *теплоизолированной* стенки $(\partial i / \partial y)_w = 0$, и поэтому второй член в правой части исчезает. Введем скорость звука $c_1^2 = \kappa R T_1$, соответствующую температуре T_1 на внешней границе пограничного слоя; тогда мы будем иметь

$$i_1 = c_p T_1 = \frac{c_1^2}{\kappa - 1}$$

и на основании уравнения (13.85)

$$\delta_H = \frac{1}{2} (\kappa - 1) Ma^2 \delta_3, \quad (13.86)$$

где $Ma = U/c_1$ есть местное число Маха на внешней границе пограничного слоя. Внеся выражения (13.79) и (13.86) в уравнение (13.81), мы получим уравнение энергии в следующем окончательном виде:

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} [3 - (2 - \kappa) Ma^2] = \frac{2}{\rho_1 U^3} \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (13.87)$$

Уравнения (13.80) и (13.87) выражают собой теорему импульсов и теорему энергии для сжимаемого ламинарного пограничного слоя на теплоизолированной стенке. На этих теоремах основан излагаемый ниже приближенный способ расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя, предложенный Э. Грушвицем. Для несжимаемого течения $Ma \rightarrow 0$ и уравнения (13.80) и (13.87) переходят в уравнения (8.35) и (8.38), выражающие теорему импульсов и теорему энергии для несжимаемого ламинарного пограничного слоя.

Приближенный способ Грушвица. Из весьма многочисленных приближенных способов расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя изложим здесь только способ Э. Грушвица [40]. Он применим для теплоизолированной стенки при законе вязкости с показателем степени $\omega = 1$ и при произвольном числе Прандтля. С точки зрения вычислительной техники он сравнительно прост и, кроме того, при предельном переходе к несжимаемому течению непосредственно переходит в способ К. Польгаузена и Хольштейна — Болена, подробно изложенный в главе X.

Для использования теоремы импульсов (13.80) и теоремы энергии (13.87) аппроксимируем, как и в главе X, распределение скоростей и распределение энталпии в пограничном слое подходящими полиномами. При этом вместо расстояния от стенки y введем безразмерное приведенное расстояние от стенки

$$\eta = \frac{1}{\delta'} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_1} dy, \quad (13.88)$$

где

$$\delta'(x) = \int_0^{\delta(x)} \frac{\rho}{\rho_1} dy \quad (13.89)$$

есть приведенная толщина пограничного слоя. В равенстве (13.89) $\delta(x)$ есть то конечное расстояние от стенки, на котором пограничный слой смыкается с внешним течением. Следовательно,

$$\eta = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } \eta = 1 \text{ при } y = \delta.$$

Для несжимаемого течения $\eta = y/\delta(x)$, как это было принято при выборе полинома (10.19).

Профиль скоростей аппроксимируем по аналогии с полиномом (10.19) полиномом четвертой степени

$$\frac{u}{U} = c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4. \quad (13.90)$$

Из таких же граничных условий, как и в случае несжимаемого течения [равенства (10.20)], найдем коэффициенты

$$c_1 = 2 + \frac{\Lambda}{6}, \quad c_2 = -\frac{\Lambda}{2}, \quad c_3 = \frac{\Lambda}{2} - 2, \quad c_4 = 1 - \frac{\Lambda}{6},$$

где

$$\Lambda = \frac{\rho_1}{\rho_w} \frac{\delta'^2}{v_1} \frac{dU}{dx} \quad (13.91)$$

есть формпараметр профиля скоростей, который должен быть определен из теоремы импульсов.

Далее аппроксимируем полиномом не профиль энталпии, а величину

$$\left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{\rho_1}{\rho},$$

так как плотность ρ входит во все вычисления только в этой комбинации. Для аппроксимации возьмем полином пятой степени

$$\left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{\rho_1}{\rho} = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + b_4\eta^4 + b_5\eta^5.$$

Для шести коэффициентов b_0, \dots, b_5 имеется пять граничных условий. Следовательно, один из коэффициентов остается свободным, и его следует определить из теоремы энергии (13.87). В качестве свободного коэффициента выберем

$$b_0 = \frac{\rho_1}{\rho_w} = \frac{T_w}{T_1}, \quad (13.92)$$

т. е. отношение температуры стенки к температуре на внешней границе пограничного слоя. Для дальнейшего расчета целесообразно, как и при расчете несжимаемого течения по Хольштейну — Болену, ввести параметр

$$K = \Lambda \left(\frac{\delta_2}{\delta'} \right)^2 = b_0 \frac{\delta_2^2}{v_1} \frac{dU}{dx}. \quad (13.93)$$

анalogичный параметру (10.27). Параметры K и Λ связаны между собой таким же соотношением, как и соотношение (10.30) при несжимаемом течении.

Толщину потери импульса δ_2 и толщину потери энергии δ_3 можно выразить, как и при несжимаемом течении, в виде функций от Λ , а именно:

$$\frac{\delta_2}{\delta'} = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072},$$

$$\frac{\delta_3}{\delta'} = \frac{798\,048 - 4\,656\Lambda - 758\Lambda^2 - 7\Lambda^3}{4\,324\,320}.$$

Наконец, введя универсальные функции

$$F_1(K) = 2 \frac{\delta_2}{\delta'} \left(1 - \frac{\Lambda}{15} + \frac{\Lambda^2}{240} \right), \quad (13.94)$$

$$F_2(K) = 1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{\delta'}{\delta_2} \left(\frac{\delta_3}{\delta'} - \text{Pr} \frac{(12+\Lambda)^2}{2160} \right), \quad (13.95)$$

$$F_3(K) = \frac{\kappa-1}{2} \left[2 - \frac{\delta'}{\delta_2} \left(\frac{\delta_3}{\delta'} - \text{Pr} \frac{(12+\Lambda)^2}{2160} \right) \right], \quad (13.96)$$

$$F_4(K) = \frac{\kappa-1}{2} \left[2 - \frac{\delta'}{\delta_2} \left(\frac{\delta_3}{\delta'} - \frac{(12+\Lambda)^2}{2160} \right) \right] \quad (13.97)$$

и выполнив довольно кропотливые выкладки, получим из теоремы импульсов (13.80) и теоремы энергии (13.87):

$$\frac{d\delta_2 U}{v_1 dx} = F_1(K) - \frac{K}{b_0} [2 - \text{Ma}^2 F_2(K)] \quad (13.98)$$

и

$$b_0 = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \frac{1 + \text{Ma}^2 F_3(K)}{1 + \text{Ma}^2 F_4(K)}. \quad (13.99)$$

Функции $F_1(K)$, $F_2(K)$, $F_3(K)$ и $F_4(K)$ вычислены Э. Грушвитцем и даны в таблице 13.1.

Таблица 13.1 Универсальные функции для приближенного расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя. По Э. Грушвитцу [40].
 $\text{Pr} = 0,725$, $\kappa = 1,4$ (воздух)

K	Λ	F_1	F_2	F_3	F_4	K	Λ	F_1	F_2	F_3	F_4
0,0948	12,00	0,1422	1,115	0,518	0,685	-0,035	-2,455	0,2839	0,736	0,141	0,161
0,090	9,44	0,1449	0,993	0,399	0,519	-0,040	-2,798	0,2916	0,732	0,138	0,156
0,085	8,34	0,1482	0,952	0,358	0,463	-0,045	-3,141	0,2993	0,729	0,134	0,151
0,080	7,49	0,1518	0,925	0,330	0,424	-0,050	-3,483	0,3073	0,726	0,131	0,147
0,077	7,052	0,1540	0,911	0,316	0,405	-0,055	-3,826	0,3155	0,723	0,128	0,143
0,075	6,77	0,1556	0,903	0,308	0,394	-0,060	-4,170	0,3240	0,720	0,126	0,139
0,070	6,135	0,1597	0,885	0,290	0,370	-0,065	-4,545	0,3326	0,718	0,123	0,135
0,065	5,554	0,1640	0,870	0,275	0,349	-0,070	-4,861	0,3414	0,715	0,120	0,131
0,060	5,015	0,1685	0,857	0,262	0,330	-0,075	-5,210	0,3505	0,713	0,118	0,128
0,055	4,509	0,1732	0,845	0,250	0,314	-0,080	-5,562	0,3599	0,710	0,115	0,125
0,050	4,029	0,1781	0,835	0,240	0,299	-0,085	-5,916	0,3694	0,708	0,113	0,121
0,045	3,570	0,1834	0,825	0,230	0,286	-0,090	-6,275	0,3792	0,706	0,111	0,118
0,040	3,129	0,1882	0,816	0,221	0,274	-0,095	-6,638	0,3892	0,704	0,109	0,115
0,035	2,703	0,1935	0,808	0,213	0,262	-0,100	-7,007	0,3995	0,702	0,107	0,113
0,030	2,290	0,1990	0,804	0,206	0,252	-0,105	-7,382	0,4102	0,701	0,106	0,110
0,025	1,888	0,2046	0,794	0,199	0,242	-0,110	-7,764	0,4212	0,699	0,104	0,108
0,020	1,496	0,2103	0,787	0,193	0,233	-0,115	-8,154	0,4323	0,697	0,102	0,105
0,015	1,112	0,2162	0,782	0,186	0,224	-0,120	-8,553	0,4439	0,695	0,101	0,103
0,010	0,735	0,2223	0,776	0,181	0,216	-0,125	-8,964	0,4561	0,694	0,099	0,101
0,005	0,365	0,2285	0,771	0,175	0,209	-0,130	-9,387	0,4689	0,693	0,098	0,100
0	0	0,2349	0,765	0,170	0,202	-0,135	-9,826	0,4822	0,692	0,097	0,098
-0,005	-0,360	0,2414	0,760	0,166	0,195	-0,140	-10,282	0,4962	0,691	0,096	0,097
-0,010	-0,716	0,2484	0,756	0,161	0,188	-0,145	-10,760	0,5108	0,691	0,096	0,096
-0,015	-1,069	0,2549	0,751	0,156	0,182	-0,150	-11,265	0,5263	0,690	0,095	0,095
-0,020	-1,419	0,2619	0,747	0,152	0,177	-0,155	-11,80	0,5436	0,690	0,095	0,095
-0,025	-1,766	0,2690	0,743	0,148	0,171	-0,157	-12,00	0,5485	0,690	0,095	0,095
-0,030	-2,111	0,2764	0,739	0,145	0,166						

Точка отрыва, как и в случае несжимаемого течения, определяется значениями параметров

$$\Lambda = -12, \quad K = -0,1567. \quad (13.100)$$

Касательное напряжение на стенке равно

$$\frac{\tau_w}{\rho_1 U^2} = \frac{v_1}{U \delta'} \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right). \quad (13.101)$$

Величины $U(x)$, dU/dx , $v_1(x)$, а также $\text{Ma} = U/c_1$ и Pr следует рассматривать как заданные. Тогда уравнения (13.98) и (13.99) вместе с уравнением (13.93) составят систему трех уравнений для определения трех неизвестных: толщины потери импульса $\delta_2(x)$, температуры стенки $b_0 = T_w(x)/T_1(x)$ и формпараметра K . Интегрирование уравнения (13.98) выполняется таким же способом, как в главе X для случая несжимаемого течения. Начальные значения в критической точке также определяются способами, примененными при расчете несжимаемого пограничного слоя. Получив начальное значение $K_0 = 0,0770$, находим далее

$$\delta_{20} = \sqrt{\frac{K_0 v_1}{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0}},$$

$$\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_0 = -0,4057 \delta_{20} \frac{\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0}{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0}$$

[см. в связи с этим второе из соотношений (10.36а)].

При $\text{Pr} = 1$ расчет упрощается. В этом случае $F_3 = F_4$, и уравнение (13.99) принимает вид

$$b_0 = \frac{T_w}{T_1} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2, \quad (13.102)$$

т. е. совпадает с уравнением (13.126). Поэтому остается решить только уравнение (13.98).

Для несжимаемого течения $\text{Ma} = 0$ и уравнение (13.99) дает $b_0 = 1$, следовательно, $T_w = T_1$, и уравнение (13.98) переходит в уравнение (10.36), так как

$$F_1(K) - 2K = \frac{1}{2} F(K),$$

где $F(K)$ определяется равенством (10.35).

Изложенный приближенный способ Э. Грушвитца тщательно проверен Е. А. Эйхельброннером [31].

Пример. Приведем расчет обтекания крыла приближенным способом Грушвитца¹⁾. На рис. 13.16 для подсасывающей стороны профиля NACA 8410 изображены теоретическое потенциальное распределение скоростей при угле атаки $\alpha = 0$ и при числах Маха $\text{Ma}_{\infty} = 0; 0,6$ и $0,8$, а также распределение температуры T_1 в потоке вне пограничного слоя. Результат расчета пограничного слоя показан на рис. 13.17 и 13.18. На рис. 13.17 изо-

¹⁾ За выполнение этого расчета я обязан Ф. Мозеру. Так как способ Грушвитца не позволяет получить пригодные профили температур, то для их определения была использована работа [34].

изображено изменение толщины потери импульса δ_2 , толщины вытеснения δ_1 , а также касательного напряжения на стенке τ_w вдоль подсасывающей стороны профиля. Точка отрыва при увеличении числа Маха перемещается немногим вперед. Изменение толщины потери импульса и касательного напряжения

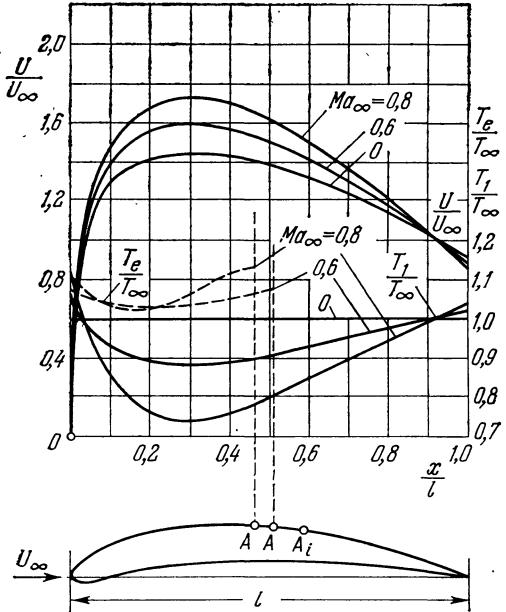


Рис. 13.16. Расчет ламинарного пограничного слоя на подсасывающей стороне крылового профиля NACA 8410 при дозвуковом сжимаемом течении. Стенки профиля теплоизолированы, угол атаки $\alpha = 0$. Расчет сделан по приближенному способу Э. Грушвицца [40]. Число Маха $Ma_{\infty} = U_{\infty}/c_{\infty}$; число Прандтля $Pr = 0,725$; А — точка отрыва. На рисунке изображено теоретическое потенциальное распределение скоростей U/U_{∞} на внешней границе пограничного слоя и соответствующие распределения температур: T_l/T_{∞} — внешнего течения и T_e/T_{∞} — вдоль стенки.

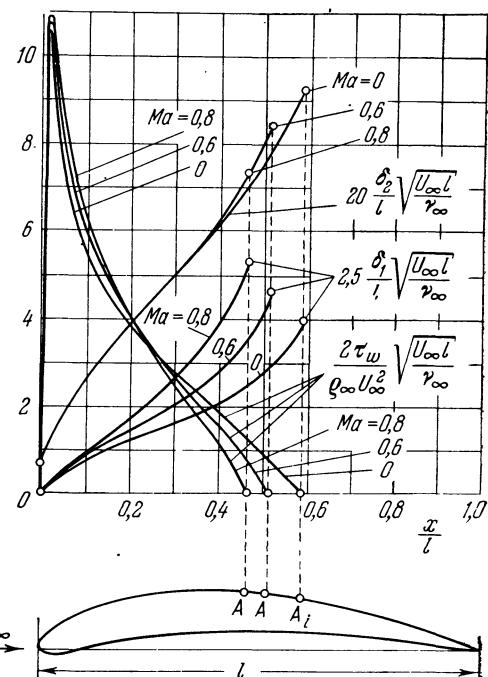


Рис. 13.17. Расчет ламинарного пограничного слоя на подсасывающей стороне крылового профиля NACA 8410 при дозвуковом сжимаемом течении (см. рис. 13.16). Определение толщины потери импульса δ_2 , толщины вытеснения δ_1 и касательного напряжения на стенке τ_w при различных числах Маха.

на стенке мало зависит от числа Маха, в то время как толщина вытеснения δ_1 значительно увеличивается с возрастанием числа Маха. На рис. 13.18 изображены распределения скоростей и распределения температуры для ряда точек вдоль контура профиля. Профили скоростей лишь немногим изменяются при изменении числа Маха. Профили же температуры показывают, что при увеличении числа Маха температура стенки сильно возрастает, как это и следовало ожидать для теплоизолированной стенки. Значения температуры на стенке нанесены также на рис. 13.16 в виде штриховых криевых T_e/T_{∞} .

Способ расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя, сводящийся к квадратуре, для случая отсутствия теплопередачи и в предположении, что число Прандтля равно единице, а коэффициент вязкости пропорционален температуре, предложен Н. Роттом и Л. Ф. Крабтри [79].

В. Хантцше и Г. Вендт [42] рассчитали осесимметричный пограничный слой на круглом конусе, обтекаемом сверхзвуковым потоком в осевом направ-

лении. Пограничный слой на конусе, обтекаемом сверхзвуковым потоком под углом атаки, рассмотрен Ф. К. Муром [72]. Пограничный слой на круглом конусе, вращающемся в сверхзвуковом потоке под небольшим углом атаки, исследован Р. Сэдни [83]. Расчеты для других вращающихся тел можно найти в работах С. Т. Чу и А. Н. Тиффорда [13], а также И. Ямаги [88].

Теорема Манглера, рассмотренная в § 3 главы XI и позволяющая свести расчет осесимметричного пограничного слоя на любом теле к расчету плоского пограничного слоя, применима также к сжимаемым пограничным слоям.

Р. М. Инмен [48] вывел приближенные уравнения для определения коэффициента трения сжимаемого течения Күэтта без теплопередачи и с теплопередачей, однако с упрощающим предположением, что коэффициент вязкости пропорционален температуре. И. Э. Беккуйт [5] показал, что сжимаемый ламинарный пограничный слой на любом трехмерном теле может быть приближенно рассчитан, если составляющие скорости вторичного течения малы по сравнению с соответствующими составляющими скорости главного течения.

§ 5. Взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения

На поверхности тела, обдуваемого или летящего с большой скоростью, могут возникать местные сверхзвуковые области. Если при повышении давления, сопровождающем движение, скорость течения из сверхзвуковой переходит в дозвуковую, то практически это всегда осуществляется в виде скачка уплотнения. При этом в очень тонком фронте скачка уплотнения — за исключением непосредственной близости обтекаемой стенки — происходит сильное скачкообразное изменение давления, плотности и температуры. Скачки уплотнения имеют существенное значение для сопротивления обтекаемого тела: часто они влекут за собой отрыв пограничного слоя. Опыты показали, что скачки уплотнения и явления, происходящие в пограничном слое, сильно влияют друг на друга. Это приводит к возникновению сложных явлений, так как поведение пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса, а поведение скачка уплотнения — от числа Маха. Систематические исследования взаимного влияния скачков уплотнения и пограничного слоя с четким разграничением роли числа Рейнольдса и числа Маха начались сравнительно недавно. И. Аккерет, Ф. Фельдман и Н. Ротт [1], Г. В. Липман [58], а также Г. Э. Гэдд, Д. В. Холдер и Дж. Д. Риген [36] при своих опытах варьировали число Рей-

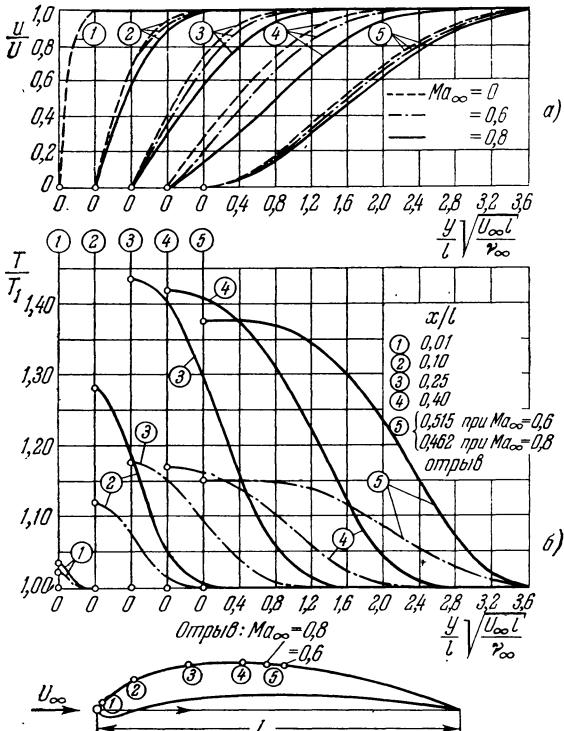


Рис. 13.18. Расчет ламинарного пограничного слоя на подсасывающей стороне крылового профиля NACA 8410 при дозвуковом сжимаемом течении (см. рис. 13.16). а) Распределение скоростей в пограничном слое при различных числах Маха. б) Соответствующие распределения температуры.

осуществляется в виде скачка уплотнения. При этом в очень тонком фронте скачка уплотнения — за исключением непосредственной близости обтекаемой стенки — происходит сильное скачкообразное изменение давления, плотности и температуры. Скачки уплотнения имеют существенное значение для сопротивления обтекаемого тела: часто они влекут за собой отрыв пограничного слоя. Опыты показали, что скачки уплотнения и явления, происходящие в пограничном слое, сильно влияют друг на друга. Это приводит к возникновению сложных явлений, так как поведение пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса, а поведение скачка уплотнения — от числа Маха. Систематические исследования взаимного влияния скачков уплотнения и пограничного слоя с четким разграничением роли числа Рейнольдса и числа Маха начались сравнительно недавно. И. Аккерет, Ф. Фельдман и Н. Ротт [1], Г. В. Липман [58], а также Г. Э. Гэдд, Д. В. Холдер и Дж. Д. Риген [36] при своих опытах варьировали число Рей-

нольдса и число Маха независимо одно от другого и таким путем внесли некоторую ясность в сложную связь между пограничным слоем и скачком уплотнения. Наиболее существенные результаты этих трех работ будут изложены ниже.

В пограничном слое повышение давления должно быть таким же, как и во внешнем течении, так как линия тока, разделяющая обе эти области, после перехода через фронт скачка проходит опять параллельно поверхности обтекаемого тела. Так как в пограничном слое частицы, близкие к стенке, движутся, конечно, с звуковой скоростью, скачки же уплотнения могут возникать только в сверхзвуковом течении, то очевидно, что скачок уплотнения, возникающий в невязком внешнем течении, не может дойти до самой



Рис. 13.19. Шлирные фотоснимки скачков уплотнения (течение направлено слева направо). По Аккерету, Фельдману и Ротту [1]. а) Ламинарный пограничный слой; многократный λ -с скачок; $Ma = 1,92$; $Re_{\delta_2} = 390$. б) Турбулентный пограничный слой; $Ma = 1,28$; $Re_{\delta_2} = 1159$.

стенки. Поэтому градиент давления в направлении, параллельном стенке, изменяется в пограничном слое значительно более плавно, чем во внешнем течении. Однако градиенты скорости du/dx и du/dy в зоне возникновения скачка одинаковы по порядку своих величин. Кроме того, в зоне возникновения скачка могут возникать большие градиенты давления в направлении, перпендикулярном к стенке. Оба эти обстоятельства означают, что в зоне возникновения скачка не соблюдаются допущения, лежащие в основе теорий пограничного слоя.

Скачок уплотнения при ламинарном пограничном слое очень сильно отличается от скачка уплотнения при турбулентном пограничном слое (рис. 13.19). В случае ламинарного течения незадолго до возникновения фронта скачка, в основном перпендикулярного к стенке, несколько впереди по течению образуется раздвоенный, так называемый λ -образный скачок уплотнения (рис. 13.19, а). При турбулентном пограничном слое прямой перпендикулярный к стенке скачок уплотнения в общем случае не раздваивается (рис. 13.19, б). Косой скачок уплотнения, попадающий в ламинарный пограничный слой извне, отражается от пограничного слоя в виде сильно расходящегося пучка волн разрежения (рис. 13.28, а). В случае же турбулентного пограничного слоя отражение косого скачка происходит обычно в виде нерасходящейся волны разрежения (рис. 13.28, б).

Из рис. 13.20 и 13.21 видно, что повышение давления и в ламинарном, и в турбулентном пограничном слое происходит более постепенно, чем во внешнем течении. Это расширение скачка уплотнения в пограничном слое называют диффузией распределения давления вдоль стенки. В ламинарных

пограничных слоях диффузия значительно больше, чем в турбулентных пограничных слоях. Это ясно видно из рис. 13.22, на котором изображены

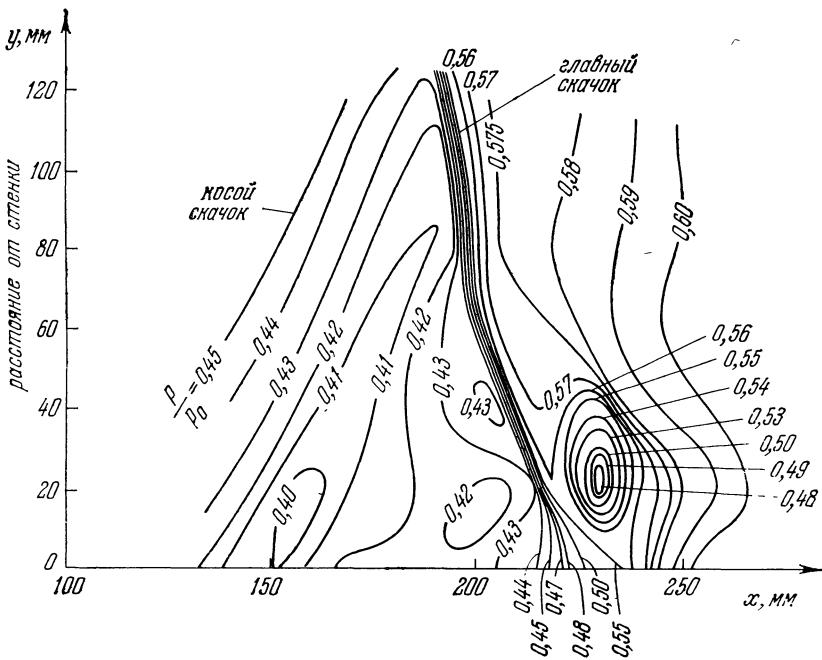


Рис. 13.20. Изобары скачка уплотнения при ламинарном течении в пограничном слое (λ -сачок). По Аккерету, Фельдману и Ротту [1].

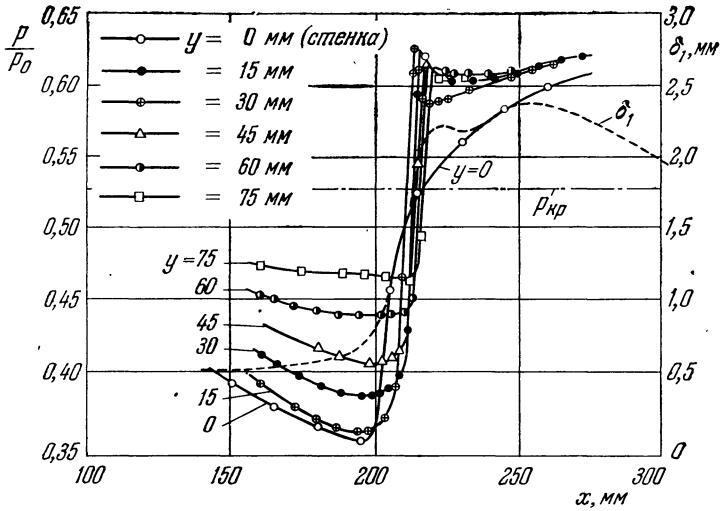


Рис. 13.21. Распределение давления в турбулентном пограничном слое в области скачка уплотнения на различных расстояниях от стенки. По Аккерету, Фельдману и Ротту [1].

полученные Г. В. Липманом, А. Рошко и С. Дхаваном [59] результаты измерений распределения давления на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении сверхзвуковым потоком, в окрестности места возникновения фронта скачка уплотнения. При ламинарном пограничном слое ширина области диффузии составляет около 100δ , где δ есть толщина пограничного слоя; при турбулентном же пограничном слое эта ширина равна круглым числом

только 10 д. Более сильное уплощение скачка уплотнения вблизи стенки при ламинарном пограничном слое можно объяснить, в частности, тем, что при ламинарном пограничном слое дозвуковая область вблизи стенки относительно шире, чем при турбулентном пограничном слое.

Независимо от того, возникает или не возникает отрыв, толщина пограничного слоя перед фронтом главного скачка нарастает. Увеличение давления на внешней границе пограничного слоя, следовательно, и внутри пограничного слоя определяется линией тока, обращенной своей выпуклостью к стенке и отделяющей внешнее течение от пограничного слоя. Аналогичным

образом небольшое понижение давления (рис. 13.22), происходящее в области упомянутых волн разрежения, являющихся результатом отражения косого скачка уплотнения, определяется линией тока, обращенной своей вогнутостью к стенке и также отделяющей внешнее течение от пограничного слоя. Неоторвавшийся ламинарный пограничный слой в состоянии преодолеть только незначительное повышение давления, так как внешнее течение создает в ламинарном пограничном слое градиент давления только посредством сил трения. Неоторвавшийся турбулентный пограничный слой может преодолеть значительно большее повышение давления, так как по сравнению с ламинарным пограничным слоем он получает дополнительную энергию от внешнего турбулентного движения.

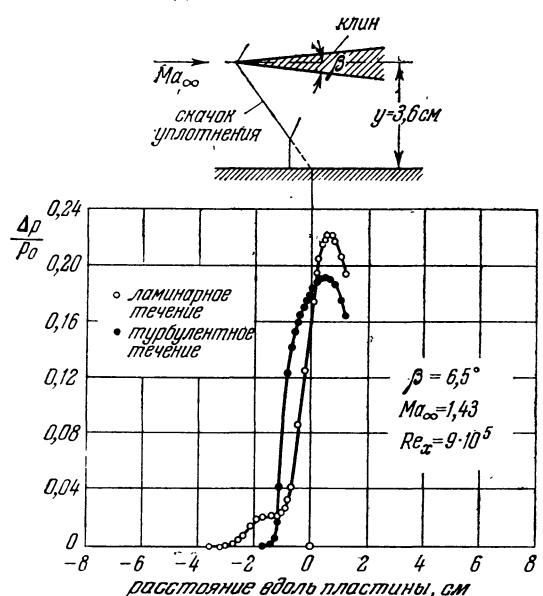


Рис. 13.22. Распределение давления на плоской стенке, обтекаемой со сверхзвуковой скоростью в продольном направлении, в окрестности точки отражения скачка уплотнения при ламинарном и турбулентном пограничном слое. По Лийману, Рошко и Дхавану [6]. Толщина ламинарного пограничного слоя $\delta \approx 0.7$ мм; толщина турбулентного пограничного слоя $\delta \approx 1.4$ мм.

Ламинарные и турбулентные пограничные слои могут путем отрыва преодолевать большие повышения давления, связанные с сильными скачками уплотнения. Особенно в случае турбулентного пограничного слоя вихрь, образующийся в застойной области между оторвавшимся пограничным слоем и стенкой, обусловливает настолько большие скорости, что внутренняя граница пограничного слоя оказывается в состоянии при помощи сил трения преодолеть повышение давления. Из рис. 13.23 видно, что застойная область и пограничный слой перед достижением фронта главного скачка становятся шире и толще, а затем позади фронта скачка опять уменьшаются. В конце концов пограничный слой опять прилегает к стенке (см. также фото на рис. 13.24).

На рис. 13.23 изображены результаты некоторых измерений, выполненных С. М. Богдановым и К. Э. Кеплером [6] над отражением косого скачка уплотнения от плоской стенки при турбулентном пограничном слое и при числе Маха внешнего течения, равном $Ma_\infty = 3$. На рис. 13.23, а показано отражение слабого скачка уплотнения, а на рис. 13.23, б — отражение сильного скачка уплотнения. При слабом скачке, вызванном углом отклонения $\Theta = 7^\circ$, отраженный скачок имеет такой же вид, как в невязком течении, и отрыва пограничного слоя не возникает.

Напротив, при сильном скачке ($\Theta = 13^\circ$) при его отражении возникает система волн, состоящая из волн уплотнения и волн разрежения. Кроме того, возникает сильное локальное увеличение толщины пограничного слоя

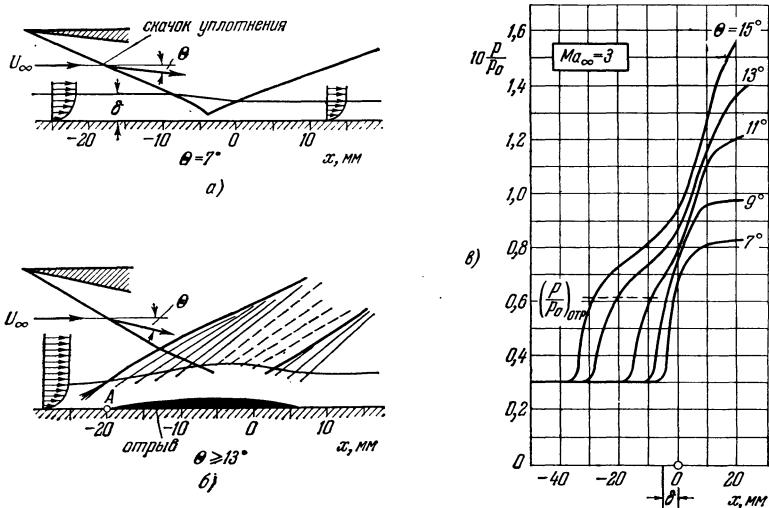


Рис. 13.23. Отражение скачка уплотнения от плоской стенки при турбулентном пограничном слое. По С. М. Богданову и К. Э. Кеплеру [9]. Толщина пограничного слоя перед скачком $\delta \approx 3$ мм.
а) Слабый скачок; угол отклонения $\Theta = 7^\circ$. Отражение скачка примерно такое же, как в невязком течении; отрыв пограничного слоя не происходит. б) Сильный скачок; угол отклонения $\Theta \geq 13^\circ$. В результате отражения скачка возникает система волн уплотнения и разрежения; пограничный слой отрывается. в) Распределение давления при различных углах отклонения Θ . Отрыв происходит при близительно при $p_{\text{отр}}/p_\infty = 2$.

и связанный с этим его отрыв. Позади отраженного скачка пограничный слой толще, чем до первоначального скачка. Распределение давления вдоль стенки

Рис. 13.24. Шлирный фотоснимок течения на крыловом профиле. Взаимодействие скачков уплотнения и пограничного слоя. Случай (2): пограничный слой ламинарен; позади скачка уплотнения отрыв не происходит. $Ma = 0,84$; $Re = 8,45 \cdot 10^6$. По Липману [8].

при различных углах отклонения Θ (и, следовательно, при скачках различной интенсивности) изображено на рис. 13.23, в. Отрыв возникает при углах отклонения $\Theta > 9^\circ$. Повышение давления, приводящее к отрыву, равно приблизительно $p_{\text{отр}}/p_\infty = 2$ и не зависит от угла отклонения.

Переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную и отрыв пограничного слоя в окрестности места возникновения скачка уплотнения определяются прежде всего числом Рейнольдса пограничного слоя и числом Маха внешнего течения. При очень слабых скачках и при

Рис. 13.25. Шлирный фотоснимок течения на крыловом профиле. Взаимодействие скачков уплотнения и пограничного слоя. Случай (3): пограничный слой ламинарен; позади скачка происходит сильный отрыв. $Ma = 0,90$; $Re = 8,74 \cdot 10^6$. По Липману [56].

Рис. 13.26. Шлирный фотоснимок течения на крыловом профиле. Взаимодействие скачков уплотнения и пограничного слоя. Случай (4): пограничный слой перед скачком уплотнения турбулентен; отрыва не происходит. $Ma = 0,85$; $Re = 1,69 \cdot 10^6$. По Липману [56].

очень малых числах Рейнольдса пограничный слой всегда остается ламинарным. Если при фиксированном малом числе Маха число Рейнольдса немного возрастает, то в том месте прилегающего пограничного слоя, где возникает скачок, течение переходит из ламинарной формы в турбулентную. При сильных скачках уплотнения (большие числа Маха) и небольших числах Рейнольдса ламинарный пограничный слой отрывается от стенки вследствие диффузии

давления уже до фронта скачка и при подходящих обстоятельствах переходит из ламинарного в турбулентный также до фронта скачка. При достаточно больших числах Рейнольдса переход течения в пограничном слое — безразлично, в прилегающем или отрывающемся,— из ламинарной формы в турбулентную происходит уже до достижения фронта скачка. По наблюдениям А. Фэйджа и Р. Серджента [33] при турбулентном пограничном слое отрыва не возникает, если отношение давлений p_2/p_1 меньше чем 1,8, что соответствует числам Маха $Ma_\infty < 1,3$. Дальнейшие экспериментальные результаты о взаимодействии

Рис. 13.27. Широкий фотоснимок течения на крыловом профиле. Взаимодействие скачков уплотнения и пограничного слоя. Случай (5): пограничный слой турбулентен; отрыв скачка происходит отрыв. $Ma = 0,90$; $Re = 1,75 \cdot 10^6$. По Липману [38].

пограничного слоя и скачка уплотнения можно найти в работах В. А. Мээра [63], Н. Г. Иоханнесена [49], О. Бэрдсли и В. А. Мээра [3], а также И. Лукашевича и Дж. К. Ройла [61].

Приведем ряд фотографий, наглядно поясняющих влияние скачка уплотнения на пограничный слой. Согласно А. Д. Янгу [81] следует различать случаи:

1. Притекающий к скачку уплотнения пограничный слой ламинарен и остается ламинарным без отрыва и после скачка уплотнения.

2. Притекающий к скачку уплотнения пограничный слой ламинарен, но отрывается еще до достижения скачка уплотнения, а затем вновь прилегает к обтекаемому телу, причем либо остается ламинарным, либо делается турбулентным (рис. 13.24)¹⁾.

3. Притекающий к скачку уплотнения пограничный слой ламинарен, отрывается до прямого и λ -образного скачка и остается оторвавшимся также после скачка (рис. 13.25).

4. Притекающий к скачку уплотнения пограничный слой турбулентен и, несмотря на скачок уплотнения, не отрывается от стенки (рис. 13.26).

5. Притекающий к скачку уплотнения пограничный слой турбулентен и под влиянием скачка уплотнения отрывается от стенки (рис. 13.27).

Некоторые наблюдения над отрывом пограничного слоя при сверхзвуковом течении были произведены в свое время еще А. Буземаном [10]. В сверхзвуковых аэродинамических трубах поток воздуха, с целью обратного преоб-

¹⁾ Оригинальные фотографии, изображенные на рис. 13.24—13.28, мне любезно предоставлены Г. В. Липманом (Калифорнийский технологический институт), за что выражаю ему благодарность.

разования большой скорости в давление, пропускается через обратное сопло Лаваля, следовательно, повышение давления происходит и в суживающейся, и в расширяющейся части сопла. Наблюдения А. Буземана показали, что при любых числах Маха на отрыв потока влияет не непосредственно угол сужения или расширения сопла, а только возрастание давления. При этом,

Рис. 13.28. Отражение косого скачка уплотнения от плоской стенки с пограничным слоем. По Липману, Рощко и Дхавану [59]. а) Ламинарный пограничный слой; б) турбулентный пограничный слой.

конечно, необходимо иметь в виду, что при высоких числах Маха вместе с изменением характера течения одновременно меняются и условия для возрастания давления.

Теоретические исследования проблемы взаимного влияния скачков уплотнения и ламинарного пограничного слоя весьма многочисленны. Упомянем здесь только о работах Э. А. Мюллера [75], Д. Мексина [68], М. Хонды [44], а также Дж. П. Эпплтона и Г. Дж. Дэйвиса [2]. Особо упомянем работу Н. Кёрла [22]. В ней исследовано влияние теплопередачи на повышение давления, возникающее на плоской пластине при скачке уплотнения, причем исследование выполнено для любой температуры стенки и для любого числа Прандтля при помощи приближенного способа расчета пограничного слоя. Уравнения, получившиеся при этом расчете, Н. Кёрл сумел решить совместно

с соотношением между неизвестным градиентом давления и утолщением пограничного слоя, опираясь на экспериментальные результаты Г. Э. Гэдда [37], согласно которым в точке отрыва пограничного слоя увеличение скорости dU/dx не равно нулю, однако сама скорость почти остается постоянной. Выяснилось, что коэффициент давления в точке отрыва не зависит от температуры стенки, однако протяженность области взаимного влияния скачка уплотнения и пограничного слоя пропорциональна температуре стенки T_w , и поэтому повышение давления при отрыве обратно пропорционально T_w .

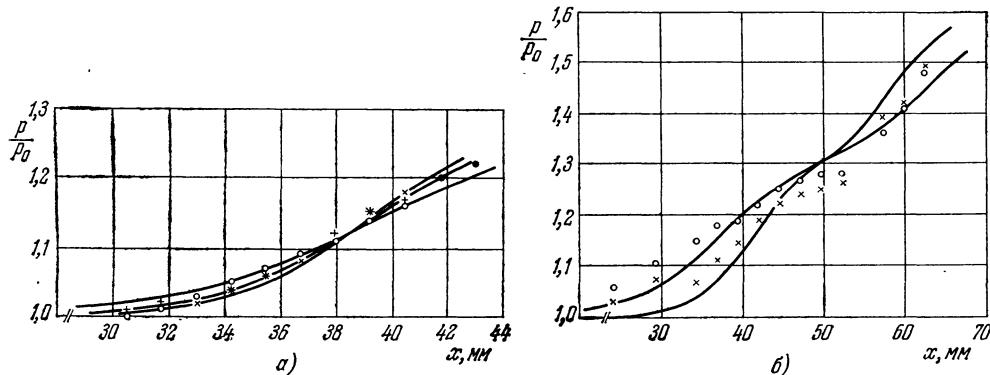


Рис. 13.29. Распределение давления в ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой со сверхзвуковой скоростью плоской пластине в области скачка уплотнения при различных температурах стенки T_w . Сплошные кривые — теория по Н. Кёрлу [22]. а) $\text{Ma}_0 = 3$; $\text{Re} = 4,2 \cdot 10^6$. Без теплопередачи: $*$, \bullet , \times , $T_w = T_0$. С теплопередачей: + нагреваемая стенка, $T_w = 1,25 T_0$; \circ охлаждаемая стенка, $T_w = 0,88 T_0$. б) $\text{Ma}_0 = 2,7$; $\text{Re} = 1,5 \cdot 10^6$; + без теплопередачи, $T_w = T_0$; \circ с теплопередачей, нагреваемая стенка, $T_w = 1,5 T_0$.

В предположении, что давления p и p_0 мало отличаются одно от другого и что имеет место приближенное соотношение

$$c_p \approx \frac{2}{\kappa \text{Ma}_0^2} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) \approx 1 - \frac{U^2(x)}{U_0^2}, \quad (13.103)$$

Н. Кёрл вычислил функцию $F(X)$, определяющую распределение давления на пластине. Значения этой функции даны в таблице 13.2.

Таблица 13.2. Функция $F(X)$, определяющая распределение давления вдоль плоской пластины в окрестности скачка уплотнения [формулы (13.104) и (13.105)]. По Кёрлу [22]

X	$F(X)$	$F'(X)$	X	$F(X)$	$F'(X)$	X	$F(X)$	$F'(X)$
-7,03	0,02	0,0103	-0,55	0,29	0,0832	7,61	0,80	0,0323
-5,12	0,05	0,0237	0	0,338	0,0900	11,75	0,90	0,0174
-4,09	0,08	0,0351	0,70	0,40	0,0885	15,52	0,95	0,0101
-3,14	0,12	0,0479	1,86	0,50	0,0828	23,33	1,00	0,0042
-2,21	0,17	0,0612	3,21	0,60	0,0645	∞	1,03	0
-1,32	0,23	0,0736	5,03	0,70	0,0465			

Функция F определяется выражением

$$F = 0,4096 (\text{Ma}_0^2 - 1)^{1/4} \text{Re}^{1/4} \left(1 - \frac{U^2(x)}{U_0^2} \right), \quad (13.104)$$

а величина X — выражением

$$X = 1,820 (\text{Ma}_0^2 - 1)^{1/4} \text{Re}^{1/4} \left(\frac{T_w}{T_1} \right)_{\text{отр}}^{-1} \left(\frac{x}{x_{\text{отр}}} - 1 \right) \quad (13.105)$$

где индекс «отр» относится к точке отрыва, индекс 0 — к состоянию вверх по течению относительно скачка уплотнения и индекс 1 — к состоянию на внешней границе пограничного слоя.

Для коэффициента давления при отрыве получается выражение

$$c_{p \text{ отр}} = \frac{2}{\chi Ma_0^2} \left(\frac{p_{\text{отр}}}{p_0} - 1 \right) = 0,825 (Ma_0^2 - 1)^{-1/4} Re^{-1/4}, \quad (13.106)$$

где $Re = Ux/v_1$, а p_0 и Ma_0 суть давление и число Маха вверх по течению относительно скачка уплотнения.

На рис. 13.29, а и 13.29, б показано сравнение теоретических кривых с результатами измерения Г. Э. Гэдда и Дж. Л. Эттриджса [38]. И теория и эксперимент показывают, что до точки отрыва на нагреваемой стенке давление выше, чем на теплоизолированной стенке, и притом тем больше, чем выше температура стенки.

Литература к главе XIII

1. Ackeret J., Feldmann F., Rott N., Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen. Bericht № 10 a. d. Inst. f. Aerodynamik ETH Zürich 1946; см. также NACA TM 1113 (1947).
2. Appleton J. P., Davies H. J., A note on the interaction of a normal shock wave with a thermal boundary layer. JASS 25, 722—723 (1958).
3. Bardsley O., Mair W. A., Separation of the boundary layer at a slightly blunt leading edge in supersonic flow. Phil. Mag. 43, 338, 344—352 (1952).
4. Barratt F. W., Shapiro H. A., Neumann E. P., Some experiments on the interaction of shock waves with boundary layers on a flat plate. J. Appl. Mech. 17, 126—131 (1950). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1951, № 1 (5).]
5. Beckwith I. E., Similarity solutions for small cross flows in laminar compressible boundary layers. NASA TR R 107, 1—67 (1961).
6. Boggdonoff S. M., Keppler C. E., Separation of a supersonic turbulent boundary layer. JAS 22, 414—424 (1955).
7. Bouoniol F., Eichelbrenner E. A., Calcul de la couche-limite laminaire compressible. Méthode rapide applicable au cas de la plaque plane. La Recherche Aéron. 28 (1952).
8. Bradfield W. S., Decoorsin D. G., Blumler C. B., The effect of leading-edge bluntness on a laminar supersonic boundary layer. JAS 21, 373—382 и 398 (1954).
9. Busemann A., Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM 15, 23—25 (1935).
10. Busemann A., Das Abreissen der Grenzschicht bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 539—541 (1940).
11. Byrnes L. F., Experiments on aerodynamic cooling. Bericht № 18 a.d. Inst. f. Aerodynamik ETH Zürich 1951.
12. Chapman D. R., Rubesin M. W., Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. JAS 16, 547—565 (1949). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1950, № 4.]
13. Chu S. T., Tifford A. N., The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution. JAS 21, 345—346 (1954).
14. Cohen C. B., Similar solutions of compressible laminar boundary layer equations. JAS 21, 281—282 (1954).
15. Cohen C. B., Reshotko E., Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NACA Rep. 1293 (1956).
16. Cohen C. B., Reshotko E., The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. NACA Rep. 1294 (1956).
17. Coles D., Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. JAS 21, 433—448 (1954).
18. Cope W. F., Hartree D. R., The laminar boundary layer in a compressible flow. Phil. Trans. Roy. Soc. A 241, 1 (1948).
19. Crabtree L. F., The compressible laminar boundary layer on a yawed infinite wing. Aero. Quart. 5, 85—100 (1954).
- 19a. Crocco L., Sulla trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità. L'Aerotecnica 12, 181—197 (1932).
20. Crocco L., Sulla strada limite laminare nei gas lungo una lamina plana. Rend. Mat. Univ. Roma V 2, 138 (1941).
21. Crocco L., Lo strato laminare nei gas. Mon. Sci. Aer. Roma (1946).

- 21a. Crocco L., Cohen C. B., Compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 280—293; см. также NACA Rep. 1294 (1956).
22. Curle N., The effects of heat transfer on laminar boundary layer separation in supersonic flow. Aero. Quart. 12, 309—336 (1961).
23. Curle N., Heat transfer through a compressible laminar boundary layer. Aero. Quart. 13, 255—270 (1962).
24. Curle N., The laminar boundary layer equations. Clarendon Press, Oxford 1962.
25. des Clercs B., Sternberg J., On boundary layer temperature recovery factors. JAS 19, 645—646 (1952).
26. O'Donnell R. M., Experimental investigation at Mach number of 2,41 of average skin friction coefficients and velocity profiles for laminar and turbulent boundary layers and assessment of probe effects. NACA TN 3122 (1954).
27. Dorrance W. H., Viscous hypersonic flow. Theory of reacting hypersonic boundary layers. McGraw Hill, New York 1962. [Имеется русский перевод: Дорренс У. Х., Гиперзвуковые течения вязкого газа, «Мир», Москва 1966.]
28. van Driest E. R., Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco-Method. NACA TN 2597 (1952).
29. van Driest E. R., The problem of aerodynamic heating. Aero. Eng. Review 15, 26—41 (1956).
30. Barber G. R., Recent investigations of temperature recovery and heat transmission on cones and cylinders in axial flow in the NOL Aeroballistics Wind Tunnel. JAS 19, 1—6 (1952).
31. Eichelbrenner E. A., Méthodes de calcul de la couche limite laminaire bidimensionnelle en régime compressible. Office National d'Etudes et de Recherche Aéronautiques (ONERA), Publication № 83 (1956).
32. Emmons H. W., Braineard J. G., Temperature effects in a laminar compressible fluid boundary layer along a flat plate. J. Appl. Mech. 8, A 105 (1941) и J. Appl. Mech. 9, 1 (1942).
33. Fage A., Sargent R., Chock wave and boundary layer phenomena near a flat plate surface. Proc. Roy. Soc. A 190, 1—20 (1947).
34. Flügge-Lotz I., Johnson A. F., Laminar compressible boundary layer along a curved insulated surface. JAS 22, 445—454 (1955).
35. Gadd G. E., Some aspects of laminar boundary layer separation in compressible flow with no heat transfer to the wall. Aero. Quart. 4, 123—150 (1953).
36. Gadd G. E., Holder D. W., Regan J. D., An experimental investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. Proc. Roy. Soc. A 226, 227—253 (1954).
37. Gadd G. E., An experimental investigation of heat transfer effects on boundary layer separation in supersonic flow. J. Fluid Mech. 2, 105—122 (1957).
38. Gadd G. E., Attridge J. L., A note on the effects of heat transfer on the separation of laminar boundary layer. ARC CP 569 (1961).
39. Ginzel I., Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten. ZAMM 29, 6—8 (1949). Ginzel I., Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand. ZAMM 29, 321—337 (1949).
40. Gruschwitz E., Calcul approché de la couche limite laminaire en écoulement compressible sur une paroi non-conductrice de la chaleur. ONERA Publication № 47, Paris 1950.
41. Hantzsche W., Wendt H., Zum Kompressibilitätseinfluss bei der laminaren Grenzschicht der ebenen Platte. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 517—521 (1940).
42. Hantzsche W., Wendt H., Die laminare Grenzschicht an einem mit Überschallgeschwindigkeit angeströmten nicht angestellten Kreiskegel. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 76—77 (1941).
43. Hantzsche W., Wendt H., Die laminare Grenzschicht an der ebenen Platte mit und ohne Wärmeübergang unter Berücksichtigung der Kompressibilität. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 40—50 (1942).
44. Honda M., A theoretical investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. JASS 25, 667—678 (1958).
45. Howarth L., Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation. Proc. Roy. Soc. London A 194, 16—42 (1948).
46. Illingworth C. R., The laminar boundary layer associated with retarded flow of a compressible fluid. ARC RM 2590 (1946).
47. Illingworth C. R., Steady flow in the laminar boundary layer of a gas. Proc. Roy. Soc. A 199, 533 (1949).
48. Inman R. M., A note on the skin-friction coefficient for compressible Couette flow. JAS 26, 182 (1959).

49. J o h a n n e s e n N. H., Experiments on two-dimensional supersonic flow in corners and over concave surfaces. *Phil. Mag.* **43**, 340, 568—580 (1952).
50. v o n K á r m á n T h., T s i e n H. S., Boundary layer in compressible fluids. *JAS* **5**, 227—232 (1938); см. также v o n K á r m á n Th., Bericht über den Volta-Kongress, Rome 1935 и Collect. Works III, 313—325.
51. K a y e J., Survey of friction coefficients, recovery factors and heat transfer coefficients for supersonic flow. *JAS* **21**, 117—129 (1954).
52. K u e r t i G., The laminar boundary layer in compressible flow. В книге *Advances in Applied Mechanics*, т. II, 21—92 (1951). [Имеется русский перевод в сб. «Проблемы механики», вып. 1, ИЛ, Москва 1955.]
53. L e e s L., On the boundary layer equations in hypersonic flow and their approximate solutions. *JAS* **20**, 143—145 (1953).
54. L e e s L., Influence of the leading-edge shock wave on the laminar boundary layer at hypersonic speeds. *JAS* **23**, 594—600 и 612 (1956).
55. L i T. Y., N a g a m a t s u H. T., Similar solutions of compressible boundary layer equations. *JAS* **20**, 653 (1953).
56. L i T. Y., N a g a m a t s u H. T., Similar solutions of compressible boundary layer equation. *JAS* **22**, 607—616 (1955).
57. L i b b y P. A., M o r d u c h o w M., Method for calculation of compressible laminar boundary layer with axial pressure gradient and heat transfer. *NACA TN* 3157 (1954).
58. L i e p m a n n H. W., The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow. *JAS* **13**, 623—637 (1946). [Имеется русский перевод в книге «Газовая динамика» (сборник переводных статей), ИЛ, Москва 1950].
59. L i e p m a n n H. W., R o s h k o A., D h a w a n S., On reflection of shock waves from boundary layers. *NACA Rep.* 1100 (1952).
60. L i l l e y G. M., A simplified theory of skin friction and heat transfer for a compressible laminar boundary layer. *Coll. Aero. Cranfield*, Note № 93 (1959).
61. L u k a s i e w i c z J., R o y l e J. K., Boundary layer and wake investigation in supersonic flow. *ARC RM* 2613 (1952).
62. L u x t o n R. E., Y o u n g A. D., Generalised methods for the calculation of the laminar compressible boundary layer characteristics with heat transfer and nonuniform pressure distribution. *ARC RM* 3233 (1962).
63. M a i r W. A., Experiments on separation of boundary layers on probes in a supersonic airstream. *Phil. Mag.* **43**, 342, 695—716 (1952). [Имеется русский перевод в сб. «Механика» 1953, № 4 (20).]
64. M a n g l e r W., Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *ZAMM* **28**, 97—103 (1948).
65. M a n g l e r W., Ein Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht mit beliebiger Druckverteilung und Wärmeübergang für alle Mach-Zahlen. *ZFW* **4**, 63—66 (1956).
66. M a y d e w R. C., P a p p a s C. C., Experimental investigation of the local and average skin friction in the laminar boundary layer on a flat plate at a Mach-number of 2,4. *NACA TN* 2740 (1952).
67. M e k s y n D., Integration of the boundary layer equations for a plane in a compressible fluid. *Proc. Roy. Soc. London A* **195**, 180 (1948).
68. M e k s y n D., The boundary layer equations of compressible flow separation. *ZAMM* **38**, 372—379 (1958).
69. M o n a g h a n R. J., An approximate solution of the compressible laminar boundary layer on a flat plate. *ARC RM* 2760 (1949).
70. M o n a g h a n R. J., Effects of heat transfer on laminar boundary layer development under pressure gradients in compressible flow. *ARC RM* 3218 (1961).
71. M o o r e L. L., A solution of the laminar boundary layer equations for a compressible fluid with variable properties, including dissociation. *JAS* **19**, 505—518 (1952). [Имеется русский перевод в сб. «Механика» 1953, № 5 (21).]
72. M o o r e F. K., Three-dimensional laminar boundary layer flow. *JAS* **20**, 525—534 (1953).
73. M o r d u c h o w M., Analysis and calculation by integral methods of laminar compressible boundary layer with heat transfer and with and without pressure gradient. *NACA Rep.* 1245 (1955).
74. M o r g r i s D. N., S m i t h J. W., The compressible laminar boundary layer with arbitrary pressure and surface temperature gradients. *JAS* **20**, 805—818 (1953). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1954, № 4 (26).] См. также M o r g r i s D. N., S m i t h J. W., Ein Näherungsverfahren für die Integration der laminaren kompressiblen Grenzschichtgleichungen. *ZAMM* **34**, 193—194 (1954).
75. M ü l l e r E. A., Theoretische Untersuchungen über die Wechselwirkung zwischen einem einfallenden schwachen Verdichtungsstoß und der laminaren Grenzschicht in einer Überschallströmung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 343—363.

76. Pai S. I., Shen S. F., Hypersonic viscous flow over an inclined wedge with heat transfer. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 112—121.
77. Poots G., A solution of the compressible laminar boundary layer equations with heat transfer and adverse pressure gradient. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, 57—84 (1960).
78. Reshotko E., Beckwith I. E., Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl-number. NACA Rep. 1379, 1—49 (1958).
79. Rott N., Crabtree L. F., Simplified laminar boundary layer calculations for bodies of revolution and for yawed wings. JAS 19, 553—565 (1952).
80. Rubesin M. W., Johnson H. A., A critical review of skin friction and heat transfer solutions of the laminar boundary layer of a flat plate. Trans. ASME 71, 383—388 (1949).
81. Scherrera R., Comparison of theoretical and experimental heat transfer characteristics of bodies of revolution of supersonic speeds. NACA Rep. 1055 (1951).
82. Schlichting H., Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht bei Überschallgeschwindigkeit. Abhdlg. der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft 3, 239—264 (1951).
83. Sedney R., Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow. JAS 24, 430—436, 455 (1957).
84. Stewartson K., Correlated compressible and incompressible boundary layers. Proc. Roy. Soc. A 200, 84—100 (1949).
85. Stewartson K., On the interaction between chock waves and boundary layers. Proc. Cambr. Phil. Soc. 47, 545—553 (1951).
- 85a. Stewartson K., The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford 1964.
86. Tani I., On the approximate solution of the laminar boundary layer equations. JAS 21, 487—495 (1954).
87. Tifford A. N., Simplified compressible laminar boundary layer theory. JAS 18, 358—359 (1954).
88. Yamaga J., An approximate solution of the laminar boundary layer on a rotating body of revolution in uniform compressible flow. Proc. 6 Japan Nat. Congr. Appl. Mech. Univ. Kyoto (Япония), 295—298 (1956).
89. Yang K. T., An improved integral procedure for compressible laminar boundary layer analysis. J. Appl. Mech. 28, 9 (1961).
90. Young A. D., Skin friction in the laminar boundary layer of a compressible flow. Aeron. Quart. I, 137 (1949).
91. Young A. D., Глава «Boundary Layers» в книге «Modern Developments in Fluid Mechanics, High Speed Flow» (под ред. L. Howarth'a); т. I, 375—475, Clarendon Press, Oxford 1953. [Имеется русский перевод: Хоуперт Л., Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. I, ИЛ, Москва 1956.]
92. Young A. D., Boundary layers and skin friction in high speed flow. J. Roy. Aero. Soc. 55, 285 (1951).
93. Young G. B. W., Janssen E., The compressible boundary layer. JAS 19, 229—236, 288 (1952).
94. Zaat J. A., A one-parameter method for the calculation of laminar compressible boundary layer flow with a pressure gradient. Nat. Luchtv. Lab. Amsterdam, Rep. F. 141 (1953).
95. Lees L. and Reeves B. L., Supersonic separated and reattaching laminar flows; I General Theory and Application to adiabatic boundary-layer shock-wave interactions. AIAAJ 2, 1907—1920 (1964).

Глава XIV

Управление пограничным слоем при ламинарном течении¹⁾

§ 1. Различные способы управления пограничным слоем

Существуют способы, позволяющие путем искусственных мероприятий так влиять на пограничный слой, чтобы все течение в целом приобретало иной характер, желательный для тех или иных целей. Один из таких способов, заключающийся в отсасывании пограничного слоя внутрь тела, указал Л. Прандтль в 1904 г. в своей первой работе о пограничном слое. Л. Прандтль применил его для проверки своих основных представлений и получил при этом поразительный эффект. На рис. 14.1 изображено обтекание круглого цилиндра при одностороннем отсасывании пограничного слоя внутрь цилиндра через узкую щель в его поверхности. Мы видим, что на той стороне, где производится отсасывание, течение прилегает к поверхности цилиндра на значительно большем протяжении, чем на противоположной стороне, что приводит к значительному уменьшению сопротивления. Кроме того, вследствие нарушения симметрии течения возникает большая попечная сила.

Как показывают расчеты, выполненные в § 6 главы X, ламинарный пограничный слой в состоянии преодолеть без отрыва только очень небольшое возрастание давления вдоль контура тела. При турбулентном течении опасность отрыва сама

Рис. 14.1. Течение около цилиндра при одностороннем отсасывании пограничного слоя. По Прандтлю.

по себе значительно меньше, чем при ламинарном течении, так как турбулентное течение обеспечивает непрерывный перенос импульса из внешнего течения в пограничный слой. Тем не менее и при турбулентном течении всегда желательно так управлять пограничным слоем, чтобы предупредить отрыв. Особый толчок проблема управления пограничным слоем получила в последнее время со стороны авиационной техники, для которой предупреждение отрыва представляет особый интерес, поскольку отрыв уменьшает подъемную силу крыла и вместе с тем увеличивает его лобовое сопротивление [6], [75], [76].

Различные способы управления пограничным слоем проверены экспериментально, а часть из них исследована теоретически. Все предложенные способы управления пограничным слоем основаны: 1) либо на приведении стенки, на которой образуется пограничный слой, в движение в сторону тече-

¹⁾ В переработке этой главы для нового издания участвовал В. Бюст.

ния; 2) либо на сообщении ускорения пограничному слою (сдувание пограничного слоя); 3) либо на отсасывании пограничного слоя; 4) либо на вдувании в пограничный слой другого газа; 5) либо на придании стенке особой формы, позволяющей сохранить ламинарную форму течения в пограничном слое (ламинаризованные профили); 6) либо, наконец, на охлаждении обтекаемой стенки.

Первые четыре способа мы рассмотрим в настоящей главе, а пятый и шестой способы, связанные с вопросом о переходе течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную,— в главе XVII.

Широкому обзору современного состояния всех вопросов, связанных с управлением пограничным слоем, посвящена книга «Boundary layer and flow control», выпущенная под редакцией Г. В. Лахмана [38]. До конца второй мировой войны этими вопросами занимались почти исключительно в Германии. Этому периоду исследований управления пограничным слоем посвящена статья А. Бетца [7], вошедшая в состав книги [38]. После конца второй мировой войны управлением пограничного слоя стали заниматься и в других странах [21], [30], [57], [94].

В этой главе мы рассмотрим в первую очередь управление пограничным слоем при ламинарном течении. Об управлении пограничным слоем при турбулентном течении будет сказано в п. 6 § 2 главы XXII.

1. Приведение стенки в движение в сторону течения. Наиболее простой способ предупреждения отрыва пограничного слоя заключается, очевидно, в том, чтобы вообще устраниТЬ образование пограничного слоя. Так как пограничный слой образуется вследствие разности между скоростью внешнего течения и скоростью стенки, то для того, чтобы он не образовался, достаточно уничтожить эту разность скоростей. Этого можно достичь, если перемещать обтекаемую стенку вместе с течением. Легче всего осуществить такую подвижную стенку для случая круглого цилиндра. Для этого достаточно расположить цилиндр поперек течения и вращать его. На рис. 14.2 изображена картина течения около вращающегося цилиндра. На его верхней стороне, где течение жидкости и вращение стенки направлены в одну и ту же сторону, отрыв пограничного слоя полностью отсутствует. Но и на нижней стороне, где течение жидкости и вращение стенки направлены в противоположные стороны, отрыв почти не возникает. В целом получается картина течения, очень близкая к картине потенциального обтекания цилиндра с циркуляцией. Такое течение дает большую поперечную силу. Это явление известно под названием *эффекта Магнуса*; оно проявляется, в частности, при игре в теннис в тех случаях, когда мяч получает срезывающий удар. Были сделаны попытки использовать поперечную силу, возникающую при вращении цилиндра, для движения судов (*ротор Флеттнера*) [4]. Для тел иной формы осуществить движение обтекаемой стенки технически очень трудно, в связи с чем этот способ управления пограничным слоем почти не нашел практического применения. Тем не менее А. Фавр [20] тщательно исследовал влияние движущейся стенки на модели крыла. Для этой цели часть верхней поверхности крыла была выполнена в виде бесконечной ленты, вращавшейся на двух валиках. Обратное движение ленты происходило внутри крыла. Это устройство оказалось весьма эффективным для предупреждения отрыва пограничного слоя. Безотрывное обтекание удалось сохранить до очень больших углов атаки (свыше $\alpha = 55^\circ$) и при этом достигнуть максимального коэффициента подъем-

Рис. 14.2. Течение около вращающегося круглого цилиндра.

ной силы $c_A = 3,5$. Ламинарный пограничный слой на продольно обтекаемой пластине, задняя часть которой двигалась в сторону течения, рассчитан Э. Труккенбродтом [90].

2. Увеличение скорости пограничного слоя (сдувание пограничного слоя). Другой способ предупреждения отрыва состоит в подводе новой энергии частицам жидкости, замедлившим свое движение в пограничном слое. Этого можно достичь либо выдуванием в пограничный слой изнутри тела струи жидкости (рис. 14.3, а), либо непосредственным использованием энергии основного течения. Для осуществления последней возможности в обтекаемом теле устраивается щель, через которую в замедливший свое движение пограничный слой врывается жидкость из области высокого давления (разрезное крыло, рис. 14.3, б). В обоих случаях в ближайшем к стенке слое скорость частиц жидкости вследствие подвода энергии извне увеличивается, что и устраняет опасность отрыва. При практическом осуществлении выдувания изнутри крыла (рис. 14.3, а) требуется особенно тщательное выполнение формы щели, так как иначе выдуваемая струя может сразу распасться на вихри. В последнее время во Франции [56] на основе обширных опытов для повышения максимальной подъемной силы с большим успехом используется выдувание струи воздуха на задней кромке крыла. Удалось достигнуть значительного повышения подъемной силы также посредством выдувания струи воздуха через щель в щитке в конце крыла (см. п. 6 § 2 главы XXII).

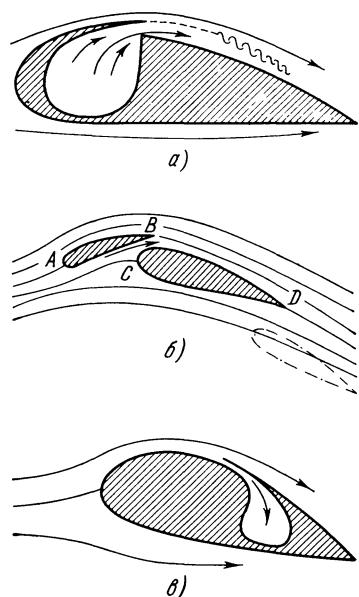


Рис. 14.3. Различные устройства для управления пограничным слоем: а) сдувание пограничного слоя; б) разрезное крыло; в) отсасывание пограничного слоя.

новый пограничный слой, который при благоприятных обстоятельствах достигает задней кромки крыла D без отрыва. Устройство предкрылка позволяет отодвинуть отрыв до значительно больших углов атаки и таким путем достичь значительно больших коэффициентов подъемной силы. На рис. 14.4 изображена поляра¹⁾ для простого крыла, для крыла с предкрылком и для крыла с предкрылком и с закрылком (принцип действия закрылка сходен с принципом действия предкрылка). Выигрыш в подъемной силе получается весьма большим.

На аналогичном принципе основано действие кольца Тоунсенда и кольца NACA, применяемых для улучшения обтекания капота звездообразного мотора и представляющих собой не что иное, как кольцевые предкрылки. Г. Флюгель [22] предложил очень эффективные устройства типа предкрылка, позволяющие осуществлять в каналах резкие повороты течения с очень незначительной потерей энергии.

Обзор новых работ об управлении пограничным слоем посредством его сдувания имеется в работе [11].

1) То есть кривая, ординатами которой являются коэффициенты подъемной силы, а абсциссами — коэффициенты лобового сопротивления.

3. Отсасывание пограничного слоя. Принцип действия отсасывания (рис. 14.3, *в*) состоит в удалении из пограничного слоя частиц жидкости, заторможенных в области возрастания давления, прежде чем они успевают вызвать отрыв течения от стенки. Позади щели, через которую производится отсасывание, образуется новый пограничный слой, опять обладающий способностью к преодолению определенного возрастания давления и при надлежащем устройстве щели иногда доходящий без отрыва до задней кромки тела. Благодаря отсасыванию сильно уменьшается сопротивление давления. Этот способ управления пограничным слоем, испробованный Л. Прандтлем уже в 1904 г. (см. рис. 14.1), впоследствии стал применяться особенно часто для крыльев. Путем отсасывания пограничного слоя удается достичь на подсасывающей стороне профиля при больших углах атаки значительно большего восстановления давления, а поэтому и значительно большей максимальной подъемной силы. Первые широкие исследования влияния отсасывания на повышение максимальной подъемной силы были выполнены О. Шренком [78]; см. также работу [94].

Позднее отсасывание пограничного слоя стало применяться также для уменьшения сопротивления трения. Для этого щель располагается в таком месте обтекаемого контура, чтобы точка перехода ламинарной формы течения в пограничном слое в турбулентную отодвинулась как можно дальше вниз по течению. В результате пограничный слой остается ламинарным на большем протяжении стенки, что и приводит к уменьшению сопротивления трения, так как последнее при ламинарном течении меньше, чем при турбулентном (см. рис. 14.9). Эффект, достигаемый в этом случае — сохранение пограничного слоя ламинарным, — объясняется двумя причинами. Во-первых, вследствие отсасывания пограничный слой делается тоньше, что уменьшает наклонность течения в нем к переходу из ламинарной формы в турбулентную [3]. Во-вторых, в ламинарном пограничном слое профили скоростей имеют при отсасывании несколько иную форму, чем без отсасывания, и притом такую, которая даже при одинаковой толщине слоя также уменьшает наклонность течения к переходу из ламинарной формы в турбулентную (профили скоростей делаются более полными, см. рис. 14.6). К вопросу о переходе течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную, в частности, и при отсасывании, мы вернемся в главе XVII.

4. Вдувание другого газа. Если через пористую стенку вдувать в пограничный слой легкий газ, отличающийся от газа во внешнем течении, то благодаря этому прежде всего уменьшается теплопередача между стенкой и внешним течением [28]. Этим обстоятельством пользуются при высоких сверхзвуковых скоростях для тепловой защиты. При таком вдувании в пограничном слое образуется смесь газов. К обмену импульсов и теплообмену присоединяется еще массообмен вследствие диффузии. При этом в общем случае наряду с диффузией вследствие разностей концентрации необходимо учитывать также термическую диффузию. Аналогичные явления возникают и в тех случаях, когда на обтекаемой стенке испаряется тонкая пленка жидкости или когда расплывается или сублимируется материал самой стенки. Последнее

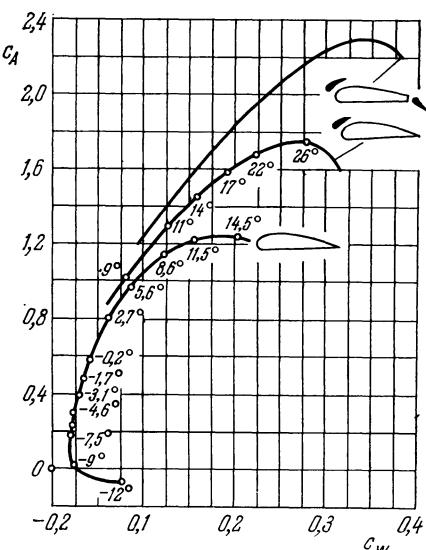


Рис. 14.4. Поляра крыла с предкрылком и с закрылком

явление носит название *абляции*. К нему мы вернемся в § 3 настоящей главы.

5. Сохранение ламинарного течения приданием стенке специальной формы (ламинаризованные профили). С сохранением в пограничном слое ламинарной формы течения посредством отсасывания весьма сходен способ, осуществляемый посредством придания обтекаемой стенке специальной формы. И этот способ предназначен для уменьшения сопротивления трения путем перемещения точки, в которой течение в пограничном слое из ламинарного становится турбулентным, вниз по течению. Установлено, что в пограничном слое переход ламинарного течения в турбулентное сильно зависит от градиента давления внешнего течения. При понижении давления в направлении течения переход ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое происходит при значительно более высоких числах Рейнольдса, чем при возрастании давления в направлении течения. Понижение давления во внешнем течении сильно увеличивает, а повышение давления, наоборот, сильно уменьшает устойчивость ламинарного пограничного слоя. Это обстоятельство используется для уменьшения сопротивления трения крыльев. Для этой цели сечение с наибольшей толщиной профиля отодвигается далеко назад, что обеспечивает на большей части профиля падение давления, а вместе с тем — и сохранение ламинарного пограничного слоя. К этому вопросу мы еще вернемся в главе XVII.

6. Охлаждение стенки. Охлаждение обтекаемой стенки позволяет в определенной области сверхзвуковых чисел Маха полностью стабилизировать пограничный слой (см. рис. 17.29). Кроме того, посредством охлаждения можно уменьшить толщину пограничного слоя, что имеет значение при течении газа с очень небольшой плотностью через коллектор аэродинамической трубы, позволяя избежать нежелательного сильного сужения поперечного сечения струи вследствие образования толстых пограничных слоев.

Из всех способов управления пограничным слоем, наряду с сохранением ламинарной формы течения посредством придания обтекаемой стенке специальной формы, наибольшее практическое значение имеет отсасывание и сдувание. В связи с этим были разработаны различные способы, позволяющие аналитически определять влияние отсасывания и сдувания на поведение ламинарного пограничного слоя. Некоторые из этих способов мы изложим в следующих параграфах.

§ 2. Отсасывание пограничного слоя

1. Теоретические результаты.

1.1. Основные уравнения. Для аналитического исследования проще всего взять случай непрерывного отсасывания вдоль всей обтекаемой стенки, которое можно осуществить, если сделать стенку пористой. Как всегда, введем систему координат с осью x , направленной вдоль обтекаемой стенки, и с осью y , перпендикулярной к стенке (рис. 14.5). Для учета влияния отсасывания предпишем нормальной составляющей $v_0(x)$ скорости на стенке значение, отличное от нуля; пусть $v_0 < 0$, если производится отсасывание жидкости внутрь обтекаемого тела, и $v_0 > 0$, если производится выдувание жидкости изнутри тела в пограничный слой. Предположим, что количество отсасываемой жидкости столь мало, что из пограничного слоя уходят только частицы жидкости, находящиеся в непосредственной близости от стенки. Такое предположение равносильно условию, что отношение скорости отсасывания $v_0(x)$ и скорости U_∞ набегающего потока очень мало, например:

$$\frac{v_0}{U_\infty} = \text{от } 0,0001 \text{ до } 0,01^1).$$

¹⁾ Для того чтобы при течении с отсасыванием или выдуванием на обтекаемой стенке выполнялись допущения, лежащие в основе теории пограничного слоя, скорость отсасы-

Условие прилипания жидкости к стенке, конечно, сохраняется и при наличии отсасывания; сохраняется и предположение, что касательное напряжение τ_0 на стенке определяется формулой

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0.$$

В формулу для количества Q отсасываемой жидкости введем безразмерный коэффициент расхода c_Q , следовательно, представим эту формулу в виде

$$Q = c_Q F U_\infty, \quad (14.1)$$

где F есть обтекаемая площадь. Имея в виду, что при плоском течении

$$F = b l, \quad Q = b l \int_0^l [-v_0(x)] dx,$$

а $F = bl$, из формулы (14.1) мы получим

$$c_Q = \frac{1}{U_\infty l} \int_0^l [-v_0(x)] dx, \quad (14.2)$$

причем в случае равномерно распределенного отсасывания ($v_0 = \text{const}$)

$$c_Q = \frac{-v_0}{U_\infty}. \quad (14.2a)$$

Для плоского несжимаемого течения уравнения пограничного слоя при наличии отсасывания имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

причем граничными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \quad v = v_0(x) \quad \text{при } y = 0, \\ u &= U(x) \quad \text{при } y = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

Интегрирование системы уравнений (14.3) с граничными условиями (14.4) в общем случае, т. е. для обтекания тела любой заданной формы [иными словами, для любого распределения скоростей $U(x)$] и для любого закона отсасывания $v_0(x)$, конечно, не менее трудно, чем интегрирование аналогичной системы при отсутствии отсасывания.

Однако эти уравнения позволяют и без интегрирования обнаружить качественное влияние отсасывания на отрыв пограничного слоя и на переход в нем ламинарной формы течения в турбулентную. В самом деле, из уравнений (14.3) и граничных условий (14.4) следует, что для линии тока, совпадающей со стенкой ($y = 0$), имеет место соотношение

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (14.5)$$

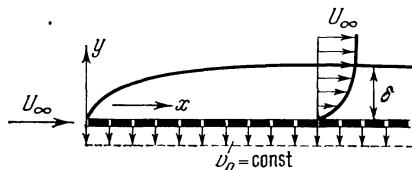


Рис. 14.5. Продольное обтекание плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием.

вания или выдувания v_0 должна быть одного порядка с величиной $U_\infty \text{Re}^{-1/2}$, где $\text{Re} = U_\infty l / v$ есть число Рейнольдса, а l — характерная длина обтекаемого тела. При числе Рейнольдса $\text{Re} = 10^6$ это условие дает для скорости v_0 значение $v_0 \approx 0,001 U_\infty$. При столь малой скорости отсасывания «эффект стока» отсасывания на потенциальное течение можно не учитывать, следовательно, считать, что отсасывание или выдувание на поверхности обтекаемого тела не приводит к изменению потенциального течения около тела.

Из этого соотношения видно, что в области повышения давления ($dp/dx > 0$) при отсасывании, вследствие того что $v_0 < 0$, кривизна профиля скоростей на стенке уменьшается. На основании сказанного в главе VII это означает, что точка отрыва перемещается вниз по течению, а это, как мы увидим в главе XVII, приводит к повышению устойчивости пограничного слоя. Оба эти эффекта отсасывания — предупреждение отрыва и перемещение точки перехода ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное в сторону больших чисел Рейнольдса — подтверждаются экспериментами.

Сводный обзор способов расчета ламинарного пограничного слоя с отсасыванием имеется в работе В. Бюста [98].

1.2. Точные решения. Способ решения уравнений пограничного слоя, изложенный в § 3 главы IX и заключающийся в разложении скорости потенциального течения в степенной ряд по длине дуги x (ряд Блазиуса), принципиально пригоден и в случае пограничного слоя с отсасыванием. Однако, как и в случае без отсасывания, он приводит к очень утомительным вычислениям [25], [68]. Более простые решения получаются для продольно обтекаемой пластины.

Обтекание пластины. Необычайно простое решение получается для продольного обтекания плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием (см. рис. 14.5). В этом случае система уравнений (14.3) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (14.5a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (14.5b)$$

причем граничными условиями будут

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= v_0 = \text{const} < 0 & \text{при } y &= 0, \\ u &= U_\infty & & & \text{при } y &= \infty. \end{aligned}$$

Сразу видно, что система (14.5) обладает решением, для которого распределение скоростей не зависит от текущей длины x [45], [71]. Так как в этом случае $\partial u / \partial x \equiv 0$, то из уравнения неразрывности следует, что

$$v(x, y) = v_0 = \text{const},$$

и поэтому уравнение движения принимает вид

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

решением его будет

$$u(y) = U_\infty \left(1 - e^{-\frac{v_0 y}{v}}\right), \quad v(x, y) = v_0 < 0. \quad (14.6)$$

Отметим, что это простое решение является точным решением полных уравнений Навье — Стокса.

Для толщины вытеснения и толщины потери импульса мы получим следующие значения:

$$\delta_1 = \frac{v}{-v_0}, \quad (14.7)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \frac{v}{-v_0}. \quad (14.8)$$

Касательное напряжение τ_0 на стенке равно

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \rho (-v_0) U_\infty, \quad (14.9)$$

следовательно, оно не зависит от вязкости. Распределение скоростей изображено на рис. 14.6. Для сравнений на том же рисунке показано распределение скоростей без отсасывания по Блазиусу. Мы видим, что профиль скоростей при отсасывании полнее, чем без отсасывания.

Найденное решение применимо для продольного обтекания плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием, только начиная с некоторого расстояния от передней кромки даже в том случае, когда отсасывание начинается непосредственно на передней кромке. В самом деле, здесь, на передней кромке, толщина пограничного слоя равна нулю; вниз по течению она начинает расти и достигает своего значения, определяемого формулой (14.7), только асимптотически. Распределение скоростей достигает своего простого вида (14.6) также только асимптотически — после того, как течением будет пройден вдоль пластины определенный начальный участок. Поэтому решение (14.6) мы будем называть *асимптотическим профилем отсасывания*.

Более подробное исследование течения в начальном участке, т. е. до достижения асимптотического профиля (14.6), выполнено в работе Р. Иглиша [34]. Выяснилось, что асимптотическое состояние достигается после прохождения начального участка, безразмерная длина которого составляет

$$\xi = \left(\frac{-v_0}{U_\infty} \right)^2 \frac{U_\infty x}{v} = 4,$$

или

$$c_Q \sqrt{Re_x} = 2.$$

Профили скоростей в начальном участке не аффинны между собой. Непосредственно вблизи от передней кромки они имеют такую же форму, как при отсутствии отсасывания (профиль Блазиуса, рис. 7.7). Картина линий тока в начальном участке изображена на рис. 14.7, а профили скоростей — на рис. 14.8. Мы уже упомянули, что формула (14.7) дает для толщины вытеснения δ_1 ее асимптотическое значение. В действительности на передней кромке пластины толщина пограничного слоя равна нулю, а затем, по мере удаления от передней кромки, δ_1 постепенно увеличивается, пока не достигает значения (14.7). Как происходит увеличение δ_1 , показывает таблица 14.1 (стр. 360), вычисленная Р. Иглишем [34].

Поскольку отсасывание пограничного слоя позволяет сохранить в нем ламинарную форму течения, особый интерес представляет определение влияния равномерно распределенного отсасывания на уменьшение сопротивления пластины. На рис. 14.9 построены кривые, изображающие зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для пластины с равномерно распределенным отсасыванием. При очень больших числах Рейнольдса $U_\infty l/v$, когда преобладающая часть пластины лежит в области асимптотического

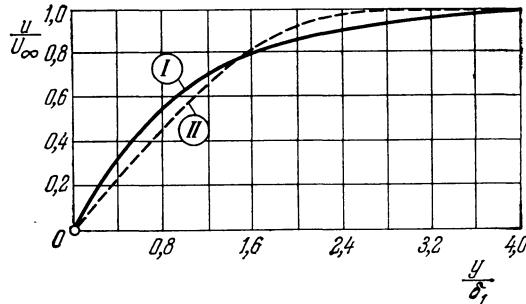


Рис. 14.6. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении; (I) — асимптотический профиль скоростей при равномерно распределенном отсасывании, (II) — профиль скоростей без отсасывания (профиль Блазиуса).

Таблица 14.1. Безразмерная толщина вытеснения δ_1 и формпараметр профиля скоростей δ_1/δ_2 в начальном участке продольно обтекаемой пластины с равномерно распределенным отсасыванием. По Иглишу [34].

δ_1 — толщина вытеснения, δ_2 — толщина потери импульса,

$$\xi = \left(\frac{-v_0}{U_\infty} \right)^2 \frac{U_\infty x}{\nu} = c_Q^2 Re_x$$

ξ	$\frac{-v_0 \delta_1}{\nu}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$	ξ	$\frac{-v_0 \delta_1}{\nu}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$	ξ	$\frac{-v_0 \delta_1}{\nu}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$
0	0	2,59	0,18	0,511	2,31	0,98	0,812	2,14
0,005	0,114	2,53	0,245	0,566	2,28	1,28	0,853	2,11
0,02	0,211	2,47	0,32	0,614	2,25	2,0	0,911	2,07
0,045	0,303	2,43	0,405	0,658	2,23	2,88	0,948	2,05
0,08	0,381	2,39	0,5	0,695	2,21	5,12	0,983	2,01
0,125	0,450	2,35	0,72	0,761	2,17	8,0	0,996	2,00
						∞	1	2

решения, сопротивление определяется простым законом (14.9), и для местного коэффициента сопротивления получается формула

$$c'_{f\infty} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = 2 \frac{-v_0}{U_\infty} = 2c_Q^{-1}. \quad (14.10)$$

При малых числах Рейнольдса коэффициент сопротивления больше, так как на передней части пластины, в области начального участка, пограничный

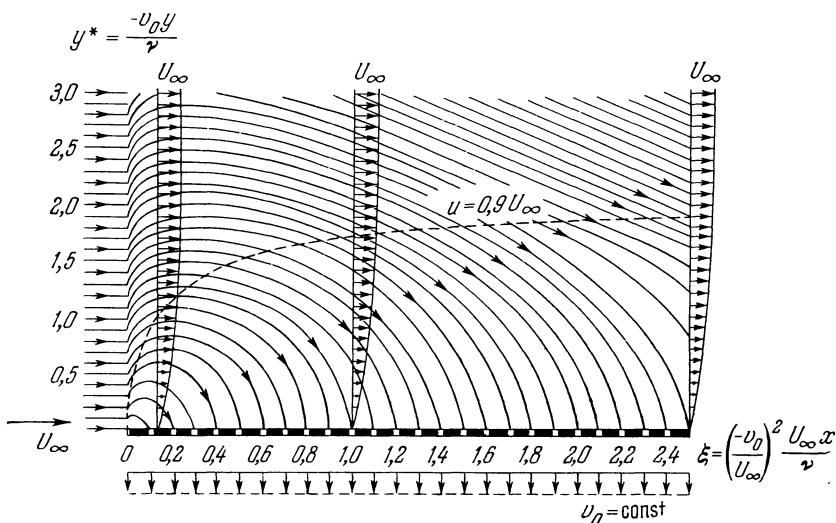


Рис. 14.7. Картина линий тока при продольном обтекании плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием.

слой тоньше, а потому касательное напряжение больше, чем вдали от передней кромки. Для сравнения на рис. 14.9 дана также кривая, изображающая зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для пластины

1) Это сопротивление не зависит от вязкости. Так как $W = \tau_0 b l$ и $Q = (-v_0) b l$, то из формулы (14.9) мы имеем

$$W = \rho Q U_\infty.$$

Это есть так называемое *сопротивление стока*, которое испытывает любое тело, находящееся в потоке невязкой жидкости, движущейся со скоростью U_∞ , и «поглощающее» количество жидкости Q . Формулу сопротивления стока легко вывести также из теоремы импульсов (см., например, [57], т. II, в общем списке литературы).

с турбулентным пограничным слоем без отсасывания. Подробно об этой зависимости будет сказано в § 2 главы XXI. Для того чтобы из построенных на рис. 14.9 кривых выяснить, какое уменьшение сопротивления достигается посредством отсасывания, необходимо предварительно определить минимальное значение того коэффициента расхода, с которым должно производиться

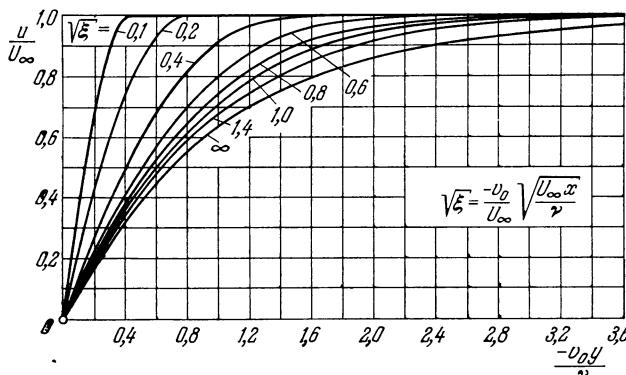


Рис. 14.8. Распределение скоростей на начальном участке плоской пластины при равномерно распределенном отсасывании. По Иглишу [34]. Кривая $\xi = \infty$ соответствует асимптотическому профилю [уравнение (14.6)].

отсасывание, чтобы пограничный слой оставался ламинарным также при больших числах Рейнольдса. Этот вопрос мы сумеем рассмотреть только в главе XVII, посвященной проблеме перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Там, в § 4, мы увидим, что при наиболее выгодном отсасывании уменьшение сопротивления, достигаемое ламинаризацией пограничного слоя,

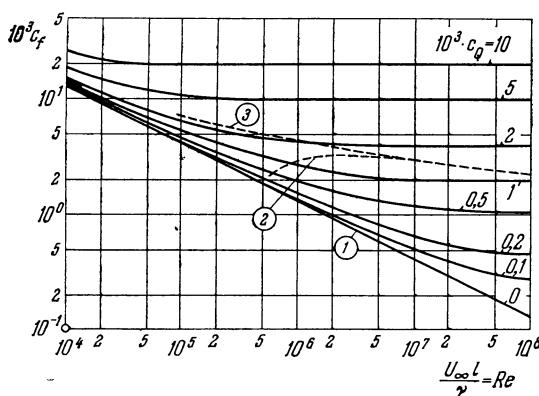


Рис. 14.9. Коэффициент сопротивления c_f плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, при равномерно распределенном отсасывании при различных значениях коэффициента расхода $c_Q = (-v_0)/U_\infty$. Кривые (1), (2) и (3) — без отсасывания: (1) — для ламинарного течения, (2) — для полностью турбулентного течения.

весьма значительно (рис. 17.20), причем для этого требуется отсасывание совсем небольшого количества жидкости: коэффициент расхода c_Q должен быть порядка 10^{-4} .

Решение уравнений сжимаемого пограничного слоя на пластине дали Г. Г. Лью и Дж. Б. Вануччи [41], а для любых тел цилиндрической формы — В. Бюст [47].

Экспериментальная проверка изложенных теоретических результатов для продольно обтекаемой плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием была предпринята Дж. М. Кэем [36]. Выяснилось, что допущение о возникновении равномерно распределенного отсасывания уже на передней кромке, сделанное Р. Иглишем в своих теоретических расчетах, не вполне удовлетворяется. Напротив, некоторый участок пластины, начиная от ее передней кромки, остается без отсасывания. На рис. 14.10 показаны для сравнения теоретические и измеренные значения толщины вытеснения и толщины потери импульса. Асимптотические значения (14.7) и (14.8) хорошо подтверждаются измерениями.

На рис. 14.11 показаны теоретические и измеренные М. Р. Хэдом [29] распределения скоростей при различных значениях ξ . И здесь совпадение теории и измерений вполне удовлетворительное. Измерения П. А. Либби, Л. Кауфмана и Р. П. Харрингтона [42] подтверждают сильное стабилизующее действие отсасывания (повышение критического числа Рейнольдса), о чём подробно будет сказано в § 3 главы XVII. Наконец, эксперименты М. Джонса и М. Р. Хэда [35], а также А. Респета [62] показали, что ламинаризация пограничного слоя действительно значительно уменьшает сопротивление.

На рис. 14.10 показаны для сравнения теоретические и измеренные значения толщины вытеснения и толщины потери импульса. Асимптотические значения (14.7) и (14.8) хорошо подтверждаются измерениями. На рис. 14.11 показаны теоретические и измеренные М. Р. Хэдом [29] распределения скоростей при различных значениях ξ . И здесь совпадение теории и измерений вполне удовлетворительное. Измерения П. А. Либби, Л. Кауфмана и Р. П. Харрингтона [42] подтверждают сильное стабилизующее действие отсасывания (повышение критического числа Рейнольдса), о чём подробно будет сказано в § 3 главы XVII. Наконец, эксперименты М. Джонса и М. Р. Хэда [35], а также А. Респета [62] показали, что ламинаризация пограничного слоя действительно значительно уменьшает сопротивление.

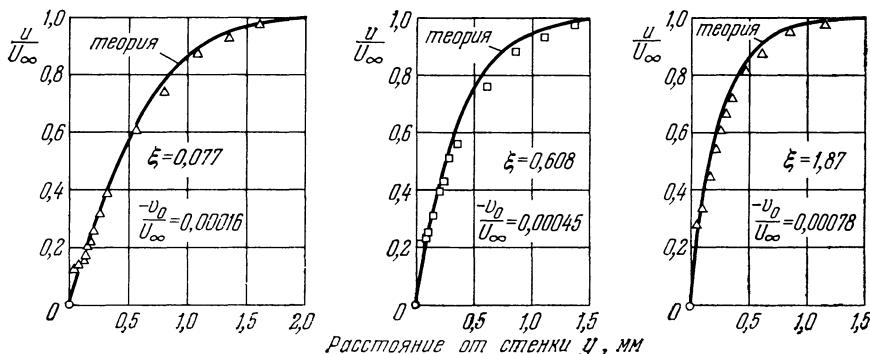


Рис. 14.10. Толщина вытеснения δ_1 и толщина потери импульса δ_2 ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине при непрерывно распределенном отсасывании. По измерениям Дж. М. Кэя [36]. Теоретические кривые — по Р. Иглишу [34] (см. таблицу 14.1). (a) — точка, в которой начинается отсасывание.

Рис. 14.11. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на крыловом профиле с отсасыванием через верхнюю пористую поверхность при различных значениях ξ . Сравнение измерений М. Р. Хэда [29] с теорией Р. Иглиша [34].

Пограничный слой с градиентом давления. Другие точные решения уравнений пограничного слоя (14.3) и (14.4) известны только для таких течений, которые приводят к подобным профилям скоростей. Подобные решения, рассмотренные в главе VIII, могут быть обобщены также на пограничные слои с отсасыванием и с выдуванием. Если для внешнего течения

$$U(x) = u_1 x^m$$

скорость отсасывания $v_0(x)$ пропорциональна $x^{(m-1)/2}$, то тогда из уравнений пограничного слоя опять получается дифференциальное уравнение (9.8) Фокнера и Скэн для функции тока $f(\eta)$, а именно:

$$f'' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0,$$

где η имеет значение (9.5). Это сразу видно из соотношений (9.6). На стенке, где $\eta = 0$, безразмерная функция тока $f(\eta)$ теперь не равна нулю; при отсасывании она положительна, а при выдувании — отрицательна.

Случай, когда $m = 0$ (плоская пластина), а скорость равна

$$v_0(x) = -\frac{C}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{x}} \quad \begin{cases} C > 0 & \text{отсасывание}, \\ C < 0 & \text{выдувание}, \end{cases} \quad (14.11)$$

рассмотрен Г. Шлихтингом и К. Буссманом [72], [73]. На рис. 14.12 изображены распределения скоростей при различных коэффициентах расхода. Примечательно, что при

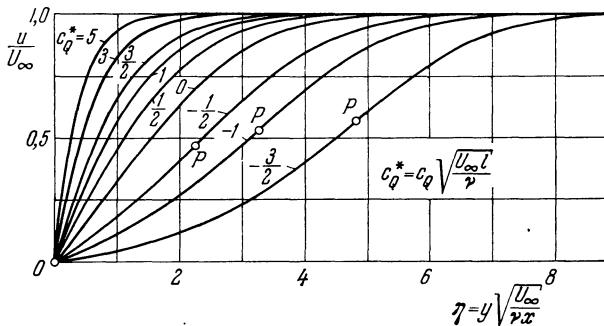


Рис. 14.12. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении, при отсасывании и выдувании по закону $v_0(x) \approx 1/\sqrt{x}$ [уравнение (14.11)]. По Шлихтингу — Буссману [72]. $C = c_Q^* = c_Q \sqrt{U_\infty l / \nu}$ — приведенный коэффициент расхода отсасывания ($c_Q^* > 0$ — отсасывание, $c_Q^* < 0$ — выдувание); P — точка перегиба.

выдувании все профили скоростей имеют точку перегиба, в которой $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$. Это обстоятельство имеет важное значение для перехода течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную (глава XVI). При течении в окрестности критической точки ($m = 1$) получается в точности равномерно распределенное отсасывание ($v_0 = \text{const}$). Профили скоростей для этого случая также даны в работах Г. Шлихтинга и К. Буссмана.

Подробные таблицы для пограничного слоя на пластине с отсасыванием ($m = 0$) для большой области значений параметра C опубликованы Г. В. Эммонсом и Д. К. Лейем [18]. Решения в широкой области значений параметра C вычислены также для $m \neq 0$ [49]. На рис. 14.13 показана связь между касательным напряжением на стенке, пропорциональным $f''(0)$, скоростью отсасывания, пропорциональной $f(0)$, и параметром β внешнего течения. Положение точки отрыва определяется значением $\tau_0 = 0$, т. е. условием $f''(0) = 0$. Из рис. 14.13 видно, что даже при очень замедленном течении (например, при $\beta = -1$, т. е. при $m = -1/3$) посредством сильного отсасывания можно предупредить отрыв течения. Для очень большого количества выдуваемой жидкости численный расчет затруднителен, так как у профилей скоростей получается перелом. На это указал уже И. Преч [61], рассматривая асимптотическое решение. Асимптотическое поведение подобных решений для больших скоростей отсасывания исследовано Э. Дж. Ватсоном [92].

Рассмотренные выше решения, получающиеся при внешнем течении $U(x) = u_0 x^m$, являются основой для получения других точных решений уравнений ламинарного пограничного слоя с отсасыванием и выдуванием. Упомянем в связи с этим следующие работы.

а) К. Д. П. Синхар [79] рассмотрел бесконечно длинный цилиндр с отсасыванием, движущийся со скольжением, причем распределение скоростей в нормальном сечении

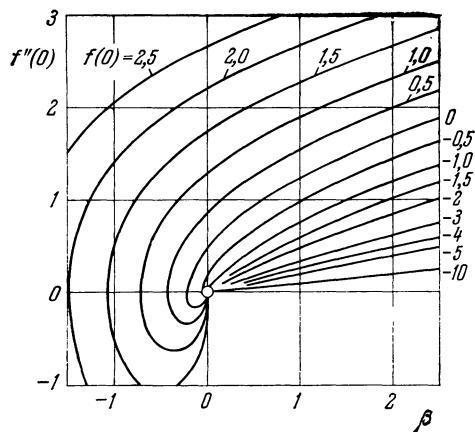


Рис. 14.13. Связь между касательным напряжением τ_0 на стенке и скоростью отсасывания для ламинарных пограничных слоев, получающихся при внешнем течении $U(x) = u_0 x^m$. По К. Никкелью [49]. Положение точки отрыва определяется условием $\tau_0 = 0$, т. е. условием $f''(0) = 0$. Имеют место соотношения

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{v}{U_x}} f''(0),$$

$$\frac{v_0}{U} = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{v}{U_x}} f(0).$$

$f(0) > 0$ — отсасывание, $f(0) < 0$ — выдувание.
 $\beta = 2m/(m+1)$ [соотношение (9.7)].

цилиндра было принято пропорциональным x^m . Это исследование имеет определенное значение для управления пограничным слоем на стреловидном крыле.

б) Если выдуваемая среда имеет иную температуру, чем внешнее течение, то в пограничном слое возникают также температурные профили, расчету которых посвящены работы [48], [101]. Вопрос о распределении температуры в пограничном слое важен прежде всего для проблемы охлаждения. Выяснилось, что охлаждение посредством выдувания охлаждающего средства через стенку (охлаждение посредством испарения) во много раз эффективнее охлаждения стенки изнутри. См. в связи с этим работы Б. Броуна [9], [10], П. Л. Доноуфа и Дж. Н. Б. Ливингуда [16], а также В. Бюста [99].

в) Проблема охлаждения имеет особенно важное значение при больших скоростях течения. Г. М. Лоу [44] получил решения для сжимаемого течения вдоль плоской пластины при постоянной температуре стенки. См. в связи с этим также работы [39], [100].

Сжимаемые пограничные слои с отсасыванием. Как показали А. Д. Янг [102] и Г. Г. Лью [39], для сжимаемого обтекания пластины с равномерно распределенным отсасыванием также существует асимптотическое решение. Уравнение неразрывности (13.5) и уравнение движения (13.6) в данном случае принимают вид

$$\frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \quad (14.12)$$

и

$$\rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right). \quad (14.13)$$

Из уравнения (14.12) следует

$$\rho v = \rho_0 v_0 = \text{const.}$$

Подстановка этого выражения ρv в уравнение (14.13) дает

$$\frac{du}{u - U_\infty} = \frac{\nu_0 \rho_0}{\mu} dy. \quad (14.14)$$

Приняв закон вязкости $\mu/\mu_\infty = CT/T_\infty$, мы получим $\rho\mu = \rho_0\mu_0$ и после интегрирования (14.14) найдем

$$u(y) = U_\infty \left\{ 1 - \exp \frac{\nu_0 \rho_\infty y_1}{\mu_0} \right\}, \quad (14.15)$$

где

$$y_1 = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy. \quad (14.16)$$

Эти соотношения пригодны для любых чисел Прандтля. Из соотношения (14.15) мы получим касательное напряжение на стенке

$$\tau_0 = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \rho_0 (-v_0) U_\infty, \quad (14.17)$$

что совпадает с формулой (14.9). Для числа Прандтля $Pr = 1$ и для теплоизолированной стенки дальнейшее преобразование соотношений (14.15) и (14.16) приводит к распределению скоростей в следующем явном виде:

$$\frac{\nu_0 \rho_\infty y}{\mu_0} = \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 + \frac{u}{U_\infty} \right\} - \ln \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right). \quad (14.18)$$

Для несжимаемого течения $T_\infty = T_e$, и соотношение (14.18) переходит в соотношение (14.6).

1.3. Приближенные решения. Для расчета пограничного слоя с отсасыванием в общем случае, т. е. на теле любой формы и при любом законе отсасывания, следует воспользоваться одним из приближенных способов, рассмотренных в главе X и основанных на уравнении импульсов теории пограничного слоя. Уравнение импульсов для пограничного слоя с отсасыванием выводится совершенно так же, как в § 5 главы VIII; необходимо только учесть, что теперь нормальная составляющая скорости на стенке не равна

нулю. В связи с этим для поперечной скорости на расстоянии $y = h$ от стенки мы получим выражение

$$v_h = v_0 - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Дальнейшие вычисления производятся так же, как и в § 5 главы VIII, и приводят к уравнению импульсов

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} - v_0 U = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (14.19)$$

и к уравнению энергии (К. Вигхардт [93])

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) - v_0 U^2 = 2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad (14.20)$$

которые отличаются от уравнений (8.35) и (8.38) только присутствием членов $-v_0 U$ и $-v_0 U^2$, учитывающих изменение импульса и изменение энергии вследствие отсасывания на стенке.

Уравнение (14.19) было использовано Л. Прандтлем [59] для приближенного определения такой минимальной скорости отсасывания, которая исключает возможность отрыва. Предположим, что профиль скоростей вдоль всей обтекаемой стенки имеет такую же форму, какую он имеет в точке отрыва, в которой

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = 0.$$

Согласно К. Польгаузену, в точке отрыва $\Lambda = -12$, поэтому, в соответствии с уравнением (10.22), распределением скоростей будет

$$u = U \left\{ 6 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - 8 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right\}.$$

Для толщины вытеснения и толщины потери импульса формулы (10.24) дают значения

$$\delta_1 = \frac{2}{5} \delta, \quad \delta_2 = \frac{4}{35} \delta,$$

следовательно,

$$\delta_1 + 2\delta_2 = \frac{22}{35} \delta.$$

Подставив это выражение в уравнение (14.19) и положив $d\delta_2/dx = 0$ (так как согласно предположению толщина пограничного слоя постоянна), мы получим

$$v_0 = \frac{22}{35} \delta \frac{dU}{dx}. \quad (14.20a)$$

Далее, на основании уравнения (14.5) при $y = 0$ мы имеем

$$v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = U \frac{dU}{dx} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0. \quad (14.21)$$

В рассматриваемом случае $(\partial u / \partial y)_0 = 0$ и $(\partial^2 u / \partial y^2)_0 = 12U/\delta^2$. Внеся эти значения в уравнение (14.21), мы найдем толщину пограничного слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{12v}{-\frac{dU}{dx}}}, \quad (14.22)$$

а затем из формулы (14.20а) с учетом равенства (14.22) — скорость отсасывания

$$v_0 = -2,18 \sqrt{-\nu \frac{dU}{dx}}. \quad (14.23)$$

Это и есть та скорость отсасывания, которая достаточна, чтобы всюду предупредить отрыв. Возьмем в качестве примера течение около круглого цилиндра радиуса R . Для такого течения в задней критической точке

$$\frac{dU}{dx} = -2 \frac{U_\infty}{R},$$

и, следовательно, отсасывание для предупреждения отрыва должно производиться в соответствии с формулой (14.23) с коэффициентом расхода

$$c_Q \sqrt{\frac{U_\infty R}{\nu}} = 2,18 \sqrt{2} = 3,08.$$

Приближенный способ расчета пограничного слоя на теле любой формы и при любом законе отсасывания $v_0(x)$ впервые выполнил, исходя из уравнения импульсов (14.19), Г. Шлихтинг [70], [74]. В деталях этот способ сведен со способом Кармана — Польгаузена (глава X). Затем Т. П. Торда [87], [88], улучшил этот способ. Л. Триллинг [89] и Б. Твэйтс [33], [86], а также Ф. Ринглеб [67] разработали способы, пригодные для любого распределения давления и для любого распределения отсасывания. К. Вигхардт [93] распространил способы расчета плоского пограничного слоя с отсасыванием на осесимметричную задачу, а Дж. Т. Стюарт [82] — на врачающийся диск. Приближенный способ, пригодный как для плоского, так и для осесимметричного случая и отличающийся от других способов особой простотой, предложил Э. Труккенбродт [91]. При этом способе весь расчет пограничного слоя сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. В частном случае непроницаемой стени способ Э. Труккенброда переходит в способ А. Вальца, рассмотренный в § 2 главы X и приводящий сразу к квадратуре. Выполненный по способу Жуковского с равномерно распределенным отсасыванием вдоль всей поверхности изображен на рис. 14.14.

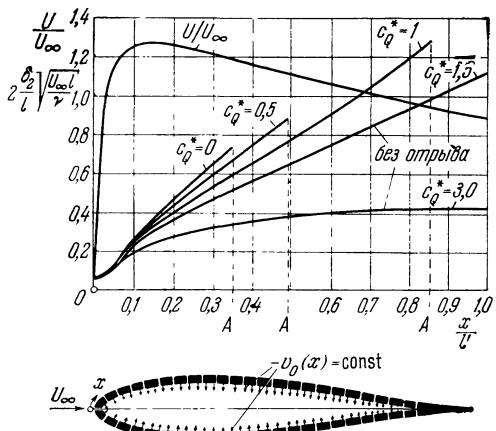


Рис. 14.14. Ламинарный пограничный слой на симметричном профиле Жуковского при непрерывно распределенном отсасывании; $v_0(x) = \text{const}$; угол атаки $\alpha = 0$. Расчет выполнен по Э. Труккенбродту [91]. δ_2 — толщина потери импульса; ℓ' — половина периметра профиля; $c_Q^* = c_Q \sqrt{V U_\infty / \nu}$ — приведенный коэффициент расхода отсасывания; U/U_∞ — теоретическое потенциальное распределение скоростей; A — точка отрыва. С увеличением коэффициента расхода точка отрыва перемещается назад (к задней кромке профиля). При $c_Q^* > 1,12$ отрыв не происходит.

Э. Труккенбродта расчет для профиля Жуковского с равномерно распределенным отсасыванием вдоль всей поверхности изображен на рис. 14.14. Мы видим, что с увеличением количества отсасываемой жидкости точка отрыва перемещается назад (к концу профиля) и что, начиная с определенного количества отсасываемой жидкости, вообще не получается никакого отрыва.

Приближенный способ расчета ламинарных и турбулентных пограничных слоев с отсасыванием, хорошо приспособленный для выполнения на счетных машинах, предложил Р. Эпплер [19]. Аналогичные приближенные способы для сжимаемого ламинарного слоя с отсасыванием и выдуванием развиты

в работах [43], [48], [101], причем с особым учетом теплоизменения в связи с проблемой охлаждения. Для турбулентного пограничного слоя с отсасыванием и выдуванием, по крайней мере для случая плоской пластины, также предложены приближенные способы [12], [17], [69], которые все основаны на гипотезе Прандтля о пути перемешивания (см. § 2 главы XIX). Приближенный способ расчета сжимаемого ламинарного пограничного слоя при произвольном внешнем течении с произвольным распределением отсасывания указан В. Пехау [52] для частного случая теплоизолированной стенки и числа Прандтля $\Pr = 1$.

2. Экспериментальные результаты. Уже в 1904 г. Л. Прандтль опубликовал несколько фотографий, подтверждавших возможность сохранения безотрывного течения около плохо обтекаемых тел посредством отсасывания пограничного слоя. Такое безотрывное течение удалось получить даже около круглого цилиндра, между тем как в обычных условиях на задней половине цилиндра всегда образуются сильные вихри. На рис. 2.12 и 2.13 показано применение отсасывания при течении в канале. В сильно расширяющемся канале (рис. 2.11) течение при отсутствии отсасывания отрывается от обеих стенок. При отсасывании же через две щели (по одной с каждой стороны канала) течение полностью прилегает к обеим стенкам (рис. 2.13).

При применении отсасывания на крыловом профиле следует различать две задачи:

1. Повышение максимальной подъемной силы путем предупреждения отрыва.

2. Сохранение пограничного слоя ламинарным с целью уменьшения сопротивления.

Коротко остановимся на этих двух задачах.

2.1. Повышение подъемной силы. Повышение максимальной подъемной силы крыла посредством отсасывания и выдувания достигается как при ламинарном, так и при турбулентном пограничном слое. О некоторых новых исследованиях, относящихся к этому вопросу, будет сказано в п. 6 § 2 главы XXII при рассмотрении турбулентных пограничных слоев. Здесь сначала мы остановимся на некоторых более старых экспериментальных результатах, полученных главным образом для ламинарных пограничных слоев. В конце двадцатых и начале тридцатых годов текущего столетия в Гётtingенской аэродинамической лаборатории под руководством О. Шренка был собран обширный экспериментальный материал о повышении коэффициента подъемной силы крыла посредством отсасывания. Выяснилось, что при отсасывании потенциальное течение вокруг крыла сохранялось до больших углов атаки, чем при отсутствии отсасывания. Полученные результаты О. Шренк опубликовал в работе [77]. На основе этих исследований в конце тридцатых годов в Гётtingенской аэродинамической лаборатории были построены два экспериментальных самолета, на крыльях которых производилось отсасывание. Подробное описание обоих этих самолетов было дано в статье И. Штюпера [88]. На рис. 14.15 показаны фотографии обтекания крыла одного из этих самолетов. Расположение шерстинок, прикрепленных одним концом к крылу, ясно показывает эффект отсасывания, произошедшего через щель между крылом и щитком позади крыла. В то время как без отсасывания (рис. 14.15, а) течение полностью отрывается от отогнутого щитка, при отсасывании (рис. 14.15, б) течение, наоборот, полностью прилегает к отогнутому щитку. Некоторые подробности течения в пограничном слое с отсасыванием исследовал А. Гербер [23]. В частности, он рассмотрел наиболее выгодную форму щели, а также распределение скоростей и давления вблизи такой щели.

Позднее тщательные экспериментальные исследования отсасывания на тонких крыльях производились в Великобритании [50], [51], а затем в США [81]. У тонких крыльев щель для отсасывания должна располагаться на под-

сасывающей стороне крыла вблизи его передней кромки, так как здесь при больших углах атаки образуется сильное разрежение, приводящее к отрыву. Весьма важен вопрос о том, выгоднее ли отсасывание через щель или через пористую стенку (непрерывное отсасывание). На рис. 14.16 показано сравнение результатов отсасывания через щель и непрерывного отсасывания для

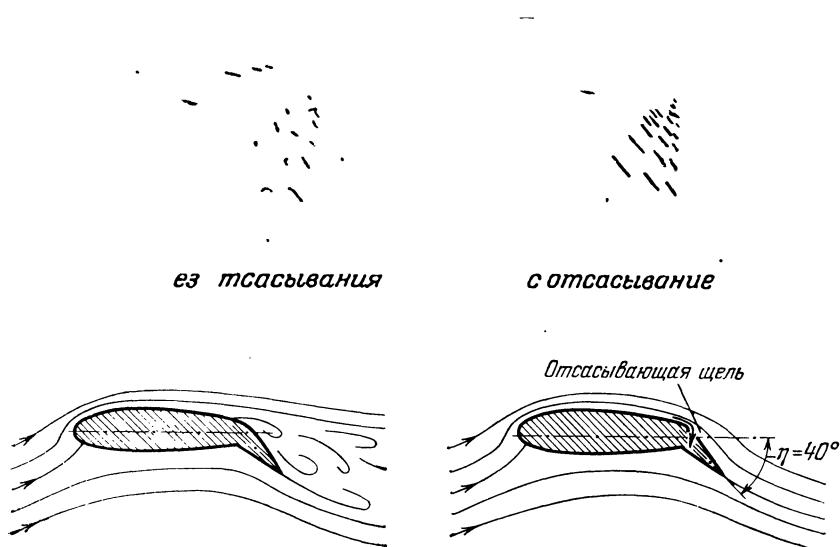


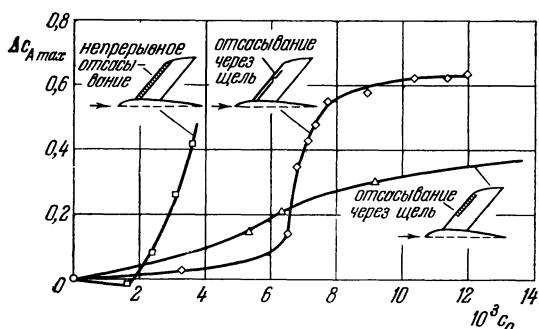
Рис. 14.15. Течение на крыле гёттингенского самолета, на котором производилось отсасывание пограничного слоя через щель между задней кромкой крыла и щитком: а) без отсасывания, течение полностью оторвалось от щитка. б) с отсасыванием, течение прилегает к щитку.

стреловидного крыла по измерениям Э. Д. Поплтона [58] (см. в связи с этим также работу [32]). Ясно видно, что при непрерывном отсасывании одно и то же увеличение подъемной силы

может быть достигнуто значитель но меньшим количеством отсасываемой жидкости, чем при отсасывании через щель. О наиболее выгодном расположении зоны непрерывного отсасывания вблизи передней кромки крыла дает представление рис. 14.17. Измерения, выполненные на симметричном профиле, максимальная толщина которого равна 8% его хорды, показывают, что непрерывное отсасывание эффективнее всего в том случае, когда оно производится только на подсасывающей стороне профиля на участке, простирающемся от носика профиля к его концу на расстояние около 15% длины хорды профиля. Минимальное количество отсасываемой жидкости, необходимое для предупреждения отрыва, зависит не только от положения и размеров пористого участка поверхности, но также от числа Рейнольдса, что очень существенно для переноса результатов испытаний на моде-

Рис. 14.16. Повышение максимальной подъемной силы стреловидного крыла посредством отсасывания. Сравнение результатов, достигаемых непрерывным отсасыванием и отсасыванием через щель. По измерениям Э. Д. Поплтона [58]. Число Рейнольдса $Re = 1,3 \cdot 10^6$. При отсасывании через щель относительная ширина щели составляла $s/l = 0,004$.

щемся от носика профиля к его концу на расстояние около 15% длины хорды профиля. Минимальное количество отсасываемой жидкости, необходимое для предупреждения отрыва, зависит не только от положения и размеров пористого участка поверхности, но также от числа Рейнольдса, что очень существенно для переноса результатов испытаний на моде-



лях на натурные объекты. На рис. 14.18 изображены некоторые результаты измерений Н. Грегори и В. С. Уокера [26] зависимости минимально необходимого количества отсасываемой жидкости от числа Рейнольдса. И эти измерения производились на тонком симметричном профиле, причем для фиксированного угла атаки $\alpha = 14^\circ$. Для сравнения на рисунке проведены три кривые $c_Q \sqrt{Re} = \text{const}$, получающиеся из теории для чисто ламинарного течения.

2.2. Уменьшение сопротивления. Возможность сохранять пограничный слой посредством отсасывания ламинарным и тем самым уменьшать профильное сопротивление впервые была доказана экспериментально Г. Хольштейном [31], а вслед за ним Ж. Аккеретом, М. Расом и В. Пфенниггером [3]. Позднее уменьшение сопротивления благодаря сохранению пограничного слоя ламинарным посредством отсасывания было тщательно экспериментально исследовано В. Пфенниггером [53]. На рис. 14.19 изображены некоторые его результаты, полученные для тонкого крылового профиля, имевшего большое число отверстий для отсасывания. На рис. 14.19, а показана зависимость оптимального коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса. Мы видим, что уменьшение сопротивления получается значительным даже в том случае, если в измеренные значения коэффициента сопротивления включить мощность, затраченную на отсасывание. Из рис. 14.19, а видно также, что при умеренных коэффициентах подъемной силы почти достигается коэффициент сопротивления продольно обтекаемой плоской пластины даже при больших числах Рейнольдса. Далее, из рис. 14.19, б видно, что малые коэффициенты сопротивления получаются для весьма широкой области высоких значений коэффициента подъемной силы c_A .

Опыты В. Пфеннигера показали также, что успех уменьшения сопротивления посредством отсасывания в значительной мере зависит от конструктивного оформления щелей для отсасывания. При неудачном устройстве щелей они могут привести к противоположному эффекту: к сильному возмущению течения и к его переходу из ламинарной формы в турбулентную. См. в связи с этим также работу Н. Грегори [27]. В американской работе [8] ламинаризация пограничного слоя посредством непрерывного отсасывания через пористую поверхность была

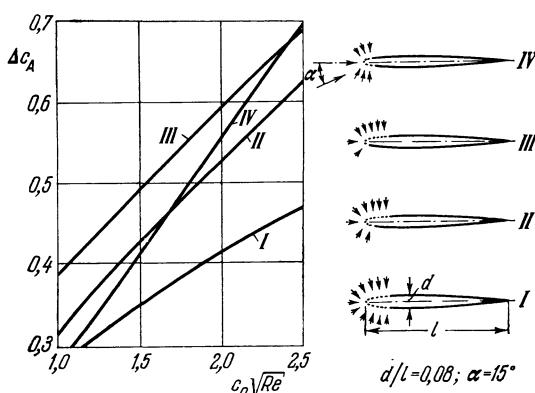


Рис. 14.17. Влияние положения пористой площадки, через которую производится отсасывание, на повышение коэффициента подъемной силы для профиля с 8%-ной толщиной при угле атаки $\alpha = 15^\circ$.

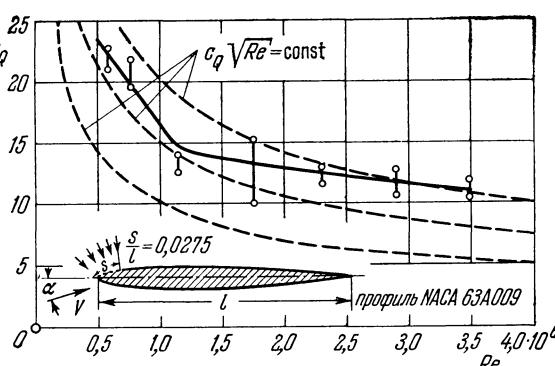


Рис. 14.18. Зависимость минимального коэффициента расхода отсасывания на тонком профиле, необходимого для предупреждения отрыва пограничного слоя, от числа Рейнольдса при угле атаки $\alpha = 14^\circ$. По Грегори и Уокеру [26].

была

24 г. Шлихтинг

очень тщательно исследована до значительно более высоких чисел Рейнольдса порядка $Re = 20 \cdot 10^6$. И это исследование показало, что ламинаризация пограничного слоя значительно уменьшает сопротивление даже с учетом той мощности, которая расходуется на отсасывание.

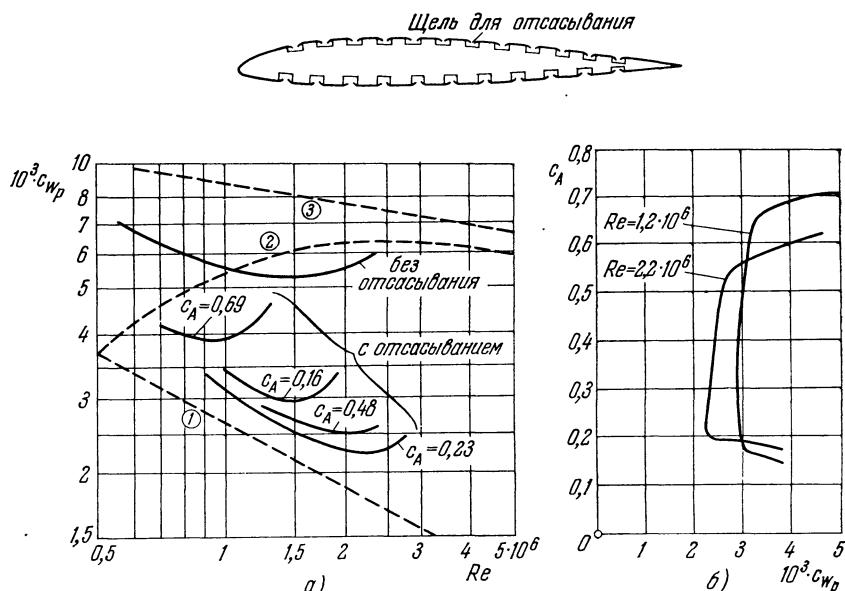


Рис. 14.19. Уменьшение лобового сопротивления крылового профиля, достигаемое ламинаризацией пограничного слоя посредством отсасывания через большое число щелей. По В. Пфеннигеру [53]. Мощность, затрачиваемая на отсасывание, включена в коэффициент сопротивления. а) Зависимость оптимального коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса Re ; кривые (1), (2), (3) — без отсасывания; кривая (1) — плоская пластина, ламинарное течение; кривая (2) — плоская пластина, переход ламинарной формы течения в турбулентную; кривая (3) — плоская пластина, полностью турбулентное течение. б) Поляры сопротивления при двух различных числах Рейнольдса. Самые малые коэффициенты сопротивления имеют место в весьма широкой области коэффициентов подъемной силы C_A .

При расчете крыльев, на которых пограничный слой должен оставаться ламинарным (безразлично, благодаря ли отсасыванию или вследствие придачи крыловому профилю специальной формы), весьма важную роль играет точное знание теоретического потенциального распределения скоростей вдоль профиля. В том и другом случае необходимо, чтобы падение давления происходило на возможно большей части контура профиля. Обширные исследования, связанные с этим вопросом, выполнены С. Голдстейном и его сотрудниками [24]. Для сохранения пограничного слоя ламинарным по возможности до задней кромки были предложены профили, вдоль которых давление понижается (а скорость течения возрастает) вплоть до некоторого небольшого расстояния от задней кромки, где, наконец, происходит скачкообразное увеличение давления (рис. 14.20). Если, как это предложил Гриффит [66], расположить щель для отсасывания в этом месте, то можно сохранить пограничный слой ламинарным вплоть до щели даже для очень толстых крыльев и, кроме того, предупредить отрыв позади щели. Б. Регеншайт [63], [64] и Б. Твэйтс [84] предложили использовать отсасывание пограничного слоя для такого регулирования подъемной силы очень толстого крыла, чтобы получать одно и то же ее значение независимо от угла атаки. В последнее время неоднократно ставился вопрос об использовании в реактивных самолетах воздуха, отсосанного из пограничного слоя, для получения тяги [80].

Сведения о новых результатах конструирования ламинаризованных профилей, а также о сохранении пограничного слоя ламинарным на стреловид-

ных крыльях можно найти в работах Ф. К. Вортмана [95] и В. Пфеннингера [54], [55].

Сводные обзоры о более старых работах по управлению пограничным слоем и по применению этого управления в авиационной технике составлены Г. В. Лахманом [37] и Р. К. Пэнхэрстом [51]. Подробный список литературы имеется в статье М. Г. Смита [81].

Вопрос о переходе в пограничном слое ламинарной формы течения в турбулентную при наличии отсасывания будет рассмотрен в § 3 главы XVII.

§ 3. Вдувание другого газа (двуокомпонентный пограничный слой)

1. Теоретические результаты.

1.1. Основные уравнения. При спуске космических кораблей в более плотные слои атмосферы в пограничных слоях на стенках корабля, а также в его передней части вследствие подтормаживания возникает высокая температура. Для того чтобы по возможности уменьшить нежелательный поток тепла к корпусу корабля, можно либо вдувать в пограничный слой через пористую стенку тонкую струю легкого газа, либо просто выводить наружу тонкую пленку жидкости и дать ей испаряться. Такого же эффекта можно достигнуть, если сделать стенки корпуса корабля из сублимирующегося, т. е. из испаряющегося без плавления материала, например из графита или стекла. В результате сублимации материала стенок корпуса уносится пограничным слоем, происходит так называемая абляция материала. Во всех указанных случаях на стенках корабля образуются пограничные слои, в которых происходит диффузия двух или нескольких газов.

При движении смеси газов каждая компонента i смеси может иметь свою среднюю скорость w_i , несколько отличающуюся от средней скорости других компонент. Поэтому для характеристики состояния течения смеси газов вводится понятие средней массовой скорости

$$w = \frac{\sum \rho_i w_i}{\sum \rho_i},$$

где $\sum \rho_i = \rho$ есть полная плотность. Отклонение скорости w_i от средней массовой скорости w называется скоростью диффузии \mathfrak{W}_i ; следовательно,

$$w_i = w + \mathfrak{W}_i.$$

Согласно сделанному определению средней массовой скорости w мы имеем

$$\sum \rho_i \mathfrak{W}_i = 0.$$

Для каждой компоненты i смеси соблюдается закон сохранения массы в форме

$$\operatorname{div} (\rho_i w_i) = \operatorname{div} \{ \rho_i (w + \mathfrak{W}_i) \} = 0. \quad (14.24)$$

Просуммировав эти выражения по всем компонентам, мы получим уравнение неразрывности в обычном виде:

$$\operatorname{div} (\rho w) = 0 \quad (14.25)$$

[см. уравнение (3.1)].

При отсутствии других силовых полей диффузия возникает в основном вследствие выравнивания концентрации; кроме того, возникает термическая диффузия вследствие выравнивания разностей температур. В случае двухкомпонентной смеси газов имеет место закон диффузии

$$c_1 \mathfrak{W}_1 = -D_{12} (\operatorname{grad} c_1 + k_T \operatorname{grad} \ln T), \quad (14.26)$$

где D_{12} есть коэффициент массодиффузии, k_T — коэффициент, характеризующий термодиффузию, и $c_1 = \rho_1 / \rho$ — массовая концентрация первого, выходящего из стенок газа.

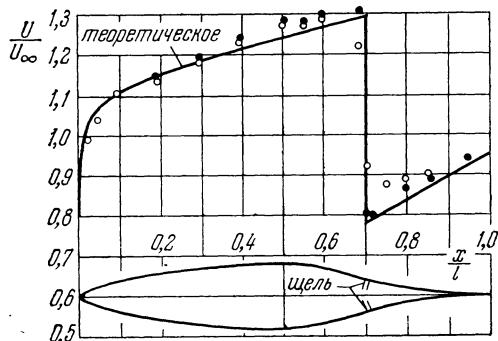


Рис. 14.20. Теоретическое и экспериментальное распределения скоростей для симметричного профиля с отсасыванием (профиль Гриффита). По Голдстейну [24]. $c_A = 0$; $Re = 3,85 \cdot 10^5$. Светлые кружки — измерения без отсасывания, зачерненные кружки — измерения с отсасыванием.

Коэффициент массодиффузии зависит от концентрации слабо; от температуры же он зависит примерно так же, как коэффициент вязкости. Коэффициент k_T существенно зависит от концентрации. Часто эта зависимость выражается в общем случае неточной формулой Онзагера

$$k_T = \alpha c_1 (1 - c_1), \quad (14.27)$$

причем коэффициент диффузии α для каждой комбинации газов рассматривается как постоянная величина.

Подставив выражение (14.26) в закон сохранения массы (14.24) для первой газовой компоненты и приняв во внимание равенство (14.25), мы получим

$$\rho \left(u \frac{\partial c_1}{\partial x} + v \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \operatorname{div} [\rho D_{12} (\operatorname{grad} c_1 + k_T \operatorname{grad} \ln T)].$$

Выполнив в правой части этого уравнения упрощения, принятые в теории пограничного слоя, т. е. отбросив члены, содержащие $\partial/\partial x$, как малые по сравнению с членами, содержащими $\partial/\partial y$, мы получим *уравнение концентрации* в виде

$$\rho \left(u \frac{\partial c_1}{\partial x} + v \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial}{\partial y} \ln T \right) \right]. \quad (14.28)$$

Аналогичное уравнение можно получить и для второй газовой компоненты, однако вследствие равенства $c_1 + c_2 = 1$ оно получается тривиальным по сравнению с уравнением (14.28); поэтому вместо него следует воспользоваться уравнением неразрывности (14.25).

Уравнения импульсов для смеси газов имеют такой же вид, как для одного газа, а именно:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (14.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (14.30)$$

однако с той разницей, что теперь ρ и μ зависят не только от температуры, но также от концентрации.

Для составления уравнения энергии смеси газов необходимо учесть нормальную (обычную) теплопроводность, теплопередачу вследствие массодиффузии и вследствие термодиффузии. Предположим, что входящие в смесь газы — идеальные. Введя суммарную энталпию

$$i = c_1 i_1 + c_2 i_2 \quad (14.31)$$

и выполнив затем упрощения, принятые в теории пограничного слоя, мы получим после длительных выкладок *уравнение энергии*

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \underbrace{\frac{RTk_T}{c_1 c_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right) \right] \right\}}_{+} + \\ &+ \rho D_{12} \left\{ \frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (i_1 - i_2) + \frac{RTk_T}{c_1 c_2} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (14.32)$$

где R означает универсальную газовую постоянную. Если пренебречь термодиффузией, то подчеркнутые снизу члены выпадут.

Границные условия для скорости и температуры остаются такими же, как для пограничного слоя в однокомпонентном газе, но добавляются два граничных условия для концентрации. А именно, на большом расстоянии от стенки должен присутствовать только внешний газ, т. е. концентрация c_1 газа, выходящего из стенки, на большом расстоянии от стенки должна быть равна нулю. Второе условие должно быть задано на стенке. В большей части случаев можно ввести предположение, что внешняя среда не проходит через стенку, т. е. что скорость диффузии внешней среды равна и прямо противоположна скорости v_w среды, выдуваемой из стенки, следовательно, должно иметь место соотношение

$$c_2 \mathfrak{W}_2 = (1 - c_1) \mathfrak{W}_2 = -c_1 \mathfrak{W}_1,$$

которое в сочетании с соотношением (14.26) приводит к условию

$$v_w = \left\{ - \frac{D_{12}}{1 - c_1} (\operatorname{grad} c_1 + k_T \operatorname{grad} \ln T) \right\}_w. \quad (14.33)$$

Уравнения (14.25), (14.28), (14.29) и (14.32) представляют собой систему уравнений в частных производных для определения функций u , v , T и c_1 .

1.2. Точные решения. В частных случаях задания внешней скорости, скорости вдувания и температуры на стенке получаются так называемые подобные решения, т. е. система уравнений в частных производных (14.25), (14.28), (14.29) и (14.32) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающей численное решение. Решения получены для несжимаемого течения около клина (в том числе для течения в окрестности критической точки [99], [22a]), для сжимаемого обтекания плоской пластины и для сверхзвукового обтекания клина и конуса [100]. На рис. 14.21 для примера показаны ламинарный динамический, температурный и диффузионный пограничные слои на конусе, через стенки которого производится вдувание гелия.

Во всех упомянутых численных решениях члены, зависящие от термодиффузии [эти члены в уравнении (14.32) подчеркнуты], отбрасывались. Для вычисления трения на стенках и теплопередачи это, очевидно, вполне допустимо, хотя равновесная температура на теплоизолированной стенке, вопреки первоначальным теоретическим ожиданиям, не уменьшается.

1.3. Приближенные решения. Упрощения возможны, если принять число Прандтля Pr и число Шмидта $Sc = v/D_{12}$ равными единице, а вязкость считать зависящей от температуры линейно. Таким путем К. Р. Фоулдерс [196] подсчитал трение на стенках при вдувании легкого газа при различных отношениях молекулярных весов. Пограничные слои, возникающие в более общих случаях распределения внешней скорости и распределения скорости вдувания, могут быть исследованы путем применения интегральных соотношений [99].

2. Экспериментальные результаты. Экспериментальные исследования вдувания другого газа в ламинарный сверхзвуковой пограничный слой касаются исключительно определения равновесной температуры на теплоизолированных стенках.

Значительно больше экспериментальных исследований выполнено для турбулентных пограничных слоев (см. главу ХХII). Явления, происходящие при абляции, пока объяснены только частично, и поэтому расчет теплоты абляции возможен лишь на основе полуэмпирических формул [3a].

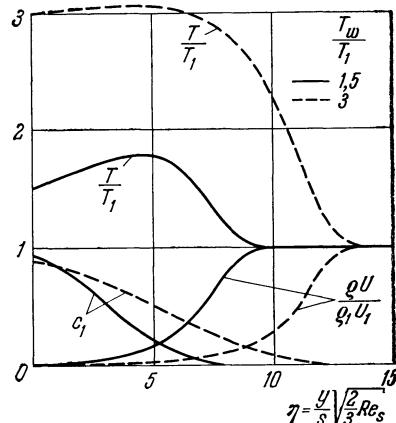
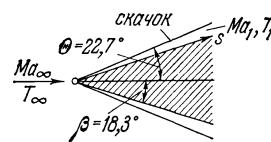


Рис. 14.21. Двухкомпонентный пограничный слой на конусе при ламинарном течении со сверхзвуковой скоростью ($Ma_\infty = 12,9$), образующийся при вдувании в воздух гелия. По В. Висту [100]. Распределение скоростей u и температуры T и концентраций c_1 при различных отношениях температуры стенки T_w к внешней температуре T_1 . Скорость вдувания

$$\begin{aligned} u/u_1 &= 0,2(\rho_1/\rho_w)/\sqrt{2Re_s/3}; \\ \eta &= \sqrt{3Re_s/2(y_s)}; Re_s = u_1 s/v_1; \\ Ma_\infty &= 12,9; T_\infty = -50^\circ C; \\ Ma_1 &= 5; T_1 = 1023^\circ C. \end{aligned}$$

Литература к главе XIV

1. Ackeret J., Das Rottorschiff und seine physikalischen Grundlagen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1925.
2. Ackeret J., Grenzschichtabsaugung. Z. VDI 35, 1153 (1926).
3. Ackeret J., Ras M., Pfenninger W., Verhinderung des Turbulentwerdens einer Reibungsschicht durch Absaugung. Naturwissenschaften, 622 (1941); см. также Helv. phys. Acta 14, 323 (1941).
- 3a. Mac Adams C., Recent advances in ablation. ARS J. 29, 625 (1959).
4. Attinello S., Auftriebserhöhung durch Grenzschichtsteuerung. Interavia 10, 925—927 (1955).
- 4a. Baron J. B., Scott P. E., Some mass transfer results with external flow pressure gradients. JASS 27, 626 (1960).
5. Betz A., Die Wirkungsweise von unterteilten Flügelprofilen. Berichte und Abhandlungen der Wiss. Gesellschaft f. Luftfahrt. № 6 (1922); NACA TM 100 (1922).
6. Betz A., Beeinflussung der Reibungsschicht und ihre praktische Verwertung. Schriften dt. Akad. f. Luftfahrtforschung, № 49 (1939).
7. Betz A., History of boundary layer control research in Germany. В книге «Boundary layer and flow control» (под ред. G. V. Lachmann'a), т I, 1—20, London 1961.
8. Brashow A. L., Burroughs D. L., Teterivin N., Visconti F., Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer. NACA Rep. 1025 (1951).

9. Brown B., Exact solutions of the laminar boundary layer equations for a porous plate with variable fluid properties and a pressure gradient in the main stream. Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. 843—852 (1951).
10. Brown W. B., Donoughue P. L., Tables of exact laminar boundary layer solutions when the wall is porous and fluid properties are variable. NACA TN 2479 (1951.)
11. Carrriere P., Eichelbrenner E. A., Theory of flow reattachment by a tangential jet discharging against a strong adverse pressure gradient. В книге «Boundary layer and flow control» (под ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 209—231, London 1961.
12. Clarke J. H., Menkes H. R., Libby P. A., A provisional analysis of turbulent boundary layers with injection. JAS 22, 255—260 (1955). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1956, № 4 (38).]
13. Curle N., The estimation of laminar skin friction including effects of distributed suction. Aero. Quart. 11, 1—21 (1960).
- 13a. Culick F. E. C., Integral method for calculating heat and mass transfer in laminar boundary layers. AIAA 1, 783 (1963).
14. Dannenberg R. E., Weiberg J. A., Effect of type of porous surface and suction velocity distribution on the characteristics of a 10,5 per cent thick airfoil with area suction. NACA TN 3093 (1953).
15. von Doenhoff A. E., Loftin L. K., Present status of research on boundary layer control. JAS 16, 729—740 (1949).
16. Donoughue P. L., Livingood J. N. B., Exact solutions of laminar boundary layer equations with constant property values for porous wall with variable temperature. NACA Rep. 1229 (1955).
17. Dorrance W. H., Dore F. J., The effect of mass transfer on the compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer. JAS 21, 404—410 (1954).
18. Emmons H. W., Leighe D. C., Tabulation of Blasius function with blowing and suction. ARC CP 157 (1954).
19. Eppeler R., Praktische Berechnung laminarer und turbulenten Absauge-Granzschichten. Ing.-Arch. 32, 221—245 (1963).
- 19a. Eppeler R., Gemeinsame Grenzschichtabsaugung für Hochauftrieb und Schnellflug. WGL Jb. 1962, 140—149.
- 19b. Faulders C. R., A note on laminar layer skin friction under the influence of foreign gas injection. JAS 28, 166—167 (1961).
20. Favre A., Contribution à l'étude expérimentale des mouvement hydrodynamiques à deux dimensions. Thèse Université de Paris 1938, 1—192.
21. Flatt J., The history of boundary layer control research in the United States of America. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 122—143, London 1961.
22. Flügel G., Jb. d. Schiffbautechn. Gesellschaft 31, 87 (1930).
- 22a. Fox H., Libby P. A., Helium injection into the boundary layer at an axisymmetric stagnation point. JASS 29, 921 (1962).
23. Gerber A., Untersuchungen über Grenzschichtabsaugung. Mitteilungen a.d. Inst. f. Aerodynamik, ETH Zürich, № 6 (1938).
24. Goldstein S., Low-drag and suction airfoils. JAS 15, 189—220 (1948).
25. Görtler H., On the calculation of steady laminar boundary layer flows with continuous suction. J. Math. Mech. 6 (1957).
26. Gregory N., Walker W. S., Wind-tunnel tests on the NACA 63 A 009 airfoil with distributed suction over the nose. ARC RM 2900 (1955).
27. Gregory N., Research on suction surfaces for laminar flow. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. II, 924—950, London 1961.
28. Gross J. F., Harnett J. P., Masson G. J., Gazolev C., jr., A review of binary boundary layer characteristics. J. Heat Mass Transfer 3, 198—221 (1961).
29. Head M. R., The boundary layer with distributed suction ARC RM 2783 (1955).
30. Head M. R., History of research on boundary layer control for low drag in U. K. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 104—121, London, 1961.
31. Holstein H., Messungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht an einem Flügel. Lilienthal-Bericht S 10, 17—27 (1940).
32. Holzhauser C. A., Bray R. S., Wind-tunnel and flight investigations of the use of leading edge area suction for the purpose of increasing the maximum lift coefficient of a 35° swept-wing airplane. NACA Rep. 1276 (1956).
33. Hurley D. G., Thwaites B., An experimental investigation of the boundary layer on a porous circular cylinder. ARC RM 2829 (1955).
34. Iglsch R., Exakte Berechnung der laminaren Reibungsschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung. Schriften d. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung 8B, № 1 (1944); NACA RM 1205 (1949).
35. Jones M., Head M. R., The reduction of drag by distribution suction. Proc. Third Anglo-American Aeronautical Conference, Brighton, 199—230 (1951).

36. K a y J. M., Boundary layer along a flat plate with uniform suction. ARC RM 2628 (1948).
37. L a c h m a n n G. V., Boundary layer control. J. Roy. Aero. Soc. 59, 163—198 (1955); см. также Aero. Eng. Rev. 13, 37—51 (1954) и WGL-Jb., 132—144 (1953).
38. L a c h m a n n G. V. (редактор): Boundary layer and flow control, т. I и II, Pergamon Press, London 1961.
39. L e w H. G., On the compressible boundary layer over a flat plate with uniform suction. Reissner Annivers. Vol. Contr. Appl. Mech. Ann Arbor/Mich. 43—60 (1949).
40. L e w H. G., M a t h i e u R. D., Boundary layer control by porous suction. Dep. Aero. Eng. Pennsylvania State University Rep. № 3 (1954).
41. L e w H. G., V a n u c c i J. B., On the laminar compressible boundary layer over a flat plate with suction or injection. JAS 22, 589—597 (1955).
42. L i b b y P. A., K a u f m a n n L., H a r r i n g t o n R. P., An experimental investigation of the isothermal laminar boundary layer on a porous flat plate. JAS 19, 127 (1952).
43. L i b b y P. A., P a l l o n e A., A method for analyzing the heat insulating properties of the laminar compressible boundary layer. JAS 21, 825—834 (1954).
- 43a. L i b b y P. A., C r e s c i R. J., Experimental investigation of the down-stream influence of stagnation point mass transfer. JASS 28, 51 (1961).
44. L o w G. M., The compressible laminar boundary layer with fluid injection. NACA TN 3404 (1955).
45. M e r e d i t h F. W., G r i f f i t h A. A., В книге «Modern Developments in Fluid Dynamics», т. 2, 534, Oxford University Press, Oxford 1938. [Имеется русский перевод «Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости», под ред. С. Гольдштейна, т. 2, ИЛ, Москва 1948.]
46. M i c k l e y H. S., R o s e R. C., S q u y e r s A. L., S t e w a r t W. E., Heat, mass, and momentum transfer for flow over a flat plate with blowing or suction. NACA TN 3208 (1954).
47. M i l e s F. G., Sucking away boundary layers. Flight 35, 180 (1939).
48. M o r d u c h o w M., On heat transfer over a sweat-cooled surface in laminar compressible flow with pressure gradient. JAS 19, 705—712 (1952).
- 48a. N e s s N., Foreign gas injection into a compressible turbulent boundary layer on a flat plate. JASS 28, 645 (1961).
49. N i c k e l K., Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten. Ing.-Arch. 31, 85—100 (1962).
50. P a n k h u r s t R. C., R a y m e r W. G., D e v e r e u x A. N., Windtunnel tests of the stalling properties of an 8 per cent thick symmetrical section with nose suction through a porous surface. ARC RM 2666 (1953).
51. P a n k h u r s t R. C., Recent British work on methods of boundary layer control. Proc. Symp. at Nat. Phys. Lab. (1955).
- 51a. P a p p a s C. C., Effect of injection of foreign gases in the skin friction and heat transfer on the turbulent boundary layer. IAS Paper 59—78 (янв. 1959).
52. P e c h a u W., Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der kompressiblen laminaren Grenzschicht mit kontinuierlich verteilter Absaugung. Ing.-Arch. 32, 157—186 (1963).
53. P f e n n i n g e r W., Untersuchungen über Reibungsverminderung an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung. Mitteilungen a. d. Inst. f. Aerodynamik, ETH Zürich, № 13 (1946); см. также JAS 16, 227—236 (1949); NACA TM 1181 (1947).
54. P f e n n i n g e r W., B a c o n J. W., About the development of swept laminar suction. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. II, 1007—1032, London 1961.
55. P f e n n i n g e r W., G r o t h E., Low drag boundary layer suction experiments in flight on a wing glove of an F-94 A airplane with suction through a large number of fine slots. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. II, 987—999, London 1961.
56. P o i s s o n - Q u i n t o n Ph., Récherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avions. ONERA Publication Note Technique № 37 (1956); см. также WGL Jb. 1956, 29—51 (1957).
57. P o i s s o n - Q u i n t o n Ph., L e p a g e L., Survey of French research on the control of boundary layer and circulation. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 21—73, London 1961.
58. P o r r i e t o n E. D., Boundary layer control for high lift by suction at the leading-edge of a 40 degree swept-back wing. ARC RM 2897 (1955).
59. P r a n d t l L., The mechanics of viscous fluids. В книге: D u r a n d W. F., Aerodynamic Theory III (1935). [Имеется русский перевод: Дюранд В., Аэrodinamika, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]
60. P r e s t o n J. H., The boundary layer flow over a permeable surface through which suction is applied. ARC RM 2244 (1946).
61. P r e t s c h J., Grenzen der Grenzschichtbeeinflussung. ZAMM 24, 264—267 (1944).

62. Raspert A., Boundary layer studies on a sailplane. *Aero. Eng. Rev.* **11**, 6, 52 (1952).
63. Regenscheit B., Eine neue Anwendung der Absaugung zur Steigerung des Auftriebes eines Tragflügels. *F. B.* 1474 (1941).
64. Regenscheit B., Versuche über eine neue strömungstechnische Steuerung. *UM* 3104 (1944).
65. Regenscheit B., Absaugung in der Flugtechnik. *WGL Jb.* 1952, 55—63 (1953).
66. Richards E. J., Walker W., Greemинг J., Tests of a Griffith aerofoil in the 13×9 ft tunnel. *ARC RM 2148* (1954).
67. Ringleb F., Computation of the laminar boundary layer with suction. *JAS* **19**, 48 (1952).
68. Rehinebold W., Zur Berechnung stationärer Grenzschichten bei kontinuierlicher Absaugung mit unstetig veränderlicher Absaugegeschwindigkeit. *J. Rat. Mech. Analysis* **5**, 3, 539—596 (1956).
69. Rubesin M. W., An analytical estimation of the effect of transpiration cooling on the heat-transfer and skin-friction characteristics of a compressible, turbulent boundary layer. *NACA TN 3341* (1954).
70. Schlichting H., Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung* **19**, 293 (1942).
71. Schlichting H., Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung* **19**, 179—181 (1942).
72. Schlichting H., Bussmann K., Exakte Lösungen für die laminare Reibungsschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Schriften der dt. Akad. d. Luftfahrtforschung* **7B**, № 2 (1943).
73. Schlichting H., Die Belinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Ausblasen. *Jb. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung*, 90—108 (1943/44).
74. Schlichting H., Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. *Ing.-Arch.* **16**, 201—220 (1948); *NACA TM 1216* (1949).
75. Schlichting H., Absaugung in der Aerodynamik. *WGL Jb.* 1956, 19—29 (1957); см. также *L'aspiration de la couche limite en technique aéronautique*. *Technique et Science Aeronautique*, вып. 4, 149—161 (1956).
76. Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. *Advances in Aeronautical Sciences*, т. II, Proc. Internat. Congr. in the Aeronautical Sciences in Madrid 1958. London 1959, 563—586.
77. Schrenk O., Versuche mit Absaugeflügeln. *Luftfahrtforschung* **12**, 10—27 (1935).
78. Schrenk O., Tragflügel mit Grenzschichtabsaugung. *Luftfahrtforschung* **2**, 49 (1928); см. также *ZFM* **22**, 259 (1931); *Luftfahrtforschung* **12**, 10 (1935); *Luftwissen* **7**, 409 (1940) и *NACA TM 974* (1941).
79. Sinchard K. D. P., The laminar boundary layer with distributed suction on an infinite yawed cylinder. *ARC CP 214* (1956).
80. Smith A. M., Roberts H. E., The jet airplane utilizing boundary layer air for propulsion. *JAS* **14**, 97—109 (1947).
81. Smith M. H., Bibliography on boundary layer control. *Literature Search* № 6, Library Bulletin. The James Forrestal Research Center. Princeton University (1955).
82. Stuart J. T., On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **7**, 446—457 (1954).
83. Stüper J., Flight experiments and tests on two airplanes with suction slots. *NACA TM 1232* (1950). Английский перевод исследовательского отчета *ZWB* № 1821 (1943).
84. Thwaites B., The production of lift independently of incidence. *J. Roy. Aero. Soc.* **52**, 117 (1948).
85. Thwaites B., Investigations into the effect of continuous suction on laminar boundary layer flow under adverse pressure gradients. *ARC RM 2514* (1952).
86. Thwaites B., On the momentum equation in laminar boundary layer flow. A new method of uniparametric calculation. *ARC RM 2587* (1952).
87. Torday T. P., Boundary layer control by continuous surface suction or injection. *J. Math. Phys.* **31**, 3, 206—213 (1952).
88. Torday T. P., Boundary layer control by distributed surface suction or injection. Biparametric general solution. *J. Math. Phys.* **32**, 312—314 (1954).
89. Trilling L., The incompressible boundary layer with pressure gradient and suction. *JAS* **17**, 335—341 (1960).
90. Truckenbrodt E., Die laminare Reibungsschicht an einer teilweise mitbewegten längsangeströmten ebenen Platte. *Abhdlg. Braunschweig. Wiss. Ges.* **4**, 181—195 (1952).
91. Truckenbrodt E., Ein einfaches Näherungsverfahren zum Berechnen der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. *Forschg. Ing.-Wes.* **22**, 147—157 (1956).
92. Watson E. J., The asymptotic theory of boundary layer flow with suction. *ARC RM 2619* (1952).
93. Wieghardt K., Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung. *Ing.-Arch.* **22**, 368—377 (1954).

94. Williams J., A brief review of British research on boundary layer control for high lift. В книге «Boundary layer and flow control» (под ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 74—103, London 1961.
95. W or t m a n n F. X., Progress in the design of low drag aerofoils. В книге «Boundary layer and flow control» (под. ред. G. V. Lachmann'a), т. II, 748—770, London 1961.
96. W ue s t W., Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle. Ing.-Arch. 17, 199 (1949).
97. W ue s t W., Asymtotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern. Ing.-Arch. 23, 198—208 (1955).
98. W ue s t W., Survey of calculation methods of laminar boundary layers with suction in incompressible flow. В книге «Boundary layer and flow control» (под ред. G. V. Lachmann'a), т. II, 771—800, London 1961.
99. W ue s t W., Laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums (Zweistoffgrenzschichten). Ing.-Arch. 31, 125—143 (1962).
100. W ue s t W., Kompressible laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums. ZFW 11, 398—409 (1963).
101. Y au n S. W., Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection. JAS 16, 741—748 (1949).
102. Y ou n g A. D., Note on the velocity and temperature distributions attained with suction on a flat plate of infinite extent in compressible flow. Quart. J. Mech. Appl. Math. I, 70—75 (1948).

Г л а в а XV

Нестационарные пограничные слои¹⁾

§ 1. Общие замечания о расчете нестационарных пограничных слоев

В предыдущих главах мы занимались решением уравнений пограничного слоя только для стационарных течений. С точки зрения практических приложений такие случаи пограничного слоя являются, вообще говоря, наиболее важными. В этой главе мы разберем некоторые примеры решения уравнений пограничного слоя для течений, изменяющихся во времени, т. е. рассмотрим нестационарные пограничные слои.

Когда говорят о нестационарном пограничном слое, то обычно имеют в виду либо пограничный слой, образующийся при возникновении движения из состояния покоя, либо пограничный слой, возникающий при периодическом движении. При движении, возникающем из состояния покоя, тело и жидкость до определенного момента времени находятся в состоянии покоя, а затем либо тело начинает двигаться в покоящейся жидкости, либо жидкость начинает набегать на покоящееся тело. При таком разгоне тела или жидкости в непосредственной близости от стенки образуется сначала очень тонкий пограничный слой, в котором скорость течения быстро изменяется от скорости тела до скорости внешнего течения. При разгоне тела в свободном потоке непосредственно после начала движения во всем пространстве, за исключением очень тонкого пограничного слоя около тела, возникает потенциальное течение, т. е. течение без вращения частиц. Затем, по мере продолжения разгона, толщина пограничного слоя увеличивается, в связи с чем встает важный вопрос об определении того момента времени, когда в пограничном слое впервые начинается возвратное течение, влекущее за собой отрыв пограничного слоя. В § 1 главы V мы привели точные решения уравнений Навье — Стокса для двух нестационарных течений, а именно для течения вблизи стенки, внезапно начавшей двигаться в своей собственной плоскости, а также для течения в трубе, внезапно возникшего из состояния покоя. Оба эти случая могут служить примерами разгонного течения с образованием нестационарного пограничного слоя.

Периодический пограничный слой образуется также при периодическом движении стенки в покоящейся жидкости и при периодическом внешнем течении жидкости около неподвижной стенки. С периодическим пограничным слоем первого вида мы уже встретились в п. 7 § 1 главы V, когда рассматривали точное решение уравнений Навье — Стокса для течения, возникающего вблизи стенки при ее периодическом движении в своей собственной плоскости.

1. Уравнения пограничного слоя. Основные уравнения для расчета несжимаемого нестационарного пограничного слоя были выведены уже в § 1

¹⁾ За переработку этой главы я благодарен К. Герстену.

главы VII. В общем случае сжимаемого нестационарного пограничного слоя уравнения, определяющие скорость и температуру при плоском течении, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (15.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (15.2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (15.3)$$

$$p = \rho RT, \quad (15.4)$$

$$\mu = \mu(T) \quad (15.5)$$

[см. уравнения (12.35а) — (12.35д)]. Границными условиями будут

$$u = U_w(t), \quad v = 0, \quad T = T_w(x, t) \quad \text{при } y = 0,$$

$$u = U(x, t), \quad T = T_\infty(x, t) \quad \text{при } y = \infty,$$

где $U_w(t)$ есть скорость стенки, если она движется, а $U(x, t)$ — скорость невязкого внешнего течения, связанная с давлением в пограничном слое соотношением

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (15.6)$$

Это соотношение сразу получается из уравнения (15.2), если в последнем пренебречь членом, зависящим от трения. В общем случае мы будем выбирать систему координат, жестко связанную с телом, следовательно, будет $U_w = 0$. Однако в случае колеблющейся стенки и стационарного внешнего течения предпочтительнее будет пользоваться системой координат, в которой внешнее течение является стационарным. При несжимаемом течении различные системы отсчета равнозначны (см. работу [27]). Определение точки отрыва при нестационарном течении тесно связано с выбором системы отсчета (см. в связи с этим работу [32]). В дальнейшем под точкой отрыва мы будем понимать такую точку, в которой производная $(\partial u / \partial y)_w$, составленная в системе координат, жестко связанной с телом, равна нулю.

Для нестационарных пограничных слоев из уравнений пограничного слоя могут быть выведены интегральные соотношения таким же способом, как и для стационарных пограничных слоев. Для сжимаемого нестационарного течения они имеют вид

$$U \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (\rho - \rho_\infty) dy + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\infty U \delta_1) + \frac{\partial U}{\partial x} \rho_\infty U \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\infty U^2 \delta_2) = \tau_0, \quad (15.7)$$

$$\begin{aligned} c_p T_\infty \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (\rho_\infty - \rho) dy + \left(\rho_\infty c_p \frac{\partial T_\infty}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta_1 + \rho_\infty U \frac{\partial U}{\partial t} \delta_H + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\infty c_p T_\infty U \delta_H) + \rho_\infty U^2 \frac{\partial U}{\partial x} \delta_H = \int_0^\infty \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \end{aligned} \quad (15.8)$$

где δ_1 есть толщина вытеснения, δ_2 — толщина потери импульса и δ_H — толщина увеличения энтальпии [см. формулы (13.74), (13.75) и (13.77)]. Далее, $U(x, t)$, $\rho_\infty(x, t)$ и $T_\infty(x, t)$ суть значения, относящиеся к невязкому внешнему течению. В случае стационарного течения соотношения (15.7) и (15.8)

переходят в уравнения (13.80) и (13.82), а в случае несжимаемого течения — в уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (U \delta_1) + U \frac{\partial U}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta_2) = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial t} (U^2 \delta_2) + U \frac{\partial \delta_3}{\partial x} + 3\delta_3 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^\infty \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{2\lambda}{\rho U^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (15.10)$$

При стационарном течении уравнение (15.9) тождественно совпадает с уравнением (8.35), а уравнение (15.10) отличается от уравнения (8.38) только присутствием члена, учитывающего увеличение энергии вследствие теплопроводности.

В дальнейшем мы рассмотрим сначала нестационарные пограничные слои при несжимаемом течении. Затем, в § 6 настоящей главы, мы остановимся на некоторых решениях уравнений пограничного слоя для сжимаемого нестационарного течения.

2. Способ последовательных приближений. Интегрирование уравнений нестационарного пограничного слоя (15.1) — (15.3) можно выполнить обычно способом последовательных приближений. Возможность применения этого способа основана на следующих физических соображениях. При движении, возникающем из состояния покоя, член $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в уравнении (15.2), зависящий от вязкости, в первый момент времени, когда пограничный слой еще очень тонок, имеет особенно большое значение, между тем как конвективные члены, определяющие ускорение, имеют свои нормальные значения. Тогда член, зависящий от вязкости, уравновешивается нестационарным локальным ускорением $\partial u / \partial t$ и членом, который зависит от давления и в котором сначала преобладающую роль играет слагаемое $\partial U / \partial t$. Введем систему координат, жестко связанную с телом, и примем, что жидкость натекает на неподвижное тело. Представим скорость в виде следующей суммы:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t). \quad (15.11)$$

Тогда на основе только что сказанного мы получим для первого приближения u_0 дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (15.12)$$

с граничными условиями

$$u_0 = 0 \text{ при } y = 0, \quad u_0 = U(x, t) \text{ при } y = \infty.$$

Для определения второго приближения u_1 следует подставить значение u_0 , найденное из уравнения (15.12), в конвективные члены уравнения (15.2), при этом в члене, зависящем от давления, учесть также второе (конвективное) слагаемое. В результате для определения u_1 мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad (15.13)$$

с граничными условиями

$$u_1 = 0 \text{ при } y = 0, \quad u_1 = 0 \text{ при } y = \infty.$$

К уравнениям (15.12) и (15.13) следует присоединить соответствующие уравнения неразрывности (для u_0 , v_0 и u_1 , v_1). Аналогичным способом можно составить уравнения для следующих приближений: u_2 , u_3 , . . . Иложенный

приближенный способ можно применять также к решению уравнений периодического пограничного слоя. Однако попытка вычисления более высоких приближений очень скоро приводит к неудобным для решения дифференциальным уравнениям.

3. Способ Ц. Ц. Линя для периодических внешних течений. Другой способ расчета нестационарных периодических пограничных слоев предложен Ц. Ц. Линем [28]. Этот способ может применяться к задачам, в которых внешнее течение совершают периодические колебания. Он основан на осреднении во времени гидродинамических величин, входящих в дифференциальное уравнение внешнего движения (15.6), и на линеаризации уравнения, определяющего скорость колебаний в пограничном слое. Для определения осредненного течения сохраняется полное дифференциальное уравнение.

Если скорость содержит периодическую колебательную составляющую, то можно написать

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x, t), \quad (15.14)$$

где черта над буквой означает осредненное за период значение, следовательно, имеет место равенство

$$\bar{U}_1(x, t) = 0. \quad (15.15)$$

Составляющие u и v скорости в пограничном слое и давление p также разлагаются на осредненные по времени значения и на периодические составляющие, т. е. имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \bar{u}(x, y) + u_1(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \bar{v}(x, y) + v_1(x, y, t), \\ p(x, t) &= \bar{p}(x) + p_1(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

причем

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{p}_1 = 0. \quad (15.17)$$

Подставив выражение (15.14) в равенство (15.6) и составив осредненные по времени значения, мы получим

$$\bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + \overline{U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (15.18)$$

Вычтя это уравнение из уравнения (15.6), мы будем иметь

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \overline{U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (15.19)$$

Аналогичным образом из уравнения (15.2) при $\rho = \text{const}$ получим для осредненного движения уравнение

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + F(x, y), \quad (15.20)$$

где

$$F(x, y) = \overline{U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}} - \left(\overline{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}} + \overline{v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}} \right), \quad (15.21)$$

а для колебательного движения — уравнение

$$\begin{aligned} \underline{\frac{\partial u_1}{\partial t}} + \left(\bar{u} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(u_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \\ + \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \left(\overline{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}} + \overline{v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}} \right) = \\ = \underline{\frac{\partial U_1}{\partial t}} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{d\bar{U}}{dx} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \overline{U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (15.22) \end{aligned}$$

Основное упрощение, на котором основан способ Ц. Ц. Линя, состоит в том, что в уравнении (15.22) сохраняются только три подчеркнутых снизу члена. Тогда уравнение становится линейным и принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (15.23)$$

Если произвести оценку порядка величин отдельных членов, то легко показать, что такое упрощение допустимо при условии, что характерная толщина

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2v}{n}}, \quad (15.24)$$

составленная при помощи частоты колебаний, мала по сравнению с той толщиной пограничного слоя, которая существовала бы при стационарном внешнем течении. Следовательно, должно соблюдаться неравенство

$$\left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^2 \ll 1, \quad (15.25)$$

что практически ограничивает применение способа Ц. Ц. Линя только к случаям высоких частот. Напомним, что с величиной δ_0 , определяемой равенством (15.24), мы уже встречались в п. 7 § 1 главы V при исследовании течения около осциллирующей плоской стенки.

Уравнение (15.23), сходное с уравнением теплопроводности (5.17), описывает поведение осциллирующей составляющей u_1 профиля скоростей в пограничном слое и при заданной скорости U_1 колебаний внешнего течения может быть решено, так как вследствие линеаризации колебательное движение стало независимым от осредненного движения. Осциллирующую составляющую u_1 можно определить из уравнения неразрывности (15.1), которое также может быть разбито на два уравнения, а именно на уравнение для осредненного движения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (15.26)$$

и на уравнение для колебательного движения

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (15.27)$$

Сначала из уравнений (15.23) и (15.26) отыскивается решение $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, затем по формуле (15.21) вычисляется функция $F(x, y)$, и, наконец, решается дифференциальное уравнение (15.20) для осредненного движения $u(x, y)$.

Отметим, что уравнение (15.20), определяющее осредненное движение, отличается от уравнения стационарного пограничного слоя только присутствием добавочного члена — функции $F(x, y)$. Эта функция физически может быть истолкована как дополнительная активная сила — подобно тому, как градиент давления при стационарном течении. В обоих случаях мы имеем дело с известными функциями. Единственная разница состоит в том, что сред-

ний градиент давления $\bar{U}d\bar{U}/dx$ «формируется» под действием пограничного слоя и не зависит от поперечной координаты y , в то время как добавочный член $F(x, y)$ зависит от нее.

Вследствие наличия осциллирующих составляющих скорости осредненное течение отличается от того течения, которое получилось бы, если мы произвели бы осреднение внешнего течения с самого начала. Эта разница проявляется в присутствии дополнительной функции $F(x, y)$ и представляет собой следствие нелинейности дифференциального уравнения.

Как будет показано в главах XVIII и XIX, существенное свойство турбулентного течения состоит в том, что на стационарное главное течение налагаются трехмерные случайные колебания. Следовательно, при турбулентном внешнем течении происходит явление, аналогичное только что описанному. Обычно принято пренебрегать колебательным движением во внешнем течении и вести расчет так, как если бы это течение было стационарным, т. е. брать за скорость внешнего течения $\bar{U}(x)$ вместо $U(x, t)$. Но это равносильно тому, что в уравнении (15.20) отбрасывается функция $F(x, y)$ и в результате получается осредненный профиль скоростей, отличающийся от профиля $\bar{u}(x, y)$. Из сказанного очевидно, что последовательность обоих этапов расчета, а именно решение уравнения и осреднение, отнюдь не безразлична для окончательного результата.

4. Разложение в ряд при слабом возмущении стационарного течения. Часто нестационарное течение в пограничном слое является результатом наложения на стационарное течение слабых нестационарных возмущений. При условии, что эти возмущения малы по сравнению со стационарным основным течением, можно разбить уравнение нестационарного пограничного слоя на нелинейное уравнение для стационарного течения и линейное уравнение для нестационарного возмущенного движения. Известным примером является течение в пограничном слое, возникающее при внешнем течении вида

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \varepsilon U_1(x, t) + \dots, \quad (15.28)$$

где ε есть очень малое число. Важный частный случай чисто периодического внешнего течения подробно исследован М. Дж. Лайтхиллом [27]. Аналогичным образом можно провести линеаризацию и в том случае, когда температура на стенке выражается уравнением

$$T_w(x, t) = \bar{T}_w(x) + \varepsilon T_{w1}(x, t) \quad (15.29)$$

или когда на скорость стенки налагаются небольшие нестационарные возмущения (осцилирующее тело).

Для исследования таких течений исходят из предположения, что решения уравнений динамического и температурного пограничных слоев имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t) + \dots, \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y, t) + \varepsilon^2 v_2(x, y, t) + \dots, \\ T(x, y, t) &= T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y, t) + \varepsilon^2 T_2(x, y, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.30)$$

Внесем эти выражения в уравнения (15.1)–(15.3) и расположим отдельные члены уравнений по возрастающим степеням возмущающего параметра ε . Тогда из условия, что для каждой степени ε каждое дифференциальное уравнение должно удовлетворяться по отдельности, мы получим при внешнем течении (15.28) и при температуре стенки (15.29) следующие уравнения (в предположении, что $\rho = \text{const}$):

Уравнения нулевого порядка (стационарное основное течение)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0, \\ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + v \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_0 &= v_0 = 0, & T_0 &= \bar{T}_w(x) \text{ при } y = 0, \\ u_0 &= \bar{U}(x), & T_0 &= T_\infty \quad \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Уравнения первого порядка (чисто нестационарное течение)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{d\bar{U}}{dx} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = 0 & T_1 &= T_{w1}(x, t) \quad \text{при } y = 0, \\ u_1 &= U_1(x, t), \quad T_1 &= 0 & \quad \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Уравнения второго порядка (нестационарные и стационарные течения)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 = T_2 = 0 & \text{при } y = 0, \\ u_2 &= T_2 = 0 & \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Уравнения более высокого порядка построены аналогичным образом. Эти системы уравнений могут быть решены последовательно, причем все они, за исключением системы нулевого порядка, линейны. Если уравнения (15.1)–(15.3) имеют точные решения вида (15.30) до члена с ε^n включительно, то решения, найденные изложенным здесь способом, отличаются от точных решений в общем случае членами порядка ε^{n+1} . Приложения этого способа к исследованию периодических пограничных слоев будут рассмотрены в п. 3 § 5 настоящей главы.

Аналогичное разложение в ряд по степеням

$$\frac{x^k}{U^{k+1}} \frac{\partial^k U}{\partial t^k}, \quad \frac{1}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U} \right)^k \frac{\partial^k T_w}{\partial t^k} \quad (15.34)$$

было предложено Ф. К. Муром [30], С. Острахом [34], Ф. К. Муром и С. Острахом [31], а также Э. М. Спарроу [47] (см. также п. 2 § 6 настоящей главы).

5. Подобные и полуподобные решения. Как мы знаем (§ 2 главы VIII), решения уравнений пограничного слоя при стационарном двумерном течении называются «подобными», если посредством подходящего аффинного преобразования две независимые переменные x и y могут быть сведены к одной-единственной переменной η . Совершенно аналогично решения уравнений пограничного слоя при нестационарном течении называются подобными в том случае, если три независимые переменные x , y и t могут быть сведены к одной-единственной переменной η . Г. Шу [43] и Т. Гайс [10] указали все те решения, для которых возможно сведение к одной-единственной независимой переменной η , т. е. решения, имеющие вид

$$u(x, y, t) = U(x, t) H(\eta), \quad \text{где } \eta = \frac{y}{N(x, t)}. \quad (15.35)$$

Такие решения получаются, например, при внешних течениях вида

$$U(x, t) = \frac{mx}{t},$$

а также при внешних течениях

$$U(x, t) = Ct^n, \quad (15.15)$$

о которых будет сказано в § 3 настоящей главы. Подобные решения, получающиеся при внешнем течении

$$U(x, t) = \frac{x}{a + bt},$$

где a и b суть постоянные, исследованы К. Т. Янгом [68].

Если посредством подходящего преобразования удается свести три переменные x, y, t к двум переменным, то в таком случае говорят о «полуподобных» решениях [21]. В частном случае, когда переменные x, y, t удается свести к переменным y и x/t , решения называют также «псевдостационарными» (см. работу [7]). Одно такое решение для внешнего течения

$$U(x, t) = U_0 - \frac{x}{T-t}$$

с постоянными U_0 и T было указано И. Тани [53]. Более широкий класс полуподобных решений рассмотрен Г. А. Хассаном [19], см. также работу [21].

6. Приближенные способы. Решение полных уравнений пограничного слоя при произвольном распределении скоростей $U(x, t)$ во внешнем течении приводит к очень большим трудностям. Это заставляет поступать также, как при расчете стационарных течений, т. е. прибегать к приближенным способам, сходным, например, со способом Кармана — Польгаузена, изложенным в главе X. Такие приближенные способы для несжимаемых нестационарных пограничных слоев предложены Г. Шу [42], Л. А. Розиным [39] и К. Т. Янгом [69]. В последнем способе рассматривается также температурный пограничный слой, причем исходным пунктом служат интегральные соотношения (15.9) и (15.10). Для аппроксимации профилей скоростей используются либо полиномы, либо подобные решения. Так как интегрирование по толщине пограничного слоя приводит к исключению только одной координаты (координаты y), то при применении приближенных способов все же не удается избежать решения уравнения в частных производных.

§ 2. Развитие пограничного слоя при внезапном возникновении движения

Рассмотрим сначала разгонное движение, т. е. движение, возникающее из состояния покоя. Решение этой задачи можно упростить, если, следуя Г. Блазиусу [8], принять, что тело, внезапно приведенное в движение в покоящейся жидкости, достигает окончательной, постоянной скорости очень быстро, следовательно, оно приводится в движение рывком. В таком случае в введенной выше системе координат, жестко связанной с телом, скорость потенциального течения будет равна

$$\left. \begin{array}{ll} U(x, t) = 0 & \text{при } t \leq 0, \\ U(x, t) = U(x) & \text{при } t \geq 0, \end{array} \right\} \quad (15.36)$$

причем $U(x)$ есть скорость потенциального течения около тела при стационарном движении. Так как в соответствии с принятым упрощением $\partial U / \partial t = 0$, то в первом приближении мы получим вместо дифференциального уравнения (15.12) более простое уравнение

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (15.37)$$

причем граничными условиями будут

$$u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u_0 = U(x) \quad \text{при } y = \infty.$$

Уравнение (15.37) тождественно совпадает с уравнением одномерного распространения тепла, уже решенным в п. 4 § 1 главы V с связи с исследованием г. Шлихтинг

нием течения, возникающего при движении плоской пластины в своей плоскости в первоначально покоящейся жидкости. Там для решения этого уравнения мы применили преобразование подобия (5.19), введя новую безразмерную переменную

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}. \quad (15.38)$$

В рассматриваемом случае это преобразование приводит к решению

$$u_0(x, y, t) = U(x) \zeta'_0(\eta) = U(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta = U(x) \operatorname{erf} \eta, \quad (15.39)$$

которое в качестве первого приближения справедливо как для плоской, так и для осесимметричной задачи. Если скорость U внешнего течения не зависит от x , т. е. если $U = U_0 = \text{const}$ (продольное обтекание плоской пластины), то решение (15.39) является точным решением уравнения (15.2). В самом деле, в этом случае в уравнении (15.13) конвективные члены и член, содержащий давление, исчезают, и поэтому $u_1 \equiv 0$. Однако найденное таким путем решение еще не является полным решением задачи. Более того, это решение применимо только на достаточно большом расстоянии вниз по течению, где возмущающее влияние передней кромки уже не дает о себе знать и где, следовательно, течение ведет себя так же, как при обтекании бесконечно длинной пластины. Строго говоря, полное решение должно удовлетворять еще дополнительному условию $u(0, y, t) = 0$ при всех y и во все моменты времени t . Подробности о полном решении можно найти в работе [51].

В общем случае, когда скорость $U(x, t)$ внешнего течения изменяется вдоль контура тела, плоская и осесимметричная задачи требуют отдельного рассмотрения, так как уравнение неразрывности в обоих случаях имеет разный вид.

1. Плоская задача. Рассмотрим сначала плоскую задачу. Примем, что функция тока выражается в виде следующего ряда по степеням времени t :

$$\psi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left[U\zeta_0(\eta) + tU \frac{dU}{dx} \zeta_1(\eta) + \dots \right], \quad (15.40)$$

следовательно, составляющие $u = \partial\psi/\partial y$ и $v = -\partial\psi/\partial x$ скорости будут

$$\left. \begin{aligned} u &= U\zeta'_0 + tU \frac{dU}{dx} \zeta'_1 + \dots, \\ -v &= 2\sqrt{vt} \left\{ \frac{dU}{dx} \zeta_0 + t \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + U \frac{d^2U}{dx^2} \right] \zeta_1 + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.41)$$

Подставив эти выражения в уравнение (15.12), мы получим для определения первого приближения ζ_0 дифференциальное уравнение

$$\zeta''_0 + 2\eta\zeta'_0 = 0 \quad . \quad (15.42)$$

с граничными условиями

$$\zeta_0 = \zeta'_0 = 0 \quad \text{при} \quad \eta' = 0, \quad \zeta'_0 = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty.$$

Уравнение (15.42) совпадает с уравнением (5.21) и дает для ζ'_0 решение (15.39). График зависимости ζ'_0 от η изображен на рис. 15.1.

Для определения второго приближения $\zeta_1(\eta)$ мы получим из уравнений (15.13) и (15.40) дифференциальное уравнение

$$\zeta''_1 + 2\eta\zeta''_1 - 4\zeta'_1 = 4(\zeta'^2_0 - \zeta_0\zeta''_0 - 1),$$

причем граничными условиями будут

$$\zeta_1 = \zeta'_1 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \zeta'_1 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty.$$

Решение этого уравнения, найденное Г. Блазиусом, имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta_1' = & \frac{6}{\pi} \eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\pi} (2\eta^2 - 1) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + \\ & + \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}} \right) \left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right]. \quad (15.43) \end{aligned}$$

График зависимости ζ_1' от η изображен на рис. 15.1 в виде кривой $\zeta_1'a$ (см. также таблицу 15.1). Начальные наклоны кривых ζ_0'' и ζ_1'' ($\equiv \zeta_1'a$) равны

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0''(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\ \zeta_1''(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.44)$$

Эти значения нам понадобятся для определения момента начала отрыва.

Следующий член разложения (15.40) функции тока в ряд по степеням t точно вычислен С. Голдстейном и Л. Розенхэдом [14]. До этого с меньшей точностью он был определен Э. Болтце [9] при решении осесимметричной задачи (см. ниже). Однако для вычисления момента начала отрыва вполне достаточно знания численных значений только первых двух членов разложения функции тока в ряд по степеням времени. Ниже мы покажем выполнение такого вычисления на примерах обтекания круглого и эллиптического цилиндров.

Таблица 15.1. Значения функций $\zeta_1'a$ и $\zeta_1'b$ для нестационарного разгонного течения. По Э. Болтце [9]

η	$\zeta_1'a$	$\zeta_1'b$	η	$\zeta_1'a$	$\zeta_1'b$	η	$\zeta_1'a$	$\zeta_1'b$
0	0	0	0,7	0,367	0,099	1,4	0,126	0,061
0,1	0,142	0,017	0,8	0,340	0,103	1,5	0,099	0,050
0,2	0,246	0,034	0,9	0,307	0,102	1,6	0,075	0,040
0,3	0,318	0,051	1,0	0,269	0,099	1,7	0,056	0,031
0,4	0,362	0,066	1,1	0,231	0,092	1,8	0,041	0,023
0,5	0,382	0,080	1,2	0,191	0,083	1,9	0,029	0,016
0,6	0,382	0,091	1,3	0,158	0,072	2,0	0,021	0,011
						∞	0	0

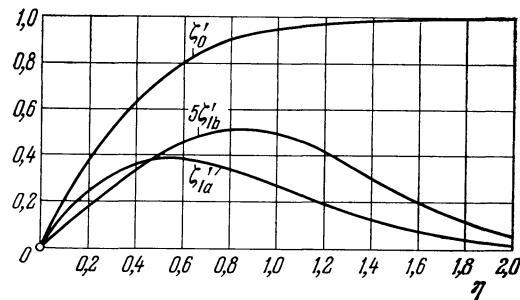


Рис. 15.1. Функции ζ' , $\zeta_1' = \zeta_1'a$ и $\zeta_1'b$, определяющие распределение скоростей нестационарного пограничного слоя при внезапном приведении в движение [формулы (15.44) и (15.50)].

Условием отрыва пограничного слоя, как мы знаем, является выполнение равенства $du/dy = 0$ при $y = 0$. Составив такую производную от составляющей скорости u , определяемой первым из уравнений (15.41), и обозначив момент начала отрыва через $t_{\text{отр}}$, мы получим уравнение

$$\zeta_0''(0) + \zeta_1''(0) t_{\text{отр}} \frac{dU}{dx} = 0$$

или, после замены $\zeta''_0(0)$ и $\zeta''_1(0)$ их значениями (15.44),

$$1 + \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \frac{dU}{dx} t_{\text{отр}} = 0. \quad (15.45)$$

Это уравнение позволяет вычислить тот момент времени, в который в заданной точке x контура тела впервые начинается отрыв пограничного слоя. Очевидно, что отрыв возможен вообще только там, где градиент скорости dU/dx отрицателен. Кроме того, отрыв возникает раньше всего в той точке, в которой производная dU/dx имеет наибольшее абсолютное значение. Ниже на примере обтекания эллиптического цилиндра мы увидим, что такая точка отнюдь не всегда совпадает с задней критической точкой.

Пример: круглый цилиндр.

Для круглого цилиндра, на который набегает поток со скоростью U_∞ , мы имеем

$$U(x) = 2U_\infty \sin \frac{x}{R} \quad \text{и} \quad \frac{dU}{dx} = 2 \frac{U_\infty}{R} \cos \frac{x}{R},$$

где R есть радиус цилиндра, а x — длина дуги, измеряемая от передней критической точки. Следовательно, для круглого цилиндра градиент скорости имеет наибольшее абсолютное значение в задней критической точке, где

$$\frac{dU}{dx} = -2 \frac{U_\infty}{R}.$$

Таким образом, при обтекании круглого цилиндра отрыв пограничного слоя начинается в задней критической точке, и момент начала отрыва, в соответствии с формулой (15.45), равен

$$t_{\text{отр}} = \frac{\frac{R}{U_\infty}}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)}. \quad (15.46)$$

Путь, пройденный цилиндром до момента начала отрыва, составляет

$$s_{\text{отр}} = t_{\text{отр}} U_\infty = \frac{R}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)} = 0,351R.$$

Пример: эллиптический цилиндр [16], [56].

Определим теперь момент начала отрыва пограничного слоя на эллиптическом цилиндре. Пусть полуоси эллипса равны a и b , причем a может быть и больше и меньше b . Отношение полуосей b/a обозначим через k . Начало осей координат поместим в центре эллипса, а оси x и y совместим с осями эллипса, следовательно, уравнением эллипса будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Далее, обозначим через φ угловую координату, определяемую равенствами

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

Пусть цилиндр внезапно приведен в движение в направлении оси a со скоростью U_∞ . Распределение скоростей потенциального течения вдоль контура эллипса определяется формулой

$$\frac{U(s)}{U_\infty} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$$

где s есть длина дуги, измеряемая от передней критической точки. Градиент скорости в направлении течения равен

$$\frac{a}{U_\infty} \frac{dU}{ds} = \frac{(1+k) k^2 \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi)^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что этот градиент имеет наибольшее значение в критической точке только в том случае, если $k^2 < 4/3$. Если же $k^2 > 4/3$, то наибольшее значение градиент скорости имеет в точке с угловой координатой $\varphi = \varphi_m$, определяемой из соотношения

$$\cos^2 \varphi_m = \frac{1}{3(k^2 - 1)}.$$

Соответствующие максимальные значения градиента скорости будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{U_\infty} \left(\frac{dU}{ds} \right)_m &= \frac{1+k}{k} & \text{при } k^2 \leq \frac{4}{3}, \\ \frac{b}{U_\infty} \left(\frac{dU}{ds} \right)_m &= \frac{3\sqrt[3]{3}}{16} \frac{k^3(1+k)}{\sqrt[3]{k^2-1}} & \text{при } k^2 \geq \frac{4}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (15.47)$$

Подставив значения (15.47) в уравнение (15.45), мы получим для момента начала отрыва следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} t_{\text{отр}} \frac{U_\infty}{a} &= \frac{k^2}{\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)(1+k)} & \text{при } k^2 \leq \frac{4}{3}, \\ t_{\text{отр}} \frac{U_\infty}{b} &= \frac{16\sqrt[3]{k^2-1}}{\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)3\sqrt[3]{3}k^3(1+k)} & \text{при } k^2 \geq \frac{4}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (15.48)$$

Вычислив по этим формулам время $t_{\text{отр}}$ для различных k и умножив полученные значения на U_∞ , мы найдем путь $s_{\text{отр}} = t_{\text{отр}} U_\infty$, пройденный эллиптическим цилиндром до момента начала отрыва. График зависимости этого пути от отношения осей b/a изображен на рис. 15.2. Координата y той точки, в которой впервые начинается отрыв, равна

$$y_{\text{отр}} = 0 \quad \text{при } k^2 \leq \frac{4}{3},$$

$$\frac{y_{\text{отр}}^2}{b^2} = 1 - \frac{1}{3(k^2 - 1)} \quad \text{при } k^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Положив в первой из формул (15.48) $k = 1$, мы получим опять формулу (15.46) для круглого цилиндра. При дальнейшем возрастании отношения $k = b/a$ время до начала отрыва становится все меньше, а точка, в которой начинается отрыв, все больше и больше перемещается от конца оси a к концу оси b . В предельном случае, когда $b/a \rightarrow \infty$, т. е. для пластины, поставленной перпендикулярно к направлению потока, $t_{\text{отр}} = 0$ и $y_{\text{отр}} = b$. Следовательно, при поперечном обтекании пластины отрыв потока начинается на ее кромках сразу после начала движения.

Аналогичным способом В. Толмин в своей гётtingенской диссертации (1924) [57] рассчитал развитие во времени пограничного слоя на цилиндре, внезапно приведенном во вращение. В этом случае на той стороне цилиндра, на которой направление вращения совпадает с направлением течения, отрыва потока не происходит совсем.

2. Осесимметричная задача. Развитие пограничного слоя около тел вращения при их внезапном приведении в движение исследовано Э. Больцце в его гётtingенской диссертации [9]. Пусть мы имеем тело вращения, форма которого задана радиусом $r(x)$ его поперечного сечения (см. рис. 11.6), и пусть это тело в момент времени $t = 0$ внезапно приведено в движение в осевом направлении. Для пограничного слоя, образующегося при таком движении, мы имеем уравнения (15.2) и (11.27б). И теперь мы можем разбить

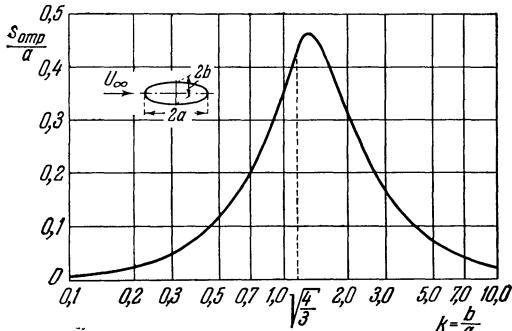


Рис. 15.2. Путь $s_{\text{отр}}$, проходимый эллиптическим цилиндром до момента начала отрыва при внезапном возникновении движения.

решение задачи на два этапа: на определение первого приближения u_0 посредством уравнения (15.12) и на определение второго приближения посредством уравнения (15.13). Так как уравнение неразрывности имеет теперь иной вид [см. уравнение (11.27б)], то функцию тока следует ввести посредством соотношений

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Для самой функции тока возьмем выражение

$$\psi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left\{ rU\zeta_0(\eta) + t \left[rU \frac{dU}{dx} \zeta_{1a}(\eta) + U^2 \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}(\eta) \right] + \dots \right\} \quad (15.49)$$

[ср. с уравнением (15.40); переменная η имеет здесь свое прежнее значение (15.38)]. Следовательно, для продольной скорости мы будем иметь

$$\frac{u}{U} = \zeta'_0 + t \left[\frac{dU}{dx} \zeta_{1a} + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \zeta'_{1b} \right]. \quad (15.50)$$

Подставив выражение $u = U\zeta'_0$ в уравнение (15.12), мы получим для определения ζ_0 дифференциальное уравнение, совпадающее, как уже было сказано, с аналогичным уравнением (15.42) для плоской задачи. Далее, подставив полное выражение (15.50) в уравнение (15.13), мы будем иметь для определения второго приближения ζ_{1a} и ζ_{1b} дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \zeta''_{1a} + 2\eta\zeta''_{1a} - 4\zeta'_{1a} &= 4(\zeta'^2_0 - 1 - \zeta_0\zeta''_0), \\ \zeta''_{1b} + 2\eta\zeta''_{1b} - 4\zeta'_{1b} &= -4\zeta_0\zeta''_0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (15.51)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \zeta_{1a} = \zeta'_{1a} &= 0, & \zeta_{1b} = \zeta'_{1b} &= 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \zeta'_{1a} &= 0, & \zeta'_{1b} &= 0 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Уравнение для определения ζ_{1a} совпадает с уравнением для ζ_1 в плоской задаче. Уравнение для ζ_{1b} было решено Э. Болтьце путем численного интегрирования. Найденные значения ζ'_{1b} и ζ'_{1b} даны в таблице 15.1. Кроме того, на рис. 15.1 изображен график зависимости ζ'_{1b} от η . Начальный наклон кривой $\zeta'_{1b}(\eta)$ в точке $\eta = 0$ равен $\zeta'_{1b}(0) = 0,169$.

Для вычисления времени отрыва подставим в равенство $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$ выражение u из равенства (15.50); мы получим уравнение

$$\zeta''_0(0) + t_{\text{отр}} \left[\frac{dU}{dx} \zeta''_{1a}(0) + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \zeta''_{1b}(0) \right] = 0$$

или, после замены $\zeta''_0(0)$, $\zeta''_{1a}(0)$ и $\zeta''_{1b}(0)$ их значениями, указанными выше,

$$1 + t_{\text{отр}} \left[\frac{dU}{dx} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right) + 0,150 \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \right] = 0. \quad (15.52)$$

Э. Болтьце вычислил в разложении (15.49) функции тока по времени кроме членов ζ_0 и ζ_1 еще два следующих члена.

П р и м е р: ш а р.

Полученные результаты Э. Болтьце применил к исследованию развития во времени пограничного слоя на шаре при его внезапном приведении в движение. Для шара мы имеем

$$r = R \sin \frac{x}{R}, \quad U(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{x}{R},$$

где R есть радиус шара, а U_∞ — скорость набегающего потока. Подставив эти значения r и $U(x)$ в уравнение (15.52), мы получим

$$1 + 1,573t_{\text{отр}} \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R} \cos \frac{x}{R} = 0.$$

Отрыв начинается прежде всего в задней критической точке, где $\cos(x/R) = -1$. Следовательно, для определения момента начала отрыва мы имеем уравнение

$$\frac{3}{2} t_{\text{отр}} \frac{U_{\infty}}{R} = \frac{1}{1,573} = 0,635.$$

Если кроме членов ζ_0 и ζ_1 разложения функции тока использовать еще два следующих члена, вычисленных Э. Болтьце, то вместо 0,635 мы получим более точное значение 0,589. Таким образом, при внезапном приведении шара в движение отрыв пограничного слоя начинается в момент времени

$$t_{\text{отр}} = 0,392 \frac{R}{U_{\infty}}. \quad (15.53)$$

Путь, который шар проходит до момента начала отрыва, равен

$$s_{\text{отр}} = U_{\infty} t_{\text{отр}} = 0,392 R,$$

т. е. составляет по своей величине круглым числом 40% от радиуса шара. Точка отрыва перемещается от азимута $\phi = \pi$ сначала быстро, а затем медленнее к азимуту $\phi \approx 110^\circ$, определяющему положение точки отрыва при стационарном течении. Азимута $\phi \approx 110^\circ$ точка отрыва достигает через бесконечно большой промежуток времени. На рис. 15.3 изображена картина линий тока и распределение скоростей для промежуточной стадии, соответствующей пройденному пути, равному $0,6R$. Если радиус шара равен 10 см, а скорость $U_{\infty} = 10$ см/сек, то такой путь шар проходит в 0,6 сек. Толщина пограничного слоя дана на рис. 15.3 в увеличенном масштабе; для случая кинематической вязкости, равной $\nu = 0,01 \cdot 10^{-4}$ м²/сек (вода), это увеличение примерно тридцатикратное. В замкнутом вихре скорости весьма малы. Наибольшее возрастание скорости и наиболее интенсивное вращение частиц жидкости происходит снаружи от линии тока $\psi = 0$, отходящей из точки отрыва.

Замена действительного разгона идеализированным разгоном в виде рывка допустима, очевидно, лишь при условии, что время, в течение которого происходит действительный разгон, мало по сравнению с промежутком времени, после истечения которого пограничный слой впервые отрывается от тела.

К. Г. Тирио в своей гётtingенской диссертации [55] исследовал развитие во времени пограничного слоя на вращающемся диске. Он рассмотрел два случая: 1) диск, находящийся в покоящейся жидкости, приводится рывком в равномерное вращение; 2) диск, вращающийся вместе с жидкостью, внезапно останавливается. Конечное состояние первого случая соответствует решению В. Г. Кохрэна для диска, вращающегося в покоящейся жидкости (п. 11 § 2 главы V). Конечное состояние второго случая соответствует решению У. Т. Бёдевадта для вращательного движения жидкости над

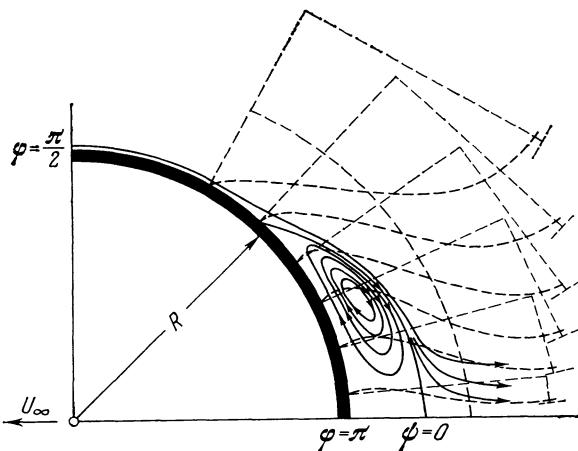


Рис. 15.3. Пограничный слой на кормовой стороне шара при внезапном возникновении движения после отрыва. По Э. Болтьце [9]. Шар прошел путь $0,6R$.

неподвижным основанием (§ 1 главы X). В другой своей работе К. Г. Тирио [54] рассмотрел обобщение этого случая, а именно случай, когда угловая скорость диска, равномерно вращающегося вместе с жидкостью, внезапно увеличивается или уменьшается на небольшую величину. Исследование показало, что в результате такого внезапного изменения угловой скорости на диске образуется стационарный пограничный слой. Расчет нарастания во времени пограничного слоя на вращающемся диске при внезапном приведении последнего во вращение выполнен С. Д. Нигамом [33].

Расчет пограничного слоя на неравномерно вращающемся диске выполнен Э. М. Спарроу и Дж. Л. Грэггом [48], а расчет нарастания пограничного слоя на вращающемся теле вращения — К. Р. Иллингвортом [25] и И. Д. Вадхвой [61]. Г. Вундт [67] исследовал пограничный слой на цилиндре, внезапно приведенном в движение со скольжением, т. е. рассмотрел задачу о нестационарном течении трехмерного пограничного слоя. Другим трехмерным нестационарным пограничным слоям посвящены работы [20], [21], [22], [49] и [50].

Решения уравнений пограничного слоя при трехмерных нестационарных течениях получены также В. Бюстом [66] для тел, совершающих нестационарные движения в направлении, перпендикулярном к направлению обтекания. В частности, им был исследован пограничный слой на круглом цилиндре, совершающем периодическое движение в направлении, перпендикулярном к направлению набегающего потока. Рассмотренное В. Бюстом обтекание плоского клина, совершающего колебания в направлении к передней кромке, содержит в себе как частные случаи осциллирующее обтекание пластины и осциллирующее течение в окрестности критической точки.

§ 3. Развитие пограничного слоя при ускоренном движении

Г. Блазиус рассмотрел плоскую задачу развития пограничного слоя во времени также для случая постепенного разгона с постоянным ускорением и получил результаты, весьма сходные с приведенными выше для случая разгона рывком. Теперь для скорости потенциального течения мы имеем

$$\begin{aligned} U(x, t) &= 0 && \text{при } t \leq 0, \\ U(x, t) &= tw(x) && \text{при } t > 0. \end{aligned} \quad (15.54)$$

Для определения скорости течения вблизи тела мы можем воспользоваться по-прежнему способом последовательных приближений, т. е. представлением скорости в виде суммы (15.11) и последующим применением уравнений (15.12) и (15.13). Взяв для функции тока выражение

$$\psi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left[tw\zeta_0(\eta) + t^3 w \frac{dw}{dx} \zeta_1(\eta) + \dots \right],$$

следовательно, приняв, что

$$u(x, y, t) = U \left(\zeta_0 + t^2 \frac{dw}{dx} \zeta_1 + \dots \right), \quad (15.55)$$

мы получим для определения функций $\zeta_0(\eta)$ и $\zeta_1(\eta)$ дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \zeta_0'' + 2\eta\zeta_0' - 4\zeta_0' &= -4, \\ \zeta_1'' + 2\eta\zeta_1' - 12\zeta_1' &= -4 + 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'') \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (15.56)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \zeta_0' = 0, & \zeta_1 &= \zeta_1' = 0 && \text{при } \eta = 0, \\ \zeta_0 &= 1, & \zeta_1 &= 0 && \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Для первого из уравнений (15.56) Г. Блазиус получил решение

$$\zeta_0' = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right]. \quad (15.57)$$

Он нашел замкнутое решение также для ζ_1' .

Начальные значения функций ζ_0'' и ζ_1'' , необходимые для определения момента начала отрыва пограничного слоя, равны

$$\zeta_0''(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \quad \zeta_1''(0) = \frac{31}{15 \sqrt{\pi}} - \frac{256}{225 \sqrt{\pi^3}} = 0,427 \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

Подставив в уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

вместо u его выражение (15.55) и ограничившись при этом только двумя первыми членами разложения, мы получим для определения момента начала отрыва уравнение

$$\zeta_0''(0) + t_{\text{отр}}^2 \frac{dw}{dx} \zeta_1''(0) = 0$$

или, после внесения вместо $\zeta_0''(0)$ и $\zeta_1''(0)$ их численных значений,

$$1 + 0,427 t_{\text{отр}}^2 \frac{dw}{dx} = 0,$$

откуда

$$t_{\text{отр}}^2 \frac{dw}{dx} = -2,34,$$

или

$$1 + 0,427 t_{\text{отр}} \frac{\partial U(x, t_{\text{отр}})}{\partial x} = 0.$$

Сравнив это решение с решением (15.45), мы увидим, что при одном и том же значении dU/dx отрыв пограничного слоя происходит раньше при разгоне путем рывка, чем при разгоне с постоянным ускорением.

Г. Блазиус вычислил для ряда (15.55), кроме членов ζ_0' и ζ_1' , еще два следующих члена, при использовании которых уравнение для определения момента начала отрыва принимает вид

$$1 + 0,427 \frac{dw}{dx} t_{\text{отр}}^2 - 0,026 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 t_{\text{отр}}^4 - 0,01w \frac{d^2w}{dx^2} t_{\text{отр}}^4 = 0.$$

Для цилиндра, расположенного симметрично относительно направления потока, последний член этого уравнения в задней критической точке равен нулю, и поэтому

$$t_{\text{отр}}^2 \frac{dw}{dx} = -2,08. \quad (15.58)$$

П р м е р: к р у г л ы й ц и л и н д р.

Для круглого цилиндра мы имеем

$$U(x, t) = tw(x) = 2bt \sin \frac{x}{R},$$

где b есть постоянное во времени ускорение. Следовательно,

$$w(x) = 2b \sin \frac{x}{R}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{2b}{R} \cos \frac{x}{R}.$$

Отрыв пограничного слоя и теперь возникает прежде всего в задней критической точке в которой $\cos(x/R) = -1$. Подставив в формулу (15.58) значение dw/dx , мы получим

$$t_{\text{отр}}^2 = 1,04 \frac{R}{b}.$$

Путь, пройденный цилиндром до момента начала отрыва, равен

$$s_{\text{отр}} = \frac{1}{2} b t_{\text{отр}}^2$$

или, после замены $t_{\text{отр}}^2$ его значением, $s_{\text{отр}} = 0,52R$. Следовательно, при постепенном разгоне с постоянным ускорением путь, пройденный цилиндром до момента начала отрыва, длиннее, чем при разгоне путем рывка. Соображения, высказанные в предыдущем параграфе относительно возможного места первого отрыва, применимы и к случаю постепенного

разгона с постоянным ускорением. На рис. 15.4 изображена картина линий тока позади цилиндра, соответствующая состоянию

$$T = t \sqrt{\frac{b}{R}} = 1,58.$$

До наступления этого состояния цилиндр успел продвинуться на расстояние $1,25 R$. Если $R = 10 \text{ см}$, а $b = 0,1 \text{ см/сек}^2$, то $\sqrt{b/R} = 0,1 \text{ сек}^{-1}$, и, следовательно, время t , прошедшее с момента возникновения движения, равно 15,8 сек. Толщина пограничного слоя на рис. 15.4 дана в увеличенном масштабе. Для случая кинематической вязкости, равной $\nu = 0,01 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$ (вода), это увеличение составляет примерно $\sqrt{10}$.

В недавнее время Г. Гёртлер [15] продолжил теоретическое исследование развития пограничного слоя при разгоне. Он принял скорость потенциального течения равной;

$$U(x, t) = w(x) t^n,$$

причем для показателя степени n взял значения $n = 0; 1; 2; 3; 4$. Случай $n = 0$ и $n = 1$ соответствуют рассмотренным выше разгону путем рывка и постепенному разгону с постоянным ускорением. Г. Гёртлер вычислил первый член разложения функции тока в ряд по степеням t для всех пяти случаев. Для второго же члена он вычислил только начальные значения на стенке, т. е. те значения, которые необходимы для определения момента начала отрыва и пути, пройденного телом, например круглым цилиндром, до этого момента. См. в связи с этим также работу Э. Дж. Ватсона [62].

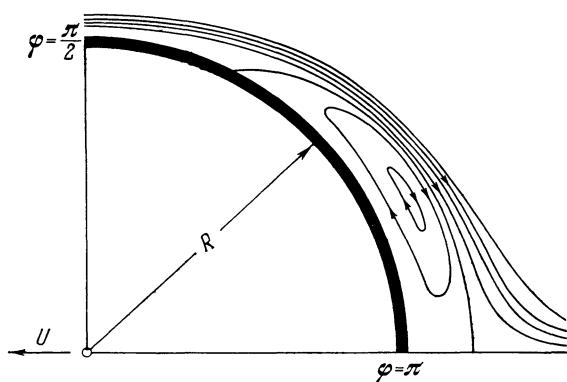


Рис. 15.4. Пограничный слой на кормовой стороне круглого цилиндра после отрыва при разгоне с постоянным ускорением. По Блазиусу. Скорость $U(t) = bt$. На рисунке изображены линии тока в момент времени $T = t\sqrt{b/R} = 1,58$. Момент начала отрыва $t_{\text{отр}} = t_{\text{отр}}\sqrt{b/R} = 1,02$.

начальные значения на стенке, т. е. те значения, которые необходимы для определения момента начала отрыва и пути, пройденного телом, например круглым цилиндром, до этого момента. См. в связи с этим также работу Э. Дж. Ватсона [62].

§ 4. Экспериментальные исследования процесса разгона

Изложенные в предыдущих параграфах способы расчета пограничного слоя при нестационарном движении позволяют проследить развитие течения только в продолжение очень небольшого промежутка времени после начала отрыва. В дальнейшем, когда отрыв уже произошел, течение вне пограничного слоя сильно изменяется, причем особенно сильно в случае тела с тупой кормовой частью, как, например, у круглого цилиндра. Это обстоятельство влечет за собой значительное отклонение действительного распределения давления от теоретического потенциального распределения, вследствие чего использование последнего распределения для продолжения расчета дает совершенно неверные результаты. Представление о действительной картине течения, возникающего позади круглого цилиндра после отрыва пограничного слоя, дает серия фотографий, изображенных на рис. 15.5. Первая фотография (рис. 15.5, а) показывает, что в начальный момент разгона получается такая же картина линий тока, как при невязком потенциальном течении. Вторая фотография (рис. 15.5, б) снята в тот момент, когда в задней критической точке только что начался отрыв пограничного слоя. На третьей фотографии (рис. 15.5, в) точка отрыва уже успела переместиться далеко вверх по течению. Линия тока, отходящая от точки отрыва, окружает область, в которой скорости очень малы. Вихревая напряженность больше всего вне этой линии тока. Здесь образуется вихревой слой, который при дальнейшем развитии течения свертывается в два концентрированных вихря (рис. 15.5, г). В свободном течении позади этой пары вихрей, там,

где сходятся обе линии тока, отходящие из точки отрыва, располагается критическая точка. На пятой фотографии (рис. 15.5, *д*) оба вихря выросли еще больше. В дальнейшем эта пара вихрей становится неустойчивой, внешнее течение отрывает их от цилиндра и увлекает за собой (рис. 15.5, *е*). Наконец, позади цилиндра образуется неправильное пульсирующее течение, создающее такое распределение давления около цилиндра, которое значительно отличается от теоретического потенциального распределения.

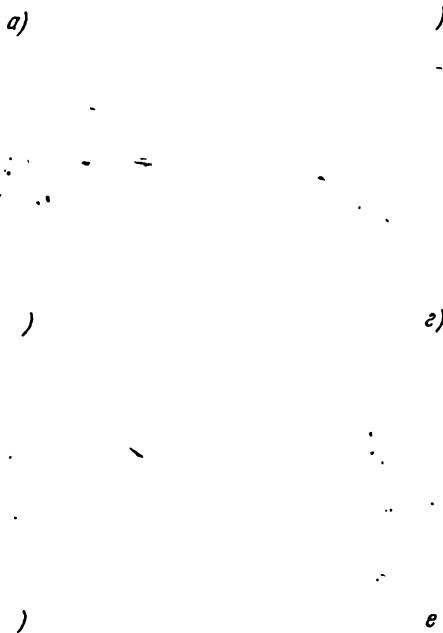


Рис. 15.5. Образование вихря при обтекании круглого цилиндра, начинающемся из состояния покоя.
По Л. Прандтлю.

М. Швабе [44] подробно исследовал такое развитие течения около цилиндра. В частности, он измерил распределение давления вдоль контура цилиндра в различные моменты времени. На рис. 15.6 изображены полученные им распределения давления для различных стадий разгона. Параметр d , характеризующий отдельные кривые, означает расстояние от цилиндра до критической точки, находящейся в свободном течении позади пары вихрей. Мы видим, что в начальной стадии течения измеренное распределение давления довольно близко к теоретическому потенциальному распределению, но при дальнейшем развитии течения все более и более от него отклоняется. Г. Рубах [40] сделал попытку исследовать развитие течения около круглого цилиндра на основе теории потенциального течения. Для этого он принял, что позади кормовой части цилиндра, примерно на таком же

расстоянии, как на рис. 15.5, δ , расположены два симметричных точечных потенциальных вихря. Однако по этому поводу необходимо заметить, что сходство пары действительных вихрей позади цилиндра с парой потенциальных вихрей является весьма условным.

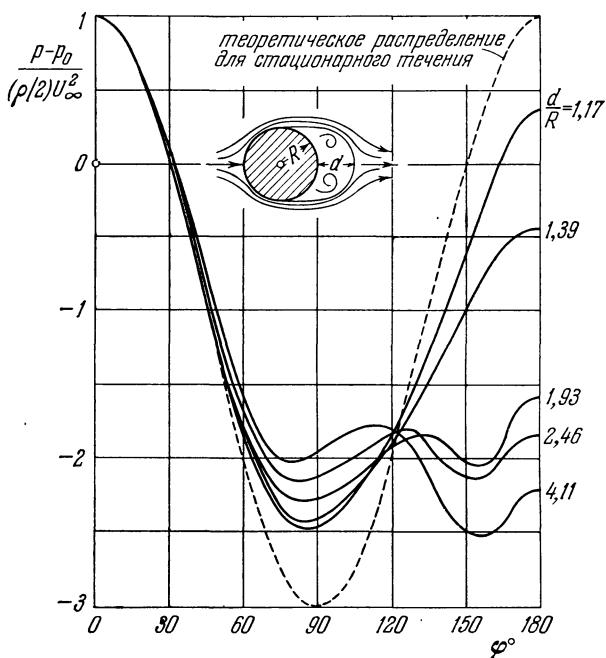


Рис. 15.6. Измеренное распределение давления около круглого цилиндра при разгоне.
По М. Швабе [4].

В заключение упомянем, что для тонких тел, например для тонкого эллиптического цилиндра, обтекаемого в направлении длинной оси эллипса, или для крылового профиля, рассмотренные явления отрыва наблюдаются в значительно меньшей степени, чем для круглого цилиндра. Именно поэтому для тонких тел измеренное распределение давления обычно очень хорошо совпадает с теоретическим потенциальным распределением (см. рис. 1.11).

§ 5. Периодический пограничный слой

1. Осцилирующий цилиндр. В качестве примера периодического пограничного слоя рассмотрим пограничный слой на теле, совершающем гармонические колебания с малой амплитудой в покоящейся жидкости. Такая задача представляет собой не что иное, как обобщение решенной в п. 7 § 1 главы V задачи о пограничном слое на плоской стенке, совершающей гармонические колебания в своей плоскости.

Решение поставленной задачи приводит, как мы сейчас увидим, к примечательному результату: при малых колебаниях тела в покоящейся жидкости вокруг него под действием трения в пограничном слое возникают своеобразные вторичные течения, приводящие всю жидкость в стационарное движение, хотя движение самого тела в жидкости имеет чисто периодический характер. Между прочим, эффектом подобного рода объясняется образование пылевых фигур Кундта.

Пусть при стационарном обтекании рассматриваемого цилиндрического тела потенциальным плоским потоком скорость равна $U_0(x)$; тогда при гармоническом колебании тела с частотой n скорость потенциального течения будет изменяться по закону

$$U(x, t) = U_0(x) \cos nt. \quad (15.59)$$

Если мы введем систему координат, жестко связанную с телом, то для расчета пограничного слоя сумеем воспользоваться уравнениями (15.1) и (15.2), в которых следует положить $\rho = \text{const}$. К уравнениям (15.1) и (15.2) необходимо присоединить еще уравнение (15.6) для распределения давления и граничные условия

$$u = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = U \quad \text{при } y = \infty.$$

Для решения поставленной задачи можно применить опять способ последовательных приближений, рассмотренный в § 1 настоящей главы, следовательно, представить искомую скорость в виде суммы (15.11), а затем проинтегрировать уравнения (15.12) и (15.13). Необходимо, однако, подчеркнуть, что применение такого способа возможно только при условии, если

$$\left| U \frac{\partial U}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|.$$

Преобразуем это условие к несколько иному виду. Легко видеть, что

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \sim \frac{U_m^2}{d},$$

где U_m есть максимальная скорость тела, а d — некоторый линейный размер тела (например, диаметр цилиндра). Далее, очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} \sim U_m n,$$

следовательно,

$$U \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial t} \sim \frac{U_m}{nd}.$$

Наконец,

$$U_m \sim ns,$$

где s есть амплитуда колебаний, и поэтому

$$\frac{U \partial U / \partial x}{\partial U / \partial t} \sim \frac{s}{d} \ll 1.$$

Таким образом, способ последовательных приближений, рассмотренный в § 1, можно применять только в том случае, если амплитуда колебаний значительно меньше линейного размера тела.

Для проведения расчета, предложенного Г. Шлихтингом [41] (см. также [35]), целесообразно представить скорость (15.59) потенциального течения в комплексной форме, т. е. в виде

$$U(x, t) = U_0(x) e^{int},$$

однако с оговоркой, что здесь и в дальнейшем физический смысл имеет только вещественная часть комплексной величины. Далее, введем вместо y безразмерную координату

$$\eta = y \sqrt{\frac{n}{v}} \quad (15.60)$$

и примем, что функция тока в первом приближении имеет вид

$$\Psi_0(x, y, t) = \sqrt{\frac{v}{n}} U_0(x) \zeta_0(\eta) e^{int},$$

следовательно,

$$u_0(x, y, t) = U_0(x) \zeta'_0 e^{int}, \quad v_0(x, y, t) = -\frac{dU_0}{dx} \sqrt{\frac{v}{n}} \zeta_0 e^{int}. \quad (15.61)$$

Подставив значение u_0 в уравнение (15.12), мы получим для определения $\zeta'_0(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$i\zeta'_0 - \zeta''_0 = i,$$

причем граничными условиями будут

$$\zeta_0 = \zeta'_0 = 0 \quad \text{при } \eta = 0,$$

$$\zeta'_0 = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Это уравнение имеет решение

$$\zeta'_0 = 1 - e^{-(1-i)\eta/\sqrt{2}}.$$

Внеся значение ζ'_0 в выражение для скорости u_0 и возвращаясь к вещественной записи¹⁾, мы найдем в качестве первого приближения следующее распределение скоростей:

$$u_0(x, y, t) = U_0(x) \left[\cos(nt) - e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos\left(nt - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (15.62)$$

Для плоской стенки, совершающей колебания в собственной плоскости, мы получили в § 1 главы V решение (5.26а). Там мы использовали систему координат, связанную с покоящейся жидкостью, а не с движущейся стенкой; кроме того, мы ввели там безразмерную координату, отличающуюся от теперешней координаты множителем $1/\sqrt{2}$. Если учесть оба эти обстоятельства, то мы увидим, что решение (15.62) и (5.26а) совпадают.

Если мы подставим полученное первое приближение скорости в уравнение (15.13), то увидим, что в состав конвективных членов в правой части уравнения войдут множители $\cos^2 nt$. Так как

$$\cos^2 nt = \frac{1}{2} (1 + \cos 2nt),$$

то мы можем каждый такой член разбить на два слагаемых, из которых одно не зависит от времени. Имея это в виду, возьмем для функции тока в качестве второго приближения выражение

$$\psi_1(x, y, t) = \sqrt{\frac{v}{n}} U_0(x) \frac{dU_0}{dx} \frac{1}{n} [\zeta_{1a}(\eta) e^{2int} + \zeta_{1b}(\eta)],$$

следовательно, мы будем иметь

$$u_1(x, y, t) = U_0(x) \frac{dU_0}{dx} \frac{1}{n} [\zeta'_{1a} e^{2int} + \zeta'_{1b}],$$

где функция ζ_{1a} определяет периодическую составляющую второго приближения, а функция ζ_{1b} — стационарную составляющую. Подставив это выражение $u_1(x, y, t)$ в уравнение (15.13), мы получим для определений функций ζ_{1a} и ζ_{1b} дифференциальные уравнения

$$2i\zeta'_{1a} - \zeta''_{1a} = \frac{1}{2} (1 - \zeta'^2_0 + \zeta_0 \zeta''_0),$$

$$-\zeta''_{1b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_0 \bar{\zeta}'_0 + \frac{1}{4} (\zeta_0 \bar{\zeta}''_0 + \bar{\zeta}_0 \zeta''_0),$$

¹⁾ Это необходимо для правильного вычисления конвективных членов в правой части уравнения (15.13).

где черточки над буквами поставлены для обозначения сопряженных комплексных величин.

Границные условия для первого уравнения, определяющего периодическое движение, состоят в равенстве нулю нормальной и касательной составляющих скорости на стенке и в равенстве нулю касательной составляющей на большом расстоянии от стенки. Имея в виду эти условия и введя для сокращения записи обозначение $\eta' = \eta/\sqrt{2}$, мы получим

$$\zeta'_{1a} = -\frac{i}{2} e^{-(1+i)\sqrt{2}\eta'} + \frac{i}{2} e^{-(1+i)\eta'} - \frac{i+1}{2} \eta' e^{-(1+i)\eta'}.$$

Для второго уравнения, определяющего стационарное движение, могут быть выполнены только оба граничных условия на стенке; что же касается условия на большом расстоянии от стенки, то можно лишь потребовать, чтобы касательная составляющая скорости имела здесь конечное значение. Учитя эти условия, мы получим

$$\zeta'_{1b} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\eta'} + 2e^{-\eta'} \sin \eta' + \frac{1}{2} e^{-\eta'} \cos \eta' - \frac{\eta'}{2} e^{-\eta'} (\cos \eta' - \sin \eta'),$$

откуда найдем, что

$$\zeta'_{1b}(\infty) = -\frac{3}{4}.$$

Следовательно, на большом расстоянии от стенки, т. е. вне пограничного слоя, существует стационарное течение, скорость которого имеет в направлении колебаний составляющую, равную

$$u_2(x, \infty) = -\frac{3}{4n} U_0 \frac{dU_0}{dx}. \quad (15.63)$$

Таким образом, мы пришли к следующему примечательному результату: при малых колебаниях тела трение вызывает появление не только пограничного слоя, но и добавочного (вторичного) течения на большом расстоянии от тела, и притом такого, которое не зависит от вязкости. Это вторичное течение имеет скорость, определяемую формулой (15.63), и направлено с каждой стороны колеблющегося тела в том направлении, в котором амплитуда потенциального периодического движения убывает.

На рис. 15.7 изображена картина линий тока стационарного вторичного течения около цилиндра, совершающего колебания в горизонтальном направлении. На рис. 15.8 показан снимок течения около такого цилиндра, помещенного в бак с водой. Снимок сделан фотокамерой, двигавшейся вместе с цилиндром. Для придания видимости движению поверхность воды была обсыпана металлическими блестками. Эти блестки, увлеченные течением, получились на фотографии, вследствие очень длительной экспозиции, в виде широких полос. Мы видим, что вода притекает к цилиндру сверху и снизу и оттекает от него в обе стороны в направлении, в котором происходят колебания. Совпадение с теоретической картиной линий тока, изображенной

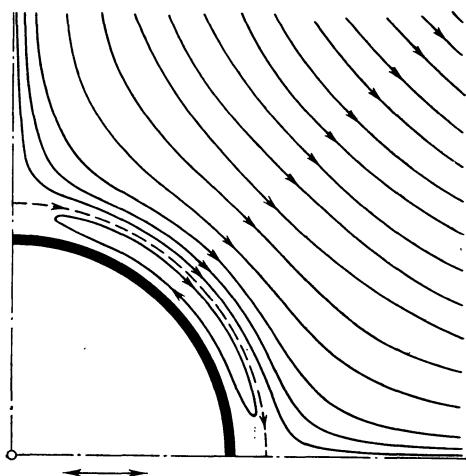


Рис. 15.7. Картина линий тока стационарного вторичного течения в окрестности колеблющегося круглого цилиндра.

на рис. 15.7, получается очень хорошим. Подобного же рода снимки для круглого цилиндра, помещенного в стоячие звуковые волны, были получены Э. Н. Андраде [1], причем для придания видимости вторичному течению был использован дым.

Важно отметить следующее. Уже первое приближение u_0 , определяемое равенством (15.62), показывает, что колебания отдельных слоев жидкости, происходящие с различными фазами, не совпадают по фазе с вынужденными колебаниями и что их амплитуды уменьшаются по мере удаления от стенки. С такой особенностью мы уже встретились при рассмотрении решений

в главе V. Так же, как и те решения, первое приближение u_0 можно было бы получить из дифференциальных уравнений, не содержащих конвективных членов

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad U \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Это дает основание утверждать, что сдвиг фазы, зависящий от y , и уменьшение амплитуды с увеличением расстояния от стенки вызываются исключительно действием вязкости. С другой стороны, во втором приближении u_1 появляется непериодический член, который представляет вторичное стационарное течение, налагающееся на колебательное движение. Отсюда можно сделать вывод, что причиной вторичного течения являются конвективные члены и взаимодействие между инерцией и вязкостью. Следует помнить, что упрощения, получающиеся

Рис. 15.8. Вторичное течение в окрестности колеблющегося круглого цилиндра. Фотокамера, посредством которой сделан снимок, двигалась вместе с цилиндром. Металлические блестки, делающие течение видимым, при своем движении вправо и вперед получаются на фотоснимке, благодаря длительной экспозиции, в виде широких полос.

в результате пренебрежения конвективными членами, приводят к решениям, которые свободны от вторичных течений, и поэтому могут дать ошибочное представление о течении в целом. Вторичные течения обнаруживаются в общем случае только тогда, когда решение учитывает приближение второго порядка.

Рассмотренное явление позволяет дать простое объяснение возникновению пылевых фигур Кундта, посредством которых придается видимость

стационарному вторичному течению, налагающемуся на колебательное движение звуковым волнам в трубе. Звуковые волны представляют собой продольные колебания, следовательно, наибольшие значения амплитуды получаются в пучностях (рис. 15.9), по обе стороны от пучностей, по направлению к узлам, амплитуда убывает. В результате этого и вследствие той же причины, как и выше, возникает стационарное вторичное течение, направленное

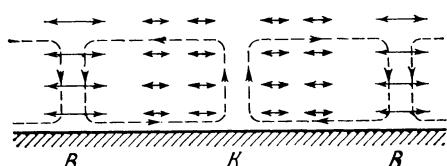


Рис. 15.9. К возникновению пылевых фигур Кундта; B — пучности, K — узлы.

вблизи стенки от пучностей к узлам. Итак, в стоячие звуковые волны вторичное течение направлено в противоположную сторону. Именно это стационарное вторичное течение и осуществляет перенос пыли и ее накопление в узлах. Понятно, что на образование фигур Кундта большое влияние должно оказывать количество пыли. Если пыли много, то колебания воздуха приводят ее в сильное вихревое движение и основная ее масса попадает в область внутреннего течения, вследствие чего пучности не освобождаются от пыли. Если же пыли немного, то действие пристенного течения перевешивает и пучности очень

быстро от нее освобождаются. Этот круг вопросов подробно рассмотрен в литературе по акустике [65].

Аналогичное исследование течения вокруг эллипсоида вращения, совершающего в покоящейся среде колебания, параллельные оси вращения, выполнено А. Гошем [17]. См. в связи с этим также работы Д. Роя [38a], [38b].

2. Периодическое внешнее течение (по Ц. Ц. Линю). В предыдущем пункте мы рассмотрели типичный пример колебаний в покоящейся жидкости. Однако для практических приложений значительно важнее такие задачи, в которых на колебания налагается стационарное основное течение. Некоторое представление о таких задачах дает теория Ц. Ц. Линя, изложенная в § 1 настоящей главы [28].

При внешнем течении вида

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \sin nt \quad (15.64)$$

решение уравнения (15.23) дает для осциллирующей составляющей продольной скорости следующее выражение:

$$u_1(x, y, t) = U_1(x) \left\{ \sin nt - \left[\exp\left(\frac{-y}{\delta_0}\right) \right] \sin\left(nt - \frac{y}{\delta_0}\right) \right\}, \quad (15.65)$$

где

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2n}{\nu}}.$$

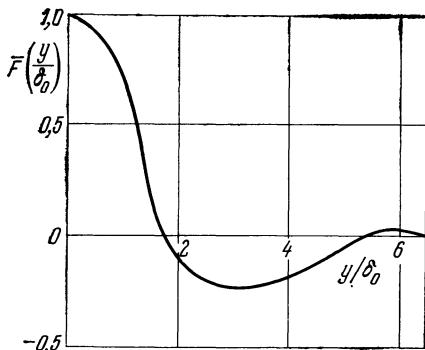


Рис. 15.10. График функции $\bar{F}(y/\delta_0)$ [уравнение (15.67)] при простом гармоническом колебании внешнего течения.

В этом результате характерно смещение фазы возмущающей составляющей $u_1(x, y, t)$ относительно внешнего течения, зависящее от расстояния y от стенки. Далее из уравнения неразрывности (15.27) мы найдем составляющую $v_1(x, y, t)$, также обладающую этим характерным смещением фазы. Зная $u_1(x, y, t)$ и $v_1(x, y, t)$, мы сумеем вычислить по формуле (15.21) дополнительную функцию (дополнительный градиент давления) $F(x, y)$. Мы получим

$$F(x, y) = \frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1}{dx} \bar{F}\left(\frac{y}{\delta_0}\right), \quad (15.66)$$

где

$$\bar{F}\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = \left[\exp\left(-\frac{y}{\delta_0}\right) \right] \left[\left(2 + \frac{y}{\delta_0}\right) \cos\left(\frac{y}{\delta_0}\right) - \left(1 - \frac{y}{\delta_0}\right) \sin\left(\frac{y}{\delta_0}\right) - \exp\left(-\frac{2y}{\delta_0}\right) \right]. \quad (15.67)$$

График этой функции изображен на рис. 15.10. Уравнение (15.66) показывает, что разница между действительным профилем скоростей \bar{u} и квазистационарным профилем u_s , который получился бы при $F(x, y) = 0$, зависит в основном от амплитуды $U_1(x)$ и ее производной dU_1/dx . В частности, если $U_1 = \text{const}$, то даже большие амплитуды осциллирующего внешнего течения не могут вызвать никакого изменения осредненного профиля скоростей.

Из графика функции $\bar{F}(y/\delta_0)$ на рис. 15.10 видно, что наибольшее относительное изменение профиля скоростей происходит вблизи стенки, потому что там функция $\bar{F}(y/\delta_0)$ принимает свое наибольшее значение $\bar{F}(0) = 1$. Так как ускорение частиц, близких к стенке, сравнительно мало, то именно здесь дополнительный градиент давления проявляет себя сильнее.

Для внешнего течения более общего вида

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \sum_k U_{1k}(x) \sin(knt) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (15.68)$$

дополнительная функция равна

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \sum_k U_{1k} \frac{dU_{1k}}{dx} \bar{F}\left(\frac{y}{\delta_{0k}}\right), \quad (15.69)$$

где

$$\delta_{0k} = \sqrt{\frac{2v}{kn}}.$$

Из сказанного выше очевидно, что среднее положение точки отрыва в общем случае зависит от внешнего течения и что точка отрыва сама совершает колебания. Наконец, из самого способа расчета Ц. Ц. Линя следует, что колебания во внешнем течении вызывают в пограничном слое колебания с более высокой частотой.

3. Внешнее течение с небольшим периодическим колебанием. Ряд работ посвящен расчету нестационарных пограничных слоев при внешнем течении, совершающем слабые периодические колебания. При этом было использовано разложение в ряд по степеням возмущающего параметра, приведенное в п. 3 § 1 настоящей главы. Пусть внешним течением будет

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \varepsilon U_1(x) e^{int}. \quad (15.70)$$

Раньше обычно вычислялись только линейные составляющие решений, т. е. значения u_1 , v_1 , T_1 , входящие в выражения (15.30). М. Дж. Лайтхилл [27] предложил приближенный способ решения уравнений (15.32) при произвольных функциях $\bar{U}(x)$ и $U_1(x)$. Случай, когда обе функции заданы в виде степенных рядов, рассмотрен Э. Хори [24]. Течения, при которых $\bar{U}(x)$ и $U_1(x)$ являются степенными функциями x , исследованы Н. Роттом и М. Л. Розенцвайгом [38]. Частными случаями таких течений являются рассмотренное М. Б. Глауэртом [13] и Н. Роттом [37] течение в окрестности критической точки и рассчитанное А. Гошем [17] и С. Джигбелато [11], [12] продольное обтекание плоской пластины. А. Гош [17], а также П. Г. Хилл и А. Г. Стеннинг [23] выполнили измерения нестационарных пограничных слоев.

При внешнем течении вида

$$U(x, t) = cx^m(1 + \varepsilon e^{int}) = \bar{U}(1 + \varepsilon e^{int}) \quad (15.71)$$

из уравнений (15.31) получаются известные дифференциальные уравнения для подобных решений

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f'^2) = 0, \quad (15.72)$$

$$\frac{1}{Pr} \vartheta'' + \frac{m+1}{2} f\vartheta' = 0, \quad (15.73)$$

где

$$cx^m f'(\eta) = u_0,$$

$$\vartheta(\eta) = \frac{T_0 - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

и

$$\eta = y \sqrt{\frac{\bar{U}}{vx}}$$

[ср. с уравнениями (9.8) и (9.8a)]. Положив

$$u_1 = \varepsilon e^{int} \bar{U} \Phi_\eta(\xi, \eta), \quad (15.74)$$

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \varepsilon e^{int} \Theta(\xi, \eta), \quad (15.75)$$

где

$$\xi = \frac{inx}{\bar{U}}, \quad (15.75a)$$

мы получим из уравнений (15.32) следующие уравнения в частных производных для определения $\Phi(\xi, \eta)$ и $\Theta(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f\Phi_{\eta\eta} - (\xi + 2mf)\Phi_\eta + \frac{m+1}{2} f''\Phi - \\ - (1-m)f'\xi\Phi_{\eta\xi} + (1-m)f''\xi\Phi_\xi + \xi + 2m = 0, \end{aligned} \quad (15.76)$$

$$\frac{1}{Pr}\Theta_{\eta\eta} + \frac{m+1}{2}f\Theta_\eta - (1-m)f'\xi\Theta_\xi - \xi\Theta = -\frac{m+1}{2}\Phi\vartheta' - (1-m)\xi\Phi_\xi\vartheta' \quad (15.77)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = \Phi_\eta = \Phi_\xi = \Theta = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \Phi_\eta = 1, \quad \Theta = 0 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{array} \right\} \quad (15.78)$$

Решение этих уравнений в частных производных производится в общем случае путем разложения в ряды, один раз при малом ξ , другой раз при очень большом ξ .

Если принять, что предполагаемое решение имеет вид

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Phi_k(\eta), \quad \Theta(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Theta_k(\eta), \quad (15.79)$$

то при малом ξ для определения функций $\Phi_k(\eta)$ и $\Theta_k(\eta)$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения. Составив производные от этих функций при $\eta = 0$, мы найдем местное касательное напряжение на стенке:

$$\frac{1}{2} c_f' \sqrt{Re_x} = -\frac{\tau_0}{\mu \bar{U} \sqrt{\frac{\bar{U}}{vx}}} = f''(0) + \varepsilon e^{int} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Phi_k''(0) \quad (15.80)$$

и местное число Нуссельта

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = - \left[\Theta'(0) + \varepsilon e^{int} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Theta'_k(0) \right]. \quad (15.81)$$

Отсюда Ф. К. Мур [30] (см. также работы А. Гоша [17] и С. Джаббелато [12]) для продольно обтекаемой пластины нашел

$$\frac{1}{2} c_f' \sqrt{Re_x} = 0,332 + \varepsilon e^{int} \left[0,498 + 0,470 \left(\frac{nx}{U_\infty} \right)^2 + \dots + i \left(0,849, \frac{nx}{U_\infty} + \dots \right) \right], \quad (15.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,296 + \varepsilon e^{int} \left[0,148 + 0,125 \left(\frac{nx}{U_\infty} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots - i \left(0,021, \frac{nx}{U_\infty} + \dots \right) \right] \quad (Pr = 0,72). \end{aligned} \quad (15.83)$$

При $n = 0$ получается квазистационарное решение, т. е. такое решение, которое в каждый момент времени ведет себя так же, как стационарное решение, соответствующее мгновенному внешнему течению. То обстоятельство, что при $n \neq 0$ в правые части формул входят мнимые члены, означает, что в пограничном слое имеет место сдвиг фаз относительно внешнего течения, причем различный для распределения скоростей и для распределения температуры. В то время как максимумы касательного напряжения опережают максимумы скорости внешнего течения (в предельном случае $nx/U_\infty \rightarrow \infty$ фазовый угол равен 45°), максимумы коэффициента теплопередачи отстают (в предельном случае $nx/U_\infty \rightarrow \infty$ фазовый угол равен 90°). Кроме того, при больших nx/U_∞ амплитуда колебаний касательного напряжения с увеличением nx/U_∞ сколь угодно сильно возрастает, амплитуда же колебания теплопередачи с увеличением nx/U_∞ , наоборот, постепенно уменьшается до нуля.

При решении системы уравнений (15.33), определяющих функции $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$ и $T_2(x, y, t)$, в общем случае получается периодическая составляющая с двойной частотой и, кроме того, не зависящая от времени стационарная составляющая, которая изменяет основное течение и может быть истолкована как вторичное течение такого же рода, как и в п. 1 настоящего параграфа.

Для течения в окрестности критической точки, при котором $U_1(x) = \text{const}$, все функции u_2 , v_2 и другие члены более высокого порядка, как показал М. Б. Глаузерт [13], исчезают. В этом случае основное течение вместе с функциями u_1 , v_1 является даже точным решением полных уравнений Навье — Стокса (см. также работу [64]). Посредством преобразования координат из этого решения можно получить решение также для течения в окрестности критической точки на осциллирующей стенке [13], [64], [2]. Тесно связано с этими решениями решение, указанное Дж. Т. Стоартом [52] и обобщенное Дж. Ватсоном [63] на случай обтекания бесконечной плоской пластины с отсасыванием и при периодическом внешнем течении. Продольное обтекание плоской пластины при внешнем течении, возмущаемом бегущей волной, подробно исследовано И. Кестином, П. Ф. Медером и Г. Э. Вангом [26]. Трехмерное нестационарное течение вблизи критической точки круглого цилиндра, осциллирующего параллельно своей образующей, рассмотрено В. Вюстом [66].

4. Осциллирующее течение в трубе. С другим примером периодического пограничного слоя мы сталкиваемся при колебаниях жидкости в трубе, вызванных периодическим изменением перепада давления. Такие колебания могут быть осуществлены попеременным движением поршня то в одну, то в другую сторону. Теория этого явления разработана Т. Зекслем [45] и С. Утидой [60]. Рассмотрим длинную трубу с круглым поперечным сечением. Пусть x есть координата в направлении оси трубы, а r — радиальное расстояние от середины трубы. Можно принять, что рассматриваемое явление не зависит от координаты x , следовательно, не зависит от x и составляющая u скорости в направлении оси трубы. В таком случае остальные составляющие скорости, следовательно и конвективные члены в уравнении движения для направления, совпадающего с осью трубы, исчезнут, и вместо трех уравнений Навье — Стокса (3.36) мы получим без каких бы то ни было упрощений только одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (15.84)$$

с граничным условием

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{т. е. на стенках трубы}).$$

Пусть градиент давления, вызываемый движением поршня, изменяется по гармоническому закону, следовательно,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = K \cos nt, \quad (15.85)$$

где K есть постоянная. И в этом случае целесообразно ввести комплексную форму для записи уравнения (15.85); тогда мы получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = K e^{int},$$

причем физический смысл имеет, конечно, только вещественная часть комплексной величины.

Далее, примем для скорости u следующее выражение:

$$u(r, t) = f(r) e^{int}.$$

Подставив это выражение u в уравнение (15.84), мы получим для распределения амплитуды $f(r)$ дифференциальное уравнение

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{in}{v} f(r) = -\frac{K}{v}.$$

Решив это уравнение, мы найдем распределение скоростей

$$u(r, t) = -i \frac{K}{n} e^{int} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{-in}{v}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\frac{-in}{v}} \right)} \right], \quad (15.86)$$

где J_0 есть функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Вследствие линейности уравнения (15.84) решения (15.86) могут налагаться одно на другое. Исследование решений (15.86) в общем случае, т. е. для любой частоты n , довольно затруднительно вследствие присутствия функций Бесселя с комплексным аргументом. Зато предельные случаи очень малой и очень большой частоты исследуются совсем просто.

Если безразмерная величина $\sqrt{n/v}R$ очень мала (очень медленные колебания), то, разложив функции Бесселя в решении (15.86) в ряды и сохранив в последних только первые два члена, мы получим

$$u(r, t) = -i \frac{K}{n} e^{int} \left(1 - \frac{1 + \frac{in}{4v} r^2}{1 + \frac{in}{4v} R^2} \right) \quad (15.87)$$

или, перейдя опять к вещественной записи,

$$u(r, t) = \frac{K}{4v} e^{int} (R^2 - r^2) = \frac{K}{4v} (R^2 - r^2) \cos nt.$$

Следовательно, при медленных колебаниях давления колебания скорости совершаются в одинаковой фазе с колебаниями давления, причем амплитуда колебаний скорости изменяется вдоль диаметра трубы по параболическому закону, т. е. так же, как при стационарном течении.

Если же безразмерная величина $\sqrt{n/v}R$ очень велика (очень быстрые колебания), то, выполнив асимптотическое разложение функций Бесселя и имея в виду, что

$$J_0(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} i^{-1/2},$$

мы получим

$$u(r, t) = -\frac{iK}{n} e^{int} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left[-(1+i) \sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right] \right\}$$

или, перейдя к вещественной записи,

$$u(r, t) = \frac{K}{n} \left\{ \sin nt - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left(-\sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right) \sin \left[nt - \sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right] \right\}. \quad (15.88)$$

Для больших значений $\sqrt{n/v}R$ второй член в фигурных скобках при увеличении расстояния $R - r$ от стенки быстро уменьшается, поэтому вдали от стенки играет роль только первый член, не зависящий от расстояния от стенки. Следовательно, решение (15.88) обладает свойствами, характерными для пограничного слоя. На большом расстоянии от стенки колебания жидкости происходят без трения и притом в фазе, сдвинутой относительно фазы колебаний возбуждающей силы на половину периода.

На рис. 15.11 изображены профили скоростей осциллирующего течения в трубе при средней частоте ($\sqrt{n/v}R = 5$) в различные моменты времени периода колебаний. Из сравнения с вычерченной внизу кривой изменения

во времени градиента давления ясно видно опережение фазы течения в середине трубы по сравнению со слоями, близкими к стенкам (см. также работу [27]).

Э. Г. Ричардсон и Э. Тайлер [36] исследовали осциллирующее течение в трубе экспериментально. Они измеряли среднее во времени значение квадрата скорости, т. е. величину \bar{u}^2 . Для

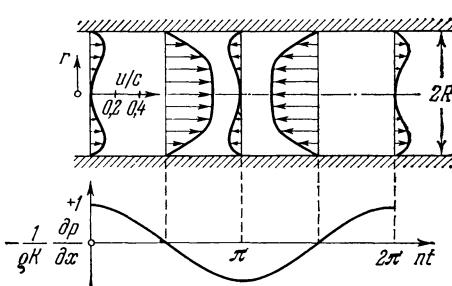


Рис. 15.11. Распределение скоростей при осциллирующем течении в трубе в различные моменты периода колебаний. По С. Утиде [30]. Градиент давления — $\frac{dp}{dx} = \rho K \cos(n\pi)$; $K = \sqrt{n/vR} = 5$; $c = Kk^2/8n = 3,125K/n$.

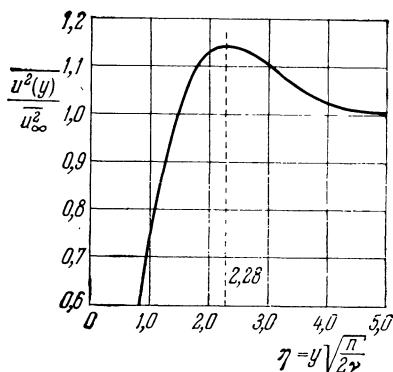


Рис. 15.12. Распределение осредненного во времени квадрата скорости при периодическом течении в трубе (аннулярный эффект Ричардсона [36]). y — расстояние от стенки трубы; $\bar{u}_\infty^2 = K^2/2n^2$ — осредненный во времени квадрат скорости на большом расстоянии от стенки.

случая быстрых колебаний это среднее, как нетрудно видеть из формулы (15.88), равно

$$\bar{u}^2(r) = \frac{K^2}{2n^2} \left\{ 1 - 2 \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left[- \sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right] \cos \left[\sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right] + \frac{R}{r} \exp \left[- 2 \sqrt{\frac{n}{2v}} (R-r) \right] \right\}.$$

Если расстояние от стенки $y = R - r$ мало по сравнению с радиусом R трубы, то отношение R/r приближенно равно единице. Тогда, введя безразмерное расстояние от стенки

$$\eta = (R-r) \sqrt{\frac{n}{2v}} = y \sqrt{\frac{n}{2v}},$$

мы получим из предыдущей формулы

$$\frac{\bar{u}^2(y)}{K^2/2n^2} = 1 - 2 \cos \eta \exp(-\eta) + \exp(-2\eta). \quad (15.89)$$

Вычисленное по формуле (15.89) распределение осредненного во времени квадрата скорости изображено на рис. 15.12. Мы видим, что максимум этого среднего лежит не на большом расстоянии от стенки (т. е. не на оси трубы), а вблизи стенки, на расстоянии

$$\eta = y \sqrt{\frac{n}{2v}} = 2,28$$

(так называемый *аннулярный эффект Ричардсона* [36]). Этот теоретический вывод хорошо совпадает с результатами измерений Э. Г. Ричардсона и Э. Тайлера. Аналогичные расчеты для сжимаемого течения выполнены М. Кшишковским (см. ссылку [61] в главе XI).

§ 6. Сжимаемые нестационарные пограничные слои

Быстрое развитие сверхзвуковой аэродинамики вызвало возрастающий интерес к сжимаемым нестационарным пограничным слоям. Такие пограничные слои возникают, например, в ударных аэродинамических трубах позади ударных волн или волн разрежения. Исследование нестационарных сжимаемых пограничных слоев необходимо также для определения сопротивления трения и теплопередачи быстро летящего тела, ускоряющего или замедляющего свое движение, и, возможно, изменяющего с течением времени вследствие нагревания температуру своих стенок. Ниже мы рассмотрим два простых примера ламинарного нестационарного сжимаемого пограничного слоя. Первый пример будет касаться пограничного слоя позади ударной волны, а второй — пограничного слоя на неравномерно движущейся продольно обтекаемой плоской пластине при переменной во времени температуре стенки. Желающих более подробно ознакомиться с нестационарными сжимаемыми пограничными слоями отсылаем к обзорным работам Э. Беккера [6] и К. Стюартсона [5].

Для простоты предположим, что рассматриваемый газ идеален и имеет постоянную удельную теплоемкость и постоянное число Прандтля. Кроме того, будем считать, что вязкость пропорциональна абсолютной температуре [следовательно, в формуле (13.4а) $\omega = 1$]. В таком случае двумерный динамический и температурный пограничные слои будут описываться уравнениями (15.1) — (15.5) с указанными после этих уравнений граничными условиями. Уравнению неразрывности можно удовлетворить, введя функцию тока $\psi(x, y, t)$. Тогда составляющими скорости будут

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right), \quad (15.90)$$

причем новую координату

$$\bar{y} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy \quad (15.91)$$

можно назвать «эквивалентным несжимаемым» расстоянием от стенки. Значение ρ_0 представляет собой подходящим образом выбранную для сравнения постоянную плотность (см. п. 1 § 4 главы XIII).

1. Пограничный слой позади ударной волны. Рассмотрим пограничный слой (рис. 15.13), образующийся позади прерывной волны сжатия (ударной волны). Состояние покоящегося газа до ударной волны будем отмечать индексом 0, а состояние газа позади ударной волны вне пограничного слоя — индексом ∞ . Ударная волна пусть имеет постоянную скорость U_s . Далее, примем, что внешнее течение позади ударной волны не зависит от x и t , следовательно, будем пренебрегать обратным воздействием пограничного слоя на внешнее течение, которое возникает, например, в ударных трубах. Исследование задачи показывает, что она приводится к подобным решениям, т. е. решения ее зависят не от трех переменных x , y , t , а только от одной-

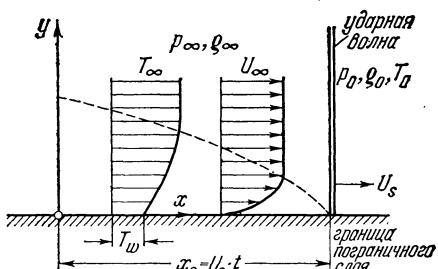


Рис. 15.13. Развитие пограничного слоя позади ударной волны, распространяющейся со скоростью U_s .

единственной переменной

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\sqrt{v_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}} = \int_0^y \frac{\frac{\rho}{\rho_0} dy}{\sqrt{v_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}}. \quad (15.92)$$

Приняв, что функция тока имеет вид

$$\psi(x, y, t) = U_\infty \sqrt{v_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)} f(\eta), \quad (15.93)$$

мы получим следующее распределение скоростей в пограничном слое:

$$u = U_\infty f'(\eta). \quad (15.94)$$

Далее, примем, что распределение температуры имеет вид

$$T = T_\infty \vartheta(\eta). \quad (15.95)$$

Введя выражения (15.94) и (15.95) в уравнения пограничного слоя (15.1) — (15.5), мы будем иметь для определения функций $f(\eta)$ и $\vartheta(\eta)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f''' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) f'' = 0, \quad (15.96)$$

$$\frac{1}{Pr} \vartheta'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) \vartheta' = - \frac{U_\infty^2}{c_p T_\infty} f''^2 \quad (15.97)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f = f' = 0, \quad \vartheta = \frac{T_w}{T_\infty} & \quad \text{при } \eta = 0, \\ f' = 1, \quad \vartheta = 1 & \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (15.98)$$

Решения $u/U_\infty = f'(\eta)$ уравнения (15.96) изображены на рис. 15.14, а. Параметр U_∞/U_s вычерченного семейства кривых представляет собой меру напряженности ударной волны. Наибольшим из возможных значений параметра U_∞/U_s является

$$\frac{U_\infty}{U_s} = \frac{2}{\kappa+1}$$

(бесконечно сильный скачок уплотнения). При $\kappa = 1,4$ это значение равно $U_\infty/U_s = 0,83$. Отрицательным значениям U_∞/U_s соответствуют не существующие в действительности прерывные волны расширения, возникновение которых можно представить себе как результат на самом деле невозможной концентрации непрерывных волн разрежения. В частном случае $U_\infty/U_s = 0$ получается пограничный слой на плоской стенке, внезапно приведенной в движение (первая задача Стокса, см. п. 4 § 1 главы V). Из рис. 15.14, а видно, что толщина пограничного слоя позади скачка уплотнения больше, чем в задаче Стокса, т. е. через некоторый промежуток времени $t - x/U_s$ после прохождения скачка уплотнения толщина пограничного слоя в определенном месте увеличивается больше, чем в задаче Стокса через тот же промежуток времени. В случае волн расширения происходит обратное явление.

Решения линейного дифференциального уравнения (15.97), определяющего функцию $\vartheta(\eta)$, можно представить в виде следующей линейной комбинации двух основных решений:

$$\frac{T - T_\infty}{T_\infty} = \vartheta(\eta) - 1 = \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 r(\eta) - \left[\frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 r(0) + 1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right] s(\eta), \quad (15.99)$$

где $r(\eta)$ и $s(\eta)$ суть решения уравнений

$$\frac{1}{Pr} r'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_S} f \right) r' = -2f'^2, \quad (15.100)$$

$$\frac{1}{Pr} s'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_S} f \right) s' = 0 \quad (15.101)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} r' &= 0, & s &= 1 \quad \text{при } \eta = 0, \\ r &= 0, & s &= 0 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned} \quad \} \quad (15.102)$$

Решения уравнений (15.100) и (15.101) при числе Прандтля $Pr = 0,72$ изображены на рис. 15.14, б и 15.14, в. Значение $r(0)$ есть мера равновесной температуры T_e стенки, т. е. температуры теплоизолированной стенки.

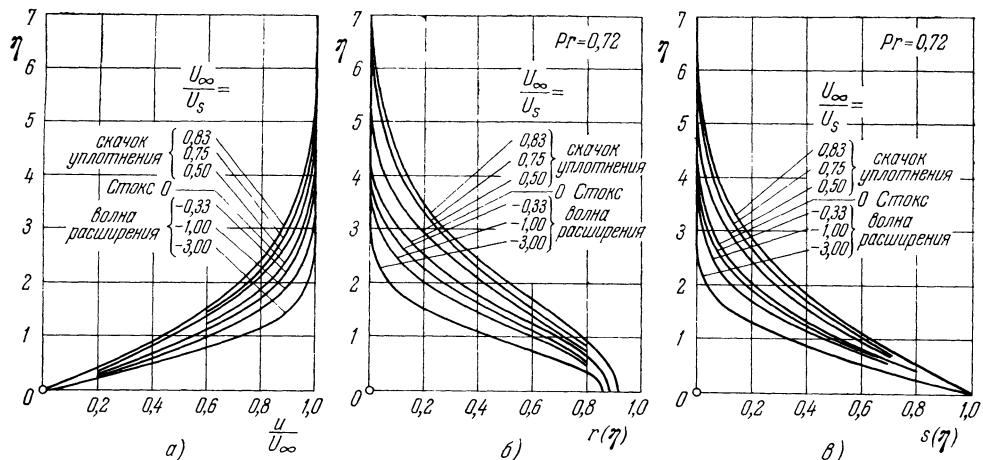


Рис. 15.14. Распределение скоростей и распределение температуры [уравнение (15.106)] в ламинарном пограничном слое позади ударной волны, распространяющейся с постоянной скоростью. По Г. Майрелсу [28a]. Параметр U_∞/U_S характеризует напряженность волн.

В этом случае $\vartheta'(0) = 0$, т. е. $s(\eta) \equiv 0$, и уравнение (15.99) дает для равновесной температуры значение

$$T_e = T_\infty \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 r(0) \right]. \quad (15.103)$$

При числе Прандтля $Pr = 1$ значение $r(0) = 1$. В этом случае равновесная температура тождественна с температурой торможения [см. уравнение (13.17)]. При числах Прандтля, лишь немного отличающихся от единицы, по Г. Майрелсу [28a] получаются следующие приближенные формулы:

$$\text{Для волн сжатия } \left(\frac{U_\infty}{U_S} > 0 \right) \quad r(0) = (Pr)^{0,39 - \frac{0,02}{1-(U_\infty/U_S)}}, \quad (15.104)$$

$$\text{Для волн расширения } \left(\frac{U_\infty}{U_S} < 0 \right) \quad r(0) = (Pr)^{0,50 - \frac{0,13}{1-(U_\infty/U_S)}}. \quad (15.105)$$

Тогда для распределения температуры получим окончательно

$$T - T_\infty = \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 T_\infty r(\eta) + (T_w - T_e) s(\eta). \quad (15.106)$$

Для коэффициента трения

$$c'_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho_w}{2} U_\infty^2}$$

находим

$$c'_f \sqrt{Re} = 2f''(0), \quad (15.107)$$

а для местного числа Нуссельта —

$$Nu = \frac{q}{T_w - T_e} \frac{U_\infty^2 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}{\lambda_w} = Re s'(0), \quad (15.108)$$

где

$$Re = \frac{U_\infty^2 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}{v_w}.$$

Согласно Г. Майрелсу [28a], при числах Прандтля, близких к единице, получаются следующие приближенные формулы:

Для волн сжатия ($U_\infty/U_s > 0$):

$$c'_f \sqrt{Re} = 1,128 \sqrt{1 - 0,346 \frac{U_\infty}{U_s}}, \quad (15.109)$$

$$Nu = \frac{c'_f}{2} Re (Pr)^{0,35 + \frac{0,15}{1-U_\infty/U_s}}. \quad (15.110)$$

Для волн расширения ($U_\infty/U_s < 0$):

$$c'_f \sqrt{Re} = 1,128 \sqrt{1 - 0,375 \frac{U_\infty}{U_s}}, \quad (15.111)$$

$$Nu = \frac{c'_f}{2} Re (Pr)^{0,48 + \frac{0,02}{1-U_\infty/U_s}}. \quad (15.112)$$

При волнах сжатия толщина пограничного слоя больше, чем в задаче Стокса, следовательно, касательное напряжение и коэффициент трения, а также число Нуссельта меньше, чем в задаче Стокса. При волнах расширения получаются обратные соотношения. В частном случае числа Прандтля $Pr = 1$ все формулы для теплопередачи упрощаются и для всех U_∞/U_s принимают вид

$$Nu = \frac{c'_f}{2} Re \quad (Pr = 1), \quad (15.113)$$

уже известный из аналогии Рейнольдса (см. п. 3 § 5 главы XII).

Рассмотренный пограничный слой позади ударной волны, движущейся с постоянной скоростью, представляет собой особенно простой частный случай потому, что посредством выбора системы координат, в которой ударная волна поконится, решение сводится к задаче стационарного движения. Сведения о более общих решениях позади ударных волн и волн расширения можно найти в работах Э. Беккера [3], [4], [6], [7]; а также Г. Майрелса и Дж. Хаммана [29].

2. Продольное обтекание плоской пластины при переменной скорости внешнего течения и переменной температуре стенки. Рассмотрим сжимаемый ламинарный пограничный слой на плоской пластине при переменной во времени скорости $U_\infty(t)$ внешнего течения и при переменной во времени температуре стенки $T_w(t)$. Если пренебречь градиентом давления, то для опре-

деления функции тока ψ [см. соотношения (15.90)] и распределения температуры

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

мы получим уравнения

$$\bar{\psi}_{yt} + \bar{\psi}_y \bar{\psi}_{xy} - \bar{\psi}_x \bar{\psi}_{yy} = \dot{U}_\infty + v_\infty \bar{\psi}_{yyy}, \quad (15.114)$$

$$\vartheta_t + \vartheta \frac{\dot{T}_w}{T_w - T_\infty} + \bar{\psi}_y \vartheta_x - \bar{\psi}_x \vartheta_y = \frac{v_\infty}{Pr} \left[\vartheta_{yy} + \frac{\mu_\infty / \lambda_\infty}{T_w - T_\infty} \bar{\psi}_{yy}^2 \right], \quad (15.115)$$

где $\bar{\psi}$ определяется формулой (15.91), а \dot{U}_∞ и \dot{T}_w означают производные скорости внешнего течения и температуры стенки по времени. Для решения этих уравнений примем, что функция тока и температура ϑ определяются следующими рядами:

$$\psi = \sqrt{v_\infty U_\infty x} [F(\eta) + \zeta_0 f_0(\eta) + \zeta_1 f_1(\eta) + \dots], \quad (15.116)$$

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0(\eta) + \beta_1 \vartheta_1(\eta) + \beta_2 \vartheta_2(\eta) + \dots + \zeta_0 h_0(\eta) + \zeta_1 h_1(\eta) + \zeta_2 h_2(\eta) + \dots \\ \dots + \frac{U_\infty^2}{2c_p(T_w - T_\infty)} [S(\eta) + \zeta_0 s_0(\eta) + \zeta_1 s_1(\eta) + \dots], \end{aligned} \quad (15.117)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right), & \zeta_1 &= \frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right)^2, \dots, \\ \beta_1 &= \frac{\dot{T}_w}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right), & \beta_2 &= \frac{\ddot{T}_w}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right)^2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (15.118)$$

а

$$\eta = \frac{\bar{y}}{2x} \sqrt{\frac{U_\infty x}{v_\infty}}$$

есть новая безразмерная координата.

Если мы введем эти выражения ψ и ϑ в дифференциальные уравнения пограничного слоя, то получим для определения функций $F(\eta)$, $f_0(\eta)$, \dots обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых при $Pr = 0,72$ даны в работах [34] и [46]. Функции $F(\eta)$, $\vartheta_0(\eta)$ и $S(\eta)$ тождественны с решениями стационарной задачи для мгновенной скорости U_∞ (квазистационарное течение). Дальнейшие решения отклоняются от квазистационарного решения.

Отношение касательного напряжения на стенке τ_w к касательному напряжению τ_{ws} квазистационарного течения равно

$$\frac{\tau_w}{\tau_{ws}} = 1 + \frac{x}{U_\infty} \left[2,555 \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} - 1,414 \frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right) + \dots \right]. \quad (15.119)$$

Для тепловых потоков аналогичным образом получается при $Pr = 0,72$ отношение (см. работу [47])

$$\begin{aligned} \frac{q}{q_s} = 1 + \frac{x}{U_\infty} \left\{ 2,39 \frac{\dot{T}_w}{T_w - T_{es}} + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} \left[0,0692 \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_{es}} - 0,0448 \frac{T_\infty - T_{es}}{T_w - T_{es}} \right] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (15.120)$$

где

$$T_{eS} = T_{\infty} + 0,848 \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} \quad (15.121)$$

есть равновесная температура квазистационарного течения.

При использовании изложенного в этом пункте способа следует иметь в виду, что выражения $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ при заданных функциях $U_{\infty}(t)$ и $T_w(t)$ в общем случае зависят одно от другого, на что обратил внимание Х. Цуджи [59].

Литература к главе XV

1. A n d r a d e E. N., On the circulation caused by the vibration of air in a tube. Proc. Roy. Soc. A 134, 447—470 (1931).
2. A r d u i n i C., Stato limite incompressibile laminare nell'intorno del punto di ristagno di un cilindro indefinito oscillante. L'Aerotecnica 41, 341—346 (1961).
3. B e c k e r E., Das Anwachsen der Grenzschicht in und hinter einer Expansionswelle. Ing.-Arch. 25, 155—163 (1957).
4. B e c k e r E., Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungsstößen und Expansionswellen. ZFW 7, 61—73 (1959).
5. B e c k e r E., Die laminare inkompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand. Z. Flugwiss. 8, 308—316 (1960).
6. B e c k e r E., Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungsstößen und Expansionswellen. В книге Progress in Aero. Sci., т. 1 (редакторы A. Ferri, D. Küchemann, L. H. Sterne), 104—173, London 1961.
7. B e c k e r E., Anwendung des numerischen Fortsetzungsverfahrens auf die pseudostationäre, kompressible laminare Grenzschicht in einem Stoßwellenrohr. ZFW 10, 138—147 (1962).
8. B l a s i u s H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. 56, 1 (1908).
9. B o l t z e E., Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Диссертация, Göttingen 1908.
10. G e i s Th., Bemerkung zu den «ähnlichen» instationären laminaren Grenzschichtströmungen. ZAMM 36, 396—398 (1956).
11. G i b e l l a t o S., Strato limite attorno ad una lastra piana investita da un fluido incompressibile clotato di una velocità che è somma di una parte costante e di una parte alternata. Atti della Accademia delle Scienze di Torino 89, 180—192 (1954—1955) и 90, 13—24 (1955—1956).
12. G i b e l l a t o S., Strato limite termico attorno a una lastra piana investita da una corrente lievemente pulsante di fluido incompressibile. Atti della Accademia delle Scienze di Torino 91, 152—170 (1956—1957).
13. G l a u e r t M. B., The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. J. Fluid Mech. 1, 97—110 (1956).
14. G o l d s t e i n S., R o s e n h e a d L., Boundary layer growth. Proc. Cambr. Phil. Soc. 32, 392—401 (1936).
15. G ö r t l e r H., Verdrängungswirkung der laminaren Grenzschicht und Druckwiderstand. Ing.-Arch. 14, 286—305 (1944).
16. G ö r t l e r H., Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Arch. d. Math. 1, 138—147 (1948).
17. G o s h A., Contribution à l'étude de la couche limite laminaire instationnaire. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air. № 381 (1961).
18. G r i b b e n R. J., The laminar boundary layer on a hot cylinder fixed in a fluctuating stream. J. Appl. Mech. 28, 339—346 (1961).
19. H a s s a n H. A., On unsteady laminar boundary layers. J. Fluid Mech. 9, 300—304 (1960); см. также JAS 27, 474—476 (1960).
20. H a y a s i N., On similar solutions of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. J. Phys. Soc. Japan 16, 2316—2329 (1961).
21. H a y a s i N., On semi-similar solutions of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. J. Phys. Soc. Japan 17, 194—203 (1962).
22. H a y a s i N., On the approximate solution of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. J. Phys. Soc. Japan 17, 203—212 (1962).
23. H i l l P. G., S t e n n i n g A. H., Laminar boundary layers in oscillatory flow. J. Basic Engg. 82, 593—608 (1960).
24. H o r i E., Unsteady boundary layers. Bulletin of JSME 4, 664—671 (1961); 5, 57—64 (1962); 5, 64—72 (1962); 5, 461—470 (1962).

25. Illingworth C. R., Boundary layer growth on a spinning body. *Phil. Mag.* **45**, (7), 1–8 (1954). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1955, № 1 (29).]
26. Kestin J., Maeder P. F., Wang W. E., On boundary layers associated with oscillating streams. *Appl. Sci. Res. A* **10**, 1–22 (1961).
27. Lighthill M. J., The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Roy. Soc. A* **224**, 1–23 (1954).
28. Lin C. C., Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow. *Proc. 9th Intern. Congress Appl. Mech. Brüssel* 1957, т. 4, 155–167.
- 28a. Mirels H., Boundary layer behind shock or thin expansion wave moving into stationary fluid. NACA TN 3712 (1956).
29. Mirels H., Hammam J., Laminar boundary layer behind strong shock moving with nonuniform velocity. *Physics of Fluids* **5**, 91–96 (1962).
30. Moore F. K., Unsteady, laminar boundary layer flow. NACA TN 2471 (1951).
31. Moore F. K., Ostrach S., Average properties of compressible laminar boundary layer on a flat plate with unsteady flight velocity. NACA TN 3886 (1956).
32. Moore F. K., On the separation of the unsteady laminar boundary layer. IUTAM-Symposium. Grenzschichtforschung Freiburg 1957, 296–311, Berlin 1958.
33. Nigam S. D., Zeitliches Anwachsen der Grenzschicht an einer rotierenden Scheibe bei plötzlichem Beginn der Rotation. *Quart. Amer. Math.* **9**, 89–91 (1951).
34. Ostrach S., Compressible laminar boundary layer and heat transfer for unsteady motions of a flat plate. NACA TN 3569 (1955).
35. Lord Rayleigh, On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **175**, 1–21 (1884).
36. Richardson E. G., Tyler E., The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established. *Proc. Phys. Soc. London* **42**, 1–15 (1929).
37. Rott N., Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. *Quart. Appl. Math.* **13**, 444–451 (1956).
38. Rott N., Rosenzweig M. L., On the response of the laminar boundary layer to small fluctuations of the free-stream velocity. *JAS* **27**, 741–747, 787 (1960).
- 38a. Røy D., Non-steady periodic boundary layer. *J. Appl. Math. Phys.* **XII**, 363–366 (1961).
- 38b. Røy D., On the non-steady boundary layer. *ZAMM* **42**, 252–256 (1962).
39. Розин Л. А., Приближенный метод интегрирования уравнений нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. *Прикл. матем. и мех.* **21**, вып. 5 (1957).
40. Rubach H., Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares bei zylindrischen Körpern. Диссертация, Göttingen 1914. VDI-Forschungsheft 185 (1916).
41. Schlichting H., Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Z* **33**, 327–335 (1932).
42. Schuh H., Calculation of unsteady boundary layers in two-dimensional laminar flow. *ZFW* **1**, 122–131 (1953).
43. Schuh H., Über die »ähnlichen« Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichungen in inkompressibler Strömung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 147–152.
44. Schwabe M., Über Druckermittlung in der instationären ebenen Störung. *Ing.-Arch.* **6**, 34–50 (1935); NACA TM 1039 (1943).
45. Sexpl Th., Über den von E. G. Richardson entdeckten »Annulareffekt«. *Z. Phys.* **61**, 349 (1930); см. также Tollmien W., Handb. d. Exper.-Phys. IV, часть I, 281–282, 1931.
46. Sparrow E. M., Gregg J. L., Nonsteady surface temperature effects on forced convection heat transfer. *JAS* **24**, 776–777 (1957).
47. Sparrow E. M., Combined effects of unsteady flight velocity and surface temperature on heat transfer. *Jet Propulsion* **28**, 403–405 (1958).
48. Sparrow E. M., Gregg J. L., Flow about an unsteady rotating disc. *JAS* **27**, 252–257 (1960).
49. Squire L. C., Boundary layer growth in three dimensions. *Phil. Mag.* **45** (7), 1272–1283 (1954).
50. Squire L. C., The three-dimensional boundary layer equations and some power series solutions. ARC RM 3006 (1955).
51. Stewartson K., The theory of unsteady laminar boundary layers. *Adv. Appl. Mech.* **VI**, 1–37 (1960).
52. Stuart J. T., A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Roy. Soc. A* **231**, 116–130 (1955).
53. Tani I., An example of unsteady laminar boundary layer flow. Inst. Univ. of Tokyo, Report № 331 (1958) и Grenzschichtforschung—IUTAM-Symposium, Freiburg 1957, Berlin 1958, 347.

54. T h i r i o t K. H., Untersuchungen über die Grenzschicht einer Flüssigkeit über einer rotierenden Scheibe bei kleiner Winkelgeschwindigkeitsänderung. ZAMM 22, 23—28 (1942).
55. T h i r i o t K. H., Grenzschichtströmung kurz nach dem plötzlichen Anlauf bzw. Abstoppen eines rotierenden Bodens. ZAMM 30, 390—393 (1950); см. также ZAMM 20, 1—13 (1940).
56. T o l l m i e n W., Grenzschichten. Handb. d. Exper.-Physik IV, часть I, 274, 1931.
57. T o l l m i e n W., Die zeitliche Entwicklung der laminaren Grenzschicht am rotierenden Zylinder. Диссертация, Göttingen 1924; см. также Handb. d. Exper.-Physik IV, часть I, 277, 1931.
58. T r i m p i R. L., C o h e n N. B., An integral solution to the flat plate laminar boundary layer flow existing inside and after expansion waves moving into quiescent fluid with particular application to the complete shock tube flow. NACA TN 3944 (1957).
59. T s u j i H., Note on the solution of the unsteady laminar boundary layer equations. JAS 20, 295—296 (1953).
60. U c h i d a S., The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. ZAMP VII, 403—422 (1956).
61. W a d h w a Y. D., Boundary layer growth on a spinning body; accelerated motion. Phil. Mag. 3(8), 152—158 (1958). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1958, № 6 (52).]
62. W a t s o n E. J., Boundary layer growth. Proc. Roy. Soc. A 231, 104—116 (1955).
63. W a t s o n J., A solution of the Navier-Stokes-equations, illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity. Quart. J. Mech. Appl. Math. 11, 302—325 (1958).
64. W a t s o n J., The two-dimensional laminar flow near the stagnation point of a cylinder which has an arbitrary transverse motion. Quart. J. Mech. Appl. Math. 12, 175—190 (1959).
65. W e s t e r v e l t P. J., The theory of steady rotational flow generated by a sound field. J. Acoust. Soc. Amer. 25, 60—67 (1953).
66. W u e s t W., Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationärer Querbewegung. ZAMM 32, 172—178 (1952).
67. W u n d t H., Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylindern bei Anfahrt aus der Rule. Ing.-Arch. 23, 212—230 (1955).
68. Y a n g K. T., Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow. J. Appl. Mech. 25, 421—427 (1958).
69. Y a n g K. T., Unsteady laminar boundary layers over an arbitrary cylinder with heat transfer in an incompressible flow. J. Appl. Mech. 26, 171—178 (1959).

Часть третья

Переход ламинарной формы течения в турбулентную

Глава XVI

Возникновение турбулентности I

(некоторые экспериментальные результаты; основы теории устойчивости и ее экспериментальное подтверждение для пограничного слоя на пластине)

§ 1. Некоторые экспериментальные результаты, относящиеся к переходу ламинарного течения в турбулентное

1. Переход ламинарного течения в турбулентное в трубе. Течения реальной жидкости во многих случаях резко отличаются от ламинарных течений, рассмотренных в предыдущих главах. Они обладают некоторым особым свойством, которое называется *турбулентностью*. При возрастании числа Рейнольдса в течениях реальной жидкости как в трубах и каналах, так и в пограничном слое на обтекаемом теле происходит отчетливо выраженный переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход ламинарного течения в турбулентное, называемый также *возникновением турбулентности*, имеет фундаментальное значение для всей гидроаэродинамики. Раньше всего явление перехода было замечено при наблюдении течений в прямых трубах и каналах. В длинной прямой трубе с постоянным поперечным сечением и с гладкими стенками каждая частица жидкости движется при небольших числах Рейнольдса с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. Вследствие вязкости частицы жидкости, близкие к стенкам, текут медленнее, чем частицы, более удаленные от стенок. Течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев (*слоистое*, или *ламинарное, течение*, рис. 2.18, а). Однако наблюдения показывают, что при более высоких числах Рейнольдса течение перестает быть упорядоченным (рис. 2.18, б). Возникает сильное перемешивание, которое в случае течения в трубе легко сделать видимым, если ввести в поток окрашенную струйку жидкости. Впервые это сделал О. Рейнольдс [47]. До тех пор, пока течение остается ламинарным, введенная в него окрашенная жидкость движется в трубе в виде резко очерченной струйки, но, как только течение становится турбулентным, эта струйка расплывается и почти равномерно окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость. Это показывает, что при турбулентном течении на главное течение жидкости, происходящее в направлении оси трубы, налагаются поперечные движения, т. е. движения, происходящие в направлении, перпендикулярном к оси трубы. Эти поперечные движения и приводят к перемешиванию движущейся жидкости. В результате такого перемешивающего движения происходит обмен импульсами в поперечном направлении, в то время как в продольном направлении каждая частица в основном сохраняет свой импульс. Это приводит к тому, что распределение скоростей по поперечному сечению трубы при турбулентном течении получается значительно более

равномерным, чем при ламинарном. На рис. 16.1 изображены измеренные распределения скоростей для ламинарного и турбулентного течений в трубе. В то время как при ламинарном течении распределение скоростей по поперечному сечению имеет, как это обнаружили уже Хаген и Пуазейль, вид параболы (см. рис. 1.2), при турбулентном течении, вследствие обмена импульсами в поперечном направлении, оно сильно стягивается, т. е. становится значительно равномернее. Более подробный анализ турбулентного течения показывает, что его самым основным признаком является следующий: скорость и давление в каждой фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а изменяются, претерпевая весьма нерегулярные пульсации высокой частоты (см. рис. 16.17 на стр. 443). Скорость в фиксированной точке пространства можно рассматривать как величину, постоянную во времени, только в среднем и притом для сравнительно большого промежутка времени (квазистационарное движение).

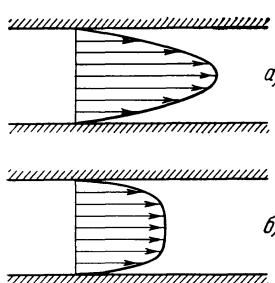


Рис. 16.1. Распределение скоростей в трубе: а) при ламинарном течении; б) при турбулентном течении.

[47]. Им же был осуществлен упомянутый выше и названный его именем опыт с окрашенной струйкой. В результате своих исследований О. Рейнольдс открыл закон подобия, также названный впоследствии его именем. Согласно этому закону, переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит всегда при приблизительно одинаковом числе Рейнольдса $\bar{w}d/v$, где $\bar{w} = Q/F$ есть средняя скорость течения (Q — количество жидкости, протекающей в трубе в единицу времени, а F — площадь поперечного сечения трубы). Для числа Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное (так называемое критическое число Рейнольдса), опыты дали значение, приблизительно равное

$$Re_{kp} = \left(\frac{\bar{w}d}{v} \right)_{kp} = 2300. \quad (16.1)$$

Следовательно, те течения в трубе, для которых $Re < Re_{kp}$, ламинарны, а те течения, для которых $Re > Re_{kp}$, турбулентны. Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа в трубу и от условий притекания жидкости к этому входу. Уже Рейнольдс высказал предположение, что критическое число Рейнольдса тем больше, чем меньше возмущения в жидкости, притекающей к входу в трубу. Это было подтверждено опытами Г. Т. Бэрнса и Э. Г. Кокера [1], а затем Л. Шиллера [55], в которых для Re_{kp} были получены значения до 20 000. В. В. Экману [16] путем особенно тщательного уменьшения возмущений при входе в трубу удалось получить критическое число Рейнольдса около 40 000. Насколько сильно можно повысить критическое число Рейнольдса путем тщательного устранения возмущений при входе в трубу, пока неизвестно. Но зато самые различные эксперименты показали, что существует нижняя граница для Re_{kp} , лежащая приблизительно при 2000. При числах Рейнольдса, меньших этого значения, со временем затухают даже самые сильные возмущения.

С переходом ламинарного течения в турбулентное связано также резкое изменение закона сопротивления при движении в трубе. В то время как при ламинарном течении перепад давления, под действием которого происходит течение, пропорционален первой степени скорости течения (§ 4 главы I), при турбулентном течении этот перепад пропорционален приблизительно

квадрату средней скорости течения. Очевидно, что причиной повышения сопротивления является турбулентное перемешивание. Изменение закона сопротивления при переходе ламинарного течения в турбулентное показано на рис. 20.1 (см. стр. 538).

Новые весьма тщательные экспериментальные исследования перехода ламинарного течения в трубе в турбулентное показали, что в определенной области чисел Рейнольдса течение в окрестности критического числа Рейнольдса носит перемежающийся характер, т. е. временами является ламинарным, а временами — турбулентным. На рис. 16.2 изображены результаты,

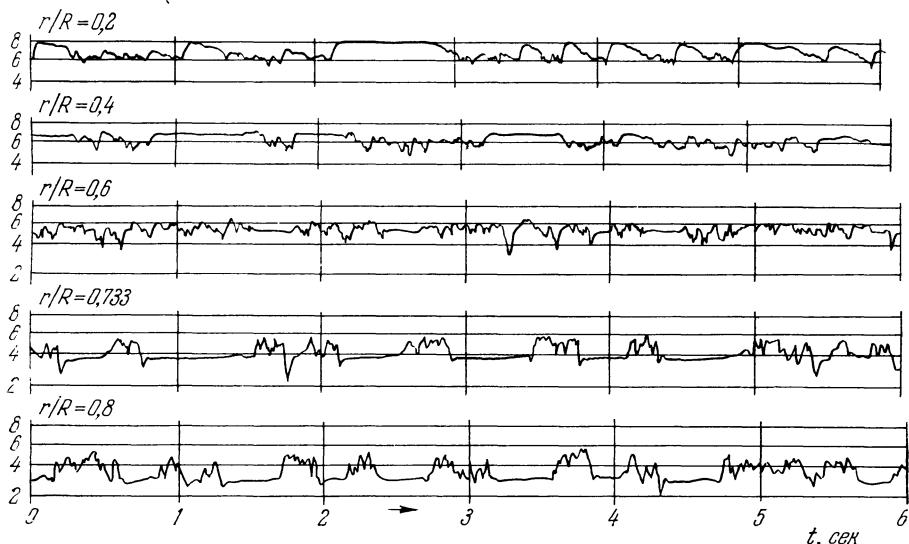


Рис. 16.2. Осциллограммы скорости при течении в трубе в области перехода ламинарного течения в турбулентное на различных расстояниях от оси трубы. По измерениям И. Ротты [50]. Число Рейнольдса $Re = \frac{wd}{v} = 2550$; текущее расстояние от входа в трубу $x/d = 332$; $w = 4,27 \text{ м/сек}$; скорость w в м/сек ; время t в секундах. Эти осциллограммы, полученные посредством термоанемометра, показывают перемежающийся характер течения, т. е. чередование интервалов с ламинарным и турбулентным течением.

которые получил И. Ротта [50] для зависимости скорости от времени на разных расстояниях r/R от оси трубы. Мы видим, что смена ламинарных и турбулентных состояний происходит через неравномерные промежутки времени. В точках вблизи оси трубы скорость в те промежутки времени, когда течение ламинарно, больше средней скорости в те промежутки, когда течение турбулентно. В точках же вблизи стенок трубы имеет место обратное соотношение. Так как в этих опытах количество протекающей через трубу жидкости поддерживалось длительное время постоянным, то из указанных фактов следует сделать вывод, что за время перемежающейся стадии распределение скоростей попеременно становится то ламинарным (рис. 16.1, а), то турбулентным (рис. 16.1, б).

Физический характер такого перемежающегося течения можно хорошо описать посредством *коэффициента перемежаемости* γ , указывающего, какую долю некоторого промежутка времени в определенном месте трубы существует турбулентное течение. Следовательно, коэффициент $\gamma = 1$ означает, что течение все время турбулентно, а коэффициент $\gamma = 0$ показывает, что течение все время ламинарно. На рис. 16.3 изображена зависимость коэффициента перемежаемости от расстояния x от входа в трубу для различных чисел Рейнольдса. При постоянном числе Рейнольдса коэффициент перемежаемости непрерывно возрастает с увеличением расстояния от входа

в трубу. Измерения И. Ротты выполнялись при числах Рейнольдса от $Re = 2300$ до 2600 , т. е. в области чисел Рейнольдса, в которой происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную. При числах Рейнольдса, лежащих вблизи нижней границы этой области, развитие явления перехода ламинарного течения в турбулентное происходит на очень большой длине трубы, измеряющейся тысячами диаметров трубы.

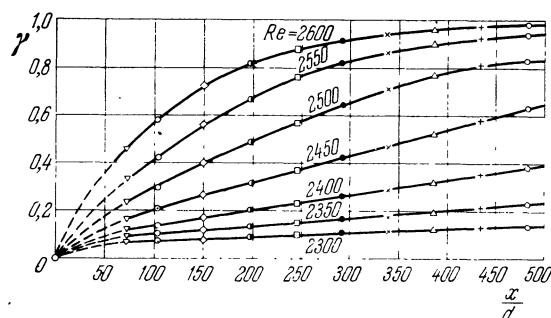


Рис. 16.3. Зависимость коэффициента перемежаемости γ в трубе в области перехода ламинарной формы течения в турбулентную от текущей длины x при различных числах Рейнольдса Re . По измерениям И. Ротты [50]. Значение $\gamma = 1$ соответствует сохранению чисто турбулентного, а значение $\gamma = 0$ — сохранению чисто ламинарного течения.

ничный слой ламинарным или турбулентным в пограничном слое на обтекаемом теле из ламинарной формы зависит от многих факторов, из которых, кроме числа Рейнольдса, наиболее важными являются характер изменения давления во внешнем течении, состояние поверхности стенок (степень их шероховатости) и наличие возмущений во внешнем течении (степень турбулентности).

Плохо обтекаемые тела. С переходом течения в пограничном слое из ламинарного в турбулентное связано явление, которое особенно заметно у плохо обтекаемых тел, например у шара и круглого цилиндра. Из рис. 1.4 и 1.5 видно, что коэффициенты сопротивления круглых цилиндров и шаров при числе Рейнольдса $Re = VD/v$, равном приблизительно $3 \cdot 10^5$, внезапно сильно уменьшаются. Это резкое уменьшение коэффициента сопротивления, которое для шара было впервые обнаружено Г. Эйфелем [15], объясняется тем, что пограничный слой при указанном числе Рейнольдса становится турбулентным. Турбулизация пограничного слоя приводит к перемещению его точки отрыва от тела вниз по течению, т. е. ближе к заднему концу тела, вследствие чего мертвая зона позади тела становится значительно более узкой. Правильность такого объяснения Л. Прандтль [41] подтвердил следующим опытом. На шар, немного впереди его экватора, было надето тонкое проволочное кольцо. Благодаря присутствию кольца турбулизация пограничного слоя наступала при меньшем числе Рейнольдса, чем без кольца. В результате получилось такое же уменьшение коэффициента сопротивления, как и без кольца, но при большем числе Рейнольдса. На рис. 2.20 и 2.21 изображены фотографии обтекания шара дымом для докритического состояния с большой мертввой зоной и большим коэффициентом сопротивления и для сверхкритического состояния с меньшей мертввой зоной и меньшим коэффициентом сопротивления. Сверхкритическое состояние было достигнуто благодаря тому, что на шар было надето кольцо. Эти опыты убедительно показали, что внезапное падение коэффициента сопротивления шара можно понимать только как эффект пограничного слоя, связанный с переходом в нем ламинарного течения в турбулентное.

Пластина, обтекаемая в продольном направлении. Переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную легче просле-

дить не на плохо обтекаемом теле, а на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. Если пограничный слой на пластине ламинарен, то, согласно сказанному в § 5 главы VII, его толщина возрастает пропорционально \sqrt{x} , где x есть расстояние от передней кромки пластины.¹⁾ Переход ламинарного пограничного слоя на пластине в турбулентный впервые исследовался И. М. Бюргерсом [3] и Б. Г. Ван дер Хегге-Цейненом [27], а позднее М. Ханзеном и особенно детально Х. Л. Драйденом [9], [10], [11]. Вблизи передней кромки пластины пограничный слой всегда ламинарен¹⁾, но ниже по течению он становится турбулентным. На пластине с острой передней кромкой, обдуваемой обычным потоком воздуха, т. е. потоком воздуха, степень турбулентности ε которого (см. п. 1 § 4 главы XVI) приближенно равна 0,5%, переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную происходит на расстоянии x от передней кромки, определяемом из равенства

$$Re_{kp} = \left(\frac{U_{\infty} x}{v} \right)_{kp} = 3,5 \cdot 10^5 \div 10^6.$$

При обтекании пластины в продольном направлении можно, как и при течении в трубе, сильно повысить критическое число Рейнольдса, если обеспечить возможно малую возмущенность набегающего течения (т. е. малую степень турбулентности).

Переход течения в пограничном слое на пластине из ламинарной формы в турбулентную заметнее всего отражается на распределении скоростей в пограничном слое. Из рис. 2.19 видно, что при таком переходе толщина пограничного слоя внезапно начинает сильно увеличиваться. В ламинарном пограничном слое безразмерная толщина $\delta/\sqrt{vx}/U_{\infty}$ постоянна и равна приблизительно пяти. На рис. 2.19 изображена зависимость этой безразмерной толщины пограничного слоя от числа Рейнольдса $Re_x = U_{\infty} x / v$, составленного для текущей длины x пограничного слоя. После достижения числом Рейнольдса значения $Re_x > 3,2 \cdot 10^5$ толщина пограничного слоя начинает сильно нарастать. Вместе с переходом от ламинарного движения к турбулентному наблюдается и резкое изменение распределения скоростей в нем.

На рис. 16.4 изображены профили скоростей в пограничном слое на пластине, обтекаемой в продольном направлении воздушным потоком с очень малой степенью турбулентности. Эти профили получены Г. Б. Шубаузером и П. С. Клебановым [58] посредством измерений в области перехода ламинарного движения в турбулентное, которая в данном случае простирается от $Re_x = 3 \cdot 10^6$ до $Re_x = 4 \cdot 10^6$. В этой области происходит изменение распределения скоростей от профиля 1, соответствующего ламинарному погра-

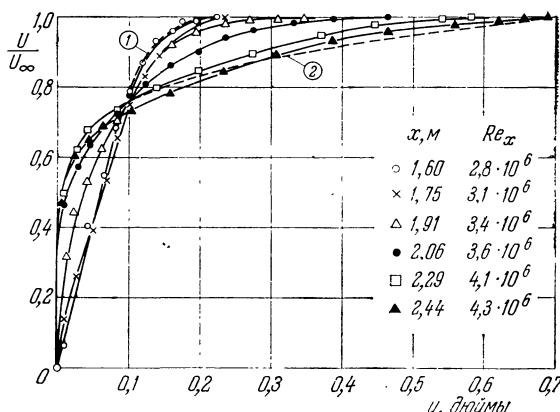


Рис. 16.4. Профили скоростей в пограничном слое на пластине в области перехода ламинарного течения в турбулентное. По измерениям Шубауэра и Клебанова [58]. Кривая (1) — ламинарное течение, профиль Блазиуса; кривая (2) — турбулентное течение, закон степени $1/7$ для распределения скоростей. Толщина пограничного слоя $\delta = 17$ мм. Скорость внешнего течения $U_{\infty} = 27$ м/сек. Степень турбулентности $\varepsilon = 0,03\%$.

¹⁾ За исключением того случая, когда отрыв происходит на передней кромке, что может иметь место при конечной толщине пластины (при условии, что не предпринимаются специальные меры к предотвращению такого отрыва, о чем будет сказано ниже).

ничному слою на пластине (по Блазиусу), к профилю 2, соответствующему полностью развившемуся турбулентному течению (см. главу XXI). С изменением распределения скоростей в области перехода связано сильное уменьшение формпараметра $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ (рис. 16.5; δ_1 — толщина вытеснения, δ_2 — толщина потери импульса). Мы видим, что в пограничном слое на пластине формпараметр H_{12} уменьшается от значения $H_{12} \approx 2,6$ в ламинарной области до значения $H_{12} \approx 1,4$ в турбулентной области.

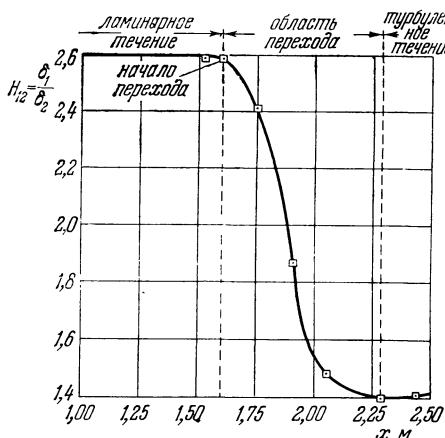


Рис. 16.5. Изменение формпараметра $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ для пограничного слоя на пластине в области перехода ламинарного течения в турбулентное. По измерениям Шубауэра и Клебанова [58]. Рисунок взят из работы [40].

область перехода вниз по течению, то она покажет почти внезапное повышение динамического или соответственно полного давления.

С переходом течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную связано сильное изменение сопротивления, в рассматриваемом случае — сопротивления трения. В то время как для ламинарного течения сопротивление трения пропорционально полуторной степени скорости [формула (7.33)], для турбулентного течения оно пропорционально скорости в степени приблизительно 1,85, как это уже давно установил В. Фруд [22], протаскивая пластины в неподвижной воде при очень больших числах Рейнольдса. См. в связи с этим рис. 24.2 на стр. 575.

Новые исследования Г. В. Эммонса [17], а также Г. Б. Шубауэра и П. С. Клебанова [58] показали, что переход ламинарной формы течения в турбулентную в пограничном слое на пластине также состоит из беспорядочной смены во времени ламинарных и турбулентных состояний. Как показывает рис. 16.7, в определенной точке внутри пограничного слоя внезапно возникает небольшое турбулентное образование неправильной структуры (турбулентное пятно), которое затем перемещается вниз по течению внутри клинообразной области. Такие турбулентные пятна появляются через неправильные промежутки времени в разных, неравномерно распределенных точках обтекаемой пластины. Внутри клинообразных областей, по которым перемещаются турбулентные пятна, преобладает турбулентная форма течения, а в соседних областях происходит непрерывная смена ламинарной и турбулентной форм течения. См. в связи с этим также работу [7].

Тонкие тела. Установлено, что градиент давления вдоль стенки оказывает очень сильное влияние на положение точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничном слое. В области падения давления (ускоренное течение) пограничный слой остается в общем случае ламинарным, в то время как в области даже с незначительным повышением давления обычно сразу происходит переход ламинарного течения в турбулентное. Это обстоятельство позволяет существенно уменьшить сопротив-

Изменение распределения скоростей при переходе ламинарной формы течения в турбулентную можно использовать для простого способа определения положения точки перехода (точнее говоря, области перехода). Принцип такого определения пояснен на рис. 16.6. Трубка для измерения динамического давления или трубка Пито устанавливается параллельно стенке на таком от нее расстоянии, на котором ламинарный и турбулентный профили скоростей дальше всего отстоят один от другого. Если теперь передвинуть трубку вдоль стенки, не меняя расстояния между ними, и пропустить ее через

ление трения тонких тел (несущее крыло, удобообтекаемое тело) следующим способом: форма тела и распределение давления на его поверхности под-

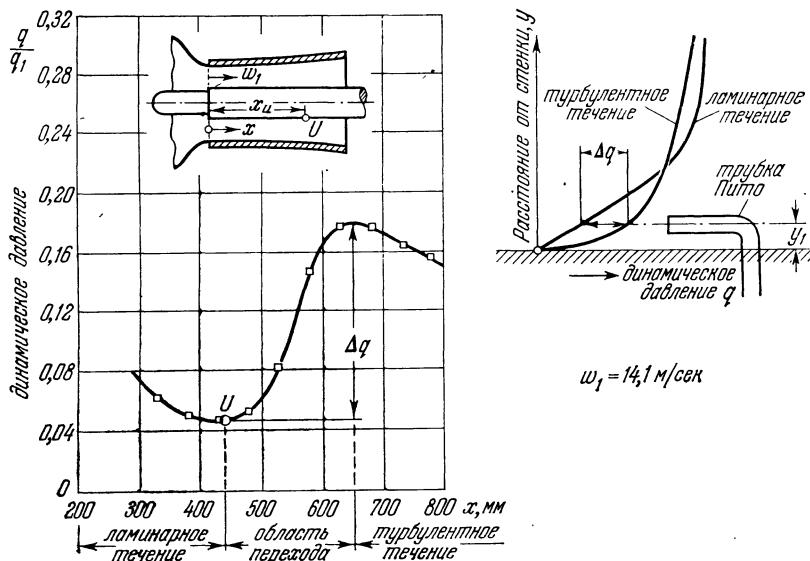


Рис. 16.6. К определению положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную посредством трубы для измерения динамического давления или трубы Питто.

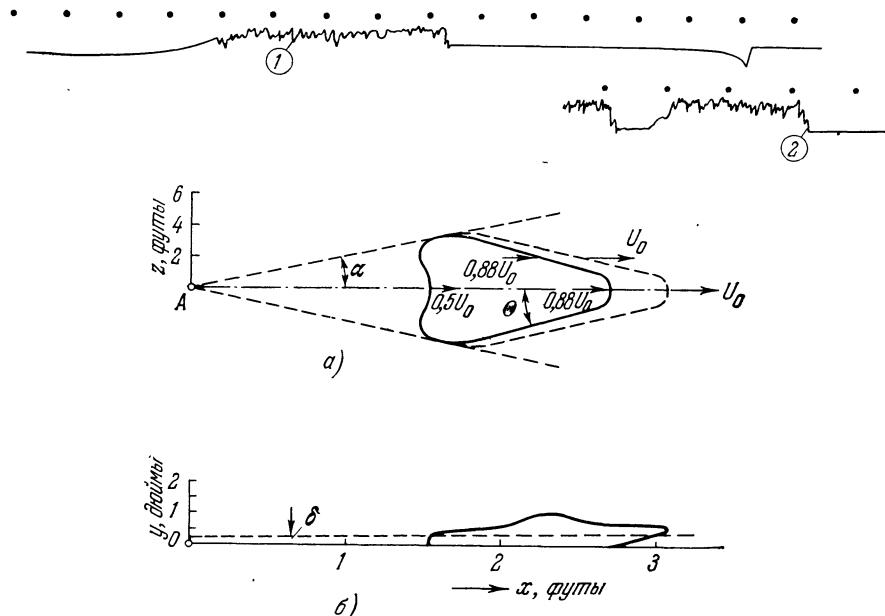


Рис. 16.7. Нарастание искусственного турбулентного пятна в ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине. По измерениям Г. Б. Шубаэра и П. С. Клебанова [68]. Рисунок взят из работы [13]. а) Горизонтальная проекция; б) боковая проекция турбулентного пятна, искусственно вызванного в точке А и находящегося в рассматриваемый момент времени на расстоянии приблизительно 2,4 фута от точки возникновения. Точка А лежит на расстоянии 2,3 фута позади передней кромки пластины. Угол $\alpha = 11,3^\circ$; $\Theta = 15,3^\circ$; б — толщина ламинарного пограничного слоя; $U_\infty \approx 10 \text{ м/сек}$. Кривые (1) и (2) — осциллограммы, записанные термоанемометром при прохождении искусственно вызванного и соответствующего естественного турбулентных пятен. Промежуток между каждыми двумя отметками времени, изображенными в виде точек, равен 1/60 сек.

бираются так, чтобы точка перехода переместилась возможно дальше назад. Этого можно достигнуть, если положение наибольшей толщины профиля

переместить возможно дальше вниз по течению. У таких тел с длинным ламинарным участком пограничного слоя (ламинаризованные профили) можно уменьшить сопротивление трения в два или даже больше раз по сравнению с нормальными профилями.

Существуют и другие мероприятия, например отсасывание пограничного слоя, позволяющие сильно влиять на положение точки перехода, следовательно, и на сопротивление обтекаемого тела.

§ 2. Основы теории устойчивости ламинарного течения

1. Предварительные замечания. Теоретические исследования, имевшие целью объяснить описанное выше явление перехода ламинарного течения в турбулентное, начались уже в прошлом столетии, но к успеху привели только в 1930 г. В основе всех этих исследований лежит представление, что ламинарное течение подвергается воздействию некоторых малых возмущений, в случае течения в трубе связанных, например, с условиями при входе в трубу, а в случае пограничного слоя на обтекаемом теле — с шероховатостью стенки или с неравномерностью внешнего течения. Каждая теория стремилась проследить за развитием во времени возмущений, наложенных на основное течение, причем форма этих возмущений особо определялась в каждом отдельном случае. Решающим вопросом, подлежавшим решению, было установление того, затухают или нарастают возмущения с течением времени. Затухание возмущений со временем должно было означать, что основное течение устойчиво; наоборот, нарастание возмущений со временем должно было означать, что основное течение неустойчиво и поэтому возможен его переход в турбулентное течение. Таким путем пытались создать *теорию устойчивости* ламинарного течения, которая позволяла бы теоретически вычислить критическое число Рейнольдса для заданного ламинарного течения. Предпосылкой для создания такой теории служило впервые высказанное О. Рейнольдсом [48] следующее предположение: ламинарное течение, представляя собой решение гидродинамических дифференциальных уравнений и являясь поэтому всегда возможным течением, после перехода через определенную границу, а именно после достижения числом Рейнольдса критического значения, становится неустойчивым и переходит в турбулентное течение.

Над математическим обоснованием предположения Рейнольдса работали многие ученые в течение многих десятилетий. В частности, после самого О. Рейнольдса этой проблемой занимался Рэйли [46]. Эти теоретические исследования, приводившие к очень сложным расчетам, долгое время были безуспешными. Только в начале тридцатых годов текущего столетия Л. Прандтлю и его сотрудникам удалось удовлетворительно решить первоначально поставленную задачу — теоретически найти критическое число Рейнольдса. Спустя еще десять лет Х. Л. Драйдену и его сотрудникам удалось подтвердить теорию устойчивости экспериментально, причем получилось блестящее совпадение между теорией и экспериментом. Сводные обзоры исследований по теории устойчивости ламинарного течения опубликованы Г. Шлихтингом [53], [54] и Ц. Ц. Линем [34]; см. также книгу Д. Мексина [36].

2. Основы метода малых колебаний. При исследовании устойчивости ламинарного течения движение разлагается на основное, устойчивость которого подлежит исследованию, и на возмущающее, наложенное на основное. Введем прямоугольную систему координат и обозначим составляющие скорости основного течения, которое можно рассматривать как стационарное, через U , V , W , а давление через P . Основное течение представляет собой решение уравнений Навье — Стокса или уравнений пограничного слоя.

Составляющие скорости и давление для переменного во времени возмущающего движения обозначим через u' , v' , w' и p' . Следовательно, составляющие скорости результирующего течения будут

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w', \quad (16.2)$$

а давление

$$p = P + p'. \quad (16.3)$$

При этом в большей части случаев предполагается, что скорости и давление возмущающего течения малы по сравнению со скоростями и давлением основного течения.

Исследование устойчивости возмущенного движения может быть выполнено двумя различными методами. При пользовании первым методом определяется только изменение во времени энергии возмущающего движения (энергетический метод). Вопрос об устойчивости решается в зависимости от того, уменьшается ли во времени или, наоборот, нарастает энергия возмущающего движения. При этом допускается любая форма возмущающего движения, однако при условии, что она совместима с уравнением неразрывности. Этот энергетический метод, разрабатывавшийся главным образом Г. А. Лорентцем [35], не привел к успеху, поэтому мы не будем его рассматривать.

При пользовании вторым методом допускаются только такие возмущающие движения, которые совместимы с гидродинамическими уравнениями движения, и исследуется развитие во времени возмущающего движения на основе этих же дифференциальных уравнений. Такой метод, называемый методом малых колебаний, привел в настоящее время к полному успеху.

Поясним этот метод на примере двумерного основного несжимаемого течения и двумерного же возмущающего движения. В таком случае результирующее движение, определяемое величинами (16.2) и 16.3), должно удовлетворять двумерным уравнениям Навье — Стокса (4.4). Ограничимся рассмотрением особенно простого основного течения, когда составляющая скорости U зависит только от координаты y , т. е. $U = U(y)$, а остальные две составляющие равны нулю, т. е. $V \equiv W \equiv 0$ ¹). Такое слоистое течение точно осуществляется в канале или трубе с постоянным поперечным сечением на достаточно большом расстоянии от входного сечения. Течение в пограничном слое можно рассматривать приближенно как такое же слоистое течение, так как зависимость основного течения U от продольной координаты x значительно слабее, чем от поперечной координаты y . Однако давление основного течения следует считать зависящим также от x , т. е. считать $P = P(x, y)$, так как движущей силой течения является градиент давления $\partial P / \partial x$. Следовательно, рассматриваемое основное течение определяется величинами

$$U(y), \quad V \equiv W \equiv 0, \quad P(x, y). \quad (16.4)$$

Наложим на это основное течение двумерное возмущающее движение, зависящее не только от координат x и y , но также от времени t . Обозначим составляющие скорости и давление этого течения через

$$u'(x, y, t), \quad v'(x, y, t), \quad p'(x, y, t). \quad (16.5)$$

¹) Как показали Г. Б. Шубаэр и П. С. Клебанов [68], имеются основания предполагать, что в действительных течениях обе эти составляющие скорости никогда не равны нулю. Правда, их величина в большей части случаев пренебрежимо мала. Тем не менее они, по-видимому, играют важную, но пока невыясненную роль в процессе перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

Таким образом, составляющие скорости и давление результирующего движения, согласно равенствам (16.2) и (16.3), будут

$$u = U + u', \quad v = v', \quad w = 0, \quad p = P + p'. \quad (16.6)$$

Основное течение, определяемое величинами (16.4), является, согласно предположению, решением уравнений Навье — Стокса. Результирующее движение, определяемое величинами (16.6), также должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса. Наложенное возмущающее движение, определяемое величинами (16.5), будем предполагать «малым» в том смысле, что всеми квадратичными членами можно пренебречь по сравнению с линейными членами. Более подробные сведения о форме возмущающего движения будут даны в следующем пункте. Задача исследования на устойчивость состоит в том, чтобы выяснить, затухает или нарастает со временем возмущающее движение для заданного основного течения. В зависимости от того, затухает ли возмущающее движение со временем или нарастает, основное течение называется *устойчивым* или *неустойчивым*.

Подставив выражения (16.6) в уравнения Навье — Стокса (4.4) для двумерного нестационарного течения несжимаемой жидкости и отбросив члены, квадратичные относительно составляющих скорости возмущающего движения, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= v \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta u' \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= v \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где Δ означает оператор $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Если учесть, что основное течение, взятое само по себе, удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, то предыдущие уравнения примут более простой вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = v \Delta u', \quad (16.7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = v \Delta v', \quad (16.8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (16.9)$$

Таким образом, мы имеем три уравнения для определения трех величин u' , v' , p' . Границными условиями будут равенства нулю составляющих u' и v' скорости возмущающего движения на ограничивающих стенах (*условие прилипания*). Из двух уравнений (16.7) и (16.8) можно легко исключить давление p' , следовательно, для определения u' и v' остаются два уравнения (включая уравнение неразрывности).

Можно было бы выдвинуть возражение против допущения, что для определения основного течения в пограничном слое пригодна система величин (16.4), т. е. против пренебрежения нормальной составляющей V скорости основного течения и зависимостью продольной составляющей U от координаты x . Однако И. Преч [44] доказал, что если сохранить в расчетах величину V и зависимость U от x , то обусловленные этим члены не оказывают никакого влияния на исследование устойчивости пограничного слоя. См. по этому поводу также статью С. И. Чена [4].

3. Форма возмущающего движения. Пусть на основное течение, происходящее в направлении оси x со скоростью $U(y)$, наложено возмущающее течение, состоящее из отдельных колебаний, причем каждое такое коле-

бание представляет собой волну, распространяющуюся в направлении оси x . Введя для возмущающего движения, предполагаемого двумерным, функцию тока $\psi(x, y, t)$, мы тем самым уже проинтегрируем уравнение неразрывности (16.9). Предположим, что функцию тока для отдельного колебания возмущающего движения можно принять в виде

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (16.10)$$

где $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ есть комплексная амплитуда¹⁾. Любое двумерное возмущающее движение можно разложить в ряд Фурье и представить как сумму отдельных возмущений с функциями тока вида (16.10). В равенстве (16.10) α есть вещественная величина, связанная с длиной λ волны возмущения соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Величина β — комплексная и может быть представлена в виде

$$\beta = \beta_r + i\beta_i,$$

где β_r есть круговая частота отдельного колебания, а β_i — коэффициент нарастания, т. е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если $\beta_i < 0$, то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво; если же $\beta_i > 0$, то имеет место неустойчивость.

Кроме величин α и β целесообразно ввести также их отношение

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + i c_i. \quad (16.11)$$

Величина c представляет собой *скорость распространения волн* в направлении x (*фазовая скорость*), а c_i опять является величиной, позволяющей судить о затухании или нарастании колебания. А именно, если $c_i < 0$, то происходит затухание, если же $c_i > 0$, то имеет место нарастание колебания.

Амплитуда φ возмущающего движения принята зависящей только от y потому, что основное течение также зависит только от y . Из равенства (16.10) находим для составляющих скорости возмущающего движения следующие выражения:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (16.12)$$

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (16.13)$$

Подставив эти скорости в уравнения (16.7) и (16.8) и исключив давление, мы получим для определения амплитуды $\varphi(y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \quad (16.14)$$

Это уравнение, называемое *дифференциальным уравнением возмущающего движения* или *уравнением Орра — Зоммерфельда*, является исходным пунктом теории устойчивости ламинарного течения. Подчеркнем, что уравнение (16.14) уже приведено к безразмерному виду, для чего все длины разделены на надлежащим образом выбранную характерную длину (например, на ширину b канала или на толщину δ пограничного слоя), а все скорости —

¹⁾ Физический смысл имеет только вещественная часть \Re функции тока, т. е.

$$\Re(\psi) = e^{\beta_i t} [\varphi_r \cos(\alpha x - \beta_r t) - \varphi_i \sin(\alpha x - \beta_r t)].$$

Комплексная запись (16.10) применена ввиду ее удобства для расчетов.

на максимальную скорость U_m основного течения. Штрихи означают дифференцирование по безразмерной координате y/δ или y/b , а

$$Re = \frac{U_m b}{v} \quad \text{или} \quad Re = \frac{U_m \delta}{v}$$

представляет собой число Рейнольдса, характеризующее исследуемое ламинарное течение (основное течение). Члены левой части уравнения (16.14) получаются из инерционных членов уравнений движения, а члены правой части — из членов, учитывающих трение. Границные условия, например, для течения в пограничном слое заключаются в равенстве нулю обеих составляющих скорости возмущающего движения на стенке ($y = 0$) и на большом расстоянии от стенки (внешнее течение). Следовательно,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } y = 0 & u' = v' = 0, \quad \text{а потому } \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \\ \text{при } y = \infty & u' = v' = 0, \quad \text{а потому } \varphi = 0, \quad \varphi' = 0. \end{array} \right\} \quad (16.15)$$

Против принятой здесь формы возмущающего движения можно было бы сделать следующее возражение: для полного исследования устойчивости необходимо рассматривать трехмерное возмущающее движение даже в том случае, если основное течение двумерно. Однако Г. Б. Сквайр [61] показал, что это возражение неосновательно. А именно, он предположил, что возмущающее движение имеет периодическую составляющую также в направлении z , и выяснил, что при таких трехмерных возмущениях плоское течение становится неустойчивым при более высоких числах Рейнольдса, чем при двумерных возмущениях. Следовательно, в этом смысле двумерные возмущения для плоского течения более «опасны», чем трехмерные. Это означает, что для определения критического числа Рейнольдса как самой нижней границы устойчивости следует исходить из рассмотрения именно двумерных возмущений.

4. Задача на собственные значения. Исследование устойчивости ламинарного течения представляет собой не что иное, как задачу на собственные значения дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14) при граничных условиях (16.15). Если основное течение $U(y)$ задано, то уравнение (16.14) содержит четыре параметра, а именно: Re , a , c_r и c_i . Из этих параметров число Рейнольдса основного течения, по существу, также задано. Кроме того, можно считать заданной и длину волны $\lambda = 2\pi/a$ возмущающего движения. В таком случае дифференциальное уравнение (16.14) с граничными условиями (16.15) дает для каждой пары значений a , Re собственную функцию $\varphi(y)$ и комплексное собственное значение $c = c_r + ic_i$. Величина c_r есть фазовая скорость заданного возмущения, а величина c_i определяет своим знаком либо нарастание ($c_i > 0$), либо затухание ($c_i < 0$) возмущения¹⁾. При $c_i < 0$ заданное течение (U , Re) при заданном возмущении a устойчиво, а при $c_i > 0$ — неустойчиво. Предельный случай $c_i = 0$ соответствует нейтральным (безразличным) возмущениям.

Результат расчета заданного ламинарного течения $U(y)$ на устойчивость можно изобразить графически, если каждой точке плоскости a , Re сопоставить пару значений c_r , c_i . Особый интерес представляет кривая $c_i = 0$ (рис. 16.8), отделяющая область устойчивых значений a и Re от области неустойчивых их значений и поэтому называемая *нейтральной кривой*.

¹⁾ С другой стороны, можно рассматривать как заданные величины число Рейнольдса Re и круговую частоту β_r . Тогда задача на собственные значения дает возможность определить длину волны a и коэффициент нарастания β_r . Этот случай был осуществлен, например, в опытах Х. Л. Драйдена и его сотрудников. В этих опытах в ламинарное течение вводилось искусственное возмущение определенной частоты посредством вибрирующей ленты (см. § 4 главы XVI).

В свою очередь на этой кривой главный интерес представляет точка с наименьшим числом Рейнольдса, лежащая на касательной, параллельной оси a . При еще более низких значениях числа Рейнольдса все отдельные колебания затухают, а при более высоких — по крайней мере некоторые отдельные колебания нарастают. Наименьшее число Рейнольдса, определяемое нейтральной кривой, представляет собой *теоретическое критическое число Рейнольдса исследуемого ламинарного течения*; оно называется также *пределом устойчивости*.

Упомянутые выше экспериментальные результаты, относящиеся к переходу ламинарной формы течения в турбулентную, дают основание считать, что при малых числах Рейнольдса, при которых течение остается ламинарным, возмущения с любой длиной волны всегда затухают, в то время как при более высоких числах Рейнольдса, когда течение турбулентно, по крайней мере некоторые возмущения с определенной длиной волны нарастают. Однако необходимо теперь же подчеркнуть следующее важное обстоятельство: нельзя ожидать, что теоретическое критическое число Рейнольдса, полученное посредством исследования устойчивости, совпадет с тем экспериментально определенным числом Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную.

В самом деле, теоретическое критическое число Рейнольдса, полученное путем исследования устойчивости, например, пограничного слоя на стенке, определяет ту точку на стенке, дальше которой по течению происходит нарастание некоторых отдельных колебаний. Однако очевидно, что должно пройти некоторое время, прежде чем из нарастания этих возмущений возникнет турбулентность. До наступления этого момента возмущение успеет распространиться вниз по течению на некоторое расстояние. Поэтому следует ожидать, что точка наблюдаемого перехода ламинарной формы течения в турбулентную будет лежать всегда ниже по течению, чем точка, соответствующая теоретически вычисленному пределу устойчивости. Другими словами, экспериментальное критическое число Рейнольдса всегда больше теоретического критического числа Рейнольдса, и притом безразлично, составлены ли эти числа для текущей длины или для толщины пограничного слоя. Для того чтобы различать точки, соответствующие теоретическому и экспериментальному числам Рейнольдса, будем называть ту из них, в которой достигается теоретическое критическое число Рейнольдса (предел устойчивости), *нейтральной точкой*, а ту, в которой возникает турбулентность, — *точкой перехода ламинарной формы течения в турбулентную*¹⁾.

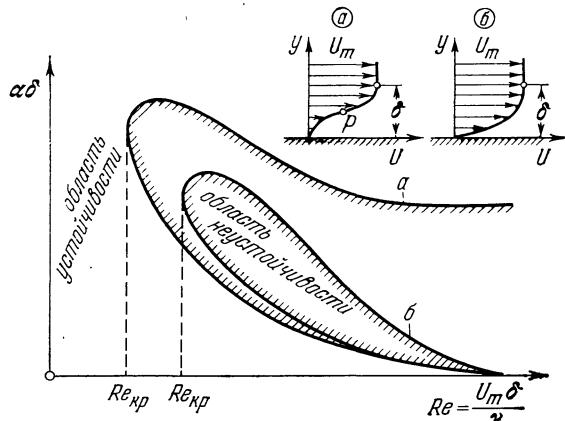


Рис. 16.8. Нейтральные кривые для плоского пограничного слоя при двумерных возмущениях. а) «Невязкая» неустойчивость. Для профилей скоростей типа a (с точкой перегиба P) нейтральная кривая имеет тип a ; асимптоты нейтральной кривой a (для $Re \rightarrow \infty$) получаются из дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (16.16). б) «Вязкая» неустойчивость. Для профилей скоростей типа b (без точки перегиба) нейтральная кривая имеет тип b .

1) Как уже было сказано в § 1 настоящей главы, последние экспериментальные результаты Г. В. Эммонса [17], а также Шубауэра и Клебанова [68] показали, что вообще не существует строго определенной точки перехода: ламинарное течение преобразуется в полностью турбулентное всегда на протяжении некоторой переходной области.

Математическая разработка проблемы устойчивости, о которой мы дали только краткое представление, чрезвычайно трудна. Именно по этой причине понадобились десятилетия упорного труда, прежде чем была достигнута поставленная цель теоретического определения критического числа Рейнольдса. Само собой понятно, что в рамках настоящей книги невозможно дать исчерпывающее изложение теории устойчивости ламинарного течения, поэтому мы ограничимся только обзором наиболее важных результатов.

5. Общие свойства дифференциального уравнения возмущающего движения. Имеющиеся экспериментальные результаты дают основание считать, что предел устойчивости $c_i = 0$ достигается при больших числах Рейнольдса; поэтому естественно попытаться упростить общее дифференциальное уравнение возмущающего движения (16.14), отбросив в нем все члены правой части. В самом деле, эти члены, зависящие от вязкости, содержат малый множитель $1/\text{Re}$, а потому ими можно пренебречь по сравнению с инерционными членами, входящими в левую часть уравнения. Тогда мы получим уравнение

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = 0, \quad (16.16)$$

называемое *дифференциальным уравнением возмущающего движения без учета вязкости*. Так как порядок этого уравнения только второй, то из четырех граничных условий (16.15) полного дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14) теперь можно удовлетворить только двум условиям. Поскольку мы отбросили члены, зависящие от вязкости, оставшиеся граничными условиями будут: в случае течения в канале — равенство нулю нормальной составляющей скорости возмущающего движения на обеих стенках, а в случае течения в пограничном слое — равенство нулю той же составляющей скорости на стенке и на большом расстоянии от последней. Следовательно, в последнем случае мы будем иметь

$$\varphi = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = 0 \quad \text{при } y = \infty. \quad (16.17)$$

Отбрасывание в уравнении Оппа — Зоммерфельда членов, зависящих от вязкости, представляет собой операцию, чреватую очень серьезными последствиями. В самом деле, понижая порядок дифференциального уравнения с четвертого до второго, мы, возможно, теряем важные свойства общего дифференциального уравнения возмущающего движения. К этому случаю применимы все соображения, высказанные в главе IV по поводу перехода от дифференциальных уравнений Навье — Стокса для вязкой жидкости к уравнениям Эйлера для жидкости без трения.

Старые исследования по устойчивости ламинарного течения основывались главным образом на уравнении (16.16), т. е. на дифференциальном уравнении возмущающего движения без учета трения. Конечно, такого рода исследования не могли привести к вычислению критического числа Рейнольдса; они только позволяли судить о том, устойчиво или неустойчиво ламинарное течение, в той мере, в какой это вообще возможно сделать при введенном допущении о независимости возмущающего движения от вязкости. Лишь спустя много времени удалось найти способы исследования полного дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14). Однако потребовалось много усилий, сначала сопровождавшихся неудачами, прежде чем удалось достигнуть успеха в теоретическом вычислении критического числа Рейнольдса.

Тем не менее еще Рэйли [45] удалось получить некоторые важные выводы об устойчивости ламинарного профиля скоростей на основе дифференциального уравнения возмущающего движения без учета вязкости. Эти выводы впоследствии были подтверждены и для случая, когда влияние вязкости учитывается, т. е. для полного дифференциального уравнения (16.14).

Первая теорема. Первым таким весьма общим выводом является теорема, выясняющая роль наличия точки перегиба на профиле скоростей. Согласно этой теореме, профили скоростей, имеющие точку перегиба, неустойчивы.

Рэйли вывел этот критерий, т. е. роль точки перегиба, только как *необходимое условие для возникновения неустойчивых колебаний*. Впоследствии В. Толмин [67] доказал, что этот критерий дает также *достаточное условие для существования нарастающих колебаний*. Этот критерий имеет фундаментальное значение для всей теории устойчивости, так как он — до внесения поправки на влияние вязкости — дает первую грубую классификацию всех ламинарных течений с точки зрения их устойчивости. Практически весьма важно следующее обстоятельство: существование точки перегиба у профиля скоростей непосредственно связано с градиентом давления течения. При течении в суживающемся канале (рис. 5.14), когда имеет место падение давления в направлении течения, получается целиком выпуклый, заполненный профиль скоростей без точки перегиба. Наоборот, при течении в расширяющемся канале, когда имеет место повышение давления в направлении течения, получается урезанный профиль скоростей с точкой перегиба. Такая же разница в форме профиля скоростей наблюдается и в ламинарном пограничном слое на обтекаемом теле. Согласно теории пограничного слоя, профили скоростей в области падения давления не имеют точки перегиба; наоборот, в области повышения давления они всегда имеют точку перегиба (см. § 2 главы VII). Следовательно, точка перегиба профиля скоростей играет в вопросе об устойчивости пограничного слоя такую же роль, как и градиент давления внешнего течения. Для течения в пограничном слое это означает: падение давления благоприятствует устойчивости течения, повышение же давления, наоборот, способствует неустойчивости. Отсюда следует, что при обтекании тела положение точки минимума давления оказывает решающее влияние на положение точки перехода ламинарного течения в турбулентное. В первом, грубом приближении можно считать, что положение точки минимума давления определяет положение точки перехода, а именно точка перехода лежит немного ниже по течению точки минимума давления.

Влияние вязкости, которым мы пренебрегли в предыдущих рассуждениях, мало изменяет полученный результат. Только что рассмотренная неустойчивость профиля скоростей с точкой перегиба, возникающая в предположении, что трение не влияет на возмущающее движение, называется *невязкой неустойчивостью*. На диаграмме устойчивости (рис. 16.8) невязкая неустойчивость определяется нейтральной кривой типа *a*. Эта кривая имеет горизонтальную асимптоту, проходящую на конечном расстоянии от оси *Re*. Следовательно, при $Re = \infty$ уже существует некоторая неустойчивая область возмущающих волн с конечной длиной. При переходе к меньшим числам Рейнольдса эта неустойчивая область отделяется от устойчивой области нейтральной кривой.

В противоположность невязкой неустойчивости *вязкая неустойчивость* с нейтральной кривой типа *b* (рис. 16.8) возникает в тех случаях, когда профили скоростей, например ламинарного пограничного слоя, не имеют точки перегиба. Теперь при бесконечно больших числах Рейнольдса неустойчивая область возмущающих волн с конечной длиной стягивается к нулю, и неустойчивые колебания существуют только при конечных числах Рейнольдса. В целом при невязкой неустойчивости (профили скоростей с точкой перегиба) область нарастающих колебаний значительно шире, чем при вязкой неустойчивости (профили скоростей без точки перегиба).

Вязкую неустойчивость можно обнаружить только посредством использования полного дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14), поэтому ее исследование сложнее, чем исследование невязкой неустой-

чивости. Простейший пограничный слой, получающийся при продольном течении вдоль плоской стенки без градиента давления, принадлежит к типу течений, при которых существует только вязкая неустойчивость. Именно по этой причине его успешное исследование было завершено позже, чем исследование других, более сложных случаев обтекания.

Вторая теорема. Второй общий и важный вывод сводится к следующему: при течении в пограничном слое скорость распространения волн c_r нейтральных возмущений ($c_i = 0$) меньше максимальной скорости основного течения, т. е. $c_r < U_m$.

И эта теорема впервые была доказана Рэйли [45], правда, при некоторых ограничивающих предположениях. Позже она была доказана в более общем виде В. Толмином [67]. Согласно этой теореме, внутри течения существует в случае нейтральных возмущений такой слой $y = y_{kp}$, в котором $U - c = 0$. Это обстоятельство так же, как и существование точки перегиба на профиле скоростей, имеет фундаментальное значение для теории устойчивости. В самом деле, точка $U - c = 0$ является особой точкой дифференциального уравнения возмущающего течения без учета трения (16.16). В этой точке вторая производная φ'' равна бесконечности, если только здесь не обращается в нуль вторая производная U'' . Слой $y = y_{kp}$, в котором $U = c$, называется *критическим слоем* основного течения. Если $U''_{kp} \neq 0$, то в окрестности критического слоя, где можно принять, что

$$U - c = U'_{kp}(y - y_{kp}),$$

вторая производная φ'' стремится к бесконечности как

$$\frac{U''_{kp}}{U'_{kp}} \frac{1}{y - y_{kp}}$$

и поэтому составляющая скорости в направлении x здесь равна

$$u' = \varphi''(y) \sim \frac{U''_{kp}}{U'_{kp}} \ln(y - y_{kp}). \quad (16.18)$$

Следовательно, составляющая u' скорости возмущающего течения, параллельная стенке, при ее определении из дифференциального уравнения возмущающего течения без учета трения имеет в критическом слое бесконечно большое значение, за исключением того случая, когда кривизна профиля скоростей в критическом слое равна нулю. Эта математическая особенность дифференциального уравнения возмущающего течения без учета вязкости показывает, что в критическом слое должно учитываться влияние трения на возмущающее движение. Только введение в расчет влияния трения устраняет указанную, не имеющую физического смысла особенность дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения. Эта поправка, вносимая в решение дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения, играет при исследовании устойчивости фундаментальную роль.

Из обеих теорем Рэйли следует, что кривизна профиля скоростей оказывает большое влияние на устойчивость ламинарного течения. В связи с этим очевидно, что при исследовании устойчивости должны предъявляться весьма высокие требования к точности вычисления не только самих профилей скоростей $U(y)$, но и второй производной d^2U/dy^2 .

§ 3. Результаты теории устойчивости для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине

1. Некоторые прежние исследования устойчивости. После Рэйли при исследовании устойчивости сначала ограничивались рассмотрением исключительно течения Күэтта, т. е. течения между двумя параллельными стенками с линейным распределением скоростей (рис. 1.1). Очень тщательные исследования, выполненные А. Зоммерфельдом [60], Р. Мизесом [37] и Л. Хопфом [31] с полным учетом вязкости, показали, что течение Күэтта устойчиво при всех числах Рейнольдса и при возмущениях с любой длиной волны. Этот результат, полностью противоречащий опыту, привел к тому, что метод малых колебаний стали считать непригодным для решения проблемы перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Однако впоследствии выяснилось, что такой взгляд на метод малых колебаний не оправдан, так как течение Күэтта является неподходящим примером, поскольку оно не дает возможности ввести в расчет кривизну профиля скоростей; между тем, согласно сказанному в предыдущем параграфе, кривизна профиля скоростей играет настолько важную роль, что пренебрегать ею недопустимо.

В 1921 г. теоретическим исследованием проблемы устойчивости занялся Л. Прандтль [42]. Для изучения устойчивости ламинарного пограничного слоя вдоль плоской стенки Л. Прандтль, как и ранее Рэйли, в целях математического упрощения заменил действительный профиль скоростей с непрерывным изменением кривизны профилем скоростей, составленные из отрезков прямых (рис. 16.9, а, б, в, г.). Расчеты, выполненные О. Титъенсом [65] на основе дифференциального уравнения (16.16) возмущающего движения без учета вязкости, показали, что выпуклые профили скоростей (рис. 16.9, а и 16.9, б) обеспечивают устойчивость движения, а невыпуклые профили (рис. 16.9, в и 16.9, г), наоборот, приводят к неустойчивости. В связи с этим возникло предположение, что профили скоростей с точкой перегиба (рис. 16.9, ж) неустойчивы, что впоследствии и было доказано Толмиком [67] (см. теорему 1 в § 2 настоящей главы).

С целью определения критического числа Рейнольдса как предела устойчивости для профилей скоростей неустойчивого типа (рис. 16.9, в и 16.9, г) Титъенс сохранил в полном дифференциальном уравнении возмущающего движения (16.14) также наибольшие по величине члены, зависящие от вязкости, и ожидал, что их сохранение позволит обнаружить демпфирующее действие трения. Влияние вязкости на возмущающее движение при сохранении этих членов проявлялось только на очень небольшом отрезке профиля скоростей, расположенным в непосредственной близости от стенки (выполнение условия прилипания). Однако расчеты привели к совершенно неожиданному

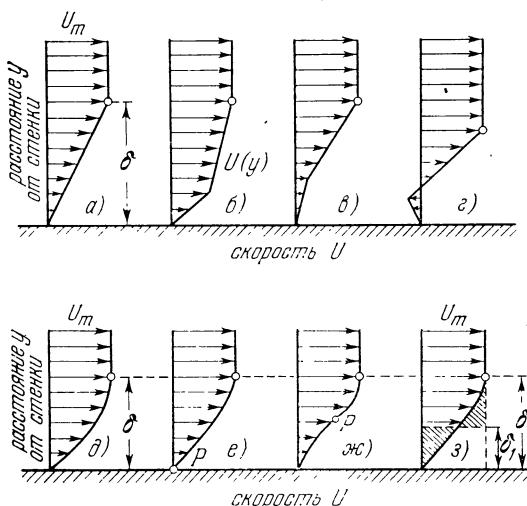


Рис. 16.9. К исследованию устойчивости профилей скоростей в ламинарном пограничном слое. $U(y)$ — распределение скоростей; U_m — скорость внешнего течения; δ — толщина вытеснения пограничного слоя; R — точка перегиба профиля скоростей. При $Re \rightarrow \infty$ профили скоростей типа а, б, д, е устойчивы, профили скоростей типа в, г, ж неустойчивы. Профили типа д получают при падении давления, типа е — при постоянном давлении, типа ж — при повышении давления в направлении течения.

результату, а именно выяснилось, что учет влияния вязкости на возмущающее движение не только не оказывает стабилизующего действия на профили скоростей неустойчивого типа (рис. 16.9, в и 16.9, г) при малых числах Рейнольдса, но даже приводит к тому, что профили, остающиеся при пренебрежении вязкостью устойчивыми (рис. 16.9, а и 16.9, б), становятся неустойчивыми при всех числах Рейнольдса и при любой длине волны возмущающих колебаний (из числа тех, к которым можно было применить приближенный метод исследования).

2. Расчет нейтральной кривой по методу Толмина. Удовлетворительное разъяснение этого парадокса было дано В. Толмином [66] в 1929 г. В. Толмин показал, что влияние вязкости на возмущающее движение необходимо учитывать не только в непосредственной близости от стенки, как это было сделано О. Титтенсом, но также в окрестности критического слоя, где скорость распространения волн возмущающего движения совпадает со скоростью основного течения и где, как было показано в п. 5 § 2 настоящей главы, составляющая u' скорости возмущающего движения становится бесконечной при условии, что кривизна профиля скоростей здесь не равна нулю. В действительности в критическом слое скорость u' остается конечной, тем не менее влияние вязкости на возмущающее движение здесь достаточно велико. Это влияние вязкости на критический слой может быть учтено только в том случае, если принимается в расчет кривизна профиля скоростей, что и было сделано В. Толмином в указанной работе. В результате для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине получился предел устойчивости (критическое число Рейнольдса), хорошо совпадающий с измеренными значениями. Предложенный В. Толмином метод расчета на устойчивость используется в настоящее время как основа для дальнейшего развития теории устойчивости, поэтому остановимся на нем несколько подробнее.

Для того чтобы иметь возможность сформулировать краевую задачу для полного дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14) с граничными условиями (16.15), необходимо сначала найти фундаментальную систему $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ решений этого уравнения. Так как отыскание четырех частных решений общего дифференциального уравнения возмущающего движения (16.14) весьма затруднительно, то поступают следующим образом: первую пару решений Φ_1 и Φ_2 определяют из дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (16.16), а вторую пару решений Φ_3 и Φ_4 находят из уравнения, получающегося из полного уравнения (16.14) путем отбрасывания всех членов, зависящих от вязкости, за исключением одного, наибольшего по величине.

Решения без учета вязкости. В качестве основного течения $U(y)$ возьмем пограничный слой (рис. 16.9), смыкающийся на конечном расстоянии δ от стенки с внешним течением $U = U_m = \text{const}$. Для области внешнего течения ($y > \delta$) можно сразу указать частное решение дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (16.16); это решение, если удовлетворить граничному условию при $y = \infty$, принимает вид

$$\varphi = e^{-\alpha y}. \quad (16.19)$$

Для нейтральных возмущений существует, как было показано на стр. 430, такое расстояние от стенки (критический слой), на котором $U - c_r = 0$. Обозначим это расстояние через $y = y_{kp}$. В окрестности точки $y = y_{kp}$ пару решений Φ_1 и Φ_2 дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (16.16) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= (y - y_{kp}) P_1, \\ \Phi_2 &= P_2 + \frac{U''_{kp}}{U'_{kp}} (y - y_{kp}) P_1 \ln (y - y_{kp}), \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

где P_1 и P_2 суть ряды по степеням $y - y_{\text{кр}}$, а $U'_{\text{кр}}$ и $U''_{\text{кр}}$ — значения производных dU/dy и d^2U/dy^2 в точке $y = y_{\text{кр}}$. Так как производная Φ'_2 при $y = y_{\text{кр}}$ равна бесконечности, то из этого решения, не учитывавшего трения, следует, что составляющая скорости возмущающего течения в направлении x принимает в критическом слое бесконечно большое значение. Следовательно, в окрестности точки $y = y_{\text{кр}}$ решение Φ_2 требует поправки, учитывающей трение.

Поправка на трение. Для того чтобы вычислить поправку на трение для решения Φ_2 и найти другую пару решений Φ_3 , Φ_4 , упростим дифференциальное уравнение возмущающего движения (16.14), а именно сохраним в нем только наибольшие по величине члены, зависящие от вязкости. Введя переменную η посредством равенства

$$\eta = \frac{y - y_{\text{кр}}}{\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon = (\alpha R e U'_{\text{кр}})^{-1/3}, \quad (16.21)$$

мы получим для $\Phi(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$i\Phi'''' + \eta\Phi'' = \varepsilon \frac{U''_{\text{кр}}}{U'_{\text{кр}}} \Phi, \quad (16.22)$$

причем ε представляет собой в общем случае малую величину. Поправку на трение для решения Φ_2 мы найдем из этого уравнения, положив

$$\Phi_2^{(1)} = 1 + \varepsilon\Phi_{21}.$$

Подставив $\Phi_2^{(1)}$ в уравнение (16.22), мы получим для определения $\Phi_{21}(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$i \frac{d^4\Phi_{21}}{d\eta^4} + \eta \frac{d^2\Phi_{21}}{d\eta^2} = \frac{U''_{\text{кр}}}{U'_{\text{кр}}}$$

Решение этого уравнения следует сомнить при больших значениях η с решением (16.20), полученным для Φ_2 без учета вязкости. Подробное исследование, выполненное В. Толмином, показало, что если в решении (16.20), определяющем Φ_2 , взять логарифм при $y - y_{\text{кр}} > 0$ в виде чисто вещественного числа, то при отрицательных значениях $y - y_{\text{кр}}$ его следует взять в виде

$$\ln |y - y_{\text{кр}}| - i\pi.$$

Это означает, что для составляющей u' скорости возмущающего движения следует взять при положительной разности $y - y_{\text{кр}}$ значение

$$\frac{U''_{\text{кр}}}{U'_{\text{кр}}} \ln (y - y_{\text{кр}}) \cos (\alpha x - \beta t), \quad (16.23)$$

а при отрицательной разности $y - y_{\text{кр}}$ — значение

$$\frac{U''_{\text{кр}}}{U'_{\text{кр}}} \ln |y - y_{\text{кр}}| \cos (\alpha x - \beta t) + \pi \frac{U''_{\text{кр}}}{U'_{\text{кр}}} \sin (\alpha x - \beta t). \quad (16.24)$$

Таким образом, при переходе через критический слой составляющая u' скорости возмущающего движения претерпевает *скакок фазы*, который сохраняется также при предельном переходе к очень большому числу Рейнольдса. Этот скачок фазы, имеющий для механизма возмущающего движения фундаментальное значение, можно обнаружить только в том случае, если правильным образом учесть влияние вязкости на возмущающее движение

в окрестности критического слоя и положить в основу расчета профиль скоростей с кривизной.

Вязкие решения. Для определения второй пары решений Φ_3, Φ_4 (так называемых вязких решений) следует положить в уравнении (16.22) правую часть равной нулю, т. е. исходить из уравнения

$$i\varphi'''' + \eta\varphi'' = 0. \quad (16.25)$$

Следовательно, пара решений Φ_3, Φ_4 совсем не зависит от основного течения $U(y)$ и поэтому может быть вычислена раз навсегда. Границные условия показывают, что из обоих решений Φ_3 и Φ_4 представляет интерес только то, которое при больших η сильно затухает. Пусть этим решением будет Φ_3 . Проинтегрировав уравнение (16.25), мы получим

$$\Phi_3(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\eta'} \eta'^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\eta'')^{3/2} \right] d\eta'' d\eta',$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ есть функция Ханкеля первого рода. Эта функция была затабулирована сначала О. Титтенсоном [65], а затем более точно Г. Хольштейном [30]. См. в связи со сказанным подробное изложение теории Толмина в книге Д. Мексина [36].

Задача на собственные значения. Найдя решения Φ_1, Φ_2, Φ_3 , мы можем сформулировать задачу на собственные значения следующим образом. Пусть основным течением $U(y)$ является течение в пограничном слое, которое при $y = \delta$ смыкается с постоянным внешним течением. Следовательно, решение дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения при $y > \delta$ имеет вид (16.19), поэтому при $y \geq \delta$ должно выполняться условие

$$\varphi' + \alpha\varphi = 0.$$

Общее решение полного дифференциального уравнения возмущающего движения получается из трех частных интегралов Φ_1, Φ_2, Φ_3 в виде суммы

$$\varphi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3.$$

Так как решение Φ_3 при больших y сильно затухает, то при $y = \delta$ его можно не учитывать. Следовательно, первым граничным условием будет

$$C_1\Phi_{1\delta} + C_2\Phi_{2\delta} = 0,$$

где для сокращения записи введены обозначения $\Phi_{v\delta} = \varphi'_{v\delta} + \alpha\varphi_{v\delta}$ ($v = 1, 2$). На стенке, где в соответствии с граничными условиями (16.15) φ и φ' равны нулю, должно быть принято во внимание решение Φ_3 (решение с учетом вязкости). Следовательно, на стенке (индекс w)

$$C_1\varphi_{1w} + C_2\varphi_{2w} + C_3\varphi_{3w} = 0,$$

$$C_1\varphi'_{1w} + C_2\varphi'_{2w} + C_3\varphi'_{3w} = 0.$$

Для того чтобы эти три однородных относительно C_1, C_2, C_3 уравнения имели решения, не равные нулю, должно выполняться условие

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1w} & \varphi_{2w} & \varphi_{3w} \\ \varphi'_{1w} & \varphi'_{2w} & \varphi'_{3w} \\ \Phi_{1\delta} & \Phi_{2\delta} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} = \frac{\varphi_{2w}\Phi_{1\delta} - \varphi_{1w}\Phi_{2\delta}}{\varphi'_{2w}\Phi_{1\delta} - \varphi'_{1w}\Phi_{2\delta}}. \quad (16.26)$$

Положив

$$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} = -\varepsilon D(\eta_w),$$

далее, приняв во внимание, что в соответствии с равенством (16.21)

$$\eta_w = -\frac{y_{kp}}{\varepsilon},$$

и введя для сокращения записи обозначение

$$-\frac{1}{y_{kp}} \frac{\varphi_{2w}\Phi_{1\delta} - \varphi_{1w}\Phi_{2\delta}}{\varphi'_{2w}\Phi_{1\delta} - \varphi'_{1w}\Phi_{2\delta}} = E(\alpha, c),$$

мы приведем уравнение (16.26), определяющее собственные значения, к виду

$$-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w} = E(\alpha, c). \quad (16.27)$$

Из этого уравнения и должны быть определены для нейтрального колебания собственные значения, а именно: длина волны возмущения $\lambda = 2\pi/a$, скорость распространения волн c_r и число Рейнольдса $Re = U_m \delta/v$. Это определение производится либо численным, либо графическим способом.

Правая часть этого уравнения содержит лишь оба невязких решения и, следовательно, является функцией только от α и c_r . Левая же часть,

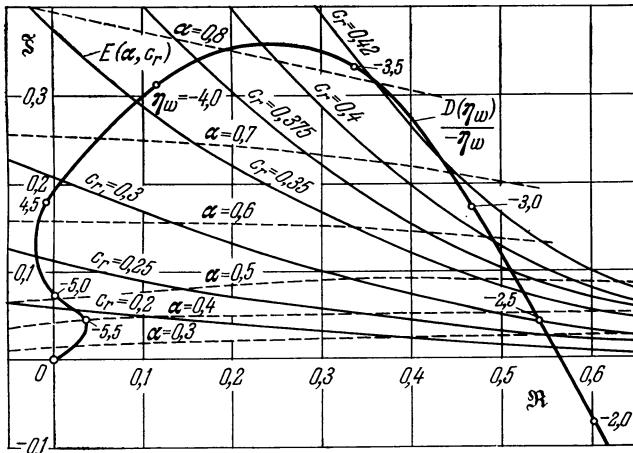


Рис. 16.10. Полярная диаграмма для решения уравнения (16.26), к которому сводится задача на разыскание собственных значений. Диаграмма построена для профиля скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

содержащая лишь вязкое решение φ_3 , является функцией только от η_w . Для решения комплексного уравнения (16.27) построим сначала полярную диаграмму функции $-D(\eta_w)/\eta_w$. Для этой цели будем откладывать по оси абсцисс вещественную часть комплексной величины $-D(\eta_w)/\eta_w$, а по оси ординат — мнимую часть этой величины. Таким путем мы получим кривую $-D(\eta_w)/\eta_w$ (рис. 16.10). Затем на той же диаграмме построим семейство кривых $E(\alpha, c_r)$, изображающих величину E как функцию от α при фиксированных значениях c_r . Две точки пересечения каждой кривой $E(\alpha, c_r)$ с кривой $-D(\eta_w)/\eta_w$ определяют значения α и η_w , необходимые для построения нейтральной кривой. В самом деле, имея значение η_w и зная расстояние от стенки y_{kp} , соответствующее выбранному значению c_r , мы можем

найти ε , а затем из равенства (16.21) — значение параметра Re . Одной из точек пересечения соответствует точка на верхней ветви нейтральной кривой, а другой — точка на нижней ветви (см. рис. 16.11).

Впоследствии В. Толмин [68] подробно исследовал точность асимптотических оценок приближенных решений, полученных в работе 1929 г., и выяснил полную приемлемость этих решений. См. в связи с этим также работу Д. Гроне [24].

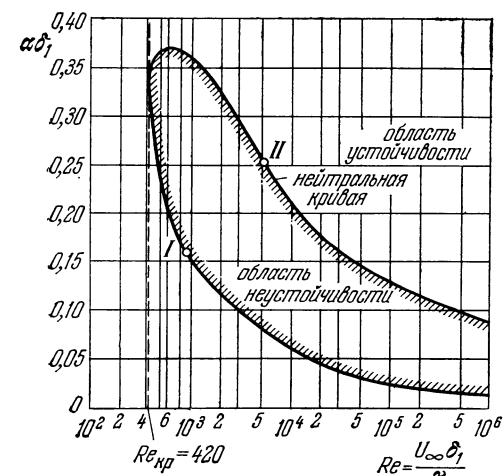


Рис. 16.11. Нейтральная кривая, связывающая длину $\alpha\delta_1$ волн возмущения с числом Рейнольдса Re , для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине (изменение скорости в пограничном слое определяется профилем Блазиуса). По В. Толмину [68].

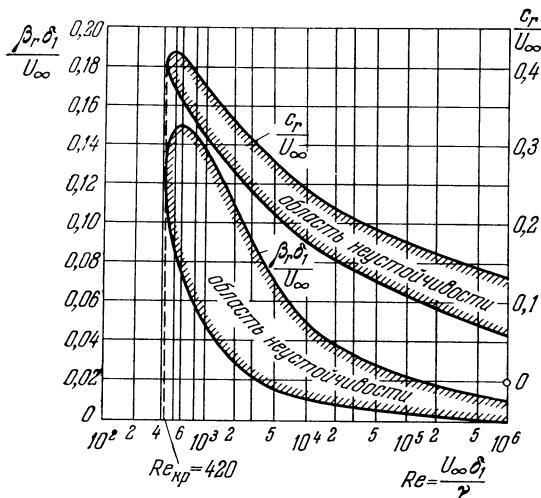


Рис. 16.12. Нейтральные кривые для частоты β_r и скорости c_r распространения волн возмущений в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине (изменение скорости в пограничном слое определяется профилем Блазиуса). По В. Толмину [68].

движения, соответствующие неустойчивым колебаниям; точки, лежащие в областях вне нейтральных кривых, определяют состояния, соответствующие устойчивым колебаниям, а точки, лежащие на самих нейтральных кривых, — состояния, соответствующие нейтральным колебаниям. При очень больших числах Рейнольдса обе ветви каждой нейтральной кривой неограниченно

3. Результаты для пограничного слоя на пластине. Используя изложенный выше метод, В. Толмин [68] впервые теоретически исследовал устойчивость пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине. За основу было взято распределение скоростей, вычисленное Г. Блазиусом и изображенное на рис. 7.7. Профили скоростей в различных точках вдоль пластины при таком распределении подобны между собой, т. е. они совпадают один с другим, если скорости откладывать не для значений y , а для значений $y/\delta(x)$, где $\delta(x)$ есть толщина пограничного слоя, определяемая формулой (7.35):

$$\delta = 5,0 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} .$$

Профиль скоростей Блазиуса имеет точку перегиба на стенке, т. е. принадлежит к типу e профилей, изображенных на рис. 16.9. Следовательно, этот профиль, согласно теореме о роли точки перегиба (см. п. 5 § 2 настоящей главы), лежит как раз на границе между профилями без точки перегиба, устойчивыми при расчете без учета трения, и профилями с точкой перегиба, неустойчивыми при расчете без учета трения.

Нейтральные кривые, полученные в результате расчета на устойчивость, поясненного в предыдущем пункте, изображены на рис. 16.11 и 16.12. Точки, лежащие в областях внутри нейтральных кривых, определяют состояния

приближаются к оси абсцисс, т. е. к нулевым значениям соответствующих ординат. Для наименьшего числа Рейнольдса, при котором еще возможно нейтральное возмущение, получается значение

$$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp} = Re_{kp} = 420 \quad (\text{нейтральная точка}).$$

Точка на пластине, в которой достигается это число Рейнольдса, и является нейтральной точкой пограничного слоя. Примечательно, что для ламинарного течения «опасны» только очень узкие интервалы как длин возмущающих волн так и возмущающих частот (рис. 16.11 и 16.12). Подобно тому, как для числа Рейнольдса имеется нижняя граница, до достижения которой ламинарное течение всегда остается устойчивым, так и для каждого из возмущающих параметров существует верхняя граница, после перехода через которую неустойчивость не возникает. Как показывают рис. 16.11 и 16.12, эти границы определяются следующими числами:

$$\frac{c_r}{U_\infty} = 0,42, \quad \alpha \delta_1 = 0,36, \quad \frac{\beta_r \delta_1}{U_\infty} = 0,15.$$

Обращает на себя внимание довольно большая длина волн неустойчивых возмущений по сравнению с толщиной пограничного слоя. В самом деле, наименьшая длина волны для неустойчивых возмущений равна

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{0,36} \delta_1 = 17,5 \delta_1 \approx 68.$$

Подробное сравнение этих теоретических результатов с опытами будет сделано в § 4 настоящей главы. Здесь мы ограничимся только следующим замечанием. При расчете на устойчивость всегда следует ожидать, что точка, в которой ламинарный пограничный слой становится неустойчивым (нейтральная точка), будет лежать выше по течению, чем наблюдаемая в эксперименте точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную, так как турбулентность, возникающая вследствие нарастания возмущений, развивается именно на пути от нейтральной точки к точке перехода. В рассматриваемом случае такое расположение точки перехода подтверждается опытом. В самом деле, в п. 2 § 1 настоящей главы было указано, что, согласно старым измерениям, положение точки перехода определяется числом Рейнольдса

$$\left(\frac{U_\infty x}{v} \right)_{kp} = 3,5 \cdot 10^5 \text{ до } 10^6.$$

Этому числу Рейнольдса, составленному для текущей длины x , соответствует число Рейнольдса

$$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp} = 950 \quad (\text{точка перехода}),$$

составленное для толщины вытеснения δ_1 , связанной с текущей длиной x соотношением

$$\delta_1 = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}$$

[формула (7.37)]. Это число значительно больше числа Рейнольдса $Re_{kp} = 420$, полученного для нейтральной точки.

Расстояние между нейтральной точкой и точкой перехода определяется в основном интенсивностью *нарастания* неустойчивых возмущений. Для того чтобы получить представление об интенсивности этого нарастания, достаточно вычислить для возмущающих параметров, лежащих внутри нейтральной кривой, коэффициент нарастания $\beta_i > 0$. Для пограничного слоя на пластине впервые это сделал Г. Шлихтинг [51], а впоследствии повторил

С. Ф. Шэн [59]. На рис. 16.13 изображен результат расчета Шэня. Кроме того, расстояние от нейтральной точки до точки перехода в значительной мере зависит от степени турбулентности внешнего течения (см. § 4 настоящей главы).

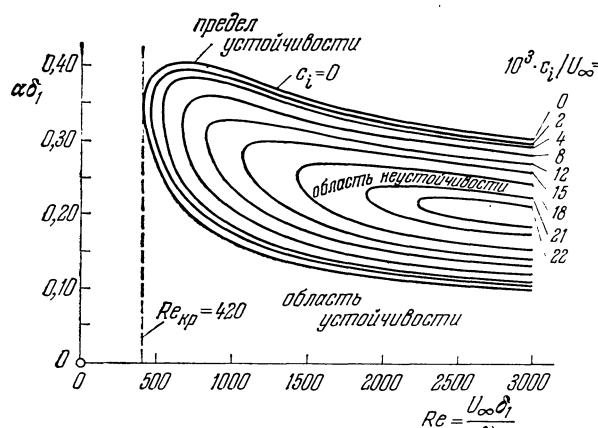


Рис. 16.13. Кривые нарастания возмущений в пограничном слое на продольно обтекаемой пластине. По С. Ф. Шэню [59].

чивых возмущений с учетом нелинейных членов. Выяснилось следующее существенное обстоятельство: нарастание основное течение. Это вызывает изменение переноса энергии от главного движения (основное течение) к побочному движению (возмущающее течение).

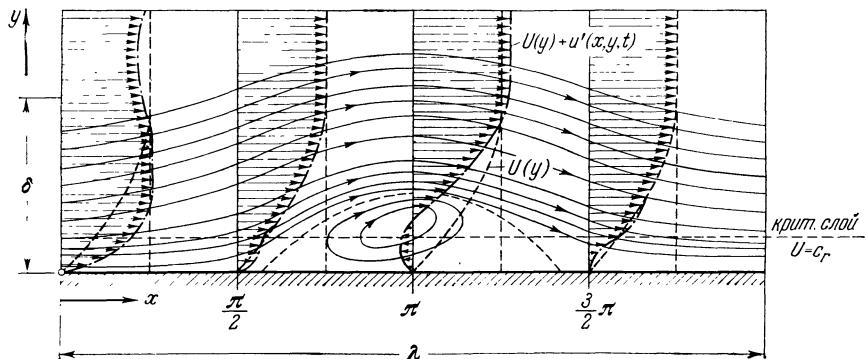


Рис. 16.14. Картина линий тока и распределения скоростей для нейтрального колебания в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине (для возмущения, определяемого точкой I на рис. 16.11). $U(y)$ — основное течение; $U(y) + u'(x, y, t)$ — возмущенное распределение скоростей; $U_\infty \delta_1 / \nu = 893$ — число Рейнольдса; $\lambda = 40\delta_1$ — длина волны возмущения; $c_r = 0,35 U_\infty$ — скорость

$$\text{распространения волн; } \int_0^\delta \sqrt{U'^2} dy = 0,172 U_\infty \delta \text{ — интенсивность возмущений.}$$

так как изменение переноса энергии пропорционально dU/dy . В свою очередь изменение переноса энергии приводит к тому, что неустойчивые возмущения на более поздней стадии не нарастают пропорционально $e^{\beta_i t}$, а стремятся к конечному значению, которое к тому же не зависит от начальной интенсивности возмущения. См. по этому поводу также исследования Г. Шаде [60а].

Экспериментальное подтверждение изложенной выше теории устойчивости заставило себя ждать свыше десяти лет. Но зато впоследствии эта теория была блестящее подтверждена измерениями Г. Б. Шубауэра

С целью более точного выяснения механизма возмущающего движения Г. Шлихтинг [52] определил для некоторых нейтральных колебаний также собственную функцию $\phi(y)$. Знание этой функции позволяет построить картину линий тока возмущенного движения при нейтральных колебаниях. Пример такого построения дан на рис. 16.14.

Недавно Дж. Т. Стюарт [62] пытался рассчитать процесс нарастания неустойчивых членов. Выяснилось следую-

и Г. К. Скрэмстеда, о чём будет подробно сказано в следующем параграфе. После того, как это подтверждение стало известно, Ц. Ц. Линь [33] еще раз проверил все расчеты и получил во всех существенных пунктах совпадение с результатами Толмина и Шлихтинга. В связи с этой проверкой Ц. Ц. Линь рассчитал на устойчивость также плоское ламинарное течение в канале с параболическим распределением скоростей (рис. 5.1). Для критического числа Рейнольдса, составленного для максимальной скорости U_m и для половины полной ширины канала $2b$, он получил значение

$$Re_{kp} = \left(\frac{U_m b}{v} \right)_{kp} = 5314.$$

Последующие очень тщательные проверочные расчеты Л. Г. Томаса [69] подтвердили результаты Ц. Ц. Линя.

§ 4. Сравнение результатов теории устойчивости с экспериментальными данными

1. Некоторые старые измерения перехода ламинарного течения в турбулентное. Теория устойчивости, изложенная в предыдущей главе, впервые дала для предела устойчивости критическое число Рейнольдса такого же порядка, как и экспериментальные исследования. Согласно представлениям этой теории, малые возмущения, для которых длина волны, а также частота лежат в некоторых вполне определенных интервалах, должны нарастать, в то время как возмущения с меньшей или большей длиной волны должны затухать при условии, что число Рейнольдса больше некоторого предельного значения. При этом особо «опасными» должны быть длинноволновые возмущения, длина волн которых в несколько раз больше толщины пограничного слоя. Далее, принимается, что нарастание возмущений приводит в конце концов к переходу ламинарной формы течения в турбулентную. Процесс нарастания колебаний является своего рода связующим звеном между теорией устойчивости и экспериментально наблюдаемым переходом ламинарного течения в турбулентное.

Еще до первых успехов теории устойчивости проблема перехода была очень тщательно исследована экспериментально Л. Шиллером [66], главным образом для течения в трубе. Исследования Л. Шиллера привели к созданию полуэмпирической теории перехода, основанной на представлении, что как при течении в трубе, так и в пограничном слое переход ламинарной формы течения в турбулентную обусловливается в основном возмущениями конечной величины. В случае трубы эти возмущения возникают при входе в неё, в случае же пограничного слоя они с самого начала находятся во внешнем течении. Особенно широко это направление было развито теоретически Дж. И. Тэйлором [64].

Решение вопроса о том, какая из обеих теорий правильна, могло быть достигнуто только путем эксперимента. Еще до возникновения теории устойчивости И. М. Бюргерс [8], Б. Г. Ван дер Хегге Цейнен [27] и М. Ханзен произвели измерения ламинарного пограничного слоя и перехода ламинарной формы течения в турбулентную на плоской пластине. Для критического числа Рейнольдса получилось значение

$$\left(\frac{U_\infty x}{v} \right)_{kp} = (3,5 \div 5) \cdot 10^5.$$

Вскоре после опубликования первых сообщений о теории устойчивости Х. П. Драйден [9], [10] со своими сотрудниками выполнил новые, очень детальные и тщательные экспериментальные исследования пограничного слоя на пластине. В частности, особенно тщательно были измерены — посредством

термоанемометра — распределения скоростей в пространстве и во времени. Тем не менее все эти исследования не подтвердили предсказанного теорией нарастания возмущений с волнами определенного диапазона длин.

Однако исследования пограничного слоя на пластине, выполненные примерно в это же время в гидродинамическом канале в Гёттингене, все же

дали, по крайней мере качественное, подтверждение теории устойчивости. На рис. 16.15 показано возникновение турбулентности из первоначально длинноволнового возмущения в пограничном слое на пластине. Сходство этих снимков с теоретической картиной линий тока для нейтрального возмущения, изображенной на рис. 16.14, очевидно.

Весьма важным параметром, от которого зависит переход в пограничном слое ламинарной формы течения в турбулентную, является так называемая *степень возмущенности внешнего течения*. Это было обнаружено уже давно, еще при измерении сопротивления шаров в различных аэrodинамических трубах. Эти измерения показали, что при увеличении числа Рейнольдса достигается такое его значение, при котором коэффициент сопротивления шара внезапно уменьшается (рис. 1.5), и что это критическое число Рейнольдса очень сильно зависит от степени возмущенности внешнего течения. Степень возмущенности внешнего течения количественно определяется через средние во времени турбулентные пульсации скорости, возникающие, например, на некотором расстоянии позади выпрямляющей течение решетки и притом обычно в направлении всех трех осей координат (см. § 6 главы XVIII).

Если обозначить средние во времени

Рис. 16.15. Возникновение турбулентности из первоначально длинноволнового возмущения при течении вдоль плоской пластины. По Л. Прандтлю [43]. Снимки сделаны киноаппаратом, перемещавшимся над пластиной на тележке со скоростью, равной скорости течения; поэтому в поле зрения объектива оставалась все время одна и та же группа вихрей. Снимки делались при большой экспозиции. Течение было сделано видимым при помощи алюминиевой пыли, насыпанной на поверхность воды.

квадраты турбулентных пульсаций компонент скорости в направлениях осей координат через u'^2 , v'^2 , w'^2 , то под степенью турбулентности понимается величина

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (u'^2 + v'^2 + w'^2)}}{U_\infty},$$

где U_∞ есть скорость основного течения (скорость в аэrodинамической трубе). В аэrodинамических трубах на некотором расстоянии позади выпрямляющих решеток обычно существует так называемая *изотропная турбулентность*, т. е. такое турбулентное течение, в котором средние пульсации скорости в направлениях всех трех осей координат равны, следовательно,

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}.$$

В этом случае степень турбулентности определяется одной только продольной пульсацией, т. е. величиной

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_\infty}.$$

Это простое определение степени турбулентности очень часто используется на практике даже в тех случаях, когда турбулентность не изотропная.

Измерения сопротивления шаров, выполненные в различных аэродинамических трубах, показывают, что критическое число Рейнольдса сильно зависит от степени турбулентности ε , а именно Re_{kp} возрастает при уменьшении ε (см. рис. 18.10 на стр. 516). Для аэродинамических труб старых конструкций степень турбулентности составляет около $\varepsilon = 0,01$.

2. Подтверждение теории устойчивости экспериментами. В 1940 г. Х. Л. Драйден со своими сотрудниками Г. Б. Шубауэром и Г. К. Скремстедом вновь занялся экспериментальным исследованием перехода ламинарной формы течения в турбулентную и осуществил по широкой программе новые опыты в Вашингтонском национальном бюро стандартов (National Bureau of Standards, Washington) [12], [57]. Прежние результаты, полученные для шара, давали основание предполагать, что степень турбулентности оказывает решающее влияние на переход ламинарной формы течения в турбулентную; поэтому была построена специальная аэродинамическая труба, в которой посредством весьма большого числа выпрямляющих решеток и очень сильного сужения рабочего потока воздуха степень турбулентности была погружена до очень малого значения

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_\infty} = 0,0002,$$

ранее никогда не достигавшегося. В этой аэродинамической трубе был очень тщательно исследован пограничный слой на продольно обтекаемой пластине. Измерения привели к следующему результату: если раньше, при большой степени турбулентности, критическое число Рейнольдса составленное для текущей длины пластины, получалось равным $Re_{kp} = (3,5 \div 5) \cdot 10^5$, то теперь при малой степени турбулентности ($\varepsilon < 0,001$), оно поднялось до значения

$$\left(\frac{U_\infty x}{v} \right)_{kp} \approx 2,8 \cdot 10^6$$

(рис. 16.16). Кроме того, выяснилось, как это видно из рис. 16.16, что при уменьшении степени турбулентности критическое число Рейнольдса сначала значительно возрастает, но затем, достигнув примерно при $\varepsilon = 0,0008$ значения $Re_{kp} = 2,8 \cdot 10^6$, сохраняет его при дальнейшем уменьшении степени турбулентности. Это означает, что для критического числа Рейнольдса в пограничном слое на продольно обтекаемой пластине существует верхняя граница. Результаты, полученные ранее А. А. Холлом и Г. С. Хислопом [25], хорошо укладываются в график, изображенный на рис. 16.16.

Все измерения, о которых речь будет идти ниже, производились при степени турбулентности $\varepsilon = 0,0003$. Скорость измерялась посредством термоанемометра и воспринималась катодным осциллографом. Сначала измерялось изменение скорости во времени в различных местах вдоль пластины при нормальном состоянии течения (естественные возмущения), а затем — при искусственно возбужденных возмущениях. Возбуждение искусственных возмущений определенной частоты производилось посредством колеблющейся металлической ленты, укрепленной на расстоянии 0,15 мм от стенки и приводившейся в колебательное движение при помощи электромагнита.

Измерения отчетливо показали (рис. 16.17), что существование нарастающих синусоидальных колебаний является предварительной ступенью

для перехода ламинарной формы течения в турбулентную даже в случае естественных возмущений (т. е. без возбуждения колебаний искусственным путем). При чрезвычайно малой степени турбулентности неправильные пульсации почти не наблюдаются. Однако при приближении к точке перехода возникают почти чисто синусоидальные колебания, амплитуда которых сначала остается небольшой, но затем, по мере продвижения вниз по течению,

сильно увеличивается. Перед самой точкой перехода возникают колебания с очень большой амплитудой, и, наконец, в точке перехода правильные колебания внезапно превращаются в неправильные высокочастотные пульсации, характерные для турбулентного течения.

Выполненные измерения полностью объяснили, почему при прежних опытах эти нарастающие синусоидальные колебания не были обнаружены. Все прежние измерения производились при степени турбулентности $\varepsilon = -0,01$, при новых же измерениях она составляла $\varepsilon = 0,0003$; но как только она повышалась, переход к турбулентной форме течения вызывался случайными возмущениями без предварительного нарастания синусоидальных колебаний с длиной волны, заключенной в определенных границах.

Металлическая лента, применявшаяся для создания искусственных колебаний, имела толщину 0,05 мм, ширину 2,5 мм и длину 30 см и была протянута на расстоянии 0,15 мм от стенки. Для возбуждения колебаний применялся переменный ток и магнитное поле. Таким путем удавалось создавать предусмотренные теорией двумерные возмущения с заданной частотой, следовательно, можно было по выбору получать нарастающие, затухающие и нейтральные колебания. Измерения производились, как уже было сказано, посредством термоанемометра. Результаты этих измерений изображены на рис. 16.18. Точки, отмеченные на рисунке кружочками, относятся к нейтральным колебаниям. Все эти точки хорошо располагаются вдоль одной кривой, вычерченной штрихами. Для сравнения на рис. 16.18 перенесена с рис. 16.11 теоретическая нейтральная кривая. Результаты измерений весьма хорошо согласуются с теорией.

С целью еще более глубокого проникновения в механизм возмущающего движения для некоторых нейтральных колебаний было исследовано распределение амплитуды пульсаций u' в направлении, перпендикулярном к стенке, на разных расстояниях от стенки (рис. 16.19). Нижняя кривая в каждой строке осциллограммы показывает колебания на постоянном расстоянии от стенки, а верхняя кривая — на переменном расстоянии, отмеченном слева от строки. Отчетливо видно, что с увеличением расстояния от стенки происходит постепенное смещение фаз обеих пульсаций до тех пор, пока на определенном расстоянии оно не достигает значения 180° . Это и есть скачок фазы на 180° , предсказанный теорией. Далее, на рис. 16.20 изображено распределение амплитуд пульсаций u' по толщине пограничного слоя для двух нейтральных возмущений, отмеченных на рис. 16.11 цифрами I и II. И здесь согласование с теоретическими расчетами Г. Шлихтинга [52] получилось очень хорошим.

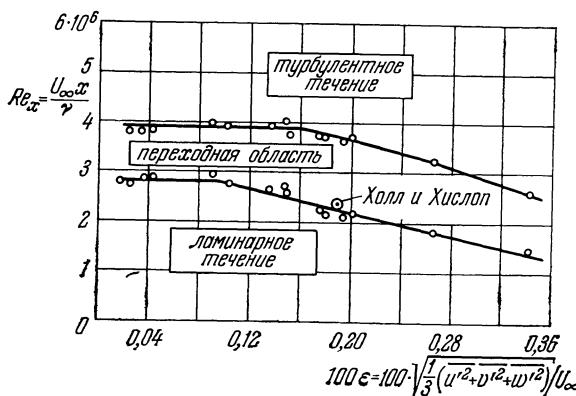


Рис. 16.16. Влияние степени турбулентности на критическое число Рейнольдса для продольно обтекаемой плоской пластинки. По измерениям Шубауэра и Скремстеда [51].

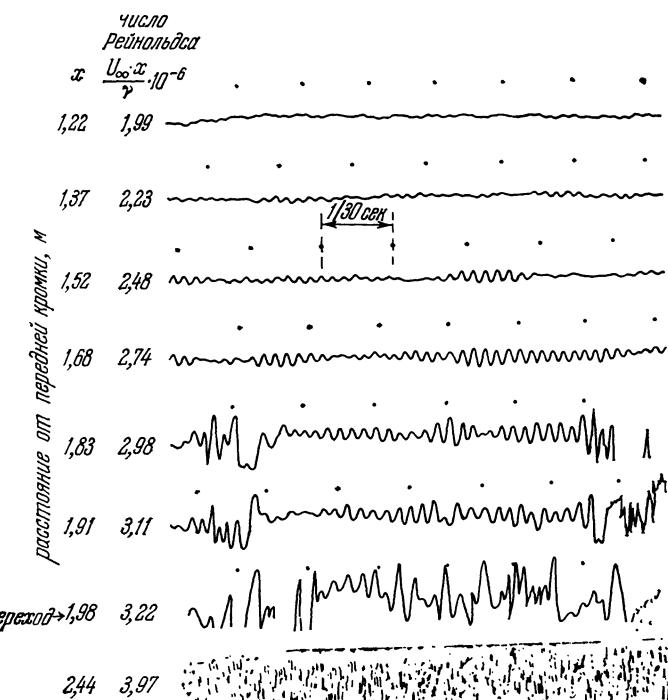


Рис. 16.17. Осциллограмма пульсации u' скорости случайных («естественных») возмущений в ламинарном \rightarrow гравитационном слое на плоской пластине, обтекаемой воздухом в продольном направлении. Получена при измерении перехода ламинарного течения в турбулентное. По Шубаузеру и Скремстеду [57]. Расстояние точки замера от стенки равно 0,57 мм; скорость набегающего течения $U_\infty = 24$ м/сек; промежуток между каждыми двумя отметками времени, изображенными в виде точек, равен 1/30 сек.

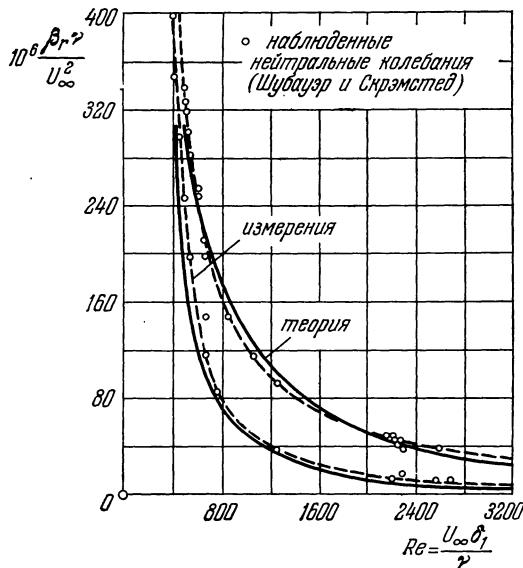


Рис. 16.18. Кривые частоты нейтральных возмущений при продольном обтекании плоской пластины. Измерения — по Шубаузеру и Скремстеду [57], теоретическая кривая — по Толмину [58].

Выше уже было указано, что экспериментальное подтверждение теории устойчивости стало возможным только после того, как удалось получить воздушный поток с очень малой степенью турбулентности. То, что экспериментально наблюдаемая точка перехода лежит, как и следовало ожидать, вниз по течению от теоретически предсказываемой нейтральной точки, подтвердили еще старые измерения, производившиеся при больших степенях турбулентности порядка $\epsilon = 0,01$. Однако расстояние точки перехода от точки потери устойчивости очень сильно зависит от степени турбулентности. Следует ожидать, что это расстояние тем меньше, чем больше степень турбулентности, так как при большой степени турбулентности требуется только незначительное нарастание неустойчивых возмущений, чтобы из них возникла турбулентность. Это видно из графика, построенного П. С. Гренвиллом [23] на основании экспериментальных данных для пограничного слоя на плоской пластине (рис. 16.21). В качестве меры расстояния между точкой перехода и нейтральной точкой Гренвиль взял разность чисел Рейнольдса, составленных в этих точках для толщины потери импульса, т. е. величину

$$\left(\frac{U_{\infty} \delta_2}{v} \right)_{\text{пер}} - \left(\frac{U_{\infty} \delta_2}{v} \right)_{\text{н.}}$$

При этом число Рейнольдса в нейтральной точке пограничного слоя на плоской пластине было принято равным

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_{\infty} \delta_2}{v} \right)_{\text{н.}} &= \frac{1}{2,6} \left(\frac{U_{\infty} \delta_1}{v} \right)_{\text{н.}} = \\ &= \frac{420}{2,6} = 162. \end{aligned}$$

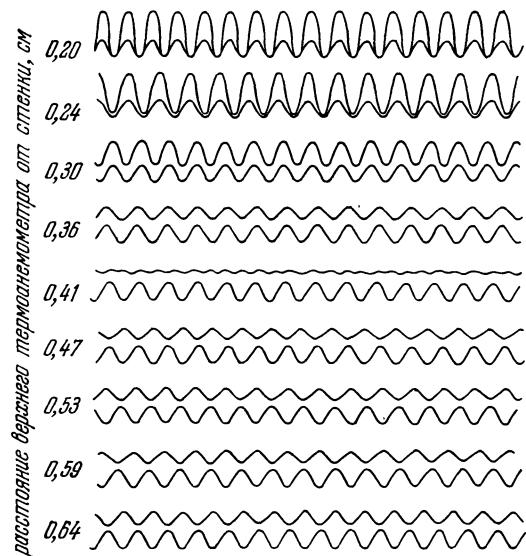
Указанные разности чисел Рейнольдса отложены на рис. 16.21 как ординаты, а соответствующие значения степени турбулентности — как абсциссы. В такой системе координат как новые измерения Шубауэра и Скремстеда [57],

Рис. 16.19. Измерения колебаний в ламинарном пограничном слое. По Шубаузеру и Скремстеду [57]. Осциллограммы показывают сдвиг фаз — вплоть до 180° пульсаций скорости u' при колебаниях, вызванных помещенной в пограничный слой колеблющейся лентой («искусственные» возмущения). Лента находилась на расстоянии 90 см от передней кромки пластины. Измерение скорости производилось одновременно двумя термоанемометрами, расположеннымными позади ленты в 30 см от нее. Один из них был помещен на постоянном расстоянии от стены, равном 1,4 мм (нижние кривые на каждой осциллограмме), а другой — на переменном расстоянии от стены (верхние кривые на каждой осциллограмме). Частота колебаний ленты 70 гц. Скорость набегающего потока $U_{\infty} = 13$ м/сек.

выполненные при очень малой степени турбулентности, так и более старые измерения Холла и Хислопа, выполненные при более высоких степенях турбулентности, очень хорошо ложатся на одну кривую. Из графика видно, что только при большой степени турбулентности, равной приблизительно $\epsilon = 0,02 \div 0,03$, точка перехода почти совпадает с нейтральной точкой.

Недавно Ф. К. Вортман [72] произвел измерения пограничного слоя на плоской пластине в воде, в которую вводилась соль теллура. Полученные им результаты блестящее подтвердили теорию устойчивости.

Упомянем, что теория Рэйли — Толмина о неустойчивости профилей скоростей с точкой перегиба в свое время была подвергнута экспериментальной проверке Г. Розенброком [49], причем получилось хорошее согласование теории и измерений. Исследованию устойчивости профиля скоростей в спут-



ном течении позади тела посвящена работа С. Холлингдела [29]. Устойчивость ламинарной струи исследована Н. Кёрлом [6]. См. в связи с этим также работы А. Михалке и Г. Шаде [35^a], а также Т. Тацуки [63^a], Л. Н. Хоуарда [31^a] и К. В. Кленшоу и Д. Эллиота [6^a]. В последней работе для предела устойчивости плоской свободной струи число Рейнольдса, отнесенное к половине ширины струи, получилось равным $Re_{kp} = 6,5$.

Наглядное представление о механизме нарастания неустойчивых колебаний дают полученные Г. Бергом [2] дымовые снимки перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое на крыловом профиле.

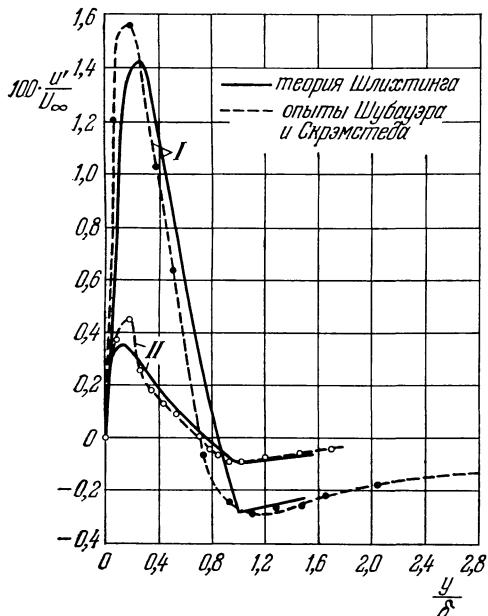


Рис. 16.20. Распределение амплитуд пульсаций u' скорости для двух нейтральных возмущений в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине. Измерения — по Шубаузеру и Скремстеду [67], теоретическая кривая — по Шлихтингу [2]. Кривые, обозначенные цифрами I и II, соответствуют нейтральным возмущениям I и II на рис. 16.11.

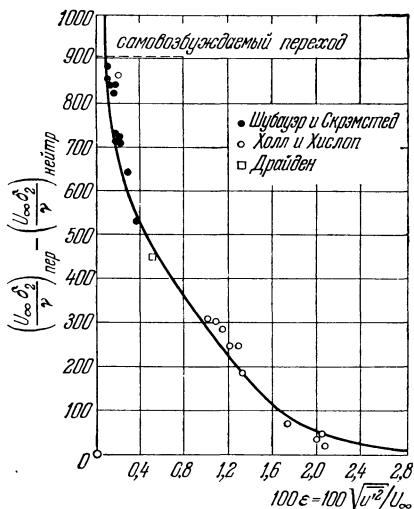


Рис. 16.21. Измерения перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине. По Гренвиллу [28]. На осях отложены разности чисел Рейнольдса в точке перехода и в нейтральной точке, а на оси абсцисс — степени турбулентности. При увеличении степени турбулентности точки перехода перемещаются ближе к нейтральной точке.

На фотографии, изображенной на рис. 16.22, отчетливо видно, что искусственные возмущения, созданные громкоговорителем, вызывают в

Рис. 16.22. Дымовой снимок течения в пограничном слое на крыловом профиле при периодическом возмущении. По Г. Бергу [2]. Скорость набегающего потока $U_\infty = 4$ м/сек. Частота возмущений $f_r = 145$ сек⁻¹.

ламинарном пограничном слое правильные волны, амплитуда которых по мере продвижения вниз по течению постепенно нарастает.

Описанные в этом параграфе экспериментальные исследования столь блестящие подтвердили теорию устойчивости ламинарного течения, что ее следует считать полностью проверенной составной частью гидроаэромеханики. Таким образом, предположение Рейнольдса о том, что причиной перехода ламинарной формы течения в турбулентную является неустойчивость ламинарного течения, можно считать окончательно доказанным. Эта неустойчивость представляет собой *теоретически возможный и экспериментально наблюдаемый механизм* перехода ламинарного течения в турбулентное. Однако остается открытym следующий вопрос: является ли этот механизм *единственным* и дает ли он полную картину перехода ламинарного течения в турбулентное. В последнее время этот вопрос стал предметом внимания многих исследователей. Желающих ознакомиться с кругом возникших при этом проблем отсылаем к сводному обзору М. В. Морковина [38].

Трехмерные течения. Рассмотренные выше экспериментальные исследования показывают, что переход ламинарного течения в турбулентное вызывается нарастанием неустойчивых двумерных возмущений. Нарастание таких возмущений было детально исследовано Г. Б. Шубауэром и Г. К. Скремстедом [57], Г. Б. Шубауэром и П. С. Клебановым [58], а также И. Тани [63]. При этом выяснилось, что нарастание неустойчивых волн ведет к явно выраженной трехмерной структуре течения. После того, как амплитуда волн достигает определенного значения, начинается сильное нелинейное нарастание возмущений. При этом возникает перенос энергии в поперечном направлении, что приводит к искажению первоначально двумерного основного течения. Таким образом, разрушение ламинарного течения и возникновение турбулентности представляют собой следствие трехмерного развития неустойчивых возмущений. При этом возникают вихри с продольно направленными осями, расположенные частично в пограничном слое.

За дальнейшими подробностями отсылаем к новым исследованиям Г. Б. Шубауэра, П. С. Клебанова и К. Д. Тидстрома [58а], [316], [31в], Г. Гертлера и Г. Виттинга [22а], а также Ц. Ц. Линя, Дж. Бенни и Г. П. Гринспэна [34а], [1а], [23а].

Обзору всего комплекса вопросов возникновения турбулентности посвящена статья Г. Шлихтинга в «Handbuch der Physik» [54].

Литература к главе XVI

1. Barnes H. T., Coker E. G., The flow of water through pipes. Proc. Roy. Soc. London 74, 341 (1905).
- 1a. Benney D. J., A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. J. Fluid Mech. 10, 209—236 (1961).
2. Berg H., A method for visualizing periodic boundary layer phenomena. IUTAM-Symposium «Grenzschichtforschung» (под. ред. Н. Гертлера), Berlin 1958, 173—178.
3. Burgers J. M., The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. of the First Internat. Congress for Appl. Mech. 113, Delft 1924.
4. Cheng S. J., On the stability of laminar boundary layer flow. Quart. Appl. Math. 11, 346—350 (1953).
5. Couette M., Études sur le frottement des liquides. Ann. Chim. Phyc. 21, 433—510 (1890).
6. Curle N. Hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow. Proc. Roy. Soc. London A 238, 489—501 (1957).
- 6a. Clenshaw C. W., Elliott D., A numerical treatment of the Orr-Sommerfeld-equation in the case of a laminar jet. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, 300—313 (1960).
7. Dhwani S., Narasimha R., Some properties of boundary layer flow during transition from laminar to turbulent motion. J. Fluid Mech. 3, 418—436 (1958).
8. Doetsch H., Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_a -Werte. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 54—57 (1940).
9. Dryden H. L., Boundary layer flow near flat plates. Proc. Fourth Internat. Congress for Appl. Mech. Cambridge-England 1934, 175.
10. Dryden H. L., Airflow in the boundary layer near a plate. NACA Rep. 562 (1936).
11. Dryden H. L., Turbulence and the boundary layer. JAS 6, 85—100 и 101—105 (1939).

12. Dryden H. L., Some recent contributions to the study of transition and turbulent boundary layers (Papers presented at the Sixth Internat. Congress for Appl. Mech. Paris, сентябрь 1946; NACA TN 1168 (1947); см. также Recent Advances in the mechanics of boundary layer flow. Advances Appl. Mech. New York I, 2—40 (1948)). [Имеется русский перевод в сб. «Проблемы механики», вып. 1, ИЛ, Москва 1955.]
13. Dryden H. L., Recent investigation of the problem of transition. ZFW 4, 89—95 (1956).
14. Dubs W., Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenbild von Wasser und Nitrobenzol. Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem. Helv. phys. Acta 12, 169—228 (1939).
15. Eiffel G., Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. Compt. Rend. 155, 1597—1599 (1912).
16. Ekman V. W., On the change from steady to turbulent motion of liquids. Ark. f. Mat. Astron. och Fys. 6, № 12 (1910).
17. Emmons H. W., Bryson A. E., The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Часть I: JAS 18, 490—498 (1951); часть II: Proc. First US National Congress Appl. Mech. 859—868 (1952).
18. Fage A., Fluid motion transition from laminar to turbulent flow in a boundary layer. Phys. Soc. Repts. on Progress in Physics 6, 270 (1939).
19. Fage A., Experiments on the breakdown of laminar flow. JAS 7, 513—517 (1940).
20. Fage A., Preston J. H., Experiments on transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer. Proc. Roy. Soc. London A 178, 201 (1941).
21. Fage A., Transition in the boundary layer caused by turbulence. ARC RM 1896 (1942).
22. Froude W., Experiments on the surface friction. Brit. Ass. Rep. 1872.
- 22a. Görtler H., Witting H., Theorie der sekundären Instabilität der laminaren Grenzschichten. IUTAM Symposium «Grenzschichtforschung» (под. ред. H. Görtler'a). Berlin 1958, 110—126.
23. Graville P. S., The calculations of viscous drag of bodies of revolution. Navy Department. The David Taylor Model Basin; Report 849 (1953).
- 23a. Greenspan H. P., Bennet D. J., On shear-layer instability, breakdown and transition. J. Fluid Mech. 15, 133—153 (1963).
24. Grohne D., Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. ZAMM 34, 344—357 (1954). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1955, № 5 (333).]
25. Hall A. A., Hislop G. S., Experiments on the transition of the laminar boundary layer on a flat plate. ARC RM 1843 (1938).
26. Hamel G., Zum Turbulenzproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 1911, 261—270.
27. van der Hegge Zijnen B. G., Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Тезисы доклада, Delft 1924.
28. Heisenberg W., Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Ann. d. Phys. 74, 577—627 (1924).
29. Hollingdale S., Stability and configuration of the wakes produced by solid bodies moving through fluids. Phil. Mag. VII 29, 209—257 (1940).
30. Holstein H., Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. ZAMM 30, 25—49 (1950).
31. Hopf L., Ann. d. Phys. 44, 1 (1914) и 59, 538 (1919); см. также сводный обзор: Nother F., ZAMM 1, 125—138 (1921).
- 31a. How ard L. N., Hydrodynamic stability of a jet. J. Math. Phys. 37, 283—298 (1959).
- 31b. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient. NASA TN D-195, 1959.
- 31c. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M., The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech. 12, 1—34 (1962).
32. Lewis G. W., J. Roy. Aero. Soc., май 1939 (27th Wilbur Wright Memorial Lecture). Сокращенный немецкий перевод в Luftfahrtsschrifttum des Auslandes in Übersetzungen 5, 153 (1939).
33. Lin C. C., On the stability of two-dimensional parallel flows. Quart. Appl. Math. 3, 117—142 (июль 1945); 3, 213—234 (окт. 1945); 3, 277—301 (янв. 1946).
34. Lin C. C., The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, 1955. [Имеется русский перевод: Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, Москва 1958.]
- 34a. Lin C. C., Bennet D. J., On the instability of shear flows. Proc. Symp. Appl. Math. 13, Hydrodynamic Instability 1—24 (1962).
35. Lorentz H. A., Abhandlung über theoretische Physik I, 43—71, Leipzig 1907—переработанное изложение статьи, помещенной в Zittingsverlag Akad. v. Amsterdam 6, 28 (1897); см. также Prandtl L., The mechanics of viscous fluids, в книге Durand W. F., Aerodynamic Theory III, 34—208 (1935). [Имеется русский перевод Дюранд В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]

- 35a. Michalke A., Shadé H., Zur Stabilität von freien Grenzschichten. Ing.-Arch. 33, 1—23 (1963).
36. Meksyn D., New methods in laminar boundary layer theory. Pergamon Press, London 1961, гл. XXII.
37. v. Mises R., Kleine Schwingungen und Turbulenz. Jahresber. d. Dtsch. Math. Verein. 1912, 241—248.
38. Morkovin M. V., Transition from laminar to turbulent shear flow. A review of some recent advances in its understanding. Trans. ASME 80, 1121—1128 (1958).
39. Orr W. M. F., The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Часть I: A perfect liquid; часть II: A viscous liquid. Proc. Roy. Irish Acad. 27, 9—68 и 69—138 (1907).
40. Persh J., A study of boundary-layer transition from laminar to turbulent flow. U. S. Naval Ordnance Lab. Rep. 4339 (1956).
41. Prandtl L., Über den Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 177—190 (1914); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 597—608.
42. Prandtl L., Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. ZAMM 1, 431—436 (1921) и Phys. Z. 23, 19—25 (1922); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 687—696.
43. Prandtl L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 77, 105—114 (1933).
44. Pretsch J., Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 58—75 (1941).
45. Lord Rayleigh, Sci. Papers I, 474—487 (1880); III, 17 (1887); VI, 197 (1913).
46. Lord Rayleigh, On the stability of certain fluid motions. Proc. London Math. Soc. 11, 57 (1880) и 19, 67 (1887); Scientific Papers I, 474—487 и III, 17; см. также Scientific Papers IV, 203 (1895) и VI, 197 (1913).
47. Reynolds O., On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. Roy. Soc. 174, 935—982 (1883); см. также Collected Papers II, 51.
48. Reynolds O., On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans. Roy. Soc. 186A, 123—164 (1895); см. также Collected Papers II.
49. Rosenbrook G., Instabilität der Gleitschichten im schwach divergenten Kanal. ZAMM 17, 8—24 (1937).
50. Rotta J., Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. Ing.-Arch. 24, 258—281 (1956).
- 50a. Schadé H., Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers. Phys. Fluids 7, 623—628 (1964).
51. Schlichting H., Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 182—208 (1933); см. также ZAMM 13, 171—174 (1933).
52. Schlichting H., Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1, 47—48 (1935).
53. Schlichting H., Über die Theorie der Turbulenzentstehung. Zusammenfassender Bericht. Forschg. Ing.-Wes. 16, 65—78 (1950).
54. Schlichting H., Entstehung der Turbulenz. Статья в «Handbuch der Physik» (под ред. S. Flügge), т. VIII/1, 351—450 (1959). [Имеется русский перевод: Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности, ИЛ, Москва 1962.]
55. Schiller L., Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Forschg. Ing.-Wes., вып. 428 (1922), а также ZAMM 2, 96—106 (1922) или Physikal. Z. 23, 14 (1922).
56. Schiller L., Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. ZAMM 14, 36—42 (1934).
57. Schubauer G. B., Skramstad H. K., Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1772. Перепечатка секретного отчета NACA от апреля 1943 (впоследствии рассекреченного и опубликованного как NACA War-time Report W-8). См. также JAS 14, 69—78 (1947) или NACA Rep. 909.
58. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Contributions on the mechanics of boundary layer transition. NACA TN 3489 (1955) и NACA Rep. 1289 (1956); см. также Proc. Symposium on Boundary Layer Theory, Nat. Phys. Lab. England 1955.
- 58a. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Mechanism of transition at subsonic speeds. IUTAM Symposium «Grenzschichtforschung» (под ред. H. Görtler'a). Berlin 1958, 84—107.
59. Shen S. F., Calculated amplified oscillations in plane Poiseulle and Blasius flows. JAS 21, 62—64 (1954).

60. Sommerfeld A., Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. Atti del 4 Congr. Internat. dei Mat., т. III, 116—124, Roma 1908.
61. Squire H. B., On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls. Proc. Roy. Soc. London A 142, 621—628 (1933).
62. Stuart J. T., On the effects of the Reynolds stress on hydrodynamic stability. ZAMM-Sonderheft 32—38 (1956).
63. Tani I., Some aspects of boundary layer transition at subsonic speeds. Advances in Aeronautical Sciences (под ред. Th. v. Kármán'a), т. 3, 143—160, Pergamon Press, New York, London 1962.
- 63a. Tatsumi T., Kakutani T., The stability of a two-dimensional laminar jet. J. Fluid Mech. 4, 261—275 (1958).
64. Taylor G. I., Some recent developments on the study of turbulence. Proc. of the Fifth Internat. Congress for Appl. Mech., New York, 294 (1938); см. также Statistical Theory of Turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layer. Proc. Roy. Soc. London A 156, 307—317 (1936) или Scientific Papers II, 356—364.
65. Tietjens O., Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Диссертация, Göttingen 1922; ZAMM 5, 200—217 (1925).
66. Tollmien W., Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitteilung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 21—44 (1929); английский перевод в NACA TM 609 (1931).
67. Tollmien W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1, 79—114 (1935); английский перевод в NACA TM 792 (1936).
68. Tollmien W., Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldschen Zahlen. ZAMM 25/27, 33—50 и 70—83 (1947).
69. Thomas L. H., The stability of plane Poiseuile flow. The Physical Rev. 86, 812 (1952).
70. Townsend H. C. H., Note on boundary layer transition. ARCRM 1873 (1939).
71. Wieselsberger C., Der Luftwiderstand von Kugeln. ZFM 5, 140—145 (1914).
72. Wortmann F. X., Untersuchungen instabiler Grenzschichtschwingungen in einem Wasserkanal mittels der Tellur-Methode. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 460—470.

Г л а в а XVII

Возникновение турбулентности II

(влияние градиента давления, отсасывания, сжимаемости, теплопередачи и шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную)

Предварительные замечания. Результаты, изложенные в главе XVI, в принципе доказали пригодность теории устойчивости, основанной на методе малых колебаний, для исследования перехода ламинарного течения в турбулентное. Это дает основание ожидать, что при помощи этой теории можно выяснить, какие другие параметры, кроме рассматривавшегося до сих пор числа Рейнольдса, существенно влияют на переход ламинарного течения в турбулентное. В § 2 главы XVI уже было коротко сказано, что градиент давления внешнего течения оказывает очень большое влияние на устойчивость пограничного слоя, а тем самым и на переход течения в пограничном слое на обтекаемом теле из ламинарной формы в турбулентную. А именно, падение давления стабилизует пограничный слой, а повышение давления, наоборот, понижает устойчивость пограничного слоя.

Активные силы, например центробежная сила при криволинейном течении и гидростатическая подъемная сила в течении с переменной в вертикальном направлении плотностью, также очень сильно влияют на переход ламинарного течения в турбулентное.

В последние годы приобрели интерес вопросы воздействия на течение в пограничном слое посредством отсасывания или сдувания обтекающей среды и влияния этого воздействия на переход течения из ламинарной формы в турбулентную (см. главу XIV). Отсасывание повышает, а сдувание, наоборот, понижает устойчивость пограничного слоя.

Далее выяснилось, что при течениях с очень большой скоростью, когда текущую среду следует рассматривать как сжимаемую, подвод или отвод тепла через обтекаемую стенку (нагревание или охлаждение) оказывает большое влияние на переход ламинарного течения в турбулентное. Передача тепла от течения к стенке значительно стабилизует пограничный слой, передача же тепла от стенки течению, наоборот, сильно понижает устойчивость пограничного слоя.

Большое практическое значение имеют также проблемы, связанные с влиянием шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную.

Обзор всех перечисленных разнообразных проблем будет дан в этой главе. Начнем с рассмотрения влияния градиента давления, поскольку оно имеет особо важное значение для практических приложений.

§ 1. Влияние градиента давления на переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную

Пограничный слой на продольно обтекаемой плоской пластине, устойчивость которого была исследована в главе XVI, отличается от других пограничных слоев тем, что в нем профили скоростей на различных расстояниях от передней кромки пластины аффинно-подобны между собой (см. гла-

бу VII). Эта аффинность является следствием постоянства давления во внешнем течении. При обтекании произвольного цилиндрического тела градиент давления вдоль стенки изменяется от точки к точке, и поэтому профили скоростей в пограничном слое в различных точках стенки уже не являются аффинно-подобными между собой. В области падения давления получаются профили скоростей без точки перегиба типа, изображенного на рис. 16.9, *δ*, а в области повышения давления — профили с точкой перегиба (рис. 16.9, *ж*). В то время как в случае продольно обтекаемой плоской пластины все профили скоростей имеют одинаковый предел устойчивости, равный

$$Re_{kp} = \left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp} = 420,$$

при обтекании произвольного тела этот предел для отдельных профилей получается различным, а именно в области падения давления он выше, а в области повышения давления ниже, чем для профилей скоростей в пограничном слое на пластине. Для того чтобы найти положение нейтральной точки для заданного тела, необходимо выполнить следующие операции:

1. Рассчитать распределение давления вдоль контура тела в предположении, что вязкостью можно пренебречь.

2. Рассчитать на основе найденного распределения давления ламинарный пограничный слой.

3. Исследовать устойчивость отдельных профилей скоростей этого ламинарного пограничного слоя.

Расчет распределения давления вдоль контура заданного тела есть задача теории потенциального течения идеальной жидкости, для решения которой известны удобные вычислительные методы; см., например, работы Т. Теодерсена и Дж. Э. Гаррика [161] и Ф. Ригельса [112], [113]. Для расчета ламинарного пограничного слоя удобные вычислительные методы изложены в главе X. Остается третья операция — расчет устойчивости. Остановимся подробно на этом расчете.

Из теории ламинарного пограничного слоя (глава VII) известно, что при обтекании цилиндрического тела кривизна стенки не оказывает существенного влияния на развитие пограничного слоя, правда, при условии, что радиус кривизны стенки значительно превышает толщину пограничного слоя. Это объясняется тем, что развитие пограничного слоя на таких телах практически не зависит от воздействия центробежной силы, и поэтому пограничный слой развивается на них совершенно так же, как на *плоской* пластине под воздействием того градиента давления, который имел бы место при невязком обтекании рассматриваемого тела. То же самое относится и к расчету устойчивости ламинарного пограничного слоя с градиентом давления.

В то время как при продольном обтекании плоской пластины скорость внешнего течения постоянна, т. е. $U_\infty = \text{const}$, теперь, при обтекании цилиндрического тела, скорость внешнего течения $U_m(x)$ зависит от текущей длины x , измеренной вдоль стенки, и связана с градиентом давления dp/dx вдоль стенки уравнением Бернулли

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_m \frac{dU_m}{dx}. \quad (17.1)$$

Однако, несмотря на наличие этой зависимости скорости внешнего течения от координаты x , исследование устойчивости ламинарного течения с градиентом давления может быть выполнено, как показал И. Преч [107], таким же образом, как и в случае продольного обтекания плоской пластины, т. е. в предположении, что скорость основного течения U зависит только от попечной координаты y . Влияние градиента давления при исследовании устойчивости проявляется лишь на форме профиля скоростей $U(y)$. В § 2 главы XVI

уже было указано, что предел устойчивости профиля скоростей в пограничном слое существенно зависит от формы профиля скоростей, а именно профили с точкой перегиба имеют значительно более низкий предел устойчивости, чем профили скоростей без точки перегиба (теорема о роли точки перегиба). Так как кривизна профиля скоростей связана с градиентом давления соотношением

$$\mu \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_{\text{стенка}} = \frac{dp}{dx} \quad (17.2)$$

[ср. с соотношением (7.15)], то сильная зависимость предела устойчивости от формы профиля скоростей равносильна сильному влиянию градиента давления на устойчивость, а именно ламинарные пограничные слои в области

падения давления ($dp/dx < 0$, $dU_m/dx > 0$, ускоренное течение) значительно более устойчивы, чем в области возрастания давления ($dp/dx > 0$, $dU_m/dx < 0$, замедленное течение).

Сильное влияние градиента давления на устойчивость и на нарастание малых возмущений, предсказанное теорией устойчивости, очень хорошо подтверждено экспериментально Г. Б. Шубаэром и Г. К. Скремстедом в их работе, упомянутой в § 4 главы XVI. На рис. 17.1 изображена осциллограмма пульсаций скорости в пограничном слое на плоской стенке при наличии градиента давления. Верхняя половина рисунка показывает, что падение давления на 10% от динамического давления влечет за собой полное затухание пульсаций. Из нижней же половины рисунка видно, что последующее повышение давления всего на 5% приводит не только к сильному нарастанию колебаний, но и к

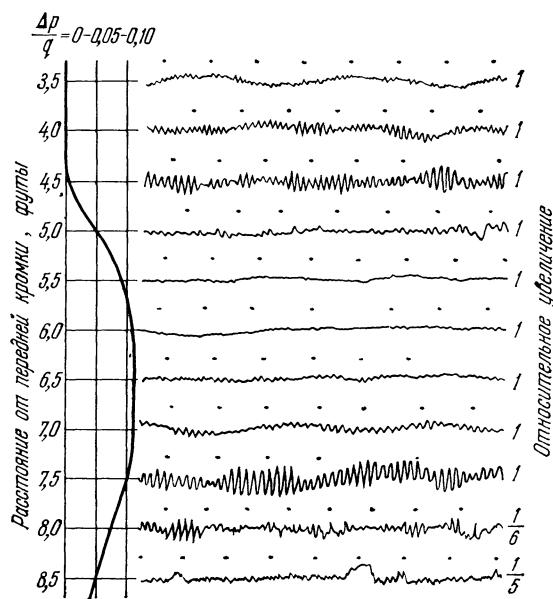
Рис. 17.1. Осциллограмма пульсаций скорости в ламинарном пограничном слое с градиентом давления. По измерениям Шубаэра и Скремстеда [128]. Падение давления вызывает затухание пульсаций, повышение давления — сильное нарастание пульсаций с последующим переходом ламинарного течения в турбулентное. Расстояние точки замера от стенки равно 0,5 мм. Скорость $U_\infty = 29$ м/сек.

быстрому переходу ламинарной формы течения в турбулентную (необходимо обратить внимание на то, что две последние строки осциллограммы изображены в уменьшенном масштабе по сравнению с остальными строками).

Переход течения из ламинарной формы в турбулентную в ламинарном пограничном слое, оторвавшемся от стенки, посвящены экспериментальные исследования Х. Сато [115] и В. Г. Лохтенберга [89].

Для исследования устойчивости пограничного слоя с градиентом давления целесообразно учитывать влияние градиента давления посредством формпараметра профиля скоростей, причем для простоты брать за основу однопараметрическое семейство ламинарных профилей скоростей. Примером такого семейства могут служить профили скоростей, получающиеся в случае внешнего течения с распределением скоростей

$$U_m(x) = u_1 x^m.$$



Для такого внешнего течения, возникающего при обтекании клина вблизи его вершины, профили скоростей имеют вид, изображенный на рис. 9.1.

Таблица 17.1. Зависимость критического числа Рейнольдса и максимального коэффициента нарастания β_i возмущений от формпараметра β профилей скоростей пограничного слоя на клине при обтекании последнего с градиентом давления. По Пречу [106], [107].
Профили скоростей изображены на рис. 9.1

β	-0,10	0	0,2	0,4	0,6	1,0
$m = \frac{x}{U} \frac{dU}{dx}$	-0,048	0	0,111	0,25	0,43	1,0
$\left(\frac{U_m \delta_1}{v} \right)_{kp}$	126	660	3200	5000	8300	12 600
$\left(\frac{\beta_i \delta_1}{U_m} \right)_{max} \cdot 10^4$	155	34,5	14,6	—	9,1	7,3

Эти профили, вычисленные Д. Р. Хартри, являются точными решениями дифференциальных уравнений пограничного слоя. Величина m представляет собой формпараметр профиля скоростей, а величина $2m/(m + 1) = \beta$ есть угол при вершине клина. При $m < 0$ (повышение давления) профили скоростей имеют точку перегиба, а при $m > 0$ (падение давления) такой точки нет.

Для ряда профилей скоростей этого однопараметрического семейства И. Преч [106] выполнил расчет устойчивости. Результаты даны в табл. 17.1.

Из таблицы видно, что критическое число Рейнольдса сильно зависит от формпараметра m . И. Преч в другой своей работе [107] вычислил для тех же профилей скоростей нарастание неустойчивых возмущений. Максимальные значения коэффициента нарастания β_i для некоторых профилей скоростей указаны в последней строке таблицы 17.1. Как и следовало ожидать, нарастание возмущений при повышении давления происходит значительно сильнее, чем при падении давления. Еще раньше Г. Шлихтинг [121] выполнил расчет устойчивости для профилей скоростей, получающихся в суживающемся или расширяющемся канале при потенциальном течении $U_m(x) = U_0 - ax$ (см. § 4 главы IX). Полученные результаты также показали, что критическое число Рейнольдса сильно зависит от градиента давления.

Для расчета ламинарного пограничного слоя удобнее всего изложенный в главе X приближенный способ К. Польгаузена, в связи с чем целесообразно исследовать на устойчивость профили скоростей, используемые в этом методе. Форма этих профилей, изображенных на рис. 10.4, определяется безразмерным формпараметром

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{dU_m}{dx}, \quad (17.3)$$

который изменяется между $\Lambda = +12$ и -12 , причем последнее значение соответствует точке отрыва. В передней критической точке $\Lambda = +7,05$, а в точке минимума давления $\Lambda = 0$. Значения $\Lambda > 0$ соответствуют падению давления, а значения $\Lambda < 0$ — повышению давления. При $\Lambda < 0$ профили скоростей имеют точку перегиба.

Расчет на устойчивость этого семейства профилей скоростей выполнили Г. Шлихтинг и А. Ульрих [122] 1). На рис. 17.2 изображены полученные в результате расчета нейтральные кривые. В то время как для профилей скоростей в области падения давления ($\Lambda > 0$) обе ветви нейтральной кривой при $Re \rightarrow \infty$ приближаются к нулю, т. е. ведут себя так же, как в случае

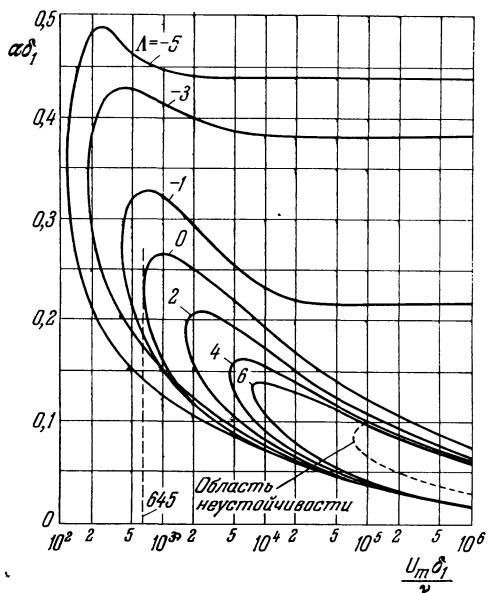


Рис. 17.2. Нейтральные кривые для профилей скоростей в ламинарном пограничном слое с падением ($\Lambda < 0$) и повышением давления ($\Lambda > 0$). Величина $\Lambda = (\delta^2/\nu) (dU_m/dx)$ есть формпараметр профиля скоростей, см. рис. 10.4.

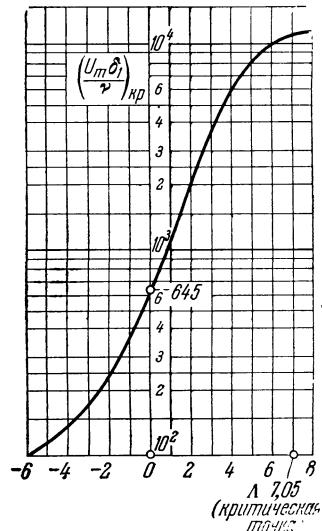


Рис. 17.3. Зависимость критического числа Рейнольдса от формпараметра Λ профилей скоростей в пограничном слое с падением и повышением давления.

пограничного слоя на пластине ($\Lambda = 0$), для профилей скоростей в области повышения давления ($\Lambda < 0$) верхние ветви нейтральных кривых имеют ненулевые асимптоты, следовательно, нарастание возмущений с конечными длинами волн возможно также при $Re \rightarrow \infty$. Профили скоростей в области падения давления ($\Lambda > 0$), а также профиль скоростей при неизменяющемся давлении ($\Lambda = 0$) дают нейтральные кривые типа «вязкой неустойчивости» (кривая b на рис. 16.8), профилям же скоростей в области повышения давления ($\Lambda < 0$) соответствуют нейтральные кривые типа «невязкой неустойчивости» (кривая a на рис. 16.8). Из рис. 17.2 видно, что для пограничных слоев в зоне возрастания давления неустойчивая область, заключенная внутри нейтральной кривой, значительно больше, чем для пограничных слоев в зоне падения давления. На рис. 17.3 изображен подсчитанный по рис. 17.2 график

1) Аппроксимация профилей скоростей четырехчленным полиномом Польгаузена оказалась для этого расчета непригодной, так как при такой аппроксимации кривизна профиля $U''(y)$, столь существенная для расчета на устойчивость, довольно сильно отклоняется от кривизны точного профиля скоростей. Поэтому аппроксимация точных профилей была выполнена посредством полинома шестой степени, что позволило получить кривизну $U''(y)$ с приемлемой точностью. Для установления соответствия между профилями скоростей, полученными посредством аппроксимации полиномом четвертой степени, и профилями, полученными посредством аппроксимации полиномом шестой степени, было введено требование об одинаковой толщине потери импульса в каждой точке обтекаемого тела при той и другой аппроксимации.

зависимости критического числа Рейнольдса от формпараметра Λ ¹⁾). Этот график показывает, что критическое число Рейнольдса очень сильно зависит от градиента давления.

Выше было подробно разъяснено, что *повышение давления* в пограничном слое сильно способствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную. Обратно, сильное *падение давления*, возникающее, например, позади

Рис. 17.4. Теневой снимок перехода турбулентного пограничного слоя в ламинарный при обтекании выпуклого угла со сверхзвуковой скоростью (число Маха $Ma = 3$). По Стернбергу [138].

острых кромок при сверхзвуковых скоростях течения, может привести к тому, что турбулентное течение вновь станет ламинарным. Интересные наблюдения этого рода были сделаны И. Стернбергом [138] при обтекании

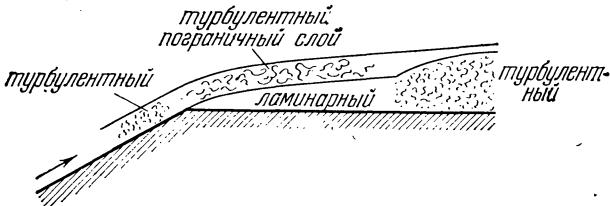


Рис. 17.5. Схематическое изображение течения в пограничном слое, образующемся при обтекании выпуклого угла со сверхзвуковой скоростью. По Стернбергу, см. рис. 17.4.

цилиндра с коническим носком. На рис. 17.4 показан теневой снимок такого обтекания при числе Маха $Ma = 3$. Проволочное кольцо, надетое на конический носок, вызывает турбулизацию ламинарного пограничного слоя. Однако ниже по течению, позади стыка конического носка с цилиндром, турбулентный пограничный слой становится опять ламинарным (рис. 17.5). Причина этого заключается в следующем: сильное падение давления на кромке, образуемой стыком конического носка с цилиндром, вызывает здесь сильное ускорение течения, что приводит к такому же затуханию турбулентности, как и в аэродинамической трубе при сильном сужении ее диаметра.

Результаты, изложенные в этом параграфе, будут использованы в следующем параграфе для определения положения нейтральной точки при плоском обтекании произвольного тела.

¹⁾ Полученный график дает для $\Lambda=0$ критическое число Рейнольдса $Re_{kp} = 645$, в то время как нейтральная кривая на рис. 16.11 дает значение $Re_{kp} = 420$. Причина расхождения заключается в том, что изображенная на рис. 17.2 нейтральная кривая для пограничного слоя на пластине рассчитана посредством аппроксимации распределения скоростей приближенной функцией, в то время как для построения нейтральной кривой на рис. 16.11 использовано точное решение Блазиуса.

§ 2. Определение положения нейтральной точки на заданном теле

Имея результаты, изображенные на рис. 17.2 и 17.3, можно довольно просто определить положение нейтральной точки на заданном теле (при плоском обтекании). При этом в каждом отдельном случае совсем не требуется заново повторять весь утомительный расчет на устойчивость, поскольку все необходимое для такого расчета раз навсегда уже заключено в диаграмме, изображенной на рис. 17.2.

Определение положения нейтральной точки ведется следующим образом. Прежде всего по известному теоретическому потенциальному распределению скоростей $U_m(x)/U_\infty$ рассчитывается — посредством приближенного способа Польгаузена — ламинарный пограничный слой. Этот расчет дает формпараметр Λ и толщину вытеснения δ_1 в виде зависимостей их от длины x дуги контура обтекаемого тела, измеренной от передней критической точки. Если при фиксированном числе Рейнольдса $U_\infty l/v$, составленном для обтекаемого тела (l есть длина тела), проследить за ламинарным пограничным слоем на его пути от передней критической точки вниз по течению, то окажется, что немного позади критической точки предел устойчивости $(U_m \delta_1/v)_{\text{кр}}$ вследствие сильного падения давления будет высоким, но толщина пограничного слоя — небольшой. Поэтому местное число Рейнольдса $U_m \delta_1/v$ будет здесь безусловно меньше местного предела устойчивости $(U_m \delta_1/v)_{\text{кр}}$. Это означает, что пограничный слой здесь устойчив. Дальше вниз по течению падение давления становится слабее, а затем, после точки контура, в которой скорость обтекания достигает максимального значения, начинается повышение давления; следовательно, местный предел устойчивости $(U_m \delta_1/v)_{\text{кр}}$ по мере продвижения вниз по течению уменьшается, в то время как толщина пограничного слоя, а вместе с нею и местное число Рейнольдса $U_m \delta_1/v$ увеличиваются. В определенной точке местное число Рейнольдса становится равным местному пределу устойчивости, т. е.

$$\frac{U_m \delta_1}{v} = \left(\frac{U_m \delta_1}{v} \right)_{\text{кр}} \quad (\text{нейтральная точка}). \quad (17.4)$$

Начиная отсюда и дальше вниз по течению пограничный слой неустойчив. Именно поэтому точка, определяемая равенством (17.4), и называется *нейтральной точкой*. Ее положение зависит, конечно, также от числа Рейнольдса тела $U_\infty l/v$, так как это число влияет на местную толщину пограничного слоя.

Изложенный способ определения положения нейтральной точки показан на рис. 17.6 для случая эллиптического цилиндра с отношением осей $a/b = 4$, обтекаемого параллельно большой оси. Теоретическое потенциальное распределение скоростей изображено на рис. 10.9, а результаты расчета пограничного слоя представлены на рис. 10.10 и 10.11. Из графика зависимости формпараметра Λ от x (рис. 10.10, б) получается с помощью рис. 17.3 кривая местного критического числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}} = (U_m \delta_1/v)_{\text{кр}}$, изображенная на рис. 17.6 более жирной линией (кривая предела устойчивости). Из расчета ламинарного пограничного слоя мы уже получили (рис. 10.10, а) кривую безразмерной толщины вытеснения

$$\frac{\delta_1}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}}.$$

Имея эту кривую, мы можем для фиксированного числа Рейнольдса $U_\infty l/v$, составленного для обтекаемого тела, определить местное число Рейнольдса $U_m \delta_1/v$, составленное для толщины вытеснения, по формуле

$$\frac{U_m \delta_1}{v} = \left(\frac{\delta_1}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}} \right) \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}} \frac{U_m}{U_\infty}. \quad (17.5)$$

Полученные для различных значений числа Рейнольдса $U_\infty l/v$ зависимости местного числа Рейнольдса $U_m \delta_1/v$ от текущей длины x/l' (l' — полупериметр эллипса) изображены на рис. 17.6 более тонкими линиями. Точки пересечения этих линий с кривой предела устойчивости определяют положения нейтральных точек (x/l')_{кр} для рассматриваемых чисел Рейнольдса $U_\infty l/v$ ¹⁾.

Найденные таким способом нейтральные точки показаны на рис. 17.7 для серии эллиптических цилиндров с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8$. Из этого рисунка видно, что на круглом цилиндре нейтральная точка перемещается при изменении числа Рейнольдса очень незначительно, однако по мере уменьшения относительной толщины цилиндра это перемещение становится больше.

Аналогичным образом определяется положение нейтральной точки для крыловых профилей. В этом случае интерес представляет зависимость положения нейтральной точки не только от числа Рейнольдса, но и от угла атаки (или от соответствующего углу атаки коэффициента подъемной силы). На рис. 17.8 изображен результат такого определения для профиля Жуковского 0015

при различных значениях угла атаки и коэффициента подъемной силы. С увеличением угла атаки минимум давления на подсасывающей стороне профиля становится все более и более выраженным и при этом перемещается вперед, к носику профиля; на напорной стороне наблюдается обратная картина: минимум давления становится все более и более расплывчатым и при этом перемещается назад. Следствием этого является перемещение нейтральной точки при увеличении угла атаки на подсасывающей стороне вперед, а на напорной стороне — назад. При этом на подсасывающей стороне нейтральные точки для всех чисел Рейнольдса лежат, вследствие резко выраженного минимума давления, близко от точки минимума давления, а на напорной стороне, где минимум давления выражен очень нечетко, далеко одна от другой. Из рис. 17.8 отчетливо видно решающее влияние распределения давления на положение нейтральной точки: даже при очень больших числах Рейнольдса положение нейтральной точки (следовательно, и точки перехода) впереди точки минимума давления почти не изменяется, в то время как позади точки минимума давления обычно сразу возникает неустойчивость, следовательно, и переход ламинарного течения в турбулентное.

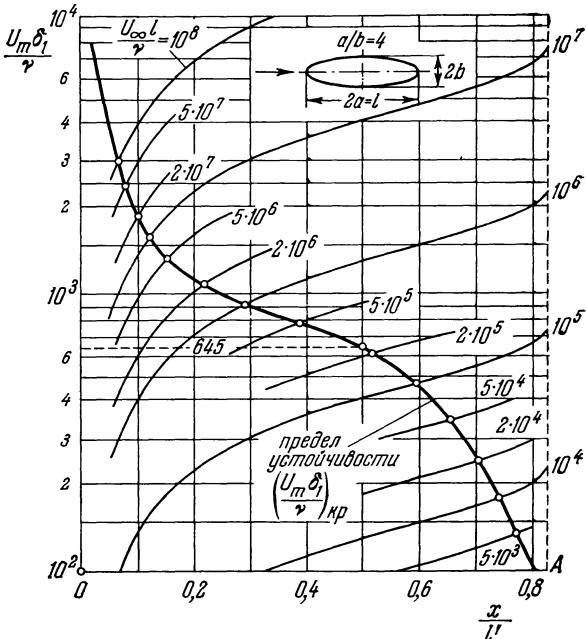


Рис. 17.6. Определение положения нейтральной точки на эллиптическом цилиндре с отношением осей $a/b = 1/4$ при разных числах Рейнольдса $Re = U_\infty l/v$ (l' есть полупериметр эллипса).

1) Если на рис. 17.6 ординаты отложить в логарифмическом масштабе, то кривые $U_m \delta_1/v$, построенные для различных значений $U_\infty l/v$, можно будет путем перемещения параллельно оси ординат переводить одну в другую, что для графического определения положения нейтральной точки особенно удобно.

На рис. 17.9 показаны экспериментально определенные положения нейтральной точки для профиля NACA 0018-63, распределение давления

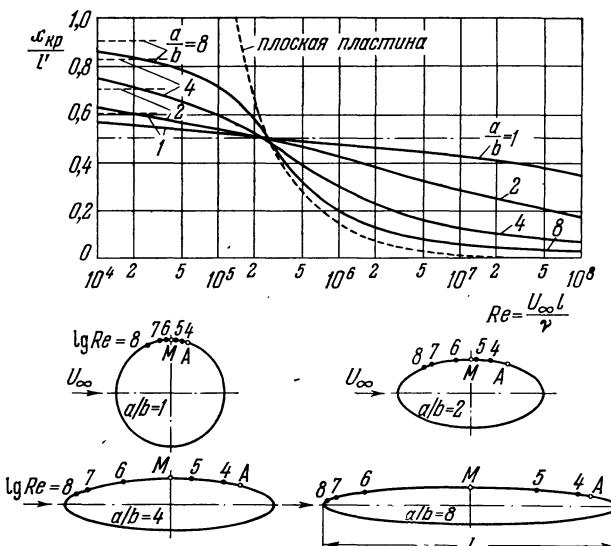


Рис. 17.7. Зависимость положения нейтральной точки на эллиптических цилиндрах с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8; \infty$ (плоская пластина) от числа Рейнольдса $Re = U_\infty l/\nu$ (l' есть полупериметр эллипса; A — точка отрыва при ламинарном течении; M — точка, в которой давление имеет минимальное значение).

на котором почти такое же, как и на профиле Жуковского 0015. Мы видим, что в полном соответствии с теоретическим ожиданием точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную лежит при всех числах Рейнольдса и при всех значениях коэффициента подъемной силы позади нейтральной точки, но впереди точки отрыва ламинарного пограничного слоя, и, далее, что с изменением числа Рейнольдса и коэффициента подъемной силы точка перехода перемещается вдоль контура профиля совершенно так же, как и нейтральная точка. Дальнейшие систематические расчеты положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную для крыловых профилей разной толщины и кривизны можно найти в работе К. Буссмана и А. Ульриха [10].

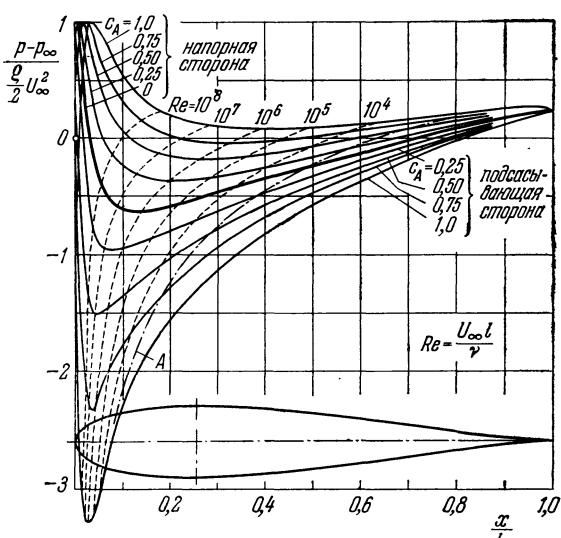


Рис. 17.8. Распределение давления (сплошные кривые) и положение нейтральной точки (штриховые кривые) для симметричного профиля Жуковского при различных коэффициентах подъемной силы; A — положение точки отрыва при ламинарном течении.

приближенных расчетов: при числах Рейнольдса, заключенных между 10^6 и 10^7 , точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную приблизительно совпадает с точкой M , соответствующей минимуму давления

потенциального течения. Однако при очень больших числах Рейнольдса точка перехода может лежать иногда несколько впереди M , а при малых числах Рейнольдса — далеко позади точки M ; оба эти отклонения наблюдаются главным образом в тех случаях, когда давление вдоль контура понижается и соответственно повышается постепенно. Вместе с тем при всех числах Рейнольдса точка перехода ламинарной формы в турбулентную лежит впереди точки отрыва ламинарного пограничного слоя. Таким образом, за исключением случая только очень больших чисел Рейнольдса, точка перехода лежит всегда позади точки, соответствующей минимуму давления потенциального течения, и впереди точки отрыва ламинарного пограничного слоя.

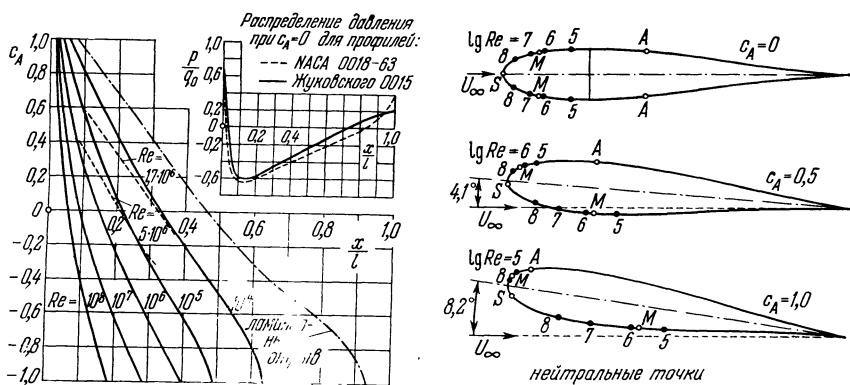


Рис. 17.9. Зависимость положения нейтральной точки и точки перехода от коэффициента подъемной силы и от числа Рейнольдса. Сплошными кривыми показаны теоретические положения нейтральной точки для профиля Жуковского J 0018-63, а штриховыми кривыми — измеренные положения точки перехода для профиля NASA 0018-63; S — критическая точка; M — точка минимума давления; A — точка отрыва при ламинарном течении.

Расстояние, на котором точка перехода лежит позади нейтральной точки, зависит от степени турбулентности внешнего течения и от интенсивности нарастания неустойчивых возмущений, зависящей в свою очередь от градиента давления. Очень простое соотношение между интенсивностью нарастания возмущений и расстоянием теоретически определенной нейтральной точки от экспериментально определенной точки перехода найдено чисто эмпирически Р. Мишелем [96]. В недавнее время правильность этого соотношения подтверждена А. М. О. Смитом [133] на основе теории устойчивости. В самом деле, любое неустойчивое возмущение, перемещающееся в пограничном слое вниз по течению, попав в область неустойчивости, изображенную на рис. 17.2, начинает нарастать пропорционально величине $e^{\beta_i t}$ или, если β_i зависит также от времени, пропорционально величине

$$e^{\int \beta_i dt}, \quad (17.6)$$

причем интеграл следует вычислять по коэффициентам нарастания, пробегаемым возмущением после его входа в область неустойчивости. Кривые нарастания возмущений $\beta_i = \text{const}$, соответствующие различным градиентам давления и сходные с кривыми, изображенными на рис. 16.13, построены И. Пречем [107]. Используя эти кривые, А. М. О. Смит вычислил значение величины (17.6), достигаемое ею при перемещении из теоретически определенной точки потери устойчивости в экспериментально наблюдаемую точку перехода, для большого числа крыловых профилей и тел вращения, для которых была экспериментально определена точка перехода. Результаты изображены на рис. 17.10. Обработка всех этих разнообразных измерений.

выполненных при очень малой степени турбулентности и для очень гладких стенок, показала, что величина (17.6) при перемещении из нейтральной точки в точку перехода достигает значения

$$e^{\int \beta_i dt} = e^{\theta}. \quad (17.7)$$

Этот результат подтвержден также И. Л. Ван Ингеном [61].

В качестве меры расстояния между нейтральной точкой и точкой перехода в пограничном слое с градиентом давления можно взять так же, как это было сделано для пограничного слоя на пластине (рис. 16.21), разность чисел Рейнольдса, составленных для толщины потери импульса в точке перехода и в нейтральной точке, т. е. разность

$$\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)_{\text{пер}} - \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)_n.$$

На рис. 17.11 значения этой разности отложены, согласно Гренвилу [49], как ординаты на значениях величины \bar{x} , связанной со вторым формпараметром Польгаузена κ [формула (10.27)] соотношением

$$\bar{x} = \frac{1}{x_{\text{пер}} - x_n} \int_{x_n}^{x_{\text{пер}}} \frac{\delta_2^2}{v} \frac{dU_m}{dx} dx = \\ = \frac{1}{x_{\text{пер}} - x_n} \int_{x_n}^{x_{\text{пер}}} \kappa(x) dx, \quad (17.8)$$

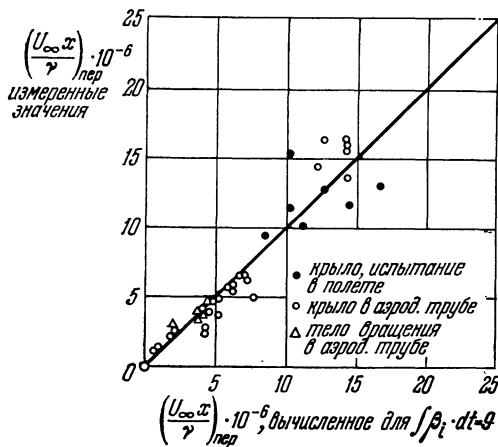


Рис. 17.10. Определение коэффициента нарастания $\exp \int \beta_i dt$ неустойчивых возмущений на пути от теоретической нейтральной точки до экспериментальной точки перехода. По А. М. О. Смиту [133].

малой степени турбулентности либо в аэродинамических трубах. Выполненное построение показывает, что результаты всех этих измерений, принадлежащих разным авторам, располагаются вдоль одной кривой. В области падения давления ($\bar{x} > 0$) разность

$$\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)_{\text{пер}} - \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)_n$$

значительно больше, чем в области возрастания давления ($\bar{x} < 0$). При отсутствии градиента давления ($\bar{x} = 0$) значение разности $R_e_{\text{пер}} - R_e_n$ равно около 800 и весьма близко к аналогичному значению для пограничного слоя на пластине при очень малой степени турбулентности (рис. 16.21).

Ламинаризованные профили. Расчет устойчивости (см. рис. 17.7 и 17.8) весьма отчетливо показывает решающее влияние градиента давления на устойчивость и на переход ламинарной формы течения в турбулентную, а измерения полностью подтверждают это влияние. На использовании этого влияния основано конструирование ламинаризованных профилей. У таких профилей пограничный слой должен сохраняться ламинарным на возможно большем протяжении контура. Для достижения этого требования место профиля с наибольшей толщиной отодвигается возможно дальше назад; тем самым отодвигается далеко назад и точка, соответствующая минимуму давления

в потенциальном течении. Конечно, большое перемещение точки минимума давления назад возможно осуществить только для некоторой небольшой области углов атаки. Перемещение точки минимума давления назад влечет за собой, как мы уже знаем, уменьшение профильного сопротивления.

У крыловых профилей с наибольшей толщиной, далеко отодвинутой назад, иногда при увеличении числа Рейнольдса наблюдается скачкообразное перемещение точки перехода вперед к носику профиля. Это явление легко объяснить с точки зрения теории устойчивости. На рис. 17.12 показан расчет устойчивости для симметричного профиля с максимальной толщиной, равной 15% хорды и отодвинутой назад на 70% хорды профиля; угол атаки равен 0° . Кривая предела устойчивости $(U_m \delta_1/v)_{kp}$ этого профиля имеет минимум, лежащий далеко впереди носика профиля, и последующий максимум. Такая форма, обусловленная соответствующим ходом изменения формпараметра Λ , приводит к тому, что в некоторой области чисел Рейнольдса $U_\infty l/v$ кривые $U_m \delta_1/v$ пересекаются с кривой предела устойчивости в трех точках. Например, при числе Рейнольдса $U_\infty l/v = 5 \cdot 10^6$ получается только одна нейтральная точка, лежащая далеко позади. При несколько большем числе Рейнольдса внезапно появляется еще одна нейтральная точка, лежащая очень близко от носика профиля. Возьмем теперь число Рейнольдса $U_\infty l/v = 10^7$ и проследим пограничный слой от критической точки. Мы увидим, что в точке $x/l' = 0,035$ он становится неустойчивым в первый раз; затем в точке $x/l' = 0,275$ он вновь является устойчивым и, наконец, в точке $x/l' = 0,767$ во второй раз и теперь уже окончательно становится неустойчивым. Может возникнуть вопрос, не происходит ли на протяжении первой неустойчивой зоны переход ламинарной формы течения в турбулентную, исключающий возможность возобновления устойчивого состояния. Ответить на этот вопрос без обстоятельного знания процесса нарастания возмущений нельзя. Если первую из указанных точек пересечения принять за нейтральную точку, то для рассматриваемого профиля положение нейтральной точки будет зависеть от числа Рейнольдса так, как показано на рис. 17.13. При числе Рейнольдса $U_\infty l/v = 5 \cdot 10^6$ нейтральная точка внезапно перемещается из положения $x_{kp}/l = 0,8$ вперед в положение $x_{kp}/l = 0,1$.

После того, как Б. М. Джонс [65] обнаружил при летных испытаниях наличие больших участков по хорде крыла, на которых пограничный слой оставался ламинарным, Г. Дёч [18] уже в 1939 г. опубликовал результаты первых экспериментальных измерений ламинаризованных профилей в аэродинамической трубе. Во время второй мировой войны многочисленные

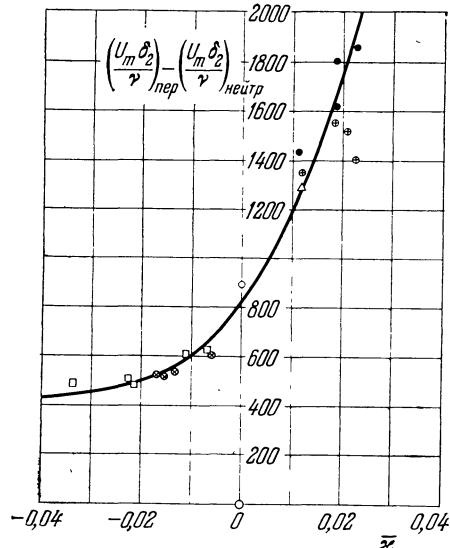


Рис. 17.11. Измерения точки перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое с градиентом давления. По Гренивиллу [49]. Построенная кривая изображает зависимость разности числа Рейнольдса $\text{Re}_{\delta_2, \text{пер}} = (U_m \delta_2/v)_{\text{пер}}$ для точки перехода и числа Рейнольдса $\text{Re}_{\delta_2, \text{н}} = (U_m \delta_2/v)_{\text{н}}$ для нейтральной точки от среднего градиента давления \bar{x} [см. формулу (17.8)]. Значения $\bar{x} > 0$ соответствуют ускоренным, а значения $\bar{x} < 0$ — замедленным течениям. ○ — плоская пластина; по Шубауэр и Скрамстеду [126]. ⊗ — профиль NACA 0012; по Дёнхофу [17]. ● — подсасывающая сторона профиля NACA 65 (215) по [114]. ⊖ — напорная сторона; по Брэслу и Висконти [7]. □ — профиль с 8%-ной толщиной; по Б. М. Джонсу [65]. △ — ламинаризованный профиль с 14,7%-ной толщиной; по Заловчику и Скугу [160]; [7], [128] — измерения в аэродинамической трубе со слабой степенью турбулентности; [65], [160] — измерения в полете.

относительной длины x/l для различных профилей. Кривые, соответствующие различным профилям, отличаются между собой лишь величиной сдвигов, но не формой. Кривые для профилей с толщиной 15% хорды и 23% хорды практически совпадают. Для профилей с толщиной 35% хорды сдвиги кривых больше, чем для профилей с толщиной 15% хорды. Для профилей с толщиной 50% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 70% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 90% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 100% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 120% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 140% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 160% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 180% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 200% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 220% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 240% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 260% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 280% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 300% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 320% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 340% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 360% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 380% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 400% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 420% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 440% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 460% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 480% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 500% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 520% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 540% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 560% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 580% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 600% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 620% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 640% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 660% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 680% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 700% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 720% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 740% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 760% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 780% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 800% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 820% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 840% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 860% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 880% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 900% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 920% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 940% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 960% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 980% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1000% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1020% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1040% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1060% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1080% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1100% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1120% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1140% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1160% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1180% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1200% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1220% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1240% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1260% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1280% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1300% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1320% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1340% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1360% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1380% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1400% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1420% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1440% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1460% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1480% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1500% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1520% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1540% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1560% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1580% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1600% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1620% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1640% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1660% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1680% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1700% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1720% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1740% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1760% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1780% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1800% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1820% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1840% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1860% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1880% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1900% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1920% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1940% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1960% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 1980% хорды сдвиги кривых еще больше. Для профилей с толщиной 2000% хорды сдвиги кривых еще больше.

и систематические измерения ламинаризованных профилей были выполнены в американских аэродинамических лабораториях [1].

Небольшая сводка коэффициентов сопротивления ламинаризованных профилей дана на рис. 17.14. Из этого рисунка видно, что уменьшение сопротивления вследствие «эффекта ламинарности» достигает в области чисел

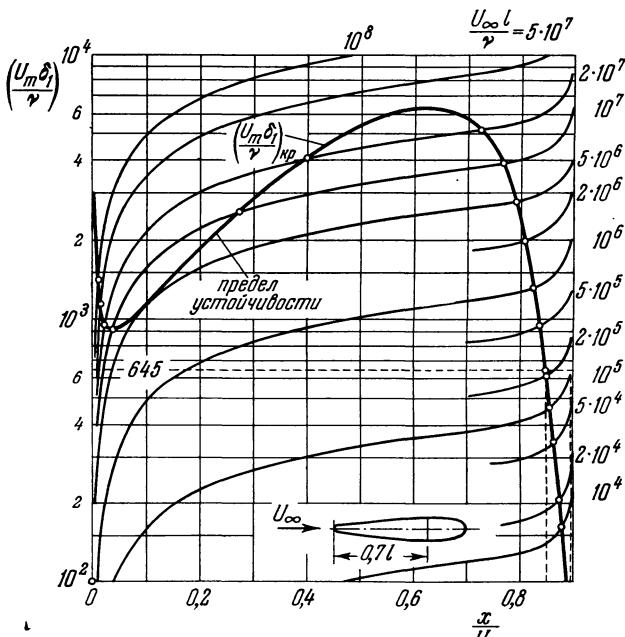


Рис. 17.12. Определение положения нейтральной точки для ламинаризованного профиля, наибольшая толщина которого находится на расстоянии 70% хорды профиля от носика.

Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^6 \div 3 \cdot 10^7$ от 30 до 50% сопротивления «нормальных» профилей. Правда, при очень больших числах Рейнольдса, примерно при

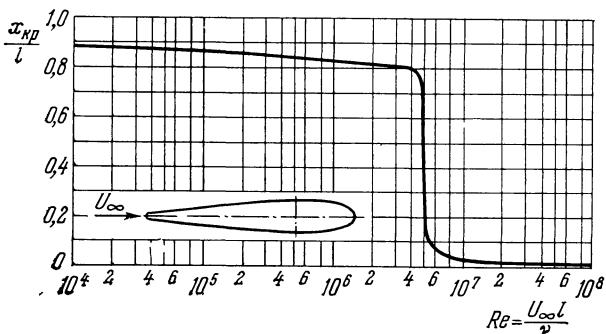


Рис. 17.13. Зависимость положения нейтральной точки от числа Рейнольдса для ламинаризованного профиля; см. рис. 17.12.

го значения, что полностью совпадает с изображенным на рис. 17.8. Далее, на рис. 17.16 изображена зависимость коэффициента профильного сопротивления силы для трех ламинаризованных профилей с равной наибольшей толщиной, но с разной кривизной. Полученные кривые показывают, что увеличение

$Re > 5 \cdot 10^7$, эффект ламинарности исчезает, так как при таких числах Рейнольдса точка перехода внезапно перемещается вперед, что, впрочем, хорошо согласуется с теорией устойчивости. Распределение давления для нескольких профилей изображено на рис. 17.15. На нем для профиля R 2525 отмечено также положение точки перехода, найденное экспериментальным путем. Мы видим, что этот переход начинается вскоре после достижения давлением минимально-

теоретическим результатом, 17.16 изображена зависимость от коэффициента подъемной с равной наибольшей толщиной

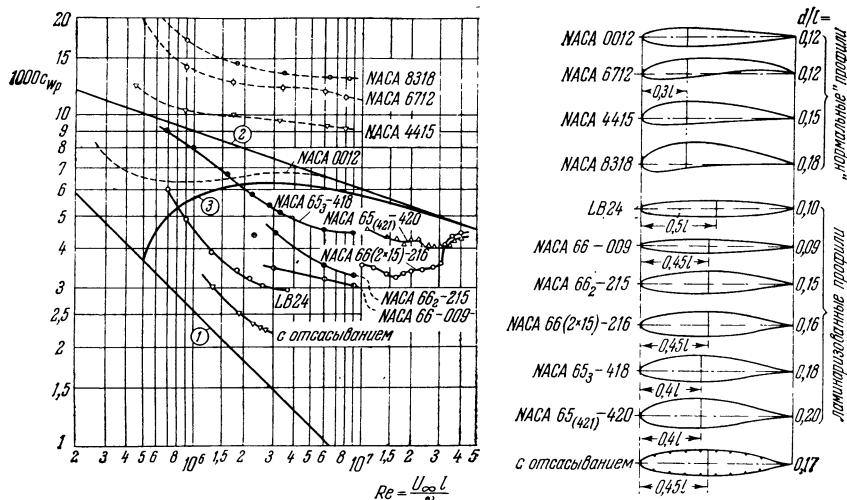


Рис. 17.14. Зависимость коэффициента сопротивления ламинаризованных и «нормальных» профилей от числа Рейнольдса. По работам [1] и [8]. LB 24 — японский ламинаризованный профиль. Профиль с отсасыванием — по В. Пфеннигеру. Кривая (1) — коэффициент сопротивления продольно обтекаемой плоской пластины при ламинарном пограничном слое; кривая (2) — при полностью турбулентном пограничном слое; кривая (3) — при переходе течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную.

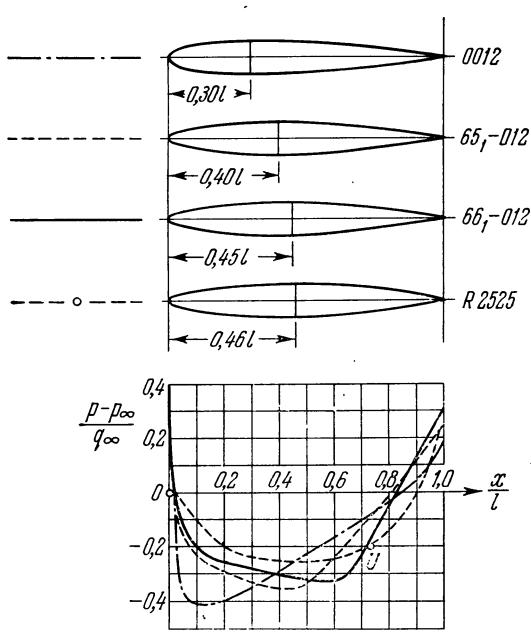


Рис. 17.15. Распределение давления на ламинаризованных профилях при симметричном обтекании ($c_A = 0$). Профили 0012, 65-012, 661-012 — по работе [1], профиль R 2525 — по Дёчу [18]. U — положение точки перехода для числа Рейнольдса $Re = 3,5 \cdot 10^6$.

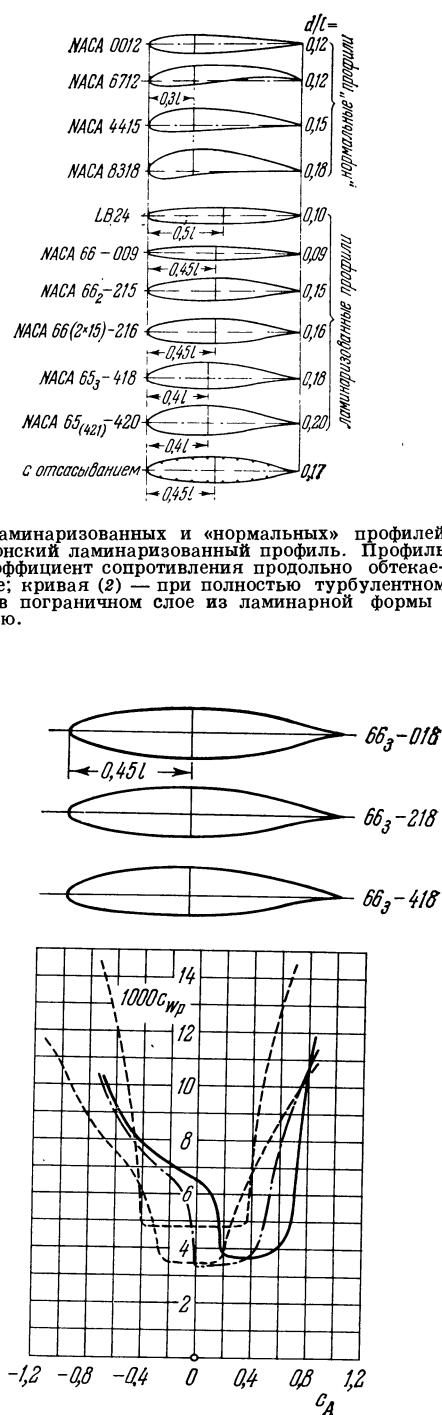


Рис. 17.16. Зависимость коэффициента профильного сопротивления от коэффициента подъемной силы для трех ламинаризованных профилей с различной кривизной; $Re = 9 \cdot 10^6$. По работе [7]. С увеличением кривизны область малого сопротивления перемещается к большим значениям c_s .

кривизны хотя и влечет за собой перемещение области очень малого сопротивления в сторону больших значений коэффициента подъемной силы, но перекрываемый этой областью диапазон значений коэффициента подъемной силы всегда очень невелик.

Необходимо подчеркнуть, что некоторые обстоятельства значительно затрудняют практическое применение ламинаризованных профилей. Среди этих обстоятельств первое место принадлежит очень высоким требованиям, предъявляемым к гладкости поверхности ламинаризованных крыльев, так как шероховатость может вызвать преждевременный переход ламинарной формы течения в турбулентную. В этой связи соплемся также на исследование ламинаризованного профиля при периодических возмущениях в набегающем течении, выполненное Л. Шпайделем [134].

Подведем итог всему сказанному в настоящем параграфе.

1. Теория устойчивости приводит к выводу, что градиент давления оказывает очень сильное влияние на устойчивость ламинарного пограничного слоя, а именно понижение давления в направлении течения стабилизует ламинарный пограничный слой, а повышение давления, наоборот, возмущает.

2. В связи с этим положение нейтральной точки и точки перехода сильно зависит от положения точки, соответствующей максимуму скорости теоретического потенциального распределения скоростей (или, что то же самое, точки, соответствующей минимуму давления); в первом грубом приближении нейтральная точка лежит при средних числах Рейнольдса ($Re = 10^6 \div 10^7$) в точке минимума давления, а точка перехода — немного позади нейтральной точки.

3. На крыловом профиле нейтральная точка и точка перехода при увеличении угла атаки, но при постоянном числе Рейнольдса перемещаются: на подсасывающей стороне — вперед, а на напорной стороне — назад.

4. С увеличением числа Рейнольдса, но при постоянном угле атаки нейтральная точка и точка перехода перемещаются вперед.

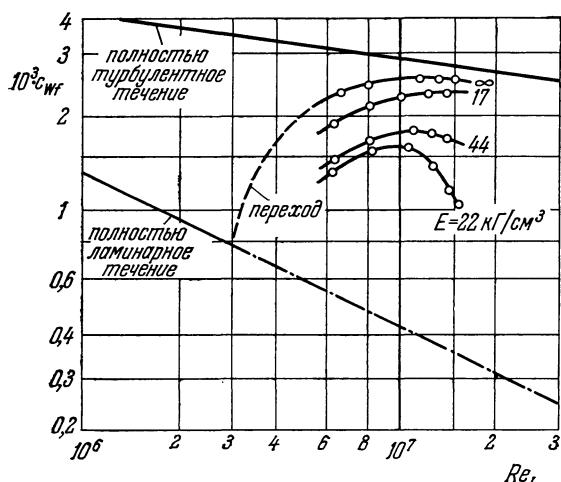
5. При очень больших числах Рейнольдса и при расплывчатом минимуме давления нейтральная точка иногда может лежать немного впереди точки минимума давления.

6. Нейтральная точка и точка перехода могут лежать перед точкой отрыва ламинарного пограничного слоя также при малых числах Рейнольдса ($Re = 10^5 \div 10^6$), но при этом возможны случаи, когда ламинарный пограничный слой, оторвавшись от тела и сделавшись турбулентным, затем вновь прилегает к телу.

Гибкая стенка. Другим эффективным способом стабилизации ламинарного пограничного слоя является

Рис. 17.17. Коэффициент сопротивления продольно обтекаемого круглого цилиндра с упруго-деформируемыми стенками при различных модулях упругости E . По измерениям М. О. Крамера [72]. Модуль упругости $E = \infty$ соответствует жестким стенкам.

придание гибкости обтекаемой стенке. Сравнительно недавно было обнаружено, что дельфины при плавании развивают скорость, значительно большую той, которую можно было бы ожидать, учитывая их геометрическую форму [57]. Это означает, что тело дельфина обладает очень малым сопротивлением трения. В связи с этим было высказано предположение, что столь малое сопротивление объясняется упругостью кожи дельфинов,



позволяющей пограничному слою на теле дельфина оставаться ламинарным даже при очень больших числах Рейнольдса. Для проверки этого предположения М. О. Крамер [71], [72] экспериментально исследовал сопротивление круглых цилиндров с гибкой поверхностью при их обтекании в продольном направлении (рис. 17.17). Было обнаружено, что в области чисел Рейнольдса $Re =$ от $3 \cdot 10^6$ до $2 \cdot 10^7$ при гибкой поверхности сопротивление трения составляет всего 50% от сопротивления при жесткой поверхности.

После этого Т. Б. Бенджамин [3] и М. Т. Ландал [76] выполнили детальное теоретическое исследование устойчивости пограничного слоя на плоской гибкой пластине, применив метод, изложенный в § 3 главы XVI. Это исследование показало, что на гибкой пластине предел устойчивости пограничного слоя значительно выше, чем на жесткой пластине. Тем самым было получено качественное теоретическое подтверждение экспериментальных результатов М. О. Крамера.

§ 3. Влияние отсасывания на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный

В главе XIV мы уже отметили, что отсасывание ламинарного пограничного слоя является весьма эффективным средством для уменьшения сопротивления трения. Так же, как и падение давления в направлении течения, рассмотренное в предыдущем параграфе, отсасывание стабилизует ламинарный пограничный слой, и уменьшение сопротивления достигается при этом в результате предупреждения перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Действие отсасывания проявляется двояким образом. Во-первых, отсасывание уменьшает толщину пограничного слоя, а более тонкий пограничный слой имеет меньшую наклонность к переходу в турбулентное состояние, чем толстый пограничный слой. Во-вторых, отсасывание ламинарного пограничного слоя создает в нем такие профили скоростей, которые обладают более высоким пределом устойчивости, т. е. более высоким критическим числом Рейнольдса, чем профили скоростей в пограничном слое без отсасывания.

Теоретическому исследованию до настоящего времени доступен только случай равномерно распределенного отсасывания. Ряд решений для такого случая указан в главе XIV. Важное значение имеет вопрос о количестве среды, которое необходимо отсасывать для сохранения пограничного слоя ламинарным. Путем увеличения количества отсасываемой среды можно сделать толщину пограничного слоя чрезвычайно малой и тем самым уменьшить число Рейнольдса пограничного слоя настолько, что оно будет всегда меньше предела устойчивости. Однако увеличение количества отсасываемой среды невыгодно экономически, так как при чрезмерном отсасывании значительная часть мощности, сэкономленной благодаря уменьшению сопротивления, вновь расходуется на это чрезмерное отсасывание. В связи с этим весьма важно определить *минимальное количество* отсасываемой среды, достаточное для сохранения пограничного слоя ламинарным. Это минимальное количество отсасываемой среды одновременно обеспечивает и максимальное уменьшение лобового сопротивления, достигаемое посредством отсасывания. В самом деле, любое большее количество отсасываемой среды создает более тонкий пограничный слой, а вместе с тем и большее касательное напряжение на стенке.

Особенно простое решение уравнений пограничного слоя с отсасыванием получается, как мы видели в главе XIV, для продольного обтекания плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием со скоростью отсасывания $-v_0$ ¹⁾. В этом случае на некотором расстоянии от передней кромки пластины образуется пограничный слой с толщиной вытеснения, равной

$$\delta_1 = \frac{v}{-v_0}, \quad (17.9)$$

¹⁾ Скорость $v_0 < 0$ означает отсасывание, скорость $v_0 > 0$ — вдувание.

т. е. не зависящей от текущей длины x . Распределение скоростей в этом пограничном слое имеет вид

$$u(y) = U_\infty (1 - e^{v_0 y / v})$$

[формула (14.6)]. Этот так называемый асимптотический профиль скоростей при отсасывании изображен на рис. 14.6.

Для теоретического исследования перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничном слое с отсасыванием К. Буссман и Г. Мюнц [8] произвели расчет устойчивости асимптотического профиля скоростей способом, изложенным в главе XVI, и получили для критического числа Рейнольдса очень высокое значение

$$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp} = 70\,000. \quad (17.10)$$

Следовательно, для асимптотического профиля скоростей при отсасывании критическое число Рейнольдса круглым счетом в 100 раз больше критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на пластине без градиента давления и без отсасывания. Это убедительно показывает весьма эффективное

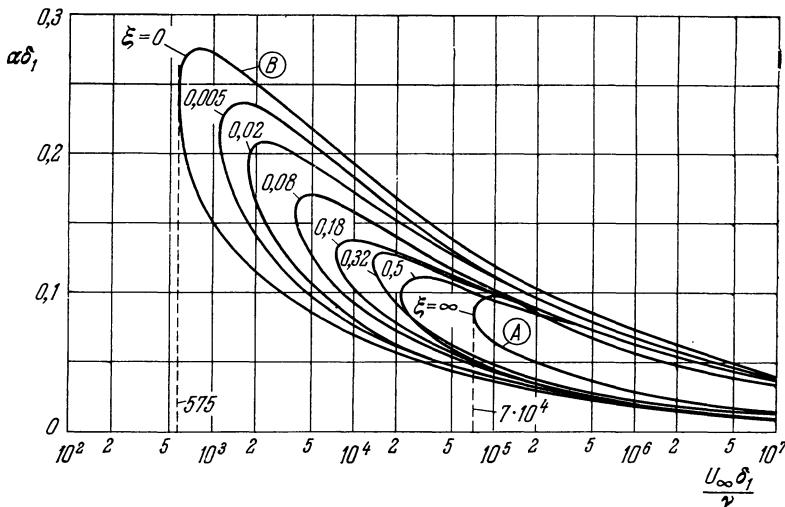


Рис. 17.18. Нейтральные кривые для профилей скоростей в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине при равномерно распределенном отсасывании; $\xi = (-v_0/U_\infty)^2 (U_\infty \delta_1/v) = c_Q^2 Re_x$ — безразмерная длина начального участка, A — нейтральная кривая для асимптотического профиля ($\xi = \infty$), B — нейтральная кривая для профиля без отсасывания (профиль Блазиуса, $\xi = 0$).

стабилизующее действие отсасывания. Таким образом, течение в пограничном слое сохраняется при отсасывании ламинарным не только благодаря уменьшению толщины слоя, но также — и притом в гораздо большей степени — благодаря повышению предела устойчивости для профилей скоростей. Нейтральная кривая для асимптотического профиля скоростей при отсасывании изображена на рис. 17.18 ($\xi = \infty$). Мы видим, что такой профиль отличается от профиля скоростей без отсасывания не только значительно более высоким пределом устойчивости, но и значительно меньшей областью неустойчивости, следовательно, для него неустойчивые возмущающие волны имеют значительно более узкий диапазон длин.

Полученный результат позволяет ответить на поставленный выше важный вопрос о наименьшем количестве отсасываемой текущей среды, достаточном для сохранения пограничного слоя ламинарным. Предположим для упрощения расчета, что асимптотический профиль скоростей существует

на пластине, начиная с ее передней кромки. Тогда пограничный слой будет устойчивым вдоль всей длины пластины, если число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения, будет меньше критического числа Рейнольдса, определяемого формулой (17.10), т. е. если будет выполняться неравенство

$$\frac{U_\infty \delta_1}{v} < \left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp} = 70\,000.$$

Если вместо δ_1 мы подставим его значение (17.9) для асимптотического профиля, то это неравенство примет вид

$$\frac{(-v_0)}{U_\infty} = c_Q > \frac{1}{70\,000}. \quad (17.11)$$

Таким образом, при сделанном упрощающем предположении устойчивость ламинарного пограничного слоя с отсасыванием будет обеспечена, если коэффициент расхода при отсасывании c_Q будет больше только что указанного весьма малого значения

$$\frac{1}{70\,000} = 1,4 \cdot 10^{-5}.$$

Однако более точный расчет показывает, что для сохранения пограничного слоя ламинарным коэффициент c_Q должен быть значительно выше, чем $1,4 \cdot 10^{-5}$. Это вполне понятно, так как асимптотический профиль скоростей возникает не сразу, а только начиная с некоторого расстояния от передней кромки пластины. Впереди этого профиля, вблизи передней кромки пластины, имеется профиль скоростей Блазиуса, который только постепенно на протяжении определенного начального участка переходит в асимптотический профиль. Такой начальный участок ламинарного пограничного слоя с отсасыванием показан на рис. 14.8. Профили скоростей в начальном участке имеют меньший предел устойчивости, чем асимптотический профиль, и поэтому здесь для сохранения ламинарного течения необходимо вести отсасывание в большем количестве, чем это следует из формулы (17.11).

Для более точного представления о явлениях, происходящих на разгонном участке, необходимо произвести расчет устойчивости для ряда профилей в этом участке. Из рис. 14.8 мы видим, что эти профили образуют однопараметрическое семейство с параметром

$$\xi = c_Q^2 \frac{U_\infty x}{v},$$

изменяющимся от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$. Значению $\xi = 0$ соответствует передняя кромка пластины, а значению $\xi = \infty$ — асимптотический профиль. Однако практически начальный участок кончается уже примерно при $\xi = 4$. Расчет устойчивости, выполненный А. Ульрихом [153], дал для критического числа Рейнольдса значения, указанные в таблице 17.2. Соответствующие нейтральные кривые изображены на рис. 17.18.

И. Преч [108] вычислил для асимптотического профиля также нарастание неустойчивых возмущений. Максимальное нарастание получилось примерно в 10 раз меньшим, чем для профиля скоростей при продольном обтекании плоской пластины без

Таблица 17.2. Зависимость критического числа Рейнольдса для профиля скоростей при отсасывании от безразмерной текущей длины ξ на начальном участке пластины.
По Ульриху [153]

$\xi = c_Q^2 \frac{U_\infty x}{v}$	0	0,005	0,02	0,08	0,18	0,32	0,5	∞
$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{v} \right)_{kp}$	575	1120	1820	3940	7590	13 500	21 900	70 000

отсасывания (см. рис. 16.13). Полученные результаты позволяют вычислить то количество отсасываемой среды, которое достаточно для сохранения ламинарной формы

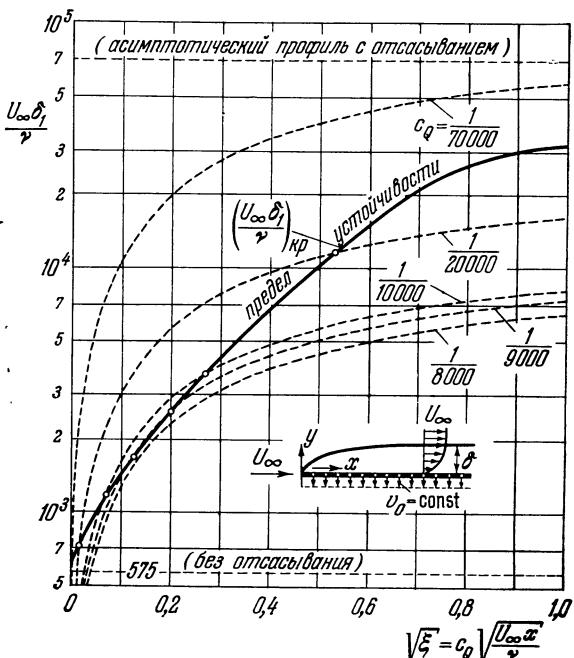


Рис. 17.19. Определение критического коэффициента расхода, с которым должно производиться отсасывание для сохранения ламинарной формы течения в пограничном слое на плоской пластине.

течения на протяжении всего начального участка. Определение этого критического количества отсасываемой среды показано на рис. 17.19. На нем прежде всего построена кривая предела устойчивости по данным таблицы 17.2. Затем для ряда значений коэффициента расхода

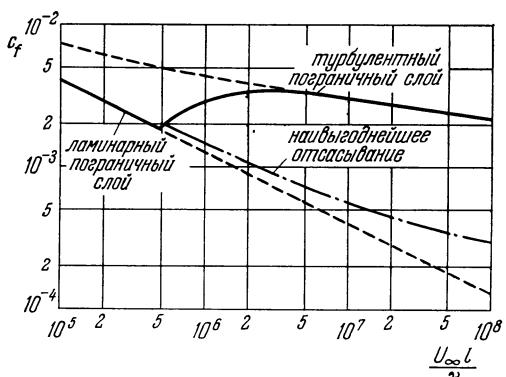


Рис. 17.20. Зависимость коэффициента сопротивления продольно обтекаемой плоской пластине от числа Рейнольдса. «Наибыгднейшее» отсасывание получается при том минимальном коэффициенте расхода, который необходим для сохранения пограничного слоя ламинарным.

Этот коэффициент равен $c_{Q\min} = 0,00012$.

$$c_Q = \frac{-v_0}{U_\infty}$$

построены кривые, изображающие зависимость безразмерной толщины вытеснения от безразмерной величины $\sqrt{\xi}$ для ряда фиксированных значений коэффициента расхода. Для построения этих кривых использовано уравнение

$$\frac{U_\infty \delta_1}{\nu} = \frac{-v_0 \delta_1}{\nu} \frac{1}{c_Q}.$$

Зависимость величины $-v_0 \delta_1 / \nu$, входящей в правую часть этого уравнения, от ξ известна из расчета пограничного слоя (таблица 14.1, стр. 360). Из рис. 17.19 мы видим, что на начальном участке предел устойчивости нигде не достигается только в том случае, если коэффициент расхода больше 1/8500. Таким образом, критический коэффициент расхода равен

$$c_{Q\text{кр}} = 1,18 \cdot 10^{-4}. \quad (17.12)$$

Теперь мы можем ответить на вопрос, оставшийся открытым в главе XIV: насколько уменьшается сопротивление плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, если пограничный слой сохраняется посредством отсасывания ламинарным на всем протяжении пластины. На рис. 14.9 была показана для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении, зависимость коэффициента сопротивления тре-

ния от числа Рейнольдса, причем параметром служил коэффициент расхода c_Q . Если на этом рисунке построить также кривую, соответствующую значению параметра $c_{Q_{kp}} = 1,2 \cdot 10^{-4}$, то мы получим кривую сопротивления при *наиболее выгодном отсасывании*. Такая кривая показана на рис. 17.20. Отрезки между кривой c_f для турбулентного течения и кривой c_f для течения при наиболее выгодном отсасывании дают величину, на которую уменьшается сопротивление вследствие отсасывания при заданном числе Рейнольдса $U_\infty l/v$.

Относительное уменьшение сопротивления, получаемое делением разности Δc_f между коэффициентами сопротивления при турбулентном течении и при ламинарном течении с отсасыванием на коэффициент сопротивления при полностью турбулентном течении, возрастает при увеличении числа Рейнольдса от 10^6 до 10^8 примерно от 65 до 85% (рис. 17.21). О некоторых экспериментальных результатах, относящихся к управлению пограничным слоем посредством отсасывания, уже было сказано в главе XIV. Предсказанное теорией значительное уменьшение

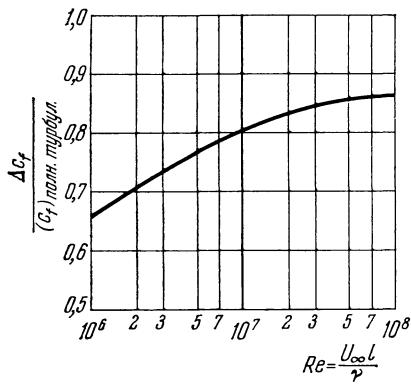


Рис. 17.21. Относительное уменьшение сопротивления плоской пластины, достигаемое сохранением ламинарной формы течения в пограничном слое посредством «наиболее выгодного» отсасывания (см. рис. 17.20). При отсасывании

$$\Delta c_f = c_f^{\text{турб}} - c_f^{\text{лам}}$$

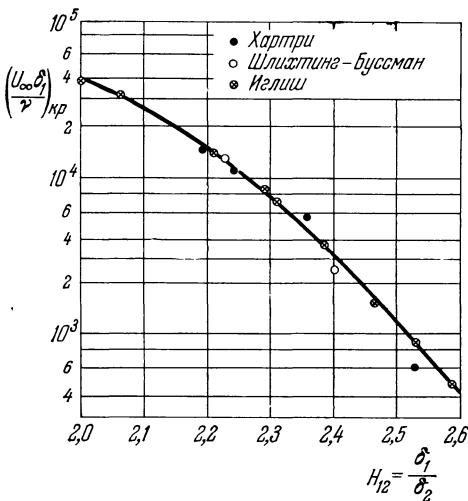


Рис. 17.22. Зависимость критического числа Рейнольдса в ламинарном пограничном слое с отсасыванием и с градиентом давления от формпараметра $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$.

сопротивления при сохранении пограничного слоя ламинарным посредством отсасывания в существенном подтверждено измерениями в аэродинамических трубах и при летных испытаниях [56], [65a], [66]; см. также рис. 14.19.

Влияние на предел устойчивости отсасывания и градиента давления можно объединить и представить в виде зависимости критического числа Рейнольдса от формпараметра $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$ профиля скоростей. Такое построение сделано на рис. 17.22. Результаты для пластины с равномерно распределенным отсасыванием (профили Иглиша, рис. 14.8), для пластины с отсасыванием по закону $v_0 \sim 1/\sqrt{x}$ (профили Буссмана, рис. 14.12), а также для пластины без отсасывания, но с градиентом давления (профили Хартри) все хорошо ложатся на одну кривую. Для асимптотического профиля при отсасывании формпараметр $H_{12} = 2$, а для пластины без отсасывания $H_{12} = 2,59$.

Примеры расчета положения нейтральной точки на *крыловых профилях* с отсасыванием имеются в работе Г. Крюгера [73]. В. Вюст [158], [159] показал, что при отсасывании через несколько расположенных одна за другой щелей стабилизующее действие отсасывания значительно меньше, чем при равномерно распределенном отсасывании.

§ 4. Влияние активных сил на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный

1. Пограничные слои на выпуклых стенках (центробежная сила). Существует несколько случаев, в которых на переход ламинарного течения в турбулентное значительное влияние оказывают активные внешние силы. Примером может служить течение в кольцевом пространстве между двумя врачающимися коаксиальными цилиндрами. Если внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращается, то в промежутке между ними скорость увеличивается приближенно по линейному закону от нулевого значения на внутренней стенке до значения на внешней стенке, совпадающего с окружной скоростью вращения внешнего цилиндра. При таком течении частица жидкости, находящаяся ближе к внешней стенке, сопротивляется перемещению по направлению к внутренней стенке, так как для нее центробежная сила больше, чем для частиц из внутренних слоев; поэтому если такая частица и начинает перемещаться по направлению к внутренней стенке, то она тотчас же отбрасывается наружу. Однако одновременно затруднено и перемещение частиц жидкости изнутри наружу, так как центробежная сила во внутреннем слое меньше центробежной силы во внешнем слое, и поэтому частица, находящаяся во внутреннем слое, испытывает «подъемную силу», направленную внутрь. Таким образом, в рассматриваемом случае поперечные движения, являющиеся признаком турбулентности, затруднены вследствие действия центробежных сил; следовательно, эти силы действуют на течение стабилизующим образом.

Все исследования устойчивости, рассматривавшиеся выше, относятся к ламинарным течениям вдоль плоских стенок, а также к двумерным (плоским) возмущающим движениям, между тем как в технических приложениях очень часто встречаются искривленные стенки. Г. Гёртлер [45] исследовал влияние кривизны стенок на устойчивость течения и обобщил критерий Толмина о неустойчивости профиля с точкой перегиба на случай течения вдоль искривленной стенки. Согласно критерию Толмина, при течении вдоль плоской стенки в предельном случае очень высоких чисел Рейнольдса (невязкое течение) профили скоростей с переменой знака у производной d^2U/dy^2 неустойчивы (см. § 2 главы XVI). Для течения вдоль искривленной стенки этот критерий видоизменяется только в том смысле, что производная d^2U/dy^2 заменяется величиной

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dy},$$

где R есть радиус кривизны стенки, причем $R > 0$ для выпуклой и $R < 0$ для вогнутой стенки. Перемена знака этой величины вызывает невязкую неустойчивость. Критерий Гёртлера показывает, что при рассматриваемых здесь двумерных возмущениях неустойчивость на выпуклых стенках возникает немного впереди точки минимума давления, а на вогнутых стенках, наоборот, немного позади точки минимума давления. Однако в целом влияние кривизны стенки на течение в пограничном слое в том случае, когда отношение $\delta/|R| \ll 1$ (δ — толщина пограничного слоя), очень мало. При течении вдоль вогнутой стенки значительно важнее другой вид неустойчивости, вызываемый некоторыми трехмерными возмущениями. Этот вид неустойчивости будет рассмотрен в § 6 настоящей главы.

Подробное исследование устойчивости плоских течений около искривленных стенок выполнил Г. Шлихтинг [118] на примере течения внутри вращающегося цилиндра. Для течения в промежутке между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний неподвижен, а внешний вращается, так же, как и для течения Кузетта между двумя параллельными стенками, из которых одна покоятся, а другая движется, не существует предела устойчивости ($Re_{kp} = \infty$, см. § 3 главы XVI). Поэтому была исследована устойчивость

изменяющегося во времени разгонного течения, т. е. устойчивость тех профилей скоростей, которые возникают при внезапном приведении во вращение внешнего цилиндра. При таком разгонном течении образуются профили скоростей, сходные с изображенными на рис. 5.5, но несколько измененные вследствие влияния кривизны стенок. Для упрощения вычислений было принято, что внутренний цилиндр отсутствует. Результат расчета на устойчивость представлен на рис. 17.23, на котором на оси ординат отложены значения критического числа Рейнольдса, составленного для толщины вытеснения δ_1 и для окружной скорости стенки U_m , а на оси абсцисс — значения δ_1/R (R есть радиус цилиндра). Вследствие стабилизующего влияния центробежных сил критическое число Рейнольдса при увеличении отношения δ_1/R значительно возрастает. Критические числа Рейнольдса ($U_m R/v$)_{кр} для некоторых значений δ_1/R даны в таблице 17.3, в которой (в третьей строке) указаны также значения критического числа Рейнольдса, пересчитанные на радиус цилиндра R . При $\delta_1/R = 0,091$ это число имеет минимум, равный

$$\left(\frac{U_m R}{v} \right)_{\text{кр}} = 66,000.$$

Для сравнения этого теоретического результата с экспериментальными результатами следует взять те опыты, в которых внешний цилиндр вращается, а внутренний покоятся. В этом случае измеренные критические числа Рейнольдса зависят также от отношения ширины промежутка между цилиндрами к радиусу внешнего цилиндра. На рис. 17.24 изображены результаты некоторых опытов [84], [149], [155]. Указанное выше теоретическое значение критического числа Рейнольдса соответствует случаю $d/R = 1$. Экстраполяция измеренных значений критического числа Рейнольдса на случай $d/R = 1$ дает $(U_m R/v)_{\text{кр}} = 2 \cdot 10^5$. Хотя это число в три раза пре-вышает теоретический предел устойчивости, можно считать, что теория удовлетворительно согласуется с экспериментом. В самом деле, теоретический предел устойчивости относится к одному-единственному нейтральному возмущению с определенной длиной волны, между тем как для осуществления перехода из ламинарной формы течения в турбулентную, необходимо нарастание ряда возмущений с разной длиной волн.

Дальнейшее подтверждение указанных выше теоретических результатов недавно получил Ф. Шульц-Грунов [126a]. Он вполне строго доказал, что течение между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых наружный вращается, а внутренний неподвижен,

Таблица 17.3. Критические числа Рейнольдса для профилей скоростей, образующихся во вращающемся цилиндре при его разгоне.
По Шлихтингу [118]

$\frac{\delta_1}{R}$	0	0,011	0,027	0,055	0,073	0,109	0,136
$\left(\frac{U_m \delta_1}{v} \right)_{\text{кр}} \cdot 10^{-3}$	1,53	1,96	2,65	3,96	4,90	7,32	10,8
$\left(\frac{U_m R}{v} \right)_{\text{кр}} \cdot 10^{-4}$	∞	17,9	9,69	7,24	6,72	6,74	7,89

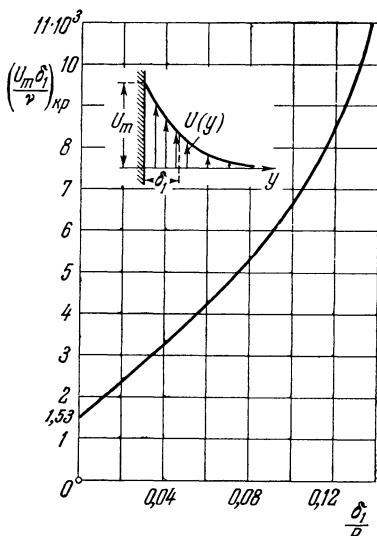


Рис. 17.23. Критическое число Рейнольдса для профиля скоростей, образующегося во вращающемся цилиндре при разгоне. R — радиус цилиндра, U_m — окружная скорость цилиндра.

полностью устойчиво. Поскольку, как уже было отмечено выше, течение при некоторых условиях все же становится турбулентным, объяснение следует искать в процессе разгона течения, так как иначе факт существования турбулентности в стадии стационарного течения остается необъяснимым. В дополнение к аналитическому исследованию Ф. Шульц-Грунов выполнил эксперименты, при которых особое внимание было

уделено точной коаксиальности обоих цилиндров и предотвращению их колебаний вследствие неточной балансировки. Выяснилось, что, несмотря на переход течения из ламинарной формы в турбулентную, в период разгона течение снова становится ламинарным, как только устанавливается стационарное состояние. Это происходит при максимальной скорости, допускаемой экспериментальной установкой, и ламинарное течение наблюдается при числах Рейнольдса, превышающих те, при которых раньше наблюдался переход ламинарной формы течения в турбулентную, в 5–8 раз (см. светлые кружки на рис. 17.24).

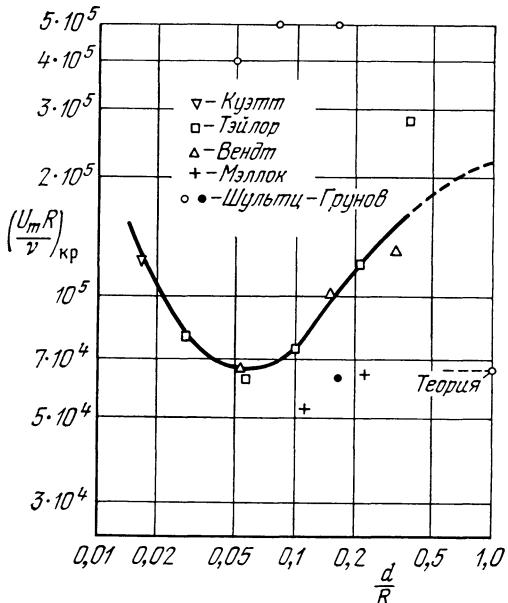


Рис. 17.24. Критическое число Рейнольдса для течения между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний неподвижен, а внешний вращается. Прежние измерения (Кузэтт, Тэйлор, Вендт, Мэллок) показали, что существует критическое число Рейнольдса. Более же новые измерения Ф. Шульц-Грунова показывают полную устойчивость при точной коаксиальности обоих цилиндров (светлые кружочки) и переход ламинарного течения в турбулентное при отклонении от коаксиальности (черные кружочки). R — радиус внешнего цилиндра; d — разность радиусов внешнего и внутреннего цилиндров.

Течение ведет себя совершенно по-иному и турбулентность сохраняется, как это было в старых экспериментах, когда коаксиальность обоих цилиндров нарушалась (см. черные кружки на рис. 17.24). Таким образом, эксперименты подтвердили, что сохранение турбулентности в стадии стационарного состояния вызывается несовершенством экспериментальных условий и, следовательно, развитая теория течения между двумя коаксиальными цилиндрами вполне правильна.

Если внутренний цилиндр вращается, а внешний поконится, то как и в пограничном слое на вогнутой стенке, возникает неустойчивость относительно трехмерных возмущений, которая будет рассмотрена в § 6 настоящей главы. Обширные экспериментальные исследования о возникновении турбулентности при течении между двумя вращающимися цилиндрами были выполнены В. Тилманом [151а, б].

2. Течения неоднородных жидкостей (расслоение по плотности в вертикальном направлении). С влиянием центробежной силы при течении однородной жидкости вдоль искривленной стенки в известной мере сходно влияние изменений плотности в вертикальном направлении при течении вдоль плоской горизонтальной стенки. Расслоение по плотности будет, очевидно, устойчивым, если плотность снизу вверх уменьшается, и неустойчивым, если плот-

Следовательно, если жидкость даже все же образуется неустойчивое расслоение, в котором возникают восходящие и нисходящие вихревые образования, приводящие при подходящих условиях к разделению горизонтального слоя жидкости на правильные шестиугольные ячейки типа пчелиных сот [4], [64], [109]. При течении с устойчивым расслоением по плотности происходит торможение турбулентного перемешивающего движения в вертикальном направлении, так как подъему более тяжелых частей жидкости, лежащих внизу, препятствует сила тяжести, а опусканию более легких частей, расположенных наверху, мешает гидростатическая подъемная сила. Если расслоение достаточно резкое, то торможение перемешивающего движения может привести к полному затуханию турбулентности. Такое затухание турбулентности играет известную роль в некоторых метеорологических явлениях. Так, например, в прохладные летние вечера иногда можно наблюдать, как над влажным лугом при слабом ветре движутся ключья тумана с резко очерченными границами. Это показывает, что произошло полное затухание турбулентности ветра и слои воздуха скользят один по другому ламинарно, без турбулентного перемешивания. В данном случае причиной особенно-

устойчивого расслоения является резко выраженный температурный градиент, возникший вблизи поверхности земли вследствие вечернего охлаждения и препятствующий перемешиванию верхних слоев воздуха, более теплых, а потому и более легких, с нижними слоями, более холодными, а потому и более тяжелыми. Затуханием турбулентности объясняется также наблюдаемое иногда затихание ветра в вечерние часы: на большой высоте ветер продолжает дуть с прежней силой, но вблизи земли вечернее охлаждение приводит к затуханию турбулентности, и поэтому здесь скорость ветра значительно уменьшается. Аналогичным образом объясняется наблюдаемое в проливе Каттегат скольжение слоя пресной воды над слоем соленой воды без существенного перемешивания, а также удивительная устойчивость полярного фронта Бьеркнеса, в котором холодные массы воздуха образуют клин под теплыми массами.

Л. Прандтль [101] исследовал такого рода расслоенные течения, а также ранее рассмотренные течения вдоль искривленных стенок, когда проявляют свое действие центробежные силы, с точки зрения баланса энергии. Выяснилось, что на устойчивость расслоенного течения, наряду с числом Рейнольдса, существенное влияние оказывает безразмерная величина

$$Ri = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{dp}{dy}}{\left(\frac{dU}{dy}\right)_w^2}, \quad (17.13)$$

где g есть ускорение свободного падения, ρ — плотность, y — вертикальная координата, считаемая положительной при отсчете вверх, и $U(y)$ — распределение скоростей над горизонтальной плоскостью. Подстрочный индекс w отмечает, что берется значение градиента на стенке. Эта безразмерная величина называется *числом Ричардсона*. Случай $Ri = 0$ означает однородную жидкость, случай $Ri > 0$ — устойчивое расслоение, а случай $Ri < 0$ — неустойчивое расслоение. Энергетические оценки Л. Ф. Ричардсона [111] и Л. Прандтля показали, что турбулентность должна затухать при $Ri > 2$. Впоследствии Дж. И. Тэйлор [148], уточнив соображения Л. Прандтля, получил в качестве предела устойчивости значения $Ri \geq 1$. Термодинамическое обоснование критерия Ричардсона дано Г. Эртелем [36].

Дж. И. Тэйлор [148] и С. Голдстейн [43] впервые применили для исследования устойчивости расслоенного течения метод малых колебаний. Для случая непрерывного распределения плотности и при линейном распределении скоростей в неограниченно распространенной жидкости они получили в качестве предела устойчивости значение $Ri = 1/4$. Влияние вязкости и кривизны профиля скоростей на возмущающее движение они не учитывали. Расчет устойчивости пограничного слоя с расслоением по плотности выполнил, следуя теории Толмина, Г. Шлихтинг [120]. В основу расчета он положил профиль скоростей Блазиуса, получающийся при продольном обтекании плоской пластины, а расслоение по плотности учел только в пограничном слое, следовательно, вне пограничного слоя принял плотность постоянной. Вычисления показали, что критическое число Рейнольдса сильно возрастает с увеличением числа Ричардсона (рис. 17.25). А именно критическое число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения, равно $Re_{kp} = 575$ при $Ri = 0$ (однородная жидкость) и $Re_{kp} = \infty$ при $Ri = 1/24$. Следовательно, при

$$Ri > 0,0417 \quad (17.14)$$

пограничный слой на пластине в течении с расслоением по плотности остается устойчивым.

Этот теоретический результат сопоставлен на рис. 17.25 с измерениями Г. Райхардта [102], выполненными в Гётtingенской аэродинамической трубе-

с температурным градиентом в вертикальном направлении. В этой трубе, имеющей прямоугольное поперечное сечение, верхняя стенка может обогреваться паром, а нижняя стенка охлаждаться водой. Как показывает рис. 17.25, с температурным градиентом в вертикальном направлении. В этой трубе, имеющей прямоугольное поперечное сечение, верхняя стенка может обогреваться паром, а нижняя стенка охлаждаться водой. Как показывает рис. 17.25,

всем ламинарным течениям, наблюдавшимся в аэродинамической трубе, соответствуют комбинации чисел Re и Ri , лежащие в теоретически устойчивой области, а всем турбулентным течениям — комбинации, лежащие в теоретически неустойчивой области. Таким образом, согласование теории с измерениями следует считать очень хорошим.

Дж. И. Тэйлор [147] обнаружил, что в морях иногда имеют место турбулентные течения при значительно больших числах Ричардсона; это, очевидно, необходимо приписать отсутствию стенок.

Недавно Дж. Т. Стюарт [139] исследовал влияние магнитного поля на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Выяснилось, что для ламинарного

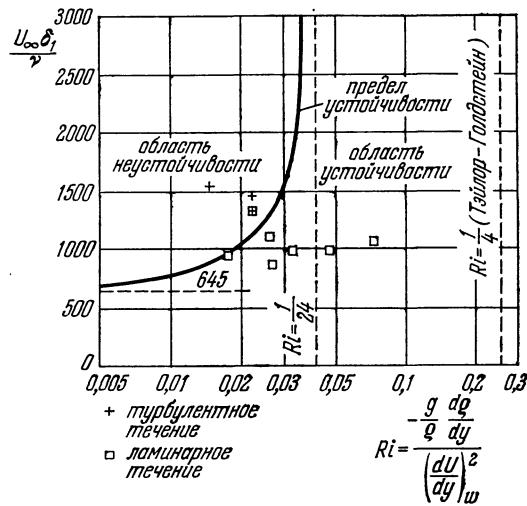
Рис. 17.25. Зависимость критического числа [Рейнольдса от числа Ричардсона Ri для пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине при наличии расслоения по плотности.

течения между двумя параллельными плоскими стенками наложение магнитного поля, параллельного плоскости стенок, значительно увеличивает критическое число Рейнольдса.

§ 5. Влияние теплопередачи и сжимаемости

на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный

1. Предварительные замечания. Все теоретические и экспериментальные результаты по переходу ламинарной формы течения в турбулентную, изложенные в предыдущих параграфах, относятся к течениям с умеренной скоростью (несжимаемые течения). В настоящее время в связи с запросами авиационной техники усиленно исследуется влияние сжимаемости текущей среды на переход ламинарной формы течения в турбулентную. В сжимаемых течениях важным фактором, влияющим на переход ламинарной формы течения в турбулентную, является, наряду с числом Маха, теплопередача между обтекаемой стенкой и текущей средой. В несжимаемых течениях теплопередача между стенкой и текущей средой происходит только в том случае, когда температура стенки поддерживается на более высоком или более низком уровне, чем температура протекающей жидкости. В сжимаемом течении на теплопередачу между стенкой и текущей средой сильное влияние оказывает тепло, выделяющееся в пограничном слое вследствие трения (см. главу XIII). В сжимаемом течении, наряду со скоростным пограничным слоем, всегда образуется температурный пограничный слой, оказывающий существенное влияние на устойчивость динамического пограничного слоя. Как показывают излагаемые ниже теоретические и экспериментальные результаты, теплопередача от пограничного слоя к стенке действует стабилизующим образом, т. е. приводит к повышению критического числа Рейнольдса; теплопередача же от стенки к пограничному слою, наоборот, уменьшает устойчивость пограничного слоя, следовательно, приводит к понижению критического числа Рейнольдса.



2. Влияние теплопередачи. Основные особенности влияния теплопередачи от стенки к текущей среде на устойчивость ламинарного пограничного слоя легко обнаруживаются уже в случае несжимаемого течения, поэтому мы поясним их сначала в этой упрощенной постановке. Некоторые экспериментальные исследования о влиянии теплопередачи на переход ламинарной формы течения в турбулентную выполнил еще в сороковых годах В. Линке [88]. В этих экспериментах измерялось сопротивление трения вертикально поставленной плоской пластины, подвергавшейся нагреванию, при ее горизонтальном обтекании. Измерения показали, что в области чисел Рейнольдса Re_l от 10^5 до 10^6 нагревание приводит к значительному повышению сопротивления трения. Отсюда Линке сделал правильный вывод, что нагревание пластины понижает критическое число Рейнольдса, что и влечет за собой заметное увеличение сопротивления трения в наблюдавшейся области чисел Рейнольдса, т. е. в той области этих чисел, которая соответствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную.

В том, что при течении без учета сжимаемости теплопередача от стенки к пограничному слою ($T_w > T_\infty$) понижает предел устойчивости, а теплопередача от пограничного слоя к стенке ($T_w < T_\infty$), наоборот, повышает предел устойчивости, можно убедиться на основании теоремы о роли точки перегиба, изложенной в § 2 главы XVI. Стабилизующее и соответственно возмущающее действие теплопередачи на стенке обусловливается в основном зависимостью коэффициента вязкости μ от температуры T . Для газов коэффициент вязкости μ , согласно формуле (13.3), увеличивается при возрастании температуры. Соотношение (13.6), связывающее градиент давления и кривизну профиля скоростей $U(y)$, если учесть, что коэффициент вязкости зависит от температуры, принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dU}{dy} \right)_w = \frac{dp}{dx}. \quad (17.15)$$

Для продольно обтекаемой пластины градиент давления равен нулю, следовательно,

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dU}{dy} \right)_w = 0 \quad (17.16)$$

или, после выполнения дифференцирования,

$$\mu_w \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_w + \left(\frac{d\mu}{dy} \right)_w \left(\frac{dU}{dy} \right)_w = 0.$$

Таким образом, кривизна профиля скоростей на стенке определяется величиной

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_w = - \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dy} \right)_w \left(\frac{dU}{dy} \right)_w. \quad (17.17)$$

Если стена теплее, чем газ вне пограничного слоя, т. е. $T_w > T_\infty$, то температурный градиент на стенке отрицателен, т. е. $(dT/dy)_w < 0$, а так как коэффициент вязкости с возрастанием температуры увеличивается, то одновременно и $(d\mu/dy)_w < 0$. Далее, так как градиент скорости на стенке положителен, то из равенства (17.17) следует, что

$$\text{при } T_w \leqslant T_\infty \quad \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_w \leqslant 0. \quad (17.18)$$

Таким образом, в случае нагретой стенки ($T_w > T_\infty$) кривизна профиля скоростей на стенке положительна, а в случае охлажденной стенки ($T_w < T_\infty$) — отрицательна. Отсюда немедленно следует, что в случае нагретой стенки внутри пограничного слоя имеется точка, в которой кривизна профиля скоростей равна нулю, т. е. $d^2U/dy^2 = 0$. Это означает, что в случае нагретой

стенки профиль скоростей имеет точку перегиба, и поэтому на основании теоремы о роли точки перегиба (§ 2 главы XVI) он неустойчив. Следовательно, передача тепла от стенки к протекающему газу действует таким же сильно возмущающим образом, как и повышение давления в направлении течения. Наоборот, передача тепла от протекающего газа к стенке стабилизует пограничный слой, т. е. действует так же, как понижение давления в направлении течения.

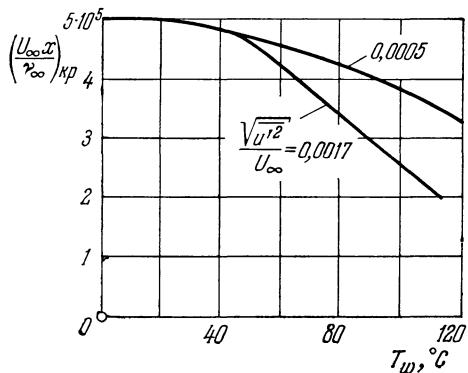


Рис. 17.26. Зависимость критического числа Рейнольдса для нагреваемой плоской пластины, продольно обтекаемой воздухом (течение несжимаемое). По измерениям Г. В. Липмана и Г. Г. Филы [86]. T_w — температура стенки (пластины), $\sqrt{u'/U_{\infty}}$ — степень турбулентности внешнего течения.

Исследованию влияния нагревания на устойчивость пограничного слоя посвящена также работа Р. В. Хиггинса и К. К. Пацаса [58].

Устойчивость пограничного слоя на плоской пластине при свободной конвекции и при вынужденном конвективном течении экспериментально исследована Э. Р. Г. Эккертом [34], [35].

3. Влияние сжимаемости. Исследование устойчивости ламинарного пограничного слоя методом малых колебаний при сжимаемом течении впервые выполнил в 1938 г. в своей гёттингенской диссертации Д. Кюхеман [74]. Для упрощения расчетов Кюхеман положил в их основу линейное распределение скоростей (рис. 16.9, а). Влияние трения на возмущающее движение не учитывалось. Исследовалось влияние возмущающих колебаний двух видов: во-первых, нейтральных колебаний типа бегущих волн, рассмотренных в § 2 главы XVI, и, во-вторых, вынужденных колебаний типа характерных для сверхзвукового течения косых возмущающих волн, попадающих в пограничный слой из внешнего течения и отражающихся в нем (см. рис. 13.28, а и б). В результате исследования Кюхеман обнаружил нейтральные собственные колебания, но критических чисел Рейнольдса, конечно, не получил, так как влияние вязкости не учитывалось. Позднее исследования Д. Кюхемана были продолжены Э. А. Мюллером (см. ссылку [75] в главе XIII). См. также обзорную статью В. Толмина [152].

Устойчивость сжимаемого ламинарного пограничного слоя с учетом трения и кривизны профиля скоростей была очень подробно исследована Л. Лизом и Ц. Ц. Линем [79]¹⁾. Выяснилось, что для теплоизолированной стенки влияние сжимаемости на устойчивость пограничного слоя при умеренных числах Маха незначительно. Это видно из рис. 17.27, на котором изображены нейтральные кривые для пограничного слоя на продольно обте-

¹⁾ См. в связи с этим обсуждение результатов, полученных Лизом и Линем, в работах [5] и [6].

каемой плоской пластине при различных числах Маха. Кривые показывают, что с увеличением числа Маха критическое число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения δ_1 пограничного слоя, уменьшается очень незначительно.

В случае *теплопроводящей* стенки влияние теплопередачи между стенкой и текущей средой на устойчивость при сжимаемых течениях столь же велико, как и при несжимаемых течениях. Некоторые результаты, полученные при умеренно большом числе Маха ($Ma_\infty = 0,7$), изображены на рисунке 17.28. Нейтральные кривые, построенные для различных значений отношения T_w/T_∞ температур на стенке и во внешнем течении, показывают, что охлаждение пограничного слоя, т. е. теплоизменение от пограничного слоя к стенке ($T_w < T_\infty$), сильно повышает предел устойчивости, в то время как нагревание пограничного слоя, т. е. теплопередача от стенки к пограничному слою ($T_w > T_\infty$), сильно понижает предел устойчивости. Из рис. 17.28 видно, что при $T_w/T_\infty > 1$ вид, как и при невязкой неустойчивости профилей скоростей в течении с повышением давления вдоль стенки (см. рис. 17.2 и 16.8).

К особенно интересным соотношениям приводит исследование влияния сильной теплопередачи на устойчивость пограничного слоя при высоких числах Маха. Теоретические исследования Э. Р. Ван-Дрийста [20], [21] показывают, что в этом случае при подходящих обстоятельствах происходит стабилизация пограничного слоя вплоть до произвольно больших чисел Рейнольдса ($Re_{kp} \rightarrow \infty$). Это хорошо видно из рис. 17.29, на котором изображена зависимость критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине от числа Маха и от отношения T_w/T_∞ температур на стенке и во внешнем течении. Кривая, обозначенная римской цифрой I, представляет собой график отношения температур T_e/T_∞ , вычисленный по формуле (13.18а). В области слева от этой кривой пограничный слой нагревается стенкой, а

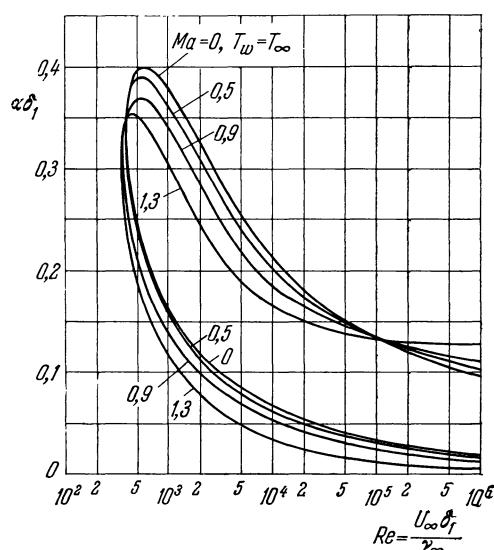


Рис. 17.27. Нейтральные кривые для ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой теплоизолированной плоской пластине при сжимаемом течении. По Лизу и Линю [19]. Число Прандтля $Pr=1$.

нейтральные кривые имеют такой же вид, как и при невязкой неустойчивости профилей скоростей в течении с

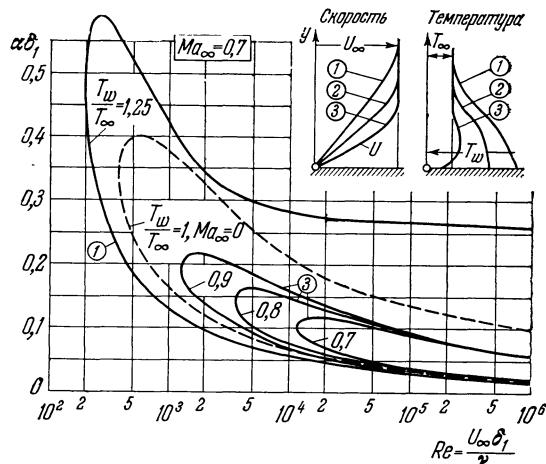


Рис. 17.28. Нейтральные кривые для ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой теплопроводящей плоской пластине при сжимаемом течении. По Лизу и Линю [19]. Число Прандтля $Pr=1$, число Маха $Ma_\infty = 0,7$. Кривая (1) — нагревание пограничного слоя вследствие теплопередачи от стенки к газу ($T_w > T_\infty$); предел устойчивости понижается. Кривая (2) — теплоизолированная стена. Кривая (3) — охлаждение пограничного слоя вследствие теплопередачи от газа к стенке ($T_w < T_\infty$); предел устойчивости повышается.

T_e/T_∞ , вычисленный по формуле (13.18а). В области слева от этой кривой пограничный слой нагревается стенкой, а

в области справа — охлаждается стенкой. Из рис. 17.29 видно также, что при достаточном охлаждении пограничного слоя, приблизительно при $T_w/T_\infty < 0,75$, существует такая область сверхзвуковых чисел Маха, в которой неустойчивость не возникает даже при произвольно больших числах Рейнольдса. Эта область «полной стабилизации» впервые была обнаружена Л. Лизом и позднее более тщательно исследована Ван-Дрийстом. Ее границы несколько зависят также от числа Прандтля и от эмпирического закона $\mu(T)$, связывающего коэффициент вязкости с температурой [формула (13.3)].

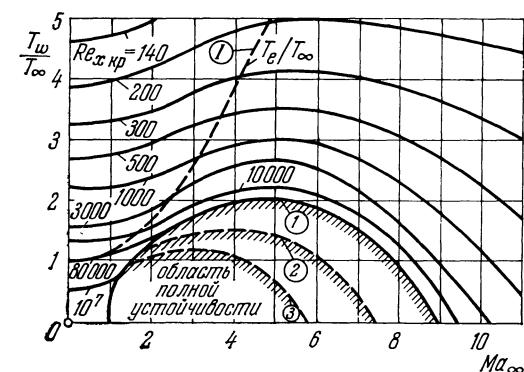


Рис. 17.29. Влияние числа Маха и температуры стены на критическое число Рейнольдса при продольном обтекании плоской пластины. По Э. Р. Ван-Дрийству [21]. Число Рейнольдса $Re_x = U_\infty x / \nu$. В заштрихованных областях пограничный слой полностью устойчив при всех числах Рейнольдса ($Re_{x_kr} = \infty$). Кривые, ограничивающие заштрихованные области, соответствуют различным зависимостям вязкости от температуры, а именно: кривая (1) — число Прандтля $Pr = 0,75$ вязкость и температура связаны законом Стерлена [формула (13.3)]; кривая (2) — число Прандтля $Pr = 0,75$; $\omega = 1$; кривая (3) — число Прандтля $Pr = 1$; $\omega = 1$.

того, что критическое число Рейнольдса Re_{x_kr} для значений безразмерной разности температур

$$\frac{T_w - T_e}{U_\infty^2} ,$$

$$\frac{2c_p}{}$$

знак которой, согласно формуле (13.22), определяет направление теплопередачи. Теоретические и экспериментальные кривые на рис. 17.30 показывают, что критическое число Рейнольдса уменьшается и при возрастании числа Маха, и при возрастании разности температур $T_w - T_e$, причем в последнем случае сильнее. Значительное расстояние между положениями экспериментально определенных точек перехода и теоретически вычисленных нейтральных точек и здесь связано с нарастанием неустойчивых возмущений. Измерения К. Р. Чарнецкого и А. Р. Синклера [14], выполненные в аэродинамической трубе, показали, что охлаждение пограничного слоя позволяет получить при числе Маха $Ma = 1,6$ очень большое значение числа $Re_{x_kr} = 28 \cdot 10^6$. При летных испытаниях ракет V-2 [137] было достигнуто еще более высокое критическое число Рейнольдса $Re_{x_kr} = 90 \cdot 10^6$. Распределение давления вдоль стенки оказывает сильное влияние на положение точки перехода также при сверхзвуковых течениях [59]. Очень сильная стабилизация

¹⁾ В последнее время возникли сомнения в точности численных результатов, изображенных на рис. 17.29. В частности, нет уверенности в том, что более точные методы вычисления подтверждают существование области полной стабилизации.

ламинарного пограничного слоя возникает позади волны разрежения, отходящей от вершины выпуклого угла в сверхзвуковом течении. Некоторые измерения этого явления выполнены А. Г. Ланге и Р. Э. Ли [??].

При сверхзвуковых скоростях экспериментальное определение точки перехода посредством измерений скорости или динамического давления иногда невозможно. В таких случаях используется способ, основанный на измерении нагревания стенки теплом, выделяющимся в пограничном слое вследствие трения. При переходе ламинарной формы течения в турбулентную температура стенки, а вместе с нею и коэффициент восстановления, определяемый уравнением (13.19), довольно резко возрастают, так как при турбулентном течении выделение тепла в пограничном слое вследствие трения значительно, чем при ламинарном.

На рис. 17.31 изображено такое определение точки перехода, выполненное Дж. К. Эввардом [??], [??] для конуса, обтекаемого в осевом направлении. Значения коэффициента восстановления r отложены в виде ординат, а значения местной длины — в виде абсцисс. Крутой подъем кривой начинается в точке перехода. Изображенные на рис. 17.31 кривые относятся к различным степеням турбулентности внешнего течения. При более высокой степени турбулентности точка перехода лежит несколько выше по течению, чем при более слабой степени турбулентности. Другие аналогичные измерения можно найти в работе [??].

Подробное изложение теоретических и экспериментальных результатов об устойчивости ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине при сверхзвуковой скорости можно найти в работе Дж. Лауфера и Т. Вребаловича [??]. Дальнейшие результаты о всем круге проблем перехода ламинарной формы течения в турбулентную при суперзвуковых и гиперзвуковых скоростях имеются в работах [??], [??], [??], [??], [??], [??].

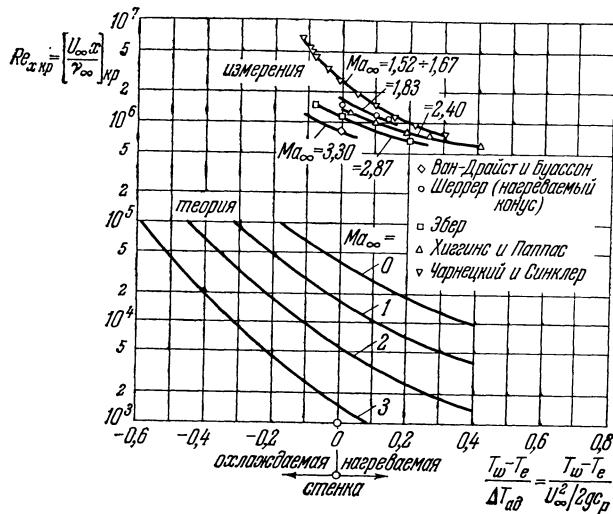


Рис. 17.30. Влияние нагревания и охлаждения пограничного слоя на критическое число Рейнольдса для продольно обтекаемой плоской пластины. Теория — по Э. Р. Ван-Драйсту [??]; Р. Ф. Пробстейну и Ц. Ц. Линю; измерения — различных экспериментаторов [??], [??], [??], [??], [??].

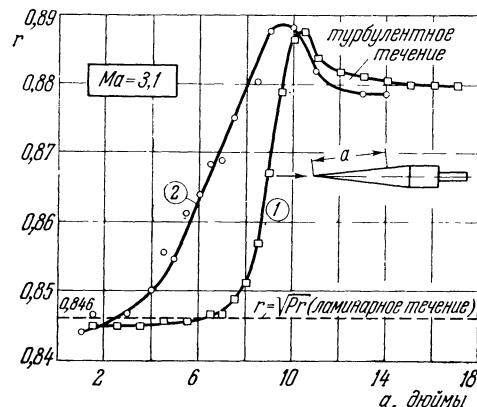


Рис. 17.31. Измерения коэффициента восстановления на конусе, обтекаемом со сверхзвуковой скоростью (число Маха $Ma = 3,1$) в осевом направлении, с целью определения положения точки перехода ламинарного течения в турбулентное. По Эвварду и Таккеру [??]. Для ламинарного течения $r = \sqrt{Pr}$ (ламинарное течение); для турбулентного течения $r = 0,88$. Начало крутого подъема кривой коэффициента восстановления дает положение точки перехода. Кривая (1) — для малой степени турбулентности; кривая (2) — для большой степени турбулентности.

§ 6. Устойчивость пограничного слоя при трехмерных возмущениях

1. Течение между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Во всех изложенных выше теоретических исследованиях устойчивости объектом исследования было плоское (двумерное) течение и наложенное на него плоское возмущающее движение, причем последнее имело вид плоской волны, распространяющейся в направлении основного течения. Для течений вдоль плоской стенки предположение о двумерности возмущающего движения приводило к отысканию самого низкого предела устойчивости, так как трехмерные возмущения, как показал Г. Б. Сквайр (см. стр. 426), всегда дают более высокий предел устойчивости.

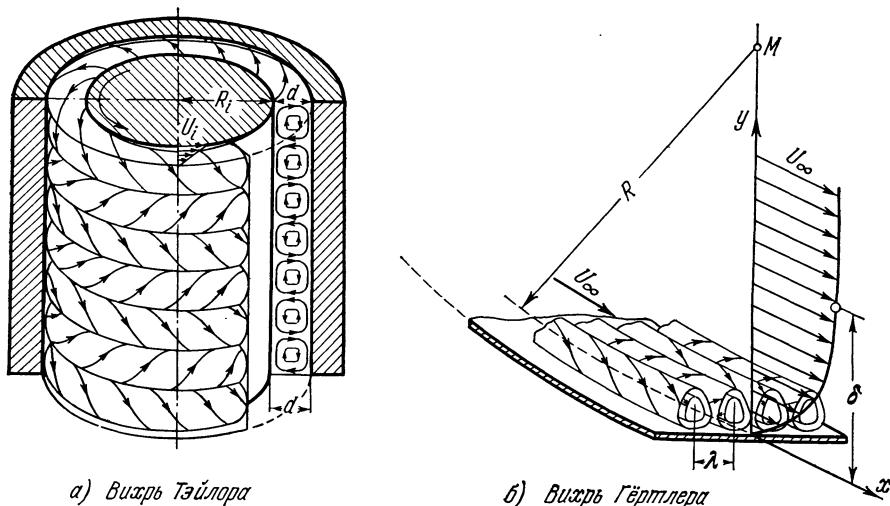


Рис. 17.32. а) Вихрь Тэйлора между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен. d — ширина промежутка между цилиндрами; h — высота цилиндра. б) Вихрь Гёртлера в пограничном слое на вогнутой стенке. $U(y)$ — основное течение; δ — толщина пограничного слоя; λ — длина волн возмущения.

Совсем иного рода неустойчивость получается при течении около искривленной стенки. При течении между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний покоятся, возникает неустойчивое расслоение жидкости, так как частицы жидкости, находящиеся вблизи внутренней стенки, стремятся, вследствие большей центробежной силы, переместиться наружу. Для случая невязкой жидкости устойчивость такого течения была исследована еще Рэйли [110]. Выяснилось, что течение неустойчиво тогда, когда окружная скорость u при увеличении радиуса r уменьшается сильнее, чем $1/r$, т. е. если

$$u(r) = \frac{\text{const}}{r^n} \quad \text{при} \quad n > 1. \quad (17.19)$$

Для случая вязкой жидкости устойчивость такого течения впервые была подробно исследована Дж. И. Тэйлором [149] в рамках линейной теории. Это исследование показало, что, начиная с определенного числа Рейнольдса, между цилиндрами возникают правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра. На рис. 17.32 изображена схематическая картина такого течения с ячейковыми вихрями, целиком заполняющими кольцевое пространство между обоими цилиндрами. Условие неустойчивости

течения в кольцевом пространстве, следовательно, и условие возникновения вихрей можно выразить при помощи числа Тэйлора Ta в виде соотношения

$$Ta = \frac{U_i d}{v} \sqrt{\frac{d}{R_i}} \geq 41,3, \quad (17.20)$$

где d есть ширина промежутка между цилиндрами, а R_i и U_i — радиус окружная скорость внутреннего цилиндра. Критерий Тэйлора очень хорошо совпадает с результатами измерений. Это отчетливо видно по фотоснимкам вихря Тэйлора, опубликованным Ф. Шульц-Груновым и Г. Хайнем [126] (четыре таких снимка изображены на рис. 17.33). В использованном для опытов приборе с расстоянием между цилиндрами $h = 4\text{мм}$ и радиусом внутреннего цилиндра $R_i = 21\text{ мм}$ возникновение вихрей начиналось при значении числа Тэйлора, в точности совпадающем со значением (17.20). Этому числу Тэйлора соответствует число Рейнольдса $Re = U_i d / v = 94,5$ (рис. 17.33, *a*). Однако на дальнейших снимках хорошо видно, что даже при значительно больших числах Рейнольдса $Re = 322$ ($Ta = 141$) и $Re = 868$ ($Ta = 387$) течение все еще остается ламинарным (рис. 17.33, *b* и *c*). Только при $Re = 3960$ ($Ta = 1715$) развивается отчетливо выраженная турбулентность (рис. 17.33, *г*). Необходимо особо подчеркнуть, что появление первых нейтральных вихрей при достижении предела устойчивости, определяемого условием (17.20), и последующее нарастание этих вихрей при несколько больших числах Тэйлора отнюдь не означает, что течение уже стало турбулентным. Напротив, оно по-прежнему остается упорядоченным и ламинарным. Переход в турбулентную форму происходит только после того, как число Тэйлора, следовательно и число Рейнольдса, становится значительно больше предела устойчивости.

Дж. Т. Стюарт [140] выполнил расчет неустойчивого ламинарного течения с вихрями Тэйлора (рис. 17.33) с учетом нелинейных членов в уравнении движения. Этот расчет показал, что существует равновесие между переносом энергии из основного течения во вторичное течение и диссипацией энергии во вторичном течении вследствие трения. Перенос энергии из основного течения во вторичное течение приводит к сильному увеличению момента сопротивления внутреннего цилиндра. На рис. 17.34 показано сравнение экспериментального и теоретического коэффициента момента сопротивления



Рис. 17.33. Снимки вихрей Тэйлора (см. рис. 17.32, *а*) между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен. По Ф. Шульц-Грунову и Г. Хайнем [126]. *а*) $Re = 94,5$; $Ta = 41,3$; течение ламинарное, начало образования вихрей; *б*) $Re = 322$; $Ta = 141$; течение все еще ламинарное; *в*) $Re = 868$; $Ta = 387$; течение все еще ламинарное; *г*) $Re = 3960$; $Ta = 1715$; течение турбулентное.

внутреннего цилиндра. Этот коэффициент определяется формулой

$$C_M = \frac{M_i}{\frac{\pi}{2} \rho U_i^2 R_i^2 h}. \quad (17.21)$$

При небольшом отношении d/R_i , где d есть ширина промежутка между цилиндрами, линейная теория дает для C_M формулу

$$C_M = 4 \left(\frac{U_i d}{v} \right)^{-1} = 4 \sqrt{\frac{d}{R_i}} \text{Ta}^{-1} \quad (\text{линейная теория}). \quad (17.22)$$

На рис. 17.34, кроме этой прямой, соответствующей линейной теории и дающей при $d/R_i = 0,028$ значение $C_M = 0,67 \cdot \text{Ta}^{-1}$, проведены: кривая, соответствующая нелинейной теории (для случая ламинарного течения) по

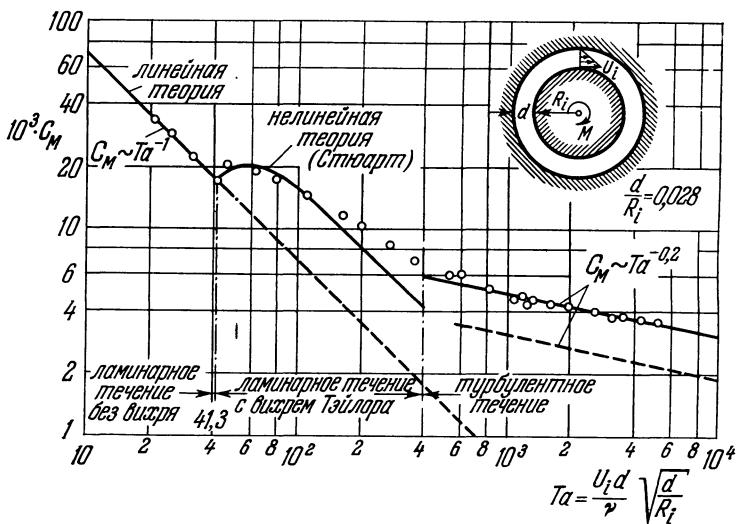


Рис. 17.34. Течение между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен; зависимость коэффициента момента сопротивления внутреннего цилиндра от числа Тэйлора Ta . Относительная ширина промежутка между цилиндрами $d/R_i = 0,028$. Измерения — по Дж. И. Тэйлору [14]. Линейная теория — по формуле (17.22); линейная теория — по Дж. Т. Стюарту [14].

Дж. Т. Стюарту, и прямая, соответствующая турбулентному течению, при котором $C_M \sim \text{Ta}^{-0.2}$. В целом имеются три различные области течения, которые посредством числа Тэйлора определяются следующим образом:

$\text{Ta} < 41,3$: ламинарное течение Күэтта;

$41,3 < \text{Ta} < 400$: ламинарное течение с вихрями Тейлора;

$\text{Ta} > 400$: турбулентное течение.

В первых двух областях совпадение между теорией и экспериментом превосходное ¹⁾. Упомянем также об обобщении теории Тэйлора, сделанном Кирхгесснером [67].

1) Экспериментальные результаты, изображенные на рис. 17.34, показывают также, что возрастание числа Тэйлора при постоянном отношении d/R_i , следовательно, увеличение числа Рейнольдса влечет за собой переход течения из ламинарной формы ячеекового типа в турбулентную форму. При турбулентном течении ($\text{Ta} > 400$) коэффициент $C_M \sim \text{Ta}^{-0.2}$, а потому в случае постоянного d/R_i коэффициент $C_M \sim (U_i d/v)^{-0.2} = \text{Re}^{-0.2}$ — в полном соответствии с результатом, полученным Г. Райхардтом (см. ссылку [17] в главе XIX) для прямолинейного течения Күэтта между двумя параллельными плоскими стенками. Примечательно, что аналогичная зависимость коэффициента момента сопротивления от числа Рейнольдса имеет место также для диска, вращающегося в покоящейся жидкости [формула (21.31)].

Влияние осевой скорости. Г. Людвиг [91], [92] распространил только что рассмотренные исследования устойчивости на случай, когда оба цилиндра перемещаются один относительно другого в осевом направлении. Обозначив через $u(r)$ окружную скорость, а через $w(r)$ — осевую скорость и введя безразмерные градиенты скорости

$$\tilde{u} = \frac{r}{u} \frac{du}{dr} \quad \text{и} \quad \tilde{w} = \frac{r}{u} \frac{dw}{dr},$$

Людвиг получил для невязкого течения следующее условие устойчивости:

$$(1 - \tilde{u})(1 - \tilde{u}^2) - \left(\frac{5}{3} - \tilde{u}\right) \tilde{w}^2 > 0. \quad (17.23)$$

Этот критерий устойчивости содержит в себе как частный случай критерий Рэйли [формула (17.19)] для основного течения с исчезающей осевой скоростью ($\tilde{w} = 0$). В самом деле, в этом случае условие (17.23) принимает вид $\tilde{u} + 1 > 0$. Людвиг при своем исследовании устойчивости, которое привело его к условию (17.23), рассмотрел также неосесимметричные возмущающие движения. Они оказались с

точки зрения устойчивости самыми опасными. На рис. 17.35 показано для примера неустойчивое возмущение с винтообразными возмущающими вихрями. На рис. 17.36 дано сравнение теории Людвига с измерениями [93]. Каждое исследованное основное течение отмечено в виде кружочка в плоскости \tilde{u} , \tilde{w} . Белые кружочки изображают устойчивые течения, а черные — неустойчивые течения, в которых наблюдались возмущающие вихри. Из рисунка видно, что измерения хорошо подтверждают критерий устойчивости Людвига (17.23).

2. Пограничные слои на вогнутых стенках. Такого же рода неустойчивость, как и рассмотренная в предыдущем пункте, возникает при трехмерных возмущениях в пограничных слоях на вогнутых стенках. Но, в то время как в пограничных слоях на выпуклых стенках центробежные силы оказывают стабилизирующее действие, правда, повышая предел устойчивости, как было показано в § 4 настоящей главы, только незначительно, в пограничных слоях на вогнутых стенках эффект центробежных сил противоположен: они приводят, как впервые показал Г. Гётцлер [48], к неустойчивости, сходной с неустойчивостью, наблюдающейся при течении между вращающимися коаксиальными цилиндрами (рис. 17.32, a). Расположив основное течение $U(y)$

Рис. 17.35. Неустойчивое течение с винтообразными возмущающими вихрями между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами при их осевом перемещении; $\tilde{u} = 0,37$; $\tilde{w} = 1,58$.

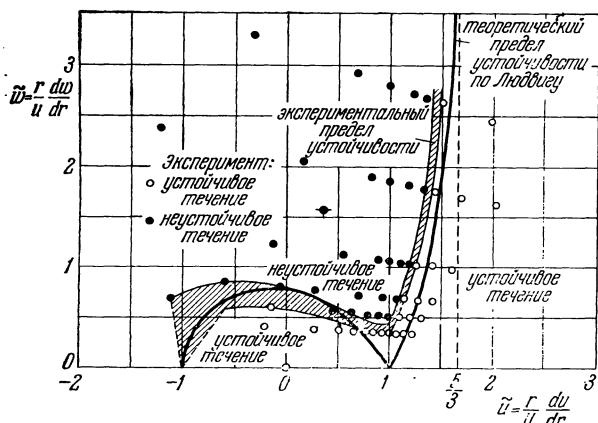


Рис. 17.36. Экспериментальная проверка теории устойчивости для течения между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами, одновременно перемещающимися один относительно другого в осевом направлении. По Людвигу [93]. $Re = (R_a - R_i)^2 \omega_i / v = 650$. Сплошная кривая — предел устойчивости согласно условию (17.23). Заштрихованная область — предел устойчивости согласно экспериментальным данным; \circ — экспериментальные точки с устойчивым течением; \bullet — экспериментальные точки с неустойчивым течением; \bullet — неустойчивое течение для случая, изображенного на рис. 17.35.

в направлении оси x , Гёртлер направил ось y перпендикулярно к стенке (y — расстояние от стенки), а ось z — поперек течения в плоскости стенки (17.32, б) и принял, что трехмерные возмущения определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1(y) \{\cos(\alpha z)\} e^{\beta t}, \\ v' &= v_1(y) \{\cos(\alpha z)\} e^{\beta t}, \\ w' &= w_1(y) \{\sin(\alpha z)\} e^{\beta t}, \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

где β есть вещественная величина, определяющая нарастание или затухание возмущений, а α есть величина, связанная соотношением $\lambda = 2\pi/\alpha$ с длиной λ волны возмущения в направлении, поперечном к основному течению. Следовательно, возмущения имеют вид вихрей (рис. 17.32, б), оси которых параллельны основному течению, т. е. теперь возмущения, в противоположность рассмотренным в главе XVI бегущим плоским волнам, представляют собой стоячие волны (ячейковые вихри). В современной литературе они называются *вихрями Тэйлора — Гёртлера*, так как они принадлежат к такому же типу, как и вихри Тэйлора (рис. 17.32, а).

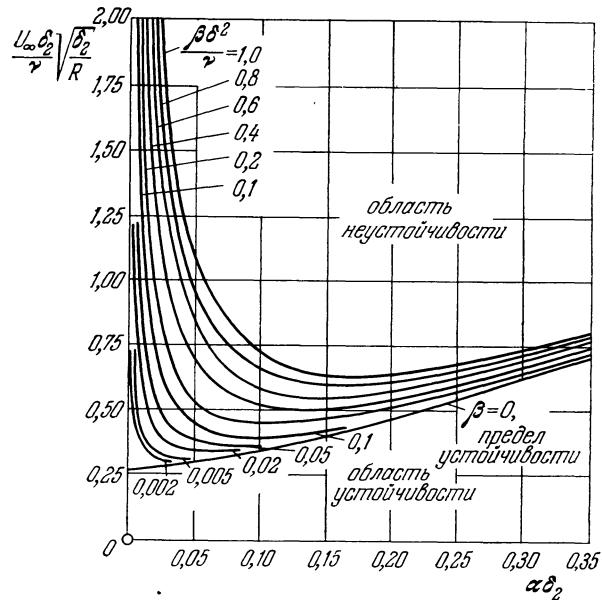


Рис. 17.37. Диаграмма устойчивости для течения на вогнутой стенке. По Гёртлеру [46] и Хеммерлину [52]. δ_2 — толщина потери импульса; β — толщина пограничного слоя; ν — коэффициент нарастания возмущения, определяемого уравнениями (17.24); R — радиус кривизны стенки.

мерных возмущениях, теперь предел устойчивости, т. е. условие, при котором впервые возникают вихри, очень мало зависит от формы первоначального профиля скоростей основного течения. На диаграмме устойчивости (рис. 17.37) предел устойчивости, т. е. граница, начиная с которой возникают первые вихри, определяется кривой $\beta = 0$. Для каждой длины α волны возмущения имеется свой параметр устойчивости

$$\frac{U_{\infty}\delta_2}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_2}{R}},$$

где δ_2 есть толщина потери импульса, а R — радиус кривизны стенки. Как только эта величина, соответствующая числу Тэйлора при течении между двумя коаксиальными цилиндрами [формула (17.20)], становится больше определенного значения, возникает неустойчивость. Первое приближенное решение сравнительно трудной задачи на собственные значения дал Г. Гёртлер [46]. Повторные вычисления, выполненные впоследствии Д. Мексином [95], привели к очень сильному расхождению с результатами Гёртлера. Затем Г. Хеммерлину [52] удалось получить точное решение задачи на собственные значения, которое хорошо подтвердило приближенное решение Гёртлера.

Результаты Хеммерлина еще раз подтверждены тщательными вычислениями А. М. О. Смита [132].

Результаты этой теории могут быть проверены экспериментально на пограничных слоях, возникающих на телах, ограниченных снаружи вогнутыми поверхностями. При этом необходимо иметь в виду следующее. Как и в случае бегущих плоских волн, исследованном Толмином и Шлихтингом (§ 2 главы XVI), после достижения нейтральной точки требуется еще некоторое расстояние, чтобы нарастание возмущений привело к переходу ламинарного течения в турбулентное; поэтому точка перехода должна лежать ниже по течению, чем нейтральная точка, положение которой определяется из рис. 17.37¹). Опыты по переходу ламинарной формы течения в турбулентную в пограничных слоях на искривленных стенках были выполнены Л. М. Клаузером и Ф. Клаузером [11], а впоследствии — Г. В. Липманом [83], [85]. На рис. 17.38 изображены результаты, полученные Липманом как для

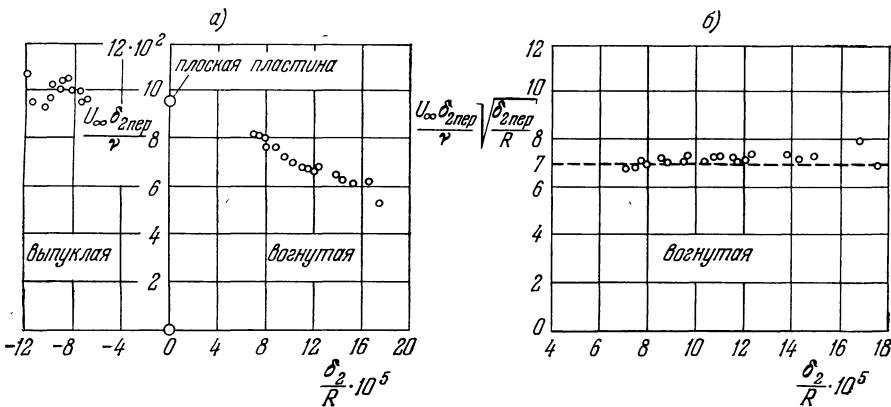


Рис. 17.38. Измерения положения точки перехода ламинарного течения в турбулентное на слабо изогнутых стенках. По Липману [83], [84]. δ_2 — толщина потери импульса; R — радиус кривизны стенки.

а) Зависимость критического числа Рейнольдса $U_\infty \delta_2 \text{пер} / v$ от δ_2 / R ; б) зависимость характеристического числа $(U_\infty \delta_2 \text{пер} / v) \sqrt{\delta_2 \text{пер} / R}$ от δ_2 / R .

вогнутых, так и для выпуклых стенок. Расположение экспериментальных точек на рис. 17.38, а подтверждает теоретическое предсказание о слабом влиянии кривизны выпуклой стенки на критическое число Рейнольдса и о меньшей величине критического числа Рейнольдса для вогнутых¹ стенок по сравнению с этим же числом для выпуклых стенок. На рис. 17.38, б значения характеристического числа

$$\frac{U_\infty \delta_2 \text{пер}}{v} \sqrt{\frac{\delta_2 \text{пер}}{R}},$$

играющего в теории Гёртлера роль критерия устойчивости, отложены как ординаты, а значения $\delta_2 \text{пер} / R$ — как абсциссы. Из расположения получившихся точек видно, что переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при характеристическом числе

$$\frac{U_\infty \delta_2 \text{пер}}{v} \sqrt{\frac{\delta_2 \text{пер}}{R}} > 7. \quad (17.25)$$

¹) Напротив, для вихря Тэйлора между двумя врачающимися коаксиальными цилиндрами следует ожидать, что критические числа Рейнольдса, даваемые теорией и опытом численно должны почти совпадать. В самом деле, при постоянном числе оборотов внутреннего цилиндра нарастание возмущения происходит при постоянном числе Рейнольдса, и коэффициент нарастания достигает своего необходимого значения просто благодаря достаточной продолжительности опыта.

Это значение приблизительно в 20 раз больше предела устойчивости, определяемого диаграммой на рис. 17.37. Согласно Х. Л. Драйдену [26], численное значение характеристического числа зависит также от степени турбулентности и колеблется приблизительно между 6 и 9. Первое значение получается при степени турбулентности внешнего течения, равной $\epsilon = 0,003$, а второе — при значительно меньшей степени турбулентности¹⁾.

Недавно Г. Гётлер заметил, что неустойчивость рассмотренного типа может возникать также вблизи передней критической точки обтекаемого тела. В самом деле, здесь имеется необходимое для такого возникновения условие, а именно линии тока вогнуты в сторону возрастания скорости. Расчеты, выполненные Г. Гётлером [47] и Г. Хеммерлином [53] для двумерного течения около критической точки, хотя и показали наличие неустойчивого возмущения, но не дали никакого критического числа Рейнольдса в качестве предела устойчивости. Опыты Н. А. В. Пирси и Э. Г. Ричардсона [98], [99] подтвердили неустойчивость течения в окрестности критической точки обтекаемого круглого цилиндра. Обзор, посвященный роли трехмерных возмущений в теории устойчивости, опубликован Г. Гётлером [48].

Сказанное в настоящем пункте в сочетании с результатами, приведенными в главе XVI и в § 2 и 3 настоящей главы, позволяет сделать следующий вывод относительно перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничных слоях на обтекаемых телах (например, на крыловых профилях): на плоских стенках и на телах с выпуклой поверхностью основной причиной, вызывающей неустойчивость пограничного слоя, являются бегущие плоские волны Толмина — Шлихтинга; на телах же с вогнутой поверхностью такой причиной являются вихри Тэйлора — Гётлера.

Рис. 17.39. Снимок поверхности диска, вращающегося в неподвижной жидкости. Поверхность диска была покрыта специальной краской. Получившаяся картина позволяет обнаружить область неустойчивости и место перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое. По Грэгори, Стюарту и Уокеру [51]. Направление вращения диска против хода часовой стрелки. Число оборотов в минуту $n=3200$. Радиус диска 15 см (рисунок дан в уменьшенном масштабе). В кольцеобразной области с внутренним радиусом $R_i = 8,7$ см и внешним радиусом $R_o = 10,1$ см образуются стоячие вихри. Внутренний радиус этой области дает предел устойчивости, для которого $Re_i = R_i^2 \omega / v = 1,9 \cdot 10^6$. Внешний радиус определяет место перехода, для которого $Re_o = R_o^2 \omega / v = 2,8 \cdot 10^6$.

3. Устойчивость трехмерных пограничных слоев. Совсем по-иному, чем при двумерном (плоском) основном течении, происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную в трехмерном пограничном слое. Примером такого рода, для которого, между прочим, ламинарный пограничный слой очень хорошо изучен (§ 2 главы V), является течение вблизи диска, вращающегося в покоящейся жидкости. Как в этом случае происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную, отчетливо показывает фотоснимок течения вблизи поверхности вращающегося диска (рис. 17.39), полученный Н. Грэгори, Дж. Стюартом и В. С. Уокером [51]. В кольцеобразной области образуются стоячие вихри в форме логарифмических спиралей. Внутренний радиус этой области определяет возникновение неустойчивости,

¹⁾ В работе А. М. О. Смита, упомянутой выше, определяется также коэффициент нарастания неустойчивого вихря Тэйлора — Гётлера на пути от теоретического предела устойчивости до экспериментально определенной точки перехода. Примечательно, что при этом получилось численное значение ϵ^{10} , т. е. величина такого же порядка, как и численное значение ϵ^9 , указанное в главе XVI для волны Толмина — Шлихтинга.

а внешний — переход ламинарной формы течения в турбулентную. Для внутреннего радиуса число Рейнольдса равно $Re_i = R_i^2 \omega / v = 1,9 \cdot 10^5$, а для внешнего радиуса $Re_a = 2,8 \cdot 10^6$. Дж. Стюарт выполнил также теоретическое исследование такого течения, взяв при этом в качестве трехмерных возмущений такие периодические движения, которые содержат в себе как частные случаи, во-первых, бегущие плоские волны Толмина — Шлихтинга и, во-вторых, стоячие трехмерные вихри Тэйлора — Гёртлера. Полученные результаты качественно совпадают с экспериментальной картиной, представленной на рис. 17.39.

§ 7. Влияние шероховатости стенки на переход ламинарного течения в турбулентное

1. Предварительные замечания. В этом параграфе рассматривается проблема зависимости перехода ламинарной формы течения в турбулентную от шероховатости стенки. Хотя эта проблема имеет важное практическое значение, она до настоящего времени почти недоступна для теоретического исследования¹⁾. Для авиационной техники эта проблема приобрела особый интерес после того, как появились ламинаризованные профили. Имеющиеся весьма обширные экспериментальные материалы относятся к цилиндрической (двумерной) шероховатости, к точечной (трехмерной) изолированной шероховатости и к шероховатости, распределенной по площади, а также к влиянию градиента давления, степени турбулентности и числа Маха при наличии шероховатости.

В общем случае шероховатость стенки способствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную в том смысле, что при прочих равных условиях переход на шероховатой стенке наступает при меньшем числе Рейнольдса, чем на гладкой стенке. Это легко понять на основании теории устойчивости. В самом деле, шероховатость вызывает в ламинарном течении дополнительные возмущения, которые присоединяются к возмущениям, уже имеющимся вследствие какой-то степени турбулентности внешнего течения. Естественно, что эти суммарные, в целом более сильные возмущения требуют меньшего нарастания, чтобы привести к переходу ламинарного течения в турбулентное. При очень небольшой высоте k элементов шероховатости следует ожидать, что возмущения, вызываемые шероховатостью, лежат ниже уровня возмущений, определяемых степенью турбулентности внешнего течения. В этом случае шероховатость не оказывает никакого влияния на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Это предположение подтверждается опытом. С другой стороны, при очень сильной степени шероховатости переход ламинарного течения в турбулентное возникает непосредственно около элементов шероховатости, как, например, в случае проволочного кольца на шаре (рис. 2.21). См. в связи с этим также работу И. Штюпера [142].

В старых работах, посвященных исследованию влияния шероховатости и выполненных Л. Шиллером [124], И. Тани, Р. Хамой и С. Митуси [144], С. Голдстейном [41], а также А. Фэйджем и Дж. Г. Престоном [39], либо предполагалось, что при умеренной высоте k элемента шероховатости положение точки перехода вообще не зависит от шероховатости, либо считалось, что

¹⁾ Первую попытку теоретического объяснения влияния шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную сделал в своем докладе на XI Международном конгрессе механиков (Мюнхен, 1964) П. С. Клебанов. Для изолированной шероховатости цилиндрической формы П. С. Клебанов, на основании измерений профилей скоростей в ламинарном пограничном слое позади элементов шероховатости, сумел показать, что шероховатость повышает формпараметр $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ и тем самым сильно понижает критическое число Рейнольдса (см. рис. 17.22).

после превышения определенной высоты элемента шероховатости переход происходит непосредственно около элементов шероховатости. Однако позднее А. Фэйдж показал, что с увеличением высоты элемента шероховатости точка перехода отнюдь не пересекает мгновенно к элементу шероховатости, а перемещается вверх по течению непрерывно.

Для практики имеют важное значение следующие три вопроса:

1) До какой высоты элементов шероховатости последняя не оказывает никакого влияния на переход ламинарной формы течения в турбулентную? (Критическая высота шероховатости в ламинарном пограничном слое.)

2) Начиная с какой наименьшей высоты элементов шероховатости переход возникает непосредственно около элементов шероховатости?

3) Как можно определить положение точки перехода при шероховатости, промежуточной между двумя предыдущими случаями?

2. Изолированная шероховатость цилиндрической формы. Под цилиндрической (или двумерной) изолированной шероховатостью понимается шероховатость, создаваемая проволокой или другим цилиндрическим телом, укрепленным на обтекаемой стенке поперек направления течения. Для критической высоты такой шероховатости, т. е. для наибольшей высоты шероховатости, еще не вызывающей перехода ламинарной формы течения в турбулентную, С. Голдстейн [41] получил на основе старых измерений соотношение

$$\frac{u_k^* k_{kp}}{v} = l, \quad (17.26)$$

где

$$u_k^* = \sqrt{\frac{\tau_{0k}}{\rho}}$$

означает динамическую скорость в том месте, где расположен элемент шероховатости, а τ_{0k} есть касательное напряжение на стенке в ламинарном пограничном слое в том же месте. Для наименьшей высоты шероховатости, при которой переход ламинарной формы течения в турбулентную совершается непосредственно около элемента шероховатости, Тани и его сотрудники [144] нашли соотношение

$$\frac{u_k^* k_{kp}}{v} = 15,$$

а Фэйдж и Престон [39] — соотношение

$$\frac{u_k^* k_{kp}}{v} = 20. \quad (17.27)$$

Указанные численные значения относятся к проволокам с круглым поперечным сечением. Для более плоских, куполообразных элементов шероховатости, а также для углублений эти значения значительно выше, а для остроконечных элементов шероховатости, наоборот, меньше.

Можно получить эмпирический закон, дающий зависимость положения точки перехода как от высоты k , так и от положения x_k элемента шероховатости, если, следуя Х. Л. Драйдену [27], воспользоваться соображениями, основанными на рассмотрении размерностей. Драйден обнаружил следующее. Если для несжимаемого течения отложить значения числа Рейнольдса $Re_{\text{пер}} = U \delta_{\text{пер}} / v$, составленного для толщины вытеснения $\delta_{\text{пер}}$ пограничного слоя в точке перехода, как ординаты, а значения k / δ_{1k} , где δ_{1k} означает толщину вытеснения на месте элемента шероховатости, — как абсциссы (рис. 17.40), то все экспериментальные точки, для которых точка перехода не лежит непосредственно около элемента шероховатости, т. е. точки, для которых $x_{\text{пер}} > x_k$, очень хорошо ложатся на одну кривую. На оси ординат

этого рисунка отмечены в качестве второго масштаба также значения $Re_x \text{пер} = Ux_{\text{пер}}/\nu^1$). При возрастании k точки перехода с абсциссой $x_{\text{пер}}$ перемещаются ближе к элементу шероховатости, следовательно, при возрастании k кривые на рис. 17.40 пробегаются слева направо. Как только точка перехода приближается вплотную к элементу шероховатости, т. е. значение $x_{\text{пер}}$ становится равным x_k , экспериментальные точки начинают отклоняться от указанной выше кривой кверху и располагаются вдоль семейства прямых

$$\frac{U\delta_1 \text{пер}}{\nu} = 3,0 \frac{k}{\delta_{1k}} \frac{x_k}{k}, \quad (17.28)$$

зависящего от параметра x_k/k . Эти прямые также изображены на рис. 17.40. Согласно новым измерениям японских ученых [146], правая, сходная с гиперболой ветвь трех кривых, изображенных на рис. 17.40 сплошными линиями,

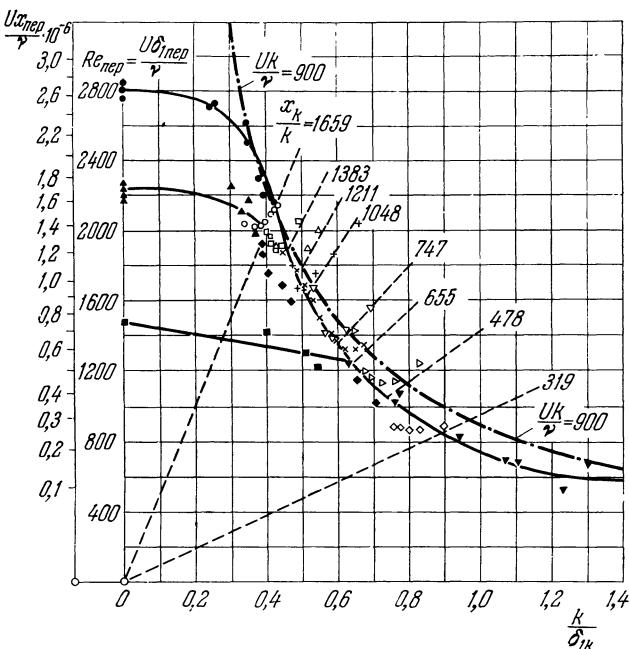


Рис. 17.40. Зависимость критического числа Рейнольдса в ламинарном пограничном слое от отношения высоты k изолированной двумерной шероховатости к толщине вытеснения δ_{1k} пограничного слоя в том месте, где расположена элемент шероховатости. Течение несжимаемое. Измерения удовлетворительно интерполируются уравнением (17.28); $(Re_{\text{пер}})_0 = U\delta_1 \text{пер}/\nu$ и $(Re_x \text{пер})_0 = Ux_{\text{пер}}/\nu$ — критические числа Рейнольдса для гладкой пластины. Штриховые прямые соответствуют значениям числа Рейнольдса, вычисленного по формуле (17.28). \circ , \square , \diamond , \triangle , ∇ , \triangleright , \times , $+$: $x_{\text{пер}} \geq x_k$; $(Re_{\text{пер}})_0 = 1,7 \cdot 10^6$, $\rho = \text{const}$, по [40]. \blacktriangle : $(Re_{\text{пер}})_0 = 1,7 \cdot 10^6$, $\rho = \text{const}$, по И. Тани и др. [146]. \bullet : $(Re_x \text{пер})_0 = 2,7 \cdot 10^6$, $\rho = \text{const}$, по И. Тани и др. [146]. \blacklozenge : $(Re_x \text{пер})_0 = 2,7 \cdot 10^6$, падение давления $(p_1 - p_{\text{пер}})/(2U_1^2) = 0,2 \div 0,8$ по [146]. \blacktriangledown : $p = \text{const}$, по Шубаэру [126]. \blacksquare : $(Re_x \text{пер})_0 = 6 \cdot 10^6$, $\rho = \text{const}$, по [146]. Зачеркнутые значения относятся к измерениям, для которых $x_{\text{пер}} > x_k$.

имеет универсальный характер как для течений с различными значениями слабого градиента давления, так и для течений с различной степенью турбулентности. Повышенная турбулентность обусловливает только более ранний

1) Между обоими числами Рейнольдса, отложенными на оси ординат, имеет место соотношение

$$Re_{\text{пер}} = \frac{U\delta_1 \text{пер}}{\nu} = 1,72 \sqrt{\frac{Ux_{\text{пер}}}{\nu}} = 1,72 \sqrt{Re_x \text{пер}}.$$

переход правой, универсальной ветви в приближенно горизонтальную ветвь, направленную влево и заканчивающуюся на оси ординат при зависящем от степени турбулентности числе Рейнольдса для точки перехода на гладкой пластине, т. е. при числе Рейнольдса $(Re_{x\text{пер}})_{h=0} = Re_{x\text{перо}}$. Теоретические и экспериментальные исследования К. Кремера [70] привели к следующему результату: проволока, укрепленная на поверхности обтекаемого тела с целью турбулизации пограничного слоя, полностью проявляет свое действие при любом положении, если

$$\frac{Uk}{v} \geqslant 900. \quad (17.29)$$

И эта кривая построена на рис. 17.40. Она хорошо совпадает с результатами измерений. Однако даже если турбулизующая проволока полностью проявляет свое действие, все же между положением точки перехода $x_{\text{пер}}$ и положением проволоки x_k остается некоторое минимальное расстояние. По К. Кремеру оно определяется из соотношения

$$\frac{U(x_{\text{пер}} - x_k)}{v} = 2 \cdot 10^4. \quad (17.30)$$

Графически это соотношение представлено на рис. 17.41.

Для учета степени турбулентности Х. Л. Драйден [27], [28] предложил откладывать значения отношения критических чисел Рейнольдса для шероховатой и гладкой стенок, т. е. отношения

$$\frac{(Re_{x\text{пер}})_{\text{шер}}}{(Re_{x\text{пер}})_{\text{глад}}},$$

в виде ординат, а значения отношения k/δ_{1k} — в виде абсцисс. В такой системе координат результаты всех измерений, полученных при различных степенях турбулентности, укладываются на одну кривую (рис. 17.42). Это означает, что отношение

$$\frac{(Re_{x\text{пер}})_{\text{шер}}}{(Re_{x\text{пер}})_{\text{глад}}}$$

является функцией только отношения k/δ_{1k} .

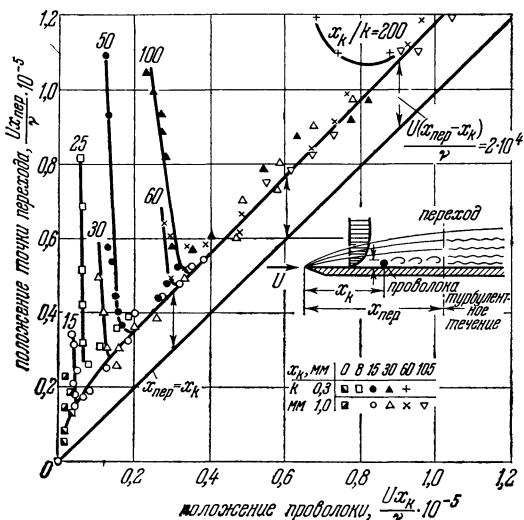


Рис. 17.41. Расстояние точки перехода $x_{\text{пер}}$ от турбулизующей проволоки x_k при ее полном турбулизирующем эффекте [уравнение (17.30)]. По К. Кремеру [70].

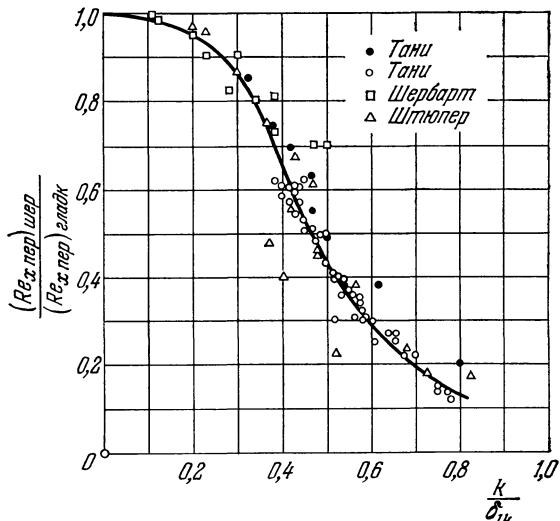


Рис. 17.42. Зависимость отношения критического числа Рейнольдса для точки перехода на продольно обтекаемой пластины с изолированной двумерной шероховатостью к критическому числу Рейнольдса на такой же гладкой пластине от отношения k/δ_{1k} , где k — высота элемента шероховатости, а δ_{1k} — толщина вытеснения пограничного слоя в том месте, где расположен элемент шероховатости. $Re_{x\text{пер}} = Ux_{\text{пер}}/v$. Кривая — по Драйдену [27], измерения — по Тани [14].

пенях турбулентности, укладываются на одну кривую (рис. 17.42). Это означает, что отношение

$$\frac{(Re_{x\text{пер}})_{\text{шер}}}{(Re_{x\text{пер}})_{\text{глад}}}$$

Рис. 17.40, 17.41 и 17.42 дают ответ на три вопроса, поставленные на стр. 488, для случая изолированной шероховатости.

При сверхзвуковых течениях влияние шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную значительно меньше, чем в несжимаемых течениях. Это ясно видно из рис. 17.43, на котором изображены результаты измерений для продольно обтекаемой плоской пластины (измерения, относящиеся к сверхзвуковой области, выполнены П. Ф. Бриничем [8]). Эти результаты, полученные для элемента шероховатости в виде круглого цилиндра при числе Маха $Ma = 3,1$, дают в системе координат, принятой на рис. 17.43, семейство кривых, лежащих в заштрихованной области, однако при этом сильно зависящих от положения x_k элемента шероховатости. Для сравнения на рис. 17.43 перенесена кривая с рис. 17.42, полученная для несжимаемых течений. Сравнение показывает, что при высоких числах Маха пограничный слой может сохраняться ламинарным при значительно большей шероховатости, чем в несжимаемых течениях. При сверхзвуковых течениях критическая высота шероховатости приблизительно от трех до семи раз выше, чем при несжимаемых течениях. Опыты Р. Г. Коркеги [69], выполненные при еще более высоком числе Маха $Ma = 5,8$, показали, что при такой скорости шероховатость в виде проволоки, преграждающей пограничный слой, вообще не вызывает турбулентности. Наоборот, вдувание воздуха в пограничный слой является единственным средством для ускорения перехода ламинарного течения в турбулентное и при сверхзвуковых скоростях.

3. Шероховатость, распределенная по площади. Измерения перехода ламинарной формы течения в турбулентную, вызываемого шероховатостью, распределенной по площади, привели пока лишь к немногим результатам [13]. В работе Э. Г. Файндта [40] для песочной шероховатости исследуется зависимость перехода ламинарного несжимаемого течения в турбулентное от размера k_s зерен песка и от градиента давления. Измерения были выполнены в суживающемся и расширяющемся каналах с поперечным сечением в виде круглого кольца. Шероховатость была создана только на стенке внутреннего цилиндра, внешняя же стенка была оставлена гладкой и своим наклоном вызывала градиент давления. Найденная из этих измерений связь между критическим числом Рейнольдса $U_{1x\text{пер}}/\nu$ составленным для положения точки перехода, и числом Рейнольдса $U_1 k_s/\nu$, составленным для размера песчаного зерна, изображена на рис. 17.44 для различных градиентов давления. При гладких стенках для различных градиентов давления получились значения $U_{1x\text{пер}}/\nu$ от $2 \cdot 10^5$ до $8 \cdot 10^5$. Столь широкий диапазон изменения числа Рейнольдса для точки перехода вполне понятен, так как градиент давления оказывает сильное влияние на устойчивость и соответственно на неустойчивость пограничного слоя. При возрастании величины $U_1 k_s/\nu$ критическое число Рейнольдса $U_{1x\text{пер}}/\nu$ сначала остается таким же, как на гладкой стенке; это означает, что до определенного значения величины $U_1 k_s/\nu$ шероховатость не влияет на переход ламинарной формы течения

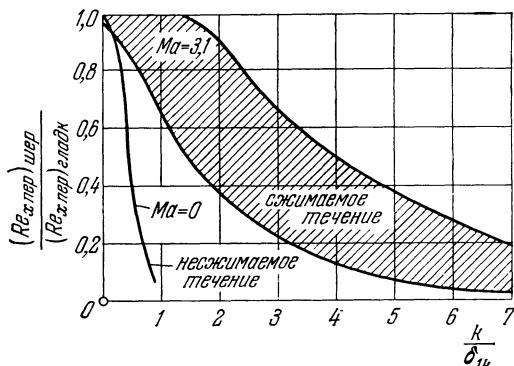


Рис. 17.43. Влияние двумерной изолированной шероховатости на критическое число Рейнольдса для продольно обтекаемой плоской пластины при сжимаемом течении. По измерениям П. Ф. Бринича [8]. k — высота шероховатости; δ_{1k} — толщина вытеснения пограничного слоя в том месте, где расположен элемент шероховатости.

в турбулентную. Только после того, как величина $U_1 k_s / v$ становится больше значения

$$\frac{U_1 k_s}{v} = 120, \quad (17.31)$$

критическое число Рейнольдса резко уменьшается. Следовательно, значение (17.31) определяет критическую высоту шероховатости, т. е. дает ответ на первый вопрос, поставленный на стр. 488. При значениях числа $U_1 k_s / v$, более высоких чем 120, размер зерна шероховатости влияет на критическое число Рейнольдса столь же сильно, как и градиент давления.

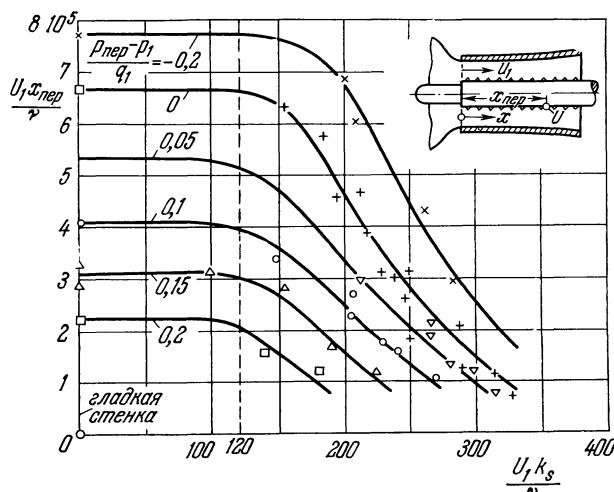


Рис. 17.44. Влияние градиента давления и песочной шероховатости обтекаемой поверхности на положение точки перехода в несжимаемом течении. По измерениям Файндта [40]. При $U_1 k_s / v \leq 120$ (k — высота песчаного зерна) песочная шероховатость не оказывает влияния на переход ламинарного течения в турбулентное.

лили ни обнаружить неустойчивость, ни [доказать устойчивость течения при всех числах Рейнольдса. Позднее И. Преч [105] показал, что исследование устойчивости осесимметричного параболического распределения скоростей можно свести к исследованию плоского течения Кюэтта. Так как течение Кюэтта устойчиво при всех числах Рейнольдса, то таким должно быть и осесимметричное течение в трубе с параболическим распределением скоростей. К тому же результату пришли Г. Коркос и Дж. Р. Селлерс [12] и К. Л. Пекерис [97]. Затем это было еще раз подтверждено Т. Зекслем и К. Шпильбергом [128]. Полученный результат является неожиданным по двум причинам. Во-первых, в действительности при течении в круглой трубе происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную. Первые опыты по такому переходу были выполнены уже О. Рейнольдсом. Во-вторых, трудно понять, почему параболический профиль скоростей в канале должен быть неустойчив относительно малых возмущений (§ 3 главы XVI), а такой же профиль в трубе — устойчив. Поэтому были выполнены различные теоретические и экспериментальные исследования, имевшие целью внести ясность в этот вопрос. В этой связи упомянем, что Р. И. Лайте [82] при наблюдении течения в трубе не сумел обнаружить никакого нарастания осесимметричных возмущений вплоть до числа Рейнольдса $Re = 13\,000$ (составленного для диаметра трубы). Т. Зексль и К. Шпильберг [128] сумели показать, что для осесимметричных течений теорема Сквайра (стр. 426) неприменима и поэтому осесимметричные возмущения не более опасны, чем трехмерные возмущения. Однако теоретических исследований о течении Хагена — Пуазейля под влиянием таких трехмерных возмущений до настоящего времени не имеется, поэтому необходимо выяснить их влияние путем эксперимента.

§ 8. Осесимметричные течения

Важнейшим случаем осесимметричного течения является течение в прямой круглой трубе с параболическим распределением скоростей (течение Хагена — Пуазейля). Такое течение с точки зрения его устойчивости уже давно было исследовано Т. Зекслем [127]. Однако выполненные расчеты не позво-

И. Ротта выполнил измерения коэффициента перемежаемости в трубе, при входе в которую имели место большие возмущения (об этих измерениях подробно было рассказано в § 1 главы XVI). Аналогичные исследования опубликовал Э. Р. Линдгрен [87]. Делая возмущения видимыми посредством освещения поляризованным светом и путем введения в поток слабого раствора бентонита, он сумел показать, что если число Рейнольдса мало, то затухают даже сильные возмущения, имеющие место при входе в трубу. При числах Рейнольдса, больших $Re = 2600$, начинается переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход характеризуется нарастанием возмущений и появлением «турбулентных пятен», возникающих в прилежащем к стенке слое жидкости.

Эти особенности ламинарного течения в трубе дают основание вновь вернуться к связи между теорией малых возмущений и переходом ламинарного течения в турбулентное. В частности, возникает вопрос, всегда ли переход ламинарного течения в турбулентное вызывается нарастанием малых возмущений. Окончательный ответ на этот вопрос нельзя дать до тех пор, пока в нашем распоряжении не будут дальнейшие исследования поведения малых трехмерных возмущений. В этой связи еще раз напомним, что для плоского течения Хагена — Пуазейля предел устойчивости $Re_{kp} = 5314$ (стр. 439) значительно превышает число Рейнольдса, при котором в канале происходит переход ламинарного течения в турбулентное. Этот факт несовместим с теорией, согласно которой предел устойчивости должен лежать всегда при меньшем числе Рейнольдса, чем переход ламинарного течения в турбулентное. Для устранения этого расхождения между теорией и экспериментом необходимы, очевидно, дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования.

Устойчивость ламинарного пограничного слоя на теле вращения, обтекаемом в осевом направлении, исследована И. Пречем [104]. Выяснилось, что если отношение толщины пограничного слоя к радиусу кривизны стенки меньше единицы, то для пограничного слоя на теле вращения получается такое же дифференциальное уравнение возмущающего движения, как и для плоского случая. Следовательно, все результаты, полученные для плоских пограничных слоев, могут быть перенесены на обтекание тел вращения.

Литература к главе XVII

- Abbott J. H., von Doenhoff A. E., Stivers L. S., Summary of airfoil data. NACA Rep. 824 (1954).
- ARC RM 2499, Transition and drag measurements on the Boulton Paul sample of laminar flow wing construction. Часть I: J. H. Preston, N. Gregory; часть II: K. W. Kimbeg, часть III: Joint Discussion.
- Benjamin T. B., Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. J. Fluid Mech. 9, 513—532 (1961).
- Bernard H., Ann. Chimie Phys. 23, 61 (1901).
- Bloom M., The effect of surface cooling on laminar boundary layer stability. JAS 18, 635—636 (1951).
- Bloom M., Further comments on «The effect of surface cooling on laminar boundary layer stability». JAS 19, 359 (1952).
- Braslow A. L., Visconti F., Investigation of boundary layer Reynolds-number for transition on an NACA 65(215)-114 airfoil in the Langley two-dimensional low-turbulence pressure tunnel. NACA TN 1704 (1948).
- Briinch P. F., Boundary layer transition at Mach 3,12 with and without single roughness element. NACA TN 3267 (1954).
- Bussmann K., Münn H., Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 36—39 (1942).
- Bussmann K., Ulrich A., Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes. Препринт для Jb. dt. Luftfahrtforschung 1943, опубликован в Techn. Berichte 10, вып. 9 (1943).
- Clauser L. M., Clauser F., The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer. NACA TN 613 (1937).

12. Corcos G. M., Sellars J. R., On the stability of fully developed flow in a pipe. *J. Fluid Mech.* 5, 97—112 (1959).
13. Czarnocki K. R., Robinson R. B., Hilton J. H. jr., Investigation of distributed surface roughness on a body of revolution at a Mach-number of 1,61. *NACA TN 3230* (1954).
14. Czarnocki K. R., Sinclair A. R., An investigation of the effects of heat transfer on boundary-layer transition on a parabolic body of revolution (NACA RM-10) at a Mach-number of 1,61. *NACA Rep. 1240* (1955).
15. Czarnocki K. R., Sevier J. R., Investigation of effects of roughness, surface cooling and shock impingement on boundary layer transition on a two-dimensional wing. *NASA TN D-417*, 1—41 (1960).
16. Demetriaes A., An experiment on the stability of hypersonic laminar boundary layers. *J. Fluid Mech.* 7, 385—396 (1960).
17. von Dedenhoff A. E., Investigation of the boundary layer about a symmetrical airfoil in a windtunnel of low turbulence. *NACA Wartime Report L-507* (1940).
18. Doetsch H., Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_a -Werte. *Jb. dt. Luftfahrtforschung I*, 54—57 (1940).
19. van Driest E. R., Cooling required to stabilize the laminar boundary layer on a flat plate. *JAS 18*, 698—699 (1951).
20. van Driest E. R., Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. *JAS 19*, 801—812 (1952).
21. van Driest E. R., Boison J. C., Boundary layer stabilization by surface cooling in supersonic flow. *JAS 22*, 70 (1955).
22. van Driest E. R., Boison J. C., Experiments on boundary layer transition at supersonic speeds. *JAS 24*, 885—899 (1957).
23. van Driest E. R., Cauley M. C., Boundary layer transition on a 10 degree cone at Mach-number 2,81 as affected by extreme cooling. *JAS 24*, 780—781 (1957).
24. van Driest E. R., Blumer C. B., Boundary layer transition at supersonic speeds—Three-dimensional roughness effects (spheres). *JASS 29*, 909—916 (1962).
25. van Driest E. R., Blumer C. B., Boundary layer transition: Freestream turbulence and pressure gradient effects. *AIAA J. 1*, 1303—1306 (1963).
26. Dryden H. L., Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. *Advances in Appl. Mech.* 1 (под ред. R. v. Mises'a и Th. v. Kármán'a), 1—40, New York (1948). [Имеется русский перевод в сб. «Проблемы механики», вып. I, ИЛ, Москва 1955.]
27. Dryden H. L., Review of published data on the effect of roughness on transition from laminar to turbulent flow. *JAS 20*, 477—482 (1953).
28. Dryden H. L., Effects of roughness and suction on transition from laminar to turbulent flow. *Publications Scientifiques et Techniques de Ministère de l'Air Paris (SDJT)* 49—60 (1954).
29. Dryden H. L., Transition from laminar to turbulent flow at subsonic and supersonic speeds. *Proc Conference on High-Speed Aeronautics. Polytechnic Institute of Brooklyn, New York 1955*, 41—74.
30. Dryden H. L., Recent investigations on the problem of transition. *ZFW 4*, 89—95 (1956).
31. Dunn D. W., Lin C. C., On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *JAS 22*, 455—477 (1955); см. также *JAS 20*, 577 (1953) и *19*, 491 (1952).
32. Dunning R. W., Ullmann E. F., Effects of sweep and angle of attack on boundary layer transition on wings at Mach-number 4,04. *NACA TN 3473* (1955).
33. Eber G. R., Recent investigation of temperature recovery and heat transmission on cones and cylinders in axial flow at the NOL Aeroballistics Wind Tunnel. *JAS 19*, 1—6 и 14 (1952).
34. Eckert E. R. G., Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Berkeley, Cal., publ. by American Soc. Mech. Eng. 181—190 (1949).
35. Eckert E. R. G., Interferometric studies on the stability and transition to turbulence of a free-convection-boundary layer. *Proc. of the General Discussion on Heat Transfer*, сент. 1951, publ. by Inst. Mech. Eng. London.
36. Erte H., Thermodynamische Begründung des Richardsonschen Turbulenzkriteriums. *Meteorol. Z.* 56, 109 (1939).
37. Evvard J. C., Tucker M., Burgess W. C., Transition point fluctuations in supersonic flow. *JAS 21*, 731—738 (1954).
38. Evvard J. C., Tucker M., Burgess W. C., Statistical study of transition point fluctuations in supersonic flow. *NACA TN 3100* (1954).
39. Fage A., Preston J. H., On transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer. *Proc. Roy. Soc. A* 178, 201—227 (1941).
40. Feindt E. G., Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauhigkeit und der Druckverteilung. Диссертация, Braunschweig 1956; Jb. 1956 der Schiffbautechn. Gesellschaft, 50, 180—203 (1957).
41. Goldstein S., A note on roughness. *ARC RM 1763* (1936).

42. Goldstein S., The stability of viscous fluids between rotating cylinders. Proc. Cambridge Phil. Soc. 33, 41—61 (1937).
43. Goldstein S., On the stability of superposed streams of fluids of different densities. Proc. Roy. Soc. A 132, 523 (1938).
44. Goldstein S., Low-drag and suction airfoils (11th Wright Brothers Lecture) JAS 15, 189—215 (1948).
45. Görtler H., Über den Einfluss der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. ZAMM 20, 138—147 (1940).
46. Görtler H., Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Neue Folge 2, № 1 (1940); см. также: ZAMM 21, 250—252 (1941).
47. Görtler H., Dreidimensionale Instabilität der ebenen Staupunktströmung gegenüber wirbelartigen Störungen. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 303—314.
48. Görtler H., Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten. ZAMM 35, 326—364 (1955).
49. Grancille P. S., The calculation of viscous drag of bodies of revolution. Navy Department. The David Taylor Model Basin. Report № 849 (1953).
50. Gregory N., Walker S., The effect on transition of isolated surface excrescences in the boundary layer. ARC RM 13, 436 (1950).
51. Gregory N., Stuart J. T., Walker W. S., On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 248, 155—199 (1955).
52. Hämerlin G., Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Диссертация, Freiburg 1954; J. Rat Mech. Anal. 4, 279—321; см. также ZAMM 35, 366—367 (1955).
53. Hämerlin G., Zur Instabilitätstheorie der ebenen Staupunktströmung. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 315—327.
54. Harrin E. N., A flight investigation of laminar and turbulent boundary layers passing through shock waves at full-scale Reynolds-numbers. NACA TN 3056 (1953).
55. Hausmann W., Flugwehr und Technik. Zürich 4, 179 (1942).
56. Head M. R., The boundary layer with distributed suction. ARC RM 2783 (1955).
57. Hertel H., Struktur, Form, Bewegung. Buchreihe: Biologie und Technik. Krausskopf-Verlag, Mainz 1963, 190—195.
58. Higgins R. W., Pappas C. C., An experimental investigation of the effect of surface heating on boundary layer transition on a flat plate in supersonic flow. NACA TN 2351 (1951).
59. Hilton J. H., Czarnecki K. R., An exploratory investigation of skin friction and transition on three bodies of revolution at a Mach-number of 1,61. NACA TN 3193 (1954).
60. Holstein H., Messungen zur Laminarhaltung der Reibungsschicht. Bericht S 10 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 17 (1940).
61. van Ingen J. L., A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region. Technische Hochschule, Luftfahrtabteilung, Delft, Report V. T., вып. 74 (1956).
62. Jack J. R., Diacanis N. S., Variation of boundary-layer transition with heat transfer on two bodies of revolution at a Mach-number of 3,12. NACA TN 3562 (1955).
63. Jacobs E. N., Sherman A., Airfoil section characteristics as affected by variations of the Reynolds-number. NACA TR 586 (1937).
64. Jeffreys H., The instability of a layer of fluid heated below. Phil. Mag. 2, 833—844 (1926), см. также Proc. Roy. Soc. A 118, 195—208 (1928).
65. Jones B. M., Flight experiments on the boundary layer (Wright Brothers Lecture), JAS 5, 81—101 (1938); см. также Aircraft Eng. 10, 135—141 (1938).
- 65a. Jones B. M., Head M. R., The reduction of drag by distributed suction. Proc. Third Anglo-American Aeron. Conference, Brighton 199—230 (1951).
66. Kay J. M., Boundary layer flow along a flat plate with uniform suction. ARC RM 2628 (1948).
67. Kirchgässner K., Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. ZAMP 12, 14—30 (1961).
68. Kirchgässner K., Einige Beispiele zur Stabilitätstheorie von Strömungen an konkaven und erwärmteten Wänden. Ing.-Arch. 31, 115—124 (1962).
69. Korkegi R. H., Transition studies and skin-friction measurements on a insulated flat plate at a Mach-number of 5,8. JAS 23, 97—102 (1956).
70. Kraemer K., Über die Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschichtumschlag. ZFW 9, 20—27 (1961).
71. Kramer M. O., Boundary layer stabilization by distributed damping. JAS 27, 69 (1960); см. также JAS 24, 459—460 (1957).

72. Kramer M. O., Boundary layer stabilization by distributed damping. *J. Amer. Soc. Naval Eng.* **72**, 25—33 (1960).
73. Krüger H., Über den Einfluss der Absaugung auf die Lage der Umschlagstelle an Tragflügelprofilen. *Ing.-Arch.* **19**, 384—387 (1951).
74. Kuchemann D., Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht. *ZAMM* **18**, 207—222 (1938); см. также замечание по поводу этой статьи, сделанное H. Görtler'ом, *ZAMM* **23**, 179—183 (1943).
75. Kuethe A. M., On the character of the instability of the laminar boundary layer near the nose of a blunt body. *JAS* **25**, 338—339 (1958).
76. Landahl M. T., On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. *J. Fluid Mech.* **13**, 609—632 (1962).
77. Lange A. H., Lee R. E., Note on boundary layer transition in supersonic flow. *JAS* **21**, 1, 58 (1954) и **22**, 282 (1955).
78. Lauter J., Vrebalovich Th., Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on a flat plate. *J. Fluid Mech.* **9**, 257—299 (1960).
79. Lees L., Lin C. C., Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *NACA TN* 1115 (1946).
80. Lees L., The stability of the laminar boundary layer in a compressible flow. *NACA TN* 1360 (1947) и *NACA Rep.* 876 (1947).
81. Lees L., Comments on the «Effect of surface cooling on laminar boundary-layer stability». *JAS* **18**, 844 (1951).
82. Leite R. J., An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **5**, 81—96 (1959).
83. Liepmann H. W., Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. *NACA Wartime Report W-107* (1943).
84. Liepmann H. W., Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. *ARC RM* 7302 (1943).
85. Liepmann H. W., Investigation of boundary layer transition on concave walls. *NACA Wartime Report W-87* (1945).
86. Liepmann H. W., Filia G. H., Investigations of effect of surface temperature and single roughness elements on boundary layer transition. *NACA TN* 1196 (1947) и *NACA Rep.* 890 (1947).
87. Lindgren E. R., Liquid flow in tubes I, II and III. *Archiv für Fysik* **15**, 97 (1959); **15**, 503 (1959); **15**, 103 (1959).
88. Linke W., Über den Strömungswiderstand einer beheizten ebenen Platte. *Luftraumforschung* **19**, 157—160 (1942).
89. Lockenberg B. H., Transition in a separated laminar boundary layer. *JASS* **27**, 92—96 (1960).
90. Low G. M., Cooling requirement for stability of laminar boundary layer with small pressure gradient at supersonic speeds. *NACA TN* 3103 (1954); см. также *JAS* **22**, 329—336 (1955). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1956, № 2 (36).]
91. Ludwig H., Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum. *ZFW* **8**, 135—140 (1960).
92. Ludwig H., Ergänzung zu der Arbeit «Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum». *ZFW* **9**, 359—361 (1961).
93. Ludwig H., Experimentelle Nachprüfung der Stabilitätstheorien für reibungsfreie Strömungen mit schraubenlinienförmigen Stromlinien. *ZFW* **12**, 304—309 (1964).
94. Mallock A., Experiments of fluid viscosity. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **187**, 41—56 (1896).
95. Meekyn D., Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. *Proc. Roy. Soc. A* **203**, 253—265 (1950).
96. Michel R., Etude de la transition sur les profiles d'aile—établissement d'un critère de détermination du point de transition et calcul de la traînée de profil en incompressible. *ONERA Rapport 1/1578 A* (1951).
97. Peckers C. L., Stability of the laminar flow through a straight pipe in infinitesimal disturbances which are symmetrical about the axis of the pipe. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington* **34**, 285 (1948).
98. Piercy N. A. V., Richardson E. G., The variation of velocity amplitude close to the surface of a cylinder moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.* **6**, 970—976 (1928).
99. Piercy N. A. V., Richardson E. G., The turbulence in front of a body moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.* **9**, 1038—1041 (1930).
100. Potter J. L., Whitfield J. D., Effects of slight nose bluntness and roughness on boundary layer transition in supersonic flows. *J. Fluid Mech.* **12**, 501—535 (1962).
101. Prandtl L., Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. Vorträge aus dem Geb. d. Aerodyn. u. verwandter Gebiete, Aachen 1929, 1—10; Berlin 1930; см. также *Gesammelte Abhdlg.* II, 778—785.

102. Prandtl L., Reichardt H., Einfluss von Wärmeschichtung auf die Eigenschaften einer turbulenten Strömung. Deutsche Forschung, вып. 21, 110—121 (1934); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 846—854.
103. Prandtl L., Bericht über neuere Untersuchungen über das Verhalten der laminaren Reibungsschicht, insbesondere den laminar-turbulenten Umschlag. Mitt. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung 2, 141 (1942).
104. Pretsch J., Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. Luftfahrtforschung 18, 341—344 (1941).
105. Pretsch J., Über die Stabilität der Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. ZAMM 21, 204—217 (1941).
106. Pretsch J., Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 58—75 (1941).
107. Pretsch J., Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 54—71 (1942).
108. Pretsch J., Umschlagbeginn und Absaugung. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 1—7 (1942).
109. Lord Rayleigh, On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside. Phil. Mag. 32, 529 (1916) или Scientific Papers VI, 432—446.
110. Lord Rayleigh, On the dynamics of revolving fluids. Proc. Roy. Soc. A 93, 148—154 (1916) или Scientific Papers VI, 447—453.
- 110a. Reshoto E., Transition reversal and Tollmien-Schlichting instability. Phys. Fluids 6, 335—342 (1963).
111. Richardson L. F., The supply of energy from and to atmospheric eddies. Proc. Roy. Soc. A 97, 354—373 (1926).
112. Riegels F., Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing.-Arch. 16, 373—376 (1948) и 17, 94—106 (1949).
113. Riegels F., Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. ZFW 9, 2—15 (1961).
114. Ross A. O., Determination of boundary layer transition Reynolds-numbers by surface-temperature measurements of a 10° cone in various NACA supersonic wind tunnels. NACA TN 3020 (1953).
115. Sato H., Experimental investigation on the transition of laminar separated layer. J. Phys. Soc. Japan 11, 6, 702—709 (1956).
116. Sato H., Kuriki K., The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. J. Fluid Mech. 11, 321—352 (1961).
117. Scherrer R., Comparison of theoretical and experimental heat transfer characteristics of bodies of revolution at supersonic speeds. NACA Rep. 1055 (1951).
118. Schlichting H., Über die Entstehung der Turbulenz in einem rotierenden Zylinder. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 160—198 (1932).
119. Schlichting H., Über die Stabilität der Couette-Strömung. Ann. d. Phys. V, 905—936 (1932).
120. Schlichting H., Turbulenz bei Wärmeschichtung. ZAMM 15, 313—338 (1935); см. также Proc. Fourth Int. Congr. Appl. Mech., 245, Cambridge, 1935.
121. Schlichting H., Über die theoretische Berechnung der kritischen Reynoldschen Zahl einer Reibungsschicht in beschleunigter und verzögelter Strömung. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 97—112 (1940).
122. Schlichting H., Ulrich A., Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 8—35 (1942). Премирована на конкурсе 1940 г. Лилиентальского общества аэронавтических исследований (секция самолетостроения). Подробное изложение в Bericht S 10 der Lilienthal-Gesellschaft, 75—135 (1940).
123. Schlichting H., Die Beeinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Ausblasen. Jb. d. Akad. d. Luftfahrtforschung, 90—108 (1943/44).
124. Schiller L., Handbuch der Experimental-Physik, т. IV, часть 4, 1—207, Leipzig 1932. [Имеется русский перевод: Шиллер Л., Движение жидкостей в трубах, Москва 1936.]
125. Schubauer G. B., Skramstad H. K., Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1772 (перепечатка секретного отчета NACA от апр. 1943, впоследствии рассекреченного и опубликованного в NACA Wartime Report W-8); см. также JAS 14, 69—78 (1947) и NACA Rep. 909.
126. Schulz-Grunow F., Hein H., Beitrag zur Couette-Strömung. ZFW 4, 28—30 (1956).
- 126a. Schulz-Grunow F., Zur Stabilitätsfrage der Couette-Strömung. ZAMM 39, 101 (1959).
127. Sexpl Th., Zur Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen und der Couette-Strömung. Ann. Phys. (4), 83, 835—848 (1927).
128. Sexpl Th., Spielberg K., Zum Stabilitätsproblem der Poiseuille-Strömung. Acta Phys. Austriaca 12, 9—28 (1958).

129. Shapiro N. M., Effects of pressure gradient and heat transfer on the stability of the compressible laminar boundary layers. JAS 23, 81–83 (1956).
130. Shen S., Persh J., The limiting wall temperature ratios required for complete stabilization of laminar boundary layers with blowing. JAS 23, 286–287 (1956).
131. Silverstein A., Becker J. V., Determination of boundary layer transition on three symmetrical airfoils in the NACA full-scale wind tunnel. NACA TR, 637 (1938).
132. Smith A. M. O., On the growth of Taylor—Görtler vortices along highly concave walls. Quart. Appl. Math. 13, 233–262 (1955).
133. Smith A. M. O., Transition pressure gradient and stability theory. Paper presented at the IX th Intern. Congress of Appl. Mech. 4, 234–244, Brussels 1957; см. также JASS 26, 229–245 (1959).
134. Speidel L., Beeinflussung der laminaren Grenzschicht durch periodische Störungen der Zuströmung. ZFW 5, 270–275 (1957).
135. Stalder J. R., Rubessin M. W., Tendeland T. H., A determination of the laminar-, transitional-and turbulent-boundary-layer temperature-recovery factors on a flat plate in supersonic flow. NACA TN 2077 (1950).
136. Stender W., Laminarprofil-Messungen des NACA, eine Auswertung zur Gewinnung allgemeiner Erkenntnisse über Laminarprofile, Luftfahrttechnik 2, 218–227 (1956).
137. Sternberg J., A free-flight investigation of the possibility of high Reynolds-number supersonic laminar boundary layers. JAS 19, 721–733 (1952).
138. Sternberg J., The transition from a turbulent to a laminar boundary layer. Ballistic Research Laboratories Rep. 906 (1954), Aberdeen Proving Ground, Maryland USA.
139. Stuart J. T., On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field. Proc. Roy. Soc. London, A 221, 189–206 (1954).
140. Stuart J. T., On the nonlinear mechanics of hydro-dynamic stability. J. Fluid Mech. 4, 1–21 (1958). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1959, № 3 (56).]
141. Stuart J. T., On three-dimensional non-linear effects in the stability of parallel flows. Advances in Aeronautical Sciences (под. ред. Th. v. Karman'a), 3, 121–142. Pergamon Press, New York, London, 1962.
142. Stüper J., Der Einfluss eines Stolperdrahtes auf den Umschlag der Grenzschicht an einer ebenen Platte. ZFW 4, 30–34 (1956).
143. Tani I., Mitubishi S., Contributions to the design of aerofoils suitable for high speeds. Aero. Res. Inst. Tokyo, Imp. Univ. Rep. 198 (1940).
144. Tani I., Hamam R., Mitsubishi S., On the permissible roughness in the laminar boundary layer. Aero. Res. Inst. Tokyo, Imp. Univ. Rep. 199 (1940).
145. Tani I., Hamam R., Some experiments on the effects of a single roughness element on boundary layer transition. JAS 20, 289–290 (1953).
146. Tani I., Juchi M., Yamamoto K., Further experiments on the effect of a single roughness element on boundary layer transition. Rep. Inst. Sci. Technol. Tokyo Univ. 8 (авр. 1954).
147. Taylor G. I., Internal waves and turbulence in a fluid of variable density. Rapp. Proc. Verb. Cons. Internat. pour l'Exploration de la Mer. LXXVI, Kopenhagen, 35–42 (1931).
148. Taylor G. I., Effects of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. Proc. Roy. Soc. A 132, 499–523 (1931).
149. Taylor G. I., Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. A 223, 289–293 (1923); см. также Proc. Roy. Soc. A 151, 494–512 (1935) и 157, 546–583 и 565 (1936).
150. Tertervin N., Charts and tables for estimating the stability of the compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. NASA MEMO 5-4-59 L, 1–48 (1959).
151. Theodorsen T., Garrick J., General potential theory of arbitrary wing section. NACA TR 452 (1933).
152. Tollmien W., Über Stabilitätsprobleme gasförmiger Grenzschichten. WGL Jb. 1953, 215–224.
153. Ulrich A., Theoretische Untersuchungen über die Widerstandsersparnis durch Laminarhaltung mit Absaugung. Schriften dt. Akad. d. Luftfahrtforschung 8 B, вып. 2 (1944).
154. Weil H., Effects of pressure gradient on stability and skin friction in laminar boundary layers in compressible fluids. JAS 18, 311–318 (1951).
155. Wendt F., Turbulente Strömung zwischen zwei rotierenden koaxialen Zylindern. Ing.-Arch. 4, 577–595 (1933).
156. Wijker H., On the determination of the transition point from measurements of the static pressure along a surface. Holl. Ber. A 1210 (1951).

157. W i j k e r H., Survey of transition point measurements at the NLL, mainly for two dimensional flow over a NACA 0018 profile. Holl. Ber. A 1269 (1951).
158. W u e s t W., Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitz. Ing.-Arch. 21, 90—103 (1953).
159. W u e s t W., Stabilitätsmindernde Einflüsse der Absaugegrenzschichten. ZFW 4, 81—84 (1956).
160. Z a l o v c i k J. A., S k o o g R. B., Flight investigation of boundary layer transition and profile drag of an experimental low-drag wing installed on a Fighter-Type airplane. NACA Wartime Report L-94 (1945).
161. M a c k L. M., Viscous and inviscid amplification rates of two- and three-dimensional disturbances in a compressible boundary layer. Jet-Prop. Lab. Space Prog. Sum. 158, 37—45 (1966). См. также M a c k L. M., Boundary layer stability theory. Jet-Prop. Lab. Doc. No. 900—277, Rev. A, ноябрь 1969.
162. T a n i I., Boundary-layer transition. Paper in Annual Review of Fluid Mech. ¹ (ed. W. R. Sears), Palo Alto, Calif. Annual Reviews, Inc., 1969.

Часть четвертая

Турбулентные течения

Глава XVIII

Основные сведения о турбулентных течениях

Предварительные замечания. Очень многие технически важные течения являются турбулентными. В таких течениях на главное движение налагается неправильное пульсационное движение, в результате чего возникает перемешивание отдельных частей жидкости. Для получения наглядного представления о турбулентном течении на рис. 18.1 изображены четыре снимка движения воды в лотке, полученные И. Никурадзе посредством фотокамеры, двигавшейся вдоль оси канала. Для придания течению видимости поверхность воды была посыпана порошком, не растворявшимся в воде. Скорость течения на всех четырех снимках одинакова, но каждый из них получен при разной скорости движения фотокамеры. Снимки позволяют легко установить, где продольная скорость движения частиц больше или меньше скорости движения фотокамеры, и дают убедительное представление о сложности турбулентного течения

Пульсационное движение, налагающееся на главное движение, в своих деталях настолько сложно, что возможность его теоретического расчета представляется совершенно безнадежной. Между тем перемешивание жидкости, вызываемое пульсационным движением, придает турбулентному течению особенности, резко отличающие его от ламинарного течения. В частности, действие такого перемешивания на поток равносильно увеличению вязкости в сотни, тысячи, десятки тысяч и даже большее число раз. При больших числах Рейнольдса энергия непрерывно переходит из основного течения в наиболее крупные турбулентные образования («вихри»). Наоборот, диссиpация энергии совершается главным образом в небольших турбулентных «вихрях», и притом, как показано в работе [20], в узких, прилегающих к стенке полосах пограничного слоя.

Турбулентное перемешивание является причиной большого сопротивления при турбулентном течении в трубах, сопротивления трения кораблей и самолетов и потерь энергии в турбинах и компрессорах. В то же время только турбулентность дает возможность преодолеть повышение давления при течении в диффузоре или при течении вдоль крыла самолета и лопатки воздуходувки. Если бы такие течения были ламинарными, а не турбулентными, то все они обязательно и быстро отрывались бы от стенки, вследствие чего в диффузоре обратное преобразование кинетической энергии в энергию давления происходило бы с большими потерями, а крылья и лопатки действовали бы плохо.

Закономерности развитого турбулентного течения будут рассмотрены в следующих главах. Так как вследствие сложности пульсационного движения чисто теоретический расчет турбулентного течения до настоящего времени невозможен, то указанные закономерности приходится искать лишь для

осредненных по времени величин, характеризующих турбулентное течение. Только такой путь в сочетании с введением некоторых весьма вероятных полуэмпирических допущений позволяет, во-первых, истолковать экспериментальный материал с точки зрения некоторых общих принципов, а во-

Ско б то 5 се

б Ско сеть д и я ток е 20 с

) Ско с в из ния ток е 5 с

г) Ско сеть в же ток ,6 с сен

Рис. 18.1. Турбулентное течение в лотке шириной 6 см. Снимки сделаны фотокамерой, двигавшейся над водой. Скорость движения фотокамеры была равна: для снимка а) 12,15 см/сек; для снимка б) 20 см/сек; для снимка в) 25 см/сек; для снимка г) 27,6 см/сек. Снимки И. Никурадзе [30], воспроизведены по В. Толмину [44].

вторых, дает во многих случаях возможность заранее вычислить осредненные характеристики турбулентного течения в хорошем соответствии с опытом. Изложению созданной на основе этих допущений полуэмпирической теории турбулентности будут посвящены следующие главы¹⁾.

¹⁾ Правда, уже давно была создана теория турбулентных течений, основанная на статистическом методе, главным образом трудами И. М. Бюргерса, Т. Кармана и Дж. Тэйлора. Однако эта теория до настоящего времени не может решить указанную выше основную задачу. В дальнейшем мы не будем останавливаться на статистической теории турбулентности и отсылаем читателя к подробным обзорным работам Дж. К. Бэтчелора [1], А. А. Таунсенда [49], И. О. Хинце [16], С. Коррсина [4], Ц. Ц. Линя [26], [37] и И. К. Ротты [35]. [Впервые статистический метод исследования турбулентности предложил совет-

Настоящую главу мы посвятим выяснению влияния пульсационного движения на осредненное движение. В следующей главе мы изложим полуэмпирические допущения, необходимые для теоретического расчета турбулентных течений и основанные главным образом на введенном Л. Прандтлем понятии пути перемешивания. В дальнейших главах мы рассмотрим на этой основе отдельные случаи турбулентного течения, как, например, течение в трубах, течение около пластины, турбулентный пограничный слой с перепадом давления, свободную турбулентность (без ограничивающих стенок). Более подробные сведения об отдельных вопросах можно найти в работах [12a] и [12b].

§ 1. Осредненное движение и пульсационное движение

Более тщательные наблюдения позволяют обнаружить, что при турбулентном течении скорость и давление в фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а очень часто и очень неравномерно изменяются (см. рис. 16.17). Такие изменения скорости и давления, называемые пульсациями, являются наиболее характерным признаком турбулентности. Элементы жидкости, перемещающиеся как целое вдоль и поперек основного течения, представляют собой не отдельные молекулы (как в кинетической теории газов), а макроскопические, более или менее крупные образования (турбулентные «массы»). Хотя при течении, например, в канале пульсации скорости составляют всего несколько процентов от средней скорости течения, тем не менее они имеют исключительное значение для развития всего течения. Пульсационное движение можно представить себе как следствие собственного движения турбулентных образований, налагающегося на осредненное движение. На трех последних снимках, изображенных на рис. 18.1, такие образования хорошо заметны. В процессе турбулентного течения они все время то возникают, то распадаются. Их величина дает представление о масштабе турбулентности, т. е. о пространственном протяжении элементов турбулентности. Масштаб турбулентности определяется внешними условиями течения, например размером отверстий в выравнивающей решетке, через которую пропускается жидкость. О некоторых количественных измерениях пульсационных скоростей будет сказано в § 4 настоящей главы.

При естественном ветре пульсации очень четко проявляются в виде порывов ветра, скорость которых часто достигает 50% от средней скорости ветра. О масштабе турбулентности ветра можно получить представление, например, по колыханию колосьев на засеянном поле.

Уже в главе XVI мы указали, что для математического исследования турбулентного течения целесообразно разложить его на осредненное движение и на пульсационное движение. Обозначив осредненное по времени значение составляющей скорости u через \bar{u} , а пульсационную скорость через u' и т. д., мы получим следующие равенства для составляющих скорости и для давления:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = p + p' \quad (18.1a, b, v, g)$$

ский ученый А. А. Фридман в докладе, прочитанном на Международном конгрессе по прикладной механике в Дельфте в 1924 г. (см. Келлер Л. В. и Фридман А. А., Differentialgleichungen für die turbulente Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit, Proc. Ith Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924; Келлер Л. В., Об установлении системы характеристики атмосферной турбулентности, Изв. Главн. обсерватории, 1925). Разработке статистической теории турбулентности в Советском Союзе посвящен ряд работ А. Н. Колмогорова и других авторов. Изложение основных идей А. А. Фридмана, А. Н. Колмогорова и других советских ученых можно найти в книге: Монин А. С. и Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1 и 2, «Наука», Москва 1966 и 1976.—Прим. перев.]

[равенства (16.2)]. Для сжимаемых течений (глава XXIII) необходимо ввести также пульсации плотности ρ и температуры T , определяемые соотношениями

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T'. \quad (18.1\text{д}, \text{е})$$

Говоря об осредненных значениях, мы имеем здесь в виду средние значения во времени в фиксированной точке пространства, следовательно, под осредненной скоростью \bar{u} мы подразумеваем величину

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u \, dt. \quad (18.2)$$

Для осреднения надо брать такой большой промежуток времени t_1 , чтобы осредненное значение совершенно не зависело от времени. Тогда осредненные по времени значения пульсационных величин будут равны, согласно определению, нулю, т. е.

$$\bar{u}' = 0, \quad \bar{v}' = 0, \quad \bar{w}' = 0, \quad \bar{p}' = 0, \quad \bar{\rho}' = 0, \quad \bar{T}' = 0. \quad (18.3)$$

Фундаментальное значение для развития турбулентного течения имеет следующее обстоятельство: пульсационное движение со скоростями u' , v' , w' влияет на осредненное движение \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} таким образом, что в осредненном движении как бы увеличивается сопротивление возникновению деформаций. Иными словами, действие пульсационного движения на осредненное движение проявляется как бы в увеличении вязкости осредненного движения. Эта дополнительная, *кажущаяся вязкость* осредненного движения является основным понятием во всех теоретических соображениях о турбулентных течениях, поэтому прежде всего мы остановимся на вопросе о ее возникновении.

В дальнейшем нам неоднократно придется производить осреднение во времени. Укажем некоторые правила такого осреднения. Пусть f и g суть зависимые переменные, которые необходимо осреднить, и пусть s есть одна из четырех независимых переменных x , y , z , t . Тогда мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \bar{f} &= \bar{f}; & \bar{f} + g &= \bar{f} + \bar{g}; & \bar{\bar{f}} \cdot \bar{g} &= \bar{f} \cdot \bar{g}; \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial s}; & \int \bar{f} ds &= \int \bar{f} ds. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

§ 2. Дополнительные (кажущиеся) турбулентные напряжения

Прежде чем вывести связь между осредненным движением и кажущимися напряжениями, обусловленными пульсационным движением, дадим этим напряжениям наглядное пояснение с помощью импульсов.

Рассмотрим в турбулентном течении, имеющем скорость с составляющими u , v , w , площадку dF с нормалью, параллельной оси x (следовательно, оси y и z лежат в плоскости этой площадки). Масса жидкости, протекающая сквозь площадку dF за промежуток времени dt , равна $dF \cdot \rho u \cdot dt$. Следовательно, составляющей по оси x потока импульса сквозь площадку dF будет

$$dJ_x = dF \cdot \rho u^2 \cdot dt,$$

а составляющими по осям y и z того же потока импульса будут

$$dJ_y = dF \cdot \rho u v \cdot dt \quad \text{и} \quad dJ_z = dF \cdot \rho u w \cdot dt.$$

Составим средние по времени значения от составляющих потока импульса в единицу времени. Имея в виду, что плотность постоянна, мы получим

$$\overline{dJ_x} = dF \cdot \rho \bar{u^2}, \quad \overline{dJ_y} = dF \cdot \rho \bar{uv}, \quad \overline{dJ_z} = dF \cdot \rho \bar{uw}.$$

При осреднении по времени величин, входящих в правые части этих равенств, необходимо учитывать, что в соответствии, например, с равенством (18.1а)

$$u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2.$$

Применив к осреднению величины u^2 первое из равенств (18.3) и первые три из правил (18.4), мы получим

$$\bar{u^2} = \bar{u}^2 + \bar{u'}^2.$$

Аналогичным образом мы найдем, что

$$\bar{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u'} \bar{v'}, \quad \bar{u \cdot w} = \bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{u'} \bar{w'}.$$

Следовательно, осредненные по времени составляющие потока импульса в единицу времени будут

$$\begin{aligned}\overline{dJ_x} &= dF \cdot \rho (\bar{u}^2 + \bar{u'}^2), \\ \overline{dJ_y} &= dF \cdot \rho (\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u'} \bar{v'}), \\ \overline{dJ_z} &= dF \cdot \rho (\bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{u'} \bar{w'}).\end{aligned}$$

Все эти выражения, будучи изменениями импульса во времени, имеют раз мерность силы. Разделив их на площадь dF , мы получим силу, отнесенную к единице площади, т. е. напряжение. Так как поток импульса в единицу времени сквозь некоторую площадку всегда эквивалентен противоположно направленной силе, с которой окружающая среда действует на рассматриваемую площадку, то полученный результат означает следующее: на площадку dF , перпендикулярно к оси x , действуют:

$$\begin{array}{lll} \text{в направлении оси } x \text{ напряжение} & -\rho(\bar{u}^2 + \bar{u'}^2), \\ » & » & » \\ » & » & » \\ » & » & » \end{array} \begin{array}{lll} y & » & z \\ » & » & » \end{array} \begin{array}{lll} -\rho(\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u'} \bar{v'}), \\ -\rho(\bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{u'} \bar{w'}) \end{array}$$

Первое из этих напряжений представляет собой нормальное напряжение, а два последних — касательные напряжения. Таким образом, мы пришли к выводу, что наложение пульсационного движения на осредненное движение вызывает на площадке, перпендикулярной к оси x , дополнительные напряжения

$$\sigma'_x = -\rho \bar{u'}^2, \quad \tau'_{xy} = -\rho \bar{u'} \bar{v'}, \quad \tau'_{xz} = -\rho \bar{u'} \bar{w'}. \quad (18.5)$$

Эти дополнительные напряжения называются «каждущимися» напряжениями турбулентного течения; они складываются с напряжениями осредненного движения, с которыми мы познакомились при изучении ламинарных течений. Аналогичные дополнительные напряжения получаются и на площадках, перпендикулярных к осям y и z . Совокупность всех девяти дополнительных напряжений называется тензором напряжений каждого турбулентного трения. Формулы (18.5) впервые были выведены О. Рейнольдсом [33] из уравнений движения Навье — Стокса (см. следующий параграф).

В том, что осредненные по времени смешанные произведения пульсационных скоростей, например $\bar{u}'\bar{v}'$, действительно не равны нулю, можно убедиться следующим наглядным путем. Очевидно, что касательное напряжение

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = -\rho \bar{u}' \bar{v}'$$

можно понимать как перенос x -координаты импульса через площадку, перпендикулярную к оси y . Вообразим, что осредненное движение представляет собой простое сдвиговое течение, определяемое распределением скоростей

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = \bar{w} = 0$$

и градиентом скорости $d\bar{u}/dy > 0$ (рис. 18.2). Составив для такого течения осредненное значение $\bar{u}'\bar{v}'$, мы сразу убедимся, что это значение не равно нулю. В самом деле, частицы жидкости, попадающие вследствие поперечного движения в слой y снизу ($v' > 0$), движутся из области с меньшей осредненной скоростью \bar{u} , но так как при этом они в основном сохраняют свою первоначальную скорость \bar{u} , то в слое y они вызывают отрицательную пульсацию u' . Наборот, частицы жидкости, попадающие в слой y сверху ($v' < 0$), дают в этом слое положительную пульсацию u' . Таким образом, в рассматриваемом течении в целом положительные пульсации v' «обычно» связаны с отрицательными пульсациями u' , а отрицательные v' — с положительными u' , и поэтому следует ожидать, что осредненное значение $\bar{u}'\bar{v}'$ не равно нулю и притом имеет отрицательный знак. Это означает, что турбулентное касательное напряжение $\tau'_{xy} = -\rho \bar{u}' \bar{v}'$ в этом случае положительно, т. е. имеет такой же знак, как и ламинарное касательное напряжение

$$\tau_l = \mu \frac{du}{dy}$$

для рассматриваемого течения. Связь, существующая в данном случае между продольной и поперечной пульсациями скорости в одной и той же точке, называется *корреляцией* между этими пульсациями.

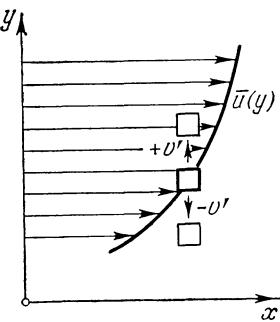


Рис. 18.2. Перенос импульса турбулентными пульсациями скорости.

§ 3. Вывод тензора напряжения кажущегося турбулентного трения из уравнений движения Навье — Стокса

В предыдущем параграфе мы дали наглядное пояснение дополнительным силам, возникающим вследствие турбулентного пульсационного движения. Покажем теперь существование этих сил путем более формальных рассуждений, основанных на рассмотрении дифференциальных уравнений Навье — Стокса. Одновременно мы выведем уравнения движения, которым удовлетворяют осредненные по времени скорости \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и осредненное давление \bar{p} . Перешифтуем уравнения Навье — Стокса для несжимаемого течения (3.32) в следующем виде:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad (18.6a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \quad (18.6b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w. \quad (18.6b)$$

Кроме того, мы имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (18.6g)$$

В этих уравнениях Δ означает оператор Лапласа. Подставим во все эти уравнения вместо составляющих скорости и давления их выражения через осредненные значения и пульсации [соотношения (18.1)] и произведем осреднение по времени каждого полученного члена с учетом правил (18.4). Сначала сделаем это в уравнении неразрывности. Имея в виду, что $\bar{\partial u'}/\partial x = 0$ и т. д., мы получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (18.7)$$

а потому в сочетании с уравнением (18.6г) также

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, уравнению неразрывности несжимаемого течения удовлетворяют составляющие скорости не только осредненного движения; но и пульсационного.

Перейдем к уравнениям движения. Операция осреднения всех членов, квадратичных относительно осредненных скоростей (например, членов \bar{u}^2 , $\bar{u} \cdot \bar{v}$), не внесет в эти члены никаких изменений, так как в соответствии с правилами (18.4) $\bar{u}^2 = \bar{u}'^2$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}' \cdot \bar{v}'$. Все члены типа $\partial u'/\partial t$, $\partial^2 u'/\partial x^2$ и т. д., линейные относительно пульсаций, после осреднения отпадут на основании равенств (18.3). Отпадут после осреднения также все члены смешанного типа, например $\bar{u} \cdot \bar{u}'$ и т. д. Члены же, квадратичные относительно пульсаций, после осреднения останутся в виде выражений \bar{u}'^2 , $\bar{u}' \bar{v}'$ и т. д. Выполнив все эти осреднения, преобразовав затем левые части уравнений с помощью уравнения неразрывности (18.7) и перенеся, наконец, все члены, квадратичные относительно пульсаций, в правые части, мы получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' \bar{w}'}{\partial z} \right], \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial \bar{u}' \bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}' \bar{w}'}{\partial z} \right], \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} - \rho \left[\frac{\partial \bar{u}' \bar{w}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}' \bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнение неразрывности (18.7). Левые части уравнений (18.8) формально совпадут с левыми частями уравнений Навье — Стокса (3.32) для установившегося течения, если только в последних заменить составляющие скорости u , v , w их осредненными по времени значениями. После аналогичной замены совпадут также и члены правых частей, зависящие от давления и от трения. Но в уравнениях (18.8), кроме этих членов, имеются еще дополнительные члены, обусловленные турбулентным пульсационным движением.

Сопоставив уравнения (18.8) с уравнениями (3.11), мы увидим, что дополнительные члены в правых частях уравнений (18.8) можно рассматривать как компоненты тензора напряжения. В соответствии с равенством (3.10а) результирующая поверхностная сила, отнесенная к единице объема, выражается через компоненты тензора напряжения в следующем виде:

$$R = i \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right).$$

Переписав уравнения (18.8) по образцу уравнений (3.11), мы получим

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Сравнив уравнения (18.9) с уравнениями (18.8), мы будем иметь

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \bar{u}'^2 & \rho \bar{u}' \bar{v}' & \rho \bar{u}' \bar{w}' \\ \rho \bar{u}' \bar{v}' & \rho \bar{v}'^2 & \rho \bar{v}' \bar{w}' \\ \rho \bar{u}' \bar{w}' & \rho \bar{v}' \bar{w}' & \rho \bar{w}'^2 \end{pmatrix}. \quad (18.10)$$

Этот тензор напряжения, связанный с пульсационным движением, совпадает с тензором напряжения, полученным в предыдущем параграфе посредством теоремы импульсов [там мы выписали только три составляющие (18.5) этого тензора].

Итак, осредненные составляющие скорости турбулентного течения удовлетворяют уравнениям (18.9), которые отличаются от соответствующих уравнений для ламинарного течения присутствием дополнительных членов, зависящих от трения и определяемых тензором напряжения (18.10). Эти напряжения называются *кажущимися напряжениями турбулентного течения*. Они вызываются турбулентным пульсационным движением и получаются осреднением по времени величин, квадратичных относительно пульсационных скоростей. Так как эти напряжения прибавляются к обычным напряжениям вязкого течения и действуют на развитие течения сходным образом, то они часто называются также *напряжениями кажущегося турбулентного трения*. Полные напряжения получаются алгебраическим сложением обычных, вязких напряжений, определяемых равенствами (3.25а), и кажущихся турбулентных напряжений, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \bar{u}'^2, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}' \bar{v}', \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}' \bar{w}', \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho \bar{v}' \bar{w}', \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \bar{v}'^2, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \rho \bar{u}' \bar{v}', \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho \bar{v}' \bar{w}', \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho \bar{w}'^2, \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \rho \bar{u}' \bar{w}', \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \rho \bar{v}' \bar{w}' \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

В большей части случаев кажущиеся турбулентные напряжения значительно больше ламинарных напряжений, и поэтому последние часто можно не учитывать, не делая при этом какой-либо ошибки.

Границные условия. Осредненные по времени скорости, входящие в уравнения (18.9), должны удовлетворять таким же граничным условиям, как и истинные скорости при ламинарном течении, т. е. все составляющие скорости на твердых стенках должны быть равны нулю (условие прилипания). На стенах исчезают также все составляющие пульсационной скорости. Следовательно, на стенах все компоненты тензора кажущегося турбулентного трения равны нулю, и здесь остаются только вязкие напряжения ламинарного течения, так как они на стенах в общем случае не исчезают. Однако в непосредственной близости от стеники напряжения кажущегося турбулентного трения малы по сравнению с вязкими напряжениями ламинарного течения. Отсюда следует, что в очень тонком слое в самой непосредственной близости от стеники всякое турбулентное течение ведет себя в основном как ламинарное течение. В таком тонком слое, называемом *ламинарным подслоем*, скорости так малы, что силы вязкости здесь значительно больше сил инерции.

Это означает, что здесь не может существовать турбулентность¹⁾. К этому ламинарному подслою примыкает переходная область, в которой пульсации скорости уже настолько велики, что влекут за собой появление турбулентных касательных напряжений, сравнимых с силами вязкости. Наконец, на еще большем расстоянии от стенки турбулентные касательные напряжения полностью перевешивают ламинарные напряжения. Здесь и начинается собственно турбулентный пограничный слой. Толщина ламинарного подслоя обычно столь мала, что практически она либо совсем не может быть измерена, либо может быть измерена только с очень большим трудом. Тем не менее этот подслой оказывает решающее влияние на развитие течения и особенно на возникновение сопротивления, что вполне понятно, так как явления, происходящие в подслое, вызывают касательные напряжения на стенке, а вместе с ними и сопротивление трения. К этим вопросам мы вернемся ниже.

Уравнения (18.9) и (18.10) являются исходными для теоретического исследования турбулентных течений, точнее говоря, для расчета осредненных по времени величин, определяющих движение. Появляющиеся при таком расчете осредненные значения величин, квадратичных относительно пульсаций, можно понимать как компоненты тензора напряжения. Необходимо, однако, подчеркнуть, что одно такое толкование еще не дает многоного для решения задачи. Уравнения (18.9) и (18.10) не могут быть использованы для рационального расчета осредненного движения до тех пор, пока не будет известна связь между пульсациями и осредненным движением. Такая связь может быть установлена только на основе эмпирических соображений. Именно эта связь между пульсациями и осредненным движением и составляет основное содержание гипотез о турбулентности, изложению которых мы посвятим следующую главу.

§ 4. Некоторые измерения турбулентных пульсаций скорости

При экспериментальном исследовании турбулентных течений обычно измеряют только осредненные давления и скорости, так как только эти величины доступны для измерения простыми способами. Измерение зависимости пульсаций u' , v' , ... от времени или средних по времени значений \bar{u}^2 , $\bar{u}'\bar{v}'$, ... весьма затруднительно и требует применения термоанемометра, что связано с большой затратой времени. Для большей части технических приложений вполне достаточно измерения осредненных по времени значений, но для глубокого проникновения в механизм турбулентности измерение пульсаций обязательно. Приведем некоторые результаты таких измерений, так как они нам понадобятся для обоснования предстоящих теоретических соображений.

Г. Райхардт [32] выполнил измерения турбулентных пульсаций в воздушном потоке в канале прямоугольного поперечного сечения шириной 1 м и высотой 24,4 см. На рис. 18.3 изображено распределение осредненной скорости $\bar{u}(y)$ по ширине канала в его среднем горизонтальном сечении. Мы видим типичный профиль скоростей турбулентного течения с крутым возрастанием скорости около стенок и довольно равномерным распределением в середине. Максимальная скорость течения составляла $U = 100$ см/сек. На том же рис. 18.3 показано изменение по ширине канала осредненных значений $V_{\bar{u}^2}$ и $V_{\bar{v}^2}$ продольной и поперечной пульсаций. В то время как поперечная пульсация изменяется по ширине канала сравнительно мало и составляет в среднем около 4% от U , продольная пульсация имеет в непосредственной близости от стенок резко выраженный максимум, равный 0,13U.

¹⁾ На самом деле турбулентные пульсации существуют в любой близости к твердой стенке, но очень быстро убывают (см. рис. 18.3) — Прим. ред.

Ход обеих кривых $V\overline{u'^2}$ и $V\overline{v'^2}$ подтверждает упомянувшееся в предыдущем параграфе уменьшение пульсационных скоростей в непосредственной близости от стенок. Далее, на рис. 18.4 изображено изменение по ширине канала осредненной величины $-\overline{u'v'}$, пропорциональной, с точностью до множителя ρ , турбулентному касательному напряжению. В середине канала, как это и должно быть из соображений симметрии, $-\overline{u'v'}$ равно нулю. Максимум лежит

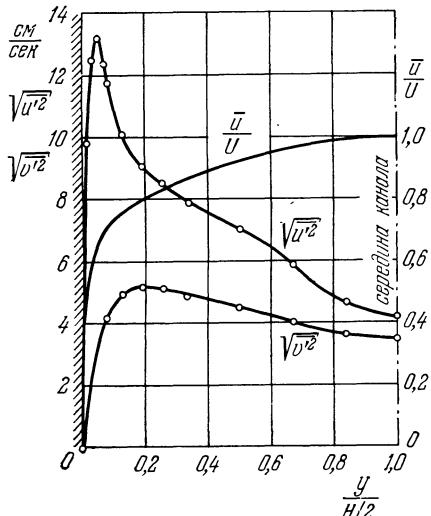


Рис. 18.3. Измерение турбулентных пульсаций скорости в прямоугольном канале. По Райхардту [32]. Показаны изменения продольной пульсации $V\overline{u'^2}$, поперечной пульсации $V\overline{v'^2}$ и осредненной скорости \bar{u} по ширине канала. $U = 100 \text{ см/сек}$ — максимальная скорость.

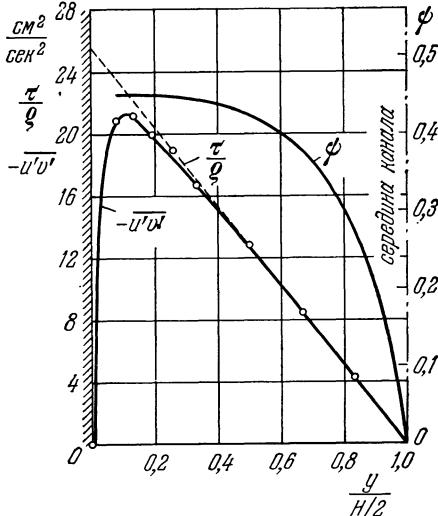


Рис. 18.4. Измерение турбулентных пульсаций скорости в прямоугольном канале. По Райхардту [32]. Показаны изменения величины $-\overline{u'v'}$, касательного напряжения τ/ρ и коэффициента корреляции ψ по ширине канала.

вблизи стенок и показывает, что здесь турбулентное трение достигает наибольшего значения. На рис. 18.4 штрихами отмечена также кривая τ/ρ , показывающая, как изменяется касательное напряжение, вычисленное по распределению давления независимо от измерения пульсаций. На большей части ширины канала кривые τ/ρ и $-\overline{u'v'}$ почти совпадают. Это обстоятельство служит, во-первых, хорошим контролем измерений, а во-вторых, показывает, что в середине канала полное касательное напряжение определяется только турбулентным трением. В непосредственной близости от стенок кривые τ/ρ и $-\overline{u'v'}$ отходят одна от другой. Кривая $-\overline{u'v'}$ имеет на стенке нулевую ординату, так как на стенке турбулентные пульсации исчезают. Разность ординат обеих кривых τ/ρ и $-\overline{u'v'}$ дает величину ламинарного трения. Наконец, на рис. 18.4 изображено также изменение коэффициента корреляции ψ между продольной и поперечной пульсациями в одной и той же точке. Этот коэффициент корреляции определяется формулой

$$\psi = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{v'^2}}} \quad (18.12)$$

и достигает самое большое значение $\psi = -0,45^1$.

¹⁾ Заметим попутно, что пульсации скорости могут вызвать кажущееся касательное напряжение только в том случае, если имеется корреляция между составляющими пульсационной скорости в двух различных направлениях. Такая корреляция существует также в возмущающем движении, рассмотренном в главе XVI при исследовании устойчивости ламинарного течения (см. работу [45]).

В последнее десятилетие очень тщательные измерения турбулентных пульсаций были выполнены также для пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине. На рис. 18.5 изображены некоторые результаты, полученные П. С. Клебановым [20] для пограничного слоя на пластине при числе Рейнольдса $Re_x = U_\infty x / v = 4,2 \cdot 10^6$ и при очень малой (0,02%) степени турбулентности набегающего течения (см. § 4 главы XVI и § 6 настоящей главы). Профиль осредненной по времени скорости \bar{u} имеет примерно такую же форму, как при течении в канале (рис. 18.3). Распределение продольной пульсации $\sqrt{\overline{u'^2}}$ с резко выраженным максимумом в непосредственной близости от стенки и более пологое распределение для поперечной пульсации $\sqrt{\overline{v'^2}}$, перпендикулярной к стенке, приближенно такие же, как при

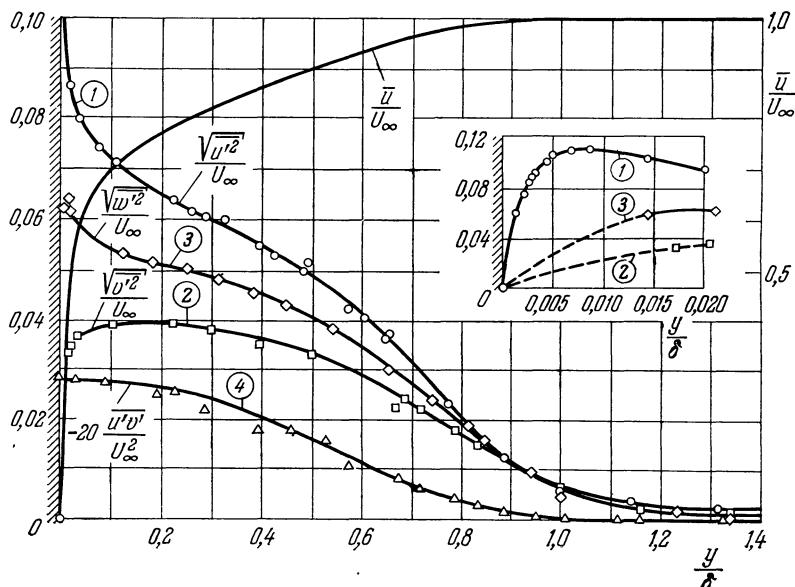


Рис. 18.5. Распределение турбулентных пульсаций скорости в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине. По измерениям Клебанова [20]. \bar{u} — осредненная скорость. Кривая (1) — продольные пульсации $\sqrt{\overline{u'^2}}$; кривая (2) — поперечные пульсации $\sqrt{\overline{v'^2}}$, параллельные стенке; кривая (3) — поперечные пульсации $\sqrt{\overline{v'^2}}$, перпендикулярные к стенке; кривая (4) — турбулентное касательное напряжение $\overline{u'v'} = -\tau/\rho$.

течении в канале (рис. 18.3). Примечательно также, что в пограничном слое на пластине поперечная пульсация $\sqrt{\overline{v'^2}}$, параллельная стенке, достигает высоких значений, которые даже больше, чем соответствующие значения $\sqrt{\overline{u'^2}}$ (рис. 18.5). Турбулентное касательное напряжение на стенке имеет значение

$$\frac{\tau}{\rho U_\infty^2} = -\frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2} \approx 0,0015,$$

совпадающее с местным коэффициентом трения $c_f/2$ (рис. 21.7). Таким образом, сравнивая между собой, с одной стороны, рис. 18.3 и 18.4, полученные для течения в канале, а с другой стороны, рис. 18.5, полученный для течения в пограничном слое, мы видим, что кривые изменения турбулентных пульсаций в обоих случаях имеют очень сходный вид. Это обстоятельство дает основание распространить законы, полученные для течений в каналах и трубах, на течения в пограничном слое, что и будет сделано в главе XXI.

Тщательные измерения турбулентных пульсаций скорости и коэффициентов корреляции в турбулентном пограничном слое на плоской пластине с понижением и повышением давления в направлении течения выполнены Г. Б. Шубаузером и П. С. Клебановым [39].

Детальные измерения турбулентных пульсаций при течениях в трубе произведены Дж. Лауфером [23]. Прежние измерения, выполненные П. С. Клебановым и З. В. Дилем [19] в пограничном слое на пластине, сильно утолщенном искусственным образом, показали, что такой пограничный слой ведет себя в отношении пульсаций примерно так же, как и обычный пограничный слой, но при соответственно увеличенном текущем расстоянии от

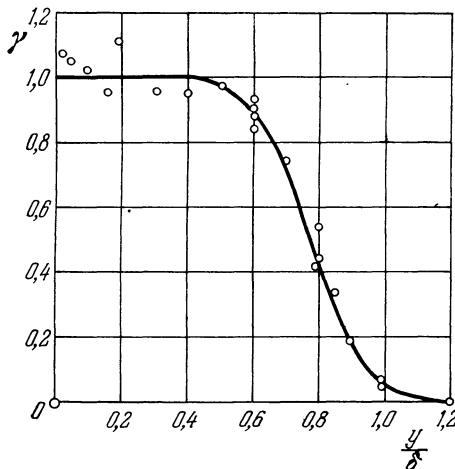


Рис. 18.6. Распределение коэффициента перемежаемости γ по сечению турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине. По измерениям Клебанова [20].

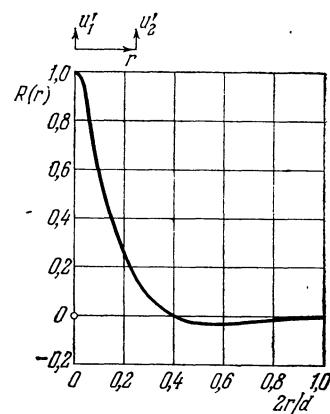


Рис. 18.7. Корреляция между турбулентной продольной пульсацией скорости u_1' в середине трубы и пульсацией скорости u_2' на расстоянии r от оси трубы. По измерениям Л. Ф. Г. Симмонса, опубликованным Дж. И. Тейлором [44].

передней кромки. Тщательное исследование турбулентного течения в канале содержится также в работе Дж. Лауфера [22]. Об исследовании интенсивности турбулентности в свободных струях сообщается в работе Дж. К. Лауренса [24].

Исследования турбулентных пульсаций в пограничном слое на пластине, выполненные П. С. Клебановым в работе [20], показали также, что во внешних частях пограничного слоя турбулентность носит такой же перемежающийся характер, как и в начальном участке трубы (см. § 1 главы XVI, рис. 16.2 и 16.3). Осциллографические записи турбулентных пульсаций показывают, что положение довольно четкой границы между сильно турбулентным течением в пограничном слое и почти свободным от турбулентности внешним течением сильно колеблется во времени. На рис. 18.6 показано распределение коэффициента перемежаемости γ по сечению пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине. Значение $\gamma = 1$ означает, что течение все время остается турбулентным, значение же $\gamma = 0$ показывает, что течение все время остается ламинарным. Мы видим из этого рисунка, что турбулентность в пограничном слое, начиная от $y = 0,56$ и до $y = 1,28$, носит перемежающийся характер. Такое же явление наблюдается в свободной струе и в спутном течении.

Для характеристики турбулентного движения необходимы, кроме распределения пульсаций скорости, также другие данные. Количественное представление о пространственной структуре можно получить посредством одновременного наблюдения пульсаций скорости в двух соседних точках 1 и 2

поля течения. Такое наблюдение позволяет определить введенную Дж. И. Тэйлором [41] корреляционную функцию

$$R = \frac{\overline{u'_1 u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \cdot \sqrt{\overline{u'^2_2}}}. \quad (18.13)$$

На рис. 18.7 показано изменение корреляционной функции для продольных пульсаций в поперечном сечении трубы (диаметр d). Для выполнения измерений один термоанемометр был помещен на оси трубы, а другой — на расстоянии r от оси. При $r = 0$ пульсации скорости u'_1 и u'_2 тождественны, поэтому там, т. е. на оси трубы, $R(0) = 1$. При возрастании r корреляционная функция R быстро уменьшается; в рассматриваемом примере в некоторой области

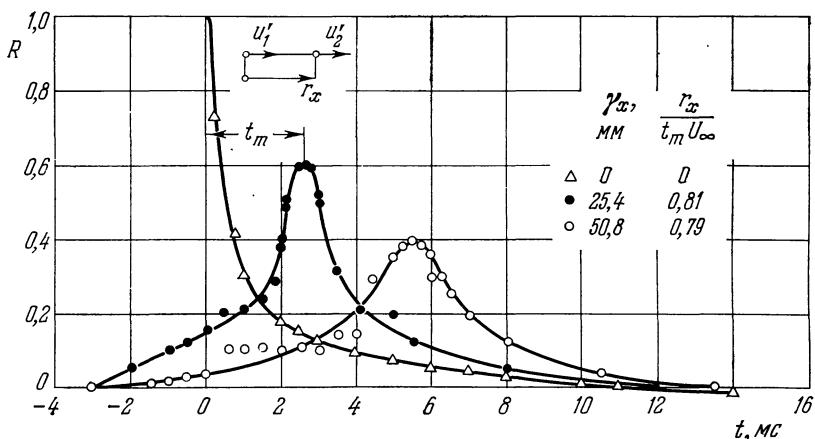


Рис. 18.8. Пространственно-временная корреляция пульсаций скорости в турбулентном пограничном слое на плоской пластине. По измерениям А. Ж. Фавра, Ж. Ж. Гавильо и Р. Ж. Дюма [12]. Расстояние от стенки $y/\delta = 0,24$; $\delta = 16,8$ мм. На оси абсцисс время в миллисекундах.

значений r она принимает даже отрицательные значения. Это вполне объяснимо с точки зрения условия неразрывности, согласно которому через поперечное сечение трубы в каждый момент времени протекает одинаковое количество жидкости. Интеграл от корреляционной функции R определяет длину

$$L = \int_0^{d/2} R dr, \quad (18.14)$$

характеризующую структуру турбулентности. Эта характерная длина является мерой величины массы жидкости, движущихся как единое целое, следовательно, она дает представление о среднем размере этих турбулентных образований. В рассматриваемом примере $L \approx 0,14d/2$.

Можно связать между собой таким же образом, как и в формуле (18.13), пульсации скорости, наблюдавшиеся в одном и том же месте в различные моменты времени (u'_1 в момент t_1 и u'_2 в момент $t_2 = t_1 + \tau$); тогда мы получим так называемую *автокорреляцию пульсаций*. Дальнейшее представление о структуре турбулентности дает пространственно-временная корреляция пульсаций, связывающая пульсации скорости в различных местах в различные моменты времени. В качестве примера на рис. 18.8 изображены результаты таких измерений, полученные А. Ж. Фавром и его сотрудниками [12] в турбулентном пограничном слое на плоской пластине. Смещение t_m во времени максимума каждой кривой имеет своей причиной унос турбулентных масс жидкости, которые движутся вперед со скоростью $0,8U_\infty$. Уменьшение

же максимумов указывает на явление, которое наглядно можно объяснить следующим образом: турбулентные массы через некоторое время теряют свою индивидуальность вследствие перемешивания с окружающей турбулентной жидкостью, но тем временем возникают новые такие же массы.

Для описания структуры турбулентности вместо корреляционной функции можно использовать частотный анализ движения, который приводит к понятию спектра турбулентного течения. Если обозначить через n частоту и через $F(n) dn$ — процентное содержание среднего квадратичного значения \bar{u}^2 продольных пульсаций скорости в области частот от n до $n + dn$, то функция $F(n)$ будет представлять собой спектральное распределение среднего квадратичного \bar{u}^2 продольных пульсаций. Тогда, согласно определению, мы будем иметь

$$\int_0^\infty F(n) dn = 1. \quad (18.15)$$

На математическом языке спектральная функция $F(n)$ есть не что иное, как результат преобразования Фурье автокорреляционной функции¹⁾. Спектры, изображенные на рис. 18.9, получены П. С. Клебановым [20] путем измерений в турбулентном пограничном слое на плоской пластине. Если не считать измерений, выполненных на внешнем крае пограничного слоя ($y/\delta = 1$), то наибольшее значение спектральной функции получается всегда при наименьшей измеренной частоте. С возрастанием частоты n спектральная функция очень быстро уменьшается. Как правило, существует средняя область частот n , в которой $F(n) \sim n^{-5/3}$ в полном согласии с теорией А. Н. Колмогорова, К. Ф. Вайцзеккера [50] и В. Гейзенберга.

При еще более высоких частотах спектральная функция $F(n)$ под действием кинематической вязкости уменьшается значительно быстрее. По теории В. Гейзенberга [15], при очень больших n спектральная функция $F(n) \sim n^{-7}$. В логарифмической диаграмме оба теоретических закона изменения спектральной функции $F(n)$ изображаются в виде прямых линий 1 и 2.

Спектральное распределение энергии пульсаций приводит непосредственно к представлению, что существуют турбулентные «массы» не только одного определенного размера, но самых разнообразных размеров. При больших числах Рейнольдса размеры таких турбулентных элементов отличаются один от другого на много порядков.

¹⁾ Впервые это было показано Дж. И. Тэйлором [43].

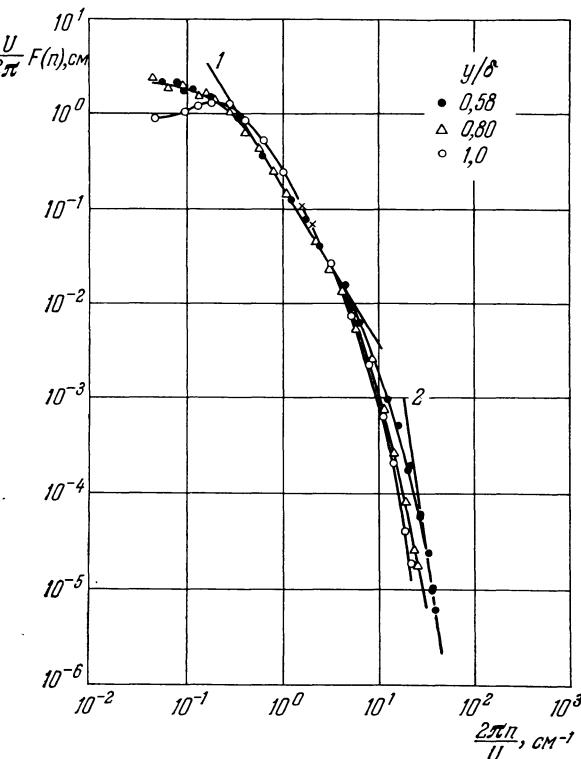


Рис. 18.9. Частотный спектр продольных пульсаций скорости в турбулентном пограничном слое на плоской пластине. По П. С. Клебанову [20]. Кривая (1): $F \sim n^{-5/3}$; кривая (2): $F \sim n^{-7}$. Теория по В. Гейзенбергу [15].

§ 5. Баланс энергии в турбулентных течениях

При турбулентном течении пульсационное (побочное) движение все время извлекает — через посредство какующихся напряжений — энергию из осредненного (главного) движения. Затем эта энергия преобразуется вследствие трения без остатка в тепло. Подставив скорости, определяемые равенствами (18.1), в выражение (12.8) для диссиpации энергии, мы увидим, что одна часть этого выражения будет зависеть только от градиентов осредненной скорости. Эта часть полной диссиpации называется *прямой диссиpацией*. Оставшаяся часть полной диссиpации, выражаящая энергию, переводимую через посредство пульсационного движения в тепло, называется *турбулентной диссиpацией*. Будучи отнесена к единице времени и к единице массы, она равна

$$\varepsilon = v \left[2 \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right]. \quad (18.16)$$

Прямая диссиpация играет существенную роль только вблизи твердых стенок, в остальных же областях преобладает роль турбулентной диссиpации.

Выражение (18.16) весьма существенно упрощается для однородной и изотропной турбулентности. Турбулентное поле называется однородным, если все статистические распределения одинаковы во всех точках пространства; изотропным оно называется в том случае, если все статистические распределения остаются неизменными также при любых поворотах и зеркальных отражениях осей, относительно которых составляются распределения. Если использовать свойства симметрии и условие неразрывности, то все члены, входящие в правую часть формулы (18.16), можно выразить в виде кратного от одного какого-нибудь члена [например, от $(\partial u'/\partial x)^2$]. Таким путем Дж. И. Тэйлор [41] вывел из формулы (18.16) простое соотношение

$$\varepsilon = 15v \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}. \quad (18.17)$$

Изотропной турбулентности в строгом смысле в действительности не существует. Турбулентное поле, которое близко подходит к введенному Дж. И. Тэйлором представлению изотропной турбулентности, возникает после прохождения равномерного потока воздуха через выпрямляющую решетку (турбулентность в аэродинамической трубе). При течениях в трубе, в пограничном слое и т. д. отклонения от изотропии значительно больше. Однако понятие изотропной турбулентности можно придать более широкий смысл, если применять его к функциям распределения не самих скоростей, а только к функциям распределения разностей скоростей. А. Н. Колмогоров¹⁾ вводит корреляционные функции вида $B = \overline{(u'_2 - u'_1)^2}$ [см. в связи с этим формулу (18.13) и рис. 18.7] и называет турбулентность *локально изотропной*, если корреляционные функции в некоторой области ограниченных размеров (т. е. области, в которой расстояния r точек 1 и 2 одна от другой ограничены) остаются неизменными при поворотах и зеркальных отражениях осей. В достаточно малой области $r \ll L$ [величина L определяется формулой (18.14)] такая локальная изотропность существует в любом турбулентном течении (следовательно, и в течениях, в которых имеют место касательные напряжения, т. е. в течениях в трубах, в пограничных слоях и т. п.), если только число Рейнольдса турбулентности $Re = \sqrt{u'^2}L/v$ достаточно велико. Исключаются только области вблизи стенок и границ. Но область локально изотропной турбулентности содержит в себе именно участки течения с большими градиентами пульсаций скорости ($\partial u'/\partial x$ и т. д.), поэтому формула (18.17) вполне применима к этой области. Соображения о подобии, впервые примененные А. Н. Колмогоровым, а позже независимо от него К. Ф. Вайцзеккером [50] и В. Гейзенбергом [45], позволяют выяснить дальнейшие подробности относительно вида корреляционных функций при небольших расстояниях r или соответственно относительно вида спектра при высоких частотах. Однако здесь мы не можем останавливаться на этих подробностях²⁾.

Для понимания турбулентности существенно уяснить следующее. Какующиеся напряжения вызываются в основном большими турбулентными образованиями — с размерами порядка величины L . Вследствие неустойчивости течения непрерывно возникают движения все меньших и меньших турбулентных образований; наконец, в самых малых турбулентных образованиях возникают столь сильные градиенты скорости ($\partial u'/\partial x$ и т. д.), что здесь, в этих элементах, происходит преобразование движения в тепло. Следовательно, энергия, переносимая через посредство какующихся напряжений из основного движения

¹⁾ Работы А. Н. Колмогорова в переводе на немецкий и английский языки, имеются в сборниках [13], [14].

²⁾ Ограничимся лишь повторной ссылкой на рис. 18.9.

в большие турбулентные образования и не зависящая от вязкости, передается ступенчатым образом на все меньшие и меньшие турбулентные образования, пока в конце концов не наступает диссипация. Именно этим механизмом и объясняется, почему при турбулентных течениях сопротивление трения и распределение средней скорости слабо зависят от числа Рейнольдса, несмотря на то, что все потери энергии вызываются вязкостью.

§ 6. Турбулентность в аэродинамической трубе

При измерениях в аэродинамической трубе важную роль играет относительная величина продольных пульсаций; знание этой величины необходимо для возможности переноса на натурный объект результатов, полученных для модели в трубе, а также для сравнения результатов, полученных в разных трубах. О том, что переход ламинарной формы течения в турбулентную сильно зависит от величины пульсационной скорости, было сказано уже в § 4 главы XVI. Величина средней пульсационной скорости в аэродинамической трубе определяется, очевидно, размером ячеек в решетках и сетках, установленных в трубе для выравнивания и успокоения потока воздуха. На некотором расстоянии позади сеток существует так называемая *изотропная турбулентность*, т. е. такое турбулентное течение, в котором средняя пульсационная скорость одинакова во всех трех координатных направлениях. Следовательно, при изотропной турбулентности

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}.$$

В этом случае в качестве меры для турбулентной пульсационной скорости (степень турбулентности) можно взять величину $\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty$, которая тождественно совпадает с величиной

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_\infty}.$$

Устройство в аэродинамической трубе достаточно большого числа тонких решеток и сеток позволяет снизить степень турбулентности, выраженную числом $\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty$, до 0,1% и ниже (см. рис. 16.16) ¹⁾.

Экспериментально установлено, что критическое число Рейнольдса, при котором коэффициент сопротивления шара резко уменьшается (см. рис. 1.5) ²⁾, сильно зависит от степени турбулентности в аэродинамической трубе. Это критическое число, лежащее в пределах от $(VD/v)_{kp} = 1,5 \cdot 10^5$ до $4 \cdot 10^5$, тем меньше, чем больше степень турбулентности. С физической точки зрения это вполне понятно, так как высокая степень турбулентности внешнего течения вызывает переход течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную при более низких числах Рейнольдса, вследствие чего точка отрыва перемещается вниз по течению, что в свою очередь приводит к сужению «мертвой» зоны за телом и к уменьшению сопротивления.

¹⁾ Влияние, оказываемое сетками с малыми размерами ячеек на степень турбулентности, тщательно исследовано Х. Л. Драйденом и Г. Б. Шубаузером [10]. Одна сетка снижает степень турбулентности в отношении $1/\sqrt{1+c}$, где c есть коэффициент сопротивления сетки. Следовательно, при установке одна за другой n сеток степень турбулентности уменьшается в $1/(1+c)^{n/2}$ раз. Таким образом, при равной потере давления получается большее снижение степени турбулентности, если установить большое число сеток с малым коэффициентом сопротивления, а не одну с большим коэффициентом сопротивления. Согласно результатам Х. Л. Драйдена и Г. Б. Шубаузера, на участке аэродинамической трубы, в котором движение воздушного потока ускоряется, абсолютное значение продольной пульсационной скорости уменьшается. Напротив, поперечные составляющие не изменяются или даже ускоряются.

²⁾ За критическое число Рейнольдса для шара принимается то значение Re , при котором коэффициент сопротивления равен $c_W = 0,3$.

Однако измерения, произведенные К. Б. Милликеном и А. Л. Клейном [28] в свободном полете, привели совершенно неожиданно к совсем другому результату, а именно: в свободном полете критическое число Рейнольдса для шара не зависит от структуры атмосферной турбулентности, безусловно меняющейся с погодой. Полученное в результате этих измерений значение $Re_{kp} = 3,85 \cdot 10^5$ больше всех измеренных значений этого числа в аэродинамических трубах и довольно близко подходит к тому значению, которое дают измерения в аэродинамической трубе с очень малой степенью турбулентности.

Независимость критического числа Рейнольдса при измерениях в полете от условий погоды следует, по-видимому, объяснить очень большими размерами турбулентных масс в атмосфере, настолько большими, что они уже не могут воздействовать на явления, происходящие в тонком пограничном слое. Так или иначе, но измерения сопротивления шара показывают, что для возможности безупречного переноса на натурные объекты результатов, полученных для моделей в аэродинамической трубе, необходимо, чтобы степень турбулентности в аэродинамической трубе была возможно меньшей. Это требование особенно важно для несущих профилей с малым сопротивлением, у которых пограничный слой сохраняется ламинарным на большом протяжении (ламинаризованные профили, см. § 2 главы XVII). Для таких профилей пригодные для использования измерения могут быть получены только в аэродинамических трубах с очень малой степенью турбулентности ($\varepsilon \approx$

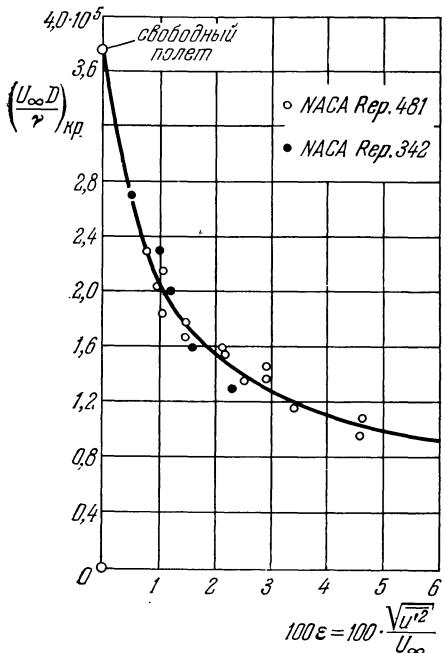


Рис. 18.10. Зависимость критического числа Рейнольдса шара от степени турбулентности в аэродинамической трубе. По Драйдену и Кьюзу [1], [7].

$\approx 0,0005$). См. в связи с этим работу [11]. Сводка данных о степени турбулентности в большом числе аэродинамических труб имеется в статье [3].

В тех случаях, когда измерения производятся в аэродинамических трубах не с малой степенью турбулентности, можно в качестве меры степени турбулентности таких труб пользоваться вместо величины $\sqrt{u'^2}/U_\infty$ критическим числом Рейнольдса для шара. Это число можно определить либо из измерения сопротивления шара, как это было сделано Х. Л. Драйденом [5], [6], либо, следуя предложению С. Хёрнера [17], из измерения разности давлений в передней критической точке и на кормовой части шара ¹⁾. Последний способ был широко использован Р. К. Плэттом [31]. Х. Л. Драйден и А. М. Кьюз [5] обнаружили однозначную связь между критическим числом Рейнольдса для шара и степенью турбулентности $\sqrt{u'^2}/U_\infty$ (рис. 18.10). Критическому числу Рейнольдса для шара $Re_{kp} = 3,85 \cdot 10^5$, измеренному в свободном полете, соответствует изчезающее малая степень турбулентности $\varepsilon \rightarrow 0$ в аэродинамической трубе.

¹⁾ Критическому значению коэффициента сопротивления шара $c_W = 0,3$ соответствует разность давлений в передней критической точке и на кормовой части шара, равная $\Delta p = 1,22 q$, где q есть динамическое давление набегающего течения.

Небольшая зависимость сопротивления от степени турбулентности наблюдается и для тел другой формы, как это показали, например, выполненные Г. Б. Шубауэром и Х. Л. Драйденом [38] измерения сопротивления пластин, поставленных перпендикулярно к потоку воздуха.

Тщательные исследования Дж. И. Тэйлора [42] и Х. Л. Драйдена [8] выявили, что сопротивление тел в воздухе зависит не только от величины пульсационных скоростей, но и от структуры турбулентности. Дж. И. Тэйлор на основе развитой им теории турбулентности показал, что критическое число Рейнольдса для шара зависит от параметра

$$\frac{V \overline{u'^2}}{U_\infty} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/5},$$

где L есть характерная длина турбулентности, определяемая как интеграл от корреляционной функции [формула (18.14)], а D — диаметр шара.

Характерная длина L турбулентности в аэродинамической трубе определяется шириной ячеек выравнивающей решетки; однако ее величина изменяется с расстоянием от решетки. Так как небольшие элементы турбулентности теряют свою кинетическую энергию быстрее, чем большие элементы, то длина L , вычисленная как среднее значение, возрастает с удалением от решетки. Развитию турбулентности позади решеток посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования. См. в связи с этим работы Дж. К. Бэтчелора [1], С. Коррсина [4], Х. Л. Драйдена [8], Т. Кармана [18], Ч. Ц. Линя [26], [27], Дж. И. Тэйлора [42], В. Толмина [47], [48].

Литература к главе XVIII

1. Batchelor G. K., *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, 1953. [Имеется русский перевод: Бэтчелор Дж., *Теория однородной турбулентности*, ИЛ, Москва 1955.]
2. Burgers J. M., *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Advances in Applied Mechanics, т. I (под ред. R. von Mises'a и Th. von Kármán'a), New York 1948. [Имеется русский перевод в сб. «Проблемы механики», вып. 1, ИЛ, Москва 1955.]
3. Cooper R. D., Tulin M. P., *Turbulence measurements with the hot-wire anemometer*. AGARDograph № 12 (1955).
4. Corrsin S., *Turbulence, experimental methods*. Handb. Physik (под ред. S. Flügge), т. VIII/2, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
5. Dryden H. L., Kuethe A. M., *Effect of turbulence in wind-tunnel measurements*. NACA Rep. 342 (1929).
6. Dryden H. L., *Reduction of turbulence in wind-tunnels*. NACA Rep. 392 (1931).
7. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Skramstad H. K., *Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds-number of spheres*. NACA Rep. 581 (1937).
8. Dryden H. L., *Turbulence investigations at the National Bureau of Standards*. Proc. Fifth Intern. Congress of Appl. Mech. 362 (1938).
9. Dryden H. L., *Turbulence and the boundary layer*. JAS 6, 85—100 (1939).
10. Dryden H. L., Schubauer G. B., *The use of damping screens for the reduction of wind-tunnel turbulence*. JAS 14, 221—228 (1947).
11. Dryden H. L., Abbott J. H., *The design of low turbulence wind-tunnels*. NACA TN 1755 (1948).
12. Favre A. J., Gaviglio J. J., Dummas R. J., *Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer*. J. Fluid Mech. 2, 313—342 (1957); *Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer*. J. Fluid Mech. 3, 344—356 (1958).
- 12a. Favre A. J., *La mécanique de la turbulence*. Издание Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1962.
126. Frencik F. N., *Turbulence in Geophysics*. Издание American Geophysical Union, Washington D. C. 1962.
13. Friedlander S. K., Topper L., *Turbulence, classic papers on statistical turbulence*. Interscience Publ., New York 1961.
14. Goering H., *Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz*. Akademie-Verlag, Berlin 1958.

15. Heisenberg W., Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Z. Phys.* **124**, 628—657 (1948).
16. H inze J. O., *Turbulence*. McGraw-Hill Book Comp., New York 1959. [Имеется русский перевод: Хинце И. О., *Турбулентность*, Физматгиз, 1963.]
17. Hoerner S., Versuche mit Kugeln betreffend Kennzahl, Turbulenz und Oberflächenbeschaffenheit. *Luftfahrtforschung* **12**, 42 (1934).
18. von Kármán Th., Progress in the statistical theory of turbulence. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington* **34**, 530 (1948); см. также *Collect. Works IV*, 363—371.
19. Klebanoff P. S., Diehl Z. W., Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient. *NACA Rep.* **1110** (1952).
20. Klebanoff P. S., Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA Rep.* **1247** (1955).
21. Kovasznay L. S. G., Turbulence measurements. Sec. F of *Physical Measurements in Gasdynamics and Combustion. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, т. IX, под ред. R. W. Ladenburg'a. Princeton University Press, 1954, 213—285. [Имеется русский перевод в книге: *Физические измерения в газовой динамике при горении*, под ред. Р. У. Ладенбурга, Б. Льюиса, Р. Н. Пиза и Х. С. Тэйлора, ИЛ, Москва 1957.]
22. Laufer J., Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. *NACA Rep.* **1053** (1951).
23. Laufer J., The structure of turbulence in fully developed pipe flow. *NACA Rep.* **1174** (1954).
24. Lawrence J. C., Intensity, scale, and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. *NACA Rep.* **1292** (1956).
25. Lin C. C., Aspects of the problem of turbulent motion. *JAS* **23**, 453—461 и 506 (1956).
26. Lin C. C., Statistical theories of turbulence. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, т. V, раздел C, 196—253 (1959), Princeton. [Имеется русский перевод в книге: *Турбулентное течение и теплопередача* под ред. Ц. Ц. Линя, ИЛ, Москва 1963.]
27. Lin C. C., Reid W. H., Turbulent flow, theoretical aspects. *Handb. Physik* (под ред. S. Flügge), т. VIII/2, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
28. Millikan C. B., Klein A. L., The effect of turbulence. *Aircraft Eng.* **169** (август 1933).
29. Mottfeld H., Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen. *ZAMM* **18**, 362—366 (1938).
30. Nikuradse J., Kinematographische Aufnahme einer turbulenten Strömung. *ZAMM* **9**, 495—496 (1929).
31. Platt R. C., Turbulence factors of NACA wind tunnel as determined by sphere tests. *NACA Rep.* **558** (1936).
32. Reichardt H., Messungen turbulenter Schwankungen. *Naturwissenschaften* **404** (1938); см. также *ZAMM* **13**, 177—180 (1933) и *ZAMM* **18**, 358—361 (1938).
33. Reynolds O., On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **186**, A 123, а также *Sci. Papers I*, 355.
34. Ribner H. S., Tucker M., Spectrum of turbulence in a contracting stream. *NACA Rep.* **1113** (1953).
35. Rotta J. C., Turbulent boundary layers in incompressible flow. *Progress in Aeronautical Sciences* (под ред. A. Ferri, D. Küchmann'a, L. H. G. Sterne'a), 2, 1—219, Pergamon Press, Oxford 1962. [Имеется русский перевод: Ротта И. К., *Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости*, Судостроение, 1967.]
36. Schlichting H., Neuere Untersuchungen über die Turbulenzentstehung. *Naturwissenschaften* **22**, 376—381 (1934).
37. Schlichting H., Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Neue Folge* **1**, 4, 47 (1935).
38. Schubauer G. B., Dryden H. L., The effect of turbulence on the drag of flat plates. *NACA Rep.* **546** (1935).
39. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Investigation of separation of the turbulent boundary layer. *NACA Rep.* **1030** (1951).
40. Simmons L. F. G., Salter C., An experimental determination of the spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* **165**, 73—89 (1938).
41. Taylor G. I., Statistical theory of turbulence. Части 1—4. *Proc. Roy. Soc. London A* **151**, 421—478 (1935).
42. Taylor G. I., Statistical theory of turbulence. Часть 5, Effect of turbulence on boundary layer. Theoretical discussion of relationship between scale of turbulence and critical resistance of spheres. *Proc. Roy. Soc. London A* **151**, 307—317 (1936); см. также *JAS* **4**, 311—315 (1937).
43. Taylor G. I., Correlation measurements in a turbulent flow through a pipe. *Proc. Roy. Soc. A* **157**, 537—546 (1936).
44. Tollmien W., Turbulente Strömungen. *Handb. der Experimentalphysik*, т. 4, часть I, 291 (1931).

45. T o l l m i e n W., Über die Korrelation der Geschwindigkeitskomponenten in periodisch schwankenden Wirbelverteilungen. ZAMM 15, 96 (1935).
46. T o l l m i e n W., S c h ä f e r M., Zur Theorie der Windkanalturbulenz. ZAMM 21, 1 (1941).
47. T o l l m i e n W., Fortschritte der Turbulenzforschung. Zusammenfassender Bericht. ZAMM 33, 200—211 (1953).
48. T o l l m i e n W., Abnahme der Windkanalturbulenz nach dem Heisenbergschen Austauschansatz als Anfangswertproblem. Wiss. Z. T. H. Dresden 2, 443—448 (1952/53).
49. T o w n s e n d A. A., The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 1956.
50. von W e i z s ä c k e r C. F., Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldsschen Zahlen. Z. Phys. 124, 614—627 (1948).
51. W i e g h a r d t K., Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt. ZAMM 20, 58—59 (1940).
52. W i e g h a r d t K., Zusammenfassender Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. Luftfahrtforschung 18, 1—7 (1941).

Г л а в а XIX

Теоретические гипотезы для расчета турбулентных течений

§ 1. Основные уравнения

Ввиду необычайной сложности турбулентных течений сколько-нибудь глубокое проникновение в механизм турбулентности представляет собой крайне трудную и пока еще нерешенную задачу. Для практических приложений необходимо знать главным образом осредненные по времени величины. Однако до сих пор не существует такой рациональной теории турбулентных течений, которая позволяла бы определять эти осредненные величины путем только расчета. Поэтому неоднократно делались попытки подойти к теоретическому исследованию турбулентных течений полуэмпирическим путем. Однако введенные для этой цели эмпирические гипотезы, хотя и были более или менее разработаны до состояния теорий, все же оказались недостаточными для полного анализа даже того вида турбулентного течения, для которого они были установлены. Наоборот, каждый раз приходилось вводить дополнительные гипотезы и экспериментальные данные о характере изменения некоторых функций или по крайней мере о некоторых численных значениях. Основная идея таких эмпирических теорий турбулентности состоит в том, чтобы вывести недостающие физические основы из результатов измерений.

Турбулентное перемешивание вызывает обмен не только импульсами, но и теплом и примесями в тех случаях, когда поле течения имеет неодинаковую температуру или неодинаковую концентрацию примесей (см. § 1 главы XXIII). В основе способов расчета турбулентных полей течения, температуры и концентрации лежат эмпирические гипотезы, связывающие силы кажущейся вязкости, вызываемой турбулентным перемешиванием, с осредненными во времени скоростями, а также соответствующие эмпирические гипотезы для тепло- и массообмена.

Только после введения таких гипотез гидродинамические дифференциальные уравнения осредненного движения (18.8), а также дифференциальные уравнения для распределения температуры принимают вид, допускающий их интегрирование.

Для переноса импульсов такие эмпирические гипотезы были предложены уже давно, еще Ж. Буссинеском [6], [18]. Согласно закону трения Ньютона, формула, определяющая касательное напряжение τ_t в ламинарном течении, имеет вид

$$\tau_t = \mu \frac{du}{dy} ,$$

где μ — коэффициент вязкости. Ж. Буссинеск предположил, что турбулентное кажущееся касательное напряжение τ_t определяется аналогичной формулой

$$\tau_t = -\rho \bar{u'v'} = A_t \frac{du}{dy} , \quad (19.1)$$

в которую вместо истинной скорости u входит осредненная скорость \bar{u} , а вместо коэффициента вязкости μ — коэффициент турбулентного обмена A_τ .

Необходимо, однако, иметь в виду, что коэффициент турбулентного обмена A_τ зависит в свою очередь от распределения скорости u и, следовательно, не является, подобно коэффициенту вязкости μ , физической константой. Это сразу видно хотя бы из того, что при турбулентном течении силы трения пропорциональны не первой степени скорости, как при ламинарном течении, а приближенно квадрату скорости. Но для этого коэффициент турбулентного обмена A_τ , как это следует из формулы (19.1), должен быть пропорционален первой степени скорости.

Вместо «динамического» коэффициента турбулентного обмена A_τ часто вводится также кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости $\varepsilon = A_\tau/\rho$ турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ ламинарного течения. В этом случае приведенные выше формулы для касательных напряжений принимают вид

$$\tau_t = \rho \nu \frac{du}{dy}$$

$$\tau_t = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.2)$$

Произведем теперь в уравнениях Навье — Стокса для осредненного турбулентного движения (18.9) такие же упрощения, какие были сделаны в § 1 главы VII при выводе уравнений пограничного слоя. Тогда с учетом соотношения (19.1) для поля скоростей двумерного несжимаемого турбулентного течения мы получим следующую систему уравнений:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (19.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (19.3b)$$

Эта система уравнений соответствует уравнениям (7.10) и (7.11) ламинарного течения. Границные условия для составляющих скорости остаются такими же, как и при ламинарном течении [равенства (7.12)].

§ 2. «Путь перемешивания» Прандтля

Гипотезы (19.1) и (19.2) могут быть применены для расчета турбулентного поля скоростей из уравнений (19.3) только в том случае, если будут известны более подробные сведения о зависимости коэффициента турбулентного обмена от скорости. Следовательно, для того чтобы использовать путь, указанный Буссинеском, необходимо попытаться найти подходящие эмпирические гипотезы о связи между коэффициентом турбулентного обмена и полем осредненных скоростей. В этой главе мы ограничимся рассмотрением поля скоростей только для несжимаемого течения, когда это поле не зависит от температурного поля. Расчетом поля скоростей для сжимаемого течения, а также расчетом температурного поля и, в частности, исследованием теплопередачи при турбулентном течении мы подробно займемся в главе XXIII.

Первый значительный успех в установлении связи между коэффициентом турбулентного обмена и полем осредненных скоростей был достигнут Л. Прандтлем [12] в 1925 г. Для изложения идеи Л. Прандтля возьмем возможное более простое осредненное движение, а именно плоское течение с направлением,

одинаковым во всех точках пространства, и со скоростью, изменяющейся только при переходе от одной линии тока к другой. Направление главного течения пусть совпадает с осью x . Следовательно,

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0.$$

Такой случай осредненного течения осуществляется, например, при течении в прямоугольном канале (на рис. 18.3 и 18.4 изображены результаты измерения пульсаций в этом течении). Из касательных составляющих тензора

напряжений в рассматриваемом случае имеется только касательное напряжение

$$\tau'_{xy} = \tau_t = -\rho \bar{u}' \bar{v}' = A_t \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.4)$$

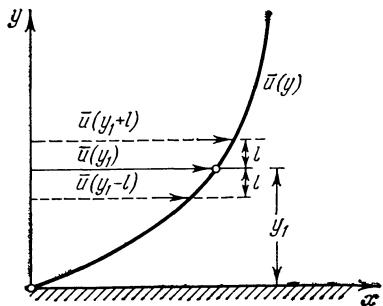


Рис. 19.1. К пояснению понятия пути перемешивания.

своего импульса. Предположим, что один такой жидкий объем, возникший в слое $(y_1 - l)$ и обладающий скоростью $\bar{u}(y_1 - l)$, перемещается на расстояние l в направлении, перпендикулярном к главному течению (рис. 19.1). Назовем расстояние l , следуя Л. Прандтлю, путем перемешивания. Если рассматриваемый жидкий объем сохраняет x -составляющую своего импульса, то в новом слое он будет иметь меньшую скорость, чем окружающая его новая среда. Разность между новой и старой скоростями будет равна

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1.$$

Последнее выражение получается в результате разложения скорости $u(y_1 - l)$ в ряд Тейлора и отбрасывания всех членов порядка выше первого. При таком поперечном течении $v' > 0$. Аналогичным образом жидкий объем, попадающий в слой y_1 из слоя $y_1 + l$, имеет в новом месте большую скорость, чем окружающая его там среда. Разность скоростей составляет

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1,$$

причем теперь $v' < 0$. Каждую из разностей скоростей Δu_1 и Δu_2 , вызванных поперечным движением, можно понимать как турбулентную пульсацию скорости в слое y_1 . Следовательно, осредненное во времени значение абсолютной величины этой пульсации будет

$$|\bar{u}'| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right|. \quad (19.5)$$

Это соотношение позволяет дать путем перемешивания l следующее физическое толкование: путь перемешивания представляет собой то расстояние в поперечном направлении течения, которое частица жидкости, двигаясь со средней скоростью своего первоначального слоя, должна пройти для того, чтобы разность ее скорости и скорости течения в новом месте стала равной осредненному значению абсолютной величины продольной пульсации турбулентного течения. При этом остается открытым вопрос, сохраняют

ли частицы жидкости при своем поперечном движении скорость первоначального слоя полностью или же они частично принимают скорость проходимого ими слоя и затем продвигаются в поперечном направлении на несколько большее расстояние. Путь перемешивания в известной мере аналогичен пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов, с той только разницей, что там происходят микроскопические движения молекул, а здесь макроскопические движения турбулентных масс¹⁾.

Возникновение пульсаций скорости в поперечном направлении можно представить себе следующим образом. Два жидких объема, один из слоя ($y_1 - l$), а другой из слоя ($y_1 + l$), попадают в слой y_1 и располагаются в нем один за другим так, что более быстрый объем ($y_1 + l$) оказывается позади более медленного объема ($y_1 - l$). В таком случае оба объема сталкиваются со скоростью $2u'$ и получают при этом боковое отклонение, в результате чего возникает поперечное движение, направленное в обе стороны от слоя y_1 . Если же впереди оказывается более быстрый объем, то они удаляются один от другого со скоростью $2u'$. В этом случае образующееся между обоими объемами промежуточное пространство заполняется окружающей жидкостью, вследствие чего возникает поперечное движение, направленное с обеих сторон к слою y_1 . Из этих рассуждений следует, что величина поперечной скорости v' имеет такой же порядок, как и величина продольной скорости u' , и поэтому мы можем написать, что

$$\overline{|v'|} = \text{число} \cdot \overline{|u'|} = \text{число} \cdot l \frac{du}{dy}. \quad (19.6)$$

Перейдем теперь к вычислению осредненного значения $\overline{u'v'}$, входящего в формулу (19.1). Изложенные выше соображения приводят к следующему выводу. Частицы жидкости, приходящие в слой y_1 с положительным значением v' (на рис. 19.1 — снизу), вызывают «обычно» отрицательную пульсацию u' , поэтому для таких частиц произведение $u'v'$ отрицательно. Частицы же жидкости, приходящие в слой y_1 с отрицательным значением v' (сверху), вызывают «обычно» положительную пульсацию u' , следовательно, для них произведение $u'v'$ также отрицательно. Говоря об «обычно» положительных или «обычно» отрицательных пульсациях, мы имеем в виду, что не исключена возможность возникновения пульсаций с противоположным знаком, но количество таких пульсаций может быть только очень небольшим. Таким образом, осредненное во времени значение $\overline{u'v'}$ отличается от нуля, и притом отрицательно. Поэтому мы можем принять, что

$$\overline{u'v'} = -k \overline{|u'|} \overline{|v'|}, \quad (19.6a)$$

где коэффициент k , по существу, совпадает с коэффициентом корреляции, определяемым равенством (18.12), и всегда больше нуля, но меньше единицы.

¹⁾ Если продольная пульсация u' изменяется во времени, то по аналогии с равенством (19.5) можно принять, что

$$u' = l' \frac{du}{dy}, \quad (19.5a)$$

где l' есть переменная длина, которая зависит от времени и может принимать положительные или отрицательные значения. Внеся значение u' в равенство (19.2), мы получим

$$\tau_t = -\rho \overline{v'l'} \frac{du}{dy} = \rho \epsilon \frac{du}{dy}. \quad (19.5b)$$

Следовательно, кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\epsilon = -\overline{v'l'}. \quad (19.5b)$$

Более точное представление о величине этого коэффициента могут дать только измерения (см. рис. 18.4). Внеся в соотношение (19.6а) вместо $|\bar{u}'|$ и $|\bar{v}'|$ их выражения (19.5) и (19.6), мы получим

$$\overline{\bar{u}'\bar{v}'} = - \text{число} \cdot l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

«Число» в этом соотношении не совпадает с «числом» в соотношении (19.6), так как в него включен также коэффициент k из равенства (19.6а). Если, наконец, мы включим это новое «число» в пока еще неизвестную длину пути перемешивания l , то будем иметь

$$\overline{\bar{u}'\bar{v}'} = - l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Внеся это значение $\overline{\bar{u}'\bar{v}'}$ в формулу (19.1) для турбулентного касательного напряжения, мы получим

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Правильнее придать этой формуле следующий вид:

$$\boxed{\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2}, \quad (19.7)$$

так как очевидно, что при изменении знака производной $d\bar{u}/dy$ должен меняться знак и касательного напряжения τ_t . Как мы увидим ниже, формула (19.7), выведенная Л. Прандтлем и содержащая в себе *длину пути перемешивания*, дает весьма плодотворные возможности для расчета турбулентных течений.

Из сопоставления формулы (19.7) Л. Прандтля и формулы (19.1) Ж. Буссинеска следует, что коэффициент турбулентного обмена равен

$$A_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (19.7a)$$

а кажущаяся кинематическая вязкость, входящая в формулу (19.2), равна

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (19.7b)$$

Из опытов известно, что при турбулентном течении сопротивление приближенно пропорционально квадрату скорости. Формула (19.7) позволяет получить этот квадратичный закон сопротивления, если принять, что длина пути перемешивания не зависит от абсолютного значения скорости. Длину пути перемешивания нельзя считать, подобно коэффициенту вязкости в законе трения Стокса, физической константой, она является по меньшей мере функцией точки.

Во многих случаях можно установить простую связь между длиной пути перемешивания l и характерными длинами в рассматриваемом течении. Так, например, в случае течения вдоль гладкой стенки длина пути перемешивания l на стенке должна быть равна нулю, так как здесь никакое поперечное движение невозможно. Однако в случае течения вдоль шероховатой стенки предельное значение длины l около стенки имеет одинаковый порядок с высотой выступов, образующих шероховатость.

Формула Прандтля (19.7) с успехом применяется для расчета *турбулентных течений вдоль стенок* (в трубе, в канале, вдоль пластины), а также для

расчета так называемой *свободной турбулентности*, т. е. таких турбулентных течений, которые не ограничены стенками. Примером свободной турбулентности может служить смешение струи с окружающей покоящейся жидкостью. Различные случаи применения формулы Прандтля будут рассмотрены в главах XX, XXI и XXIV.

§ 3. Две другие гипотезы о турбулентном касательном напряжении

Формула Прандтля (19.7) для турбулентного касательного напряжения все же не вполне удовлетворительна. В самом деле, согласно формуле (19.7б), полученной на основании формулы Прандтля, кажущаяся турбулентная вязкость должна быть равна нулю в точках, в которых $d\bar{u}/dy = 0$, т. е. в точках с максимумом или минимумом скорости; между тем это безусловно неверно, так как в действительности турбулентный обмен в точке, например, с максимумом скорости, т. е. в середине канала, не исчезает. Это подтверждается измерениями пульсаций, выполненными Г. Райхардтом (рис. 18.3) и показывающими, что в середине канала как продольные, так и поперечные пульсации не равны нулю. Для устранения такого недостатка формулы (19.7) Л. Прандтль предложил считать кажущуюся кинематическую вязкость вблизи точки с максимумом скорости, где $d\bar{u}/dy$ сильно изменяется, пропорциональной не $|d\bar{u}/dy|$, а среднему статистическому от $|d\bar{u}/dy|$, составленному для небольшой окрестности рассматриваемой точки, т. е. пропорциональной величине

$$\sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2},$$

где верхняя черта означает осреднение в пространстве. Этую осредненную по пространству величину можно представить также в виде

$$\sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 + l_1^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2},$$

где l_1 означает новую длину, которую, подобно длине l , можно определить также только путем эксперимента. Приняв такую гипотезу, мы получим для кажущейся кинематической вязкости формулу

$$\varepsilon = l^2 \sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 + l_1^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2},$$

а для кажущегося касательного напряжения — формулу

$$\tau_t = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 + l_1^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2}. \quad (19.8)$$

Наличие корня в формуле (19.8) делает ее очень неудобной для практических расчетов, и поэтому ею можно пользоваться только в особых случаях (см. главу XXIV).

Позднее с целью устранения трудностей, связанных с применением формул (19.6) и (19.8), Л. Прандтль [14] предложил еще одну формулу для кажущейся кинематической вязкости, и притом значительно более простую, чем предыдущие формулы. Однако эта формула, полученная в результате анализа обширных экспериментальных материалов Г. Райхардта [15] о свободной турбулентности, пригодна только для свободной турбулентности. Новую формулу Л. Прандтль получил, исходя из гипотезы, что жидкие объемы, перемещающиеся при турбулентном перемешивании поперек течения, имеют

размеры одного порядка с поперечными размерами зоны перемешивания, в то время как при выводе прежней формулы, основанной на представлении о пути перемешивания, предполагалось, что размеры этих объемов малы по сравнению с поперечными размерами течения.

При такой гипотезе кажущаяся кинематическая вязкость ε принимается равной произведению максимальной разности осредненных скоростей в рассматриваемом сечении на некоторую длину, пропорциональную ширине b зоны перемешивания, следовательно, принимается, что

$$\varepsilon = \kappa_1 b (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}). \quad (19.9)$$

В этой формуле κ_1 означает безразмерное число, которое можно определить только опытным путем¹⁾. Из формулы (19.9) следует, что кажущаяся кинематическая вязкость ε принимается постоянной по всей ширине каждого поперечного сечения, в то время как при прежней гипотезе [формула (19.76)] она изменяется по поперечному сечению даже в том случае, если длина пути перемешивания принимается постоянной по всему поперечному сечению. Внеся значение (19.9) в формулу (19.2) для турбулентного касательного напряжения, мы получим

$$\tau_t = \rho \kappa_1 b (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.10)$$

Примеры расчета на основании этой гипотезы будут даны в главе XXIV.

Формулу, очень сходную с формулой (19.7), получил Дж. И. Тэйлор [19], исходя из своей теории переноса завихренности. В то время как в теории Прандтля при поперечном движении жидкого объема принимается постоянной скорость \bar{u} , в теории Тэйлора принимается неизменной вихревая напряженность, т. е. величина $d\bar{u}/dy$. Это приводит к формуле

$$\tau' = \frac{1}{2} \rho l_w^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (19.11)$$

отличающейся от формулы (19.7) только множителем $1/2$. Это означает, что длина пути перемешивания в теории Тэйлора о переносе завихренности в $\sqrt{2}$ раз больше длины пути перемешивания в теории Прандтля о переносе импульсов, т. е.

$$l_w = \sqrt{2} l.$$

Из теории Дж. И. Тэйлора в хорошем согласии с результатами опытов следует, что в зоне перемешивания позади цилиндрического стержня распределение температуры и распределение вихревой напряженности подчиняются одному и тому же закону, так как в рассматриваемом случае оси вихрей расположены преимущественно перпендикулярно к направлению главного течения и к направлению градиента скорости. При течении же вблизи стенки, где, в противоположность предыдущему случаю, преобладают вихри с осьми, параллельными направлению основного течения, очень хорошо совпадают распределение температуры и распределение скоростей.

¹⁾ Сравнив эту формулу с формулой (19.5в), мы увидим, что при новой гипотезе поперечная пульсация u' пропорциональна разности $u_{\max} - u_{\min}$, а путь перемешивания пропорционален ширине b . Формулу для кажущейся кинематической вязкости ε , очень сходную с формулой (19.9), предложил также Г. Райхардт [15].

§ 4. Гипотеза подобия Кармана

Для расчета турбулентных течений очень желательно иметь правило, позволяющее определять для любого течения зависимость длины пути перемешивания от координат точек потока. Попытку отыскания такого правила предпринял Т. Карман [9]. Для этой цели он ввел следующую гипотезу о механизме турбулентного течения: поля пульсационных скоростей во всех точках подобны одно другому, т. е. отличаются одно от другого только масштабами времени и длины (*гипотеза подобия*). Вместо масштабов для времени и длины можно взять масштабы для скорости и длины. Длиной, характерной для пульсационного движения, является, как мы сейчас увидим, длина пути перемешивания l . За скорость, характерную для турбулентного побочного движения, можно взять величину

$$v_* = \sqrt{\frac{|\tau_l|}{\rho}} = \sqrt{|u'v'|}, \quad (19.12)$$

получаемую из формулы (19.1) для турбулентного касательного напряжения. Будем называть величину v_* *динамической скоростью*¹⁾. Эта скорость является мерой интенсивности турбулентного пульсационного движения, а также мерой интенсивности переноса импульсов, осуществляемого пульсационным движением.

Для получения выводов, вытекающих из введенной гипотезы подобия, рассмотрим двумерное осредненное движение

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = 0,$$

т. е. слоистое течение, происходящее в направлении x , и примем, что поле скоростей возмущений также двумерно и обладает функцией тока $\psi(x, y)$. Тогда для определения этой функции мы получим, если пренебречь вязкостью, дифференциальное уравнение пульсаций

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left(\bar{u} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = 0,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ есть оператор Лапласа [см. уравнение (4.10)]. Рассмотрим окрестность точки x_0, y_0 , в которой жидкость движется со скоростью \bar{u}_0 , и разложим в этой окрестности осредненную скорость \bar{u} в ряд Тэйлора. Мы получим

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0 (y - y_0)^2 + \dots \quad (19.13)$$

Введем теперь систему координат, движущуюся со скоростью \bar{u}_0 , и предположим, что в этой системе координат побочное движение стационарное. Тогда уравнение пульсаций после внесения в него значения \bar{u} примет вид

$$(y - y_0) \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0. \quad (19.14)$$

На основании введенной гипотезы подобия функция тока пульсационного движения в отдельных точках может отличаться от своего значения в точке x_0, y_0 только масштабами длины и скорости. Пусть каждой точке соответствует свой масштаб длины l и свой масштаб скорости B . В таком случае, введя безразмерные амплитуды ξ, η побочного движения и безразмерную функцию тока $f(\xi, \eta)$, мы можем принять, что

$$x - x_0 = l\xi, \quad y - y_0 = l\eta, \quad \psi = Blf(\xi, \eta). \quad (19.15)$$

¹⁾ В подлиннике применяется термин «скорость касательного напряжения» (Schubspannungsgeschwindigkeit). — Прил. перев.

Внеся эти выражения в уравнение (19.14) и разделив затем все члены на

$$\frac{B}{l} \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0,$$

мы получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции $f(\xi, \eta)$:

$$\eta \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{l \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0}{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{l B}{l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0,$$

где Δ означает оператор Лапласа $\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$. На основании введенной гипотезы подобия это уравнение не должно зависеть от величин $l, B, (d\bar{u}/dy)_0$ и $(d^2\bar{u}/dy^2)_0$, зависящих от координат x и y . Для выполнения такого требования необходимо, чтобы соблюдались равенства

$$\frac{l \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0}{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0} = \text{const}, \quad \frac{B}{l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0} = \text{const}.$$

Следовательно, масштабы скорости и длины определяются соотношениями

$$B \sim l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0, \quad l \sim \left(\frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}} \right)_0. \quad (19.16)$$

На основании второго из этих соотношений Т. Карман полагает длину пути перемешивания равной

$$l = \kappa \sqrt{\frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}}}, \quad (19.17)$$

где κ есть эмпирическая безразмерная постоянная. Согласно формуле (19.17) длина l пути перемешивания зависит не от модуля скорости, а лишь от распределения скоростей. Следовательно, в соответствии с поставленным выше требованием длина пути перемешивания есть функция только координат точки. Постоянная κ может быть определена только из опыта и представляет собой универсальное безразмерное число, одинаковое для всех турбулентных течений при условии, что осредненное распределение скоростей этих течений удовлетворяет принятым выше допущениям (слоистое течение).

Турбулентное касательное напряжение τ_t определяется осредненным по времени значением величины

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Согласно формулам (19.15) это осредненное значение пропорционально величине

$$\frac{\rho (Bl)^2}{l^2} = \rho B^2$$

или, на основании первого из соотношений (19.16), величине $\rho l^2 (d\bar{u}/dy)^2$. Следовательно,

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (19.18)$$

что совпадает с формулой (19.7), выведенной на основании гипотезы Л. Прандтля о пути перемешивания. Таким образом, гипотеза Кармана приводит к такой же формуле для турбулентного касательного напряжения, как и гипотеза Прандтля о пути перемешивания.

Из сказанного выше вытекает также следующее. Так как

$$\tau_t \sim \rho B^2,$$

то масштаб скорости

$$B \sim \sqrt{\frac{\tau_t}{\rho}},$$

но на основании равенства (19.12) $\sqrt{\tau_t/\rho} = v_*$, поэтому масштаб скорости B пропорционален динамической скорости v_* , как это и было принято в начале настоящего параграфа.

Наконец, введя длину пути перемешивания, определяемую формулой (19.17), в равенство (19.18), мы получим для турбулентного касательного напряжения формулу

$$\tau_t = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2}. \quad (19.19)$$

А. Бетц [4] вывел формулу (19.17) более наглядным путем. Строгое доказательство гипотезы подобия дал Г. Хамель [7]. См. в связи с этим также замечание О. Бьёргума [5] о формуле (19.19). В настоящее время гипотеза подобия распространена также на сжимаемые турбулентные течения [11].

§ 5. Универсальные законы распределения скоростей

Как закон турбулентного трения Кармана [уравнение (19.19)], так и закон Прандтля [уравнение (19.7)] позволяют очень просто вывести универсальный закон распределения скоростей в канале с плоскими стенками. Этот закон может быть распространен также на трубы с круглым поперечным сечением. Поясним его, так как в следующих главах он будет играть фундаментальную роль.

Пусть канал имеет ширину $2h$, и пусть ось его совпадает с осью x . Координату y будем измерять от оси канала в направлении, перпендикулярном к стенке. Градиент давления вдоль оси канала примем постоянным, следовательно, $\partial p / \partial x = C$ ¹). Тогда вследствие соотношения

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

касательное напряжение распределяется по ширине канала линейно, т. е.

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{h}, \quad (19.20)$$

где τ_0 есть касательное напряжение на стенке.

1. **Закон скоростей в средней части потока по Карману.** Внеся турбулентное касательное напряжение τ_t , определяемое формулой Кармана (19.19), в соотношение (19.20), мы получим

$$\frac{\tau_0}{\rho} \frac{y}{h} = \kappa^2 \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2}.$$

¹⁾ Начиная отсюда, мы больше не будем ставить черточек над осредненными величинами, так как теперь невозможно спутать последние с величинами, изменяющимися во времени.

Дважды проинтегрировав это уравнение и определив постоянные интегрирования ($u = u_{\max}$ при $y = 0$), мы будем иметь

$$u = u_{\max} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right] + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\}.$$

Введя в это соотношение динамическую скорость $v_{*0} = \sqrt{\tau_0/\rho}$, составленную для касательного напряжения τ_0 на стенке, мы сумеем переписать его в следующем безразмерном виде:

$$\frac{u_{\max} - u}{v_{*0}} = - \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right] + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\}, \quad (19.21)$$

причем y означает здесь расстояние от середины канала. В этом виде универсальный закон распределения скоростей был выведен Т. Карманом. Графически этот закон представлен на рис. 19.2 в виде штриховой кривой 2. Мы видим, что в середине канала это распределение скоростей имеет излом, что объясняется невыполнением здесь условия подобия. В самом деле, согласно формуле (19.17) в середине канала длина l пути перемешивания равна нулю, что, конечно, не соответствует действительности. На стенках, где $y = h$, уравнение (19.21) дает бесконечно большую скорость. Причина этого заключается в пренебрежении молекулярным, а также турбулентным кажущимся трением. Вблизи стенки это допущение не выполняется. Здесь турбулентный пограничный слой смыкается с ламинарным подслоем. Этот вопрос требует особого исследования, и к нему мы вернемся позже. Поэтому пока мы исключим из нашего рассмотрения небольшие области непосредственно около середины канала и непосредственно около стенок. Уравнение (19.21) особенно примечательно тем, что оно не содержит в явной форме ни

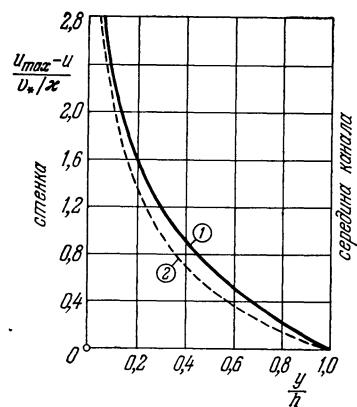


Рис. 19.2. Универсальный закон распределения скоростей для турбулентного течения в канале. По Карману и Прандтлю [1], [12]. Кривая (1) соответствует формуле (19.28), кривая (2)—формуле (19.21); y — расстояние от стенки.

шероховатости, ни числа Рейнольдса (19.21) можно сформулировать следующим образом: кривые распределения скоростей по ширине канала, полученные для любых чисел Рейнольдса и для любых шероховатостей, можно привести в совпадение, если разности скоростей $u_{\max} - u$, сделанные безразмерными путем деления на v_{*0}/κ , отложить в виде ординат на абсциссах y/h . Сравнение этого закона, который применим также для круглых труб, с экспериментальными результатами будет дано в § 3 главы XX.

2. Пристеночный закон скоростей по Прандтлю. Аналогичный универсальный закон распределения скоростей можно вывести из формулы Прандтля (19.7). Такой вывод позволяет одновременно выявить те соотношения, которые имеют место в непосредственной близости от стенок и которые были исключены из предыдущего рассмотрения. Пусть мы имеем турбулентное течение вдоль гладкой плоской стенки. Обозначим через y расстояние от стенки и через u (или $u(y)$) распределение скоростей. Примем, что вблизи стенки длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию y от стенки, т. е.

$$l = \kappa y, \quad (19.22)$$

¹⁾ Конечно, в неявном виде шероховатость стенок и влияние числа Рейнольдса содержатся в касательном напряжении τ_0 на стенке.

где κ есть безразмерная постоянная, которая должна быть определена из опыта. Гипотеза (19.22) вполне уместна, так как на стенке турбулентное касательное напряжение равно нулю, поскольку здесь пульсационное движение исчезает. Внеся выражение (19.22) в формулу Прандтля (19.7), мы получим

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (19.23)$$

Далее, следуя Л. Прандтлю, введем предположение, что касательное напряжение постоянно, т. е. что $\tau = \tau_0$, где τ_0 есть касательное напряжение на стенке. Если ввести в соотношение (19.23) динамическую скорость на стенке

$$v_{*0} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (19.24)$$

то оно примет вид

$$v_{*0}^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (19.25)$$

откуда

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_{*0}}{\kappa y}. \quad (19.26)$$

Проинтегрировав это уравнение, мы получим

$$u = \frac{v_{*0}}{\kappa} \ln y + C. \quad (19.27)$$

Постоянная интегрирования C должна быть определена из условия на стенке. Это даст возможность сомнуть турбулентное распределение скоростей с ламинарным распределением в ламинарном подслое. Однако, даже не производя такого определения, мы можем получить из соотношения (19.27) закон, аналогичный закону (19.21). Хотя вследствие предположения, что $\tau = \text{const}$, формулу (19.27) можно применять только на близких расстояниях от стенки, попробуем все же применить ее и на больших расстояниях, вплоть до середины канала $y = h$. Тогда, учитя, что $u = u_{\max}$ при $y = h$, мы получим

$$u_{\max} = \frac{v_{*0}}{\kappa} \ln h + C.$$

Вычтя из этого равенства равенство (19.27), мы будем иметь

$$\frac{u_{\max} - u}{v_{*0}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{y}. \quad (19.28)$$

где y есть расстояние от стенки. График этого универсального закона распределения скоростей изображен на рис. 19.2 в виде кривой 1. Таким образом, из формулы Прандтля (19.7) получается универсальный закон распределения скоростей, по своей структуре сходной с универсальным законом (19.21), основанным на гипотезе подобия Кармана. Оба закона отличаются один от другого только видом функций от аргумента y/h в правых частях формул (19.21) и (19.28). Это вполне понятно, так как в основу каждого закона положены разные допущения. А именно при выводе закона Кармана было принято, что касательное напряжение распределяется по ширине канала линейно, а длина пути перемешивания $l \sim u'/u''$, при выводе же закона Прандтля касательное напряжение было взято постоянным, а длина l пути перемешивания была принята пропорциональной расстоянию от стенки. В какой мере оба закона дают различные результаты, показывают кривые 1 и 2 на рис. 19.2. О сравнении обоих законов с результатами опыта будет сказано в главе XX.

Попутно заметим, что если принять логарифмический закон распределения скоростей (19.27) заданным, то с помощью формулы Кармана (19.17)

из него можно вывести соотношение $l = \kappa y$, т. е. то допущение (19.22), которое было положено в основу вывода закона (19.27). Отсюда следует, что число κ в равенстве (19.22) совпадает с числом κ в равенстве (19.17).

Остановимся немного на вопросе определения постоянной интегрирования в уравнении (19.27). Как уже было сказано выше, это определение следует выполнить путем смыкания турбулентного распределения скоростей с ламинарным распределением в непосредственной близости от стенки, там, где ламинарное и турбулентное касательные напряжения по своей величине одного порядка. Определим постоянную интегрирования C из условия, что скорость равна $u = 0$ на некотором весьма малом расстоянии y_0 от стенки; тогда мы будем иметь

$$u = \frac{v_{*0}}{\kappa} (\ln y - \ln y_0). \quad (19.29)$$

Расстояние y_0 по своей величине одного порядка с толщиной ламинарного подслоя. Из кинематической вязкости v и динамической скорости v_{*0} можно составить длину v/v_{*0} . Из соображений о размерности расстояние y_0 должно быть пропорционально длине v/v_{*0} . Примем, что

$$y_0 = \beta \frac{v}{v_{*0}}, \quad (19.30)$$

где β есть безразмерная постоянная. Внеся это выражение в уравнение (19.29), мы получим

$$\frac{u}{v_{*0}} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y v_{*0}}{v} - \ln \beta \right). \quad (19.29a)$$

Этот логарифмический закон распределения скоростей определяет безразмерную скорость u/v_{*0} как функцию безразмерного расстояния $y v_{*0}/v$ от стенки, которое можно рассматривать как своего рода число Рейнольдса, составленное из расстояния y от стенки и динамической скорости v_{*0} на стенке. Уравнение (19.29a) содержит две эмпирические постоянные κ и β . Если учесть предпосылки, положенные в основу вывода этого уравнения, то следует ожидать, что постоянная κ не зависит от свойств стенки, т. е. от того, гладкая ли она или шероховатая. Следовательно, κ является универсальной постоянной турбулентного течения. Экспериментальные исследования, о которых будет сказано в следующей главе, дают для κ значение $\kappa = 0.4$. Вторая постоянная β зависит от свойств стенки; ее численные значения будут указаны также в следующей главе.

Введем для безразмерных скорости и расстояния от стенки, входящих в уравнение (19.29a), обозначения

$$\frac{u}{v_{*0}} = \varphi, \quad (19.31)$$

$$\frac{y v_{*0}}{v} = \eta. \quad (19.32)$$

Тогда закон распределения скоростей (19.29a) можно будет переписать в следующем сокращенном виде:

$$\varphi(\eta) = A_1 \ln \eta + D_1, \quad (19.33)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\kappa} = 2.5; \quad D_1 = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta. \quad (19.34)$$

Универсальный закон распределения скоростей (19.33), выведенный здесь для течения вдоль плоской стенки (течение в канале), имеет фундаментальное значение также для течения в круглой трубе. Это течение мы рассмотрим

в следующей главе. Там же мы увидим, что закон (19.33) очень хорошо подтверждается измерениями.

Еще раз подчеркнем, что универсальные законы распределения скоростей выражаемые формулами (19.21) и (19.27) [или (19.33)], выведены для такого турбулентного течения, в котором, за исключением тонкого слоя в непосредственной близости от стенок, учитывается только турбулентное касательное напряжение, ламинарное же трение в расчет не принимается. Такое допущение оправдывается лишь при сравнительно больших числах Рейнольдса. С этой точки зрения универсальные законы распределения скоростей, особенно закон (19.33), следует рассматривать как асимптотические законы для

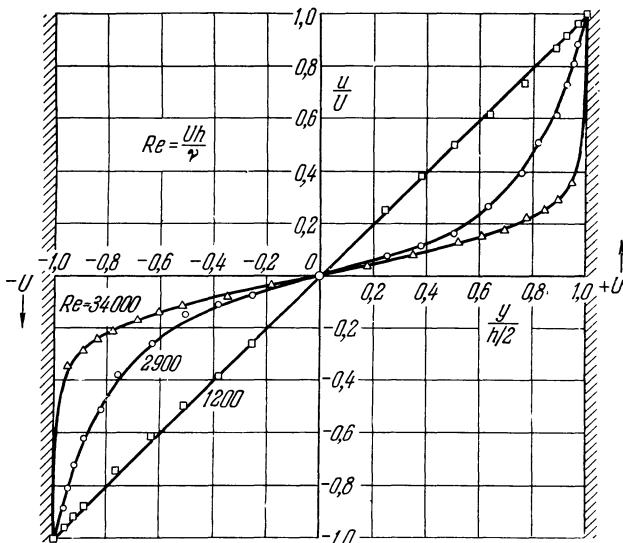


Рис. 19.3. Распределение скоростей в прямолинейном течении Куэтта между двумя параллельными плоскими стенками, движущимися в противоположные стороны. По Г. Райхардту [16], [17]. При $Re = 1200$ течение ламинарно, при $Re = 2900$ и $34\,000$ — турбулентно.

очень больших чисел Рейнольдса. При меньших числах Рейнольдса ламинарное трение необходимо учитывать не только в очень тонком пристеночном слое, но и во всем течении, и опыты дают вместо логарифмического закона (19.33) степенной закон

$$\varphi(\eta) = C\eta^n, \quad (19.35)$$

или в раскрытом виде

$$\frac{u}{v_{*0}} = C \left(\frac{yv_{*0}}{v} \right)^n,$$

причем показатель степени n равен приблизительно $1/7$ и слабо зависит от числа Рейнольдса. Этот закон распределения скоростей мы рассмотрим подробно в следующей главе.

Примером течения с постоянным касательным напряжением, особенно простым с точки зрения теории, является так называемое течение Куэтта между двумя параллельными плоскими стенками, движущимися одна относительно другой (рис. 1.1). В этом течении, тщательно исследованном Г. Райхардтом [16], [17], касательное напряжение τ в точности постоянно как при ламинарном, так и при турбулентном движении и равно касательному напряжению τ_0 на стенке. На рис. 19.3 изображены полученные Г. Райхардтом результаты измерений распределения скоростей в течении Куэтта при различных числах Рейнольдса. При числе Рейнольдса $Re < 1500$ течение лами-

нарно и распределение скоростей очень хорошо совпадает с линейным. При $Re > 1500$ течение становится турбулентным. Турбулентные профили скоростей в середине течения имеют довольно пологий вид, но около стенок они круто загибаются. Для турбулентного течения такой вид профилей скоростей вполне закономерен. В самом деле, при турбулентном течении касательное напряжение складывается из ламинарной части $\tau_l = \mu (du/dy)$ и турбулентной части $\tau_t = A_\tau (\bar{du}/dy)$, обусловленной турбулентным перемешиванием. Следовательно,

$$\tau = \tau_0 = (\mu + A_\tau) \frac{\bar{du}}{dy},$$

где A_τ есть коэффициент турбулентного обмена, определяемый соотношением (19.1). Таким образом, градиент скорости $d\bar{u}/dy$ пропорционален величине $1/(\mu + A_\tau)$. Так как коэффициент A_τ на стенке равен нулю, а в середине канала достигает максимума, то профиль скоростей около стенки должен подниматься круто, а в середине канала — полого, т. е. так, как это показывает рис. 19.3. Коэффициент турбулентного обмена возрастает с увеличением числа Рейнольдса, поэтому кривизна профиля скоростей при увеличении числа Рейнольдса также возрастает.

§ 6. Другие гипотезы для расчета турбулентных течений

Рассмотренные выше полуэмпирические теории хотя и позволяют производить расчет турбулентных течений (примеры такого расчета будут даны в следующих главах), все же оставляют желать лучшего, поскольку каждая из них приспособлена только к одному определенному, а не ко всем видам турбулентного течения. Так, например, формула Прандтля (19.7) совершенно неприменима к изотропной турбулентности, возникающей позади решетки с мелкими ячейками, так как при такой турбулентности градиент скорости основного течения всюду равен нулю. В связи с этим Л. Прандтль [13] предложил существенное обобщение теорий расчета развитой турбулентности, изложенных в § 2 и 3 настоящей главы. Обобщенная теория дает систему формул, пригодную для всех видов турбулентности (турбулентность вблизи стенки, свободная турбулентность, изотропная турбулентность). В новой теории Л. Прандтля за основу берется кинетическая энергия турбулентного пульсационного движения, равная

$$E = \frac{\rho}{2} (\bar{u'^2} + \bar{v'^2} + \bar{w'^2}),$$

и затем для частицы, движущейся вместе с основным течением, вычисляется изменение во времени этой энергии, т. е. величина DE/Dt . Это изменение складывается из трех частей: во-первых, из уменьшения энергии вследствие внутренних сопротивлений при движении турбулентных объемов, во-вторых, из подвода энергии в возмущающее движение из основного течения — эта часть пропорциональна $(dU/dy)^2$ — и, в-третьих, из переноса энергии турбулентности в слабо турбулизованные области из сильно турбулизованных областей. Составление баланса перечисленных составных частей полного изменения энергии приводит к дифференциальному уравнению турбулентного пульсационного движения. Это уравнение, названное Л. Прандтлем первым главным уравнением, следует присоединить к дифференциальным уравнениям основного течения. Первое главное уравнение содержит три свободных постоянных (по одной на каждую из указанных составляющих), которые должны быть определены опытным путем. В качестве второго уравнения используется соотношение между турбулентным касательным напряжением и градиентом скорости основного течения, сходное с формулой (19.7) для пути перемешивания, но содержащее также энергию турбулентного пульсационного движения. При изотропной турбулентности, возникающей, например, позади успокоительной решетки с малыми ячейками, из всех указанных составных частей изменений энергии имеется только первая часть, поэтому позади решетки по мере удаления от нее происходит затухание турбулентности. В случае течения в канале имеются все три части изменения энергии, однако третья часть (перенос энергии турбулентности) играет существенную роль только вблизи стенок и вблизи середины канала (область вблизи стенок является особенно сильно турбулизованной, так как здесь трение вызывает частое образование турбулентных объемов, а область вблизи середины канала, наоборот, особенно слабо турбулизована, так как здесь турбулентные объемы возникают редко, см. рис. 18.3). Определение трех свободных постоянных из измерений, выполненных в изотропном турбулентном течении, а также в каналах и трубах, дало удовлетворительное совпадение численных значений для различных случаев.

Литература к главе XIX

1. Batchelor G. K., Energy decay and self-preserving correlation functions in isotropic turbulence. *Quart. Appl. Math.* 6, 97—116 (1948).
2. Batchelor G. K., Townsend A. A., The nature of turbulent motion at large wave-numbers. *Proc. Roy. Soc. London A* 199, 238—255 (1949).
3. Batchelor G. K., The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 1953. [Имеется русский перевод: Б а т ч е л о р Дж., Теория однородной турбулентности, ИЛ, Москва 1955.]
4. Betz A., Die von Kármánsche Ähnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischer Auffassung. *ZAMM* 11, 397 (1931).
5. Bjorgum O., On the steady turbulent flow along an infinitely long smooth and plane wall. Universitetet i. Bergen, Arbok (1951). Naturvitenskapelig rekke № 7.
6. Boussinesq J., Théorie de l'écoulement tourbillant. *Mém. prés. Acad. Sci. XXIII*, 46, Paris (1877).
7. Hamel G., Streifenmethode und Ähnlichkeitsbetrachtungen zur turbulenten Bewegung. Abhdlg. preuss. Akad. Wiss., Math. Naturwiss. Klasse, № 8 (1943).
8. Heisenberg W., Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Z. Phys.* 124, 628—657 (1948).
9. v. Kármán Th., Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 58 (1930) и *Verhandl. d. III. Intern. Kongress für Techn. Mechanik, Stockholm*, часть. I, 85 (1930); NACA TM 611 (1931); см. также *Collect. Works II*, 337—346.
10. v. Kármán Th., Progress in the statistical theory of turbulence. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington* 34, 530—539 (1948); см. также *Collect. Works IV*, 363—371.
11. Lin C. C., Shen S. F., Studies of v. Kármán's similarity theory and its extension to compressible flows. A similarity theory for turbulent boundary layer over a flat plate in compressible flows. NACA TN 2542 (1951); см. также NACA TN 2543 (1951).:
12. Prandtl L., Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM* 5, 136—139 (1925) и Verhdlg. d. II. Intern. Kongr. f. angew. Mech., Zürich 1926, 62—75; см. также *Gesammelte Abhdlg.* II, 736—751.
13. Prandtl L., Über ein neues Formelsystem der ausgebildeten Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* 6—19 (1945); см. также *Gesammelte Abhdlg.* II, 874—888.
14. Prandtl L., Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz. *ZAMM* 22, 241—243 (1942); см. также *Gesammelte Abhdlg.* II, 869—873.
15. Reichardt H., Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. *VDI-Forschungsheft* 414, Berlin 1942; изд. 2-е, Berlin 1951.
16. Reichardt H., Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couette-Strömung. *ZAMM* 36, Sonderheft 26—29 (1956); см. также *Mitt. № 9 des Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung*, Göttingen 1954.
17. Reichardt H., Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couette-Strömung. *Mitt. № 22 des Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung und der AVA* Göttingen (1959).
18. Schmidt W., Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg 1925.
19. Taylor G. I., The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. *Proc. Soc. A* 135, 685—705 (1932); см. также *Phil. Trans. A* 215, 1—26 (1915).
20. Weizsäcker C. F., Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds-schen Zahlen. *Z. Phys.* 124, 614—627 (1948).

Г л а в а XX

Турбулентное течение в трубах

§ 1. Экспериментальные результаты для гладких труб

Из различных турбулентных течений, встречающихся в технических условиях, течение в трубах имеет особенно большое практическое значение, и поэтому оно служило предметом многочисленных исследований [²²], [²⁶], [⁴¹], [⁴²], [⁵⁰], [⁵²], [⁵³], [⁶²], [⁶³] ¹⁾. Однако полученные при этих исследованиях результаты цепны для понимания законов турбулентного течения не только в трубах, но и в любых других условиях. Только на основе тщательных экспериментальных исследований течений в трубах стало возможно выявить особенности других турбулентных течений, например турбулентного течения вдоль плоской стенки или около удобообтекаемого тела.

Если жидкость втекает в трубу с круглым поперечным сечением из большого резервуара, то на протяжении некоторого участка трубы, начиная от входа в нее, образуется *входное течение*, в котором распределение скоростей по поперечному сечению изменяется по мере удаления от входа. Около самого входа распределение скоростей по поперечному сечению почти равномерно, но дальше от входа профиль скоростей под воздействием сил трения начинает постепенно вытягиваться, пока, наконец, на некотором расстоянии от входа не принимает свою окончательную, в дальнейшем не изменяющуюся форму. О длине *входного*, или *начального*, участка трубы при ламинарном течении уже было сказано в § 2 главы XI (см. рис. 11.8). Эта длина равна

$$l_{\text{вх}} = 0,03d \text{Re},$$

следовательно, при $\text{Re} = 5000$ и $\text{Re} = 10\,000$ составляет соответственно 150 или 300 диаметров трубы. При турбулентном течении длина начального участка значительно короче, чем при ламинарном течении, и составляет по измерениям Г. Кирстена [²⁸] от 50 до 100 диаметров трубы, а по измерениям И. Никурадзе [³⁸] — от 25 до 40 диаметров. См. также работу [⁶⁶]. В дальнейшем мы будем заниматься только развитым турбулентным течением.

Рассмотрим прямолинейную трубу с круглым поперечным сечением. Радиальную координату y' будем измерять от оси трубы. Выделим в жидкости, в области развитого турбулентного течения, цилиндр, имеющий длину L и радиус y' . Так как в данном случае силы инерции отсутствуют, то цилиндр находится в равновесии под действием касательных напряжений τ , приложенных к его боковой поверхности, и разности давлений $p_1 - p_2$,

¹⁾ В дальнейшем при изложении экспериментальных результатов мы используем главным образом две работы И. Никурадзе [³⁸], [³⁹].

действующих на его основания¹⁾. Следовательно,

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{y'}{2} \quad (20.1)$$

[см. формулу (1.9)]. Эта формула применима как к ламинарным, так и к турбулентным течениям. Сейчас в ней τ обозначает сумму ламинарного и турбулентного касательных напряжений. Согласно формуле (20.1) касательное напряжение распределяется по поперечному сечению линейно. Наибольшее касательное напряжение имеет место около стенки трубы, где оно равно

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_0}{L} \frac{R}{2}. \quad (20.2)$$

Следовательно, касательное напряжение τ_0 на стенке может быть определено экспериментально путем измерения перепада давления.

Для ламинарного течения связь между перепадом давления и количеством протекающей жидкости $Q = \pi R^2 \bar{u}$ (расход) определяется чисто теоретически, и при этом получается хорошее совпадение с опытом²⁾. Для турбулентного течения такую связь можно установить только на основе измерений, так как чисто теоретический расчет турбулентных течений в настоящее время пока еще невозможен. Связь между перепадом давления и расходом устанавливается законом сопротивления для движения в трубе. В литературе известно большое число формул, определяющих сопротивление в трубе, причем более старые из них выведены без учета закона подобия Рейнольдса и зависят от выбора единиц. В настоящее время таким формулам придают безразмерный вид, для чего вводят безразмерный коэффициент сопротивления λ , определяемый соотношением

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2, \quad (20.3)$$

где $d = 2R$ есть диаметр трубы [см. формулу (5.10)]. Сравнив равенства (20.2) и (20.3), мы получим формулу

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{u}^2, \quad (20.4)$$

которой в дальнейшем будем часто пользоваться.

В 1911 г. Г. Блазиус [5] впервые критически рассмотрел накопившийся к тому времени обширный экспериментальный материал и обработал его с учетом закона подобия Рейнольдса. Для коэффициента сопротивления в гладких трубах с круглым поперечным сечением он получил следующую эмпирическую формулу:

$$\lambda = 0,3164 \left(\frac{\bar{u}d}{v} \right)^{-1/4}, \quad (20.5)$$

называемую в настоящее время законом сопротивления Блазиуса. В этой формуле $\bar{u}d/v = Re$ есть число Рейнольдса, составленное для диаметра трубы и средней скорости течения. Согласно этой формуле безразмерный коэффи-

¹⁾ Начиная отсюда, мы будем опускать над буквеннную черточку над осредненными по времени величинами, так как теперь, как уже было сказано в примечании на стр. 529, невозможно спутать эти величины с величинами, зависящими от времени.

²⁾ В дальнейшем через \bar{u} мы будем обозначать среднюю по поперечному сечению скорость течения в трубе, а через U — максимальную скорость в поперечном сечении. Средняя скорость \bar{u} определяется равенством $\bar{u} = Q/\pi R^2$.

ицент сопротивления есть функция только числа Рейнольдса. Закон Блазиуса применим для чисел Рейнольдса

$$Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} \leqslant 100\,000.$$

Следовательно, при турбулентном течении в указанной области чисел Рейнольдса перепад давления пропорционален $\bar{u}^{7/4}$. Измерений, произведенных в гладких трубах при больших числах Рейнольдса, в то время не было. На рис. 20.1 показано сравнение закона Блазиуса (20.5) с результатами опытов. Мы видим, что до $Re = 100\,000$ этот закон дает очень хорошее совпадение с измерениями. На том же рисунке отложены экспериментальные значения λ также для чисел Рейнольдса

$$Re > 100\,000,$$

полученные И. Никурадзе [38]. Эти значения сильно отклоняются кверху от кривой, соответствующей закону Блазиуса

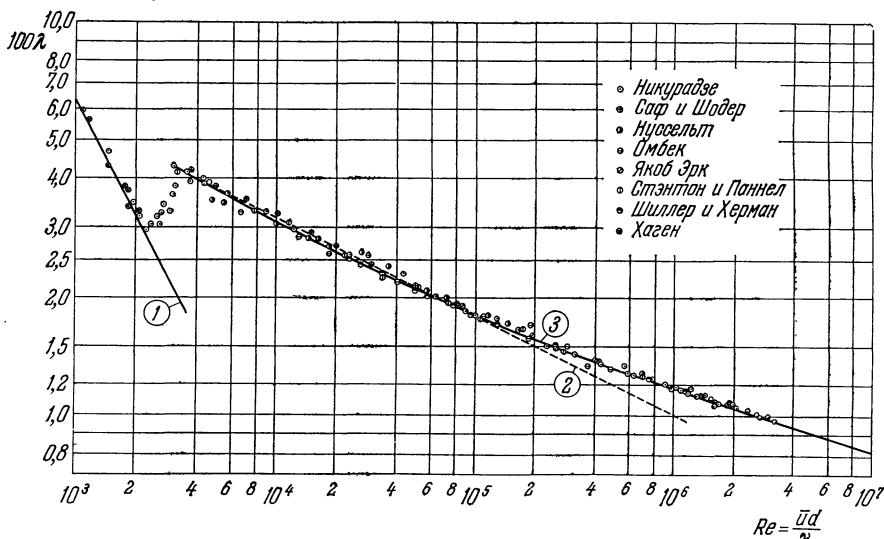


Рис. 20.1. Закон сопротивления для течения в гладкой трубе. Кривая (1) — при ламинарном течении, формула (5.11), до Хагена — Пуазейлю. Кривая (2) — при турбулентном течении, формула (20.5), по Блазиусу [5]. Кривая (3) — при турбулентном течении, формула (20.30), по Прандтлю [44].

И. Никурадзе произвел весьма тщательные измерения сопротивления и распределения скоростей в гладких трубах в очень широкой области чисел Рейнольдса:

$$4 \cdot 10^3 \leqslant Re \leqslant 3,2 \cdot 10^6.$$

Безразмерные распределения скоростей для некоторых чисел Рейнольдса изображены на рис. 20.2 (на оси ординат отложены безразмерные скорости u/U , а на оси абсцисс — безразмерные расстояния y/R). Мы видим, что с увеличением числа Рейнольдса профили скоростей становятся все более полными. Уравнение профиля скоростей можно взять в виде

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}. \quad (20.6)$$

где показатель степени $1/n$ слабо зависит от числа Рейнольдса. В том, что степенное уравнение (20.6) действительно хорошо передает распределение

скоростей, можно убедиться из рис. 20.3, на котором значения $(\bar{u}/U)^n$ отложены как ординаты на абсциссах y/R . При соответствующем выборе показателя степени n получаются прямые линии. Для наименьшего числа Рейнольдса $Re = 4 \cdot 10^3$, использованного при измерениях, показатель степени равен $n = 6$, для $Re = 100 \cdot 10^3$ он равен $n = 7$, и, наконец, для наибольшего числа Рейнольдса $Re = 3240 \cdot 10^3$ он равен $n = 10$.

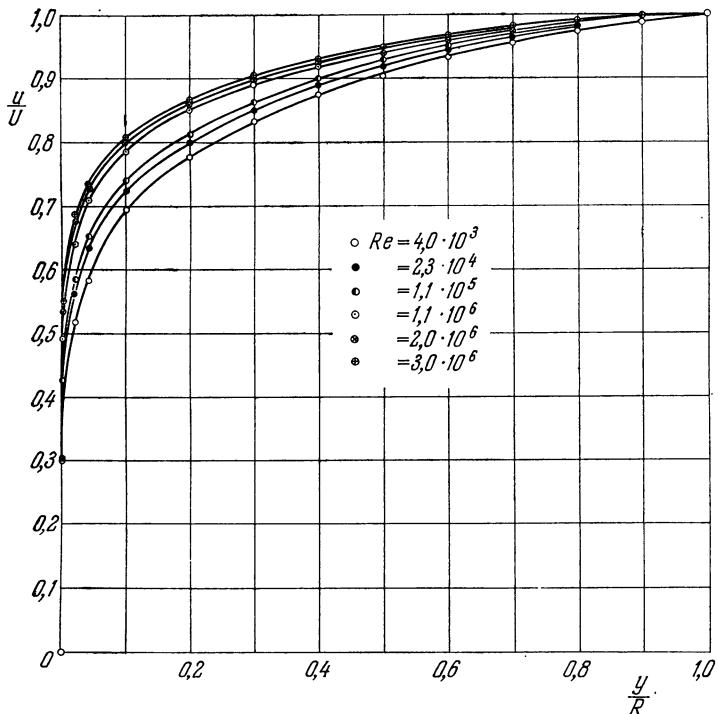


Рис. 20.2. Распределение скоростей в гладкой трубе при различных числах Рейнольдса. По Никурадзе [38].

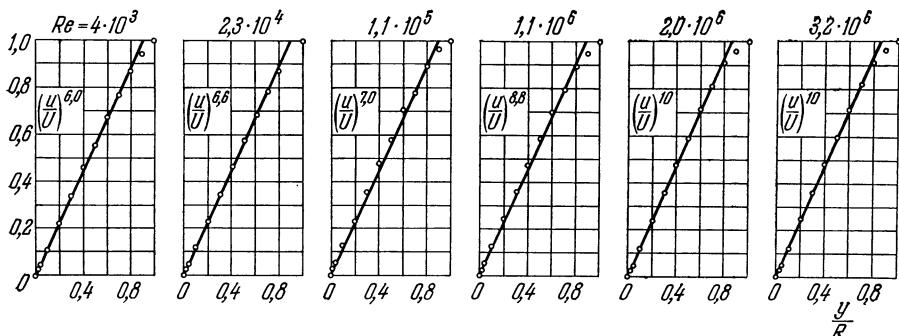


Рис. 20.3. Распределение скоростей в гладкой трубе. Проверка степенного закона (20.6).

В дальнейшем нам придется пользоваться отношением средней скорости \bar{u} к максимальной скорости U . Как нетрудно видеть из уравнения (20.6), это отношение равно

$$\frac{\bar{u}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (20.7)$$

В таблице 20.1 даны значения \bar{u}/U для некоторых n .

Таблица 20.1. Средняя по поперечному сечению скорость течения в трубе при различных показателях степени n в уравнении (20.6)

n	6	7	8	9	10
\bar{u}/U	0,791	0,817	0,837	0,852	0,865

§ 2. Связь между законом сопротивления и распределением скоростей

Между законом сопротивления Блазиуса (20.5) и распределением скоростей (20.6) существует внутренняя связь, впервые указанная Л. Прандтлем [43] и имеющая фундаментальное значение для всех теоретических соображений о турбулентных течениях. Эта связь позволяет, между прочим, из результатов опытов по определению сопротивления в трубе получить некоторые выводы о сопротивлении пластины при ее продольном обтекании [27], что будет использовано в главе XXI.

Внеся в формулу (20.4) значение λ из формулы (20.5), мы получим

$$\tau_0 = 0,03955 \rho \bar{u}^{-7/4} v^{1/4} d^{-1/4}.$$

Введем вместо диаметра d радиус R ; в таком случае численный множитель в правой части последнего равенства надо разделить на $2^{1/4} = 1,19$, и мы будем иметь

$$\tau_0 = 0,03325 \rho \bar{u}^{-7/4} v^{1/4} R^{-1/4}$$

или, если ввести, как и в главе XIX, динамическую скорость $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ на стенке,

$$\tau_0 = 0,03325 \rho \bar{u}^{-7/4} v^{1/4} R^{-1/4} = \rho v_*^2. \quad (20.8)$$

Представив в этом равенстве величину v_*^2 в виде произведения $v_*^{7/4} \cdot v_*^{1/4}$, мы получим

$$\left(\frac{\bar{u}}{v_*}\right)^{7/4} = \frac{1}{0,03325} \left(\frac{v_* R}{v}\right)^{1/4}, \quad \text{или} \quad \frac{\bar{u}}{v_*} = 6,99 \left(\frac{v_* R}{v}\right)^{1/7}.$$

Перейдем в последнем равенстве от средней скорости \bar{u} к максимальной скорости U , приняв для этого, что $\bar{u}/U = 0,8$, чemu, на основании таблицы 20.1, соответствует приблизительно показатель степени $n = 7$ и, следовательно, число Рейнольдса $Re = 10^5$. Тогда рассматриваемое равенство примет вид

$$\frac{U}{v_*} = 8,74 \left(\frac{v_* R}{v}\right)^{1/7}. \quad (20.9)$$

Подставив в это соотношение вместо U его выражение согласно формуле (20.6), мы увидим, что при $n = 7$ соотношение (20.9) будет справедливо не только для середины трубы (расстояние от стенки $y = R$), но и для любого расстояния y от стенки. В таком случае мы будем иметь

$$\frac{u}{v_*} = 8,74 \left(\frac{y v_*}{v}\right)^{1/7}. \quad (20.10)$$

Следовательно, закон сопротивления Блазиуса привел нас к закону степени $1/7$ для распределения скоростей, т. е. к тому закону, который, как показывают упомянутые выше опыты, имеет место для определенной области чисел Рейнольдса. Таким образом, между законом сопротивления Блазиуса и зако-

ном степени $1/7$ для распределения скоростей существует внутренняя связь. Введя в уравнение (20.10) обозначения (19.31) и (19.32), т. е. $u/v_* = \varphi$ и $yv_*/v = \eta$, мы сможем переписать его в следующем сокращенном виде:

$$\varphi = 8,74\eta^{1/7} \quad (20.11)$$

Мы вновь получили закон распределения скоростей (19.35), выведенный в предыдущей главе для течения вдоль гладкой плоской пластины из соображений о подобии, и при этом определили из закона сопротивления для течения в трубе постоянные C и n , ранее остававшиеся неопределенными. На рис. 20.4 показано сравнение распределения скоростей (20.11) (кривая 4) с измерениями И. Никиурадзе.

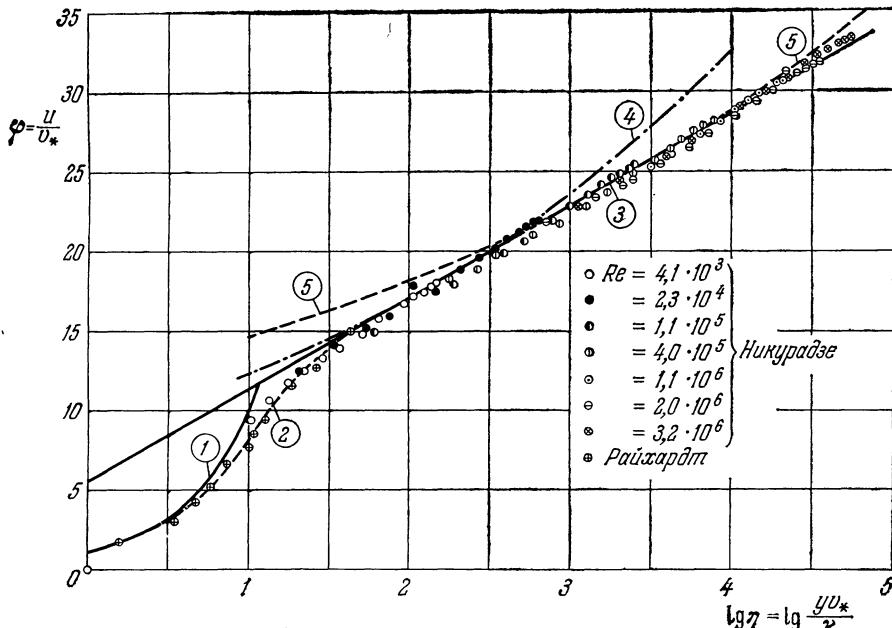


Рис. 20.4. Универсальный логарифмический закон распределения скоростей в гладкой трубе. Кривая (1) соответствует уравнению $\varphi = \eta$, т. е. ламинарному течению; кривая (2) — переходу от ламинарной формы течения к турбулентной; кривая (3) — уравнению (20.14), т. е. турбулентному течению при любых числах Рейнольдса; кривая (4) — уравнению (20.11), т. е. турбулентному течению при $Re < 10^6$; кривая (5) — уравнению $\varphi = 11,5\eta^{1/7}$.

с измерениями И. Никиурадзе. Мы видим, что закон степени $1/7$ хорошо совпадает с результатами опыта только до числа Рейнольдса $Re = 100\,000$. Однако большего и нельзя ожидать, так как закон сопротивления Блазиуса (20.5), из которого выведен закон степени $1/7$, применим только до указанного числа Рейнольдса (см. рис. 20.1).

Для того чтобы закон сопротивления Блазиуса лучше передавал результаты опыта, полученные для больших чисел Рейнольдса, следует заменить в нем показатель степени $1/4$ на $1/5$ или на $1/6$. Тогда, выполнив такой же расчет, как в начале настоящего параграфа, мы получим степенные законы

¹⁾ Уравнение (20.10) можно обобщить и на другие показатели степени, придав ему вид

$$\frac{u}{v_*} = C(n) \left(\frac{yv_*}{v} \right)^{1/n}.$$

Как показал К. Вигхардт [71], коэффициент $C(n)$ имеет для различных показателей степени n значения

$n = 7$	8	9	10
$C(n) = 8,74$	$9,71$	$10,6$	$11,5$

распределения скоростей, в которых в соответствии с измерениями, показателем будет не $1/7$, а $1/8$, $1/9$ и т. д. Распределение скоростей

$$\varphi = C\eta^{1/10}$$

изображено на рис. 20.4 в виде кривой 5. Мы видим, что на эту кривую хорошо ложатся экспериментальные точки, полученные при больших числах Рейнольдса, но зато точки, полученные для малых чисел Рейнольдса, отстоят от нее дальше, чем от кривой 4.

Решив уравнение (20.10) относительно v_* , мы получим

$$v_* = 0,150u^{7/8} \left(\frac{v}{y} \right)^{1/8},$$

следовательно, касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_0 = \rho v_*^2 = 0,0225\rho u^{7/4} \left(\frac{v}{y} \right)^{1/4}. \quad (20.12)$$

или

$$\tau_0 = 0,0225\rho U^{7/4} \left(\frac{v}{R} \right)^{1/4}. \quad (20.12a)$$

Ниже мы используем это соотношение.

§ 3. Универсальные законы распределения скоростей для очень больших чисел Рейнольдса

В предыдущем параграфе мы выяснили, что как в законе сопротивления для течения в трубе, так и в законе распределения скоростей показатель степени с увеличением числа Рейнольдса становится все меньше и меньше. Это обстоятельство наводит на предположение, что в предельном случае очень больших чисел Рейнольдса и для сопротивления, и для распределения скоростей должны существовать асимптотические законы, содержащие логарифм как предельное значение очень малой степени. Более подробный анализ измерений, произведенных при очень больших числах Рейнольдса, показывает, что такие логарифмические законы действительно существуют. С физической точки зрения эти асимптотические законы характерны наличием в них только турбулентного трения, так как при больших числах Рейнольдса ламинарное трение полностью отходит на задний план по сравнению с турбулентным. Большое преимущество асимптотических логарифмических законов по сравнению со степенными законами заключается в том, что они являются предельными законами для очень больших чисел Рейнольдса, а потому могут быть экстраполированы на произвольно большие числа Рейнольдса, лежащие даже за пределами выполненных измерений. При применении же степенных законов показатель степени по мере расширения области чисел Рейнольдса все время изменяется.

Асимптотический логарифмический закон распределения скоростей для течения в канале мы уже привели в § 5 главы XIX [уравнение (19.33)]. Мы вывели его для небольших расстояний от стенки, исходя из формулы Прандтля (19.7) для турбулентного касательного напряжения и из гипотезы, что $l = \kappa y$, т. е. что длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки. В сокращенной записи этот закон распределения скоростей имеет вид

$$\varphi = A_1 \ln \eta + D_1, \quad (20.13)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad D_1 = -\frac{1}{x} \ln \beta$$

суть свободные постоянные¹⁾). Перенесем этот закон без каких-либо изменений на течение в трубе и сравним его с измерениями И. Никурадзе, изображенными на рис. 20.4, на котором закону (20.13) соответствует кривая 3. Мы видим, что все экспериментальные точки очень хорошо ложатся на кривую 3, и при этом не только вблизи стенки, но и вдали от нее, вплоть до середины трубы. Для постоянных A_1 и D_1 получаются значения

$$A_1 = 2,5; \quad D_1 = 5,5,$$

следовательно, постоянные κ и β равны

$$\kappa = 0,4; \quad \beta = 0,111.$$

Таким образом, универсальный закон распределения скоростей в гладких трубах при очень больших числах Рейнольдса имеет вид²⁾

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2,5 \ln \eta + 5,5, \\ \text{или} \quad \varphi &= 5,75 \lg \eta + 5,5. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

В следующем параграфе путем рассуждений, аналогичных тем, которые были применены в предыдущем параграфе, мы выведем из этого универсального закона распределения скоростей соответствующий асимптотический универсальный закон сопротивления.

Закон (20.14), выведенный в предположении, что ламинарные касательные напряжения малы по сравнению с турбулентными касательными напряжениями, применим, конечно, только в тех областях течения, где такое предположение выполняется. В непосредственной близости от стенки, где турбулентное касательное напряжение близко к нулю, а ламинарное касательное напряжение играет существенную роль, следует ожидать отклонений от этого закона. Г. Райхардт [46] измерил скорости течения в канале на очень небольшом расстоянии от стенки и получил экспериментальные точки, через которые на рис. 20.4 проведена кривая 2; эта кривая дает значения скорости при переходе от ламинарного подслоя (стр. 507—508) к турбулентному пограничному слою. Кривая, отмеченная на рис. 20.4 цифрой 1, соответствует ламинарному течению, для которого

$$\tau_0 = \mu \frac{u}{y}.$$

Имея в виду, что $\tau_0 = \rho v_*^2$, мы найдем отсюда, что при ламинарном течении

$$\frac{u}{v_*} = \frac{y v_*}{v},$$

или

$$\varphi = \eta.$$

Кривые, приведенные на рис. 20.4, показывают, что для значений $\eta = y v_*^2 / v < 5$ турбулентное трение ничтожно мало по сравнению с ламинар-

¹⁾ Более точный закон для распределения скоростей выведен Г. Райхардтом [47]. Этот закон применим ко всему поперечному сечению трубы, начиная от стенок ($y = 0$) и вплоть до середины трубы, следовательно, и к ламинарному подслою, в котором закон (20.13) не имеет места, и к окрестности середины, где измеренное распределение скоростей обнаруживает некоторые систематические отклонения от закона (20.13). Кроме того, закон Г. Райхардта охватывает также область перехода от ламинарного подслоя к турбулентному пограничному слою (кривая 2 на рис. 20.4). Г. Райхардт вывел свой закон на основе теоретических оценок и очень тщательных измерений коэффициента турбулентного обмена A_τ [формула (19.1)]. См. работу В. Шаблевского [66].

²⁾ Здесь и в дальнейшем \ln означает натуральный логарифм, а \lg — логарифм при основании 10.

ным; далее, что для $5 < yv_*/v < 70$ турбулентное трение по своей величине одного порядка с ламинарным трением и, наконец, что для $yv_*/v > 70$ ламинарное трение ничтожно мало по сравнению с турбулентным. Таким образом, мы имеем

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } \frac{yv_*}{v} < 5 & \text{чисто ламинарное трение,} \\ \text{при } 5 < \frac{yv_*}{v} < 70 & \text{ламинарно-турбулентное трение,} \\ \text{при } \frac{yv_*}{v} > 70 & \text{чисто турбулентное трение.} \end{array} \right\} \quad (20.15)$$

Отсюда следует, что для гладкой стенки толщина ламинарного подслоя равна

$$\delta_{\text{лам}} \approx 5 \frac{v}{v_*}. \quad (20.15a)$$

Сравним теперь результаты измерения распределения скоростей в трубах с другим универсальным законом распределения скоростей, а именно с законом

$$\frac{U-u}{v_*} = f\left(\frac{y}{R}\right),$$

выведенным в предыдущей главе один раз из гипотезы подобия Кармана [уравнение (19.21)], а другой раз — из теории пути перемешивания Прандтля в сочетании с гипотезой $l = \kappa y$ [уравнение (19.28)]. В обоих случаях функция $f(y/R)$ получилась разной.

Так как гипотеза $l = \kappa y$ справедлива, очевидно, не на любом расстоянии от стенки трубы, то мы предпочтем использовать распределение длины пути перемешивания, получаемое из эксперимента. Тогда, имея формулу Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (20.16)$$

мы сумеем вычислить распределение скоростей из линейного распределения касательных напряжений

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R} \right). \quad (20.17)$$

Формулы (20.16) и (20.17) вместе с измеренным распределением скоростей $u(y)$ позволяют определить распределение длины пути перемешивания вдоль диаметра трубы. На рис. 20.5 изображен примечательный результат такого определения, полученный на основе измерений И. Никурадзе [38] в гладких трубах. Мы видим, что распределение длины пути перемешивания не зависит от числа Рейнольдса (при условии, что это число больше 10^5). Для длины пути перемешивания получается интерполяционная формула

$$\frac{l}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^4, \quad (20.18)$$

которая для расстояний, близких к стенке, принимает вид

$$l = 0,4y - 0,44 \frac{y^2}{R} + \dots \quad (20.18a)$$

Следовательно, для небольших расстояний от стенки измерения, выполненные в трубах, подтверждают правильность гипотезы Прандтля $l = \kappa y$, причем для постоянной κ получается численное значение

$$\kappa = 0,4. \quad (20.19)$$

Далее, выясняется, что распределение длины пути перемешивания (20.18) имеет место не только в гладких, но и в шероховатых трубах. В этом можно убедиться из рис. 20.6, на котором представлены измерения И. Никурадзе [39], произведенные в трубах с разной шероховатостью (эта шероховатость была создана путем покрытия стенки песком с разной, но каждый раз вполне определенной величиной зерен).

Следовательно, можно ожидать, что если мы вычислим на основании распределения длины пути перемешивания (20.18) распределение скоростей, то оно будет пригодным как для гладких, так и для шероховатых труб.

Представим распределение длины пути перемешивания для сокращения записи в следующем виде:

$$l = \kappa y f \left(\frac{y}{R} \right), \quad (20.20)$$

причем $f(y/R) \rightarrow 1$ при $y/R \rightarrow 0$. Из равенств (20.16) и (20.17), имея в виду, что $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, мы получим для распределения скоростей уравнение

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa} \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}}}{y f \left(\frac{y}{R} \right)},$$

откуда после интегрирования найдем

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \int_{y_0/R}^{y/R} \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}} d \left(\frac{y}{R} \right)}{\frac{y}{R} f \left(\frac{y}{R} \right)}. \quad (20.21)$$

За нижний предел интегрирования следует взять то расстояние y_0 от стенки, для которого скорость равна нулю. Это расстояние одного порядка с толщиной ламинарного подслоя и пропорционально v/v_* [формула (20.15a)], поэтому

$$\frac{y_0}{R} = F_1 \left(\frac{v_* R}{v} \right).$$

Формула (20.21) дает для максимальной скорости U в середине трубы величину

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \int_{y_0/R}^1 \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}} d \left(\frac{y}{R} \right)}{\frac{y}{R} f \left(\frac{y}{R} \right)}. \quad (20.21a)$$

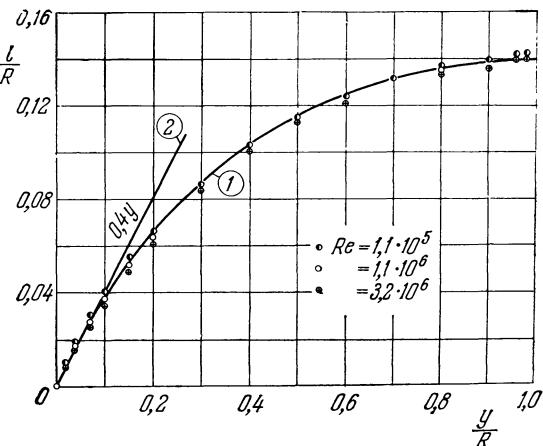


Рис. 20.5. Распределение длины пути перемешивания вдоль диаметра гладкой трубы при различных числах Рейнольдса. Кривая (1) соответствует формуле (20.18).

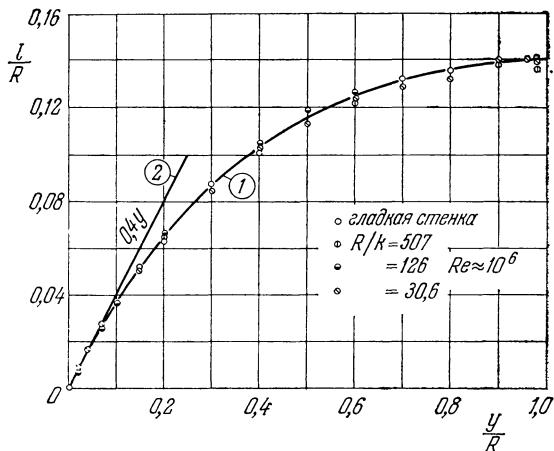


Рис. 20.6. Распределение длины пути перемешивания вдоль диаметра шероховатой трубы. Кривая (1) соответствует формуле (20.18).

Составив разность $U - u$, мы получим

$$U - u = v_* F \left(\frac{y}{R} \right), \quad (20.22)$$

причем эмпирическая постоянная $\kappa = 0,4$ включена в выражение функции $F(y/R)$. Таким образом, мы вновь пришли к универсальному закону распределения скоростей вида (19.21) или (19.28), но с существенным обобщением: теперь этот закон применим и к гладким, и к шероховатым трубам, и притом при одном и том же виде функции $F(y/R)$. Закон (20.22) показывает, что кривые распределения скоростей по поперечному сечению трубы, полученные для любого числа Рейнольдса и для любой шероховатости, должны совпасть в одну-единственную кривую, если только значения $(U - u)/v_*$ откладывать как ординаты при абсциссах y/R (рис. 20.7). Отметим, что закон распределения скоростей в виде (20.22) впервые был указан Т. Э. Стэнтоном [63]. Явное выражение для функции $F(y/R)$ можно было бы получить, вычислив интеграл (20.21), однако проще воспользоваться для этой цели уже известным законом распределения скоростей (20.14) для гладких труб. В самом деле, из этого закона мы имеем

$$U - u = 2,5v_* \ln \frac{R}{y} = 5,75v_* \lg \frac{R}{y},$$

а потому

$$\frac{U - u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{R}{y}. \quad (20.23)$$

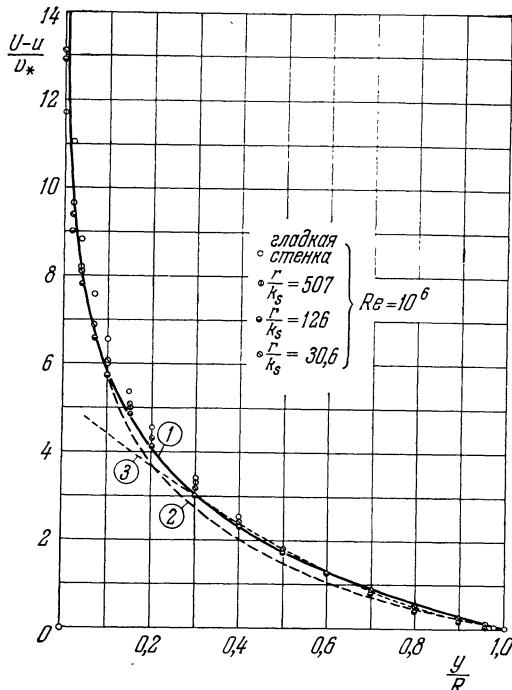
На рис. 20.7 дано сравнение закона (20.23) (кривая 1) с измерениями в гладких и шероховатых трубах. Закон (20.23) содержит в себе постоянную κ , для которой выше было найдено значение $\kappa = 0,4$ [равенство (20.19)]. Совпадение получается очень хорошее.

В предыдущей главе гипотеза Кармана привела к универсальному закону распределения скоростей (19.21), который, если ввести в него вместо расстояния y от оси расстояние u от стенки, принимает вид

$$\frac{U - u}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{1 - \frac{y}{R}} \right] + \sqrt{1 - \frac{y}{R}} \right\}. \quad (20.24)$$

И этот закон (на рис. 20.7 кривая 2) хорошо совпадает с измерениями, если только принять, что $\kappa = 0,36$. На рис. 20.7 изображена также кривая 3, полученная в 1855 г. Г. Дарси [8] на основе произведенных им тщательных измерений. Уравнение этой кривой в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{U - u}{v_*} = 5,08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^{3/2}. \quad (20.25)$$



Кривая Дарси хорошо совпадает с измерениями, за исключением области вблизи стенок, где $y/R < 0,25$.

Подчеркнем, что оба универсальных закона распределения скоростей (20.23) и (20.24) выведены, как это следует из рассуждений предыдущей главы, для плоского течения в канале. Тем не менее сравнение с измерениями показывает, что эти законы хорошо применимы также к осесимметричному течению в трубе. Это обстоятельство служит доказательством большого сходства распределения скоростей в плоском и осесимметричном течениях. Напомним в этой связи, что и при ламинарном течении для плоского и осесимметричного течений получается одинаковое параболическое распределение скоростей.

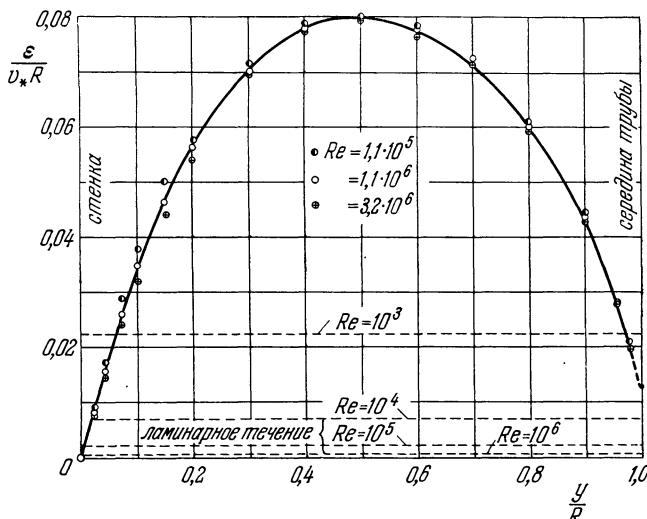


Рис. 20.8. Распределение безразмерного кинематического коэффициента кажущейся вязкости ε вдоль радиуса гладкой трубы. По измерениям Никирадзе [38].

Теория переноса завихренности Тэйлора также позволяет вывести универсальный закон распределения скоростей в виде уравнения (20.22), но, конечно, с иной функцией $F(y/R)$, чем по расчетам Л. Прандтля и Т. Кармана. Сравнительному исследованию распределения скоростей, полученных на основе теории Прандтля и теории Тейлора, посвящены работы С. Голдстейна [18] и Дж. И. Тейлора [67]. Однако результаты исследования не позволяют сделать однозначного вывода о преимуществах той или иной теории.

Наглядное представление о физических особенностях течения в трубе дает также распределение по поперечному сечению кинематического коэффициента кажущейся вязкости ε , характеризующего турбулентный обмен. На рис. 20.8 изображено такое распределение, полученное из измеренных И. Никирадзе распределений скоростей путем использования соотношений

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{du}{dy} \quad \text{и} \quad \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R} \right)$$

[формулы (19.2) и (20.17)]. Так же, как и длина пути перемешивания, коэффициент кажущейся вязкости не зависит от числа Рейнольдса. Однако в остальном распределение ε по поперечному сечению совсем иное, чем распределение длины пути перемешивания l (см. рис. 20.5). В самом деле, максимум коэффициента кажущейся вязкости получается в середине между осью трубы и стенкой. В середине трубы ε очень мало (но не равно нулю). Из вида кривой распределения коэффициента кажущейся вязкости ε ясно, что сделать за-

нее правдоподобное предположение о ходе изменения ε значительно труднее, чем об изменении длины пути перемешивания l . Именно это обстоятельство мы и имели в виду в § 2 главы XIX, когда говорили о преимуществе введения в расчет длины пути перемешивания вместо коэффициента турбулентного обмена. Теперь мы имеем экспериментальное доказательство такого преимущества. Для сравнения с турбулентной кинематической вязкостью ε на рис. 20.8 отложены также значения $\varepsilon_{\text{лам}}/v_* R$ (штриховые прямые), соответствующие ламинарному течению Хагена — Пузейля в трубе (в этом случае $\varepsilon_{\text{лам}}$ тождественно совпадает с кинематической вязкостью v). Так как на основании равенства (20.4)

$$v_* = \sqrt{\frac{\lambda}{8} \bar{u}},$$

а λ при ламинарном течении, согласно формуле (5.11), равно

$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

то

$$\frac{\varepsilon_{\text{лам}}}{v_* R} = \frac{v}{v_* R} = \frac{1}{\sqrt{2 Re}}.$$

Отсюда ясно видна преобладающая роль турбулентного трения по сравнению с ламинарным, особенно при больших числах Рейнольдса.

§ 4. Универсальный закон сопротивления для гладких труб при очень больших числах Рейнольдса

В § 2 настоящей главы мы получили закон степени 1/7 для распределения скоростей, исходя из закона сопротивления Блазиуса. Поступим сейчас наоборот: выведем путем аналогичных рассуждений из универсального логарифмического закона распределения скоростей соответствующий закон сопротивления. Так как логарифмический закон распределения скоростей (20.23), согласно условиям его вывода (пренебрежение ламинарным трением по сравнению с турбулентным), допускает экстраполирование на произвольно большие числа Рейнольдса, то можно предполагать, что таким же свойством будет обладать и подлежащий выводу закон сопротивления. Выполним этот вывод, следуя изложению Л. Прандтля [44].

Имея распределение скоростей (20.23), мы можем вычислить среднюю по поперечному сечению скорость \bar{u} . Мы получим тогда

$$\bar{u} = U - 3,75 v_*. \quad (20.26)$$

Результаты измерений, выполненных И. Никирадзе, дают вместо 3,75 несколько иное число, а именно

$$\bar{u} = U - 4,07 v_*. \quad (20.27)$$

Из формулы (20.4) мы имеем

$$\lambda = 8 \left(\frac{v_*}{\bar{u}} \right)^2. \quad (20.28)$$

Далее, из универсального закона распределения скоростей (20.14) следует, что

$$U = v_* \left(2,5 \ln \frac{R v_*}{v} + 5,5 \right).$$

Внеся это выражение в равенство (20.26), мы получим

$$\bar{u} = v_* \left(2,5 \ln \frac{Rv_*}{v} + 1,75 \right). \quad (20.29)$$

Величину Rv_*/v , входящую в последнее равенство, можно представить как произведение числа Рейнольдса $\bar{u}d/v$ на выражение, зависящее от λ . В самом деле,

$$\frac{Rv^*}{v} = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}d}{v} \frac{v_*}{\bar{u}} = \frac{\bar{u}d}{v} \frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}.$$

Выразив теперь v_* через λ посредством соотношения (20.28) и внеся найденное выражение v_* в равенство (20.29), мы получим закон сопротивления

$$\lambda = \frac{8}{\left[2,5 \ln \left(\frac{\bar{u}d}{v} \sqrt{\lambda} \right) - 2,5 \ln 4\sqrt{2} + 1,75 \right]^2} = \frac{1}{\left[2,035 \lg \left(\frac{\bar{u}d}{v} \sqrt{\lambda} \right) - 0,91 \right]^2},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,035 \lg \left(\frac{\bar{u}d}{v} \sqrt{\lambda} \right) - 0,91.$$

Отложив значения $1/\sqrt{\lambda}$ как ординаты на абсциссах $\lg (Re \sqrt{\lambda})$, мы получим графическое изображение закона сопротивления для гладких труб в виде

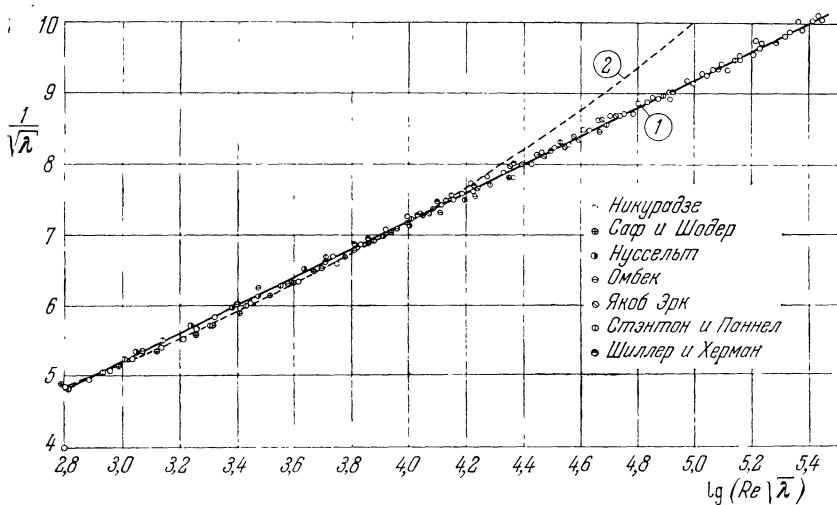


Рис. 20.9. Универсальный закон сопротивления для гладкой трубы. Кривая (1) соответствует закону Прандтля (20.30), кривая (2) — закону Блазиуса (20.5).

прямой. Как показывает рис. 20.9, этот результат блестяще подтверждается измерениями: все экспериментальные значения, найденные различными исследователями, укладываются на прямую 1 с численными коэффициентами, лишь немного отличающимися от теоретических значений. Эта прямая имеет уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg \left(\frac{\bar{u}d}{v} \sqrt{\lambda} \right) - 0,8. \quad (20.30)$$

Закон, выражаемый этим уравнением, называется *универсальным законом сопротивления Прандтля для гладких труб*. Он проверен опытами И. Никирадзе [38] вплоть до числа Рейнольдса $3,4 \cdot 10^6$ и дает прекрасное совпадение

с измерениями. В соответствии с условиями своего вывода закон (20.30) может быть экстраполирован до произвольно больших чисел Рейнольдса, поэтому нет необходимости производить новые измерения при еще больших числах Рейнольдса, чем это было сделано в выполненных опытах. В таблице 20.2 даны значения λ , определяемые уравнением (20.30), для некоторых

Таблица 20.2. Зависимость коэффициента сопротивления λ
в гладких трубах от числа Рейнольдса (см. рис. 20.9)

	По Прандтлю, уравнение (20.30)	По Блазиусу, уравнение (20.5)		По Прандтлю, уравнение (20.30)	По Блазиусу, уравнение (20.5)		По Прандтлю, уравнение (20.30)	По Блазиусу, уравнение (20.5)
$Re = \frac{\bar{u}d}{v}$	λ	λ	$Re = \frac{\bar{u}d}{v}$	λ	λ	$Re = \frac{\bar{u}d}{v}$	λ	λ
10^3	(0,0622)	(0,0567)	$2 \cdot 10^4$	0,0259	0,0266	$5 \cdot 10^5$	0,0131	—
$2 \cdot 10^3$	(0,0494)	(0,0473)	$5 \cdot 10^4$	0,0209	0,0242	10^6	0,0116	(0,0100)
$5 \cdot 10^3$	0,0374	0,0376	10^5	0,0180	0,0178	$2 \cdot 10^6$	0,0104	—
10^4	0,0309	0,0316	$2 \cdot 10^5$	0,0156	0,0150	$5 \cdot 10^6$	0,0090	—
						10^7	0,0081	(0,0056)

чисел Рейнольдса. На рис. 20.1 универсальный закон сопротивления (20.30) изображен в виде кривой 3. До $Re = 100\,000$ он хорошо совпадает с законом

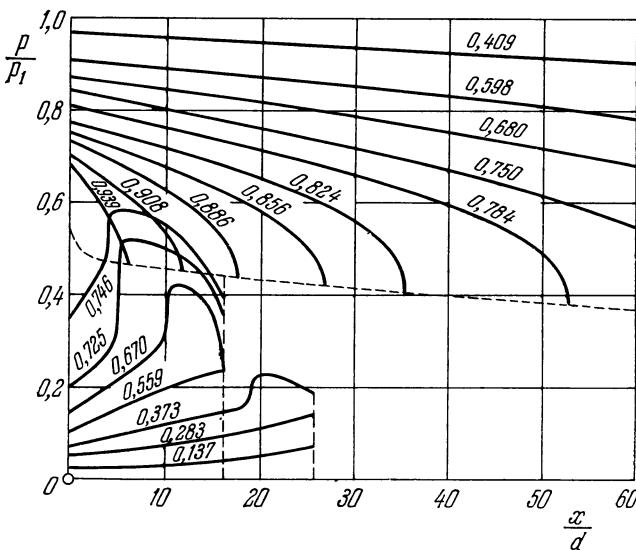


Рис. 20.10. Распределение давления в трубе при сжимаемом течении.
По Фресселью [16].

сопротивления Блазиуса (20.5). Однако при больших числах Рейнольдса закон Блазиуса дает для сопротивления значения, значительно отличающиеся от измеренных значений, в то время как закон Прандтля (20.30) продолжает давать хорошее совпадение.

Течение в гладких трубах при очень больших скоростях исследовал В. Фрессель [16]. На рис. 20.10 изображено изменение давления вдоль трубы при различных расходах. Числа, надписанные около каждой кривой, дают значение расхода волях максимального расхода, получающегося при

истечении через насадок с диаметром, равным диаметру трубы, и при одном и том же давлении в напорном резервуаре. Опускающиеся вправо кривые относятся к дозвуковым течениям, а поднимающиеся — к сверхзвуковым. Если труба имеет достаточную длину, то при сверхзвуковом течении возникает скачок уплотнения, переводящий сверхзвуковое течение в дозвуковое. Коэффициенты сопротивления, как показывает рис. 20.11, лишь немногого отличаются от коэффициентов сопротивления при несжимаемом течении. Прямая 1, проведенная на этом рисунке, соответствует уравнению (20.30). К. Осватич и М. Коппе [42a] исследовали сжимаемое течение в трубе теоретически. Полученные ими результаты хорошо совпадают с опытами В. Фрёсселя.

§ 5. Трубы с некруглым поперечным сечением

Исследованием турбулентного течения в трубах с некруглым поперечным сечением занимались Л. Шиллер [51] и И. Никурадзе [37]. Ими были измерены распределения скоростей и выведены законы сопротивления для труб с прямоугольным,

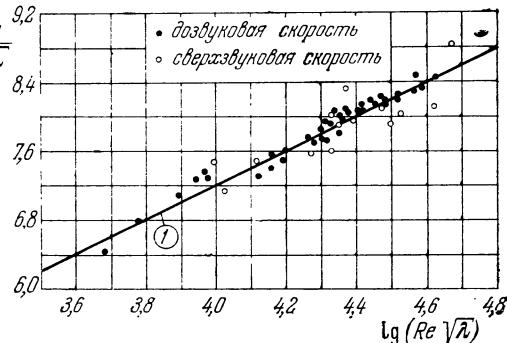


Рис. 20.11. Закон сопротивления при сжимаемом течении в гладкой трубе. Кривая (1) соответствует закону Прандтля (20.30).

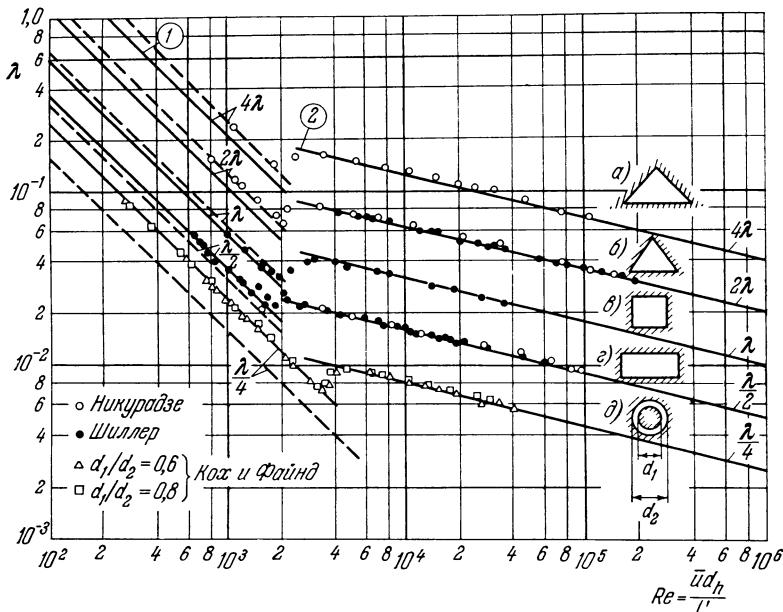


Рис. 20.12. Закон сопротивления для гладких труб с некруглым поперечным сечением. Кривая (1) — ламинарное течение; $\lambda = C/Re$; кривая (2) — турбулентное течение; $\lambda = 0,316/(Re)^{1/4}$ (закон Блазиуса); — ламинарное течение в круглой трубе, $C = 64$ (закон Хагена — Пуазейля). а) Равнобедренный прямоугольный треугольник, $C = 52$; б) равносторонний треугольник, $C = 53$; в) квадрат, $C = 57$; г) прямоугольник ($3,5:1$), $C = 71$; д) кольцевая щель ($d_1/d_2 \rightarrow 1$), $C = 96$. ○ — измерения Никурадзе, ● — измерения Шиллера; $\Delta d_1/d_2 = 0,6$ и $\square d_1/d_2 = 0,8$ — измерения Коха и Файнда [40].

треугольным и трапецидальным поперечным сечением, а также для круглых труб с пазами на внутренней поверхности стенок. Для выражения закона сопротивления оказалось целесообразным ввести коэффициент сопро-

тивления, отнесенный к гидравлическому диаметру, т. е. к величине

$$d_h = \frac{4F}{U},$$

где F есть площадь поперечного сечения трубы, а U — смоченный периметр

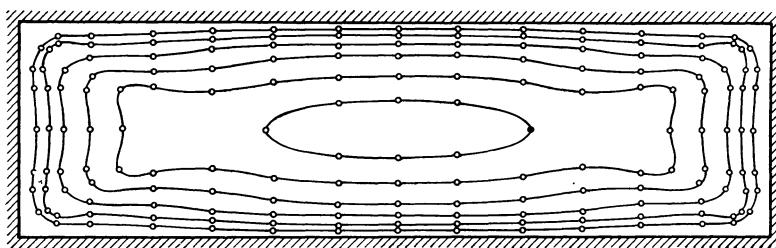


Рис. 20.13. Картина изотах в трубе с прямоугольным поперечным сечением. По Никурадзе [36].

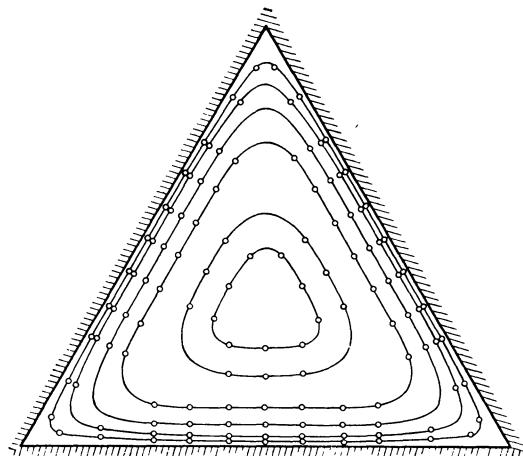


Рис. 20.14. Картина изотах в трубе с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника. По Никурадзе [37].

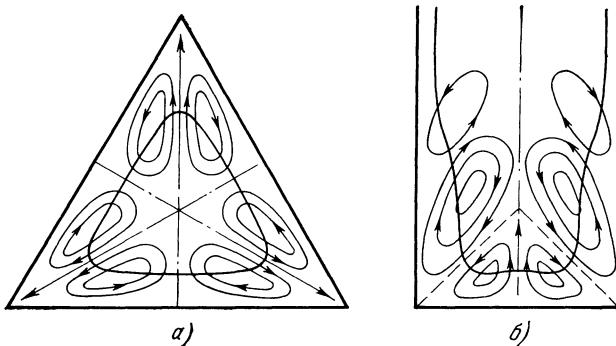


Рис. 20.15. Схема вторичных течений в трубах с треугольным и четырехугольным поперечным сечением.

поперечного сечения. Тогда для перепада давления на единицу длины будет иметь место формула

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2.$$

Для круглого сечения гидравлический диаметр совпадает с диаметром окружности.

На рис. 20.12 нанесены значения коэффициента сопротивления λ в зависимости от Re для некоторых форм поперечного сечения. Измерения, полученные при турбулентном течении, хорошо передаются формулой для круглой трубы. Однако в ламинарной области результаты измерений, если относить их к гидравлическому диаметру, не располагаются вдоль прямых, соответствующих круглой трубе. Величина отклонений зависит от формы поперечного сечения. Возможность применения гидравлического диаметра в случае сжимаемых течений подтверждена экспериментами вплоть до числа Маха $Ma = 1$ [35]. Особый интерес представляет распределение скоростей в некруглых трубах. На рис. 20.13 и 20.14 изображены изотахи для прямоугольного и треугольного поперечных сечений по измерениям И. Никурадзе [36], [37]. Во всех случаях в углах получаются сравнительно высокие скорости. Причина этого заключается в существовании во всех прямых каналах с некруглым поперечным сечением вторичных течений такого рода, что вдоль биссектрис углов жидкость движется в углы и отсюда растекается в обе стороны. Вторичные течения непрерывно переносят импульс из середины течения в углы и тем самым вызывают здесь повышение скорости. На рис. 20.15 показана схема вторичных течений в треугольнике и четырехугольнике. Мы видим, что в четырехугольном поперечном сечении вторичные течения, направленные вблизи концов длинных сторон и в середине коротких сторон от стенки внутрь, создают здесь зоны пониженной скорости. Эти зоны особенно четко заметны на картине изотах (см. рис. 20.13). Вторичные течения возникают также

в водотоках со свободной поверхностью. На рис. 20.16 изображена картина изотах в открытом прямоугольном водотоке. Максимальная скорость получается здесь не на свободной поверхности, а ниже, примерно на $1/5$ глубины. Кроме того, свободная поверхность ни в коем случае не является сечением плоского течения, как можно было бы подумать на первый взгляд. В трубах с треугольным поперечным сечением с одним очень острым углом течение в этом угле продолжает оставаться ламинарным до таких довольно высоких чисел Рейнольдса, при которых в остальных частях поперечного сечения оно уже давно стало турбулентным. На рисунке 20.17 показана граница между ламинарным и турбулентным течениями в такой трубе по измерениям Э. Р. Г. Эккerta и Т. Ф. Ирвина [11]. Мы видим, что при числе Рейнольдса $Re = 1000$ течение продолжает оставаться ламинарным на 40% высоты треугольника; с увеличением числа Рейнольдса область ламинарного течения становится меньше. Исследование распределения давления и распределения скоростей в прямых трубах с поперечным сечением, изменяющим свою форму в направлении течения, но сохраняющим при этом неизменной

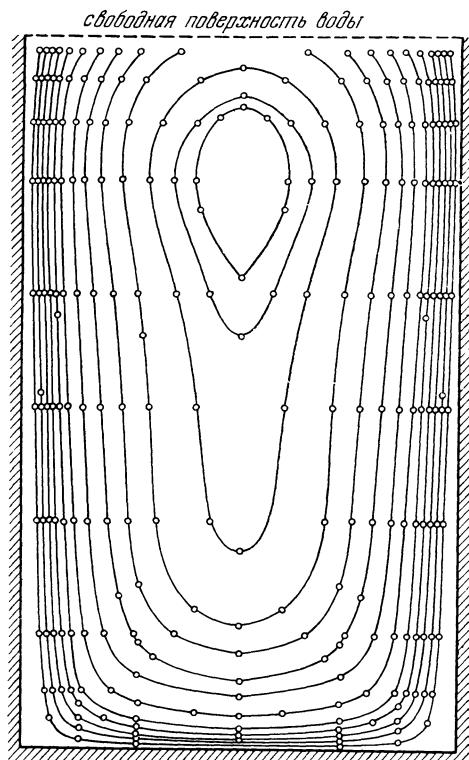


Рис. 20.16. Картина изотах в прямоугольном открытом лотке. По Никурадзе [36].

свою площадь, провел Э. Майер [31]. В частности, он рассмотрел переход от круглого поперечного сечения к прямоугольному с отношением сторон $1 : 2$ и, наоборот, от прямоугольного к круглому, причем длина переходных участков менялась. Измерения показали, что потеря давления при переходе от круглого поперечного сечения к прямоугольному значительно больше, чем при обратном переходе.

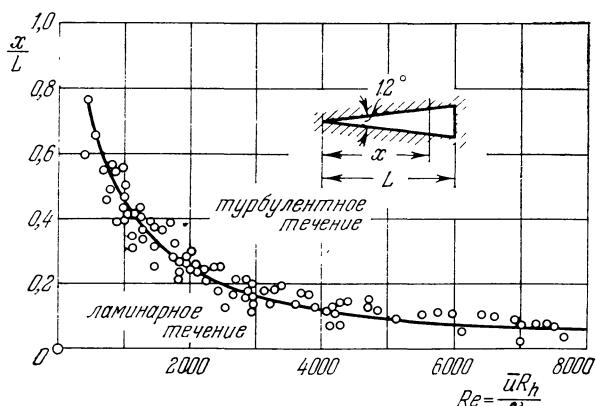


Рис. 20.17. Граница между ламинарным и турбулентным течениями в трубе треугольного сечения, один из углов которого очень острый. Для определения этой границы течению была придана видимость посредством дымовых струек.

По Э. Р. Г. Эккерту и Т. Ф. Ирвину [11]. $R_h = \frac{1}{2} d_h$ — гидравлический радиус.

ких труб. В связи с этим понятно, что заложенные в шероховатых трубах имеют большое практическое значение и поэтому уже давно служили предметом многочисленных исследований. Однако попытки систематического исследования наталкивались на одну принципиальную трудность, связанную с большим многообразием геометрических форм шероховатости и, следовательно, с чрезвычайно большим числом параметров, определяющих шероховатость. В самом деле, пусть мы имеем стенку с совершенно одинаковыми элементами, образующими шероховатость; очевидно, что сопротивление, оказываемое такой стенкой движению жидкости, зависит не только от формы и высоты элементов шероховатости, но также от плотности распределения шероховатостей, т. е. от числа элементов шероховатости, приходящихся на единицу площади, и, кроме того, от группировки этих элементов на поверхности. Вследствие этих обстоятельств потребовалось довольно значительное время, прежде чем удалось вывести ясные и простые законы течения в шероховатых трубах. Обзор многочисленных старых измерений дал Л. Хопф [23]. Он установил, что все ранее выведенные законы сопротивления в шероховатых трубах и каналах могут быть разбиты на два типа. В законах первого типа сопротивление в точности пропорционально квадрату скорости, следовательно, коэффициент сопротивления λ не зависит от числа Рейнольдса. Такой тип закона сопротивления получается для сравнительно грубой и очень частой шероховатости, наблюдающейся, например, у цемента, необработанного железа, а также в искусственных условиях — при наклейке на стенки крупных зерен песка. В этом случае шероховатость стенки может быть охарактеризована посредством одного-единственного параметра, так называемой *относительной шероховатости* k/R , где k есть высота элементов шероховатости, а R — радиус трубы с круглым поперечным сечением или гидравлический радиус некруглого сечения. Из соображений о подобии можно заключить, что при такой шероховатости коэффициент сопротивления λ зависит только от относительной шероховатости. Этую зависимость можно определить экспериментально, если одну и ту же шероховатость

тость нанести на стенки труб и каналов с разными диаметрами. Подобного рода измерения, выполненные К. Фроммом [15] и В. Фричем [14], показали, что при геометрически подобной шероховатости

$$\lambda \sim \left(\frac{k}{R_h} \right)^{0,314}.$$

Второй тип закона сопротивления получается либо для более мелкой шероховатости, либо для более редкой шероховатости, т. е. шероховатости, образованной сравнительно небольшим числом элементов, разбросанных на большой гладкой площасти. Такого рода шероховатость наблюдается в деревянных трубах или в обычных железных трубах, выпускаемых в обращение. В этом случае коэффициент сопротивления зависит не только от относительной шероховатости, но и от числа Рейнольдса.

С физической точки зрения для сопротивления жидкости при движении в шероховатой трубе существенно отношение высоты k элемента шероховатости к толщине пограничного слоя, причем основную роль играет толщина ламинарного подслоя δ_l , следовательно, физически важной безразмерной характеристикой шероховатости является отношение k/δ_l . Если высота элемента шероховатости настолько мала (или пограничный слой настолько толст), что все выступы шероховатости лежат внутри ламинарного подслоя, т. е. если $k < \delta_l$, то шероховатость вообще не вызывает никакого увеличения сопротивления. В этом случае шероховатая стенка является как бы гидравлически гладкой. При ламинарном течении Хагена — Пуазейля все шероховатые трубы являются гидравлически гладкими: шероховатость при таком течении не оказывает никакого влияния на сопротивление. Так как, согласно сказанному в § 3 настоящей главы, толщина ламинарного подслоя равна

$$\delta_l = \text{число} \cdot \frac{v}{v_*},$$

то

$$\frac{k}{\delta_l} \sim \frac{kv_*}{v},$$

и, следовательно, безразмерная шероховатость может рассматриваться как число Рейнольдса, составленное из высоты элементов шероховатости и динамической скорости v_* .

Весьма обширные и тщательные систематические измерения в шероховатых трубах выполнил И. Никурадзе [39]. Для своих исследований он использовал круглые трубы, внутренние стенки которых были оклеены насколько возможно плотнее песком с зернами определенного размера. Путем выбора различных диаметров трубы и различных размеров зерен песка относительная шероховатость k_s/R варьировалась в пределах от 1/500 до 1/15¹⁾. В результате были получены законы для распределения скоростей и сопротивления, причем выяснилось, что эти законы простым образом связаны с аналогичными законами для гладких труб.

Опишем вкратце опыты И. Никурадзе, а затем покажем, что связь между законом сопротивления и законом распределения скоростей, выведенная в § 2 настоящей главы для гладких труб, может быть распространена, при соответствующем обобщении, и на шероховатые трубы.

Закон сопротивления. На рис. 20.18 показан закон сопротивления для труб с песочной шероховатостью. При ламинарном течении все шероховатые трубы дают такое же сопротивление, как и гладкие трубы. Критическое число Рейнольдса также не зависит от шероховатости. И при турбулентном течении

¹⁾ В дальнейшем высоту элементов шероховатости, образованных зернами песка, будем обозначать через k_s , высоту же элементов другой шероховатости — через k .

для каждой относительной шероховатости существует определенная область чисел Рейнольдса, в которой сопротивление шероховатой трубы такое же, как и в гладкой трубе. Следовательно, и в этой области чисел Рейнольдса шероховатые трубы ведут себя как гидравлически гладкие. Коэффициент сопротивления λ зависит здесь только от числа Рейнольдса. Но, начиная с некоторого числа Рейнольдса, величина которого уменьшается с увеличением относительной шероховатости k_s/R , кривая сопротивления для шероховатых труб отклоняется вверх от кривой сопротивления для гладких труб.

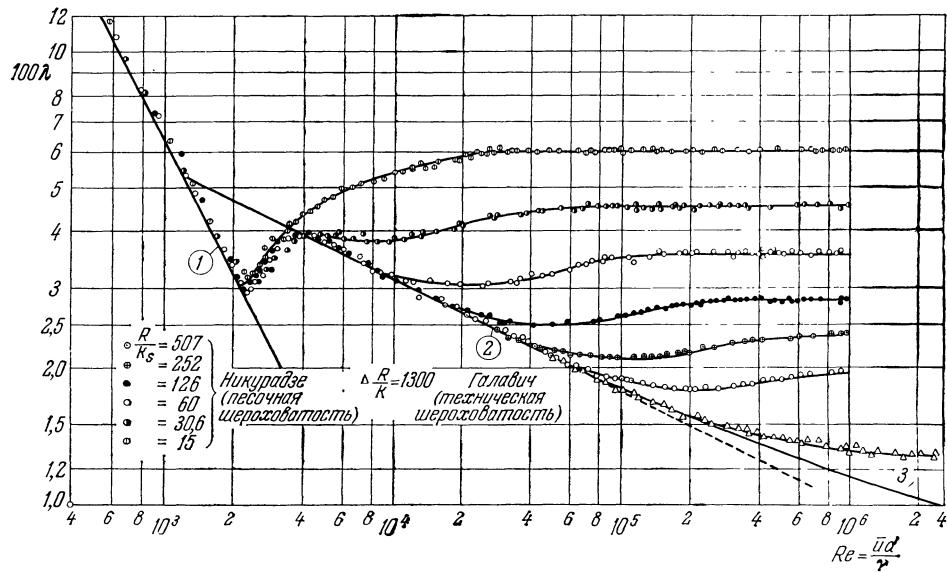


Рис. 20.18. Закон сопротивления шероховатых труб. Кривая (1) соответствует закону сопротивления (5.11) при ламинарном течении, кривая (2) — закону сопротивления (20.5) при турбулентном течении в шероховатой трубе, кривая (3) — закону сопротивления (20.30) при турбулентном течении в гладкой трубе.

При этом кривая сопротивления для шероховатых труб сначала проходит через переходную область, в которой λ зависит и от Re , и от k_s/R , но затем, после достижения определенного числа Рейнольдса, устанавливается квадратичный закон сопротивления, при котором λ зависит только от k_s/R , но не от Re . Таким образом, при течении в шероховатых трубах следует различать три режима:

1. *Режим без проявления шероховатости*, при котором¹⁾

$$0 \leq \frac{k_s v_*}{v} \leq 5, \quad \lambda = \lambda(Re).$$

Размеры зерен, образующих шероховатость при таком гидравлически гладком режиме, столь малы, что все выступы элементов шероховатости лежат внутри ламинарного подслоя.

2. *Переходный режим*, при котором

$$5 \leq \frac{k_s v_*}{v} \leq 70, \quad \lambda = \lambda\left(\frac{k_s}{R}, Re\right),$$

Элементы шероховатости частично выступают из ламинарного подслоя. Дополнительное, по сравнению с гладкими трубами, сопротивление возникает

¹⁾ Приведенные ниже значения величины $k_s v_*/v$ получены из экспериментального распределения давления путем рассуждений, о которых будет сказано ниже. Указанные числа относятся только к песочной шероховатости.

в основном вследствие сопротивления формы элементов шероховатости, выступающих из ламинарного подслоя в турбулентный пограничный слой.

3. Режим с полным проявлением шероховатости, при котором

$$\frac{k_s v_*}{v} > 70, \quad \lambda = \lambda \left(\frac{k_s}{R} \right).$$

Все элементы шероховатости выступают из ламинарного подслоя. Преобладающая часть сопротивления состоит из сопротивления формы отдельных элементов шероховатости, поэтому закон сопротивления получается чисто квадратичным.

Распределение скоростей. Профиль скоростей в шероховатой трубе имеет вблизи стенки менее крутое нарастание, чем в гладкой трубе. Это ясно видно из рис. 20.19, на котором изображены в безразмерных координатах u/U и y/R четыре профиля скоростей: один для гладкой трубы и три

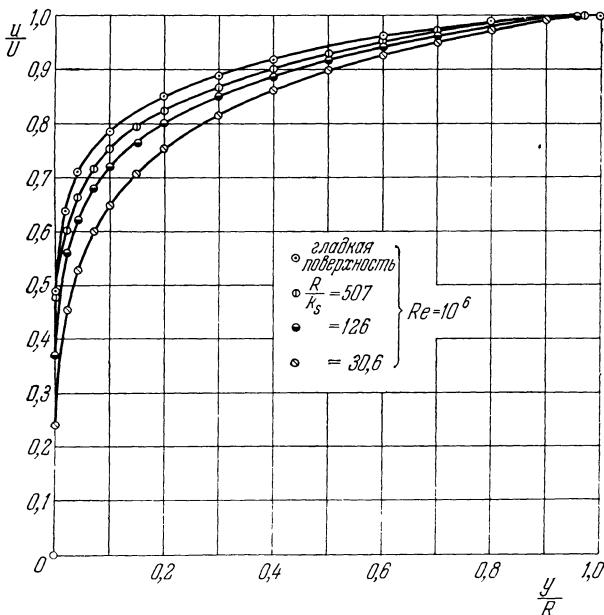


Рис. 20.19. Распределение скоростей в шероховатых трубах.
По Никурадзе [39].

для труб с различной шероховатостью, причем все в области квадратичного закона сопротивления. Если и теперь попытаться проинтерполировать профиль скоростей посредством степенной функции [так же, как это было сделано при составлении уравнения (20.6)], то для показателя степени получится значение от $1/4$ до $1/5$. Распределение длины пути перемешивания по ширине трубы, вычисленное по распределению скоростей, уже было показано на рис. 20.6 и по своей форме полностью совпадает с таким же распределением для гладких труб. Следовательно, и теперь распределение длины пути перемешивания определяется интерполяционной формулой (20.18). В частности, вблизи стенки трубы

$$l = xy = 0,4y.$$

Это означает, что логарифмический закон распределения скоростей (19.29) применим также к шероховатым трубам. Необходимо только для постоянной интегрирования y_0 взять иное значение, чем для гладкой стенки, а именно

целесообразно принять y_0 пропорциональным высоте k_s элементов шероховатости. Положив $y_0 = \gamma k_s$, мы получим вместо уравнения (19.29) следующее:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{k_s} - \ln \gamma \right), \quad (20.31)$$

причем постоянная γ зависит от характера шероховатости. Сравнив уравнение (20.31) с измерениями И. Никурадзе, мы увидим, что последние действительно могут быть представлены уравнением

$$\frac{u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k_s} + B, \quad (20.32)$$

где $2,5 = 1/\kappa = 1/0,4$, а величина B для каждого из трех указанных выше режимов имеет различные значения. При режиме с полным проявлением шероховатости $B = 8,5$, следовательно, при таком режиме

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k_s} + 8,5. \quad (20.32a)$$

Эта прямая очень хорошо проходит через экспериментальные точки (рис. 20.20). Вообще B есть функция безразмерного числа $v_* k_s / v$, характеризующего шероховатость. Для режима без проявления шероховатости

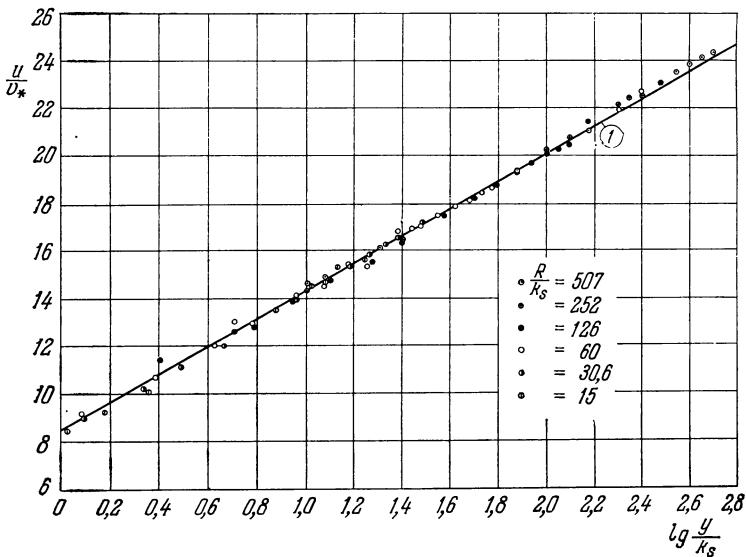


Рис. 20.20. Универсальное распределение скоростей в шероховатой трубе. Кривая (1) соответствует уравнению (20.32a).

значение B получается сразу из сопоставления уравнений (20.32) и (20.14), следовательно, для такого режима

$$B = 5,5 + 2,5 \ln \frac{v_* k_s}{v}. \quad (20.33)$$

Зависимость величины B от $v_* k_s / v$ в переходной области между режимом без проявления шероховатости и режимом с полным проявлением шероховатости изображена на рис. 20.21. Мы видим, что все экспериментальные значения B хорошо располагаются вдоль одной и той же кривой.

Применим уравнение (20.32) к середине трубы, т. е. положим $y = R$ и $u = U$ и составим затем разность $U - u$; мы получим

$$\frac{U - u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{R}{y} = 5,75 \lg \frac{R}{y},$$

т. е. прежнее уравнение (20.23), выведенное для гладких труб и хорошо согласующееся с измерениями (рис. 20.7). Для того чтобы сделать связь между распределениями скоростей в гладких и шероховатых трубах еще

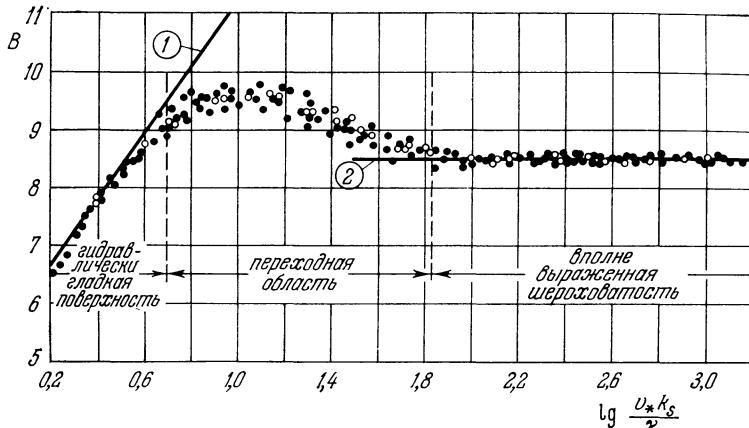


Рис. 20.21. Зависимость величины B от $v_* k_s / v$ при песчаной шероховатости. Кривая (1) соответствует режиму без проявления шероховатости [формула (20.33)], кривая (2) — режиму с полным проявлением шероховатости, т. е. значениюю $B = 8,5$.

более ясной, следует переписать соотношение (20.32), полученное для режима с полным проявлением шероховатости, в виде

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y v^*}{v} + D_1 \quad (20.33a)$$

и отложить значения безразмерной скорости $u/v_* = \varphi$ в виде ординат при абсциссах $y v^*/v = \eta$, т. е. поступить так же, как это было сделано при

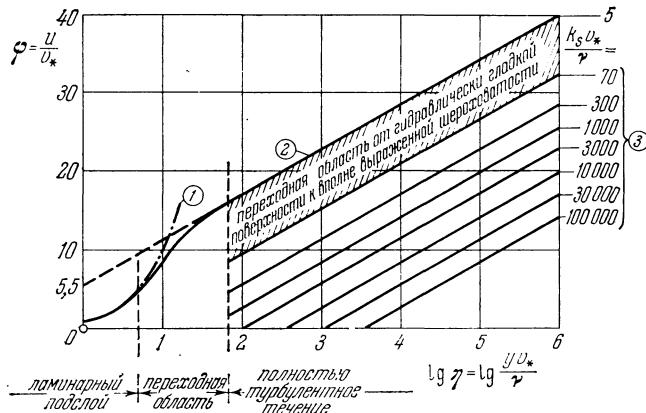


Рис. 20.22. Универсальный закон распределения скоростей (пристеночный закон) при турбулентном течении в гладких и шероховатых трубах. По Н. Шольц [66]. Кривая (1) — гладкая труба, ламинарный подслой, $\varphi = \eta$; кривая (2) — гладкая труба, турбулентное течение, формула (20.14); кривые (3) — шероховатая труба, формула (20.33а), в которой величина D_1 определяется формулой (20.33б).

построении рис. 20.4 на основе формулы (20.13), но при этом иметь в виду, что, как это следует из сравнения соотношений (20.32а) и (20.33а),

$$D_1 = 8,5 - 5,75 \lg \frac{k_s v^*}{v}. \quad (20.33б)$$

Таким путем Н. Шольц [66] получил на основе формулы (20.33а) для распределения скоростей в шероховатой трубе семейство прямых линий с параметром $v_* k_s / v$ (рис. 20.22). Для сравнения на этом же рисунке пока-

зано распределение скоростей в гладкой трубе при ламинарном течении ($\phi = \eta$) и при турбулентном по формуле (20.14). При течении в шероховатой трубе значениям параметра $v_* k_s / v = 5$ соответствует гидравлически гладкая стенка, далее, между значениями $v_* k_s / v = 5$ и $v_* k_s / v = 70$, лежит область перехода от режима без проявления шероховатости к режиму с полным проявлением шероховатости, и, наконец, при значениях $v_* k_s / v > 70$ шероховатость проявляет себя полностью (см. стр. 557). Из рис. 20.22, в частности, видно, что ламинарный подслой, который в случае гидравлически гладкой стенки наблюдается до значения $v v_* / v = 5$, для полностью шероховатой стенки не играет никакой роли.

Связь между законом сопротивления и распределением скоростей. Из распределения скоростей, полученного для шероховатых труб, можно вывести закон сопротивления таким же способом, как это было сделано в § 4 настоящей главы для гладких труб. Проще всего это сделать для режима с полным проявлением шероховатости. Определив из уравнения (20.23) среднюю по поперечному сечению скорость, мы по-прежнему [см. соотношение (20.26)] получим

$$\bar{u} = U - 3,75v_*. \quad (20.34)$$

Уравнение (20.32a) дает для середины трубы ($u = U$, $y = R$)

$$U = v_* \left(2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 8,5 \right).$$

Внеся это выражение U в равенство (20.34), мы будем иметь

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = 2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,75,$$

откуда найдем

$$\frac{\lambda}{8} = \left(\frac{v_*}{u} \right)^2 = \left(2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,75 \right)^{-2},$$

или

$$\lambda = \left(2 \lg \frac{R}{k_s} + 1,68 \right)^{-2}.$$

Это и есть квадратичный закон сопротивления для течения при полном проявлении шероховатости. Впервые он был выведен Т. Карманом из предложенной им гипотезы подобия (гл. XIX, [9]). Сравнение с измерениями И. Никурадзе (рис. 20.23) показывает, что для лучшего совпадения с измерениями следует заменить число 1,68 на 1,74. Таким образом, *закон сопротивления при полном проявлении шероховатости* имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{R}{k_s} + 1,74 \right)^2}. \quad (20.35)^1)$$

Если отложить значения $1/\sqrt{\lambda}$ как ординаты над абсциссами $\lg(R/k_s)$, то получится прямая, очень хорошо согласующаяся с экспериментальными точками. Формула (20.35) применима также для труб с некруглым попереч-

¹⁾ К. Ф. Коулброк и Уайт [8] вывели для сопротивления формулу, хорошо интерполирующую всю переходную область от режима без проявления шероховатости до режима с полным проявлением шероховатости. Эта формула, имеющая вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \lg \left(\frac{k_s}{R} + \frac{18,7}{Re \sqrt{\lambda}} \right). \quad (20.35a)$$

при $k_s \rightarrow 0$ переходит в формулу (20.30) для гидравлически гладкой трубы, а при $Re \rightarrow \infty$ — в формулу (20.35) для вполне шероховатой трубы. В переходной области формула (20.35a) дает для зависимости коэффициента сопротивления λ от Re кривые типа «технической шероховатости» (см. рис. 20.18 и 20.25).

ным сечением, если только вместо радиуса R ввести гидравлический радиус $R_h = 2F/U = d_h/2$ (F — площадь поперечного сечения, U — смоченный периметр).

Нетрудно установить связь между законом сопротивления и распределением скоростей также для переходного режима. Из уравнения (20.32) мы имеем

$$B = \frac{u}{v_*} - 2,5 \ln \frac{y}{k_s} = \frac{U}{v_*} - 2,5 \ln \frac{R}{k_s}.$$

Далее, из уравнения (20.34) следует, что

$$\frac{U}{v_*} = \frac{\bar{u}}{v_*} + 3,75 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} + 3,75.$$

Подставив это выражение U/v_* в предыдущее уравнение, мы получим

$$B \left(\frac{v_* k_s}{v} \right) = \frac{u}{v_*} - 2,5 \ln \frac{y}{k_s} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} + 3,75 - 2,5 \ln \frac{R}{k_s}. \quad (20.36)$$

Уравнение (20.36) дает возможность определить коэффициент сопротивления λ , если величина B известна из распределения скоростей. С другой стороны, уравнение (20.36) позволяет определить зависимость величины B от $v_* k_s / v$ либо из распределения скоростей, либо из закона сопротивления. На рис. 20.21 отмечены значения B , вычисленные обоими способами. Совпадение получается хорошее. Это обстоятельство подтверждает, что вывод закона сопротивления из распределения скоростей возможен также для шероховатых труб.

Указанное выше разграничение течения в шероховатых трубах на три режима непосредственно видно из рис. 20.21, а именно мы имеем:

режим без проявления шероховатости при

переходный режим при

режим с полным проявлением шероховатости при

$$\frac{v_* k_s}{v} < 5,$$

$$5 < \frac{v_* k_s}{v} < 70,$$

$$\frac{v_* k_s}{v} > 70. \quad \left. \right\} \quad (20.37)$$

Эти границы между отдельными режимами совпадают с результатами, полученными Г. Райхардтом при измерении распределения скоростей в слое, очень близком к гладкой стенке (см. рис. 20.4). Граница режима без проявления шероховатости ($v_* k_s / v = 5$) дает толщину ламинарного подслоя и совпадает с границей применимости закона Хагена — Пуазеля при чисто ламинарном распределении скоростей. Верхняя граница переходного режима ($v_* k_s / v = 70$) совпадает с переходом измеренного распределения скоростей в логарифмический закон (20.14) при чисто турбулентном трении.

С. Голдстейну [17] удалось определить границу $v_* k_s / v = 5$ режима без проявления шероховатости из условия начала образования вихревой элемента шероховатости. Согласно дорожка Кармана позади отдельного измерения Ф. Хомана, вихревая дорожка позади круглого цилиндра, заключенных, если составить их для диаметра цилиндра и скорости

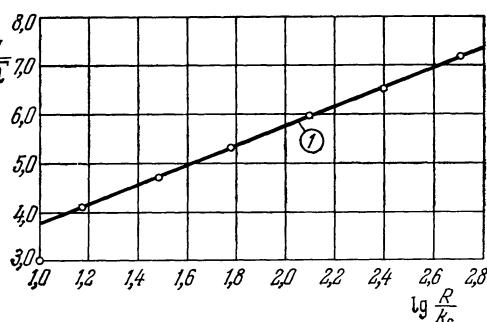


Рис. 20.23. Закон сопротивления для трубы с пе-
сочной шероховатостью при течении с полным
проявлением шероховатости. Кривая (1) соотв-
ствует формуле (20.35).

дорожки Кармана позади отдельного измерения Ф. Хомана, вихревая дорожка позади круглого цилиндра, заключенных, если составить их для диаметра цилиндра и скорости

набегающего потока, в промежутке от 60 до 100 (см. рис. 1.6). Как показывают новые исследования, выполненные И. Роттой [49], толщина ламинарного подслоя на шероховатой стенке меньше, чем толщина ламинарного подслоя на гладкой стенке, для которой, согласно формуле (20.15а), она равна $\delta \approx 5v/v_*$.

§ 7. Другие виды шероховатости

Песочная шероховатость, использованная И. Никурадзе в его опытах, характерна своей максимальной плотностью, так как зерна песка наклеивались на стенку настолько близко однок другому, насколько это вообще было возможно. Плотность технической шероховатости в большей части случаев значительно меньше. Такого рода шероховатость уже нельзя охарактеризовать указанием одной только высоты k элемента шероховатости или одним только отношением k/R . В связи с этим выявилась необходимость создать для оценки любой шероховатости нормальную шкалу, использовав для этой цели песочную шероховатость, поскольку последняя исследована в очень широкой области чисел Рейнольдса Re и отношений k_s/R . Сопоставление технической шероховатости с песочной шероховатостью проще всего выполнить для режима с полным проявлением шероховатости. При таком режиме коэффициент сопротивления определяется, как мы видели в предыдущем параграфе, формулой (20.35). Эта формула позволяет для любой шероховатости вычислить *эквивалентную песочную шероховатость*, под которой мы будем понимать тот размер зерен песка, который при применении формулы (20.35) дает такой же коэффициент сопротивления, как и фактическая шероховатость.

Экспериментальное определение эквивалентной песочной шероховатости для большого числа различных видов шероховатости, образованной правильно расположенным выступами, было выполнено Г. Шлихтингом [54]. Для этой цели был использован специальный канал с прямоугольным поперечным сечением. Три стенки канала были гладкие, а четвертая — шероховатая. Эта четвертая стенка была сделана выдвижной и допускала замену специально заготовленными другими стенками с другими видами шероховатости. Изменение распределения скоростей в центральном сечении дало возможность определить на основании логарифмического закона касательное напряжение на шероховатой стенке, а вместе с тем и эквивалентную песочную шероховатость. Для этого достаточно было для заданной шероховатости k вычислить постоянную B , входящую в универсальный закон распределения скоростей

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + B,$$

а затем вычесть это равенство из равенства (20.32а), что приводило к уравнению

$$5,75 \lg \frac{k_s}{k} = 8,5 - B, \quad (20.38)$$

позволявшему определить эквивалентную песочную шероховатость. Некоторые результаты таких измерений даны на рис. 20.24. Аналогичного рода измерения в трубах, внутренняя поверхность которых была сделана искусственно шероховатой путем нарезки разной формы, были выполнены В. Л. Стритеором [64] и Г. Мёбиусом [32].

Трубы, считаемые в технических условиях гладкими, в большей части случаев не могут рассматриваться как гидравлически гладкие. Доказательством этого могут служить изображенные на рис. 20.18 результаты измерений Б. Баузера и Ф. Галавича [3], выполненных для течения в технически гладкой железной трубе.

В случае технической шероховатости трудность обычно состоит в установлении размера шероховатости. Обзор довольно обширного экспериментального материала о сопротивлении в технически шероховатых трубах

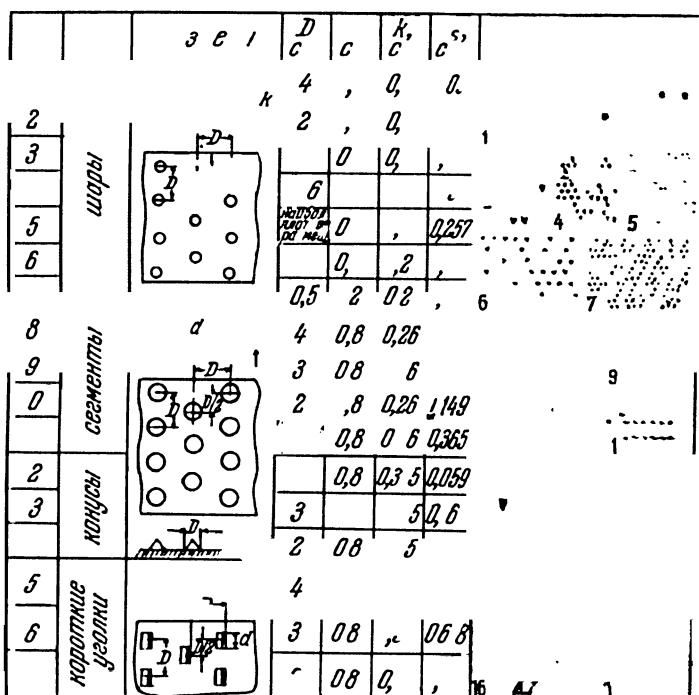


Рис. 20.24. Результаты измерений для правильно расположенных элементов шероховатости. По Шлихтингу [84]. k — геометрическая высота шероховатости; ks — эквивалентная песочная шероховатость.

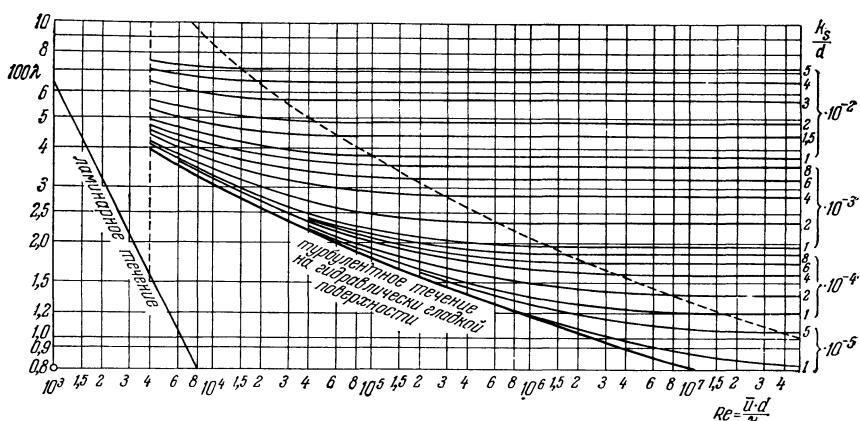


Рис. 20.25. Диаграмма, изображающая зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и отношения ks/d для технически шероховатых труб. По Л. Ф. Моуди [83]. ks — эквивалентная песочная шероховатость, отыскание которой для заданной технической шероховатости выполняется при помощи вспомогательной диаграммы, изображенной на рис. 20.26. Штриховая кривая дает границу режима с полным проявлением шероховатости, т. е. течения с квадратичным законом сопротивления.

имеется в работе Л. Ф. Моуди [83]. На рис. 20.25 изображена построенная Л. Ф. Моуди диаграмма, показывающая зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса Re и от отношения ks/d и в основном совпада-

дающая с диаграммой Никурадзе (см. рис. 20.18). Эквивалентную относительную песочную шероховатость, знание которой необходимо для пользования диаграммой Моуди, следует брать из вспомогательной диаграммы, изображенной на рис. 20.26. В последней диаграмме технически шероховатые трубы расположены в порядке, совпадающем со шкалой песочной шероховатости. Это следует из того, что зависимость λ от k_s/d при режиме с полным проявлением шероховатости приводит к значениям λ , совпадающим со значениями, полученными И. Никурадзе и изображенными на рис. 20.18. Однако в технически шероховатых трубах переход от режима без проявления шероховатости при малых числах Рейнольдса к режиму с полным проявлением шероховатости при больших числах Рейнольдса происходит значительно более постепенно, чем в трубах с песочной шероховатостью.

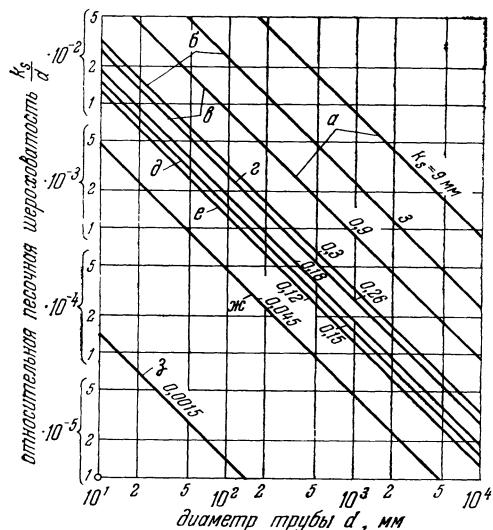


Рис. 20.26. Вспомогательная диаграмма, позволяющая определять эквивалентную песочную шероховатость для технически шероховатых труб из: а) клепанной стали; б) железобетона; в) дерева; г) чугуна; д) оцинкованного железа; е) асфальтированного железа; ж) строительной и кузачной стали; з) для тянутых труб. По Моуди [33].

около 0,5 мм. Таким образом, геометрическая шероховатость составляла всего только $k/R = 1/1000$, в то время как эффективная песочная шероховатость k_s/R , соответствовавшая фактическим коэффициентам сопротивления, была равна от 1/40 до 1/20 (фактический коэффициент сопротивления был вычислен на основании измерения понижения расхода). Этот случай показывает, что волнистая шероховатость вызывает значительно большее увеличение сопротивления, чем песочная шероховатость с такой же высотой выступов. Тщательное исследование повышения сопротивления в трубах, применяемых в вентиляционных шахтах, содержится в работе Э. Хюбнера [24].

Дальнейшие сведения о сопротивлении, связанном с шероховатостью, в частности о сопротивлении, вызываемом отдельными выступами шероховатости, будут даны в главе XXI при изложении вопроса о сопротивлении пластины при ее продольном обтекании.

§ 8. Течение в криволинейных трубах и диффузорах

Криволинейные трубы. Все сказанное в предыдущих параграфах применимо только к прямым трубам. В криволинейных трубах на более быстрые частицы жидкости, движущиеся в середине трубы, действует большая центробежная сила, чем на менее быстрые частицы, движущиеся вблизи стенок. Это приводит к возникновению вторичного течения, которое в середине трубы направлено к внешнему закруглению, т.е. наружу, а около стенок трубы —

к внутреннему закруглению, т. е. к центру кривизны (рис. 20.27). При большой кривизне распределение скоростей значительно изменяется — максимум скорости перемещается наружу.

При ламинарном течении влияние кривизны значительно сильнее, чем при турбулентном. Экспериментальным исследованием ламинарного течения в криволинейных трубах занимались К. М. Уайт [68] и М. Адлер [2], а турбулентного течения — Г. Нишпарт [40] и Г. Рихтер [48]. Теоретические расчеты ламинарного течения выполнены В. Р. Дином [9] и М. Адлером [2].

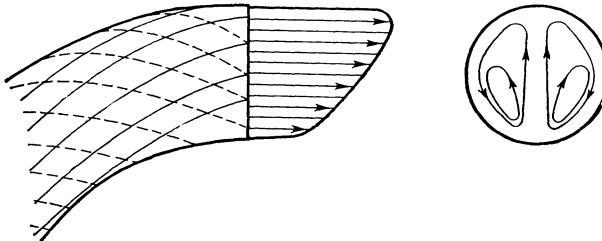


Рис. 20.27. Течение в криволинейной трубе. По Прандтлю [44].

Параметром, определяющим влияние кривизны трубы, при ламинарном течении является число Дина

$$D = \frac{1}{2} Re \sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{\bar{u} R}{v} \sqrt{\frac{R}{r}}, \quad (20.39)$$

где R есть радиус трубы, а r — радиус кривизны.

Измерения, выполненные М. Адлером для значений отношения $r/R = 50; 100$ и 200 , показали, что при $Re \sqrt{R/r} > 10^{1/2}$ кривизна трубы вызывает сильное увеличение сопротивления. По расчетам М. Адлера, коэффициент сопротивления λ криволинейной трубы равен

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 0,1064 \left[Re \sqrt{\frac{R}{r}} \right]^{1/2}, \quad (20.40)$$

где λ_0 есть коэффициент сопротивления прямой трубы, определяемый формулой (20.30). Однако измерения показывают, что эта формула применима только для значений $\sqrt{R/r} > 10^{2,8}$. Лучше согласуется с измерениями формула

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 0,37 D^{0,36}, \quad (20.41)$$

предложенная Л. Прандтлем [45]. Она дает хорошее совпадение с экспериментом при

$$10^{1,6} < Re \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} < 10^{3,0}.$$

Для коэффициента сопротивления криволинейной трубы при турбулентном течении К. М. Уайт [68] вывел формулу

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + 0,075 Re^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2}. \quad (20.42)^1$$

¹⁾ В работе Х. Ито [25] приводятся формулы:

$$\lambda \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} = 0,029 + 0,304 \left[Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^{-0,25} \quad \text{при } 0,034 < Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 < 300$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left[Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^{0,05} \quad \text{при } Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 > 6.$$

Эти формулы дают для λ несколько иные значения, чем формула Уайта (20.42), но в общем совпадают с ней.

Новые измерения в криволинейных трубах выполнены Г. Г. Камингом [7]. Тщательными измерениями коэффициентов потерь при турбулентном течении, а также теоретическими расчетами занимался Р. В. Детра [10]. Он исследовал криволинейные трубы не только с круглым, но и с некруглым поперечным сечением. Выяснилось, между прочим, что в трубах с эллиптическим поперечным сечением коэффициент потерь в том случае, когда большая ось эллипса лежит в плоскости кривизны, значительно больше, чем тогда, когда эта ось перпендикулярна к указанной плоскости.

Вторичное течение в изогнутом по окружности канале с прямоугольным поперечным сечением исследовано Э. Беккером [4] для случая, когда радиальное протяжение поперечного сечения значительно больше его высоты. Вопросу образования застойной зоны и отрыва течения в колене с квадратным поперечным сечением для поворота течения в трубе на 90° посвящена работа Д. Хаазе [19].

Диффузоры. Весьма многочисленные экспериментальные и теоретические исследования течения в прямых и криволинейных диффузорах выполнены Ж. Аккертом [1] и Г. Шпренгером [60], [61], а также С. Клайном [13],

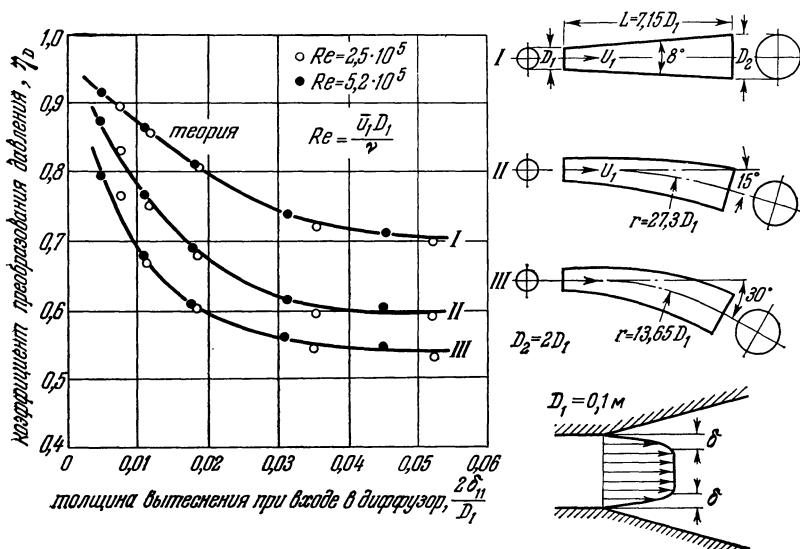


Рис. 20.28. Зависимость коэффициента преобразования давления в прямых и криволинейных диффузорах с круглым поперечным сечением от толщины вытеснения пограничного слоя при входе в диффузор [формула (20.43)]. По Ж. Аккерту [1] и Г. Шпренгеру [61].

[29], [34] и его сотрудниками. Одним из важнейших результатов этих исследований является следующий: толщина турбулентного пограничного слоя при входе в диффузор оказывает очень большое влияние на коэффициент полезного действия диффузора, т. е. на величину

$$\eta_D = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho (\bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2)}, \quad (20.43)$$

определенную повышение давления, достигаемое при помощи диффузора. В формуле (20.43) p есть статическое давление, а \bar{u} — осредненная по поперечному сечению скорость. Индекс 1 относится к этим величинам во входном сечении диффузора, а индекс 2 — к тем же величинам в выходном сечении. На рис. 20.28 изображена зависимость коэффициента η_D от отношения $2\delta_{11}/D_1$ для диффузоров с круглым поперечным сечением (δ_{11} есть толщина вытесне-

ния пограничного слоя при входе в диффузор, а D_1 — диаметр входного сечения). Мы видим, что у прямого диффузора в том случае, когда толщина вытеснения δ_{11} при входе составляет 0,5% от радиуса $D_1/2$, коэффициент η_D равен 0,9. При возрастании толщины вытеснения δ_{11} до 5% от $D_1/2$ коэффициент η_D уменьшается до 0,7. У криволинейных диффузоров коэффициент η_D сильно уменьшается при увеличении угла поворота диффузора. Далее, выполненные измерения показали, что у криволинейных диффузоров большую роль играет также форма выходного сечения. Так, например, у диффузора с круглым входным и эллиптическим выходным поперечным сечением коэффициент η_D значительно ниже в том случае, когда большая ось эллипса лежит в плоскости кривизны диффузора. Если же большая ось эллипса перпендикулярна к плоскости кривизны, то получается больший коэффициент η_D . Причина этого заключается в том, что в первом случае возникает значительно более мощное вторичное течение, что влечет за собой более высокие потери энергии. Для прямых диффузоров с круглым поперечным сечением Ж. Аккерет определил коэффициент полезного действия теоретически посредством расчета турбулентного пограничного слоя способом, указанным в главе XXII. Как показывает рис. 20.28, теоретический результат хорошо совпадает с измерениями. Систематические расчеты пограничного слоя в прямых диффузорах выполнены также Г. Шлихтингом и К. Гёрстеном [55]. Эти расчеты показали, что при неизменяющемся отношении площади входного поперечного сечения к площади выходного поперечного сечения для каждого числа Рейнольдса, составленного для условий при входе в диффузор, существует оптимальный угол 2α раствора диффузора, при котором коэффициент η_D достигает максимума. Этот оптимальный угол раствора лежит в пределах от $2\alpha = 3^\circ$ до $2\alpha = 8^\circ$ и уменьшается при увеличении числа Рейнольдса.

Экспериментальными исследованиями диффузоров занимались также Ф. А. Л. Уинтерниц и В. Дж. Рамзей [72].

Сводный обзор о течениях в диффузорах в недавнее время опубликован Д. Дж. Кокреллом и Э. Маркледдом [6a].

§ 9. Нестационарное течение в трубе

Ф. Шульц-Грунов [57] исследовал течение в трубе с периодической пульсацией, наложенной на осредненное течение. Для создания пульсаций в выходном сечении трубы была устроена раздвижная диафрагма, которая периодически расширялась и суживалась. К выходному сечению вода притекала с постоянным избыточным давлением. Профили скоростей в периоды ускорения и замедления течения резко отличаются один от другого. В период ускорения они более или менее сходны с профилями скоростей стационарного течения в постепенно суживающейся трубе или суживающемся канале; в период же замедления они более близки к профилям скоростей стационарного течения в расширяющемся канале (диффузоре; см. в связи с этим главу XXII, где даны такие профили). В период замедления при подходящих обстоятельствах возникает возвратное течение с отрывом от стенки. Осредненное во времени значение коэффициента сопротивления при медленных пульсациях мало отличается от коэффициента сопротивления при стационарном течении.

В другой своей работе Ф. Шульц-Грунов [58] указал практический способ для измерения расхода при пульсирующем течении.

Литература к главе XX

1. Ackerg et J., Grenzschichten in geraden und gekrümmten Diffusoren. IUTAM-Symposium Freiburg/Br. 1957, под ред. H. Görtler'a, Berlin 1958, 22—37.
- 1a. Ackerg et J., Aspects of Internal Flow. Fluid Mechanics of Internal Flow (ed. by Sovran G.) Elsevier Publishing Company, Amsterdam, London, New York 1967, 1—24.

2. Adler M., Strömung in gekrümmten Rohren. ZAMM 14, 257—275 (1934).
3. Bauer B., Galavics F., Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Rohreibung von Heizwasserleitungen. Mitt. d. Fernheizkraftwerkes d. ETH Zürich 1936; см. также Galavics F., Schweizer Archiv 5, 12, 337 (1939).
4. Becker E., Beitrag zur Berechnung von Sekundärströmungen. ZAMM 36, Sonderheft, 3—8 (1956); см. также Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung 13 (1956).
5. Blasius H., Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschg. Arb. Ing.-Wes., вып. 131, Berlin (1913).
6. Colebrook C. F., Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. J. Institution Civil Engineers 1939; см. также Engineering Hydraulics, под ред. H. Rouse'a, гл. VI; Streeter V. L., Steady flow in pipes and conduits, New York 1950.
- 6a. Cockrell D. J., Markland E. A review of incompressible diffuser flow. Aircraft Eng. 35, 286—292 (1963).
7. Cumming H. G., The secondary flow in curved pipes. ARC RM 2880 (1955).
8. Darcy H., Récherches expérimentales relatives aux mouvements de l'eau dans tuyaux. Mem. prés. à l'Académie des Sciences de l'Institut de France 15, 141 (1858).
9. Dean W. R., The streamline motion of a fluid in a curved pipe. Phil. Mag. (7) 4, 208 (1927) и 5, 673 (1928).
10. Dextra R. W., The secondary flow in curved pipes. Mitt. Inst. Aerodyn. ETH Zürich, вып. 20 (1953).
11. Eckert E. R. G., Irvine T. F., Flow in corners with non-circular crosssections. Trans. ASME 709—718 (1956); см. также JAS 22, 65—66 (1955).
12. Eckert E. R. G., Irvine T. F., Incompressible friction factor, transition and hydrodynamic entrance-length studies of ducts with triangular and rectangular cross sections. Доклад на Fifth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, 1957.
13. Fox R. W., Kline S. J., Flow regimes in curved subsonic diffusers. J. Basic Eng., Trans. ASME 84, Series D, 303—312 (1962).
14. Fritsch W., Einfluss der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. ZAMM 8, 199—216 (1928).
15. Fromm K., Strömungswiderstand in rauhen Rohren. ZAMM 3, 339—358 (1923).
16. Frössel W., Strömung in glatten, geraden Rohren mit Über- und Unterschallgeschwindigkeit. Forschg. Ing.-Wes. 7, 75 (1936).
17. Goldstein S., A note on roughness. ARC RM 1763 (1936).
18. Goldstein S., The similarity theory of turbulence, and flow between planes and trough pipes. Proc. Roy. Soc. A 159, 473 (1937).
19. Hase D., Strömung in einem 90° Knie. Ing.-Arch. 22, 282—292 (1954).
20. Дальнейшие литературные ссылки см. в работе; Hahnemann H. W., Der Strömungswiderstand in Rohrleitungen und Leitungselementen. Forschg. Ing.-Wes. 16, 113—119 (1950).
21. Haworth W. R., Secondary circulation in fluid flow. Proc. Roy. Soc. London A 206, 374 (1951).
22. Hermann R., Experimentelle Untersuchungen zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und grossen Anlaufängen. Диссертация, Leipzig. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930.
23. Hopf L., Die Messung der hydraulischen Rauigkeit. ZAMM 3, 329—339 (1923).
24. Hübnér E., Über den Druckverlust in Rohren mit Einbauten. Forschg. Ing.-Wes. 19, 1—16 (1953).
25. Ito H., Friction factors in turbulent flow in curved pipes. Trans. ASME, Series D, 81 (J. Basic Eng.), 123 (1959).
26. Jakob M., Erk S., Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchfluszziffer von Normaldüsen. Forschg. Arb. Ing.-Wes. № 267, Berlin (1924).
27. v. Kármán Th., Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233—252 (1921); см. также Collected Works II, 70—97.
28. Kirsten H., Experimentelle Untersuchungen der Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Rohrströmung. Диссертация, Leipzig 1927.
29. Kline S. J., Abbott D. E., Fox R. W., Optimum design of straight-walled diffusers. J. Basic Eng., Trans. ASME 81, Series D (сент. 1959).
30. Koch R., Feind K., Druckverlust und Wärmeübergang in Ringspalten. Chemie-Ing.-Techn. 30, 577—584 (1958).
31. Meyer E., Einfluss der Querschnittsverformung auf die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei turbulenten Geschwindigkeitsverteilungen in Rohren. VDI-Forschungsheft 389 (1938).
32. Möbius H., Experimentelle Untersuchungen des Widerstandes und der Geschwindigkeitsverteilung in Rohren mit regelmässig angeordneten Rauigkeiten bei turbulenter Strömung. Phys. Z. 41, 202—225 (1940).
33. Moody L. F., Friction factors for pipe flow. Trans. ASME 671 (1944).

34. Moore C. A. jr., Kline S. J., Some effects of vanes and of turbulence in two-dimensional wide-angle subsonic diffusers. NACA TN 4080 (1958).
35. Naumann A., Druckverlust in Rohren nichtkreisförmigen Querschnittes bei hohen Geschwindigkeiten. ZAMM 36, Sonderheft, стр. 25 (1956).
36. Nikuradse J., Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Диссертация, Göttingen 1926; VDI-Forschungsheft 281 (1926).
37. Nikuradse J., Turbulente Strömung in nicht kreisförmigen Rohren. Ing. Arch. 1, 306–332 (1930).
38. Nikuradse J., Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forschg. Arb. Ing.-Wes., вып. 356 (1932).
39. Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauen Rohren. Forschg. Arb. Ing.-Wes., вып. 361 (1933).
40. Nippert H., Über den Strömungswiderstand in gekrümmten Kanälen. Forschg. Arb. Ing.-Wes. № 320 (1929).
41. Nußelt W., Wärmeübergang in Rohrleitungen. Forschg. Arb. Ing.-Wes. № 89, Berlin (1910).
42. Obereck H., Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. Forschg. Arb. Ing.-Wes. № 158/159, Berlin (1914).
- 42a. Oswatitsch K., Gasdynamik. Wien 1952.
43. Prandtl L., Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse AVA Göttingen, III, Lieferung, 1–5 (1927); см. также Prandtl L., Ergebnisse AVA Göttingen, I, Lieferung, 136 (1921) и Gesammelte Abhdlg. II, 620–626.
44. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids. В книге: Durand W. F., Aerodynamic Theory III, 142 (1935) [Имеется русский перевод: Дюранд В., Аэродинамика, т. III, Москва 1939]; см. также сводный обзор: Prandtl L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 77, 105–114 (1933) или Gesammelte Abhdlg. II, 819–845.
45. Prandtl L., Führer durch die Strömungslehre, изд. 3, Braunschweig 1949. [Имеется русский перевод: Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, Москва 1951].
46. Reichardt H., Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. ZAMM 20, 297–328 (1940).
47. Reichardt H., Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. ZAMM 31, 208–219 (1951).
48. Richter H., Der Druckabfall in gekrümmten glatten Rohrleitungen. Forschg. Arb. Ing.-Wes. № 338 (1930).
49. Rotta J., Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenten Strömungen. Ing.-Arch. 18, 277–280 (1950).
50. Saph V., Schoder E. H., An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. Civ. Engr. 51, 944 (1903).
51. Schiller L., Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts- und Rauhigkeitsgrades. ZAMM 3, 2–13 (1923).
52. Schiller L., Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge a.d. Gebiet d. Aerodynamik und verwandter Gebiete, 69, Berlin 1930.
53. Schiller L., Strömung in Rohren. Handb. d. Exper. Physik IV, часть 4, 1–210, Leipzig 1931. [Имеется русский перевод: Шиллер Л., Движение жидкостей в трубах, Москва 1936.]
54. Schlichting H., Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem. Ing.-Arch. 7, 1–34 (1936). Английский перевод в Proc. Soc. Mech. Eng. USA (1936); см. также Werft, Reederei, Hafen, 99 (1936) и Jb. der Schiffbautechn. Ges. 418 (1936).
55. Schlichting H., Gersten K., Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie. ZFW 9, 135–140 (1961).
56. Scholz N., Strömungsvorgänge in Grenzschichten. VDI-Berichte 6, 7–12 (1955).
57. Schulitz-Grunow F., Pulsierender Durchfluss durch Rohre. Forschg. Ing.-Wes. 11, 170–187 (1940).
58. Schulitz-Grunow F., Durchflussmessverfahren für pulsierende Strömungen. Forschg. Ing.-Wes. 12, 117 (1941).
59. Seifert R., Krüger W., Überraschend hohe Reibungsziffer einer Fernwasserleitung. Z. VDI 92, 189 (1950).
60. Spengler H., Messungen an Diffusoren. VDI-Berichte 3, 10–110 (1955); см. также ZAMP 7, 372–374 (1956).
61. Spengler H., Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren. Mitt. № 27, Inst. Aerodyn. ETH Zürich (1959).
62. Stanton T. E., The mechanical viscosity of fluids. Proc. Roy. Soc. London A 85, 366 (1911).
63. Stanton T. E., Pannel J. R., Similarity of motion in relation of the surface-friction of fluids. Phil. Trans. Roy. Soc. A 214, 199 (1914); см. также Proc. Roy. Soc. London A 91, 46 (1915).

64. Streetter V. L., Frictional resistance in artificially roughened pipes. Proc. Amer. Soc. Civil Engr. 61, 163 (1935).
65. Szablewski W., Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese. ZAMM 31, 131—142 (1951).
66. Szablewski W., Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. Ing.-Arch. 21, 323—330 (1953).
67. Taylor G. I., Flow in pipes and between parallel planes. Proc. Roy. Soc. London A 159, 496—506 (1937).
68. White C. M., Streamline flow through curved pipes. Proc. Roy. Soc. London A 123, 645 (1929).
69. White C. M., Fluid friction and its relation to heat transfer. Trans. Inst. Chem. Engineers 10, 66 (1932).
70. Wiederhold W., Über den Einfluss von Rohrablagerungen auf den hydraulischen Druckabfall. Gas-u. Wasserfach 99, 634 (1949).
71. Wieghardt K., Turbulente Grenzschichten. Göttinger Monographie, часть B5 (1946).
72. Winteritz F. A. L., Ramsay W. J., Effect of inlet boundary layer on pressure recovery energy conversion and losses in conical diffusers. J. Roy. Aero. Soc. 61, 116—124 (1957).

Глава XXI

Турбулентные пограничные слои без градиента давления. Пограничный слой на пластине. Вращающиеся диски. Шероховатость

На первый взгляд можно подумать, что турбулентный пограничный слой на пластине или на любом другом теле можно рассчитать на основании уравнений движения (19.3а) и (19.3б) так же, как ламинарный пограничный слой, с той только разницей, что учет сил трения необходимо производить одним из способов, указанных в главе XIX. Однако до настоящего времени такой расчет турбулентного пограничного слоя выполнить невозможно, так как пока мы не знаем, во-первых, характера смыкания турбулентного пограничного слоя с ламинарным подслоем, всегда существующим в непосредственной близости от стенки, и, во-вторых, закона трения в этой переходной области. В этом отношении в более выгодном положении находятся задачи связанные со *свободной турбулентностью* (глава XXIV), т. е. с такими турбулентными течениями, которые не ограничены какими-либо стенками. Примерами свободной турбулентности могут служить смещение струи с окружающей ее неподвижной жидкостью или размытие следа позади тела. Такого рода чисто турбулентные течения могут быть рассчитаны на основе дифференциальных уравнений в сочетании с эмпирическими законами турбулентного трения. В задачах же, связанных с турбулентным пограничным слоем, интегрирование уравнений движения весьма затруднительно; поэтому для расчета турбулентного пограничного слоя пока приходится прибегать главным образом к приближенным методам, сходным с приближенными методами, разработанными для расчета ламинарного пограничного слоя. Приближенные методы для расчета турбулентного пограничного слоя также основаны в первую очередь на теореме импульсов, с успехом используемой для расчета ламинарного пограничного слоя.

Простейший и в то же время практически очень важный случай турбулентного пограничного слоя мы имеем при продольном обтекании плоской пластины. С этим случаем мы встречаемся при вычислении сопротивления трения корабля, сопротивления крыла и фюзеляжа самолета, а также лопаток турбины или воздуховодки. Продольное обтекание плоской пластины характерно тем, что для него градиент давления вдоль стенки равен нулю, и поэтому скорость вне пограничного слоя остается постоянной. Правда, при обтекании только что перечисленных тел градиент давления не всегда равен нулю. Однако до тех пор, пока не возникает отрыва пограничного слоя, сопротивление трения во всех этих случаях, так же как и при ламинарном течении, мало отличается от сопротивления плоской пластины. Следовательно, закономерности пограничного слоя на плоской пластине являются основой для расчета сопротивления всех тел, у которых при обтекании не возникает резко выраженного отрыва. Распространение выводов, которые мы получим при изучении пограничного слоя без градиента давления, на пограничный

слой с градиентом давления будет сделано в следующей главе. Во многих практических важных случаях (корабль, самолет) число Рейнольдса $Re = U_\infty l/v$ (U_∞ — скорость набегающего потока, l — длина пластины) столь велико, что для лабораторных измерений эти случаи недоступны. Кроме того, даже при умеренных числах Рейнольдса измерения в пограничном слое на пластине значительно труднее, чем при течении в трубе. В связи с этим особый интерес представляет указанный Л. Прандтлем [34] и Т. Карманом [24] способ, позволяющий вычислять сопротивление трения пластины из результатов, полученных для течения в трубах. Такой способ, ценный также потому, что для труб имеются многочисленные и очень тщательно выполненные измерения, применим в равной мере как для гладких, так и для шероховатых пластин.

§ 1. Гладкая плоская пластина

Приближенный метод, который мы здесь применим для расчеты турбулентного пограничного слоя, основан на использовании уравнения импульсов (8.35), выведенного в § 5 главы VIII. Распределение скоростей по толщине пограничного слоя заменяется подходящей аппроксимирующей функцией. Уравнение, получаемое в результате такой замены, дает связь между основными величинами, характеризующими пограничный слой: толщиной вытеснения, толщиной потери импульса и касательным напряжением на стенке.

Для дальнейших рассуждений предположим, что пограничный слой на пластине турбулентен, начиная от передней кромки ($x = 0$). Систему координат расположим так, как показано на рис. 21.1. Ширину пластины обозначим через b . Толщина пограничного слоя $\delta(x)$ возрастает с текущей длиной x . При переходе от течения в трубе к течению около пластины максимальной скорости U в трубе соответствует скорость U_∞ потока, набегающего на пластину, а радиусу R трубы — толщина пограничного слоя δ .

Рис. 21.1. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

Введем, далее, следуя Л. Прандтлю, следующее основное допущение: примем, что в пограничном слое на пластине распределение скоростей такое

же, как и в трубе. Это допущение, конечно, не совсем верно, так как распределение скоростей в трубе устанавливается под воздействием градиента давления, в то время как при обтекании пластины градиент давления равен нулю. Однако небольшая разница в распределении скоростей не играет особой роли, так как сопротивление определяется в основном интегралом импульса. Кроме того, измерения М. Ханзена [18] и И. М. Бюргерса [4] показали, что «степенной» закон распределения скоростей (20.6), полученный для труб, при умеренных числах Рейнольдса ($U_\infty l/v < 10^6$) довольно хорошо выполняется также в пограничном слое на пластине; следовательно, по крайней мере в этой области чисел Рейнольдса допущение, введенное Л. Прандтлем, вполне приемлемо. О некоторых систематических отклонениях распределения скоростей в трубе от распределения скоростей около пластины при более высоких числах Рейнольдса будет сказано ниже (стр. 579).

На основании формул (10.1) и (10.2), вытекающих из теоремы импульсов, сопротивление $W(x)$ пластины, смоченной с одной стороны, равно

$$W(x) = b \int_0^x \tau_0(x') dx' = b \rho \int_0^{\delta(x)} u (U_\infty - u) dy, \quad (21.1)$$

где x есть текущая длина пластины, а $\tau_0(x)$ — касательное напряжение на стенке на расстоянии x от передней кромки. Второй интеграл следует взять по толщине пограничного слоя на расстоянии x от передней кромки. Введем в формулу (21.1) толщину потери импульса δ_2 ; согласно равенству (8.34)

$$\delta_2 U_\infty^2 = \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy,$$

поэтому

$$W(x) = b_0 U_\infty^2 \delta_2(x). \quad (21.2)$$

Из формул (21.1) и (21.2) следует, что местное сопротивление равно

$$\frac{1}{b} \frac{dW}{dx} = \tau_0(x) = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx}. \quad (21.3)$$

Уравнение (21.3) тождественно совпадает с уравнением импульсов (8.35) для случая, когда вне пограничного слоя имеется однородное потенциальное течение

$$U(x) = U_\infty = \text{const.}$$

Произведем теперь полный расчет сопротивления пластины сначала на основании закона степени 1/7 для распределения скоростей, справедливого при умеренно больших числах Рейнольдса. Затем воспользуемся логарифмическим законом, пригодным при произвольно больших числах Рейнольдса (см. рис. 20.4), но ограничимся только приведением результатов, так как полные вычисления для этого случая довольно трудоемки.

1. Вывод закона сопротивления из закона степени 1/7 для распределения скоростей. На основании сказанного в начале настоящего параграфа закон степени 1/7 для распределения скоростей (20.6) в применении к пограничному слою на пластине следует переписать в виде

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}, \quad (21.4)$$

где $\delta = \delta(x)$ есть толщина пограничного слоя, меняющаяся вместе с расстоянием x от передней кромки пластины. Функция $\delta(x)$ может быть определена только из последующих вычислений. Принимая для распределения скоростей в пограничном слое на пластине уравнение (21.4), мы тем самым вводим предположение о подобии профилей скоростей, согласно которому они при построении в координатах u/U_∞ , y/δ сливаются в одну кривую.

Для напряжения τ_0 на стенке также возьмем формулу, полученную для течения в трубе, т. е. формулу (20.12а). Сделав указанные в начале параграфа замены, мы будем иметь

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0,0225 \left(\frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{1/4}. \quad (21.5)$$

Подставив значение u из уравнения (21.4) в равенства (8.33) и (8.34), определяющие толщину вытеснения и толщину потери импульса, мы получим¹⁾

$$\delta_1 = \frac{\delta}{8}, \quad \delta_2 = \frac{7}{72} \delta. \quad (21.6)$$

Из соотношений (21.3) и (21.6) следует, что

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}, \quad (21.7)$$

¹⁾ Для степенного закона в общем виде, т. е. для $u/U = (y/\delta)^{1/n}$, мы будем иметь

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{1+n}, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(2+n)}.$$

или, после замены левой части ее выражением (21.5),

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left(\frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{1/4}.$$

Это дифференциальное уравнение позволяет определить $\delta(x)$. Проинтегрировав его при начальном условии $\delta = 0$ при $x = 0$, мы получим

$$\delta(x) = 0,37x \left(\frac{U_\infty x}{v} \right)^{-1/5}, \quad (21.8)$$

следовательно,

$$\delta_2(x) = 0,036x \left(\frac{U_\infty x}{v} \right)^{-1/5}. \quad (21.9)$$

Мы видим, что толщина пограничного слоя увеличивается пропорционально степени $4/5$ от текущей длины x пластины, в то время как при ламинарном течении имеет место пропорциональность $\delta \sim x^{1/2}$. Таким образом, полное сопротивление пластины, смоченной с одной стороны и имеющей длину l и ширину b , согласно формуле (21.2) равно

$$W = 0,036\rho U_\infty^2 b l \left(\frac{U_\infty l}{v} \right)^{-1/5}.$$

т. е. при турбулентном течении сопротивление пластины пропорционально $U_\infty^{9/5}$ и $l^{4/5}$, в то время как при ламинарном течении оно пропорционально $U_\infty^{3/2}$ и $l^{1/2}$ [формула (7.33)]. Введя безразмерные местный и полный коэффициенты сопротивления посредством равенств

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2}, \quad c_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 b l}.$$

мы будем иметь

$$c'_f = 2 \frac{d\delta_2}{dx}, \quad c_f = 2 \frac{\delta_2(l)}{l} \quad (21.10)$$

Внеся сюда вместо δ_2 его выражение (21.9), мы получим

$$c'_f = 0,0576 \left(\frac{U_\infty x}{v} \right)^{-1/5}, \quad c_f = 0,072 \left(\frac{U_\infty l}{v} \right)^{-1/5}.$$

Для пластины, на которой пограничный слой турбулентен, начиная от передней кромки, последняя формула дает хорошее совпадение с результатами измерений, если только заменить в ней численный множитель 0,072 на 0,074. Таким образом, мы имеем следующий закон сопротивления:

$$c_f = 0,074 (\text{Re}_l)^{-1/5}. \quad (21.11)$$

Область применения этого закона, изображенного на рис. 21.2 в виде кривой 2, ограничена числами Рейнольдса Re_l , заключенными в пределах

$$5 \cdot 10^5 < \text{Re}_l < 10^7.$$

В самом деле, поскольку при выводе закона (21.11) использован закон сопротивления Блазиуса для труб, верхним пределом его применимости является $U_\infty \delta / v < 10^5$; этому числу Рейнольдса соответствует, согласно формуле (21.8), число $U_\infty l / v < 6 \cdot 10^6$ или, круглым счетом, $\text{Re}_l < 10^7$. Нижним пределом является число Рейнольдса $\text{Re}_l = 5 \cdot 10^5$, так как при $\text{Re}_l < 5 \cdot 10^5$ течение около пластины целиком ламинарно.

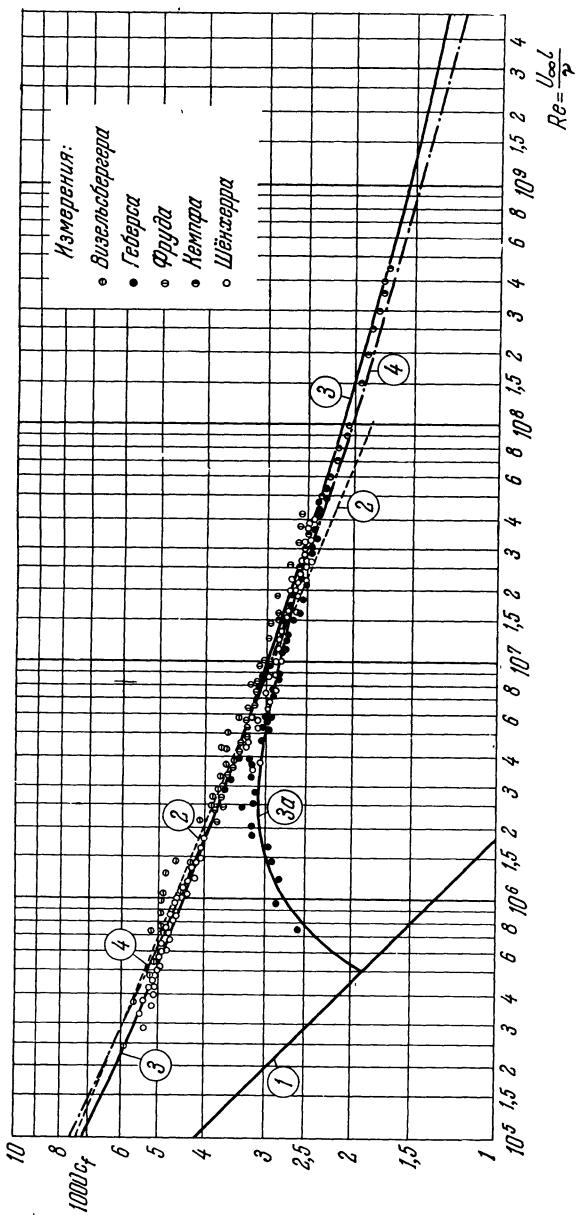


Рис. 21.2. Закон сопротивления гладкой плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении; сравнение теории с измерениями. Цифрами обозначены теоретические кривые, соответствующие: (1) — закону сопротивления Блазакуса [Формула (1.34)] для ламинарного течения; (2) — закону сопротивления Прандтля (21.11) для турбулентного течения; (3) — закону сопротивления Прандтля — Ширхтинга (21.16) для турбулентного течения; (3a) — закону сопротивления (21.16a) для перехода от ламинарного течения к турбулентному; (4) — закону сопротивления Шульц-Грунова (21.19) для турбулентного течения.

Формула для местного коэффициента сопротивления после замены численного множителя 0,0576 на более согласное с измерениями число 0,0592 и перехода к толщине потери импульса принимает вид

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{1}{2} c_f = 0,0296 \text{Re}_x^{-1/5} = 0,0128 \left(\frac{U_\infty \delta_2}{v} \right)^{-1/4}. \quad (21.12)$$

Формула (21.11) справедлива, как уже было сказано, при условии, что пограничный слой турбулентен, начиная от передней кромки пластины. Однако в действительности пограничный слой вблизи передней кромки пластины остается ламинарным и становится турбулентным только на некотором расстоянии от передней кромки. Положение точки перехода определяется критическим числом Рейнольдса ($U_\infty x/v$)_{kp} = Re_{kp} , которое, в зависимости от степени турбулентности внешнего течения, может меняться в пределах от $3 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^6$ (см. § 1 главы XVI). Наличие ламинарного участка на передней части пластины уменьшает сопротивление. Для оценки этого уменьшения предположим, следуя Л. Прандтлю, что турбулентный пограничный слой позади точки перехода такой же, как если бы он был турбулентным, начиная от передней кромки пластины. Тогда, вычтя из турбулентного сопротивления всей пластины турбулентное сопротивление ее участка от передней кромки до точки перехода x_{kp} и прибавив к полученной разности ламинарное сопротивление только что указанного участка, мы получим требуемую оценку. Это означает, что из сопротивления пластины, вычисленного в предположении, что пограничный слой турбулентен, начиная от передней кромки, необходимо вычесть

$$\Delta W = -\frac{\rho}{2} U_\infty^2 b x_{kp} (c_{f_t} - c_{f_l}),$$

где c_{f_l} и c_{f_t} суть полные коэффициенты сопротивления для ламинарного и турбулентного течений при критическом числе Рейнольдса $\text{Re}_{x_{kp}}$. Следовательно, поправка для коэффициента c_f составляет

$$\Delta c_f = -\frac{x_{kp}}{l} (c_{f_t} - c_{f_l}) = -\frac{\text{Re}_{x_{kp}}}{\text{Re}_l} (c_{f_t} - c_{f_l}).$$

Если мы положим, что

$$\Delta c_f = -\frac{A}{\text{Re}_l},$$

то постоянная A будет определяться положением точки перехода $\text{Re}_{x_{kp}}$ ламинарной формы течения в турбулентную, а именно она будет равна

$$A = \text{Re}_{x_{kp}} (c_{f_t} - c_{f_l}).$$

Таким образом, полный коэффициент сопротивления пластины с учетом существования ламинарного участка течения в передней части пластины равен

$$c_f = \frac{0,074}{\sqrt[5]{\text{Re}_l}} - \frac{A}{\text{Re}_l} \quad (21.13)$$

причем эта формула справедлива в области чисел Рейнольдса

$$5 \cdot 10^5 < \text{Re}_l < 10^7.$$

Имея значения c_{f_t} , определяемые формулой (21.11), и значения c_{f_l} , определяемые формулой Блазиуса (7.34), т. е.

$$c_{f_l} = 1,328 \text{Re}_x^{-1/2},$$

мы получим для A следующие значения:

$Re_x \text{ кр}$	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$
A	1050	1700	3300	8700

2. Вывод закона сопротивления из логарифмического распределения скоростей. В практических условиях числа Рейнольдса, наблюдающиеся при продольном обтекании плоской пластины, далеко выходят за пределы области применимости формулы (21.13)¹⁾, что приводит к необходимости отыскания для сопротивления пластины такой формулы, которая была бы пригодна для значительно более высоких чисел Рейнольдса. Такую формулу можно вывести принципиально таким же путем, как и формулу (21.13), но при этом взять за основу не закон степени $1/7$, а универсальный логарифмический закон распределения скоростей, полученный в главе XX в виде уравнения (20.13) или (20.14) для течения в трубе. Так как, согласно сказанному в главе XX, универсальный логарифмический закон распределения скоростей для течения в трубе допускает экстраполирование на произвольно большие числа Рейнольдса, то можно ожидать, что подлежащий выводу закон сопротивления для пластины также будет допускать экстраполирование на любые большие числа Рейнольдса. Конечно, при таком выводе придется по-прежнему исходить из предположения, что течение в трубе и течение около пластины имеют одинаковые распределения скоростей (см. по этому поводу сказанное на стр. 579).

Вывод закона сопротивления из универсального логарифмического закона распределения скоростей значительно сложнее, чем из закона степени $1/7$. Объясняется это прежде всего тем, что при логарифмическом законе распределения скоростей профили скоростей вдоль пластины не подобны один другому. Поэтому мы не будем приводить необходимые вычисления во всех подробностях и отошлем желающих познакомиться с ними к оригинальной работе Л. Прандтля [34].

Логарифмический закон распределения скоростей для течения в трубе мы получили в главе XX в виде

$$\varphi = A_1 \ln \eta + D_1 \quad (21.14)$$

[уравнение (20.13)], где $\varphi = \bar{u}/v_*$, $\eta = yv_*/v$, а $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ есть динамическая скорость, соответствующая касательному напряжению τ_0 на стенке. Для постоянных A_1 и D_1 при течении в трубе мы нашли в главе XX численные значения $A_1 = 5,75$ и $D_1 = 5,5$. Тщательные измерения (см. рис. 21.3) показали, что распределения скоростей при течении в трубе и при обтекании пластины несколько отличаются одно от другого, поэтому для течения вдоль пластины постоянные A_1 и D_1 были немного изменены и взяты равными соответственно

$$A_1 = 5,85, \quad D_1 = 5,56. \quad (21.15)$$

Выполнение вычислений, необходимых для определения зависимостей местного и полного коэффициентов сопротивления от числа Рейнольдса, приводит к довольно сложной системе формул, позволяющей найти также безразмерную

¹⁾ Для больших скоростных самолетов число Рейнольдса при обтекании крыла имеет порядок $Re_l = 5 \cdot 10^7$, а для современных быстроходных кораблей $Re_l > 5 \cdot 10^9$ (см. таблицу 21.3 на стр. 594).

толщину пограничного слоя $v_* \delta / v = \eta_\delta$. Результаты численного расчета даны в таблице 21.1, а полученная из этих результатов зависимость коэффициента c_f от Re_l изображена на рис. 21.2 в виде кривой 3.

Таблица 21.1. Местный и полный коэффициенты сопротивления для продольно обтекаемой гладкой плоской пластины при логарифмическом законе распределения скоростей [формулы (21.14) и (21.15)]; см. также кривую 3 на рис. 21.2

$\left(\frac{v_* \delta}{v}\right) \cdot 10^{-3} = \eta_\delta \cdot 10^{-3}$	$Re_l \cdot 10^{-6}$	$c'_f \cdot 10^3$	$c_f \cdot 10^3$	$\left(\frac{v_* \delta}{v}\right) \cdot 10^{-3} = \eta_\delta \cdot 10^{-3}$	$Re_l \cdot 10^{-6}$	$c'_f \cdot 10^3$	$c_f \cdot 10^3$
0,200	0,107	5,51	7,03	7,07	9,70	2,53	3,02
0,353	0,225	4,54	6,04	12,0	18,7	2,30	2,71
0,500	0,355	4,38	5,48	20,0	34,3	2,11	2,48
0,707	0,548	4,03	5,05	28,3	51,8	2,00	2,34
1,00	0,864	3,74	4,59	50,0	102	1,83	2,12
1,30	1,20	3,53	4,33	100	229	1,65	1,90
2,00	2,07	3,22	3,92	170	425	1,53	1,75
3,00	3,43	2,97	3,57	283	768	1,42	1,63
5,00	6,43	2,69	3,23	500	1476	1,32	1,50

Точная система формул, лежащая в основе таблицы 21.1 и определяющая закон сопротивления, весьма неудобна для пользования; поэтому Г. Шлихтинг заменил связь между полным коэффициентом сопротивления c_f и числом Рейнольдса Re_l , устанавливаемую таблицей 21.1, следующей интерполяционной формулой:

$$c_f = \frac{0,455}{(\lg Re_l)^{2,58}} \quad 1). \quad (21.16)$$

Для учета участка ламинарного течения около передней кромки пластины необходимо так же, как и в формуле (21.13), уменьшить коэффициент сопротивления (21.16), что приводит к формуле

$$c_f = \frac{0,455}{(\lg Re_l)^{2,58}} - \frac{A}{Re_l}, \quad (21.16a)$$

где величина A зависит от положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную и имеет для различных $Re_{x_{kp}}$ значений, указанные на стр. 577. Закон, выражаемый формулой (21.16), называется законом Прандтля — Шлихтинга для сопротивления гладкой плоской пластины при ее продольном обтекании. Этот закон применим до чисел Рейнольдса $Re_l = 10^9$, причем до $Re_l = 10^7$ он дает такие же значения, как и формула (21.13). На рис. 21.2 закон Прандтля — Шлихтинга изображен в виде кривой 3, при построении которой величина A принята равной 1700, что соответствует точке перехода при числе Рейнольдса $Re_{x_{kp}} = 5 \cdot 10^5$. На том же рисунке изображен в виде кривой 1 закон Блазиуса для ламинарного сопротивления трения [формула (7.34)]:

$$c_f = 1,328 Re_l^{-1/2}.$$

1) Для местного коэффициента сопротивления c'_f из таблицы 21.1 получается сходная интерполяционная формула

$$c'_f = (2 \lg Re_x - 0,65)^{-2,3}.$$

В связи с расчетами Т. Кармана [23], сходными с предыдущими, К. Э. Шёнхер [42] предложил для сопротивления пластины формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4,13 \lg (\text{Re}_l c_f). \quad (21.17)$$

На рис. 21.2 для сравнения с теоретическими кривыми отмечены результаты различных измерений. Экспериментальные точки, полученные К. Визельсбергером [56] для пластин, обтянутых пропитанной целлULOидом материяй, лежат несколько выше кривой 2, соответствующей турбулентному течению. Это обстоятельство показывает, во-первых, что при измерениях К. Визельсбергера не наблюдалось четко выраженного участка ламинарного течения вблизи передней кромки пластин, и, во-вторых, что пластины обладали небольшой шероховатостью. Измерения Ф. Геберса [15], выполненные для области чисел Рейнольдса Re_l от 10^6 до $3 \cdot 10^7$, лежат при менее высоких числах Рейнольдса на переходной части кривой 3а, соответствующей формуле (21.16а), а при более высоких числах Рейнольдса — на кривой 3, соответствующей формуле (21.16). Измерения К. Э. Шёнхера [42] также хорошо совпадают с теорией. Наибольшие числа Рейнольдса, вплоть до $\text{Re}_l = 5 \cdot 10^8$, были достигнуты при измерениях Г. Кемпфа [25] ¹⁾, давших полное совпадение с теоретической кривой 3а, соответствующей формуле (21.16а). Новые измерения на телах вращения также хорошо совпадают с теорией. Таким образом, многочисленные измерения хорошо подтверждают правильность приведенных выше теоретических формул для сопротивления гладкой пластины в весьма широкой области чисел Рейнольдса.

Наиболее новые и весьма тщательные измерения сопротивления трения и профилей скоростей в турбулентном пограничном слое на плоской пластине при числах Рейнольдса от $\text{Re}_l = 10^6$ до $4,5 \cdot 10^7$ выполнены Д. В. Смитом и Дж. Г. Уокером [47]. Результаты этих измерений хорошо совпадают с результатами Г. Кемпфа [25] и Ф. Шульц-Грунова [44], однако лежат несколько ниже, чем это следует из формулы (12.17). Коэффициенты трения измерялись посредством трубы Пито, помещенной непосредственно на поверхности пластины. В последнее время такой способ применяется часто и с успехом. См. в связи с этим работы Дж. Г. Престона [37], Р. А. Даттона [8], Г. Э. Гэдда [14], П. Бредшоу и Н. Грегори [3], а также Дж. Ф. Неллайда и М. Дж. Томпсона [31].

Подводя итог, можно сказать, что изложенные выше результаты хорошо подтверждаются измерениями во всей области чисел Рейнольдса.

3. Дальнейшие уточнения. Выполненные выше расчеты основаны, как уже было сказано, на предположении, что распределения скоростей в пограничном слое на пластине и в трубе совпадают одно с другим (при замене максимальной скорости U течения в трубе на скорость U_∞ потока, набегающего на пластину, и радиуса R трубы на толщину δ пограничного слоя на пластине). С целью проверки этого предположения Ф. Шульц-Грунов [44] выполнил очень тщательные измерения пограничного слоя на пластине. При этом выяснилось, что профиль скоростей около пластины во внешней части пограничного слоя систематически отклоняется кверху от логарифмического закона распределения скоростей для трубы. Результаты измерений изображены на рис. 21.3. Они могут быть хорошо переданы посредством уравнения

$$\frac{U_\infty - u}{v^*} = f_1 \left(\frac{y}{\delta} \right), \quad (21.17a)$$

совпадающего по своей форме с аналогичным уравнением (20.23) для течения в трубе. Таким образом, потеря импульса при течении около пластины несколько меньше, чем это вытекает из логарифмического закона распределения скоростей для трубы. Следова-

¹⁾ Г. Кемпф измерил только значения местного коэффициента трения. Л. Прандтль (Ergebnisse A VA Göttingen, вып. IV) из полученных результатов вычислил путем интегрирования коэффициент полного трения.

тельно, сопротивление получается также несколько меньше, чем это следует, если исходить из логарифмического закона скоростей для трубы. Функция $f_1(y/\delta)$, определенная Ф. Шульц-Груновым эмпирически, не позволяет обнаружить какого-либо влияния числа Рейнольдса¹⁾.

Ф. Шульц-Грунов использовал функцию $f_1(y/\delta)$ для вывода закона сопротивления. Полученный им результат может быть представлен следующими интерполяционными формулами:

$$c_f' = 0,370 (\lg \text{Re}_x)^{-2,584}, \quad (21.18)$$

$$c_f = 0,427 (\lg \text{Re}_l - 0,407)^{-2,64}. \quad (21.19)$$

График последней формулы изображен на рис. 21.2 в виде кривой 4. Отклонения от кривой 3, изображающей закон Прандтля — Шлихтинга, очень малы.

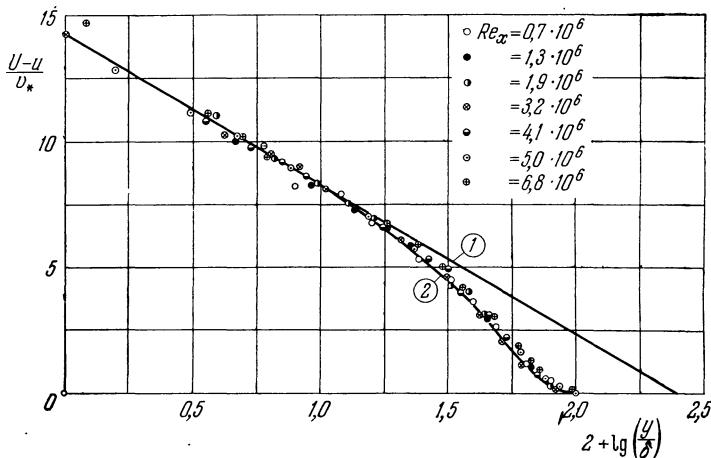


Рис. 21.3. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. По Шульц-Грунову [44]. Кривая (1) — логарифмический закон распределения скоростей для течения в трубе. На внешней границе пограничного слоя распределение скоростей на пластине заметно отличается от распределения скоростей в трубе. Кривая (2) была положена Шульц-Груновым в основу вывода закона сопротивления пластины и привела к формулам (21.18) и (21.19).

Различные способы определения турбулентного поверхностного трения критически рассмотрены Л. Ландвебером [27].

Физическая причина различной формы профилей скоростей в трубе и около пластины заключается, как показал К. Вигхардт [54], в различном характере турбулентности на внешнем крае пограничного слоя около пластины и вблизи середины трубы. Если внешнее течение, обтекающее пластину, обладает слабой степенью турбулентности, то около внешнего края пограничного слоя пульсации скорости очень близки к нулю, в то время как в середине трубы они довольно велики, так как здесь оказывается влияние противоположной стенки. Более слабой турбулентности в пограничном слое на пластине соответствует более крутное нарастание скорости, а потому и меньшая толщина пограничного слоя. К. Вигхардту удалось показать, что при искусственном повышении степени турбулентности внешнего течения распределение скоростей в пограничном слое на пластине почти не отличается от распределения скоростей в трубе.

Обширные опыты над турбулентным течением около пластины выполнены также И. Никирадзе [32]. Они показали, что в большой области чисел Рейнольдса, начиная от $\text{Re} = 1,7 \cdot 10^6$ и до $\text{Re} = 18 \cdot 10^6$, профили скоростей аффинны между собой, т. е. совпадают

¹⁾ Если перенести на пластинку закон распределения скоростей в трубе, то тогда мы будем иметь

$$f_1\left(\frac{y}{\delta}\right) = A \ln \frac{\delta}{y} = 2,5 \ln \frac{\delta}{y},$$

и уравнение (21.17а) при построении в полулогарифмических координатах (см. рис. 21.3) даст прямую 1. Результаты измерения вблизи стенки хорошо согласуются с этой прямой; измерения же вблизи внешней границы пограничного слоя дают кривую 2, сильно отклоняющуюся вниз от прямой 1.

один с другим, если их построить в безразмерных координатах u/U и y/δ_1 , где δ_1 есть толщина вытеснения. Универсальный закон распределения скоростей

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta_1}\right)$$

оказывается не зависящим от числа Рейнольдса. Применение теоремы импульсов позволило вычислить по измеренным распределениям скоростей местный и полный коэффициенты трения. Для распределения скоростей, толщины вытеснения, толщины потери импульса и закона сопротивления И. Никурадзе получил следующие интерполяционные формулы:

$$\frac{u}{U_\infty} = 0,737 \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^{0,1315}; \quad \frac{U_\infty \delta_1}{v} = 0,01738 \text{Re}_x^{0,861}; \quad H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1,30;$$

$$c'_f = 0,02296 \text{Re}_x^{-0,139}; \quad c_f = 0,02666 \text{Re}_l^{-0,139}.$$

Закону сопротивления при продольном обтекании пластины посвящена также работа В. М. Фокнера [12]. В статье Д. Коулса [6] профиль скоростей представлен в виде линейной комбинации двух универсальных функций, одна из которых учитывает влияние спутной струи, а другая — влияние стенки.

Измерения турбулентного пограничного слоя на волнистой стенке выполнены Г. Мотцфельдом [30]. Некоторые оценки для турбулентного пограничного слоя на плоской стенке, через которую производится отсасывание или сдувание, даны Г. Шлихтингом [39]. При однородном (т. е. при непрерывно и равномерно распределенном) отсасывании асимптотическая толщина пограничного слоя так же, как и при ламинарном течении, постоянна, однако при турбулентном течении она значительно более чувствительна к изменению количества отсасываемой жидкости, чем при ламинарном течении. Очень тщательные экспериментальные исследования турбулентного пограничного слоя на пористой плоской пластины, выполненные А. Фавром, Р. Дюма и Э. Веролле [12a], показали, что отсасывание пограничного слоя сильно влияет на турбулентное движение.

4. Влияние конечных размеров обтекаемого тела. Пограничные слои в углах. При продольном обтекании пластины конечной ширины течение вблизи боковых кромок пластины не остается в среднем двумерным подобно тому, как это имеет место в середине пластины. Опыты Дж. В. Элдера [10] показали, что на боковых кромках пластины возникают вторичные течения такого же вида, как в трубах с некруглым поперечным сечением (см. § 5 главы XX). Местный коэффициент трения по мере приближения к боковым кромкам значительно увеличивается. Это дополнительное сопротивление, осредненное по ширине пластины, не зависит, как показывают измерения Дж. В. Элдера, от числа Рейнольдса Re_l и ширины пластины. Исключением является только область в непосредственной близости от передней кромки пластины, где местный коэффициент трения беспорядочно изменяется в продольном и в поперечном направлениях. Согласно измерениям Дж. В. Элдера, увеличение полного коэффициента трения c_f равно

$$\Delta c_f = 3,62 \cdot 10^{-4} - \frac{30}{\text{Re}_l}. \quad (21.20)$$

Второй член в правой части учитывает быстро затухающий в продольном направлении эффект передней кромки пластины (см. в связи с этим также работу А. А. Таунсендса [53]).

Аналогичный эффект получается и в том случае, когда две пластины соединены между собой так, что образуют двугранный угол, внутри которого жидкость движется параллельно обеим плоскостям. Взаимное влияние пограничных слоев на обеих пластинах в случае прямого угла исследовано К. Герстеном [16]. Дополнительное сопротивление получилось равным

$$\Delta W = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 l^2 \Delta c_f. \quad (21.21)$$

Для интерференционного коэффициента трения К. Герстен получил значения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при ламинарном течении } \Delta c_f = -\frac{5,76}{\text{Re}_l}, \\ \text{при турбулентном течении } \Delta c_f = -\frac{0,0052}{\text{Re}_l^{2/5}}. \end{array} \right\} \quad (21.21a)$$

Следовательно, дополнительное сопротивление отрицательно, т. е. коэффициент трения двух соединенных под прямым углом пластин, смоченных только с внутренней стороны угла, меньше коэффициента трения одной плоской пластины с одинаковой полной поверхностью.

Случай произвольного угла рассмотрен Э. Эйхельброннером [9].

§ 2. Вращающийся диск

1. «Свободный» диск. Течение около вращающегося диска имеет большое практическое значение, главным образом для турбомашин. Так же как и течение около пластины, течение около вращающегося диска, начиная с некоторого числа Рейнольдса, перестает быть ламинарным. При числах Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{UR}{v} > 3 \cdot 10^5,$$

где R есть радиус диска, а $U = \omega R$ — окружная скорость диска, оно всегда турбулентное. Особенности течения около диска были подробно разобраны в § 2 главы V, где было дано полное решение для случая ламинарного течения около диска, вращающегося в неограниченной жидкости («свободный» диск). Слой жидкости, находящийся в непосредственной близости от диска, увлекается диском и под действием центробежной силы отбрасывается наружу. Следовательно, скорость в пограничном слое имеет не только окружную составляющую, но и радиальную. Отбрасываемая наружу жидкость заменяется жидкостью, притекающей в осевом направлении. Простая оценка, основанная на рассмотрении равновесия между силами трения и центробежной силой, позволила показать, что при ламинарном течении толщина пограничного слоя пропорциональна

$$\delta \sim \sqrt{\frac{v}{\omega}},$$

следовательно, не зависит от радиуса, и что момент сопротивления M , пропорциональный $\mu R^3 U / \delta$, определяется соотношением

$$M \sim \rho U^2 R^3 \left(\frac{UR}{v} \right)^{-1/2}.$$

Момент сопротивления принято выражать через коэффициент момента сопротивления, который для диска, смоченного с обеих сторон, определяется посредством равенства

$$C_M = \frac{2M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5} \quad (\text{ламинарное течение}). \quad (21.22)$$

Полное решение задачи о вращении диска при ламинарном течении дало для коэффициента C_M формулу

$$C_M = 3,87 \text{ Re}^{-1/2} \quad (21.23)$$

[формула (5.56)], где $\text{Re} = R^2 \omega / v$ (рис. 5.13).

Выясним теперь, к чему приводит аналогичная оценка в случае турбулентного течения. В основу расчета положим закон турбулентного трения при продольном обтекании пластины, следовательно, в простейшем случае — закон сопротивления, вытекающий из закона степени $1/7$ для распределения скоростей. Для частицы жидкости, вращающейся вместе с пограничным слоем на расстоянии r от оси, центробежная сила, действующая на единицу объема, равна $\rho r \omega^2$, а на объем с основанием $dr \cdot ds$ и высотой δ —

$$\rho r \omega^2 \delta dr ds.$$

Пусть касательное напряжение τ_0 образует с окружным направлением угол ϑ . Радиальная составляющая касательного напряжения должна уравновешиваться центробежной силой. Это дает уравнение

$$\tau_0 \sin \vartheta dr ds = \rho r \omega^2 \delta dr ds,$$

или

$$\tau_0 \sin \vartheta = \rho r \omega^2 \delta.$$

Что касается окружной составляющей касательного напряжения, то ее можно определить из закона трения (21.5) для пластины, заменив в последнем скорость набегающего потока U_∞ на окружную скорость $r\omega$. Выполнив это, мы получим

$$\tau_0 \cos \vartheta \sim \rho (\omega r)^{7/4} \left(\frac{v}{\delta} \right)^{1/4}.$$

Исключив из двух последних соотношений τ_0 , мы найдем для толщины пограничного слоя оценку

$$\delta \sim r^{3/5} (v/\omega)^{1/5}.$$

Таким образом, в то время как при ламинарном течении толщина пограничного слоя постоянна вдоль радиуса, при турбулентном течении она увеличивается по мере удаления от оси вращения пропорционально $r^{3/5}$. Далее, для момента сопротивления, обусловленного силами трения, мы имеем

$$M \sim \tau_0 R^3 \sim \rho R \omega^2 \left(\frac{v}{\omega} \right)^{1/5} R^{3/5} R^3,$$

следовательно,

$$M \sim \rho U^2 R^3 \left(\frac{v}{UR} \right)^{1/5}.$$

Т. Карман [24] рассчитал турбулентный пограничный слой на вращающемся диске посредством приближенного метода, основанного на теореме импульсов и примененного в предыдущем параграфе для плоской пластины. При расчете было принято, что окружная составляющая скорости в пограничном слое изменяется в соответствии с законом степени $1/7$. Для обусловленного трением момента сопротивления диска, смоченного с обеих сторон, Т. Карман получил формулу

$$2M = 0,073 \rho \omega^2 R^5 \left(\frac{v}{\omega R^2} \right)^{1/5} \quad (\text{турбулентное течение}), \quad (21.24)$$

что дало для коэффициента момента сопротивления, определяемого равенством (21.22), формулу

$$C_M = 0,146 \text{ Re}^{-1/5}. \quad (21.25)$$

Эта формула, график которой изображен на рис. 5.13 в виде кривой 2, дает для чисел Рейнольдса $\text{Re} > 3 \cdot 10^5$ хорошее совпадение с измерениями В. Шмидта и Г. Кемпфа¹⁾. Далее, для толщины пограничного слоя получилась формула

$$\delta = 0,526 r \left(\frac{v}{r^2 \omega} \right)^{1/5}, \quad (21.26)$$

а для количества жидкости, притекающего к диску в осевом направлении, — формула

$$Q = 0,219 R^3 \omega \text{ Re}^{-1/5}, \quad (21.27)$$

в то время как при ламинарном течении мы имели для Q формулу (5.57).

С. Голдстейн [17] выполнил приближенный расчет турбулентного течения около вращающегося диска на основе логарифмического закона распределения скоростей

$$\frac{u}{v_*} = A_1 \ln \frac{y v_*}{v} + D_1$$

¹⁾ См. литературу к главе V, работы [15] и [29].

и получил для момента сопротивления формулу

$$\frac{1}{\sqrt{C_M}} = 1,97 \lg (\text{Re} \sqrt{C_M}) + 0,03 \quad (\text{турбулентное течение}), \quad (21.28)$$

совпадающую по своей структуре с универсальным законом сопротивления (20.30) для течения в трубе. Численные множитель и слагаемое в формуле (21.28) были получены из условия наилучшего согласования с результатами измерений. График формулы (21.28) изображен на рис. 5.13 в виде кривой 3.

2. Диск в кожухе. Рабочие колеса турбомашин вращаются обычно в довольно узких кожухах, ширина которых $2s$ очень мала по сравнению с радиусом диска (рис. 21.4). Следовательно, рабочее колесо турбины нельзя рассматривать как свободный диск. Это обстоятельство привело к необходимости исследования течения около диска, вращающегося в кожухе.

Ламинарное течение. Особенно простое решение получается в том случае, когда течение около вращающегося диска ламинарно и ширина щели между кожухом и диском очень мала. Течение остается ламинарным при числах Рейнольдса $\text{Re} < 10^5$. Если ширина щели s меньше толщины пограничного слоя, то окружная скорость распределяется в промежутках между вращающимся диском и стенками неподвижного кожуха так же, как и при течении Күэтта, т. е. линейно, и поэтому

касательным напряжением на расстоянии r от оси будет

$$\tau = \frac{r \omega \mu}{s}.$$

Момент сил трения для одной стороны диска равен

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = \frac{\pi \omega R^4 \mu}{2s},$$

а для обеих сторон —

$$2M = \frac{\pi \omega R^4 \mu}{s}.$$

Следовательно, для коэффициента момента сил трения, определяемого равенством (21.22), мы имеем формулу

$$C_M = 2\pi \frac{R}{s} \frac{1}{\text{Re}} \quad (\text{ламинарное течение}). \quad (21.29)$$

График этой формулы для случая, когда $s/R = 0,02$, изображен на рис. 21.5 в виде кривой 1, которая приблизительно до $\text{Re} = 10^4$ очень хорошо совпадает с измерениями Цумбуша [45].

Влияние зазора s между диском и цилиндрической стенкой кожуха (рис. 21.4) для случая очень малых чисел Рейнольдса (ползущее движение) исследовано К. Шмидем [41]. В этом случае уравнения движения Навье — Стокса существенно упрощаются (см. § 4 главы IV), и для коэффициента момента сопротивления получается формула, по структуре сходная с формулой (21.29), а именно:

$$C_M = \frac{K}{\text{Re}},$$

где K есть величина, зависящая от обоих безразмерных промежутков s/R

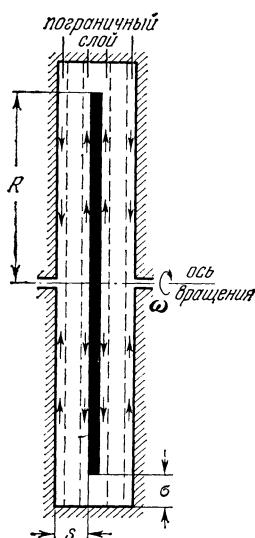


Рис. 21.4. Схема течения около диска, вращающегося внутри кожуха.

и σ/R . При очень малых σ/R ($<0,1$) для C_M получаются значения, на много более высокие, чем по формуле (21.29), в то время как при больших σ/R формула (21.29) сохраняет свою применимость ($K = 2\pi R/s$).

При большей ширине щели между кожухом и диском течение около диска имеет существенно иной характер. Этот случай исследован теоретически и экспериментально Ф. Шульц-Груновым [45]. Если ширина щели между кожухом и диском в несколько раз больше толщины пограничного

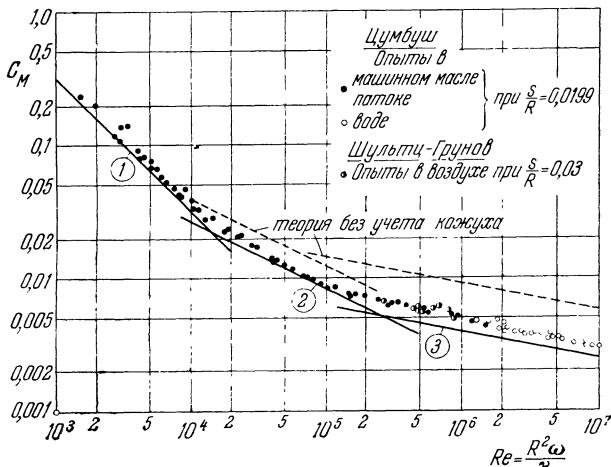


Рис. 21.5. Сопротивление трения диска, врачающегося внутри кожуха. Кривая (1) соответствует зависимости (21.29) для ламинарного течения; кривая (2) — зависимости (21.30) для ламинарного течения; кривая (3) — зависимости (21.31) для турбулентного течения. Для сравнения штрихами отмечены теоретические кривые для «свободного» диска (см. рис. 5.13).

слоя, то на каждой стороне диска и на каждой стенке кожуха образуется пограничный слой (см. рис. 21.4). Жидкость в пограничных слоях на вращающемся диске отбрасывается под действием центробежной силы наружу, а в пограничных слоях на стенке неподвижного кожуха, наоборот, движется снаружи к центру. Между каждой парой пограничных слоев находится слой жидкости, в котором радиальная скорость незначительна и который вращается с угловой скоростью, равной приблизительно половине угловой скорости диска. Именно это течение и было исследовано Ф. Шульц-Груновым посредством приближенного метода как для ламинарного, так и для турбулентного случая. При ламинарном течении для момента сил трения диска, смоченного с обеих сторон, получается формула

$$2M = 1,334 \mu R^4 \omega \sqrt{\frac{\omega}{v}}.$$

Следовательно, коэффициент момента сопротивления равен

$$C_M = 2,67 \text{Re}^{-1/2} \quad (\text{ламинарное течение}). \quad (21.30)$$

График этой формулы, совпадающей по структуре с формулой (5.56) для свободного диска, но имеющей иной численный множитель, изображен на рис. 21.5 в виде кривой 2, довольно хорошо смыкающейся при $\text{Re} \approx 1,3 \cdot 10^4$ с кривой 1, соответствующей формуле (21.29). Результаты,

даваемые формулой (21.30), совпадают с измерениями приблизительно до $Re = 2 \cdot 10^5$.

Турбулентное течение. При числах Рейнольдса $Re > 3 \cdot 10^5$ течение около диска, вращающегося в кожухе, становится турбулентным. Ф. Шульц-Грунов положил в основу приближенного расчета такого течения по-прежнему схему, изображенную на рис. 21.4, причем для распределения скоростей в окружном направлении принял закон степени 1/7. При турбулентном течении жидкость между каждой парой пограничных слоев вращается, как и при ламинарном течении, с угловой скоростью, равной половине угловой скорости вращения диска. Для коэффициента момента сопротивления получается формула

$$C_m = 0,0622 Re^{-1/5} \quad (\text{турбулентное течение}). \quad (21.31)$$

График этой формулы изображен на рис. 21.5 в виде кривой 3. Формула (21.31) дает значения, приблизительно на 17% меньшие, чем результаты измерений, что следует объяснить грубым допущением, положенным в основу приближенного расчета.

Для течения около диска, вращающегося в кожухе, особенно примечательно следующее обстоятельство: если не считать случая очень малой ширины щели между диском и кожухом [формула (21.29)], то момент сил трения, как это видно из формул (21.30) и (21.31), совершенно не зависит от ширины кожуха. Если мы сравним момент сил трения для диска в кожухе [формулы (21.30) и (21.31)] с аналогичным моментом для «свободного» диска [формулы (21.23) и (21.25)], то увидим, что для свободного диска этот момент больше, чем для диска в кожухе (рис. 21.5). Причина меньшей величины момента сил трения в кожухе объясняется тем, что жидкость между пограничными слоями с каждой стороны диска вращается с угловой скоростью, в два раза меньшей, чем угловая скорость диска. Вследствие этого здесь градиент окружной скорости в направлении, перпендикулярном к диску, приблизительно в два раза меньше, чем в случае свободного диска, и именно поэтому силы трения для диска в кожухе меньше, чем для «свободного» диска.

§ 3. Шероховатая пластина

1. Закон сопротивления для равномерно шероховатой пластины. В технических условиях течение около пластины (например, обтекание корабля, крыла самолета, лопатки турбины) обычно происходит при режиме, при котором стенка не является гидравлически гладкой. Поэтому течение около шероховатой пластины представляет такой же большой практический интерес, как и течение в шероховатой трубе.

При течении в шероховатой трубе важную роль играет относительная шероховатость k/R , где R есть радиус трубы. Аналогом этой величины при обтекании шероховатой пластины является отношение k/δ , где δ есть толщина пограничного слоя. Существенная разница между обоими течениями состоит в том, что для трубы относительная шероховатость k/R при постоянном k остается постоянной, в то время как для пластины относительная шероховатость k/δ уменьшается по мере удаления от передней кромки пластины, так как толщина пограничного слоя увеличивается вниз по течению. Это обстоятельство приводит к тому, что передняя и задняя части пластины ведут себя неодинаково в отношении сопротивления, вызываемого шероховатостью. Примем для простоты, что пограничный слой становится турбулентным, начиная от передней кромки пластины. Тогда в передней части пластины, где отношение k/δ велико, мы будем иметь некоторый участок с режимом полного проявления шероховатости. Дальше будет следовать так называемый пере-

ходный участок и, наконец, еще дальше — если только пластина имеет достаточно большую длину — участок с режимом без проявления шероховатости. Границы между указанными участками определяются значениями безразмерной шероховатости v^*k_s/v совершенно так же, как при течении в шероховатых трубах [формулы (20.37)].

Сопротивление шероховатой пластины можно определить из сопротивления шероховатой трубы путем пересчета, сходного с тем пересчетом, который был выполнен в § 1 настоящей главы для определения сопротивления гладкой пластины. Л. Прандтль и Г. Шлихтинг [35] выполнили такой

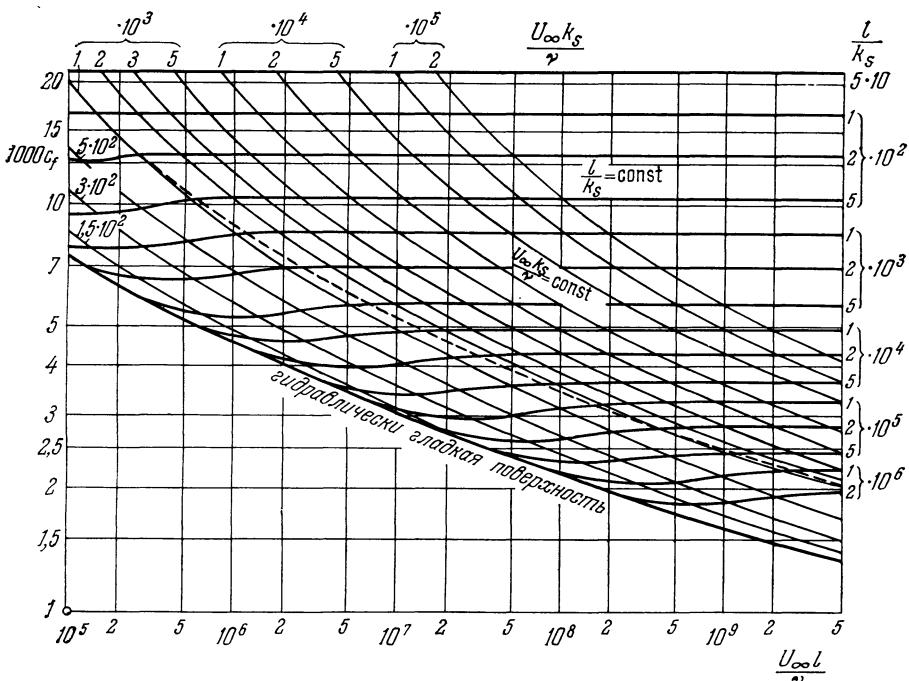


Рис. 21.6. Законы сопротивления пластины с песочной шероховатостью; полный коэффициент трения.

пересчет, используя для этой цели результаты измерений И. Никурадзе, полученные для труб с песочной шероховатостью (§ 6 главы XX). В основу пересчета был положен логарифмический закон распределения скоростей (20.32) для шероховатой трубы, т. е. уравнение

$$\frac{u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k_s} + B,$$

в котором величина B есть функция безразмерной шероховатости v_*k_s/v , определяемая из рис. 20.21. Необходимые вычисления, в основном сходные с вычислениями, упомянутыми в § 1 настоящей главы, должны, конечно, проводиться для переходного участка и для участка с полным проявлением шероховатости отдельно. За подробностями отсылаем к оригинальной работе.

Здесь приведем лишь окончательные результаты в виде двух диаграмм для пластины с песочной шероховатостью (рис. 21.6 и 21.7). На первой из них изображена зависимость полного коэффициента трения c_f от числа Рейнольдса $Re_l = U_\infty l / v$, причем в качестве параметра взята относительная шероховатость l/k_s , а на второй — зависимость местного коэффициента трения c'_f от числа Рейнольдса $Re_x = U_\infty x / v$ с величиной x/k_s в качестве параметра. Кроме того, на каждой диаграмме проведено семейство кривых

с параметром $U_\infty k_s/v$. Смысл обоих семейств кривых на каждой диаграмме следующий: если для заданной пластины скорость изменяется, то величина l/k_s остается постоянной, и изменение сопротивления происходит по кривой $l/k_s = \text{const}$; если же изменяется длина пластины, то остается постоянной величина $U_\infty k_s/v$, и изменение сопротивления происходит по кривой $U_\infty k_s/v = \text{const}$. Обе диаграммы вычислены в предположении, что пограничный слой становится турбулентным, начиная от передней кромки пластины. Штриховая кривая на каждой диаграмме дает границу области с полным проявлением шероховатости. Так же, как и в случае трубы, определенная

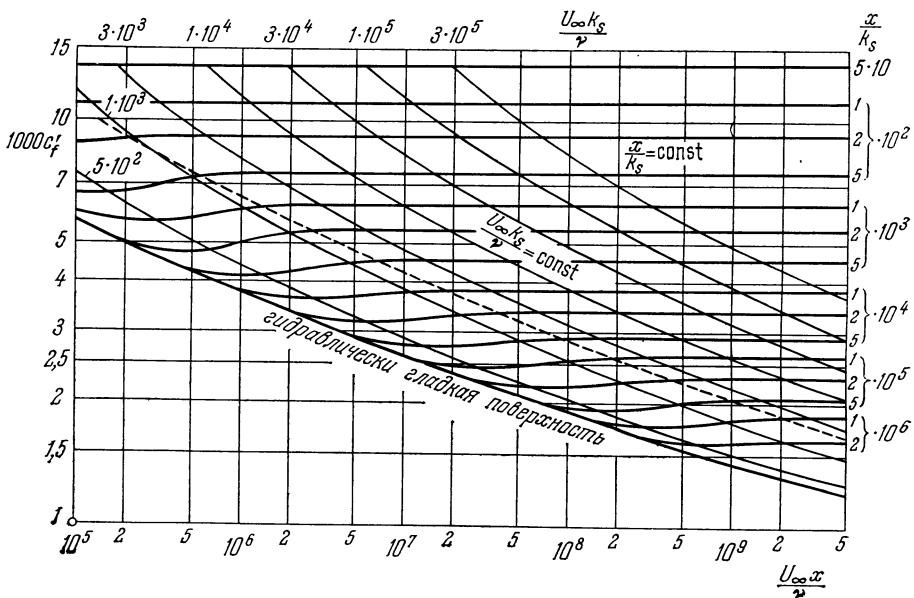


Рис. 21.7. Закон сопротивления пластины с песочной шероховатостью; местный коэффициент трения.

относительная шероховатость вызывает увеличение сопротивления не при всех числах Рейнольдса, а начиная только с вполне определенного числа Рейнольдса (см. в связи с этим § 4 настоящей главы).

Для режима с полным проявлением шероховатости зависимости коэффициентов сопротивления от относительной шероховатости могут быть представлены посредством следующих интерполяционных формул:

$$c'_f = \left(2,87 + 1,58 \lg \frac{x}{k_s} \right)^{-2,5}, \quad (21.32)$$

$$c_f = \left(1,89 + 1,62 \lg \frac{l}{k_s} \right)^{-2,5}. \quad (21.33)$$

Эти формулы применимы в области $10^2 < l/k_s < 10^6$.

Диаграммы, изображенные на рис. 21.6 и 21.7, пригодны не только для песочной шероховатости, но и для других видов шероховатости, но в этом случае необходимо вводить в расчет эквивалентную песочную шероховатость так, как это было сделано в § 7 главы XX.

Обшивка кораблей состоит либо из пластин с очень небольшой шероховатостью, вызванной окраской, либо из гладких пластин с отдельными элементами шероховатости в виде заклепок, сварочных швов, стыков. Ф. Шульц-Грунов [43] исследовал большое число подобного рода шероховатостей в специальном гёттингенском канале со сменной шероховатой стенкой

(см. § 7 главы XX). Весьма многочисленные сведения о шероховатостях, встречающихся на кораблях, имеются также в ряде работ Г. Кемпфа [26]. Согласно выполненным измерениям, эквивалентная песочная шероховатость для кораблей, только что спущенных с верфи, в среднем равна $k_s = 0,3 \text{ мм}$. При больших числах Рейнольдса, характерных для кораблей, такая шероховатость означает повышение сопротивления по сравнению с гидравлически гладкой стенкой примерно на 35—45 %. Особенno неблагоприятно действует на сопротивление корабля обрастание обшивки раковинами; увеличение сопротивления вследствие такого обрастания составляет до 50 % от нормального сопротивления. Шероховатость стенок играет важную роль также в гидромашинах. Гладкость стенок, достигаемая при практическом изготовлении лопаток турбины, недостаточна для обеспечения режима без проявления шероховатости (см. в связи с этим § 4 настоящей главы).

Как показали исследования А. Д. Янга [58], шероховатость, вызываемая маскировочной окраской самолета, также может быть выражена через эквивалентную песочную шероховатость. Для крыльев самолета эквивалентная песочная шероховатость равна от 0,003 до 0,2 мм и примерно в 1,6 раза больше, чем средняя геометрическая шероховатость, следовательно, $k_s = 1,6k$. Примечательно, что в дозвуковой области дополнительное сопротивление, вызываемое шероховатостью, не зависит от числа Маха.

Закономерности, найденные путем лабораторных опытов для течений около шероховатых стенок, применимы, как показал В. Пешке [33], также для ветра около поверхности земли. Измерив распределение скоростей ветра в слое, близком к поверхности земли, В. Пешке определил эффективную высоту шероховатости для различных видов растительного покрова. Эти измерения показали, что распределение скоростей

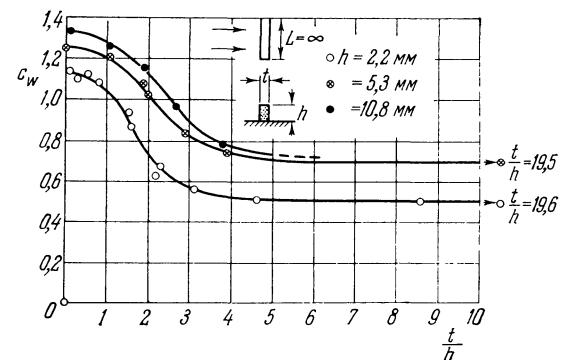
$$\frac{u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k} + B,$$

полученное для течения в трубе [уравнение (20.32)], остается верным и для ветра, если вместо k подставить высоту растительного покрова, а для B взять значение $B = 5$. В соответствии с уравнением (20.38) этому значению B отвечает эквивалентная песочная шероховатость $k_s = 4k$.

2. Измерения сопротивления, вызываемого отдельными элементами шероховатости. К. Вигхардт [55] исследовал большое число отдельных элементов шероховатости, расположенных на гладкой поверхности. Измерения проводились в Гётtingенском институте в специальной аэродинамической трубе с четырехугольным поперечным сечением $140 \times 40 \text{ см}^2$ и длиной 6 м. Все стеки трубы были гладкие, но в нижней стенке ($1,4 \times 6 \text{ м}^2$) могла передвигаться вдоль трубы вставная прямоугольная планка размером $50 \times 30 \text{ см}^2$ с укрепленными на ней отдельными элементами шероховатости, подлежащими исследованию. Измерение сопротивления производилось посредством аэродинамических весов. Разность сопротивлений вставной планки с элементом шероховатости и без него давала искомое дополнительное сопротивление ΔW , вызванное элементом шероховатости. Это дополнительное сопротивление состоит в общем случае из двух частей, а именно из сопротивления формы элемента шероховатости и из сопротивления, возникающего вследствие изменения распределения скоростей, а вместе с тем и касательного напряжения в окрестности элемента шероховатости. Так, например, если элементом шероховатости является прямоугольная рейка, то позади нее возникает область возвратного течения, что и влечет за собой изменение распределения скоростей в окрестности рейки. Важным параметром, определяющим возможность переноса полученных экспериментальных результатов на натурные объекты, в данном случае — на корабли и самолеты, является отношение k/b , т. е. отношение высоты элемента шероховатости к толщине b гравитационного слоя. Для изменения этого параметра в условиях опыта вставная планка с одним и тем же элементом шероховатости устанавливалась на различных расстояниях от входа в трубу. Далее, для возможности переноса экспериментальных результатов на натурные объекты важно ввести правильным образом составленный безразмерный коэффициент дополнительного сопротивления. К. Вигхардт взял для него следующее выражение:

$$c_W = \frac{\Delta W}{q_f}. \quad (21.34)$$

В этом выражении ΔW есть измеренное дополнительное сопротивление, f — лобовая площадь элемента шероховатости, т. е. площадь его наибольшего поперечного сечения, проведенного перпендикулярно к направлению течения, а \bar{q} — осредненное по высоте элемента шероховатости динамическое давление, т. е.



Гис. 21.8. Закон сопротивления прямоугольной стойки. По измерениям Вигхардта [56].

ватости: прямоугольные стойки, поставленные перпендикулярно и косо относительно направления течения, стойки с треугольным и круглым поперечным сечением, стыки пластин, отдельные заклепки и ряды заклепок, углубления в пластине и т. д. На рис. 21.8 изображены некоторые результаты для прямоугольной стойки, расположенной перпендикулярно к течению. С увеличением отношения t/h (t — ширина, h — высота стойки) коэффициент сопротивления сначала сильно уменьшается. Отверстия и углубления на поверхности пластины также вызывают увеличение сопротивления, так как внешнее течение приводит в движение жидкость, находящуюся в углублении.

На рис. 21.9 показано увеличение сопротивления, вызванное круглым отверстием (с диаметром d и глубиной — h). Так как в этом случае введенное выше определение осредненного динамического давления \bar{q} теряет смысл, то теперь для получения безразмерного коэффициента сопротивления следует разделить повышение сопротивления на динамическое давление вне пограничного слоя, т. е. принять, что

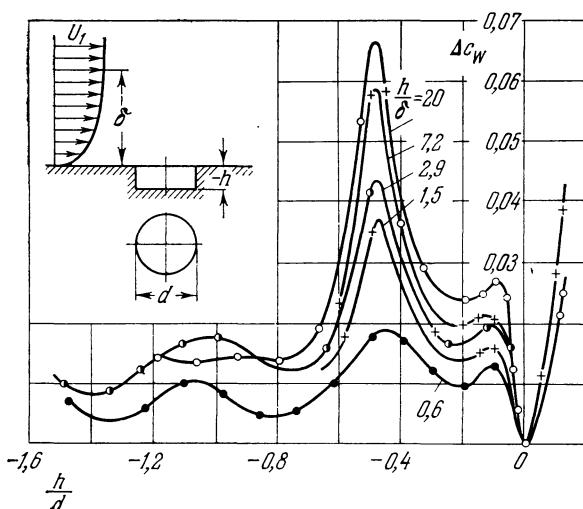


Рис. 21.9. Коэффициент сопротивления круглых отверстий различной глубины в плоской стенке. По измерениям Вигхардта [55].

шение $-h/d$ не превышает 0,1, дают приблизительно такое же повышение сопротивления, как и аналогичные возвышения.

Механизм течения позади возмущающего тела, находящегося в пограничном слое на стенке, существенно отличается от механизма течения позади тела в неограниченной жидкости. Это особенно ясно видно из опытов Г. Шлихтинга [38], в которых измерялось поле скоростей позади группы шаров, расположенных на гладкой плоскости (рис. 21.10).

$$\bar{q} = \frac{1}{k} \int_0^h \frac{\rho}{2} u^2(y) dy = \frac{1}{k} \frac{\rho}{2} U^2 \int_0^h \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2/7} dy,$$

где $u(y)$ есть распределение скоростей около гладкой стенки, следовательно, например,

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}.$$

Было исследовано большое количество разных элементов шероховатости:

прямоугольные стойки, поставленные перпендикулярно и косо относительно направления течения, стойки с треугольным и круглым поперечным сечением, стыки пластин, отдельные заклепки и ряды заклепок, углубления в пластине и т. д. На рис. 21.8 изображены некоторые результаты для прямоугольной стойки, расположенной перпендикулярно к течению. С увеличением отношения t/h (t — ширина, h — высота стойки) коэффициент сопротивления сначала сильно уменьшается. Отверстия и углубления на поверхности пластины также вызывают увеличение сопротивления, так как внешнее течение приводит в движение жидкость, находящуюся в углублении.

На рис. 21.9 показано увеличение сопротивления, вызванное круглым отверстием (с диаметром d и глубиной — h). Так как в этом случае введенное выше определение осредненного динамического давления \bar{q} теряет смысл, то теперь для получения безразмерного коэффициента сопротивления следует разделить повышение сопротивления на динамическое давление вне пограничного слоя, т. е. принять, что

$$\Delta c_W = \frac{\Delta W}{\bar{q}} = \frac{\Delta W}{\frac{\pi}{4} d^2}.$$

Повышение сопротивления тем меньше, чем меньше отношение глубины h отверстия к толщине δ пограничного слоя. Примечательно, что все кривые имеют общий максимум при $h/d \approx -0,5$. Другие максимумы, но меньшие по величине получаются при $h/d \approx -0,1$ и $-1,0$. В промежутках между максимумами, а именно при $h/d = -0,2; -0,8$ и $-1,35$, имеют место минимумы. Очевидно, что в отверстиях в зависимости от их глубины возникают различные правильные вихри, которые по-разному влияют на сопротивление. Из симметрии полученных кривых относительно нулевой точки следует, что мелкие выемки, для которых отно-

Полученная картина изотах показывает, что наименьшую скорость течения имеет в свободных промежутках между рядами шаров, т. е. там, где во всей плоскости не имеется ни одного шара, а наибольшую — позади шаров, между тем как на первый взгляд следовало ожидать обратной картины. Более тщательное исследование этого своеобразного явления

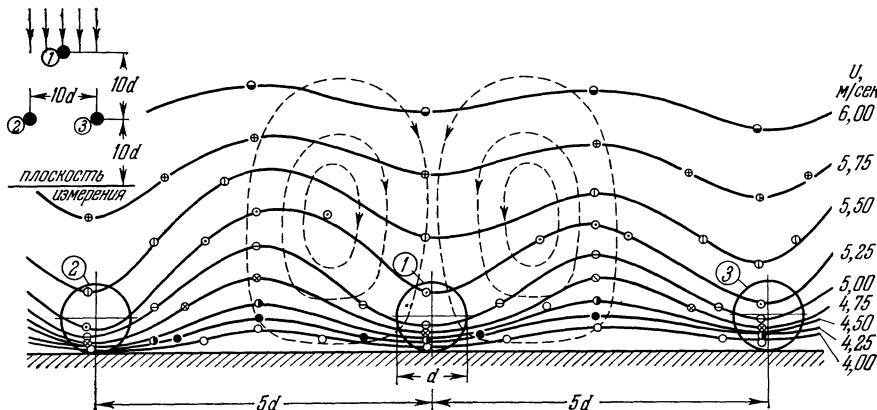


Рис. 21.10. Картина изотах поля скоростей позади группы шаров, размещенных на плоской стенке (сплошные кривые). По измерениям Г. Шлехтинга [48]. Штрихами изображены вторичные течения в пограничном слое позади шара (1) по расчетам Шульц-Грунова [46]. Вблизи стенки скорость течения позади шаров больше, чем в промежутке между шарами. Этот обратный эффект спутного течения является следствием вторичных течений. Диаметр шаров равен $d = 4$ мм.

было выполнено В. Якобсом [21]. Причина заключается, как указал Ф. Шульц-Грунов [46], во вторичных течениях такого же рода, как позади тел, создающих подъемную силу. На рис. 21.10 штрихами нанесены линии тока этих вторичных течений. Измерения, произведенные Д. Г. Вильямсом и А. Ф. Броуном [57] на крыловом профиле с заклепками, также подтвердили это явление.

Влиянию шероховатости на полетные свойства крыловых профилей посвящены многочисленные работы, см., например, [7], [19], [20].

3. Переход от гладкой стенки к шероховатой. Течение вдоль стенки, которая в определенном месте сразу переходит из гладкой в шероховатую или наоборот, исследовано

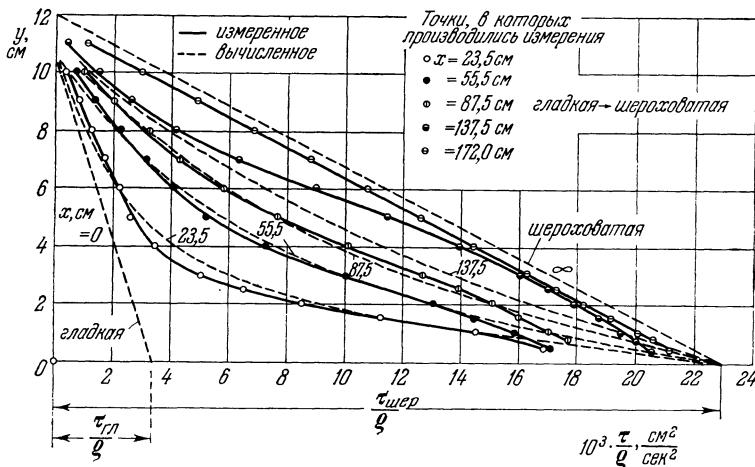


Рис. 21.11. Распределение касательных напряжений в пограничном слое при переходе от гладкой стенки к шероховатой. По измерениям В. Якобса [22].

В. Якобсом [22]. Подобного рода течение наблюдается, между прочим, в атмосфере в тех случаях, когда ветер дует с моря на суши или наоборот: шероховатость водной поверхности очень сильно отличается от шероховатости почвы. При таком резком переходе от гладкой поверхности к шероховатой (или наоборот) на некотором протяжении позади границы формируется профиль скоростей, соответствующий новому состоянию стенки. На

рис. 21.11 и 21.12 изображены распределения касательного напряжения, вычисленные по формуле Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

на основании измеренных распределений скоростей. При этом обнаруживается примечательное явление: позади границы раздела касательное напряжение на стенке принимает сразу значение, соответствующее новому состоянию стенки. Этот результат важен, например, для подсчета сопротивления пластины, состоящей из гладкого и шероховатого участков. Кривые распределения касательного напряжения $\tau(y)$ в переходной области

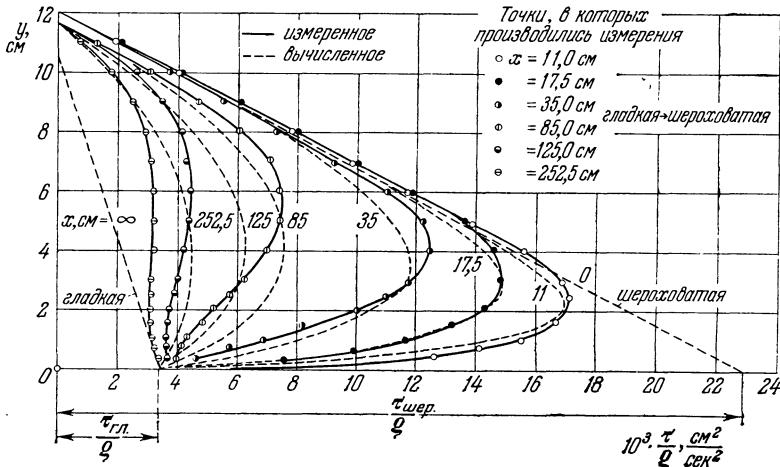


Рис. 21.12. Распределение касательных напряжений в пограничном слое при переходе от шероховатой стенки к гладкой. По измерениям В. Якобса [22].

располагаются между линейным распределением режима без проявления шероховатости и линейным распределением режима с полным проявлением шероховатости. Распределения касательного напряжения $\tau(y)$, измеренные при переходе от гладкой к шероховатой поверхности, могут быть интерполированы посредством следующей формулы:

$$\tau(x, y) = [\tau_{\text{гл}} - (\tau_{\text{гл}} - \tau_{\text{шер}}) e^{-11,6y/x}] \frac{h-y}{h}, \quad (21.35)$$

где $\tau_{\text{шер}}$ и $\tau_{\text{гл}}$ суть касательные напряжения соответственно на шероховатой и гладкой стенах при вполне развитившемся течении, x — расстояние вдоль стенки от границы между гладкой и шероховатой стенками, y — расстояние от стенки и h — высота канала. Для перехода от шероховатой к гладкой поверхности получается такая же формула, но с заменой $\tau_{\text{гл}}$ на $\tau_{\text{шер}}$ и наоборот. Графики обеих формул изображены на рис. 21.11 и 21.12 в виде штриховых кривых.

§ 4. Допустимая высота шероховатости

Допустимой высотой шероховатости называется та предельная высота элементов шероховатости, которая при обтекании стенки еще не вызывает увеличения сопротивления по сравнению с сопротивлением гладкой пластины. Понятие допустимой высоты шероховатости весьма важно с практической точки зрения, так как оно дает возможность заранее судить, к какой степени гладкости необходимо стремиться при технической обработке поверхности с целью уменьшения сопротивления. С физической точки зрения обстоятельства, определяющие допустимую высоту шероховатости, существенно различны для ламинарного и турбулентного пограничного слоя.

При турбулентном пограничном слое шероховатость не влечет за собой увеличения сопротивления при условии режима без проявления шероховатости, т. е. при условии, что ни один из элементов шероховатости не высту-

пает за пределы ламинарного подслоя, толщина которого, как мы знаем, составляет только очень небольшую долю толщины турбулентного пограничного слоя. Исследование течения в трубах привело к выводу, что условием режима без проявления шероховатости является неравенство

$$\frac{v_* k}{\nu} < 5 \quad (\text{гидравлически гладкая стенка}), \quad (21.36)$$

где $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ есть динамическая скорость¹⁾ [см. формулы (20.37)]. Это условие можно применять и для пластины при ее продольном обтекании. Однако для пластины практически удобнее выразить допустимую высоту шероховатости в виде отношения k/l , где l есть длина пластины. Для отыскания значений k/l следует обратиться к рис. 21.6. Очевидно, что допустимое значение k/l , соответствующее заданному числу Рейнольдса, определяется той кривой $k/l = \text{const}$, которая отклоняется от кривой сопротивления для гладкой пластины при заданном числе Рейнольдса. Мы видим, что при возрастании числа Рейнольдса $U_\infty l/\nu$ допустимая относительная шероховатость k/l становится меньше. Полученные из рис. 21.6 значения $(k/l)_{\text{доп}}$ даны в округленном виде в таблице 21.2. Все эти значения могут быть объединены простой формулой

$$\frac{U_\infty k_{\text{доп}}}{\nu} = 100, \quad (21.37)$$

в приближенной правильности которой можно убедиться также непосредственно из рис. 21.6.

Таблица 21.2. Зависимость допустимой высоты шероховатости от числа Рейнольдса

$\text{Re}_l = \frac{U_\infty l}{\nu}$	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\left(\frac{k}{l}\right)_{\text{доп}}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

Формула (21.37) дает *одно-единственное* значение допустимой шероховатости $k_{\text{доп}}$ для всей длины пластины. Между тем в передней части пластины толщина пограничного слоя меньше, чем дальше вниз по течению, а потому допустимая высота шероховатости по мере удаления от передней кромки пластины увеличивается. Для получения формулы, учитывающей это обстоятельство, следует ввести в неравенство (21.36) местный коэффициент трения

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2},$$

значения которого для гладкой пластины даны в таблице 21.1. Тогда, имея в виду, что

$$\frac{v_*^2}{U_\infty^2} = \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{c'_f}{2},$$

мы получим

$$\frac{U_\infty k_{\text{доп}}}{\nu} < \frac{7}{\sqrt{c'_f}}. \quad (21.38)$$

¹⁾ Для оценок, производимых в настоящем параграфе, мы не будем делать различия между песочной шероховатостью k_s и любой другой шероховатостью k .

Значения $k_{\text{доп}}$, даваемые формулой (21.38) при числах Рейнольдса $\text{Re}_x < 10^6$, приблизительно совпадают со значениями (21.37). Однако при больших числах Рейнольдса формула (21.38) дает для $k_{\text{доп}}$ несколько более высокие значения, чем формула (21.37). Поэтому мы можем всегда пользоваться более простой формулой (21.37), не опасаясь получить при этом слишком большие значения $k_{\text{доп}}$. Из формулы (21.37) видно, что допустимая высота шероховатости совершенно не зависит от длины пластины; она определяется исключительно скоростью течения и кинематической вязкостью. Таким образом, мы можем придать формуле (21.37) следующий вид:

$$k_{\text{доп}} \leqslant 100 \frac{v}{U_\infty}. \quad (21.39)$$

Отсюда вытекает, что если при испытании модели скорость и кинематическая вязкость имеют такие же значения, как и при испытании натурного объекта, то в обоих случаях абсолютные допустимые высоты шероховатости должны быть одинаковыми. Для длинных тел это требование ведет к чрезвычайно малой допустимой высоте шероховатости по сравнению с длиной тела (см. таблицу 21.3).

Таблица 21.3. Примеры определения допустимой высоты шероховатости при помощи диаграммы, изображенной на рис. 21.13

Объект	Более подробное описание	Длина или ширина l , м	Скорость w		Давление p ата, температура t °C	Кинематическая вязкость, $10^6 \cdot v$, $\text{м}^2/\text{сек}$	Число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{wl}{v}$	Допустимая высота шероховатости $k_{\text{доп}}$, мм
			км/час	м./сек				
Корабль	большой, быстроходный	250	56 (30 узлов)	15	1 ата 15° C	1,0	$4 \cdot 10^9$	0,007
	малый, тихоходный	50	18 (10 узлов)	5	1 ата 15° C	1,0	$3 \cdot 10^8$	0,02
Дирижабль	—	250	120	33	1 ата 15° C	15	$5 \cdot 10^8$	0,05
Самолет (крыло)	большой, скоростной	4 ¹⁾	600	166	1 ата 15° C	15	$5 \cdot 10^7$	0,01
	небольшой, с малой скоростью	2	200	55	1 ата 15° C	15	$8 \cdot 10^6$	0,025
Лопатка воздушудувки	медленная	0,1	—	150	1 ата 15° C	15	10^6	0,01
Модель крыла самолета	небольшая	0,2	144	40	1 ата 15° C	15	$5 \cdot 10^5$	0,05
Лопатка паровой турбины	высокое давление, $t = 300^\circ \text{C}$	10 мм	—	200	100 ата 300°C	0,4	$5 \cdot 10^6$	0,0002
	высокое давление, $t = 500^\circ \text{C}$	10 мм	—	200	100 ата 500°C	0,8	$2,5 \cdot 10^6$	0,0005
	низкое давление	100 мм	—	400	5 ата 200°C	8	$5 \cdot 10^6$	0,002

¹⁾ Хорда крыла.

Однако в практических приложениях целесообразнее выражать допустимую высоту шероховатости через длину пластины или, в более общем случае, через длину l обтекаемого тела (например, через длину корабля, хорду крыла

ла, ширину лопатки воздуходувки или турбины). В самом деле, отношение $k_{\text{доп}}/l$ является наглядной мерой степени гладкости, необходимой при обработке поверхности обтекаемого тела. Для этой цели перепишем формулу (21.39) в следующем виде:

$$k_{\text{доп}} \leq l \cdot \frac{100}{\text{Re}_l}, \quad (21.40)$$

где $\text{Re}_l = U_{\infty}l/\nu$. Для более удобного подсчета формула (21.40) представлена на рис. 21.13 в виде диаграммы, дающей зависимость допустимой высоты шероховатости от числа Рейнольдса, причем длина l пластины взята в качестве параметра. В нижней части диаграммы отмечены области чисел Рейнольдса, наблюдающиеся в различных технических приложениях (корабль, дирижабль, самолет, лопатка воздуходувки, лопатка турбины). Результаты

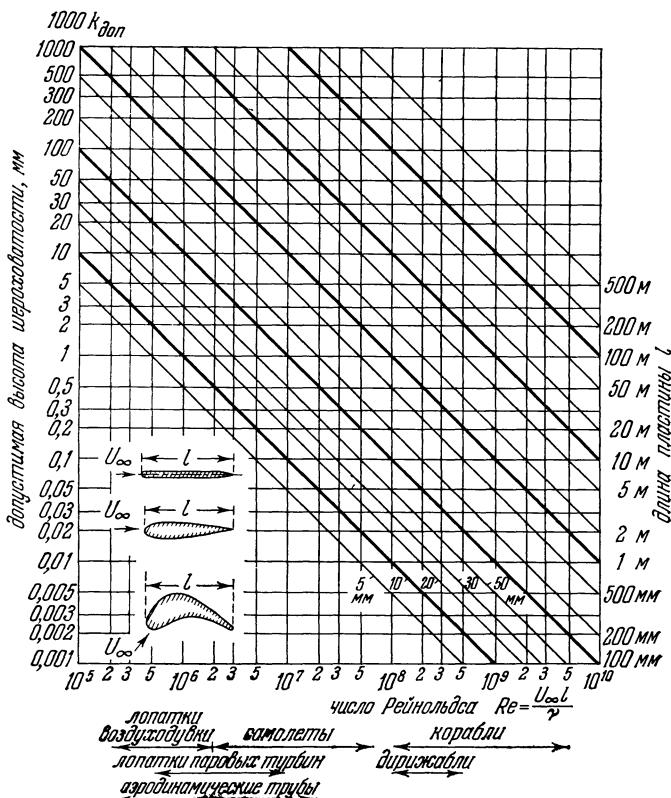


Рис. 21.13. Допустимая высота шероховатости $k_{\text{доп}}$ для шероховатых пластин, обтекаемых в продольном направлении, и для крыльев [формула (21.39)].

расчета нескольких примеров, полученные при помощи этой диаграммы, даны в таблице 21.3. Для кораблей допустимая высота шероховатости составляет несколько сотых миллиметра; практически такая степень гладкости для корабля неосуществима, поэтому в случае корабля всегда необходимо считаться со значительным повышением сопротивления вследствие шероховатости. Такой же результат получается и для дирижабля. Для крыльев самолета допустимая высота шероховатости заключается в пределах от 0,01 до 0,1 мм. Такая степень гладкости для крыльев самолета при очень тщательной обработке поверхности достижима. Для крыльев моделей самолета и для лопаток воздуходувки допустимая высота шероховатости также заключается в пределах от 0,01 до 0,1 мм, следовательно, в этих случаях гидравлически

гладкая поверхность вполне возможна. Для лопаток паровых турбин число Рейнольдса, несмотря на малые размеры лопаток, сравнительно велико, так как в паровых турбинах давление достигает высоких значений¹⁾. Вследствие этого допустимая высота шероховатости для лопаток паровых турбин очень мала; она составляет всего от 0,0002 до 0,002 *мм*. Если бы даже удалось при изготовлении лопаток достигнуть такой степени гладкости, то все равно это было бы бесполезно, так как при эксплуатации турбин коррозия и отложения солей вскоре приведут к тому, что высота шероховатости сделается больше допустимой. Подчеркнем, что все сказанное относится только

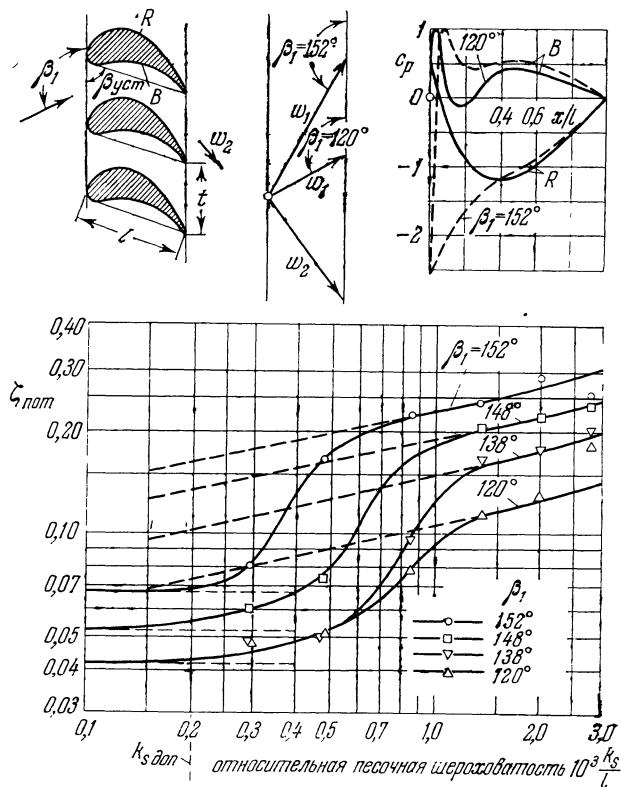


Рис. 21.14. Коэффициент потерь $\zeta_{\text{пот}}$ турбинных лопаток с песочной шероховатостью. По измерениям Л. Шпайделя [49]. $\zeta_{\text{пот}} = \Delta g / \frac{\rho}{2} w_2^2$; Δg — полная потеря давления; относительный шаг $t/l = 0,67$; угол установки $\beta_{\text{уст}} = 72^\circ$; число Рейнольдса $w_2 l / v = 5 \cdot 10^6$; коэффициент давления $c_p = (p - p_2) / \frac{\rho}{2} w_2^2$.

к шероховатости, состоящей из плотно расположенных возвышений типа зерен песка. Для очень редкой шероховатости, а также для волнистой шероховатости допустимая высота несколько выше.

Для лопаток паровых турбин влияние шероховатости на потери энергии зависит также, и притом сильно, от падения давления, происходящего при переходе от одной ступени к другой. Это ясно видно из рис. 21.14, на котором показана, по измерениям Л. Шпайделя [49], зависимость коэффициента

¹⁾ Значения кинематической вязкости для перегретого водяного пара можно найти в Escher-Wyss Mitteilungen, Jahrgang X, № 1, стр. 3 (1937) или в NBS-NACA Tables of Thermodynamic Properties of Gases, Washington 1954. См. также статью Kestin J., Whittelaw J. H., Trans. ASME(A), J. Basic Engineering 88 (1966), 82—104.

потерь $\zeta_{\text{пот}}$ турбинных лопаток от относительной песочной шероховатости. Коэффициент потерь $\zeta_{\text{пот}}$ равен

$$\zeta_{\text{пот}} = \frac{\Delta g}{\frac{\rho}{2} w_2^2},$$

где Δg есть осредненная по шагу полная потеря давления, а w_2 — выходная скорость. Увеличение коэффициента потерь с увеличением угла β_1 объясняется, как это видно из треугольника скоростей (рис. 21.14), увеличением скорости w_1 с увеличением угла β_1 . Штриховые прямые на рис. 21.14 соответствуют увеличению коэффициента потерь с увеличением размера зерен шероховатости k_s при пограничном слое, полностью турбулентном по всей ширине лопаток. При небольшой шероховатости измеренные значения коэффициента потерь лежат ниже этих прямых. Это объясняется тем, что на значительном участке лопаток пограничный слой остается ламинарным. Приближенная формула (21.40) для оценки допустимой шероховатости дает в рассматриваемом случае при $Re = w_2 l / v = 5 \cdot 10^5$ относительную допустимую шероховатость $k_s / l = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Это предельное значение отмечено на рис. 21.14 и хорошо совпадает с измерениями. См. также статью В. Т. Фостера [13а].

Перейдем к ламинарному пограничному слою. Будем называть высоту элемента шероховатости, вызывающего в ламинарном пограничном слое переход ламинарной формы течения в турбулентную, *критической высотой шероховатости* (см. § 7 главы XVII). Наличие шероховатости с критической высотой меняет величину сопротивления вследствие того, что точка перехода перемещается вперед, т. е. вверх по течению. При этом в зависимости от формы тела сопротивление может либо увеличиться, либо уменьшиться. Увеличение сопротивления происходит в том случае, когда для рассматриваемого тела преобладает сопротивление трения (примером может служить крыловый профиль); уменьшение же сопротивления наблюдается иногда у тел с преобладающим сопротивлением давления (например, у круглого цилиндра). Согласно японским измерениям, выполненным для изолированных шероховатостей [61], критическая высота шероховатости для ламинарного пограничного слоя определяется формулой

$$\frac{v_* k_{\text{kp}}}{v} = 15, \quad (21.41)$$

где $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ есть динамическая скорость. Вычислим для примера критическую высоту шероховатости для крыла длиной $l = 2 \text{ м}$, обдуваемого воздухом ($v = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$) со скоростью $U_\infty = 83 \text{ м/сек} = 300 \text{ км/час}$. Для такого течения

$$Re_l = \frac{U_\infty l}{v} \approx 10^7.$$

Рассмотрим точку крыла на расстоянии $x = 0,1l$ от носика. В этой точке

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{v} \approx 10^6,$$

следовательно, до этой точки пограничный слой может оставаться ламинарным при условии, что повышение давления начинается ниже по течению. Для ламинарного пограничного слоя касательное напряжение τ_0 на стенке, согласно формуле (7.32), равно

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0,332 U_\infty^2 \sqrt{\frac{v}{U_\infty x}} = 0,332 \cdot 6900 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{сек}^2 = 2,29 \text{ м}^2/\text{сек}^2,$$

откуда для динамической скорости находим значение

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = 1,52 \text{ м/сек.}$$

Подставив это значение в формулу (21.41), мы получим

$$k_{kp} = 15 \frac{v}{v_*} = \frac{15}{1,52} \cdot 0,14 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,14 \text{ мм.}$$

Если мы рассмотрим аналогичный случай (небольшой самолет) при турбулентном пограничном слое, то при помощи рис. 21.13 найдем, что допустимая высота шероховатости равна приблизительно 0,02 мм (см. также таблицу 21.3). Следовательно, критическая высота шероховатости, вызывающая переход ламинарного течения в турбулентное, приблизительно в 10 раз больше, чем допустимая высота шероховатости при турбулентном пограничном слое. Таким образом, ламинарный пограничный слой допускает, без увеличения сопротивления, значительно более высокую шероховатость, чем турбулентный пограничный слой.

К. Шербарт [40] выполнил измерения сопротивления в ламинарном пограничном слое с помещенными в нем отдельными возмущающими телами (заклепками). Эти измерения показали, что позади отдельного элемента шероховатости образуется клинообразная область турбулентного возмущенного движения с углом раствора от 14 до 18°.

Новые тщательные измерения, выполненные Э. Г. Файндтом [13], позволили уточнить формулу (21.41) для критической высоты шероховатости (см. § 7 главы XVII).

Относительное влияния шероховатости на сопротивление формы можно сказать следующее. Тела с острыми кромками, как, например, пластина, обтекаемая в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, нечувствительны — в смысле сопротивления — к шероховатости поверхности, так как в этом случае место отрыва определяется кромками. Напротив, сопротивление неудобообтекаемых тел без острых кромок, например круглого цилиндра, заметно зависит от шероховатости.

Для круглого цилиндра критическое число Рейнольдса, при котором происходит резкое падение сопротивления (рис. 1.4), сильно зависит от шероховатости. В этом случае, согласно английским и швейцарским измерениям [1], [11] (рис. 21.15), критическое число Рейнольдса с увеличением относительной шероховатости k/R ($d = 2R$ — диаметр цилиндра) уменьшается. Шероховатость настолько сильно возмущает пограничный слой на цилиндре, что переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при числах Рейнольдса, значительно меньших, чем для гладкого цилиндра. На сопротивление круглого цилиндра шероховатость действует так же, как проволочное кольцо, надетое на шар в опыте Л. Прандтля (см. рис. 2.21); следовательно, в определенной области чисел Рейнольдса шероховатость уменьшает сопротивление. Конечно, в области сверхкритических чисел Рейнольдса сопротивление шероховатого круглого цилиндра всегда больше, чем сопротивление гладкого цилиндра.

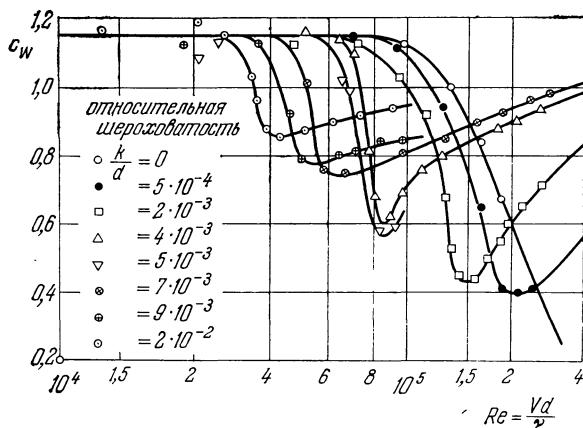


Рис. 21.15. Сопротивление круглого цилиндра при различной шероховатости его поверхности. По Файджу и Уорсеру [11].

швейцарским измерениям [1], [11] (рис. 21.15), критическое число Рейнольдса с увеличением относительной шероховатости k/R ($d = 2R$ — диаметр цилиндра) уменьшается. Шероховатость настолько сильно возмущает пограничный слой на цилиндре, что переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при числах Рейнольдса, значительно меньших, чем для гладкого цилиндра. На сопротивление круглого цилиндра шероховатость действует так же, как проволочное кольцо, надетое на шар в опыте Л. Прандтля (см. рис. 2.21); следовательно, в определенной области чисел Рейнольдса шероховатость уменьшает сопротивление. Конечно, в области сверхкритических чисел Рейнольдса сопротивление шероховатого круглого цилиндра всегда больше, чем сопротивление гладкого цилиндра.

Литература к главе XXI

1. A c k e r e t J., Schweizerische Bauzeitung **108**, 25 (1936).
2. B l e n k H., T r i e n e s H., Strömungstechnische Beiträge zum Windschutz. Grundlagen der Landtechnik. VDI-Verlag, вып. 8, 1956.
3. B r a d s h a w P., G r e g o r y N., The determination of local turbulent skin friction from observations in the viscous sub-layer. ARC RM 3203 (1961).
4. B u r g e r s J. M., The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. First Intern. Congress for Appl. Mech. 121, Delft (1924).
5. C h a p m a n n D. R., K e s t e r R. H., Measurements of turbulent skin friction in cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. JAS **20**, 441—448 (1953).
6. C o l e s D., The problem of the turbulent boundary layer. ZAMP **5**, 181—202 (1954).
7. D o e t s c h H., Einige Versuche über den Einfluss von Oberflächenstörungen auf die Profileigenschaften, insbesondere auf die Profilwiderstand im Schnellflug. Jb. dt. Luftfahrtforschung **I**, 88 (1939).
8. D u t t o n A. R., The accuracy of measurement of turbulent skin friction by means of surface Pitot tubes and the distribution of skin friction on a flat plate. ARC RM 3058 (1957).
9. E i c h e l b r e n n e r E., La couche-limite turbulente à l'intérieur d'un dièdre. Rech. Aéro. Paris № 83, 3—8 (1961).
10. E l d e r J. W., The flow past a flat plate of finite width. J. Fluid Mech. **9**, 133—153 (1960).
11. F a g e A., W a r s a p J. H., The effects of turbulence and surface roughness on the drag of circular cylinders. ARC RM 1283 (1930).
12. F a l k n e r V. M., The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer. Aircraft Engineering **15** (март 1943).
- 12a. F a v r e A., D u m a s R., V e r o l l e t E., Couche limite sur paroi plane poreuse avec aspiration. Publications Scientifiques et Techniques de l'Air, № 377 (1961).
13. F e i n d t E. G., Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauhigkeit und der Druckverteilung. Диссертация, Braunschweig 1956. Jb. Schiffbautechn. Ges. **50**, 180—203 (1957).
- 13a. F o r s t e r V. T., Performance loss of modern Steam-turbine plant due to surface roughness. The Institution of Mechanical Engineers, Preprint, London 1967.
14. G a d d G. E., A note on the theory of the Stanton tube. ARC RM 3147 (1960).
15. G e b e r s F., Schiffbau **9**, 435 и 475 (1908), а также Schiffbau **22** (1919).
16. G e r s t e n K., Die Grenzschichtströmung in einer rechtwinkeligen Ecke. ZAMM **39**, 428—429 (1959); см. также Corner interference effects. AGARD Rep. 299 (1959).
17. G o l d s t e i n S., On the resistance to the rotation of a disk immersed in a fluid. Proc Cambr. Phil. Soc. **31**, Part 2, 232 (1935).
18. H a n s e n M., Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM **8**, 185—199 (1928); NACA TM 585 (1930).
19. H o o d M. J., The effects of some common surface irregularities on wing drag. NACA TN 695 (1939).
20. J a c o b s E. N., Airfoil section characteristics as affected by protuberances. NACA Rep. 446 (1932).
21. J a c o b s W., Strömung hinter einem einzelnen Rauigkeitselement. Ing.-Arch. **9**, 343 (1938).
22. J a c o b s W., Umformung eines turbulenten Geschwindigkeits-Profil. ZAMM **19**, 87—110 (1939).
23. v. K á r m á n Th., Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Verhdlg. d. III. Intern. Kongr. f. Techn. Mechanik, 85, Stockholm 1931 и Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebes, Hamburg 1932; см. также JAS **1**, 1 (1934); NACA TM 611 (1931) или Collected Works II, 322—346.
24. v. K á r m á n Th., Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM **1**, 233—252 (1921); NACA TM 1092 (1946); см. также Collected Works II, 70—97.
25. K e m p f G., Neue Ergebnisse der Widerstandsrechnung. Werft, Reederei, Hafen **10**, 234 и 247 (1929).
26. K e m p f G., Über den Einfluss der Rauigkeit auf den Widerstand von Schiffen. Jb. Schiffbautechn. Ges. **38**, 159 и 233 (1937), а также The effect of roughness on the resistance of ships. Engineering, London **143**, 417 (1937); см. также Trans. Inst. Nav. Architects **79**, 109 и 137 (1937).
27. L a n d w e b e r L., Der Reibungswiderstand der längsangeströmten ebenen Platte. Jb. Schiffbautechn. Ges. **46**, 137—150 (1952).
28. L i e p m a n n H. W., F i l l a G. H., Investigations of effects of surface temperature and single roughness elements on boundary layer transition. NACA Rep. 890 (1947).
29. M o t t a r d E. J., L o p o s e r J. D., Average skin friction drag coefficient from tank tests of a parabolic body of revolution (NACA RM-10). NACA Rep. 1161 (1954).
30. M o t z f e l d H., Die turbulente Strömung an welligen Wänden. ZAMM **17**, 193—212 (1937).

31. Naleid J. F., Thompson M. J., Pressure-gradient effects on the Preston tube in supersonic flow. 28, 940—944 (1961).
32. Nikuradse J., Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Издание ZWB, R. Oldenbourg, München und Berlin 1942.
33. Paeckel W., Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitätsproblem in der bodennahen Luftschicht. Диссертация, Göttingen 1937; выдержки в Beitrag zur Physik der freien Atmosphäre 24, 163 (1937); см. также Z. Geophysik 13, 14 (1937).
34. Prandtl L., Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse AVA Göttingen, III. Lieferung (1927) и Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebnisse AVA Göttingen. IV. Lieferung (1932); первое сообщение было опубликовано в I. Lieferung 136 (1921); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 620—626 и 632—647.
35. Prandtl L., Schlichting H., Das Widerstandsgesetz rauher Platten. Werft, Reederei, Hafen 1—4 (1934); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 648—662.
36. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids, в книге: Durand W. F., Aerodynamic theory III (1935). [Имеется русский перевод: Дуранд В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]
37. Preston J. H., The determination of turbulent skin friction by means of Pitot tubes. J. Roy. Aero. Soc. 58, 109—121 (1954). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1955, № 5 (33).]
38. Schlichting H., Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem. Ing.-Arch. 7, 1—34 (1936); NACA TM 823 (1937).
39. Schlichting H., Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19, 293 (1942).
40. Scherbart K., Grenzschichtmessungen hinter einer punktförmigen Störung in laminarer Strömung. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 51—53 (1942).
41. Schmid C., Über den Widerstand einer in einer Flüssigkeit rotierenden Scheibe. ZAMM 8, 460—479 (1928).
42. Schoenherr K. E., Resistance of flat surfaces moving through a fluid. Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng. 40, 279 (1932).
43. Schulitz-Grunow F., Der hydraulische Reibungswiderstand von Platten mit mäßig rauher Oberfläche, insbesondere von Schiffsoberflächen. Jb. Schiffbautechn. Ges. 39, 176—198 (1938).
44. Schulitz-Grunow F., Neues Widerstandsgesetz für glatte Platten. Luftfahrtforschung 17, 239 (1940); см. также NACA TM 986 (1941).
45. Schulitz-Grunow F., Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. ZAMM 15, 191—204 (1935); см. также Föttinger H., ZAMM 17, 356—358 (1937) и Pantell K., Forschg. Ing.-Wes. 16, 97—108 (1950).
46. Schulitz-Grunow F., Der Mechanismus des Widerstandes von Einzelrauhigkeiten. ZAMM 36, 309 (1956).
47. Smith D. W., Walker J. H., Skin friction measurements in incompressible flow. NASA TR R-26 (1959).
48. Sörensen E., Wandrauhigkeitseinfluss bei Strömungsmaschinen. Forschg. Ing.-Wes. 8, 25 (1937).
49. Speidel L., Einfluss der Oberflächenrauhigkeit auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. Forschg. Ing.-Wes. 20, 129—140 (1954).
50. Szablewski W., Berechnung der turbulenten Strömung längs der ebenen Platte. ZAMM 31, 309—324 (1951).
51. Tani I., Hamada J., Mitussi S., On the permissible roughness in the laminar boundary layer. Aero. Res. Inst. Tokyo, Rep. 199 (1940).
52. Tillmann W., Neue Widerstandsmessungen an Oberflächenstörungen in der turbulenten Grenzschicht. Forschungshefte für Schiffstechnik, вып. 2 (1953).
53. Townsend A. A., The turbulent boundary layer. Grenzschichtforschung. IUTAM-Symposium Freiburg/Br. 1957, под ред. H. Görtler'a, 1—15, 1958.
54. Wiegardt K., Über die turbulente Strömung im Rohr und längs der Platte. ZAMM 24, 294 (1944).
55. Wiegardt K., Erhöhung des turbulenten Reibungswiderstandes durch Oberflächenstörungen. Techn. Berichte 10, вып. 9 (1943); см. также Forschungshefte für Schiffstechnik 1, 65—81 (1953).
56. Wieselsberger G., Untersuchungen über den Reibungswiderstand von stoffbespannten Flächen. Ergebnisse AVA Göttingen, I. Lieferung, 120—126 (1921).
57. Williamson D. H., Brown A. F., Experiments on a riveted wing in the compressed air tunnel. ARC RM 1855 (1938).
58. Young A. D., The drag effects of roughness at high subcritical speeds. J. Roy. Aero. Soc. 18, 534 (1950).
59. Betchov R., Criminale W. O., Jr., Stability of parallel flow. Applied Mathematics and Mechanics (eds. F. N. Frenkiel and Temple G.). Academic Press, New York, London 1967.■

Глава XXII

Турбулентные пограничные слои с градиентом давления при несжимаемом течении

В предыдущей главе мы рассмотрели турбулентный пограничный слой на плоской пластине при ее продольном обтекании без градиента давления в направлении течения. В настоящей главе мы рассмотрим турбулентный пограничный слой на стенке с понижением или повышением давления в направлении течения. Такое течение имеет особенно большое практическое значение в проблеме сопротивления крыла самолета и лопатки турбины, а также для исследования диффузора. Во всех этих случаях кроме определения сопротивления особый интерес представляет также выяснение вопроса, происходит или не происходит отрыв пограничного слоя, и если происходит, то в какой именно точке. Понижение давления и особенно повышение давления в направлении течения оказывают, так же как и при ламинарном течении, сильное влияние на развитие пограничного слоя.

Чисто теоретический расчет турбулентного пограничного слоя с понижением и повышением давления в настоящее время еще невозможен. Однако разработаны многочисленные полуэмпирические методы, позволяющие более или менее удовлетворительно производить расчет турбулентного пограничного слоя. Для применения этих методов требуются, кроме эмпирических соотношений, использованных для расчета течений в трубе или около пластины, дополнительные соотношения, основанные на экспериментальных данных. Поэтому прежде всего коротко остановимся на некоторых экспериментальных результатах.

§ 1. Некоторые экспериментальные результаты

Систематические измерения плоских течений с понижением и повышением давления в суживающихся и расширяющихся каналах с плоскими стенками выполнены Ф. Дёнхом [9], Г. Хохпильдом [21], Р. Крёнером [25], И. Никурадзе [36] и И. Польцином [39]. Данные об измерениях в круглых диффузорах, в частности о коэффициенте полезного действия диффузоров в смысле преобразования давления в скорость, содержатся в работах Ф. А. Л. Унтернитца и В. Дж. Рамзея [77], а также Дж. М. Робертсона и Д. Росса [42]. Все эти измерения показали, что форма профиля скоростей очень сильно зависит от градиента давления. На рис. 22.1 изображены полученные И. Никурадзе распределения скоростей в слабо суживающихся и слабо расширяющихся каналах, для которых половина угла раствора α равна -8° , -4° , -2° , 0° , 1° , 2° , 3° , 4° . В суживающихся каналах толщина пограничного слоя значительно меньше, чем при продольном обтекании пластины без градиента давления. Наоборот, в расширяющихся каналах пограничный слой значительно толще, чем на пластине, и при этом он дости-

гает середины канала. До тех пор, пока полуугол раствора α расширяющегося канала не превышает 4° , распределение скоростей по ширине канала совершенно симметрично и не обнаруживает никаких признаков отрыва пограничного слоя. Но как только угол α расширяющегося канала становится больше 4° , распределение скоростей существенно изменяется. На рис. 22.2, 22.3 и 22.4 изображены распределения скоростей в расширяющихся каналах, для которых полуугол раствора равен соответственно 5° , 6° и 8° . Мы видим, что теперь распределение скоростей несимметрично относительно оси канала. При $\alpha = 5^\circ$ (рис. 22.2) возвратное течение еще не возникает, но зато на одной из стенок только что начинается отрыв. Течение становится неустойчивым. Случайные возмущения приводят к попоременному прижиманию течения то к одной, то к другой стенке. Эта неустойчивость является признаком начинаящегося отрыва. Впервые отрыв происходит, как показывают измерения И. Никирадзе, между $\alpha = 4,8^\circ$ и $5,1^\circ$. При угле $\alpha = 6^\circ$ (рис. 22.3) асимметрия течения становится четко выраженной, и на одной из стенок теперь происходит полный отрыв. При угле $\alpha = 8^\circ$ (рис. 22.4)

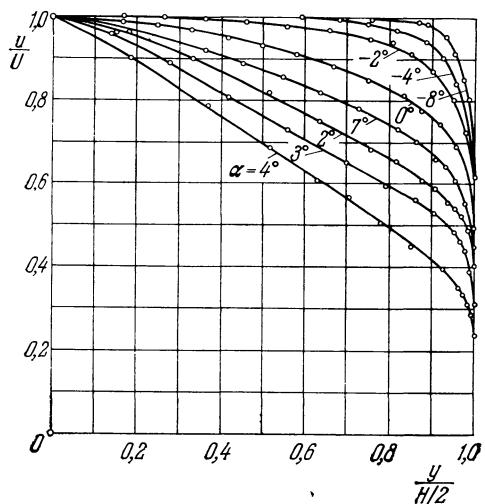


Рис. 22.1. Распределение скоростей в суживающихся и расширяющихся каналах с плоскими стенками. По измерениям Никирадзе [38]. α — половина угла раствора; H — ширина канала.

и 5,1°. При угле $\alpha = 6^\circ$ (рис. 22.3) асимметрия течения становится четко выраженной, и на одной из стенок теперь происходит полный отрыв. При угле $\alpha = 8^\circ$ (рис. 22.4)

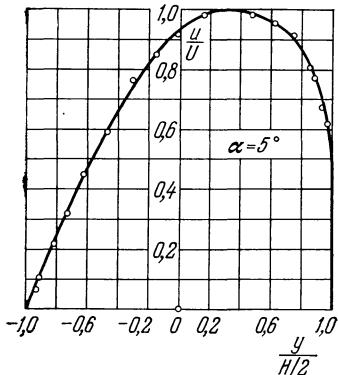


Рис. 22.2. Распределение скоростей в расширяющемся канале, для которого полуугол раствора $\alpha = 5^\circ$. Асимметрия распределения скоростей является признаком начинаящегося отрыва пограничного слоя.

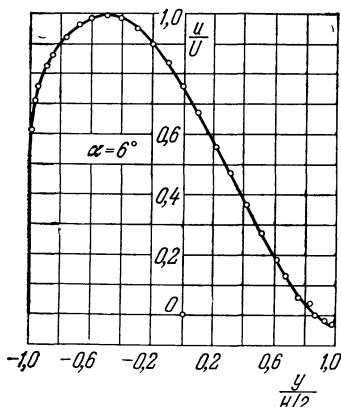


Рис. 22.3. Распределение скоростей в расширяющемся канале с полууглом раствора $\alpha = 6^\circ$. На правой стенке канала начинается возвратное течение и отрыв.

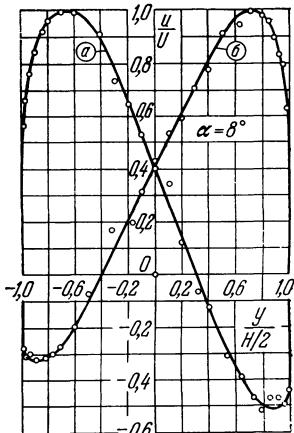


Рис. 22.4. Распределение скоростей в расширяющемся канале с полууглом раствора $\alpha = 8^\circ$. Возвратное течение полностью развилоься. Течение перебрасывается от одной стенки к другой.

область возвратного течения значительно шире, чем при $\alpha = 6^\circ$, и, кроме того, происходит частое перебрасывание течения от одной стенки к другой, которое при углах $\alpha = 5^\circ$ и 6° не наблюдается. Длительность каждой конфи-

гурации течения получается все же вполне достаточной для того, чтобы можно было успеть измерить распределение скоростей. При дальнейшем увеличении угла раствора область возвратного течения становится все шире, а перебрасывание течения от одной стенки к другой — чаще.

В последнее время очень тщательные экспериментальные исследования турбулентных пограничных слоев при наличии градиента давления выполнены Г. Б. Шубауэром и П. С. Клебановым [57], а также Дж. Лауфером [26] и Ф. Г. Клаузером [7]. В двух первых работах содержатся, в частности, измерения турбулентных пульсаций скорости, а также коэффициентов корреляции (см. главу XVIII). В третьей работе особое внимание уделено тщательным измерениям касательного напряжения.

Расчет таких течений возможен, конечно, только в случае симметричного течения, полностью прилегающего к стенке (см. рис. 22.1).

§ 2. Расчет плоского турбулентного пограничного слоя

1. Предварительные замечания. Все способы расчета турбулентного пограничного слоя представляют собой приближенные способы такого же вида, как рассмотренные в главе X для ламинарного пограничного слоя. Они также основаны на теореме импульсов и теореме энергии для пограничного слоя, выведенных в главе VIII [уравнения (8.35) и (8.38)]. Но так как для турбулентного течения общие законы изменения касательного напряжения на стенке и диссиляции теоретически неизвестны, то необходимо для этих величин вводить в расчет дополнительные данные.

Такие данные до настоящего времени могут быть получены только из систематических измерений. Поэтому способы расчета турбулентного пограничного слоя имеют полуэмпирический характер.

Так как с течением времени экспериментальные данные о турбулентных пограничных слоях становятся все более и более совершенными, то постепенно улучшаются и способы расчета турбулентных пограничных слоев. Однако эти улучшения касаются не только физических основ, но и математических приемов расчета. Хотя некоторые из более старых способов расчета турбулентных пограничных слоев в настоящее время почти не находят практического применения, тем не менее идеи, лежащие в их основе, необходимы для понимания новых способов расчета. Поэтому прежде всего мы дадим обзор наиболее важных ранее предложенных способов расчета, а в заключение подробно изложим один из современных способов и на основе его выполним пример практического расчета. В этой связи укажем на критический разбор различных способов расчета турбулентных пограничных слоев, опубликованный И. Роттой [47].

2. Параметры пограничного слоя. Первый способ расчета турбулентного пограничного слоя с градиентом давления был предложен Э. Грушвитцем [18]. Использованные в этом способе расчета эмпирические величины позднее были вновь проверены и улучшены А. Келем [28]. Примерно одновременно с Э. Грушвитцем сходный способ расчета указал А. Бури [5]. В Америке был испробован способ А. Э. Дёнхофа и Н. Тетервина [8]. Исходя из этого способа, Г. К. Гарнер [15] в Англии разработал свой вариант этого способа, значительно более удобный для численного расчета. Наконец, на основе самых последних исследований о турбулентных пограничных слоях К. Вигхардта [73], Г. Людвига и В. Тилмана [29], а также И. Ротты [44], [45], Э. Труккенбродт [71] разработал простой способ, сводящийся к квадратурам и одинаково пригодный как для плоских, так и для осесимметричных течений.

Общими особенностями всех этих способов являются следующие:

1. В качестве характерной толщины пограничного слоя вводится толщина потери импульса, определяемая соотношением (8.34):

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \quad (22.1)$$

2. Для характеристики профиля скоростей, сильно зависящего от градиента давления, вводится формпараметр профиля скоростей.

А. Бури выбирает за такой формпараметр по аналогии с ламинарным пограничным слоем величину

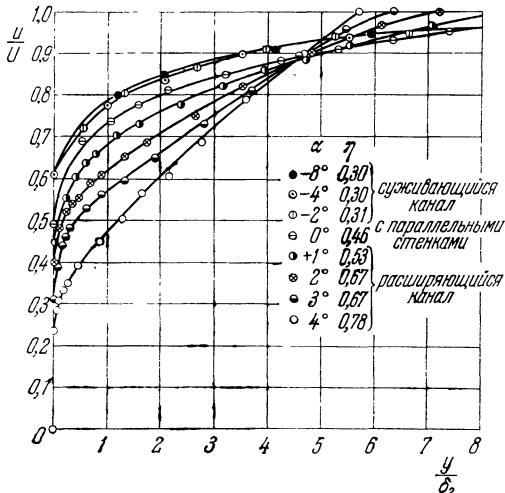


Рис. 22.5. Распределения скоростей в суживающихся и расширяющихся каналах, взятые с рис. 22.1 и перестроенные в координатах u/U и y/δ_2 , где δ_2 — толщина потери импульса, а y — расстояние от стенки; η — формпараметр Грушвитца, определяемый формулой (22.3).

В способе А. Э. Дёнхофа и Н. Тетервина [8], а также в способе Г. К. Гарнера [15] применяется в качестве формпараметра отношение толщины вытеснения δ_1 к толщине потери импульса δ_2 , т. е. отношение

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad (22.4)$$

где

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy.$$

Отрыв наступает при $H_{12} \approx$ от 1,8 до 2,4. Измерения показывают, что турбулентные профили скоростей могут быть представлены в виде однопараметрического семейства кривых. В таком случае между обоими формпараметрами η и H_{12} должна существовать однозначная связь, что и подтверждается измерениями (рис. 22.6). Если принять, что распределение скоростей описывается степенным законом

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n},$$

¹⁾ Параметру Γ соответствует при ламинарном течении формпараметр

$$\kappa = \frac{\delta_2^2}{v} \frac{dU}{dx} = \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \frac{U \delta_2}{v},$$

определенный равенством (10.27).

то указанная связь будет выражаться, согласно И. Пречу [40], уравнением

$$\eta = 1 - \left[\frac{H_{12} - 1}{H_{12}(H_{12} + 1)} \right]^{H_{12}-1}. \quad (22.5)^1)$$

Это уравнение изображено на рис. 22.6 в виде кривой 1, хорошо совпадающей с измеренными точками.

Э. Труккенбротт также исходит из предположения, что профили скоростей представляют собой однопараметрическое семейство, и вводит форм-

параметр L , связанный с форм-параметром $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ простым соотношением, графически изображенном на рис. 22.7. Более подробно о связи между L и H_{12} будет сказано ниже [см. уравнение (22.29)]. Отрыв наступает при $L = -0,13$ до $-0,18$.

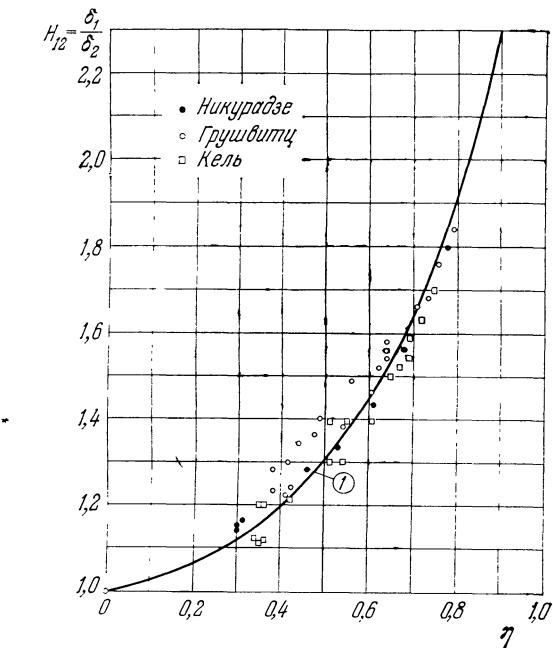


Рис. 22.6. Универсальная связь между формпараметрами $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ и η . Кривая (1) соответствует соотношению (22.5).

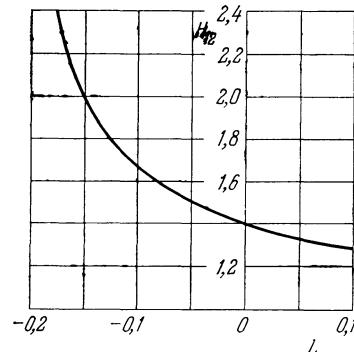


Рис. 22.7. Связь между формпараметром H_{12} и формпараметром L турбулентного пограничного слоя.

По Э. Труккенбротту [41].

3. Вычисление толщины потери импульса. Во всех способах расчета турбулентного пограничного слоя, за исключением способа Э. Труккенбротта, толщина потери импульса δ_2 вычисляется при помощи теоремы импульсов (8.35). Перепишем ее в виде

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H_{12} + 2) \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \quad (22.6)^2)$$

1) В самом деле, согласно сноска на стр. 573 $H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2+n}{n}$, или $n = \frac{2}{H_{12}-1}$.

Поэтому

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{H_{12}-1}{H_{12}(H_{12}+1)}$$

и

$$\eta = 1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{2/n} = 1 - \left[\frac{H_{12}-1}{H_{12}(H_{12}+1)} \right]^{H_{12}-1}.$$

2) В случае турбулентного пограничного слоя следовало бы учесть также нормальные напряжения $\bar{\sigma}^{1/2}$ и $\bar{\sigma}^{1/2}$ тензора напряжений Рейнольдса (8.10), однако мы пренебрегаем этими величинами. О том, как видоизменяется уравнение (22.6), если не пренебречь указанными величинами, можно узнать в работах [27], [43] и [46].

Для того чтобы из этого уравнения определить, как изменяется толщина потери импульса вдоль контура тела, необходимы дополнительные данные о формпараметре H_{12} и о касательном напряжении на стенке $\tau_0/\rho U^2$. Эти данные получаются разными авторами по-разному.

Использование закона сопротивления для продольно обтекаемой плоской пластины. Для вычисления касательного напряжения на стенке используется закон сопротивления продольно обтекаемой плоской пластины (21.12), но взамен постоянной скорости U_∞ внешнего течения подставляется переменная скорость $U(x)$, зависящая от текущей длины x , следовательно, используется формула

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{U\delta_2}{v}\right)^{1/n}}. \quad (22.7)$$

Величины α и n немного зависят от числа Рейнольдса, и, кроме того, между ними существует следующая связь:

$$\begin{aligned} \text{при } n = 4 & \quad \alpha = 0,0128 \quad [\text{Прандтль, формула (21.12)}], \\ \text{при } n = 6 & \quad \alpha = 0,0065 \quad (\text{Фокнер } [^{12}]). \end{aligned}$$

Так как величина H_{12} входит только в комбинации $2 + H_{12}$, то достаточно вести расчет с постоянным средним значением этой величины, например со значением $H_{12} = 1,4$ для пластины. Учтя это и подставив в уравнение импульсов (22.6) выражение для касательного напряжения (22.7), мы получим для определения $\delta_2(x)$ дифференциальное уравнение, которое можно проинтегрировать в замкнутой форме. В результате мы будем иметь (см. приложение к работе [71])

$$\delta_2 \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/n} = U^{-b} \left(C_1 + a \int_{x=x_{\text{пер}}}^x U^b dx \right), \quad (22.8)$$

где

$$a = \left(\frac{n+1}{n} \right) \alpha \quad \text{и} \quad b = \left(\frac{n+1}{n} \right) (H_{12} + 2) - \frac{1}{n}.$$

Турбулентный пограничный слой начинается в точке $x_{\text{пер}}$, и C_1 есть постоянная, которую можно определить из ламинарного пограничного слоя в точке перехода $x = x_{\text{пер}}$. Численные значения величин a и b даны в таблице 22.1.

Таблица 22.1. Постоянные в квадратурных формулах для толщины потери импульса

	В формуле	n	4	6
Множитель перед интегралом	(22.8)	a	0,016	0,0076
	(22.14)	c	0,016	—
	(22.19)	A	0,016	0,0076
Показатель степени распределения скоростей	(22.8)	b	4,0	3,67
	(22.14)	d	4,0	—
	(22.19)	$3 + \frac{2}{n}$	3,5	3,33

Формула (22.7) для касательного напряжения с показателем степени $n = 4$ применяется Э. Грушвитцем, а с показателем степени $n = 6$ —

Г. К. Гарнером, А. Э. Дёнхоф и Н. Тетервин для вычисления касательного напряжения использовали логарифмическую формулу Г. Б. Сквайра и А. Д. Янга [63]

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{0,0288}{\left[\lg \left(4,075 \frac{U \delta_2}{v} \right) \right]^2}. \quad (22.9)$$

Однако подсчеты по этой формуле мало чем отличаются от подсчетов по формуле Фокнера.

Аналогия с ламинарным пограничным слоем. А. Бури [5] принимает, что при турбулентном пограничном слое касательное напряжение на стенке и отношение толщин δ_1/δ_2 пограничного слоя зависят, как и в приближенном способе Польгаузена для ламинарного пограничного слоя, от формпараметра Γ , т. е. полагает

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{f_1(\Gamma)}{\left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n}} \quad (22.10)$$

и

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = f_2(\Gamma). \quad (22.11)$$

Если подставить выражения (22.10) и (22.11) в уравнение импульсов (22.6), то последнее примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[\delta_2 \left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n} \right] = F(\Gamma), \quad (22.12)$$

где

$$F(\Gamma) = \frac{n+1}{n} f_1(\Gamma) - \left[2 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n} f_2(\Gamma) \right] \Gamma$$

(см. опять приложение к работе [71]). Зависимость функции $F(\Gamma)$ от Γ , как показывают измерения И. Никурадзе [35], с хорошим приближением можно считать линейной (рис. 22.8) и придать ей вид

$$F(\Gamma) = c - d\Gamma = c - d \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n}. \quad (22.13)$$

Если внести выражение (22.13) в уравнение (22.12), то последнее можно будет проинтегрировать в замкнутой форме, и мы получим

$$\delta_2 \left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n} = U^{-d} \left(C_1 + c \int_{x=x_{\text{пер}}}^x U^d dx \right). \quad (22.14)$$

А. Бури, использовав измерения И. Никурадзе [35], в которых было принято, что $n = 4$, определил численные значения c и d . Для замедленного течения он получил $c = 0,017$ и $d = 4,15$. Из своих собственных измерений, которые были выполнены только для ускоренного течения, он получил $c = 0,01475$ и $d = 3,94$. Для того чтобы охватить оба случая, т. е. замедленное и ускоренное течения, можно принять $c = 0,016$ и $d = 4,0$ (см. таблицу 22.1).

Примечательно, что оба решения (22.8) и (22.14), определяющие толщину потери импульса δ_2 , несмотря на существенно различный характер гипотез о касательном напряжении и формпараметре H_{12} , положенных в основу

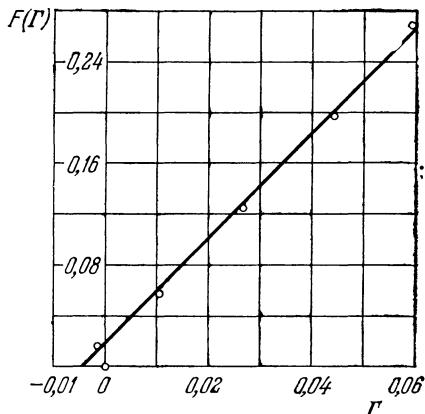


Рис. 22.8. Универсальная функция $F(\Gamma)$ по А. Бури [формула (22.12)]. На основании измерений Никурадзе [35]. $F(\Gamma) = 0,017 - 4,15\Gamma$.

вывода этих решений, дают совершенно совпадающие результаты (см. таблицу 22.1).

Способ Э. Труккенбродта. В качестве исходного пункта для определения толщины потери импульса Э. Труккенбродт [71] использует не теорему импульсов, а теорему энергии теории пограничного слоя. Перепишем теорему энергии (8.38) в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{1}{U^3} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2 \frac{d_1 + t_1}{\rho U^3}, \quad (22.15)$$

где δ_3 есть толщина потери энергии, определяемая соотношением (8.37). Если предположить, что профили скоростей представляют собой однопараметрическое семейство, то между отношением $\delta_3/\delta_2 = H_{32}$ и ранее введенным отношением $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ должна существовать однозначная связь. Эта связь в том виде, в каком она определяется из измерений И. Ротты [46], изображена

на рис. 22.9. Аналитическое вычисление, основанное на применении степенного закона

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n},$$

дает, по К. Вигхардту [73], если постоянные подобрать так, чтобы они соответствовали результатам измерений, зависимость

$$H_{32} = \frac{1,269 H_{12}}{H_{12} - 0,379},$$

которая мало отличается от экспериментальной связи, найденной И. Роттой. Величина

$$\frac{d_1 + t_1}{\rho U^3} = \int_0^\delta \frac{\tau}{\rho U^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U} \right) dy \quad (22.16)$$

представляет собой безразмерную работу, выполненную в пограничном слое силами трения, вызванными турбулентными касательными напряжениями τ . Величина d_1 есть энергия, преобразованная в тепло (дисси-пация), а t_1 — энергия турбулентного движения. В общем случае величиной t_1 по

сравнению с d_1 можно пренебречь. На рис. 22.10 изображена определенная Э. Труккенбродтом [71] по измерениям И. Ротты [46] зависимость величины $d_1/\rho U^3$ от числа Рейнольдса $U\delta_2/v$ при различных значениях отношения H_{12} . Мы видим, что полученные кривые почти не зависят от H_{12} . С хорошим приближением можно принять, что

$$\frac{d_1}{\rho U^3} = \frac{0,56 \cdot 10^{-2}}{\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/6}}. \quad (22.17)$$

Для сравнения на рис. 22.11 показано, насколько сильно зависит от форм-параметра H_{12} касательное напряжение на стенке. Экспериментально определенные значения касательного напряжения на стенке хорошо аппрокси-мируются формулой

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,123 \cdot 10^{-0,678 H_{12}} \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{-0,268}, \quad (22.18)$$

график которой при различных значениях H_{12} изображен на рис. 22.11.

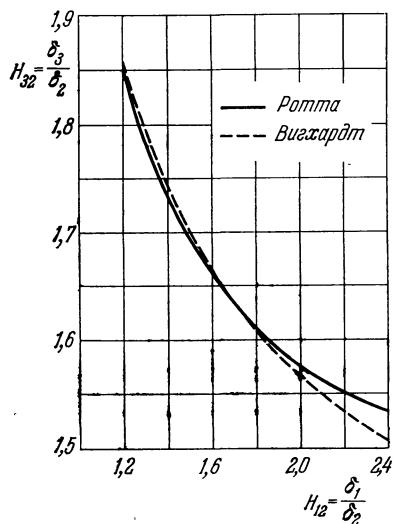


Рис. 22.9. Зависимость формпараметра $H_{32} = \delta_3/\delta_2$ от формпараметра $H_{12} = \delta_1/\delta_2$. [По И. Ротте [46] и К. Вигхардту [73].]

Если выражение (22.17) для работы сил трения ввести в уравнение энергии (22.15) и взять для H_{32} некоторое среднее постоянное значение, то уравнение (22.15) можно будет проинтегрировать в замкнутой форме. Мы получим

$$\delta_2 \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/n} = U^{-\left(3+\frac{2}{n}\right)} \left\{ C_1 + A \int_{x=x_{\text{пер}}}^x U^{3+\frac{2}{n}} dx \right\}, \quad (22.19)^1$$

причем $n = 6$ и $A = 0,0076$ (см. таблицу 22.1).

Сравнение численных значений в таблице 22.1 показывает, что все три различные формулы (22.8), (22.14) и (22.19) для толщины потери импульса равносочены.

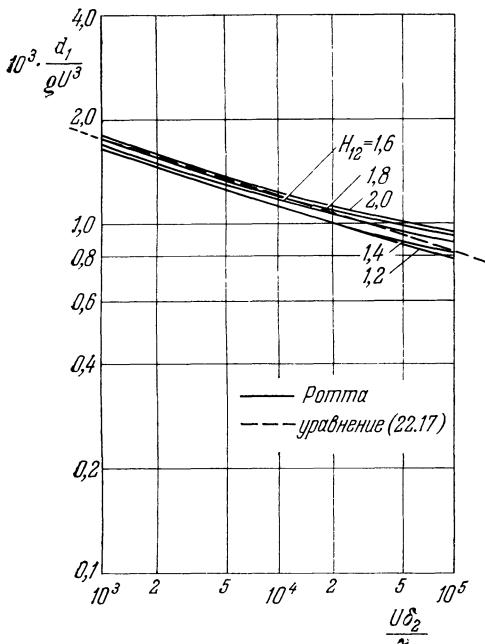


Рис. 22.10. Зависимость турбулентной диссиpации от числа Рейнольдса при различных H_{12} . По И. Ротте [46].

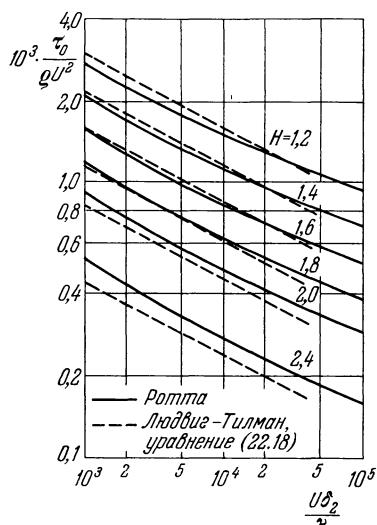


Рис. 22.11. Турбулентное касательное напряжение, определяемое формулой (22.18). По Г. Людвигу, В. Тилману [29] и И. Ротте [46].

Постоянную A , входящую в формулу (22.19), можно выразить через коэффициент трения c_f продольно обтекаемой плоской пластины, который зависит от числа Рейнольдса $U_\infty l/v$. Согласно второй из формул (21.10) мы имеем

$$c_f = \frac{2\delta_2}{l}.$$

Внеся отсюда δ_2 в соотношение (22.19) и имея в виду, что $C_1 = 0$, $x_{\text{пер}} = 0$, $x = l$ и $U = U_\infty$, мы получим

$$\left(\frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{U_\infty l}{v} \right)^{1/n} = A.$$

Теперь из соотношения (22.19) мы можем определить толщину потери импульса:

$$\frac{\delta_2(x)}{l} = \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{-3} \left\{ C_1^* + \left(\frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \int_{x_{\text{пер}}/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+2/n} d \left(\frac{x}{l} \right) \right\}^{n/(1+n)}. \quad (22.20)$$

¹⁾ Эта формула применима также для ламинарного пограничного слоя, если положить $n = 1$ и $A = 0,470$ [ср. с формулой (10.37)].

При турбулентных течениях $4 < n < 6$, причем $n = 4$ следует брать для менее высоких, а $n = 6$ для более высоких чисел Рейнольдса. Постоянная C_1^* учитывает наличие ламинарного участка, простирающегося до точки перехода $x_{\text{пер}}$. Эта постоянная равна

$$C_1^* = \left\{ \frac{1}{2} c_{fl} \left[\int_0^{x_{\text{пер}}/l} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^5 d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{1/2} \right\}^{(n+1)/n}, \quad (22.21)$$

где c_{fl} есть коэффициент ламинарного трения для продольно обтекаемой плоской пластины при числе Рейнольдса $\text{Re} = U_\infty l / v$.

Точность вычисления толщины потери импульса $\delta_2(x)$ по формуле (22.20) можно, как показал Н. Шольц [56], несколько улучшить, если множитель

$$\left(\frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n}$$

перед интегралом заменить на

$$\frac{H_{32}(0)}{H_{32}(x)} \left(\frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n},$$

где $H_{32}(x) = \delta_3/\delta_2$ есть отношение толщины потери энергии к толщине потери импульса, а $H_{32}(0)$ — значение этого отношения для плоской пластины. Однако применение улучшенной таким способом формулы требует интегрирования двух совместных дифференциальных уравнений для толщины потери импульса $\delta_2(x)$ и формпараметра $H_{12}(x)$ (см. по этому поводу следующий пункт).

4. Вычисление формпараметра. В тех случаях, когда отрыв пограничного слоя не возникает, на изложенном выше определении толщины потери импульса $\delta_2(x)$ вдоль контура расчет турбулентного пограничного слоя можно считать в основном заключенным. В самом деле, зная толщину потери импульса, можно вычислить местный коэффициент трения в первом приближении на основании формулы (22.7) или (22.9). Однако более точное значение местного коэффициента трения можно определить из соотношения (22.18), но для этого требуется знание формпараметра H_{12} . Покажем, как можно вычислить этот формпараметр.

Полное сопротивление трения определяется посредством интегрирования. Определение сопротивления давления, чему будет посвящена глава XXV, требует, если только не происходит отрыва, также знания только толщины потери импульса на задней кромке. Однако во многих случаях невозможно заранее знать, происходит или не происходит отрыв и имеется ли вообще наклонность к отрыву. В таких случаях необходимо в дополнение к поясненному выше вычислению толщины потери импульса определить, как изменяется вдоль обтекаемой стенки формпараметр, так как только таким путем можно выяснить, имеется ли у пограничного слоя наклонность к отрыву. Как уже было сказано в п. 2 настоящего параграфа, различными авторами были введены для профиля скоростей турбулентного пограничного слоя различные формпараметры, для определения которых, так же как и для толщины потери импульса, составлены дифференциальные уравнения. К сожалению, эти дифференциальные уравнения для формпараметров не допускают такого простого сравнения между собой, как дифференциальные уравнения для толщины потери импульса. Э. Грушвитц [16], как мы уже знаем, ввел формпараметр η , определяемый равенством (22.3). Для вычисления этого формпараметра Э. Грушвитц составил дифференциальное уравнение, исходя из того соображения, что изменение энергии частицы, движущейся параллельно стенке на расстоянии $y = \delta_2$ от нее, зависит от $u(\delta_2)$, U , δ_2

и v . Из соображений о размерности он получил следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{\delta_2}{q} \cdot \frac{d g(\delta_2)}{dx} = F\left(\eta, \frac{U\delta_2}{v}\right), \quad (22.22)$$

где

$$g(\delta_2) = p + \frac{\rho}{2} u^2(\delta_2) = p + q(1 - \eta)$$

есть полное давление (энергия) в точке $y = \delta_2$ пограничного слоя, $q = \rho U^2/2$ — динамическое давление внешнего течения, а p — статическое давление, которое постоянно по толщине пограничного слоя и для которого имеет место соотношение

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const.}$$

Таким образом, соотношение (22.22) можно заменить следующим:

$$\delta_2 \frac{d\eta}{dx} = -2\eta \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} - F\left(\eta, \frac{U\delta_2}{v}\right). \quad (22.23)$$

Далее Э. Грушвитц из своих измерений нашел, что функцию F можно представить в виде

$$F = A\eta - B, \quad (22.24)$$

где

$$A = 0,00894, \quad B = 0,00461.$$

Э. Грушвитц производил свои измерения в диапазоне чисел Рейнольдса $6 \cdot 10^2 < U\delta_2/v < 5 \cdot 10^3$ и не обнаружил никакой зависимости чисел A и B от числа Рейнольдса. Расширение диапазона чисел Рейнольдса на более высокие значения, выполненное А. Келем [23], подтвердило указанное выше значение A , но в то же время показало, что B зависит от числа Рейнольдса. Уравнение (22.23) вместе с соотношением (22.24) представляет собой дифференциальное уравнение, из которого можно определить формпараметр η , если предварительно определено изложенным выше способом изменение толщины потери импульса $\delta_2(x)$ вдоль контура. Отрыв наступает в том случае, если η становится больше 0,8.

А. Э. Дёнхоф и Н. Тетервин [8] используют в качестве формпараметра величину $H_{12} = \delta_1/\delta_2$. Для ее определения они вывели на основе весьма многочисленных американских измерений дифференциальное уравнение

$$\delta_2 \frac{dH_{12}}{dx} = e^{4,680(H_{12}-2,975)} \left[-\frac{\delta_2}{q} \frac{dq}{dx} \frac{2q}{\tau_0} - 2,035(H_{12}-1,286) \right]. \quad (22.25)$$

Для касательного напряжения на стенке τ_0 они берут величину, определяемую формулой (22.9) Г. Б. Сквайра и А. Д. Янга [63] для продольно обтекаемой плоской пластины. Г. К. Гарнер [15], желая упростить американский способ, изменил дифференциальное уравнение (22.25) и заново определил эмпирические постоянные. Он получил уравнение

$$\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/6} \delta_2 \frac{dH_{12}}{dx} = e^{5(H_{12}-1,4)} \left[-\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/6} \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} - 0,0135(H_{12}-1,4) \right]. \quad (22.26)$$

Уравнения (22.25) и (22.26) позволяют вычислить формпараметр $H_{12}(x)$, если предварительно определено изменение толщины потери импульса $\delta_2(x)$ вдоль контура. Отрыв наступает, когда H_{12} становится больше 1,8.

Хорошо обоснованную предпосылку для вычисления формпараметра можно получить, если, следуя Э. Труккенбродту [71], вычесть из уравнения

энергии уравнение импульсов. После небольших промежуточных вычислений мы получим

$$\delta_2 \frac{dH_{32}}{dx} = (H_{12} - 1) H_{32} \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} + 2 \frac{\delta_1 + t_1}{\rho U^3} - H_{32} \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \quad (22.27)$$

В это уравнение кроме формпараметра $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ входит также введенный раньше формпараметр $H_{32} = \delta_3/\delta_2$. Между обоими этими формпараметрами существует связь, изображенная на рис. 22.9. Как было показано выше [см. рис. 22.10 и 22.11, а также соотношения (22.17) и (22.18)], работу касательных напряжений и само касательное напряжение можно просто выразить в виде функций числа Рейнольдса $U\delta_2/v$ и параметра H_{12} . Если иметь в виду эти обстоятельства, то уравнение (22.27) при известной толщине потери импульса, подобно уравнению (22.25), представляет собой дифференциальное уравнение для определения формпараметра H_{12} . В отличие от других авторов, Э. Труккенбродту так удалось преобразовать уравнение (22.27), что стала возможной квадратура. В результате преобразования уравнение (22.27) приняло вид

$$\left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/n} \delta_2 \frac{dL}{dx} = \left(\frac{U\delta_2}{v} \right)^{1/n} \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} - K(L), \quad (22.28)$$

где

$$L = \int_{H_{32}=(H_{32})_0}^{H_{32}} \frac{dH_{32}}{(H_{12}-1) H_{32}} \quad (22.29)$$

есть новый формпараметр, связь которого с формпараметром H_{12} уже была изображена на рис. 22.7. В формуле (22.29) нижний предел интеграла выбран так, чтобы значение $L = 0$ соответствовало случаю

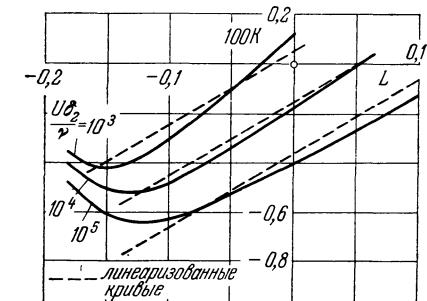


Рис. 22.12. Функция $K(L)$ для вычисления формпараметра турбулентного пограничного слоя. По Э. Труккенбродту [7].

нулевого градиента давления (обтекание плоской пластины), т. е. чтобы было $H_{32} = (H_{32})_0 \approx 1,73$ и $(H_{12})_0 \approx 1,4$ (см. рис. 22.9). Функция $K(L)$ изображена на рисунке 22.12. С достаточным приближением ее можно заменить линейной функцией

$$K(L) = a(L - b), \quad (22.30)$$

где

$$a = 0,0304, \quad b = 0,07 \lg \frac{U\delta_2}{v} - 0,23. \quad (22.30a)$$

Подставив выражение (22.30) для $K(L)$ в дифференциальное уравнение (22.28), мы сделаем его линейным относительно L и сумеем решить в замкнутой форме. Введя для сокращения записи обозначение

$$\xi = \left[C_i^* + \left(\frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \int_{x_{\text{пер}}/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+2/n} d\left(\frac{x}{l} \right) \right]^m \quad (22.31)$$

и приняв $a/A = 4$, чему соответствуют значения $m = 4$ и $n = 6$, мы получим

$$L = \frac{\xi_1}{\xi} L_1 + \ln \frac{U(\xi)}{U_1} + \frac{1}{\xi} \int_{\xi_1}^{\xi} \left[b(\xi) - \ln \frac{U(\xi)}{U_1(\xi_1)} \right] d\xi. \quad (22.32)^1$$

¹⁾ Этую формулу можно применить также к ламинарному пограничному слою, если положить $n = 1$, $m = 8$ и $b = 0$.

Индексом 1 отмечены значения в точке перехода $x = x_{\text{пер}}$. Численный подсчет по формулам (22.31) и (22.32) особенно прост потому, что с выражением для новой переменной ξ мы уже встречались при расчете толщины потери импульса по формуле (22.20). Отрыв наступает при $L = \text{от } -0,13 \text{ до } -0,18$, чему соответствуют значения $H_{12} = \text{от } 1,8 \text{ до } 2,4$. Как показали Л. Шпайдель и Н. Шольц [62], правую часть формулы (22.32) можно частично проинтегрировать, если ввести в нее толщину потери импульса δ_2 , определяемую соотношением (22.20). Тогда получается удобная для численных подсчетов формула

$$\begin{aligned} L = & \frac{\xi_1}{\xi} \left[L_1 + 0,23 + 0,0076 \frac{n}{n+1} - 0,0304 \ln \frac{U_{\infty} l}{v} - \right. \\ & - \ln \frac{U_1}{U_{\infty}} - 0,0076 \frac{n}{n+1} \ln \xi_1 \left. \right] - 0,23 - 0,0076 \frac{n}{n+1} + 0,0304 \ln \frac{U_{\infty} l}{v} + \\ & + \ln \frac{U(\xi)}{U_{\infty}} + 0,0076 \frac{n}{n+1} \ln \xi - 1,0608 \frac{1}{\xi} \int_{\xi_1}^{\xi} \ln \frac{U(\xi)}{U_{\infty}} d\xi. \quad (22.32a) \end{aligned}$$

Изложенный способ Э. Труккенброта для расчета несжимаемого турбулентного пограничного слоя обобщен Н. Шольцем [54] на случай сжимаемого течения и течения с теплопередачей.

5. Выполнение расчета и пример. Полный расчет турбулентного пограничного слоя по способу Э. Труккенброта производится следующим образом. Задаются: теоретическое потенциальное распределение скоростей $U(x)$ и число Рейнольдса $Re_l = U_{\infty} l / v$. Имея эти данные, можно вычислить коэффициент турбулентного сопротивления c_f продольно обтекаемой пластины, соответствующий заданному числу Рейнольдса, а также постоянную C_i^* по формуле (22.21) при фиксированных постоянных $n = 6$ и $m = 4$. Ищутся: изменение толщины потери импульса $\delta_2(x)$ и формпараметра $L(x)$ [или $H_{12}(x)$] вдоль контура.

Прежде всего по формуле (22.20) посредством простой квадратуры определяют изменение толщины потери импульса $\delta_2(x)$ вдоль контура. Зная эту толщину, составляют число Рейнольдса $U\delta_2/v$. Имея это число, по формуле (22.30а) вычисляют величину $b(x)$. Затем по формуле (22.31) определяют новую переменную ξ , после чего в правой части формулы (22.32) выполняют интегрирование функции $[b(\xi) - \ln(U/U_1)]$. Наконец, по формуле (22.32) определяют изменение формпараметра $L(x)$ вдоль контура, а затем, зная $L(x)$, из рис. 22.7 находят $H_{12}(x)$ ¹⁾.

Преимущество способа Э. Труккенброта по сравнению с другими способами заключается в том, что каждый раз достаточно выполнения только простой квадратуры и что не требуется знания производных теоретического потенциального распределения скоростей $U(x)$ по x .

Что касается начальных значений, то в том случае, когда турбулентный пограничный слой начинается не в передней критической точке, а в расположенной дальше вниз по течению точке перехода $x_{\text{пер}}$, необходимо потребовать, чтобы в этой точке толщина потери импульса ламинарного и турбулентного пограничных слоев были одинаковы (рис. 22.13, a), т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\delta_{2l}(x_{\text{пер}}) = \delta_{2l}(x_{\text{пер}}). \quad (22.33)$$

Выполнение этого условия в соотношении (22.20) обеспечивается выбором для постоянной C_i^* значения (22.21). Формпараметр $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ в области перехода, как это видно из рис. 16.5, сильно уменьшается. Изменение H_{12}

¹⁾ Для более простого вычисления по формулам (22.20) и (22.32) К. Кремер [24] построил номограммы, которые особенно удобны в сочетании со специальной счетной линейкой.

в окрестности точки перехода схематически изображено на рис. 22.13, б. Разность

$$H_{12t}(x_{\text{пер}}) = H_{12l}(x_{\text{пер}}) - \Delta H_{12} \quad (22.34)$$

определяет формпараметр ΔH_{12} , зависимость которого от числа Рейнольдса по данным Э. Труккенброта изображена на рис. 22.13, в. Таким образом, зная начальное значение параметра $H_{12t}(x_{\text{пер}}) = H_{12l}$ пер., мы можем (при помощи рис. 22.7) определить соответствующее начальное значение параметра L , т. е. L_1 .

В качестве примера на рис. 22.14 изображен результат полно-го расчета турбулентного погра-ничного слоя на подсасывающей стороне профиля NACA 65 (216)-222, причем за основу взято распределение скоростей $U(x)$

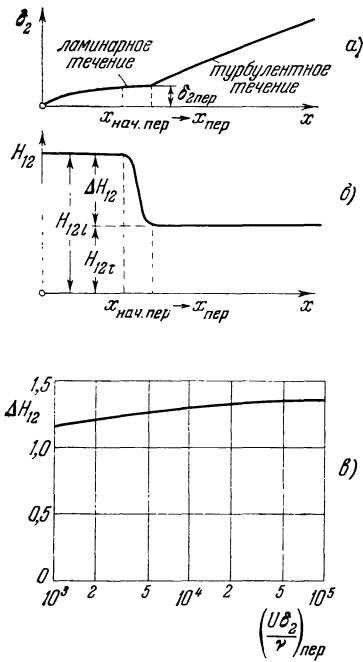


Рис. 22.13. Изменение толщины потока δ_2 и формпараметра H_{12} вблизи точки перехода $x_{\text{пер}}$ ламинарной формы течения в турбулентную. а) Изменение толщины потери импульса δ_2 вдоль стенки. б) Изменение формпараметра H_{12} вдоль стенки. в) Зависимость изменения ΔH_{12} формпараметра H_{12} в окрестности точки перехода от числа Рейнольдса $Re = (U\delta_2/\nu)_{\text{пер}}$.

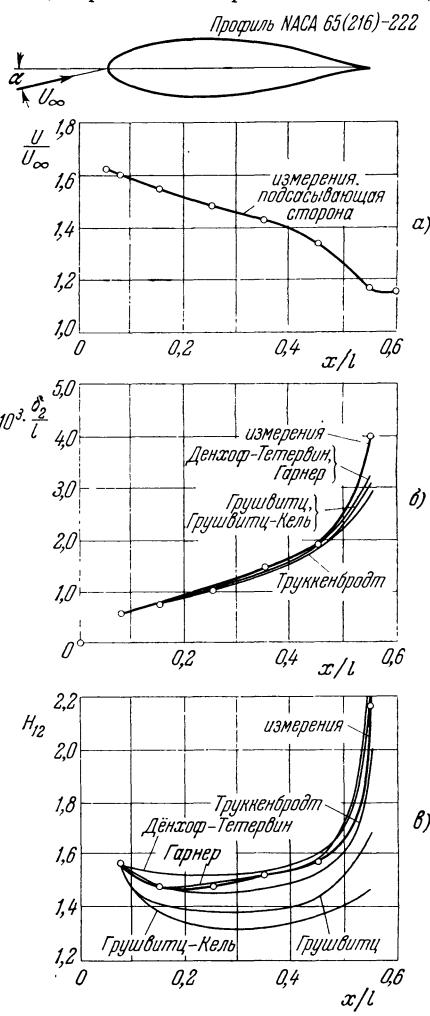


Рис. 22.14. Турбулентный пограничный слой на подсасывающей стороне крылового профиля NACA 65 (216)-222 при угле атаки $\alpha = 10,1^\circ$. Число Рейнольдса $U_\infty l/v = 2,6 \cdot 10^6$. Измерения по [4]. а) Скорость внешнего течения по измерениям. б) Толщина потери импульса δ_2 по измерениям, а также по различным расчетам. в) Формпараметр H_{12} по измерениям, а также по различным расчетам. Отрыв наступает при $H_{12} =$ от 1,8 до 2,2.

внешнего течения, определенное из измеренного распределения давления (рис. 22.14, а). Последнее необходимо было для того, чтобы разницу между измеренными и рассчитанными величинами, определяющими пограничный слой, нельзя было приписать разнице между теоретическим

и экспериментальным распределениями давления. Сравнение измеренных и рассчитанных различными способами параметров пограничного слоя показывает следующее. Для толщины потери импульса расчеты по всем способам дают хорошее совпадение с результатами измерения (рис. 22.14, б), однако для формпараметра (рис. 22.14, в) получаются значительные отклонения. Наименее близок к результатам измерений расчет по способу Грушвитца.

В основе изложенного способа расчета Э. Труккенброта лежит допущение, что распределение скоростей в пограничном слое описывается степенным законом. Более точные законы распределения скоростей в пограничном слое с градиентом давления выведены В. Шаблевским путем применения обобщенной гипотезы о пути перемешивания [66], [67], [68]. Другой способ расчета несжимаемого турбулентного пограничного слоя на гладкой и шероховатой стенке, также основанный на теореме импульсов и теореме энергии, недавно предложил И. Ротта [46]. Уточнение, вносимое способом И. Ротты по сравнению со способом Э. Труккенброта, в основном состоит в следующем: в способе И. Ротты профиль скоростей в пограничном слое составляется из двух частей: из части, близкой к стенке, и из внешней части, поэтому он может быть описан посредством не одного только формпараметра H_{12} , но и посредством местного коэффициента трения c_f . Способ расчета И. Ротты подробно изложен в практически удобной форме и с приложением большого числа трафаретов для записей в работе [46].

Предложенный М. Р. Хэдом [19] способ расчета основан на своеобразной новой идее — на предположении о существовании функциональной связи между формпараметром профиля скоростей и линейным масштабом массы жидкости, проникающей в пограничный слой извне. Обширные сравнительные расчеты, выполненные Б. Г. Дж. Томсоном [70б] при помощи различных способов, показали, что способ М. Р. Хэда дает неплохие результаты.

Изложенные выше способы расчета пограничного слоя при их применении к проблеме обтекания тел дают в качестве интеграла от касательных напряжений по поверхности сначала только *сопротивление трения*. Между тем даже в таких случаях, когда не происходит отрыва пограничного слоя, кроме сопротивления трения возникает также *сопротивление давления*. Физически это объясняется тем, что пограничный слой оказывает на потенциальное течение вытесняющее действие. Линии тока потенциального течения отодвигаются от контура тела на расстояние, равное толщине вытеснения. Вследствие этого распределение давления на контуре тела немного изменяется даже в том случае, если не происходит отрыва пограничного слоя. Результирующая этого измененного распределения давления уже не равна нулю в направлении обтекания; наоборот, она дает сопротивление давления, которое прибавляется к сопротивлению трения. Оба сопротивления вместе составляют так называемое *профильное сопротивление*. Вопрос о вычислении профильного сопротивления мы рассмотрим в главе XXV.

Сопротивление давления остается небольшим только при условии отсутствия отрыва. Это достигается приданием обтекаемому телу надлежащей формы. Примерами течений, в которых возрастание давления в направлении движения не ведет к отрыву, могут служить рассмотренные в главах VIII и IX «подобные решения» ламинарных пограничных слоев. В этих случаях скорость, изменяясь по закону $U \sim Cx^m$, при отрицательном m может уменьшиться до нуля, не приводя к отрыву пограничного слоя; однако при этом значение $-m$ не должно превысить $-m = 0,09$. При только что указанном законе изменения скорости профиль скоростей не изменяется в направлении течения также в турбулентных пограничных слоях (см. в связи с этим книгу [47]), однако теперь течение прилегает к телу до $m = -0,23$. Следовательно, турбулентный пограничный слой в состоянии преодолеть в $2^{1/2}$ раза больший градиент давления, чем ламинарный пограничный слой. «Подобные решения» дают ответ также на вопрос, какое распределение давления необходимо для того, чтобы течение могло преодолеть без отрыва максимально возможное повышение давления. Распределение давления с первоначально большим, а затем постепенно уменьшающимся повышением давления приво-

дит к образованию более тонкого пограничного слоя и позволяет преодолеть в целом более высокое повышение давления, чем распределение давления с равномерным повышением. Для турбулентных пограничных слоев это было экспериментально подтверждено Г. Б. Шубауэром и В. Г. Шпангенбергом [58], а также Б. С. Стрэтфордом [64].

Измерения. И. Штюпер [65] измерил турбулентный пограничный слой на крыловом профиле в свободном полете. Результаты измерений изображены на рис. 22.15. В рассматриваемом случае пограничный слой на напорной

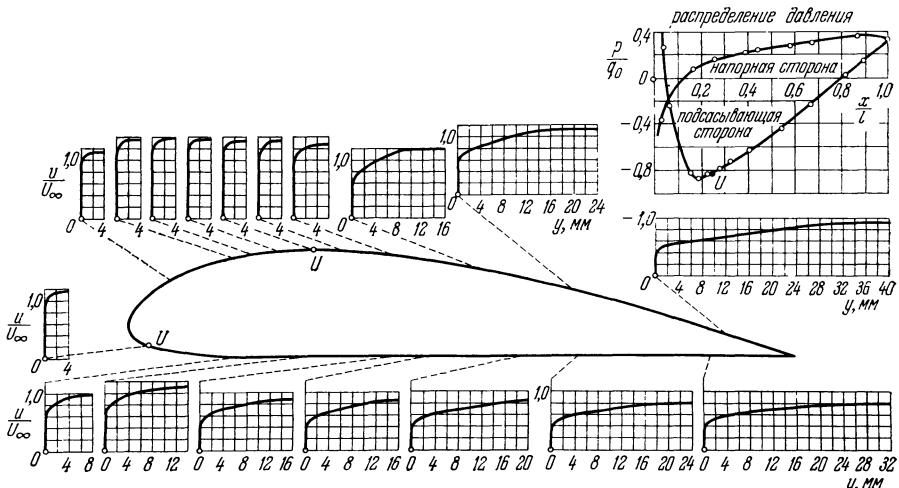


Рис. 22.15. Пограничный слой на крыловом профиле. По измерениям Штюпера [65]. $c_A = 0,4$; $Re = 4,26 \cdot 10^6$. На напорной стороне, вдоль которой везде происходит повышение давления, пограничный слой всюду турбулентен; на подсасывающей стороне пограничный слой турбулентен, начиная примерно от точки, в которой давление имеет минимум. U — точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

стороне турбулентен, начиная с самого носика, так как на этой стороне давление повышается на всем протяжении контура. На подсасывающей стороне точка перехода лежит немного позади точки минимума давления. Возникновение турбулентной формы течения в пограничном слое сразу заметно по сильному нарастанию толщины пограничного слоя при увеличении текущей длины.

6. Турбулентные пограничные слои с отсасыванием и сдуванием. Воздействие, оказываемое на течение в пограничном слое отсасыванием или сдуванием, имеет особенно большое значение для повышения максимальной подъемной силы крыльев. Способ расчета ламинарного пограничного слоя с отсасыванием был указан в § 2 главы XIV. Здесь мы рассмотрим способ расчета турбулентного пограничного слоя с отсасыванием и сдуванием, но ограничимся только случаем, когда скорость отсасывания $-v_0(x)$ распределена вдоль стенки непрерывно.

Способ расчета турбулентного пограничного слоя с отсасыванием на продольно обтекаемой плоской пластине был уже давно указан Г. Шлихтингом [49]. Этот способ основан на теореме импульсов теории пограничного слоя, дополненной членом, учитывающим отсасывание, а в остальном использующей те же допущения, что и в этой главе. Впоследствии этот способ был распространен В. Пехау [38] и Р. Эпплером [10] на случай произвольного распределения скоростей внешнего течения $U(x)$ и произвольного распределения скорости отсасывания $-v_0(x)$. Для этого В. Пехау и Р. Эпплер кроме теоремы импульсов использовали также уравнение энергии (14.20) (§ 2 главы XIV). Кроме того, они приняли, что формула (22.7) для касательного напряжения на стенке в турбулентном пограничном слое применима также при отсасывании. Коротко изложим способ расчета В. Пехау. Введя обозначение

$$\Theta = \delta_2 \left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n} U^b \quad (22.35)$$

[по аналогии с соотношением (22.8)], мы получим из уравнения импульсов (14.19) следующее дифференциальное уравнение для определения толщины потери импульса $\delta_2(x)$:

$$\frac{d\Theta}{dx} = aU^b - \left(\frac{n+1}{n} \right) U^{H_{12}+1} \left(\frac{\Theta}{v} \right)^{1/(1+n)} [-v_0(x)]. \quad (22.36)$$

Постоянные a и b имеют те же значения, что и в соотношении (22.8). При отсутствии отсасывания, когда $v_0(x) \equiv 0$, уравнение (22.36) переходит в уравнение (22.8). В случае прохода обтекаемой плоской пластины с равномерно распределенным отсасыванием уравнение (22.36) совпадает с уравнением, выведенным Г. Шлихтингом в работе [49].

Для того чтобы выяснить, произойдет или не произойдет отрыв пограничного слоя, можно воспользоваться формпараметром $H_{32} = \delta_3/\delta_2$, который равен отношению толщины потери энергии к толщине потери импульса. Между этим формпараметром и другим формпараметром $H_{12} = \delta_1/\delta_2$, представляющим собой отношение толщины вытеснения к толщине потери импульса, существует простая универсальная связь, изображенная на рис. 22.9. Как показывают измерения, эта связь сохраняется и для пограничного слоя с отсасыванием. Отрыв наступает при следующих значениях параметров H_{12} и H_{32} :

$$H_{12} \approx 1,8; \quad H_{32} \approx 1,58.$$

Зависимость формпараметра $H_{32}(x)$ от x можно определить из уравнения энергии (14.20), если предположить, что турбулентная диссиляция энергии при отсасывании определяется законом

$$\frac{d_1}{\rho U^3} = \frac{\beta}{\left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n}}, \quad (22.37)$$

т. е. формально тем же законом, что и при отсутствии отсасывания [соотношение (22.17)]. Показатель n имеет здесь такое же значение, как и в формуле для касательного напряжения на стенке. Для формпараметра H_{32} получается следующее решение:

$$H_{32} = \frac{U^{H_{12}-1}}{\Theta^{n/(n+1)}} \int_0^x \left(\frac{2\beta U^{(3-1/n)+(H_{12}+2/n)}}{\Theta^{1/(n+1)}} - \frac{-v_0(x) U^2}{v^{1/(n+1)}} \right) dx. \quad (22.38)$$

Подсчет по этой формуле легко выполнить, если определена функция $\Theta(x)$ из уравнения (22.36). При $n = 4$ согласно равенству (22.7) мы имеем $\alpha = 0,0128$; тогда в соотношении (22.37) будет $\beta = 1,125 \cdot 10^{-2}$, и для H_{12} мы получим значение $H_{12} = 1,4$. При отсутствии отсасывания будет, как нетрудно убедиться,

$$H_{32} = \frac{2\beta}{U^3 \delta_2} \int_0^x \frac{U^3 dx}{\left(\frac{U \delta_2}{v} \right)^{1/n}}. \quad (22.38a)$$

На рис. 22.16 показаны результаты расчета турбулентного пограничного слоя с отсасыванием на крыловом профиле NACA 0010, поставленном под углом атаки $\alpha = 5^\circ$. На рис. 22.16, б изображено изменение толщины потери импульса при пяти различных коэффициентах расхода отсасывания и сдувания. Кривые, полученные для формпараметра H_{32} , показывают, что в случае непроницаемой стенки ($c_Q = 0$) и при трех режимах отсасывания ($c_Q > 0$) отрыв не возникает. Наоборот, при слабом сдувании пограничный слой отрывается.

В работах [50] и [51] сообщены дальнейшие результаты, полученные посредством изложенного способа расчета. Эти результаты дают представление о том, как должна быть расположена зона отсасывания и какова должна быть скорость отсасывания для того, чтобы предупреждение отрыва достигалось при минимальном количестве отсасываемой жидкости. Выяснилось, что зона отсасывания должна быть расположена в узкой области вблизи носика крыла на подсасывающей стороне. Это вполне понятно, так как наибольшее повышение давления, приводящее к отрыву, возникает именно в указанной области крыла. Необходимое минимальное количество отсасываемой жидкости определяется значением коэффициента $c_{Q\min} =$ от 0,002 до 0,004. Испытания крыльев с отсасыванием вблизи носика были выполнены Ф. Шварцем [59], [60] и А. Респетом [41].

Другим эффективным средством для повышения максимальной подъемной силы, особенно у крыльев с откидным щитком на задней кромке, является вдувание в пограничный слой вблизи носика щитка тонкой струи воздуха с большой скоростью (рис. 22.17). Этим способом оторвавшемуся турбулентному пограничному слою сообщается дополнительная энергия, благодаря чему течение вновь прилегает к щитку. Сравнив распределение давления на щите при прилегающем течении с распределением при оторвавшемся течении, можно определить выигрыш в подъемной силе, достигаемый вдуванием струи. Величиной,

определенной эффе́кт вдуваемой струи, является, по Дж. Вильямсу [76], безразмерный коэффициент импульса

$$c_{\mu} = \frac{\rho_j v_j^2 s}{\frac{1}{2} U_{\infty}^2 l}, \quad (22.39)$$

где v_j есть скорость вдуваемой струи, а s — ширина щели. Обширные исследования повышения подъемной силы крыльев с щитками посредством вдувания в недавнее время выполнены Ф. Томасом [70], [70a]. Ему удалось найти также способ, позволяющий определить

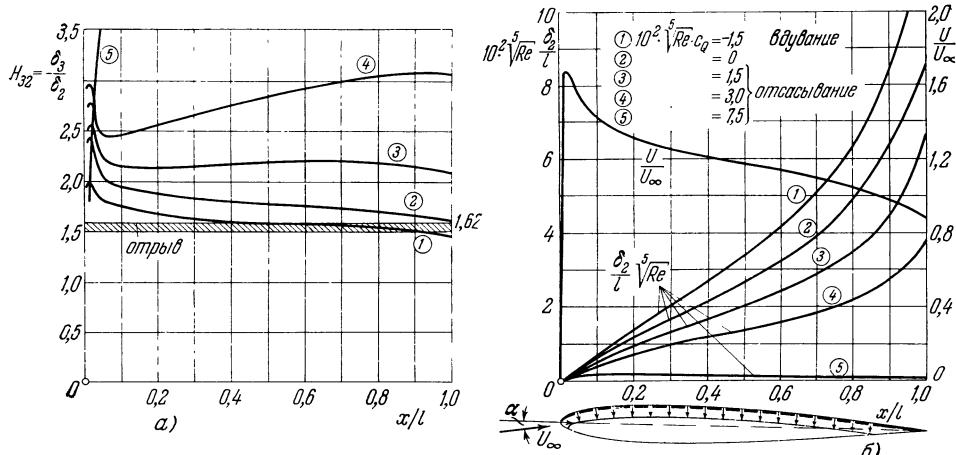
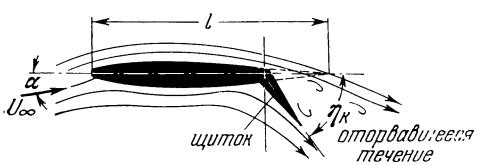
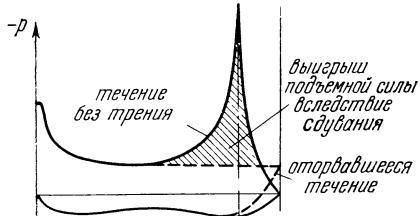


Рис. 22.16. Трассулентный пограничный слой на подсасывающей стороне крылового профиля NACA 0010 с равномерно распределенным отсасыванием и сдуванием. Угол атаки $\alpha = 5^\circ$. По В. Пехау [38]. а) Формпараметр $H_{32} = \delta_3/\delta_2$. б) Толщина потери импульса δ_2 при различных коэффициентах расхода C_Q .

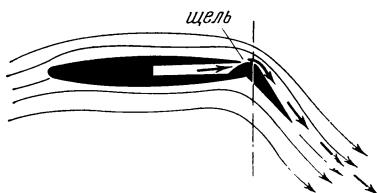
а) без сдувания



б) распределение давления



б) со сдуванием



в) распределение скорости около щели

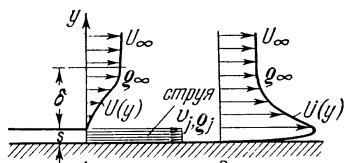


Рис. 22.17. Крыло со щитком. Через щель в носике щитка производится сдувание пограничного слоя с целью повышения максимальной подъемной силы. а) Оторвавшееся течение (без сдувания). б) Прилегающее течение (со сдуванием). в) Распределение скоростей в пограничном слое.

коэффициент импульса, необходимый для предупреждения отрыва турбулентного пограничного слоя на щитке. Кроме того, Ф. Томас произвел тщательное исследование турбулентного пограничного слоя позади щели для вдувания. См. в связи с этим также исследования П. Кэррье и Э. А. Эйхельбриннера [6] о повторном прижимании оторвавшегося

пограничного слоя при сильном возрастании давления посредством вдувания струи в касательном направлении.

Обзор способов повышения максимальной подъемной силы крыльев посредством управления пограничным слоем недавно опубликован Г. Шлихтингом [52а].

Если в турбулентный пограничный слой вдувать другой газ, то, как и в ламинарном случае (§ 3 главы XIV), образуется двухкомпонентный пограничный слой с переменной концентрацией газовых компонентов. Для приближенного расчета двухкомпонентного турбулентного пограничного слоя на плоской пластине предложены различные гипотезы.

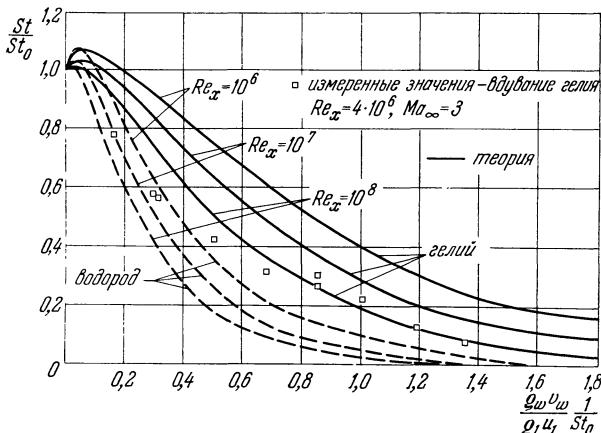


Рис. 22.18. Коэффициенты теплопередачи двухкомпонентного турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластине при вдувании в воздухе водорода и гелия. По Рубезину и Паппасу [47а]. Сравнение теории и измерений при числе Стантона $St = q/\rho_1 u_1 c_p (T_e - T_w)$, где q есть поток тепла, T_e — равновесная температура с учетом восстановления, T_w — температура стенки, St_0 — число Стантона при отсутствии вдувания.

Д. Л. Таркотт [72а] предполагает, что процесс перемешивания происходит в основном в ламинарном подслое, и на основе этого предположения выводит для случая несжимаемого течения приближенную формулу для касательного напряжения. Эта приближенная формула распространена также на сжимаемые пограничные слои. Она имеет следующий вид:

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w0}} = \exp \left[-6,94 \left(\frac{\rho_w}{\rho_1} \frac{v_w}{u_1} \sqrt{\frac{2\rho_w}{\rho_1 c_f}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{\tau_{w0}}{\tau_w}} \right) \right].$$

Индексом w отмечены значения на стенке, индексом 0 — значения при отсутствии вдувания, индексом 1 — значения в свободном течении. Измерения различных авторов, выполненные на пластинах и на конусах при числах Маха между 0 и 4,3, хорошо подтверждают это соотношение.

Обширные измерения влияния, оказываемого вдуванием другого газа на трение на стенах конусов при сжимаемом течении, выполнены К. К. Паппасом и А. Ф. Окуно [36а].

М. В. Рубезин и К. К. Паппас [47а] развили теорию путем перемешивания для случая вдувания в турбулентный пограничный слой другого газа и применили ее к расчету теплопередачи. На рис. 22.18 изображены результаты расчета теплопередачи по этой теории при вдувании в пограничный слой на плоской пластине гелия и водорода. Сравнение с измеренными значениями, отмеченными на том же рисунке, показывает, что в результате вдувания происходит более сильное понижение теплопередачи, чем предсказываемое теорией. Что касается коэффициента восстановления, то, по-видимому, вдувание легкого газа не оказывает существенного влияния на этот коэффициент ни при ламинарном, ни при турбулентном пограничном слое.

7. Пограничные слои на изогнутых стенках. Исследованием плоских турбулентных пограничных слоев на изогнутых стенках занимался Г. Вилькен [75] (см. в связи с этим также работу А. Бетца [3]). Около выпуклой стенки более быстрые частицы отбрасываются под действием центробежной силы к стенке, а более медленные оттесняются от стенки. Следовательно, центробежная сила усиливает перемешивание быстрых и медленных частиц, т. е. увеличивает турбулентный обмен. При обтекании выпуклой стенки происходит обратное явление: более медленные частицы прижимаются к стенке, а более быстрые — оттесняются от стенки. Следовательно, в этом случае

турбулентный обмен понижается. Таким образом, при одном и том же градиенте давления пограничный слой на вогнутой стенке получается более толстым, а на выпуклой стенке, наоборот, более тонким, чем на плоской пластине. Г. Шмидбауэр [53] распространил способ расчета Грушвитца на случай выпуклых стенок.

§ 3. Трехмерные пограничные слои

1. Пограничные слои на телах вращения. Расчет турбулентного пограничного слоя, возникающего на теле вращения при его обтекании в осевом направлении, впервые был выполнен при помощи теоремы импульсов К. Б. Милликеном [33]. Соответствующее уравнение импульсов уже было указано в § 2 главы XI [уравнение (11.41)]. Э. Труккенбродт [71] показал, что если применить теорему энергии, то так же, как при расчете плоских пограничных слоев, для вычисления толщины потери импульса можно вывести квадратурную формулу. Обозначим длину дуги вдоль меридианного сечения через x , а радиус поперечного сечения, перпендикулярного к оси,— через $R(x)$. Тогда квадратурная формула будет иметь следующий вид:

$$\frac{\delta_2(x)}{l} = \frac{\left[C_1^* + \left(\frac{1}{2} c_f \right)^{(n+1)/n} \int_{x_{\text{пер}}/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+2/n} \left(\frac{R}{l} \right)^{(n+1)/n} d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{n/(n+1)}}{\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^3 \frac{R}{l}}, \quad (22.40)$$

где

$$C_1^* = \left\{ \frac{1}{2} c_{f1} \left[\int_0^{x_{\text{пер}}/l} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^5 \left(\frac{R}{l} \right)^2 d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{1/2} \right\}^{(n+1)/n}. \quad (22.41)$$

В формуле (22.40) c_f означает коэффициент трения продольно обтекаемой плоской пластины при турбулентном течении с числом Рейнольдса $U_\infty l/v$. В формуле (22.41) c_{f1} есть коэффициент трения продольно обтекаемой плоской пластины при ламинарном течении. Для формпараметра при осесимметричном течении сохраняется уравнение (22.32), выведенное для плоской задачи. Упомянутые выше способы расчета плоского турбулентного пограничного слоя, предложенные Г. Б. Сквайром и А. Д. Янгом, обобщены также на осесимметричный случай [78]. Имеются многочисленные экспериментальные исследования пограничных слоев на телах вращения [13], [14], [30], [36], [61], большая часть которых относится к измерениям на моделях дирижаблей, включая и измерения перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

2. Пограничные слои на вращающихся телах. Ламинарные пограничные слои на вращающихся телах вращения, обтекаемых в осевом направлении, рассмотрены в § 2 главы XI. Способ расчета, основанный на применении теоремы импульсов в меридианном и в окружном направлениях, распространен Э. Труккенбродтом также на турбулентные пограничные слои. Ему удалось и в этом случае получить удобные квадратурные формулы для определения параметров пограничного слоя. Экспериментальные и дальнейшие теоретические исследования пограничного слоя на удобообтекаемом вращающемся теле выполнены О. Парром [37]. В таком пограничном слое его толщина сильно возрастает вместе с параметром $\lambda = \omega R/U_m$, где ω есть угловая скорость, R — наибольший радиус тела, а U_m — осевая скорость невозмущенного течения. Турбулентный пограничный слой на вращающемся теле вращения, обтекаемом в осевом направлении, может быть рассчитан по формулам (11.47) — (11.50). Расчет показывает, что касательное напряже-

ние на стенке зависит от параметра λ . На рис. 22.19 показаны полученные О. Парром путем измерения и путем расчета значения толщин потери импульса δ_{2x} и δ_{2xz} для цилиндрического тела с круглой головкой. Совпадение вычисленных и измеренных значений хорошее. Точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную с возрастанием параметра λ перемещается вверх по течению; ее положение определяется внезапным увеличением толщины потери импульса.

Способ расчета трехмерного турбулентного пограничного слоя на таких вращающихся телах, как пропеллер или лопатка гидромашины, предложен А. Мэйджером [31]. Сравнительные измерения, относящиеся к этому способу,

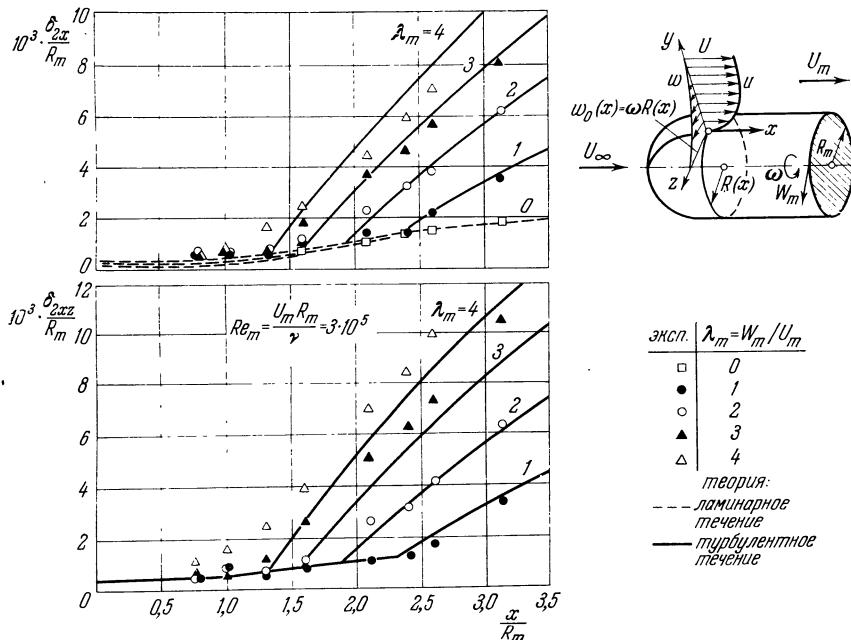


Рис. 22.19. Толщина потери импульса δ_{2x} и толщина потери импульса δ_{2xz} пограничного слоя на вращающемся теле вращения при осевом обтекании. По О. Парру [31]. δ_{2x} и δ_{2xz} определяются формулами (11.50); $\lambda_m = W_m/U_m$. Число Рейнольдса $Re_m = U_m R_m / \nu = 3 \cdot 10^5$.

имеются в работе [32]. Измерения трехмерного пограничного слоя на воздушном винте выполнены Г. Химмельскэмпом [20], причем из результатов измерения распределения давления были определены местные коэффициенты подъемной силы лопасти винта. Некоторые результаты этих измерений, а именно зависимость местного коэффициента подъемной силы c_a от угла атаки α для различных радиальных сечений, изображены на рис. 22.20. Для сравнения на том же рисунке отмечены соответствующие измерения на неподвижной лопасти, помещенной в аэродинамической трубе. Из рис. 22.20 видно, что вблизи втулки получаются сильно повышенные максимальные коэффициенты подъемной силы, что следует объяснить перемещением точки отрыва к большим углам атаки. Так, например, для радиального сечения, наиболее близкого к втулке, максимальный коэффициент подъемной силы равен 3,2, в то время как для неподвижной лопасти он равен только 1,4. Перемещение точки отрыва к большим углам атаки следует приписать тому, что кориолисовы силы вызывают в пограничном слое дополнительное ускорение в направлении течения, которое действует подобно падению давления. Кроме того, на частицы воздуха, вовлеченные во вращение вместе с пограничным слоем в ближайшей окрестности лопасти, действуют центробежные силы, и притом

так, что опасность отрыва уменьшается. Так как действие центробежной силы пропорционально радиусу, то в пограничном слое к каждому сечению лопасти притекает в радиальном направлении изнутри меньше воздуха, чем оттекает наружу. Поэтому пограничный слой на вращающейся лопасти получается тоньше, чем при плоском обтекании такого же профиля. Теоретическое исследование этого явления выполнено А. Бетцем [4]. Ф. Гуче [18] удалось придать видимость течению в пограничном слое на пропеллере посредством нанесения на лопасти слоя специальной краски

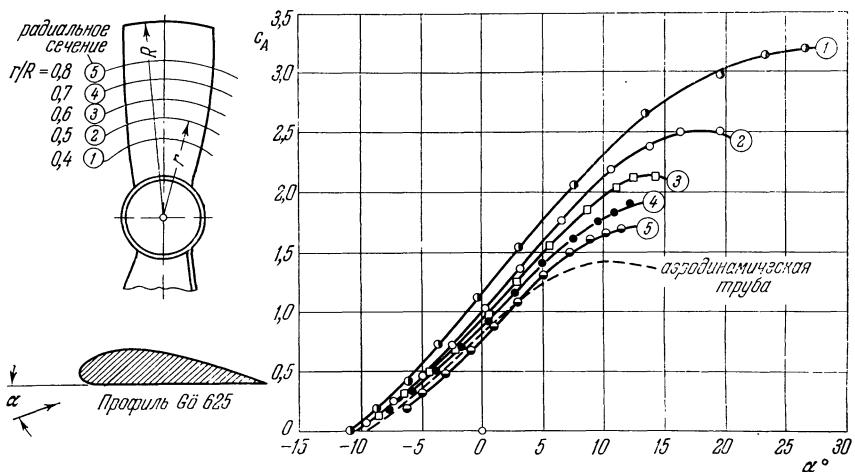


Рис. 22.20. Местные коэффициенты подъемной силы c_d в различных сечениях вращающегося винта. По измерениям Г. Химмельскампа [20].

Центробежные силы оказывают сильное влияние также на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Г. Мюсман [34] в своей диссертации показал, что на вращающейся лопасти пропеллера переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при прочих равных условиях при значительно меньшем числе Рейнольдса, чем на неподвижной лопасти.

3. Сходящиеся и расходящиеся пограничные слои. Способы расчета турбулентного пограничного слоя, изложенные в § 2 настоящей главы, распространены Е. Келем [23] на такие пограничные слои, в которых линии тока расходятся или сходятся в боковом направлении (рис. 22.21). Подобного рода пограничные слои возникают в диффузорах и в сходящихся насадках, а также на носовой и кормовой частях тел вращения. А. Кель применил к таким пограничным слоям способ расчета Э. Грушвитца и при этом довел свои

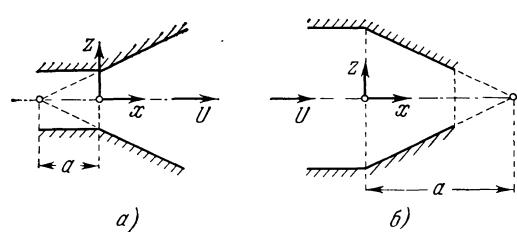


Рис. 22.21. Сходящиеся и расходящиеся пограничные слои: а) расходящийся, $\alpha + x > 0$; б) сходящийся, $\alpha + x < 0$.

измерения до чисел Рейнольдса порядка $Re = U\delta_2/v = 3 \cdot 10^4$, т. е. значительно больших, чем в измерениях Грушвитца. Расположим координатные оси x и z в плоскости стенки (рис. 22.21), а ось y направим перпендикулярно к стенке. В таком случае уравнение движения в направлении x для линий тока, совпадающей с осью симметрии, совпадет с уравнением

плоского движения (8.32), так как на оси симметрии $w = 0$. Но уравнением неразрывности теперь будет

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

В уравнении импульсов (22.6) появится дополнительный член, обусловленный расхождением или схождением линий тока. Повторив для рассматривающего случая вывод уравнения импульсов (8.32), изложенный в § 5 главы VIII, и выполнив интегрирование второго члена в первом уравнении движения, мы получим

$$\int_0^h v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + u \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy + \int_0^h u \frac{\partial w}{\partial z} dy.$$

Два последних члена в правой части обусловлены расхождением течения в направлении z . Вследствие расхождения линий тока мы имеем

$$\frac{w}{u} = \frac{z}{x+a} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{u}{x+a},$$

поэтому оба дополнительных члена в только что составленном уравнении дают в сумме

$$-\frac{1}{x+a} \int_0^h u (U - u) dy = -\frac{\delta_2}{x+a} U^2.$$

Таким образом, в уравнении импульсов появляется дополнительный член $\delta_2 U^2 / (x + a)$, и вместо уравнения (22.6) мы будем иметь теперь для линий тока, совпадающих с плоскостью симметрии, уравнение

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(\frac{1}{a+x} + \frac{H_{12}+2}{U} \frac{dU}{dx} \right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \quad (22.42)$$

При расхождении линий тока $a + x > 0$, а при схождении $a + x < 0$ (см. рис. 22.21); поэтому из уравнения (22.42) сразу видно, что при расхождении линий тока возрастание толщины потери импульса меньше, а при схождении линий тока больше, чем в плоском пограничном слое, что с физической точки зрения вполне понятно.

Пограничный слой внутри двугранного угла. Турбулентный пограничный слой в прямом двугранном угле, образованном двумя плоскими стенками, теоретически и экспериментально исследован К. Герстеном [15a] (см. п. 4 § 1 главы XXI). Родственная с этой задача о трехмерном пограничном слое в угловом пространстве между цилиндрическим телом и плоской пластиной, на которую поставлено цилиндрическое тело, впервые изучалась Дж. П. Джонстоном [22a], а позднее более подробно — Г. Г. Хорнунгом и П. Н. Жубером [21a].

Литература к главе XXII

1. Ackeget J., Zum Entwurf dicht stehender Schaufelgitter. Schweiz. Bauzeit. 103 (1942).
2. Becker E., Berechnung von Reibungsschichten mit schwacher Sekundärströmung nach dem Impulsverfahren. ZFW 7, 163—175 (1959).
3. Betz A., Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden. Vorträge auf dem Gebiet der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929. Verlag Springer, Berlin 1930, 10—18.
4. Betz A., Höchstauftrieb von Flügeln an umlaufenden Rädern. ZFW 9, 97—99 (1961).
5. Burgi A., Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung. Диссертация, Zürich 1931.

6. C a r r i e r e P., E i c h e l b r e n n e r E. A., Theory of flow reattachment by a tangential jet discharging against a strong adverse pressure gradient. В книге «Boundary Layer and Flow Control» (под ред. G. V. Lachmann'a), т. I, 209—231 (1961).
7. C l a u s e r F. H., Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. JAS 21, 91—108 (1954).
8. v o n D o e n h o f f A. E., T e t e r v i n N., Determination of general relations for the behavior of turbulent boundary layers. NACA Rep. 772 (1943).
9. D ö n c h F., Divergente und konvergente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. Диссертация, Göttingen 1925. Forschungsarbeiten des VDI, вып. 292 (1926).
10. E p p l e r R., Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absauge-Grenzschichten. Ing.-Arch. 32, 221—245 (1963).
11. F a g e e R., R a y m e r W. G., Note on empirical relations for a turbulent boundary layer. ARC RM 2255 (1948).
12. F a l k n e r V. M., Aircraft Engineering 15, 65 (1943).
13. F r e e m a n H. B., Measurements of flow in the boundary layer of a 1/40-scale model of the US airship «Akron». NACA Rep. 430 (1931).
14. F r e e m a n H. B., Force measurements on a 1/40-scale model of the US airship «Akron». NACA Rep. 432 (1932).
15. G a r n e r H. C., The development of turbulent boundary layers. ARC RM 2133 (1944).
- 15a. G e r s t e n K., Corner interference effects. AGARD-Report № 299 (1959).
16. G r u s c h w i t z E., Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch. 2, 321—346 (1931); краткая выдержка в ZFM 23, 308 (1932).
17. G r u s c h w i t z E., Turbulente Reibungsschichten mit Sekundärströmungen. Ing.-Arch. 6, 355—365 (1935).
18. G u t s c h e F., Versuche an umlaufenden Flügelschnitten mit abgerissener Strömung. Jb. Schiffbautechn. Ges. 41, 188 (1940).
19. H e a d M. R., Entrainment in the turbulent boundary layer. ARC RM 3152 (1960).
20. H i m m e l s k a m p H., Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. Диссертация, Göttingen 1945. Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen, № 2 (1950).
21. H o c h s c h i l d H., Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. Forschungsarbeiten des VDI, вып. 114 (1910).
- 21a. H o r n u n g H. G., J o u b e r t P. N., The mean velocity profile in three-dimensional turbulent boundary layers. J. Fluid Mech. 15, 368—384 (1963).
22. H o w a r t h L., Proc. Roy. Soc. London A 149, 558 (1935).
- 22a. J o h n s t o n J. P., On the three-dimensional turbulent boundary layer generated by secondary flow. Trans. ASME, Ser. D; J. Basic Eng. 82, 233—248 (1960).
23. K e h l A., Untersuchungen über konvergente und divergente turbulente Reibungsschichten. Ing.-Arch. 13, 293—329 (1943).
24. K r a e m e r K., Zur praktischen Berechnung von Grenzschichten. Bericht 56/A/02 der AVA (1956); выдержки в Luftfahrttechnik 2, 8—13 (1956).
25. K r ö n e r R., Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen. Forschungsarbeiten des VDI, вып. 222 (1920).
26. L a u f e r J., Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. NACA Rep. 1053 (1951).
27. v a n L e N., The von Kármán integral method as applied to a turbulent boundary layer. JAS 19, 647—648 (1952) и 20, 439—440 (1953).
28. L u d w i e g H., Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten. Ing.-Arch. 17, 207—218 (1949).
29. L u d w i e g H., T i l l m a n n W., Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. Ing.-Arch. 17, 288—299 (1949). Сводное изложение обеих работ в ZAMM 29, 15—16 (1949). Английский перевод в NACA TM 1285 (1950).
30. L y o n H. M., Flow in the boundary layer of streamline bodies. ARC RM 1622 (1934).
31. M a g e r A., Generalization of boundary-layer momentum-integral equations to three-dimensional flows including those of rotating system. NACA Rep. 1067 (1952).
32. M a g e r A., M a h o n e y I. I., B u d i n g e r R. E., Discussion of boundary layer characteristics near the wall of an axial-flow compressor. NACA Rep. 1085 (1952).
33. M i l l i k a n C. B., The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. Trans. ASME (J. Appl. Mech.) Section 54, 2, 29 (1932).
34. M u e s m a n n H., Zusammenhang der Strömungseigenschaften des Laufrades eines Axialgebläses mit denen eines Einzelflügels. Диссертация, Braunschweig 1958; ZFW 6, 345—362 (1958).
35. N i k u r a d s e J., Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forschungsarbeiten des VDI, вып. 289 (1929).
36. O w e r E., H u t t o n C. T., Investigation of the boundary layers and the drag of two streamline bodies. ARC RM 1271 (1929).
- 36a. P a p p a s C. C., O k u n o A. F., Measurements of skin friction of the compressible turbulent boundary layer on a cone with foreign gas injection. JASS 27, 321—331 (1960).

37. Parr O., Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. Диссертация, Braunschweig 1962. Ing.-Arch. 32, 393—413 (1963).
38. Pechau W., Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der ebenen und rotationssymmetrischen turbulenten Grenzschicht mit beliebiger Absaugung oder Ausblasung. WGL Jb. 82—92 (1958).
39. Polzin J., Strömungsuntersuchungen an einem ebenen Diffusor. Ing.-Arch. 11, 361—385 (1940).
40. Pretsch J., Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 61 (1938).
41. Raspert A., Cornish J. J., Brayant G. D., Delay of the stall by suction through distributed perforations. Aero. Eng. Rev. 11, 6, 52—60 (1952).
42. Robertson J. M., Ross D., Water tunnel diffuser flow studies. Part II: Experimental research. Pennsylvania State College, Ordnance Research Laboratory Report № 7958, 143 (1949).
43. Ross D., Evaluation of the momentum integral equation for turbulent boundary layers. JAS 20, 502 (1953).
44. Rotta J., Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten. Ing.-Arch. 19, 31—41 (1951) и Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, № 1 (1950); NACA TM 1344.
45. Rotta J., Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. Ing.-Arch. 20, 195—207 (1952).
46. Rotta J., Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenten Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes. Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, № 8 (1953).
47. Rotta J. C., Turbulent boundary layers in incompressible flow. В книге «Progress in Aero. Sci.» 2, 1—219 (под ред. А. Ferri, D. Küchmann'a, L. H. G. Sterne'a), Pergamon Press, Oxford 1962.
- 47a. Rubens M. W., Papas C. C., Analysis of the turbulent boundary layer characteristics on a flat plate with distributed light-gas injection. NACA TN 4149 (1958).
48. Sandborn V. A., Slogar R. J., Study of the momentum distribution of turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. NACA TN 3264 (1955).
49. Schlichting H., Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19, 293—301 (1942).
50. Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. Proc. First Int. Congr. Aero. Sci. Madrid; Adv. in Aero. Sci., t. II, Pergamon Press, London 1959, 563—586.
51. Schlichting H., Pechau W., Auftriebserhöhung von Tragflügeln durch kontinuierlich verteilte Absaugung. ZFW 7, 113—119 (1959).
52. Schlichting H., Three-dimensional boundary layer flow. Inter. Assoc. Hydraulic Research, IXth Congr., Dubrovnik 1961, 1262—1290.
- 52a. Schlichting H., Aerodynamische Probleme des Höchstauftriebes. Доклад на Third Int. Congr. Aero. Sci. (ICAS), Stockholm 1962; ZFW 13, 1—14 (1965).
- 52b. Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse aus der Aerodynamik des Tragflügels (Tenth Prandtl Memorial Lecture 1966). WGLR Jahrbuch 1966, 11—32 (1967).
53. Schmidbauer H., Verhalten turbulenten Reibungsschichten an erhaben gekrümmten Wänden. Диссертация, München 1934; см. также Luftfahrtforschung 13, 161 (1936). Английский перевод в NACA TM 791 (1936).
54. Scholz N., Zur rationellen Berechnung laminarer und turbulenten kompressibler Grenzschichten mit Wärmeübergang. ZFW 7, 33—39 (1959).
55. Scholz N., Turbulente Reibung und Ablösung in ebener Quellströmung. ZAMM 38, 319—321 (1958).
56. Scholz N., Ergänzungen zum Grenzschichtquadraturverfahren von E. Truckenbrodt. Ing.-Arch. 29, 82—92 (1960).
57. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Investigation of separation of the turbulent boundary layer. NACA Rep. 1030 (1951).
58. Schubauer G. B., Spangenberg W. G., Forced mixing in boundary layers. J. Fluid Mech. 8, 10—32 (1960).
59. Schwartz F., West W., Flugversuche am Baumuster Do 27 mit Grenzschichtabsaugung zur Steigerung des Höchstauftriebes. ZFW 12, 108—120 (1964).
60. Schwartz F., Flugversuche am Baumuster RW 3a mit Grenzschichtabsaugung zur Steigerung des Höchstauftriebes. ZFW 11, 142—149 (1963).
61. Simmons L. F. G., Experiments relating to the flow in the boundary layer of an airship model. ARC RM 1268 (1929).
62. Speidel L., Scholz N., Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 464 (1957).
63. Squire H. B., Young A. D., The calculation of profile drag of airflow. ARC RM 1838 (1938).

64. Stratford B. S., Prediction of separation of the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 5, 1—16 (1959) [имеется русский перевод в сб. «Механика», 1959, № 6 (58)]; An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise. *J. Fluid Mech.* 5, 17—35 (1959).
65. Süper J., Untersuchung von Reibungsschichten am fliegenden Flugzeug. *Luftfahrtforschung* 11, 26 (1934); см. также NACA TM 751 (1934).
66. Szablewski W., Turbulente Strömung in konvergenten Kanälen. *Ing.-Arch.* 20, 37 (1952).
67. Szablewski W., Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen (mittlerer und starker Druckanstieg). *Ing.-Arch.* 22, 268—281 (1954).
68. Szablewski W., Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. *Ing.-Arch.* 23, 295—306 (1955).
69. Teterivin N., Lin C. C., A general integral form of the boundary layer equation for incompressible flow with an application to the calculation of the separation point of turbulent boundary layers. *NACA Rep.* 1046 (1951).
70. Thomas F., Untersuchungen über die Erhöhung des Aufriebes von Tragflügeln mittels Grenzschichtbeeinflussung durch Ausblasen. *Диссертация*, Braunschweig 1961; *ZFW* 10, 46—65 (1962).
- 70a. Thomas F., Untersuchungen über die Grenzschicht an einer Wand stromabwärts von einem Ausblasespalt. *Abhdlg. Braunschweig, Wiss. Ges.* 15, 1—17 (1963).
706. Thomason B. G. J., A critical review of existing methods of calculating the turbulent boundary layer. *ARC-Rep.* 26109 (1964).
71. Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. *Ing.-Arch.* 20, 211—228 (1952).
72. Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern. *Ing.-Arch.* 22, 21—35 (1954).
- 72a. Turcotte D. L., A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer. *JASS* 27, 675—678 (1960).
73. Wieghardt K., Tillmann W., Zur turbulenten Reibungsschicht bei Druckanstieg. *UM* 6617 (1941).
74. Wieghardt K., Turbulente Grenzschichten. В книге «Göttinger Monographie», часть B 5, 1945/46.
75. Wilckens H., Turbulente Grenzschichten an gewölbten Wänden. *Ing.-Arch.* 1, 357—376 (1930).
76. Williams J., British research on boundary layer and flow control for high lift by blowing. *ZFW* 6, 143—160 (1958).
77. Winteritz F. A. L., Ramsay W. J., Effects of inlet boundary layer on the pressure recovery in conical diffusers. *Mech. Eng. Res. Lab., Fluid Mech. Div.*, East Kilbride, Glasgow, Rep. № 41 (1956).
78. Young A. D., The calculation of the total and skin friction drags of bodies of revolution at 0° incidence. *ARC RM* 1874 (1939).

Г л а в а XXIII

Турбулентные пограничные слои при сжимаемом течении¹⁾

§ 1. Предварительные замечания

В § 1 главы XIII было указано, что при больших скоростях в пограничном слое возникают очень большие разности температур и поэтому наряду с изменением плотности текущей среды необходимо учитывать зависимость ее физических констант от температуры. Кроме того, при больших скоростях в сжимаемых пограничных слоях существенную роль играет теплопередача, которая приводит к тому, что динамический и температурный пограничные слои сильно влияют один на другой²⁾.

1. Турбулентный перенос тепла. Если жидкость или газ с неравномерным распределением температуры находится в турбулентном движении, то вследствие турбулентного перемешивания происходят не только пульсации скорости во времени, но и соответствующие пульсации температуры. Для таких пульсаций, так же как и для скорости, можно написать [см. соотношения (18.1)]

$$T = \bar{T} + T', \quad (23.1)$$

где \bar{T} есть осредненная по времени температура, а T' — пульсация температуры. Температурные пульсации вызывают дополнительный перенос тепла, подобно тому как пульсации скорости приводят к дополнительному переносу импульсов. Для того чтобы показать это, примем, как и в § 2 главы XVIII, что через элементарную площадку dF , нормаль к которой параллельна оси x , протекает в промежуток времени dt масса жидкости $dF \rho u dt$ и что количество тепла, содержащееся в этой жидкости, отнесенное к единице объема, составляет $\rho c_p T$. Тогда конвективным потоком тепла в направлении оси x будет

$$dQ_x = dF \rho u c_p T.$$

Заменив u и T их выражениями (18.1) и (23.1) и осреднив тепловой поток по времени, мы получим

$$\overline{dQ_x} = dF \rho c_p (\bar{u} \bar{T} + \bar{u}' \bar{T}').$$

Следовательно, пульсации скорости и температуры вызывают дополнительный тепловой поток $dF \rho c_p \bar{u}' \bar{T}'$ в направлении оси x . Аналогичные выражения получаются и для дополнительных тепловых потоков в направлении осей y и z . Таким образом, результирующая плотность теплового потока (количество

¹⁾ Этую совершенно новую главу написал И. Ротта, за что выражаю ему свою благодарность.

²⁾ Сводное изложение сведений о сжимаемых турбулентных пограничных слоях можно найти в книге С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева [38а].

тепла на единицу площади в единицу времени), возникающая вследствие турбулентного движения, имеет по осям координат составляющие

$$q'_x = \rho c_p \bar{u' T'}, \quad q'_y = \rho c_p \bar{v' T'}, \quad q'_z = \rho c_p \bar{w' T'}. \quad (23.2)$$

При этом предполагается, что между пульсациями скорости и температуры существует статистическая корреляция. В том, что градиент осредненной температуры $d\bar{T}/dy$ действительно вызывает такую корреляцию, можно убедиться таким же путем, как в § 2 главы XVIII, когда речь шла о корреляции $\bar{u' v'}$. Достаточно только в рассуждениях, изложенных в последнем абзаце того параграфа, заменить \bar{u} на \bar{T} и u' на T' . Тогда мы получим корреляцию $\bar{v' T'}$. Далее, из тех же соображений следует, что при одновременном существовании градиентов $d\bar{u}/dy$ и $d\bar{T}/dy$ должна возникать сильная корреляция между u' и T' . Измерения, произведенны при помощи термоанемометра в сжимаемом [37] и несжимаемом пограничном слое на нагретой стенке [31], [32], подтвердили это предположение. Согласно измерениям А. Л. Кистлера [37], в сжимаемом пограничном слое на пластине коэффициент корреляции

$$\frac{\bar{u' T'}}{\sqrt{\bar{u'^2}} \sqrt{\bar{T'^2}}}$$

всюду равен от 0,6 до 0,8.

2. Основные уравнения при сжимаемом течении. Пульсации температуры, а также упомянутые в § 2 главы XVIII пульсации давления приводят к возникновению пульсаций плотности. Поэтому и для плотности принимается выражение

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (23.3)$$

где $\bar{\rho}$ есть осредненная по времени плотность, а ρ' — пульсация плотности. Пульсации температуры, давления и плотности связаны между собой уравнением состояния газа (12.18). Для идеального газа, если пульсации малы, в первом приближении имеет место соотношение

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx \frac{p'}{p} - \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (23.4)$$

Пульсации плотности, наряду с турбулентным переносом тепла, являются второй важной особенностью сжимаемых турбулентных течений. Конечно, при составлении тензора напряжения кажущегося турбулентного трения (см. § 3 главы XVIII) ими нельзя автоматически пренебрегать. Формально для компонент тензора напряжения с учетом соотношения (23.3) вместо выражений (18.5) получаются следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= -\bar{\rho} \bar{u'^2} - 2\bar{u}\bar{\rho' u'} - \bar{\rho'} \bar{u'^2}, \\ \tau'_{xy} &= -\bar{\rho} \bar{u' v'} - \bar{u} \bar{\rho' v'} - \bar{v} \bar{\rho' u'} - \bar{\rho'} \bar{u' v'}, \\ \tau'_{xz} &= -\bar{\rho} \bar{u' w'} - \bar{u} \bar{\rho' w'} - \bar{w} \bar{\rho' u'} - \bar{\rho'} \bar{u' w'}, \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

где $\bar{\rho' u'}$, $\bar{\rho' v'}$ и $\bar{\rho' w'}$ представляют собой компоненты потока массы в направлении осей x , y и z . Уравнение неразрывности для сжимаемого течения (3.30) после осреднения принимает вид

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho' w'}}{\partial z} = 0. \quad (23.6)$$

О величине пульсаций плотности прежде всего можно сказать, что $\rho'/\bar{\rho}$ вряд ли может быть когда-нибудь больше, чем u'/\bar{u} . Следовательно, посколь-

ку $u'/\bar{u} \ll 1$, всегда можно пренебречь в равенствах (23.5) последним членом по сравнению с первым. Дальнейшие упрощения получаются, если ограничиться рассмотрением пограничных слоев, в которых $\bar{v} \ll \bar{u}$. Тогда, как показал И. К. Ротта [63], можно совсем исключить пульсации плотности из уравнения пограничного слоя, если одновременно пренебречь, как это обычно принято, нормальными напряжениями. В самом деле, тогда в выражении для τ'_{xy} [второе из равенств (23.5)] будет

$$\bar{v}\rho'\bar{u}' \ll \bar{u}\rho'\bar{v}',$$

и поэтому в этом выражении остаются только два члена. Далее, так как

$$\frac{\partial \bar{\rho}' \bar{u}'}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{v}'}{\partial y},$$

то уравнение неразрывности (23.6) для пограничных слоев, в среднем двумерных, упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{v}'}{\partial y} = 0. \quad (23.6a)$$

Для вывода уравнения пограничного слоя следует сложить уравнение (12.35б) с умноженным на u уравнением неразрывности (12.35а), подставить в получившееся уравнение вместо u , v , p и ρ их выражения (18.1) и (23.3) и затем произвести осреднение по времени, пользуясь правилами (18.4). Тогда, отбросив упомянутые выше члены, мы получим уравнение динамического пограничного слоя в следующем виде:

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (\bar{\rho}\bar{v} + \bar{\rho}'\bar{v}') \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}'\bar{v}')}{\partial y}. \quad (23.7)$$

Мы видим, что в оба уравнения (23.6а) и (23.7) пульсации плотности входят в комбинации $\bar{\rho}'\bar{v}'$ в качестве дополнительного слагаемого к члену $\bar{\rho}\bar{v}$. Это наводит на мысль заменить эту сумму первоначальной плотностью потока массы в направлении оси y , т. е. величиной $\bar{\rho}\bar{v} = \bar{\rho}\bar{v} + \bar{\rho}'\bar{v}'$, и, кроме того, принять какущееся турбулентное напряжение равным $\tau'_{xy} = -\bar{\rho}u'\bar{v}'$. Правда, точное значение осредненной по времени скорости \bar{v} , перпендикулярной к стенке, остается при этом неопределенным, но вообще знание этого значения и не представляет интереса. Совершенно аналогичным образом производится преобразование уравнения энергии (12.17). Введя плотность турбулентного потока тепла $\bar{q}_y = c_p \bar{\rho} \bar{v}' \bar{T}'$, мы получим окончательно следующую систему уравнений для сжимаемого турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (23.8a)$$

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}, \quad (23.8b)$$

$$c_p \left(\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \bar{\mu}\Phi + \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (23.8c)$$

В уравнении (23.8c) $\bar{\mu}\Phi$ есть осредненное по времени значение диссипации, которое приближенно можно положить равным

$$\bar{\mu}\Phi = \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tau'_{xy} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (23.8d)$$

К уравнениям (23.8а) — (23.8в) следует присоединить еще уравнение состояния газа, которое для осредненных значений можно представить приближенно в виде соотношения

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}. \quad (23.9)$$

Для сжимаемого турбулентного течения эта система уравнений заменяет уравнения пограничного слоя (12.35а) — (12.35г), составленные в главе XII для ламинарного пограничного слоя. Границные условия остаются такими же, как и раньше (см. главу XII).

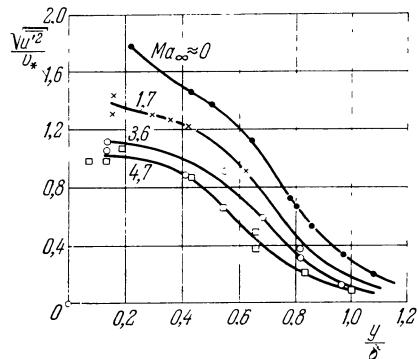


Рис. 23.1. Распределение турбулентных пульсаций скорости в пограничном слое на плоской пластине при ее продольном обтекании со сверхзвуковой скоростью. По измерениям А. Л. Кистлера [37] и П. С. Клебанова [38].

скорости с увеличением числа А. Л. Кистлера [37], уменьшаются (рис. 23.1). Влияние пульсаций плотности сверх того действия, которое учитывается уравнениями (23.8а) — (23.8в), исследовал И. К. Ротта [63].

Для того, чтобы преобразовать систему уравнений (23.8а) — (23.8г) к виду, более удобному для практических применений, вводятся, как и в главе XIX, эмпирические гипотезы об обмене импульсами и о теплообмене. Формула (19.1) для каждого касательного напряжения $\tau_t = \tau'_{xy}$ используется при сжимаемом течении без всяких изменений. Для турбулентной теплопередачи вводится, по аналогии с законом теплопроводности Фурье

$$q_t = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{ламинарное течение})$$

[уравнение (12.2)], соотношение

$$q_t = -c_p A_q \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{турбулентное течение}) \quad (23.10)$$

Механизмы обмена для импульсов и тепла хотя и сходны, но не тождественны, поэтому коэффициенты обмена для импульса A_t и для тепла A_q в общем случае не равны один другому. Заменив в системе уравнений (23.8а) — (23.8в) τ'_{xy} , q_t и $\mu\bar{F}$ их выражениями (19.1), (23.10) и (23.8г), мы получим

$$\frac{\partial \bar{\rho u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho v}}{\partial y} = 0, \quad (23.11a)$$

$$\bar{\rho u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + A_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (23.11b)$$

$$c_p \left(\bar{\rho u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + c_p A_q) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + (\mu + A_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (23.11c)$$

3. Связь между коэффициентом турбулентного обмена и коэффициентом теплообмена. Как уже было сказано, при наличии градиента температуры или градиента концентрации примеси пульсационное движение в турбулентном течении влечет за собой, во-первых, сильный обмен импульсами между слоями, движущимися с различными скоростями, и во-вторых, повышенный тепло- и массообмен. Следовательно, теплообмен и обмен импульсами, а потому теплопередача на стенке и сопротивление трения тесно связаны между собой. На эту аналогию между процессами обмена тепла и импульсов впервые указал О. Рейнольдс [59], поэтому ее часто называют аналогией Рейнольдса (п. 3 § 5 главы XII). С помощью аналогии Рейнольдса можно из известных законов сопротивления трения в турбулентном течении вывести заключения о теплопередаче. Коэффициенты обмена A_t и A_q для импульса и тепла имеют такую же размерность, как и коэффициент вязкости μ , а именно KTL^{-2} (в технической системе единиц). Кроме числа Прандтля

$$\Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

для молекулярных процессов переноса вводят соответствующее *турбулентное число Прандтля*

$$\Pr_t = \frac{A_t}{A_q} \quad (23.12)$$

и получают

$$\frac{q_t}{\tau_t} = - \frac{c_p}{\Pr_t} \frac{\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}. \quad (23.13)$$

Тогда полной плотностью потока тепла будет

$$q = - c_p \left(\frac{\mu}{\Pr} + \frac{A_t}{\Pr_t} \right) \frac{d\bar{T}}{dy}. \quad (23.14)$$

Турбулентное число Прандтля можно вычислить из одновременных измерений распределения скорости и температуры. Однако надежность вычисления в известной мере сомнительна из-за неточности определения величин $d\bar{u}/dy$ и $d\bar{T}/dy$ по опытным данным. Выяснилось, что число \Pr_t меняется в зависимости от расстояния от стенки. В очень тщательном исследовании Г. Людвигса [44] определялась величина отношения $A_q/A_t = 1/\Pr_t$ в различных точках поперечного сечения трубы, в которой происходило турбулентное движение. Результат изображен на рис. 23.2. Вблизи стенки эта величина равна приближенно единице; по мере удаления от стенки она увеличивается, достигая в середине трубы значения около 1,5, причем независимо от числа Маха. Аналогичные результаты получил Д. С. Джонсон [32] для турбулентного пограничного слоя на нагретой стенке. В этом случае величина отношения A_q/A_t вблизи стенки также равна приближенно единице, а по мере удаления от стенки возрастает примерно до двух. А. Фэйдж и В. М. Фокнер [74] получили для отношения A_q/A_t в спутном течении позади круглого цилиндра значение, равное двум. Такое же значение получил Г. Райхардт [55] в свободной струе. Отсюда очевидно, что в пограничных

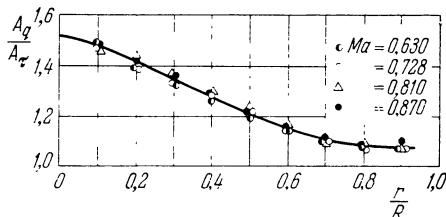


Рис. 23.2. Распределение отношения A_q/A_t по радиусу трубы при турбулентном течении. По Г. Людвигу [44]. Число Рейнольдса $Re =$ от $3,2 \cdot 10^5$ до $3,7 \cdot 10^6$.

слоях величина A_q/A_τ вследствие влияния стенок меньше, чем при свободной турбулентности. Весьма правдоподобным будет предположение, что в непосредственной близости от стенок отношение A_q/A_τ равно единице (по Людвигу 1,08, чьему соответствует число Прандтля $\text{Pr}_t \approx 0,9$), а затем, по мере удаления от стенок, оно возрастает до двух. В практических расчетах обычно берут для A_q/A_τ либо единицу ($\text{Pr}_t = 1$), либо среднее из крайних значений, например, $A_q/A_\tau = 1,3$ ($\text{Pr}_t = 0,769$, Райхардт).

Необходимо, однако, подчеркнуть, что характер изменения турбулентного числа Прандтля вдоль пограничного слоя вполне определенно неизвестен и что существуют экспериментальные результаты, противоречащие только что указанным. Краткую сводку исследований по этому вопросу можно найти в работе И. Кестина и П. Д. Ричардсона [35, 36].

Связь между теплопередачей и сопротивлением трения была использована Г. Людвигом [43] для экспериментального определения касательного напряжения на стенке посредством измерения теплоотдачи маленькой плитки, встроенной в стенку и нагретой до температуры более высокой, чем температура текущей среды.

Об аналогии между обменом импульсов и теплообменом при свободной турбулентности см. § 5 главы XXIV.

§ 2. Связь между распределением скоростей и распределением температуры

1. Теплопередача на гладкой пластине. В главе XII уже было показано, что при ламинарном течении вдоль плоской пластины профили скоростей и профили температур, если не учитывать тепло, возникающее вследствие трения, и если число Прандтля равно единице, тождественно совпадают. То же самое имеет место и при турбулентном обтекании плоской пластины при условии, что кроме равенства $\text{Pr} = 1$ выполняется также равенство $\text{Pr}_t = 1$. Это означает, что для обмена импульсов и теплообмена предполагается один и тот же механизм. Тогда вследствие совпадения профилей скоростей и профилей температур должно соблюдаться соотношение

$$q(x) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{T_w - T_\infty}{U_\infty} \tau_0(x), \quad (23.13)$$

откуда после некоторых преобразований получается соотношение

$$\text{Nu}_x = \text{Re}_x \frac{c_f'}{2} \quad (\text{Рейнольдс}, \text{ } \text{Pr} = 1, \text{ } \text{Pr}_t = 1), \quad (23.16)$$

в свое время названное аналогией Рейнольдса [см. равенство (12.41б)]. Таким образом, пропорциональность между числом Нуссельта и коэффициентом трения, выведенная в главе XII для ламинарного обтекания пластины [равенство (12.41б)], сохраняется и при турбулентном течении. Как и в ламинарном случае, соотношение (23.16) применимо также к сжимаемым течениям, если только число Нуссельта составить для разности температур $T_w - T_e$ ¹⁾.

1) Часто вместо числа Нуссельта применяется так называемое число Стэнтона, определяемое следующим образом:

$$\text{St} = \frac{\alpha}{c_p \cdot \rho \cdot U_\infty} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \cdot \text{Pr}} .$$

В этом случае соотношение (23.16) принимает вид

$$\text{St} = \frac{1}{2} c_f' .$$

Аналогичным образом преобразуются и другие соотношения.

Трудность исследования турбулентных температурных пограничных слоев, следовательно, и теплопередачи в турбулентных течениях состоит в том, что коэффициенты обмена A_τ и A_q внутри пограничного слоя зависят от расстояния от стенки. На достаточном расстоянии от стенки эти коэффициенты во много раз больше коэффициентов вязкости μ и теплопроводности λ , т. е. величин, характеризующих молекулярный обмен; поэтому величинами μ и λ вдали от стенки можно в общем случае пренебречь по сравнению с коэффициентами A_τ и A_q . Наоборот, в непосредственной близости от стенки, в так называемом ламинарном подслое, коэффициенты турбулентного обмена становятся равными нулю, так как здесь невозможно турбулентное пульсационное движение, следовательно, невозможен и турбулентный обмен. Поэтому на теплопередачу между течением и стенкой существенное влияние оказывают именно условия, имеющие место в ламинарном подслое и прежде всего коэффициенты молекулярного обмена μ и λ . Однако соотношение (23.16) при сделанных допущениях сохраняет свою применимость, несмотря на существование ламинарного подслоя, так как, согласно сказанному в § 7 главы XII, при $Pr = 1$ распределение скоростей и распределение температуры тождественно совпадают также в ламинарном подслое. Но, в то время как в турбулентных пограничных слоях допущение, что $Pr_t = 1$, обычно вполне оправдано, в ламинарном подслое число Прандтля Pr может значительно отклоняться от единицы, например, у жидкостей (см. таблицу 12.1). В таких случаях соотношение (23.16) больше неприменимо. Обобщение аналогии Рейнольдса на число Прандтля $Pr \neq 1$ было предложено многими авторами, в частности Л. Прандтлем [53], Дж. И. Тэйлором [73], Т. Карманом [34] и Р. Г. Дайсслером [11], [12], [13].

Л. Прандтль, исходя из предположения, что $Pr_t = 1$, делит пограничный слой на две зоны: на ламинарный подслой, в котором коэффициенты турбулентного обмена равны нулю, и на турбулентную внешнюю зону, в которой можно пренебречь коэффициентами молекулярного обмена μ и λ . Тогда из соотношений (19.1) и (23.14) мы будем иметь для ламинарного подслоя

$$\frac{q}{\tau} = - \frac{\lambda}{\mu} \frac{dT}{du},$$

а для турбулентной внешней зоны —

$$\frac{q}{\tau} = - c_p \frac{dT}{du}.$$

Пусть значения температуры и скорости равны на стенке: $T = T_w$, $u = 0$; на границе ламинарного подслоя T_l , u_l и на внешней границе пограничного слоя T_∞ , U_∞ . Тогда, если принять, что отношение q/τ во всем пограничном слое постоянно¹⁾, то, выполнив интегрирование, мы получим для ламинарного подслоя

$$\frac{q}{\tau} = - \frac{\lambda}{\mu} \frac{T_l - T_w}{u_l} = - \frac{\lambda}{\mu U_\infty} \frac{T_l - T_w}{\frac{u_l}{U_\infty}}, \quad (23.17)$$

а для турбулентной зоны —

$$\frac{q}{\tau} = - c_p \frac{T_l - T_\infty}{u_l - U_\infty}.$$

¹⁾ При обтекании плоской пластины с числом Прандтля $Pr = 1$ это условие выполняется точно, так как

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w},$$

в чем можно убедиться, если подставить это выражение в уравнения (23.8).

Приравняв правые части последних двух соотношений, мы будем иметь

$$\Pr(T_w - T_\infty) = -\frac{U_\infty}{u_l} \left[1 + \frac{u_l}{U_\infty} (\Pr - 1) \right] (T_l - T_w).$$

Следовательно, местный коэффициент теплопередачи равен

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_\infty} = - \frac{\Pr}{\left[1 + \frac{u_l}{U_\infty} (\Pr - 1) \right]} \frac{\frac{u_l}{U_\infty} q}{T_l - T_\infty}$$

или, с учетом соотношения (23.17),

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{u_l}{U_\infty} (\Pr - 1)} \frac{c_p \tau}{U_\infty},$$

откуда для числа Нуссельта получим

$$\text{Nu}_x = \frac{\frac{c'_f}{2} \Pr \cdot \text{Re}_x}{1 + \left(\frac{u_l}{U_\infty} \right) (\Pr - 1)} \quad (\text{Прандтль — Тэйлор}, \Pr_t = 1). \quad (23.18)$$

Это и есть обобщение аналогии Рейнольдса, найденное Л. Прандтлем и Дж. И. Тэйлором независимо друг от друга. Для использования этого соотношения для целей расчета требуется еще надлежащим образом выбранное предположение о скорости на границе ламинарного подслоя¹⁾. В частном случае, когда $\Pr = 1$, соотношение (23.18) переходит в соотношение (23.16).

В основе вывода уравнения Прандтля лежит предположение о существовании резкой границы между турбулентным слоем и ламинарным подслоем. В действительности переход от одного слоя к другому происходит непрерывно и, следовательно, существует промежуточный слой, в котором молекулярный и турбулентный обмены одинаковы по порядку своей величины. Т. Карман [34], учитя это обстоятельство, вывел для связи между коэффициентом теплопередачи и коэффициентом трения уравнение

$$\text{Nu}_x = \frac{\frac{c'_f}{2} \Pr \cdot \text{Re}_x}{1 + 5 \sqrt{\frac{c'_f}{2}} \left\{ \Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{5}{6} (\Pr - 1) \right] \right\}} \quad (\Pr_t = 1). \quad (23.19)$$

¹⁾ При турбулентном течении в трубе отношение скорости на границе ламинарного подслоя к скорости в середине трубы равно, как это следует из формулы (20.15а),

$$\frac{u_l}{U} = 5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho U^2}} = 5 \sqrt{\frac{c'_f}{2}},$$

и уравнение Прандтля (23.18) принимает вид

$$\text{Nu}_x = \frac{\frac{c'_f}{2} \Pr \cdot \text{Re}_x}{1 + 5 \sqrt{\frac{c'_f}{2}} (\Pr - 1)}.$$

Если отнести коэффициент c'_f к средней скорости \bar{u} в трубе, то тогда мы будем иметь

$$\frac{u_l}{\bar{u}} = 5 \sqrt{\frac{c'_f}{2}}.$$

И это уравнение при $\text{Pr} = 1$ переходит в уравнение (23.16) Рейнольдса. На рис. 23.3 показана зависимость числа Нуссельта Nu_x от числа Рейнольдса Re_x для случая течения вдоль пластины при трех числах Прандтля $\text{Pr} = 10; 1$ и $0,01$ по формулам Рейнольдса, Прандтля и Кармана при $\text{Pr}_t = 1$.

Практическое значение указанных здесь связей между теплопередачей и сопротивлением трения состоит в том, что они могут быть с успехом использованы не только в случае обтекания плоской пластины, но и при любых других турбулентных течениях, что многоократно подтверждено измерениями.

Приведенные соотношения оправдали себя также для случая обтекания тонких тел, т. е. для течений с не слишком сильными градиентами давления. Далее выяснилось, что указанная аналогия существует и при сжимаемых течениях, и притом независимо от числа Маха. Наконец, выведенные формулы приближенно пригодны также для турбулентного течения в трубе, если в эти формулы вместо текущей длины ввести диаметр трубы, а вместо скорости и температуры внешнего течения — среднюю скорость и среднюю температуру в трубе.

При всех предыдущих рассуждениях турбулентное число Прандтля всегда принималось равным $\text{Pr}_t = 1$, т. е. предполагалось, что коэффициенты обмена для импульсов и тепла одинаковы. Между тем измерения показывают, что число Pr_t отклоняется от единицы. Теплопередачей при $\text{Pr}_t \neq 1$ очень подробно занимался Г. Райхардт [56]. Он получил для числа Нуссельта формулу

$$Nu_x = \frac{\frac{c'_f}{2} Re_x \text{Pr}}{\text{Pr}_t + \sqrt{\frac{c'_f}{2} [(\text{Pr} - \text{Pr}_t) a + A]}} \quad (\text{Райхардт}). \quad (23.20)$$

Величина a , учитывающая теплопроводность в ламинарном подслое, зависит от отношения чисел Прандтля Pr/Pr_t и равна

$$a = \frac{v_*}{v} \int_0^\infty \frac{dy}{\left(1 + \frac{A_\tau}{\mu}\right) \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \frac{A_\tau}{\mu}\right)} . \quad (23.21)$$

Она была вычислена Г. Райхардтом в предположении, что величина A_τ , следовательно, и скорость изменяются от стенки до области вполне развившейся турбулентности непрерывно. Численные значения a даны в таблице 23.1. Величина A в формуле (23.20) есть функция числа Прандтля Pr_t

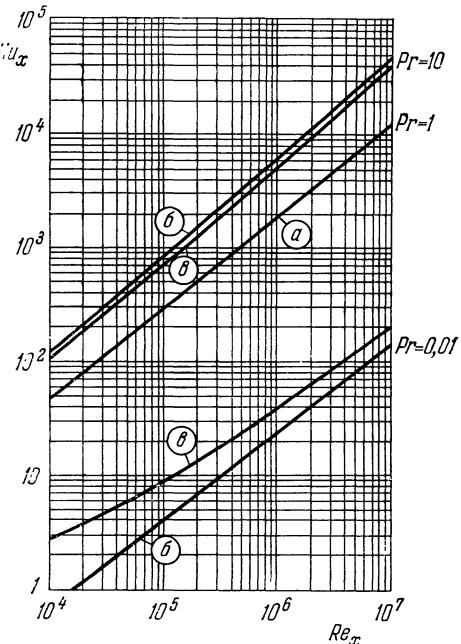


Рис. 23.3. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса при различных числах Прандтля для турбулентного течения вдоль пластины (аналогия Рейнольдса). а) По О. Рейнольдсу, формула (23.16). б) По Л. Прандтлю и Дж. И. Тэйлору, формула (23.18). в) По Т. Карману, формула (23.19). Принято: $\text{Pr}_t = 1$; $c'_f = 0,0592 (Re_x)^{-0,2}$ [формула (21.12)]; $u_l/U_\infty = 5 \sqrt{c'_f/2}$.

Таблица 23.1. Зависимость величин a и b , необходимых для вычисления коэффициента теплопередачи и коэффициента восстановления, от отношения Pr/Pr_t .
По Г. Райхардту [56] и И. К. Ротте [64]

Pr/Pr_t	a	b	Pr/Pr_t	a	b	Pr/Pr_t	a	b
0,5	10,22	123,8	5,0	6,04	47,5	100	2,47	10,9
0,72	9,55	108,1	10	5,05	34,3	200	1,98	7,7
1,44	8,25	82,2	20	4,10	24,5	1000	1,17	3,4
2,0	7,66	71,6	30	3,61	20,1			

и, кроме того, слабо зависит от $\sqrt{c'_f/2}$; в общем случае влияние этой величины на результаты подсчета по формуле (23.20) незначительно. Как показал И. К. Ротт [64], можно принять, что

$$A \approx 4(1 - \text{Pr}_t).$$

Распределение температуры в турбулентном пограничном слое на плоской пластине при произвольном изменении числа Pr_t по толщине пограничного слоя исследовано Э. Р. Ван-Дрийстом [18] и И. К. Роттой [64]. В последней работе показано, что на распределение температуры и на теплопередачу влияют главным образом значения турбулентного числа Прандтля вблизи стенки; влияние же значений Pr_t на более далеких расстояниях от стенки не столь существенно.

При использовании уравнения (23.20) можно принять, что влияние изменения турбулентного числа Прандтля Pr_t с расстоянием от стенки целиком входит в величину A , и, следовательно, можно заменить значение Pr_t , явно входящее в уравнение, значением Pr_t вблизи стенки. Подходящим для такой замены значением Pr_t является значение $\text{Pr}_t \approx 0,9$.

2. Теплопередача на шероховатых поверхностях. Как уже было сказано в § 6 главы XX и в § 3 главы XXI, шероховатость поверхности значительно повышает сопротивление трения при турбулентном течении. Шероховатость поверхности увеличивает также коэффициент теплопередачи. Однако увеличение коэффициента теплопередачи в процентном отношении, как правило, меньше увеличения коэффициента трения. Это вполне понятно, так как некоторая часть турбулентных касательных сил может передаваться на стенку через посредство сил давления на выступы, образующие шероховатость. При теплопередаче аналогичного явления не может происходить. Экспериментальными исследованиями теплопередачи в шероховатых трубах занимались многие авторы, в том числе В. Нуннер [50], Д. Ф. Диппрай и Р. Г. Саберский [15]. Последние два автора сообщают также об опытах при разных числах Прандтля. В своих теоретических рассуждениях Д. Ф. Диппрай и Р. Г. Саберский [15], а также П. Р. Оуэн и В. Р. Томсон [51] исходят из предположения, что шероховатость влияет на механизм обмена только в областях, близких к стенке. Таким путем они получили для числа Нуссельта формулу с такой же структурой, как у формулы (23.20), но с заменой выражения $(\text{Pr} - \text{Pr}_t)$ величиной β , являющейся функцией числа Pr и шероховатости. Следовательно, в частном случае, когда $\text{Pr}_t = 1$,

$$\text{Nu}_x = \frac{\text{Re}_x \cdot \text{Pr} \cdot \frac{c'_f}{2}}{1 + \sqrt{\frac{c'_f}{2}} \beta \left(\frac{v_* k}{v} ; \text{Pr} \right)} \quad (\text{Диппрай, Саберский, Оуэн, Томсон; } \text{Pr}_t = 1). \quad (23.22)$$

Для величины β Диппрей и Саберский на основе своих опытов с песочной шероховатостью при режиме, когда шероховатость проявляет себя полностью ($v_* k_s / v > 70$), получили выражение

$$\beta \left(\frac{v_* k_s}{v} ; \text{Pr} \right) = 5,19 \left(\frac{v_* k_s}{v} \right)^{0,2} \text{Pr}^{0,44} - 8,5. \quad (23.23)$$

Зависимость величины $(\beta + 8,5) \text{Pr}^{-0,44}$ от коэффициента шероховатости

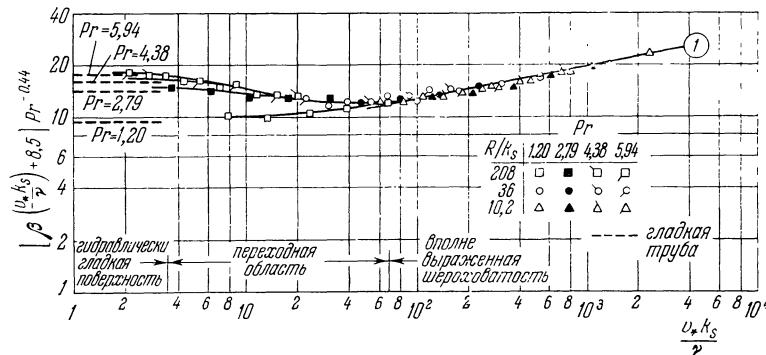


Рис. 23.4. Зависимость величины $(\beta + 8,5) \text{Pr}^{-0,44}$ от $v_* k_s / v$ для песчаной шероховатости при различных числах Прандтля. По опытам Д. Ф. Диппрея и Р. Г. Саберского [18]. Кривая (I) — согласно уравнению (23.23).

$v_* k_s / v$ при различных числах Прандтля на основании данных опыта изображена на рис. 23.4. Оуэн и Томсон обработали результаты измерений, проведенных в различных работах, в том числе и в работах [50] и [15], и получили для β формулу

$$\beta \left(\frac{v_* k_s}{v} ; \text{Pr} \right) = 0,52 \left(\frac{v_* k_s}{v} \right)^{0,45} \text{Pr}^{0,8}. \quad (23.24)$$

Способы расчета распределения температуры в турбулентном течении при температуре стенки, произвольно изменяющейся в направлении течения, разработали Д. Б. Сполдинг [68] и И. Кестин со своими сотрудниками [26], [35], [36]. Многочисленные опыты над теплопередачей при переменной температуре стенки выполнены У. Рейнольдсом, У. М. Кэйсом и С. Дж. Клейном [60].

3. Распределение температуры при сжимаемом течении. Для распределения температуры в турбулентном пограничном слое при сжимаемом течении можно получить такие же формулы, как и для распределения температуры в ламинарном пограничном слое при сжимаемом течении (§ 2 главы XIII). В случае, когда $\text{Pr} = \text{Pr}_t = 1$, остается применимой формула (13.12), а в более общем случае, когда имеет место теплопередача, — формула (13.13). Если же

$$\text{Pr} \neq \text{Pr}_t \neq 1,$$

то равновесная температура теплоизолированной стенки вычисляется по прежнему по формуле (13.19), т. е.

$$T_e = T_\infty \left(1 + r \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}_\infty^2 \right). \quad (23.25)$$

Коэффициент восстановления r при турбулентном течении несколько больше, чем при ламинарном течении, и, согласно опытам, лежит в среднем между 0,875 и 0,89 (см. рис. 17.31). На рис. 23.5 изображена собранная Л. М. Макком [45] сводка результатов измерения коэффициента восстановления r при

различных числах Маха и при различных числа Рейнольдса. Для оценки влияния числа Прандтля в литературе принимается соотношение

$$r = \sqrt[3]{\text{Pr}}, \quad (23.26)$$

что дает $r = 0,896$ при $\text{Pr} = 0,72$. Соотношение такого рода можно вывести

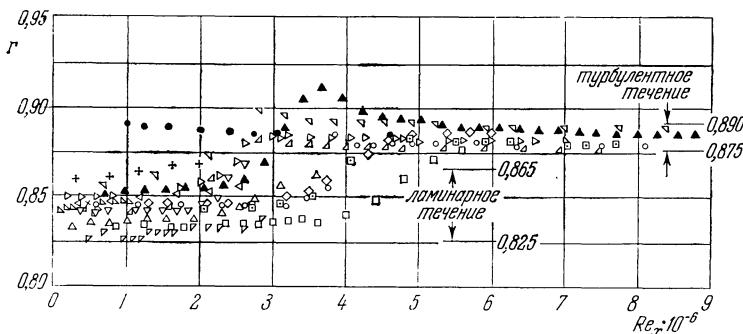


Рис. 23.5. Зависимость температурного коэффициента восстановления от числа Рейнольдса по измерениям на конусах при числах Маха Ma_{∞} от 1,2 до 6,0. По Л. М. Макку [46].

	Аэродинамическая труба	Ma_{∞}	Конус
●	Ames 1×3 фут ² № 1	1,97	10° полый, сталь
□	Lewis 8×6 фут ²	1,98	10° полый, сталь
△	Lewis 18×18 дюйм ²	1,94	10° полый, сталь
▽	Ames 6×6 фут ²	1,9	10° полый, сталь
△	Ames 10×14 дюйм ²	4,48	10° полый, сталь
▼	Ames 2×2 фут ²	1,21	10° полый, сталь
▽	Lewis 2×2 фут ²	3,93	10° полый, сталь
△	Ames 1×3 фут ² № 1	3,00	10° полый, сталь
▽	Aberdeen	2,18	10° дерево
△	GALCIT 5×5 дюйм ²	6,0	20° керамика
○	Ames 1×3 фут ² № 1	2,0	20° полый, сталь
▲	JPL 18×20 дюйм ²	4,50	5° стекловолокно
△	JPL 18×20 дюйм ²	1,63	13° люсит
▽	JPL 18×20 дюйм ²	4,50	13° люсит
△	JPL 12×12 дюйм ²	1,63	13° люсит
▽	JPL 12×12 дюйм ²	2,54	13° люсит

и теоретически, исходя из уравнения энергии (23.11в) и используя соотношение (23.14) между коэффициентами молекулярного и турбулентного обмена A_q и A_{τ} . Таким путем И. Ротта [64] получил соотношение

$$r = \text{Pr}_t + \frac{c_f'}{2} (\text{Pr} - \text{Pr}_t) b + \sqrt{\frac{c_f'}{2}} B. \quad (23.27)$$

Величина b есть функция отношения Pr/Pr_t и, подобно величине a в формуле (23.20), характеризует процессы, происходящие в ламинарном подслое. Она равна

$$b = \frac{2}{v} \int_0^{\infty} \frac{\bar{u} dy}{\left(1 + \frac{A_{\tau}}{\mu}\right) \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \frac{A_{\tau}}{\mu}\right)}. \quad (23.28)$$

Ее численные значения даны в таблице 23.1. Величина B зависит от Pr_t и в некоторой мере также от $\sqrt{c_f'}/2$. Согласно расчетам И. Ротты, она равна $B = 7 (1 - \text{Pr}_t)$.

Если число Pr_t изменяется по толщине пограничного слоя, то в формулу (23.27) следует подставить его значение вблизи стенки. Если число Прандтля

и турбулентное число Прандтля не равны единице, то для распределения температуры в турбулентном пограничном слое при сжимаемом течении можно пользоваться формулой (13.21), полученной в главе XIII для ламинарного пограничного слоя, причем обычно получается вполне приемлемая точность.

§ 3. Влияние числа Маха. Законы сопротивления трения

Расчет турбулентного пограничного слоя при несжимаемом течении пока еще не вышел из стадии полуэмпирической теории. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в таком же положении находится и расчет сжимаемого турбулентного пограничного слоя. При несжимаемых турбулентных течениях в качестве исходного пункта для расчета пограничного слоя использовались изложенные в главе XIX гипотезы пути перемешивания Прандтля, гипотеза подобия Кармана и универсальный пристеночный закон распределения скоростей. В многочисленных работах были сделаны попытки перенести эти гипотезы на сжимаемые течения и таким путем создать полуэмпирические теории для расчета сжимаемых турбулентных пограничных слоев, однако при этом каждый раз приходилось вводить новые допущения. Но так как наши знания о механизме турбулентности сжимаемых течений пока еще очень несовершены, то попытки переноса полуэмпирических теорий турбулентности, созданных для несжимаемых течений, на сжимаемые течения сопряжены с большой неуверенностью.

Трудности расчета турбулентного пограничного слоя при сжимаемом течении еще более возрастают по двум причинам: во-первых, вследствие влияния, оказываемого на течение числом Маха Ma_∞ набегающего течения и температурой T_w обтекаемой стенки, а во-вторых, вследствие некоторой противоречивости экспериментальных результатов. Среди многочисленных способов решения поставленной задачи особенно часто применяются следующие три:

1. Введение некоторой «эффективной» температуры, к которой могут быть отнесены все физические константы.

2. Применение гипотезы Прандтля о пути перемешивания или гипотезы подобия Кармана.

3. Преобразование координат.

Наряду с этими способами в литературе встречаются и другие. Насколько разные результаты получаются при определении сопротивления трения различными способами, очень наглядно показано в работе Д. Р. Чепмена и Р. Г. Кестера [4] (см. также работу [20]). Очень тщательное сравнение результатов двадцати различных способов расчета с имеющимися измерениями выполнили Д. Б. Сп coldинг и С. В. Чи [68a].

1. **Продольно обтекаемая плоская пластина.** Основная идея [первого из перечисленных выше способов] состоит в том, что законы сопротивления, полученные для несжимаемого течения, сохраняются и для сжимаемого течения, если только для плотности и коэффициента вязкости ввести их значения, соответствующие подходящим образом выбранной эффективной температуре T^* . Впервые такую возможность использовал Т. Карман [33], причем в качестве эффективной температуры он ввел температуру стенки. Взяв за основу закон сопротивления (21.17) для продольно обтекаемой плоской пластины при несжимаемом течении, Т. Карман получил для сжимаемого течения закон сопротивления

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_f}} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \right]^{-1/2} = \lg (Re_l c_f) - \frac{1}{2} \lg \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \right], \quad (23.29)$$

где $Ma_\infty = U_\infty / c_\infty$ есть число Маха внешнего течения. Формула Кармана

выведена для теплоизолированной стенки. Закон изменения вязкости с температурой был им принят в виде

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Были предприняты многочисленные попытки улучшить способ эффективной температуры путем выбора для T^* значения, лежащего между максимальным и минимальным значениями T внутри пограничного слоя Э.Р.Г. Эккерта [19], [20] предложил взять за эффективную температуру значение

$$T^* = T_0 + 0,5 (T_w - T_1) + 0,22 (T_e - T_1), \quad (23.30)$$

где T_1 есть температура на границе пограничного слоя, T_w — температура стенки и T_e — равновесная температура. Эта формула применима также к случаям, когда имеет место теплопередача.

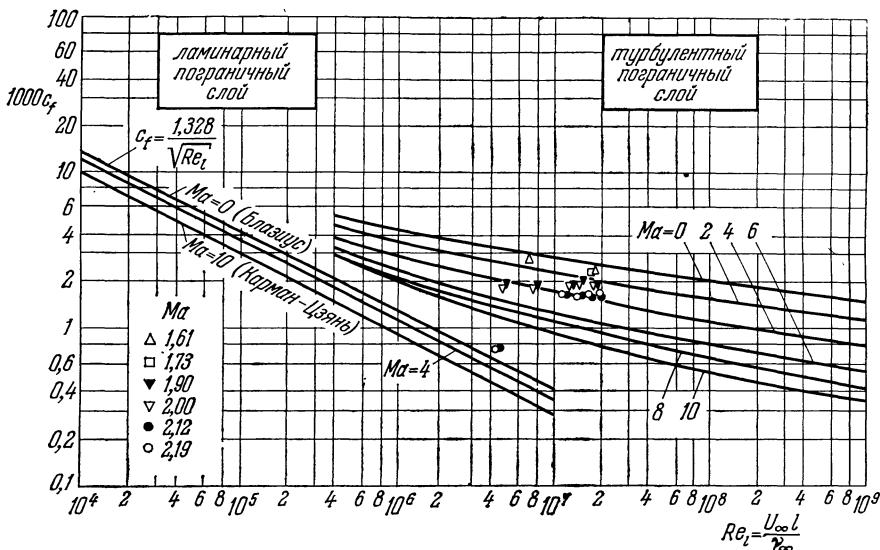


Рис. 23.6. Коэффициент полного сопротивления трения продольно обтекаемой плоской теплоизолированной пластины при ламинарном и турбулентном пограничном слое. Теоретические кривые для турбулентного течения по уравнению (23.31). По Ван-Дрийсту [17]. $\kappa = 1,4$; $\omega = 0,76$; $Pr = 1$.

Введение эффективной температуры является простейшим способом для учета влияния числа Маха и теплопередачи на сопротивление. Часто этот способ дает результаты, достаточные для технических целей. Пользуясь им, М. Г. Бертрам [1] подсчитал коэффициенты трения в широкой области чисел Маха и температур.

Гипотезу Прандтля о пути перемешивания применил к турбулентному пограничному слою при сжимаемом течении Э. Р. Ван-Дрийст [17]. Как и в формуле (19.22), он принял, что длина пути перемешивания равна $l = \kappa y$. Влияние сжимаемости дает себя знать через переменную плотность, изменяющую также толщину пограничного слоя. Для турбулентного сопротивления трения продольно обтекаемой плоской пластины с теплопередачей и без теплопередачи Э. Р. Ван-Дрийст получил формулы, учитывающие в явном виде влияние числа Рейнольдса и числа Маха. Для случая теплоизолированной стенки его формула имеет вид

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_f}} (1 - \lambda^2)^{1/2} \frac{\arcsin \lambda}{\lambda} = \lg (\text{Re}_l c_f) + \frac{1+2\omega}{2} \lg (1 - \lambda^2), \quad (23.31)$$

где c_f есть полный коэффициент сопротивления трения, а

$$1 - \lambda^2 = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2}, \quad (23.32)$$

причем $Ma_\infty = U_\infty/c_\infty$ есть число Маха свободного течения. Формула (23.31) отличается от формулы (23.29) присутствием множителя $(\arcsin \lambda)/\lambda$ в левой части и степени ω из закона (13.4), выражающего зависимость вязкости от температуры, в правой части. При $Ma_\infty \rightarrow 0$ формула (23.31) переходит в формулу сопротивления трения (21.17), полученную Т. Карманом для несжимаемого течения. Зависимость c_f от числа Рейнольдса Re_l , определяемая формулой (23.31), изображена на рис. 23.6 для различных чисел Маха. Для сравнения на том же рисунке отмечены результаты измерений. Совпадение вычисленных и измеренных значений не во всех случаях удовлетворительно, что частично объясняется ненадежностью измерений при больших числах Маха. Аналогичные расчеты произвел Р. Э. Уильсон [78], положив в основу гипотезу подобия Кармана [соотношение (19.19)], и получил формулу, сходную с формулой (23.31). Правда, при этом он ограничился только случаем теплоизолированной стенки. На рис. 23.7 изображена зависимость отношения коэффициентов сопротивления c_f при сжимаемом и несжимаемом течении от числа Маха по теории Уильсона и по теории Ван-Дрийста. Кривая для теплоизолированной стенки соответствует теории Уильсона [78], а кривая для течения с теплопередачей — теории Ван-Дрийста [17]. Обе кривые доведены до очень больших чисел Маха. Измерения многих авторов [2], [7], [28], [42], [67] хорошо совпадают с теорией. Представление о влиянии теплопередачи на сопротивление трения дает рис. 23.8, построенный также по расчетам Э. Р. Ван-Дрийста. Мы видим, что сопротивление трения в случае теплоизолированной стенки несколько меньше, чем в том случае, когда происходит теплопередача от потока к стенке.

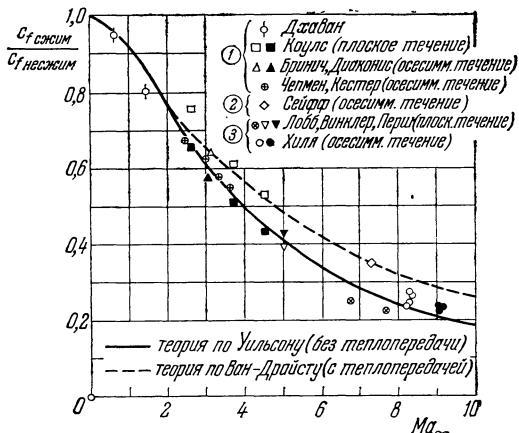


Рис. 23.7. Зависимость коэффициента сопротивления трения продольно обтекаемой плоской пластины от числа Маха при турбулентном пограничном слое. Сравнение теории с измерениями. $Re_l \approx 10^7$. Из работы [28]. Сплошная кривая соответствует теории Уильсона [78] (без теплопередачи) при нулевом градиенте давления; отношение T_w/T_∞ изменяется между 1,8 при $Ma = 2$ и 21,0 при $Ma = 10$. Штриховая кривая соответствует теории Ван-Дрийста [17] (с теплопередачей) при нулевом градиенте давления. Измерения: (1) — без теплопередачи и при нулевом градиенте давления; (2) — с теплопередачей и нулевым градиентом давления; (3) — с теплопередачей и с падением давления, причем $T_w/T_\infty = 8$.

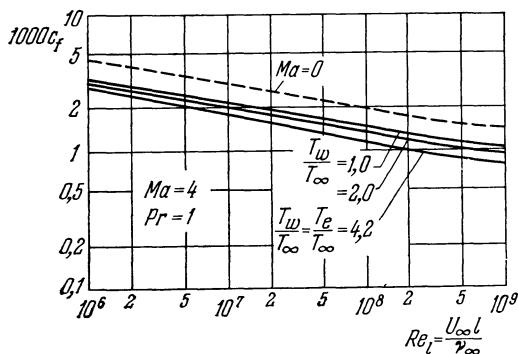


Рис. 23.8. Зависимость коэффициента сопротивления трения продольно обтекаемой плоской пластины при турбулентном течении и при наличии теплопередачи от числа Рейнольдса при различных отношениях T_w/T_∞ температуры стени T_w к внешней температуре T_∞ . По Э. Р. Ван-Дрийсту [17]. Кривая $T_e = T_w = 4,2T_\infty$ соответствует теплоизолированной стенке; $Ma_\infty = 4$; $Pr = 1$.

Преобразование координат. Преобразование координат, использованное в § 4 главы XIII для сжимаемого ламинарного пограничного слоя, формально может быть применено также к дифференциальным уравнениям сжимаемого турбулентного пограничного слоя. Если вместо кажущегося касательного напряжения τ'_{xy} ввести величину

$$\tilde{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2 \frac{p_0}{p_1} \tau'_{xy}, \quad (23.33)$$

то уравнение импульсов (23.8б) в результате преобразования примет вид

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} (1 + S) + v_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\tau}'_{xy}}{\partial y}. \quad (23.34)$$

Обозначения здесь те же, что и в уравнениях (13.24) — (13.41). Математическую возможность приведения уравнений сжимаемого пограничного слоя к виду уравнений несжимаемого течения ряд авторов (например, А. Мэйджер [46], Д. Коулс [7а], Л. Крокко [7б], Д. А. Спенс [69], [70]) связали с предположением, что профили скоростей в преобразованной системе имеют такую же форму, как и при несжимаемом течении, и поэтому, если ввести преобразованные величины, то сохраняют свою форму также закон сопротивления и другие соотношения. Такое предположение, вполне оправдывающееся для ламинарных течений, не приводит к ожидаемому результату для турбулентных течений, так как преобразование координат нельзя применять к уравнениям пульсационного движения. В результате возникает противоречие со всеми теориями турбулентности, основанными на гипотезе обмена (19.1), на гипотезе пути перемешивания Прандтля и на гипотезе подобия Кармана. Если исходить из физически вполне допустимого предположения, что кажущаяся вязкость ϵ в соотношении (19.2) не зависит от плотности, то преобразование к уравнению несжимаемого течения становится невозможным. Однако возможно преобразование

$$\tilde{\tau}'_t = \rho_1 \tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2. \quad (23.35)$$

При этом между преобразованной величиной $\tilde{\epsilon}$ и первоначальной величиной ϵ имеет место соотношение

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{b} \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2 \epsilon.$$

Но при больших числах Маха отношение ρ/ρ_1 очень сильно изменяется при изменении расстояния y от стенки. Следовательно, если принять, что профили скоростей в преобразованной системе остаются такими же, как в несжимаемом течении, то изменяется распределение преобразованной кажущейся вязкости $\tilde{\epsilon}$. Если же принять, что не изменяется $\tilde{\epsilon}$, то изменяются профили скоростей. Выводы, которые получаются из этих двух предположений о влиянии числа Маха в непреобразованной системе, прямо противоположны. Из этого обстоятельства становится ясной вся проблематика, возникающая при переносе на сжимаемые течения закономерностей, полученных эмпирически для несжимаемых течений.

Влияние числа Маха на распределение скоростей дает себя знать через повышение температуры около стенки. Так как давление p можно считать не зависящим от y , то для распределения плотности в пограничном слое имеет место соотношение

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T}. \quad (23.36)$$

Следовательно, в случае теплоизолированной стенки плотность на небольших расстояниях y от стенки с увеличением числа Маха сильно уменьшается

и поэтому толщина пограничного слоя сильно увеличивается. С другой стороны, с увеличением числа Маха вязкость становится больше, а коэффициент сопротивления — меньше. Это влечет за собой сильное нарастание толщины ламинарного подслоя. В качестве примера на рис. 23.9 изображено распределение скоростей в сжимаемом турбулентном пограничном слое в координатах u/U_∞ , y/δ_2 при числе Маха $Ma_\infty = 2,4$ по измерениям Р. М. О'Доннела [16]. Здесь δ_2 означает толщину потери импульса [формула (13.75)].

Мы видим, что в выбранных координатах измеренные при различных числах Рейнольдса значения скорости u/U_∞ очень хорошо располагаются вдоль одной кривой. Построенный на рис. 23.9 теоретический профиль скоростей для сжимаемого течения отклоняется от теоретического профиля для несжимаемого течения значительно меньше, чем при ламинарном течении (рис. 13.10). Толщина пограничного слоя с возрастанием числа Маха, конечно, увеличивается. Это ясно видно из рис. 23.10, на котором построены профили скоростей при различных числах Маха вплоть до $Ma_\infty = 9,9$. При этом следует также иметь в виду, что толщина потери импульса, определяемая равенством (13.75), становится меньше по сравнению с толщиной пограничного слоя, что объясняется уменьшением плотности при увеличении числа Маха по мере приближения к стенке.

Если мы построим безразмерное распределение скоростей в полулогарифмических координатах по образцу рис. 20.4, причем для плотности и кинематической вязкости возьмем значения, соответствующие температуре стенки T_w , то увидим, что типичный для несжимаемого течения ход кривых сохраняется и при высоких числах Маха, правда, с некоторыми количественными изменениями, как это ясно видно из рис. 23.11, на котором изображены результаты измерений Р. К. Лобба, Е. М. Винклера и Дж. Перша [42]. Мы видим, что на толщину ламинарного подслоя сильное влияние оказывает теплоизмена к стенке, в области же турбулентного ядра кривые идут почти эквидистантно. Теоретические исследования о возможности распростра-

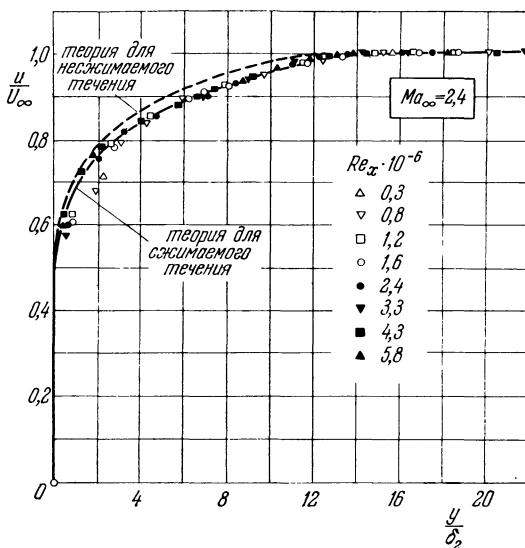


Рис. 23.9. Измерения распределения скоростей в турбулентном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине при сверхзвуковой скорости. По Р. М. О'Доннеллу [16]. $Ma_\infty = 2,4$; δ_2 — толщина потери импульса по формуле (13.75); $T_w = T_e$. Теоретическая кривая для несжимаемого течения: $u/U_\infty = 0,716 (y/\delta_2)^{1/7}$. Теоретическая кривая для сжимаемого течения: $u/U_\infty = 0,683 (y/\delta_2)^{1/7}$.

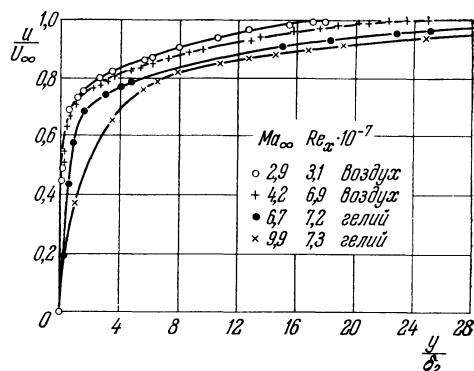


Рис. 23.10. Распределение скоростей в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком, при различных числах Маха. По измерениям Мэттинга, Чепмена, Николма и Томаса [42]. $T_w = T_e$.

41*

нения универсального закона распределения скоростей (19.28) на случай сжимаемого течения опубликованы Р. Г. Дайсслером [12] и И. К. Роттой [61]. Выяснилось, что на распределение скоростей вблизи стенки влияют два дополнительных параметра, а именно число Маха Ma_τ и коэффициент потока тепла β_q , определяемые посредством равенств

$$\left. \begin{aligned} Ma_\tau &= \frac{v^*}{c_w} = Ma_\infty \sqrt{\frac{c_f'}{2}}, \\ \beta_q &= \frac{q_w}{\rho_w c_p w T_w v^*} = \frac{St}{\sqrt{\frac{c_f'}{2}}} \frac{T_e - T_w}{\sqrt{T_w T_\infty}}, \end{aligned} \right\} \quad (23.37)$$

где c_w есть скорость звука при температуре, которую имеет стенка, St — число Стэнтона (см. стр. 632) и c_f' — местный коэффициент трения. Расчеты И. К. Ротты [61], выполненные при некоторых упрощающих допущениях, привели к качественно правильным результатам. Однако влияние параметра β_q на ламинарный подслой согласно опытам сильнее, чем согласно расчетам.

В случае шероховатой стенки влияние числа Маха на сопротивление больше, чем в случае гладкой стенки. Согласно Г. В. Липману и Ф. Э. Годдару [27], [41], при режиме с полным проявлением шероховатости отношение $c_{f,ск}/c_{f,неск}$ пропорционально ρ_w/ρ_∞ , и, следовательно, в случае теплоизолированной стенки

$$\frac{c_{f,ск}}{c_{f,неск}} = \frac{1}{1 + r \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2}, \quad (23.38)$$

где r есть коэффициент восстановления.

2. Пограничный слой при переменном давлении вдоль стенки. В технических условиях часто требуется рассчитывать турбулентные пограничные

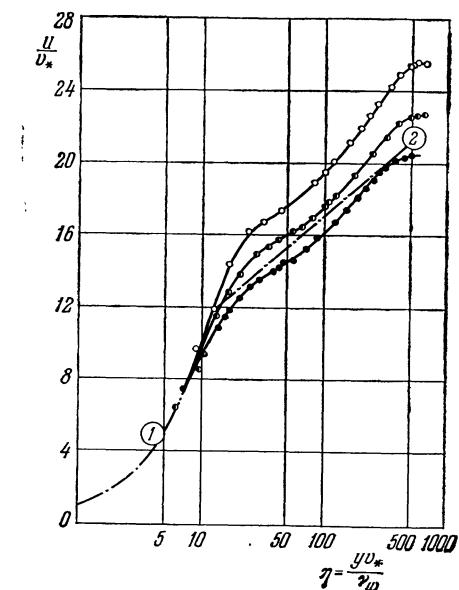


Рис. 23.11. Универсальное распределение скоростей в турбулентном пограничном слое на плоской стенке канала при сверхзвуковом течении с теплопередачей на стенке. По измерениям Р. К. Лобба, Е. М. Винклера и Дж. Перса [42]. Физические константы текущей среды взяты при температуре стенки, следовательно, $v^* = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$; $\eta = uv^*/vw$. Кривые (1) и (2) изображают теоретические законы для несжимаемого течения, причем кривая (1) — для ламинарного подслой ($u/v_* = \eta$), а кривая (2) — для универсального логарифмического распределения скоростей ($u/v_* = 5,5 + 5,75 \lg \eta$).

	Ma_∞	$\frac{T_e - T_w}{T_e}$	$Re_2 \cdot 10^{-4}$	Ma_τ	β_q
●	5,75	0,108	1,16	0,117	0,0074
○	5,79	0,238	1,24	0,114	0,0162
○	5,82	0,379	1,14	0,116	0,0273

слои при сжимаемом течении с переменным давлением вдоль стенки. Особая необходимость в таких расчетах возникает при определении размеров сопла Лаваля для сверхзвуковых труб, так как в этом случае следует довольно точно знать вытесняющее действие пограничного слоя. Известные приближенные способы такого расчета основаны, как и в случае несжимаемого течения, на использовании теоремы импульсов, а иногда и теоремы энергии теории пограничного слоя. Для сжимаемых ламинарных пограничных слоев при теплоизолированной стенке эти интегральные соотношения выражаются уравнениями (13.80) и (13.87). Для турбулентных пограничных слоев они переписываются в следующем виде:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} (2 + H_{12} - Ma^2) = -\frac{\tau_0}{\rho_1 U^2} \quad (\text{уравнение импульсов}) \quad (23.39)$$

и

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} \left[3 + \frac{2\delta_H}{\delta_3} - Ma^2 \right] = \frac{2}{\rho_1 U^3} \int_0^\delta \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (\text{уравнение энергии}), \quad (23.40)$$

где δ_3 есть толщина потери энергии [равенство (13.76)], δ_H — толщина увеличения энтальпии [равенство (13.77)], а $H_{12} = \delta_1/\delta_2$. Оба эти уравнения применимы также в случае теплопроводящей стенки и, кроме того, при числах Прандтля, не равных единице.

Ряд авторов, в том числе Г. В. Энглерт [21], Е. Решотко и М. Таккер [58], Н. Б. Коэн [5] и Д. А. Спенс [71], применили к уравнению (23.39) преобразование Иллингвортса — Стоартсона и привели его таким путем к виду, соответствующему несжимаемому течению. А. Вальц [76], [77] преобразовал систему уравнений (23.39) и (23.40) к виду, более удобному для выполнения расчетов, и составил таблицы необходимых для этих расчетов универсальных функций. Сравнению разных способов расчета посвящена работа Б. С. Стрэтфорда и Г. С. Биверса [72].

Литература к главе XXIII

1. Bertram M. H., Calculations of compressible average turbulent skin friction. NACA TR R-123 (1962).
- 1a. Bourne D. E., Davies D. R., On the calculation of eddy viscosity and of heat transfer in a turbulent boundary layer on a flat surface. Quart J. Mech. Appl. Math. 11, 223—234 (1958).
2. Brinich P. F., Diaconis N. S., Boundary layer development and skin friction at Mach-number 3.05. NACA TN 2742 (1952).
3. Burggraaf O. R., The compressibility transformation and the turbulent boundary layer equation. JAS 29, 434—439 (1962).
4. Chapman D. R., Kester R. H., Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. JAS 20, 441—448 (1953).
5. Cohen N. B., A method for computing turbulent heat transfer in the presence of a streamwise pressure gradient for bodies in high-speed flow. NASA MEMO 1-2-59 L (1959).
6. Coles D., Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. JAS 21, 433—448 (1954).
7. Coles D., Measurements in the boundary layer on a smooth flat plate in supersonic flow.
 - I. The problem of the turbulent boundary layer. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20—69 (1953).
 - II. Instrumentation and experimental techniques at the Jet Propulsion Laboratory. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20—70 (1953).
 - III. Measurements in a flat plate boundary layer at the Jet Propulsion Laboratory. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20—71 (1953).
- 7a. Coles D., The turbulent boundary layer in a compressible fluid. Phys. Fluids 7, 1403—1423 (1964).
- 7b. Crocco L., Compressible turbulent boundary layer with heat exchange, AIAA Journ. 1, 2723—2731 (1963).
8. Culick F. E. C., Hill J. A. F., A turbulent analog of the Stewartson-Illingworth transformation. JAS 25, 259—262 (1958).
9. Davies D. R., On the calculation of eddy viscosity and heat transfer in a turbulent boundary layer near a rapidly rotating disk. Quart. J. Mech. Appl. Math. 12, 211—221 (1959).
10. Davies D. R., Bourne D. E., On the calculation of heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layers. I. The laminar case. II. The turbulent case. Quart J. Mech. Appl. Math. 9, 457—488 (1956).
11. Deissler R. G., Eian C. S., Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties. NACA TN 2629 (1952).
12. Deissler R. G., Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers. NACA TR 1240 (1955).
13. Deissler R. G., Taylor M. F., Analysis of turbulent flow and heat transfer in noncircular passages. NACA TN 4384 (1959).

14. D h a w a n S., Direct measurements of skin friction. NACA Rep. 1121 (1953).
15. D i p p r e y D. F., S a b e r s k y R. H., Heat and momentum transfer in smooth and rough tubes at various Prandtl numbers. Int. J. Heat Mass Transfer 6, 329—353 (1963).
16. O' D o n n e l l R. M., Experimental investigation at Mach-number of 2,41 of average skin friction coefficients and velocity profiles for laminar and turbulent boundary layers and assessment of probe effects. NACA TN 3122 (1954).
17. van D r i e s t E. R., Turbulent boundary layer in compressible fluids. JAS 18, 145—160 (1951).
18. van D r i e s t E. R., The turbulent boundary layer with variable Prandtl number. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 257—271.
19. E c k e r t E. R. G., Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow. JAS 22, 585—587 (1955).
20. E c k e r t E. R. G., Survey on heat transfer at high speeds. Report of University of Minnesota, Minneapolis, Minn. (1961).
21. E n g l e r t G. W., Estimation of compressible boundary-layer growth over insulated surfaces with pressure gradient. NACA TN 4022 (1957).
22. F e r r a r i C., Study of the boundary layer at supersonic speeds in turbulent flow: Case of flow along a flat plate. Quart. Appl. Math. 8, 33 (1950).
23. F e r r a r i C., The turbulent boundary layer in a compressible fluid with positive pressure gradient. Cornell Aeronautical Laboratory CAL/CM-560 (1949); сокращенное изложение в JAS 18, 460—477 (1951).
24. F e r r a r i C., Comparison of theoretical and experimental results for the turbulent boundary layer in supersonic flow along a flat plate. JAS 18, 555—564 (1951).
25. F e r r a r i C., Determination of the heat transfer properties of a turbulent boundary layer in the case of supersonic flow when the temperature distribution along the wall is arbitrarily assigned. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung». Braunschweig 1955, 364—384.
26. G a r d n e r G. O., K e s t i n J., Calculation of the Spalding function over a range of Prandtl numbers. Int. J. Heat Mass Transfer 6, 289—299 (1963).
27. G o o d d a r d F. E., Effect of uniformly distributed roughness on turbulent skin friction drag at supersonic speeds. JASS 26, 1—15, 24 (1959).
28. H i l l F. K., Boundary-layer measurements in hypersonic flow. JAS 23, 35—42 (1956).
29. H i l l F. K., Turbulent boundary layer measurements at Mach numbers from 8 to 10. Phys. Fluids 2, 668—680 (1959).
30. H o f m a n n E., Der Wärmeübergang bei der Strömung im Rohr. Z. Ges. Kälte-Ind. 44, 99—107 (1937).
31. J o h n s o n D. S., Velocity, temperature, and heat transfer measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature. J. Appl. Mech. 24, 2—8 (1957).
32. J o h n s o n D. S., Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature. Trans. ASME; J. Appl. Mech. 26, 325—336 (1959).
33. v. K á r m á n Th., The problem of resistance in compressible fluids. Volta Kongress Rome 1935, 222—277; см. также Collected Works III, 179—221.
34. v. K á r m á n Th., The analogy between fluid friction and heat transfer. Trans. ASME 61, 705—710 (1939); см. также Collected Works III, 355—367.
35. K e s t i n J., R i c h a r d s o n P. D., Heat transfer across turbulent incompressible boundary layers. Int. J. Heat Mass Transfer 6, 147—189 (1963).
36. K e s t i n J., R i c h a r d s o n P. D., Wärmeübertragung in turbulenten Grenzschichten. Forschg. Ing.-Wes. 29, 93—104 (1963).
37. K i s t l e r A. L., Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer. Phys. Fluids 2, 290—296 (1959).
38. K i e b a n o f f P. S., Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA TN 3178 (1954); TR 1247, 1135—1153 (1955).
39. K o v a s z n a y L. S. G., The hot-wire anemometer in supersonic flow. JAS 17, 565—573 (1950).
- 39a. К у т а т е л а д з е С. Г., Л е о н т ь е в А. И., Турбулентный пограничный слой в сжимаемом газе. Новосибирск, 1962.
40. L i l l e y G. M., An approximation solution of the turbulent boundary layer equation in incompressible and compressible flow. Coll. Aero. Cranfield Rep. 134 (1960).
41. L i e p m a n n H. W., G o o d d a r d F. E., Note on the Mach number effect upon the skin friction of rough surfaces. JAS 24, 784 (1957).
42. L o o b b R. K., W i n k l e r E. M., P e r s h J., Experimental investigation of turbulent boundary layers in hypersonic flow. NAVORD Rep. 3880 (1955).
43. L u d w i e g H., Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten. Ing.-Arch. 17, 207—218 (1949).
44. L u d w i e g H., Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoeffizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten. ZFW 4, 73—81 (1956).

45. Mack L. M., An experimental investigation of the temperature recovery-factor. Jet Propulsion Laboratory, Rep. 20—80 Calif. Inst. Tech., Pasadena 1954.
46. Magier A., Transformation of the compressible turbulent boundary layer. JAS 25, 305—311 (1958).
47. Matting F. W., Chapman D. R., Nyholm J. R., Thomas A. G., Turbulent skin friction at high Mach numbers and Reynolds numbers in air and helium. NASA TR R-82 (1961).
48. Mc Lafferty G. H., Barber R. E., The effect of adverse pressure gradients on the characteristics of turbulent boundary layers in supersonic streams. JASS 29, 1—10, 18 (1962).
49. Morkovin M. V., Effects of compressibility on turbulent flows. Colloques Int. CNRS № 108, 367—380, Mécanique de la Turbulence, Marseille 1962.
50. Nunner W., Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft 455.
51. Owen P. R., Thompson W. R., Heat transfer across rough surfaces. J. Fluid Mech. 15, 321—334 (1963).
52. Paupas C. C., Measurement of heat transfer in the turbulent boundary layer on a flat plate in supersonic flow and comparison with skin friction results. NACA TN 3222 (1954).
53. Prandtl L., Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten. Phys. Z. 11, 1072—1078 (1910); см. также Gesammelte Abhdlg. II, 585—596.
54. Reichardt H., Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. ZAMM 20, 297—328 (1940); NACA TM 1047 (1943).
55. Reichardt H., Impuls- und Wärmeaustausch bei freier Turbulenz. ZAMM 24, 268—272 (1944).
56. Reichardt H., Der Einfluss der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang. Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung № 3, 1—63 (1950).
57. Reichardt H., Die Grundlagen des turbulenten Wärmeüberganges. Arch. Wärmetechn. 2, 129—142 (1951).
58. Reshotko E., Tucke M., Approximate calculation of the compressible turbulent boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. NACA TN 4154 (1957).
59. Reynolds O., On the extent and action of the heating surface for steam boilers. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. 14, 7—12 (1874).
60. Reynolds W. C., Kays W. M., Kline S. J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer.
I. Constant wall temperature. NASA MEMO 12-1-58 W (1958).
II. Step wall temperature distribution. NASA MEMO 12-2-58 W (1958).
III. Arbitrary wall temperature and heat flux. NASA MEMO 12-3-58 W (1958).
IV. Effect of location of transition and prediction of heat transfer in a known transition region. NASA MEMO 12-4-58 W (1958).
61. Rotta J. C., Über den Einfluss der Machschen Zahl und des Wärmeübergangs auf das Wandgesetz turbulenter Strömungen. ZFW 7, 264—274 (1959).
62. Rotta J. C., Turbulent boundary layers with heat transfer in compressible flow. AGARD Rep. 281 (1960).
63. Rotta J. C., Bemerkung zum Einfluss der Dichteschwankungen in turbulenten Grenzschichten bei kompressibler Strömung. Ing.-Arch. 32, 187—190 (1963).
64. Rotta J. C., Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte. Int. J. Heat Mass Transfer 7, 215—228 (1964).
65. Rubesin M. W., A modified Reynolds analogy for the compressible turbulent boundary layer on a flat plate. NACA TN 2917 (1953).
66. Schubauer G. B., Tchen C. M., Turbulent flow. В книге «High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion» т. V, 75—195, Princeton, (1959). [Имеется русский перевод в книге: Ли нь Ц. Ц. (редактор), Турбулентное течение и теплопередача, ИЛ, Москва 1963.]
67. Seiff A., Examination of the existing data on the heat transfer of turbulent boundary layers at supersonic speeds from the point of view of Reynolds analogy. NACA TN 3284 (1954).
68. Spalding D. B., Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a step-wise discontinuity in wall temperature. International Developments in Heat Transfer (Proceedings of Conference organized by ASME at Boulder, Colorado 1961). Part II, 439—446.
- 68a. Spalding D. B., Chi S. W., The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer. J. Fluid Mech. 18, 117—143 (1964).
69. Spence D. A., Velocity and enthalpy distributions in the compressible turbulent boundary layer on a flat plate. J. Fluid Mech. 8, 368—387 (1960).

70. Spence D. A., Some applications of Crocco's integral for the turbulent boundary layer. Proc. 1960 Heat Transfer Fluid Mech. Inst., Stanford Univ. 1960, 62—76.
71. Spence D. A., The growth of compressible turbulent boundary layers on isothermal and adiabatic walls. ARC RM 3191 (1961).
72. Stratford B. S., Beavers G. S., The calculation of the compressible turbulent boundary layer in an arbitrary pressure gradient.—A correlation of certain previous methods. ARC RM 3207 (1959).
73. Taylor G. I., Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind. ARC RM 272 (1919).
74. Taylor G. I., The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Добавление А. Fage'a и V. M. Falkner'a. Proc. Roy. Soc. 135, 685 (1932); см. также Phil. Trans. A 215, 1 (1915).
75. Tuckeg M., Approximate turbulent boundary layer development in plane compressible flow along thermally insulated surfaces with application to supersonic-tunnel contour correction. NACA TN 2045, 78 (1950).
76. Walz A., Näherungstheorie für kompressible turbulente Grenzschichten. ZAMM Sonderheft 36, 50—56 (1956).
77. Walz A., Beitrag zur Näherungstheorie kompressibler turbulenter Grenzschichten. DVL-Bericht № 84 (1959). Вторая часть: Berechnung der universellen Funktionen und Beispiele. DVL-Bericht № 136 (1960).
78. Wilson R. E., Turbulent boundary-layer characteristics at supersonic speeds. Theory and experiment. JAS 17, 585—594 (1950).
79. Winkler E. M., Investigation of flat plate hypersonic turbulent boundary layers with heat transfer. J. Appl. Mech. 83, 323—329 (1961).
80. Winkler E. M., Cha M. H., Investigation of flat plate hypersonic turbulent boundary layers with heat transfer at a Mach number of 5,2 (U). NAVORD Rep. 6631 (1959).
81. Young A. D., The drag effects of roughness at high subcritical speeds. J. Roy. Aero. Soc. 18, 534 (1950).
82. Bertram M. H., Compressible turbulent boundary layers. Symposium Langley Research Center, NASA SP-216 (1969).
83. Winter K. G., Rotta J. C., Smith K. G., Studies of the turbulent boundary layer on a waisted body of revolution in subsonic and supersonic flow. Aeronautical Research Council, RM № 3633 (1970).

Г л а в а XXIV

Свободная турбулентность

§ 1. Предварительные замечания

До сих пор мы рассматривали исключительно турбулентное течение вдоль твердых стенок. Переядем теперь к так называемой *свободной турбулентности*, под которой подразумеваются такие турбулентные течения, которые не ограничены какими-либо стенками. Свободная турбулентность наблюдается в следующих трех случаях (рис. 24.1): 1) на свободной границе струи, 2) в свободной струе и 3) в спутном течении за движущимся телом (в «следе» или «тени»).

Свободной границей струи называется поверхность соприкосновения двух потоков жидкости, движущихся в одном и том же направлении, но с разными скоростями. Такая поверхность разрыва скоростей неустойчива, и поэтому вниз по течению от первой точки соприкосновения обоих потоков возникает зона турбулентного перемешивания, ширина которой возрастает в направлении течения (рис. 24.1, а).

Свободная струя возникает при истечении жидкости из отверстия или насадки (рис. 24.1, б). Свободная струя вскоре после выхода из отверстия становится турбулентной (за исключением случая очень малой скорости истечения). Вследствие турбулентности свободная струя частично смешивается с окружающей ее покоящейся жидкостью. Кроме того, струя увлекает за собой граничащую с ней жидкость, и поэтому количество жидкости, протекающей через поперечное сечение струи, увеличивается по мере удаления от отверстия. При этом струя по мере удаления от отверстия расширяется, но одновременно уменьшается ее скорость; однако полный импульс струи остается постоянным. Сводное изложение всех проблем струйного движения опубликовал в недавнее время Бай Ши-и [19].

Спутное течение возникает позади тела, движущегося в покоящейся жидкости, а след (тень) образуется позади неподвижного тела, обтекаемого жидкостью (рис. 24.1, в). В следе позади неподвижного тела скорость меньше,

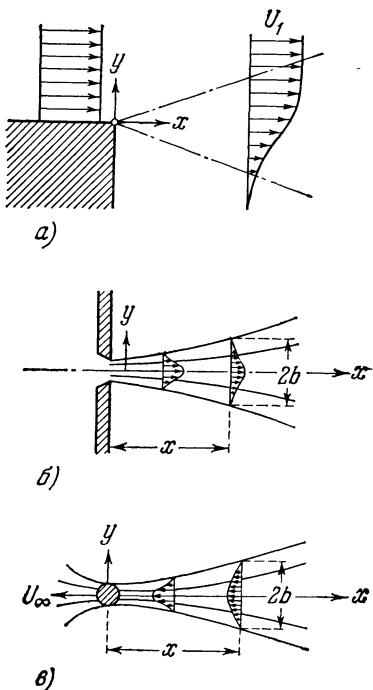


Рис. 24.1. Свободная турбулентность:
а) свободная граница струи; б) свободная струя; в) спутное течение (след).

чем во внешнем течении. Такое понижение скорости означает, что здесь происходит потеря импульса, причиной которой является сопротивление тела. Ширина следа возрастает по мере увеличения расстояния от тела, но зато разность между скоростями внешнего течения и течения в следе тем меньше, чем больше расстояние от тела.

В качественном отношении картина всех этих течений такая же, как и в ламинарном случае (главы IX и XI), но в количественном отношении она сильно отличается от соответствующих ламинарных течений вследствие турбулентного трения, которое во много раз больше обычного трения. Свободная турбулентность значительно доступнее для теоретического исследования, чем пристеночная турбулентность, так как при свободной турбулентности кажущееся (турбулентное) трение во много раз больше обычного (ламинарного) трения во всей области течения. Это обстоятельство позволяет при свободной турбулентности полностью пренебрегать ламинарным трением, между тем как при турбулентном течении вдоль стенок ламинарное трение в непосредственной близости от стенок (в ламинарном подслое) всегда должно учитываться, что влечет за собой большие вычислительные трудности.

Все турбулентные течения без ограничивающих стенок обладают свойствами, характерными для пограничного слоя, т. е. протяжение таких течений в поперечном направлении всегда мало по сравнению с протяжением в продольном направлении и, кроме того, в поперечном направлении всегда имеет место значительный градиент скорости. Следовательно, для расчета свободной турбулентности мы можем использовать дифференциальные уравнения пограничного слоя, которые для плоской задачи имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (24.2)$$

причем τ означает касательное напряжение, обусловленное турбулентным (кажущимся) трением. В уравнении движения член, зависящий от давления, опущен, так как во всех случаях свободной турбулентности давление можно считать в первом приближении постоянным. Впрочем, в следе позади неподвижного тела давление становится постоянным только на некотором расстоянии от тела.

Для того чтобы получить возможность проинтегрировать систему уравнений (24.1) и (24.2), необходимо связать турбулентное касательное напряжение с величинами, характеризующими основное движение. До настоящего времени это возможно только посредством полуэмпирических формул, подробно рассмотренных в главе XIX. Мы можем выбрать либо формулу Прандтля (19.7) для длины пути перемешивания, т. е. формулу

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (24.3)$$

либо ее обобщение

$$\tau = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2} \quad (24.4)$$

[формула (19.8)], где длина пути перемешивания l , а также длина l_1 представляют собой функции только точки, причем выбор этих функций должен производиться в каждом отдельном случае в соответствии с условиями рассматриваемой задачи. Мы можем выбрать также формулу Прандтля (19.10) для коэффициента турбулентного обмена, т. е. формулу

$$\tau = A \frac{\partial u}{\partial y} = \rho k_1 b (u_{\max} - u_{\min}) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (24.5)$$

где b означает ширину зоны перемешивания, x_1 есть эмпирическая постоянная, а

$$A = \rho \varepsilon = \rho x_1 b (u_{\max} - u_{\min}) \quad (24.5a)$$

есть коэффициент турбулентного обмена, который принимается постоянным по всей ширине зоны перемешивания и, следовательно, зависит только от x^1). Можно выбрать также формулу Кармана (19.19) или формулу Тейлора (19.11).

Результаты, получаемые при применении формул (24.3), (24.4) и (24.5), отличаются один от другого сравнительно мало. Наилучшее совпадение с экспериментом дает формула (24.5), которая одновременно приводит и к более удобному интегрированию. Поэтому мы будем предпочитать пользоваться этой формулой. Впрочем, некоторые случаи мы рассмотрим на основе формул (24.3) и (24.4), во-первых, для того, чтобы показать, насколько отличаются один от другого результаты, получаемые посредством разных формул, а во-вторых, потому, что формула (24.3) играет очень большую роль при расчете течения в трубах. В частности, при исследовании течения в трубах именно эта формула дала возможность вывести универсальный логарифмический закон распределения скоростей.

§ 2. Оценка увеличения ширины зоны перемешивания и уменьшения скорости свободных струй

Прежде чем приступить к интегрированию системы уравнений (24.1) и (24.2) для некоторых случаев свободной турбулентности, найдем оценки, позволяющие судить о законе возрастания ширины зоны перемешивания и о законе уменьшения «глубины» (максимальной ординаты) профиля скоростей по мере увеличения расстояния x . Необходимые вычисления выполним, следуя Л. Прандтлю [21].

Для решения задачи о турбулентной струе и спутном турбулентном течении (следе) позади тела целесообразно считать длину пути перемещения l пропорциональной ширине струи b , т. е. принять, что

$$\frac{l}{b} = \beta = \text{const.} \quad (24.6)$$

Далее, оправдало себя следующее предположение: приращение во времени ширины b зоны перемешивания пропорционально поперечной пульсации v' скорости, т. е.

$$\frac{Db}{Dt} \sim v',$$

где D/Dt есть субстанциальная производная, следовательно, в стационарном случае

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Согласно оценке (19.6), полученной в § 2 главы XIX,

$$v' \sim l \frac{\partial u}{\partial y},$$

¹⁾ Предположение о приближенном постоянстве коэффициента турбулентного обмена в направлении оси y , т. е. по ширине зоны перемешивания, впервые обсуждено Г. Райхардтом. В своей критике феноменологической теории турбулентности Г. Райхардт [23] сравнил между собой результаты, вытекающие из предположений о постоянстве коэффициента турбулентного обмена [$A_\tau(y) = \text{const}$], о постоянстве длины пути перемешивания [$l(y) = \text{const}$] и о постоянстве переноса импульса [$\Lambda(y) = \text{const}$]. См. также § 4 настоящей главы.

поэтому

$$\frac{Db}{Dt} \sim l \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Наконец, среднее значение величины $\partial u / \partial y$ на половине ширины струи равно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{ср}} = \text{число} \cdot \frac{u_{\max}}{b},$$

следовательно,

$$\frac{Db}{Dt} = \text{число} \cdot \frac{l}{b} u_{\max} = \text{число} \cdot \beta u_{\max}. \quad (24.7)$$

Свободная граница струи. Применим полученные выше соотношения для оценки возрастания ширины зоны перемешивания, возникающей при соприкосновении двух потоков, по мере увеличения расстояния x . Для свободной границы струи мы имеем

$$\frac{Db}{Dt} \sim u_{\max} \frac{db}{dx}. \quad (24.8)$$

Сравнив соотношения (24.8) и (24.7), мы получим

$$\frac{db}{dx} = \text{число} \cdot \frac{l}{b} = \text{const},$$

следовательно,

$$b = \text{число} \cdot x.$$

Таким образом, ширина зоны перемешивания, возникающей при соприкосновении двух потоков жидкости, пропорциональна расстоянию x от точки первого соприкосновения обоих потоков. В полученное соотношение вообще следует ввести постоянную интегрирования, однако при соответствующем выборе начала координат ее можно сделать равной нулю.

Плоская и круглая струи. Соотношение (24.8) применимо также к плоской и круглой струям, причем теперь под u_{\max} надо понимать скорость в середине струи. Следовательно, и для круглой и для плоской струи

$$b = \text{число} \cdot x. \quad (24.9)$$

Для определения связи между u_{\max} и x воспользуемся теоремой импульсов. Так как давление в струе постоянно, то, проинтегрировав составляющую импульса в направлении x по всему поперечному сечению струи, мы получим величину, не зависящую от x . Таким образом,

$$J = \rho \int u^2 dF = \text{const}.$$

Обозначив через J' импульс массы жидкости, проходящей в единицу времени через поперечное сечение *плоской струи* высотою в единицу, мы найдем

$$J' = \text{число} \cdot \rho u_{\max}^2 b,$$

следовательно,

$$u_{\max} = \text{число} \cdot b^{-1/2} \sqrt{\frac{J'}{\rho}}.$$

или, после замены b его выражением (24.9),

$$u_{\max} = \text{число} \cdot \frac{1}{\sqrt{Vx}} \sqrt{\frac{J'}{\rho}} \quad (\text{плоская струя}). \quad (24.10)$$

Для *круглой струи* импульс равен

$$J = \text{число} \cdot \rho u_{\max}^2 b^2,$$

а потому

$$u_{\max} = \text{число} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{\frac{J}{\rho}}$$

или, после замены b его выражением (24.9),

$$u_{\max} = \text{число} \cdot \frac{1}{x} \sqrt{\frac{J}{\rho}} \quad (\text{круглая струя}). \quad (24.11)$$

Плоский след и след за телом вращения. В случае следа вместо соотношения (24.8) следует взять

$$\frac{Db}{Dt} = U_{\infty} \frac{db}{dx},$$

а вместо соотношения (24.7) —

$$\frac{Db}{Dt} = \text{число} \cdot \frac{l}{b} u_1 = \text{число} \cdot \beta u_1,$$

где $u_1 = U_{\infty}$ — u есть скорость течения в следе. Приравняв оба выражения Db/Dt , мы получим для плоского следа и следа за телом вращения

$$U_{\infty} \frac{db}{dx} \sim \frac{l}{b} u_1 = \beta u_1,$$

или

$$\frac{db}{dx} \sim \beta \frac{u_1}{U_{\infty}} \quad (\text{плоский след и след за телом вращения}). \quad (24.12)$$

В задаче о следе (или о спутном течении) вычисление импульса производится несколько иначе, чем для струи, так как теперь импульс непосредственно связан с сопротивлением тела W . Проведем контрольную поверхность далеко позади тела, там, где статическое давление совпадает с давлением невозмущенного течения; тогда для импульса мы получим

$$J = W = \rho \int u (U_{\infty} - u) dF$$

[см. равенство (9.40)]. На большом расстоянии позади тела скорость $u_1 = U_{\infty} - u$ мала по сравнению с U_{∞} , поэтому можно принять, что там

$$u (U_{\infty} - u) = (U_{\infty} - u_1) u_1 \approx U_{\infty} u_1.$$

Таким образом, для плоского и круглого спутных течений, а также для плоского следа и следа за телом вращения мы имеем

$$J = W \approx \rho U_{\infty} \int u_1 dF. \quad (24.13)$$

Плоское спутное течение (плоский след). Сопротивление цилиндрического тела высотой h и диаметром d равно

$$W = c_W \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 h d,$$

а поток импульса в спутном течении или следе, согласно формуле (24.13), пропорционален

$$J \sim \rho U_{\infty} u_1 h b.$$

Приравняв значения W и J , мы получим

$$\frac{u_1}{U_{\infty}} \sim \frac{c_W d}{2b}. \quad (24.14)$$

Внеся это выражение u_1/U_{∞} в соотношение (24.12), определяющее

приращение ширины спутного течения (следа), мы будем иметь

$$2b \frac{db}{dx} \sim \beta c_w d,$$

или

$$b \sim (\beta x c_w d)^{1/2} \quad (\text{плоское спутное течение}). \quad (24.15)$$

Подставив найденное выражение b в соотношение (24.14), мы получим

$$\frac{u_1}{U_\infty} \sim \left(\frac{c_w d}{\beta x} \right)^{1/2} \quad (\text{плоское спутное течение}). \quad (24.16)$$

Следовательно, ширина плоского спутного течения (следа) увеличивается пропорционально \sqrt{x} , а скорость уменьшается пропорционально $1/\sqrt{x}$.

С п у т н о е т е ч е н и е (с л е д) з а т е л о м в р а щ е н и я. Сопротивление тела с лобовой площадью F равно

$$W = c_w F \frac{\rho}{2} U_\infty^2,$$

а поток импульса в спутном течении (следе), в соответствии с формулой (24.13), пропорционален

$$J \sim \rho U_\infty u_1 b^2.$$

Приравняв W и J , мы получим

$$\frac{u_1}{U_\infty} \sim \frac{c_w F}{b^2}. \quad (24.17)$$

Далее, подставив это выражение u_1/U_∞ в соотношение (24.12), мы найдем для приращения ширины b оценку

$$b^2 \frac{db}{dx} \sim \beta c_w F,$$

откуда

$$b \sim (\beta c_w F x)^{1/3} \quad (\text{спутное течение за телом вращения}). \quad (24.18)$$

Наконец, внеся это выражение b в соотношение (24.17), мы найдем, что глубина впадины, образуемой профилем скоростей, связана с расстоянием x соотношением

$$\frac{u_1}{U_\infty} \sim \left(\frac{c_w F}{\beta^2 x^2} \right)^{1/3} \quad (\text{спутное течение за телом вращения}). \quad (24.19)$$

Таким образом, для спутного течения (следа) за телом вращения ширина

Т а б л и ц а 24.1. Степенные законы увеличения ширины и уменьшения скорости течения с увеличением расстояния x для различных случаев свободной турбулентности

	Ламинарное течение		Турбулентное течение	
	ширина b	скорость u_{\max} или u_1	ширина b	скорость u_{\max} или u_1
Свободная граница струи	$x^{1/2}$	x^0	x	x^0
Плоская струя	$x^{2/3}$	$x^{-1/3}$	x	$x^{-1/2}$
Круглая струя	x	x^{-1}	x	x^{-1}
Плоское спутное течение (плоский след)	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$
Спутное течение (след) за телом вращения	$x^{1/2}$	x^{-1}	$x^{1/3}$	$x^{-2/3}$

возрастает пропорционально $\sqrt[3]{x}$, а скорость уменьшается пропорционально $1/\sqrt[3]{x^2}$.

Степенные законы изменения ширины потока и скорости для рассмотренных случаев свободной турбулентности сопоставлены в таблице 24.1, причем для сравнения указаны также соответствующие законы для аналогичных ламинарных течений, рассмотренных в главах IX и XI.

§ 3. Примеры

Оценки, полученные в предыдущем параграфе, дают хорошее представление об основных особенностях турбулентных течений без ограничивающих стенок. Рассмотрим теперь некоторые примеры более подробно и при этом полностью вычислим из уравнения движения распределение скоростей. Для этой цели необходимо присоединить к уравнению движения одну из формул (24.3) — (24.5), определяющих турбулентное касательное напряжение. Примеры, на которых мы остановимся, характерны тем, что для них все профили скоростей аффинны между собой, т. е. профили скоростей, получающиеся на различных расстояниях x от начальной точки, могут быть приведены в совпадение один с другим путем соответствующего выбора масштабов для скорости и ширины.

1. Развитие во времени слоя раздела. В качестве первого примера рассмотрим развитие во времени слоя раздела. Изложение будем вести, следуя Прандтлю [21]. Пусть в момент времени $t = 0$ два потока жидкости, движущиеся в одну и ту же сторону со скоростями U_1 и U_2 , приходят в соприкосновение один с другим вдоль прямой $y = 0$ (рис. 24.2). Слой раздела, на котором происходит скачок скорости, неустойчив. Вследствие турбулентного перемешивания он превращается в слой с непрерывным изменением скорости, причем ширина этого слоя с течением времени возрастает. Возникает нестационарное плоское слоистое течение, для которого

$$u = u(y, t), \quad v = 0. \quad (24.20)$$

В уравнении (24.1) конвективные члены отпадают. Приняв, что касательное напряжение определяется формулой Прандтля (24.3) для длины пути перемешивания, мы получим из уравнения (24.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (24.21)$$

Ширина b зоны перемешивания увеличивается с течением времени, следовательно, $b = b(t)$. Длину l пути перемешивания будем считать, как и прежде, пропорциональной ширине b , т. е. примем, что $l = \beta b$. Предположение об аффинности профилей скоростей требует соблюдения пропорциональности

$$u \sim f(\eta),$$

где $\eta = y/b$, а $b \sim t^p$. Показатель степени p , определяющий приращение ширины зоны перемешивания с течением времени, можно найти из условия, что в уравнении (24.21) член, зависящий от ускорения, и член, зависящий от трения, должны быть пропорциональны одинаковым степеням t . Левая

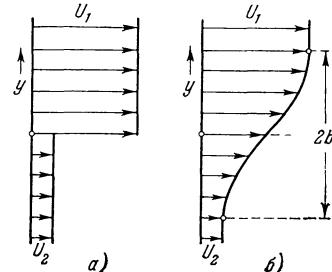


Рис. 24.2. Развитие во времени слоя раздела двух потоков: а) начальное состояние ($t = 0$); б) более позднее состояние. По Прандтлю [21].

часть уравнения (24.21) пропорциональна t^{-1} , в то время как правая часть пропорциональна

$$t^{2p-3p} = t^{-p}.$$

Следовательно, $p = 1$.

Таким образом, при решении задачи мы будем исходить из допущений, что

$$b = Bt, \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{y}{Bt}.$$

Скорость u целесообразнее всего искать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (U_1 + U_2) + \frac{1}{2} (U_1 - U_2) f(\eta), \\ \text{или} \quad u &= U_m + Af(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (24.22)$$

если для сокращения записи ввести обозначения

$$U_m = \frac{U_1 + U_2}{2}, \quad A = \frac{U_1 - U_2}{2}.$$

Для того чтобы на краях зоны перемешивания, т. е. при $y = \pm b$, скорость u принимала значения U_1 и U_2 , необходимо, чтобы при $\eta = \pm 1$ функция f имела значения $f = \pm 1$.

Внеся выражение (24.22) в соотношение (24.21), мы получим для определения $f(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$\eta f' + \frac{\beta^2 A}{B} f' f'' = 0.$$

Одним из решений этого уравнения является $f' = 0$, т. е. $f = \text{const}$. Такое решение соответствует неинтересному случаю постоянной скорости по ширине зоны перемешивания. Если же $f' \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения на f' мы будем иметь

$$\eta + \frac{\beta^2 A}{B} f'' = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, мы получим

$$f(\eta) = c_0 \eta^3 + c_1 \eta,$$

где

$$c_0 = -\frac{B}{6\beta^2 A}.$$

Полученное решение уже удовлетворяет условию $f(0) = 0$. Постоянные c_0 и c_1 определяются из условия, что $f(\eta) = 1$ и $f'(\eta) = 0$ при $y = b$, т. е. при $\eta = 1$. Следовательно,

$$c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{3}{2}.$$

Внеся найденное выражение $f(\eta)$ в равенство (24.22), мы получим решение в окончательном виде:

$$u(y, t) = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) + \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right], \quad (24.23)$$

причем

$$b = \frac{3}{2} \beta^2 (U_1 - U_2) t. \quad (24.24)$$

Распределение скоростей (24.23) изображено на рис. 24.2. Это распределение обладает примечательным свойством: скорость в зоне перемешивания переходит в скорость невозмущенного течения не асимптотически, а на конечном расстоянии $y = b$ от прямой $y = 0$, причем в точке смыкания вторая производная $\partial^2 u / \partial y^2$ претерпевает разрыв. Такого рода неасимптотическое смыкание отдельных частей профилей скоростей является общим свойством всех решений, получаемых при применении формулы Прандтля (24.3), определяющей турбулентное касательное напряжение, и представляет собой своеобразное нарушение изящества этой формулы, отпадающее при переходе к более точным формулам (24.4) или (24.5).

Величина $\beta = l/b$ является единственной эмпирической постоянной полученного решения. Она может быть определена только из опыта.

2. Свободная граница струи. С только что разобранной задачей тесно связана задача о свободной границе струи. Рассмотрим более общий случай, чем изображенный на рис. 24.1, *a*, а именно предположим, что в точке $x = 0$ приходят в соприкосновение два параллельных потока, имеющие постоянные скорости U_1 и U_2 , причем $U_1 > U_2$. Ниже по течению от сечения $x = 0$ образуется зона перемешивания, ширина которой возрастает пропорционально расстоянию x (рис. 24.1, *a*). Впервые эту задачу решил В. Толмин [41] при помощи формулы Прандтля (24.3) для длины пути перемешивания. Здесь мы приведем более простое в отношении вычислений решение Г. Гёртлера [12], полученное на основе формулы Прандтля (24.5) для коэффициента турбулентного обмена. Так как кажущаяся кинематическая вязкость ε не зависит от y , то из уравнения (24.1) и соотношения (24.5) следует, что

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (24.25)$$

Подставив в формулу (24.5а) $b = cx$, мы найдем, что в рассматриваемом случае кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = \kappa_1 c x (U_1 - U_2). \quad (24.26)$$

Вследствие аффинности профилей скоростей составляющие скорости u и v суть функции от y/x . Положив

$$\xi = \frac{y}{x},$$

мы сумеем проинтегрировать уравнение неразрывности путем введения функции тока

$$\psi = xUF(\xi),$$

где

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2}.$$

При такой функции тока составляющая скорости u равна

$$u = U\sigma F'(\xi).$$

Внеся это выражение u в уравнение (24.25), мы получим для определения $F(\xi)$ дифференциальное уравнение

$$F''' + 2\sigma FF'' = 0, \quad (24.27)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\kappa_1 c \lambda}} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}.$$

Границными условиями будут

$$\sigma F'(\xi) = 1 \pm \lambda \quad \text{при} \quad \xi = \pm \infty.$$

Дифференциальное уравнение (24.27) совпадает с дифференциальным уравнением (7.28), полученным Г. Блазиусом для продольного обтекания плоской пластины, однако теперь мы имеем другие граничные условия. Г. Гёртлер решил уравнение (24.27) путем разложения $\sigma F(\xi)$ в ряд

$$\sigma F(\xi) = F_0(\xi) + \lambda F_1(\xi) + \lambda^2 F_2(\xi) + \dots, \quad (24.28)$$

где $F_0 = \xi$. Внеся выражение (24.28) в уравнение (24.27) и расположив все члены по степеням λ , мы получим систему дифференциальных уравнений для определения функций $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$, \dots , причем для решения каждого последующего уравнения необходимо проинтегрировать предыдущее уравнение. Первое уравнение этой системы имеет вид

$$F_1'' + 2\xi F_1' = 0, \quad (24.29)$$

причем граничными условиями будут

$$F_1'(\xi) = \pm 1 \quad \text{при } \xi = \pm\infty.$$

Уравнение (24.28) имеет своим решением интеграл ошибок

$$F_1(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\xi} e^{-z^2} dz = \operatorname{erf} \xi.$$

Остальные члены ряда (24.28) не вносят какого-либо существенного изменения в полученное решение.

Таким образом, мы имеем следующее решение:

$$u = \frac{U_1 + U_2}{2} \left(1 + \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \operatorname{erf} \xi \right), \quad (24.30)$$

причем

$$\xi = \sigma \frac{y}{x}.$$

На рис. 24.3 показано сравнение теоретического решения для случая, когда $U_2 = 0$, с измерениями Г. Райхардта [23]. Совпадение получается очень хорошее. Величина σ является единственной эмпирической постоянной, остающейся свободной при теоретическом решении; она подлежит определению из измерений. Как показали измерения Г. Райхардта, ширина $b_{0,1}$ зоны перемешивания между сечениями, в которых $(u/U_1)^2 = 0,1$ (чему соответствует значение $\xi = -0,345$) и $0,9$ ($\xi = 0,975$), равна

$$b_{0,1} = 0,098x.$$

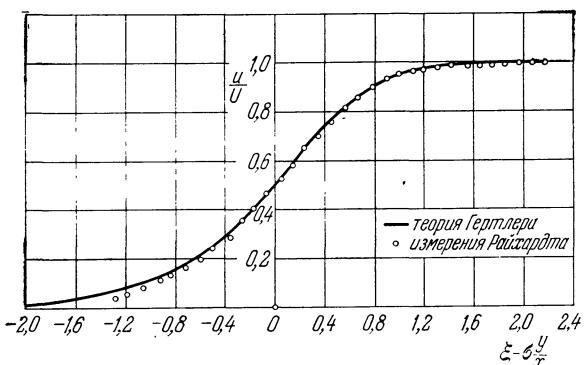


Рис. 24.3. Распределение скоростей в зоне перемешивания свободной границы струи; $\sigma = 13,5$.

Отсюда получается, что $\sigma = 13,5$. Следовательно, кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = 0,014 b_{0,1} U_1.$$

В. Шаблевский [36], [37], [38] распространил эти результаты, а также результаты, изложенные в п. 1 настоящего параграфа, на такие случаи, в которых смешивающиеся струи имеют сильно отличающиеся плотности, но мало различающиеся скорости. Выяснилось, что ширина зоны перемешивания

мало зависит от величины разности плотностей. Однако с увеличением разности плотностей положение зоны перемешивания смещается в сторону более легкой струи. Эти результаты могут быть применены также к случаю смешения двух струй с различной химической концентрацией. Свободная граница сверхзвуковой струи экспериментально исследована П. Б. Гудерумом, Г. П. Вудом и М. Дж. Бривуртом [11]. Было обнаружено, что в этом случае зона перемешивания несколько уже, а турбулентность несколько меньше, чем при несжимаемом течении.

3. Плоское спутное течение позади изолированного тела (плоский след). Плоское спутное течение теоретически впервые было исследовано Г. Шлихтингом [29] в его гётtingенской диссертации на основе формулы Прандтля (24.3) для длины пути перемешивания. Позднее Г. Райхардт [23] и Г. Гёртлер [12] получили решение на основе формулы Прандтля для коэффициента турбулентного обмена. Приведем и то и другое решение, чтобы показать, что оба они дают почти одинаковые результаты.

В спутном течении профили скоростей аффинны между собой лишь на большом расстоянии позади тела; на малых же расстояниях аффинность профилей не соблюдается. Мы ограничимся рассмотрением течения только на больших расстояниях x позади тела, где скорость спутного течения

$$u_1 = U_\infty - u \quad (24.31)$$

мала по сравнению со скоростью U_∞ набегающего потока. На большом расстоянии позади тела статическое давление в спутном течении равно статическому давлению в невозмущенном течении; поэтому теорема импульсов, примененная к контрольной поверхности, заключающей в себе рассматриваемое тело, дает для сопротивления цилиндра высотой h величину

$$W = h\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u (U_\infty - u) dy = h\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1 (U_\infty - u_1) dy.$$

Если пренебречь малой величиной u_1^2 , то мы получим

$$W = h\rho U_\infty \int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1 dy$$

или, имея в виду, что

$$W = c_w d h \frac{\rho}{2} U_\infty^2,$$

где d есть толщина цилиндра,

$$\int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1 dy = \frac{1}{2} c_w d U_\infty. \quad (24.32)$$

Ширина b и скорость u_1 спутного течения изменяются по мере удаления от тела, как мы уже выяснили в § 2 настоящей главы, по степенным законам

$$b \sim x^{1/2} \quad \text{и} \quad u_1 \sim x^{-1/2}.$$

Решение на основе формулы (24.3). Внеся соответствующее выражение в уравнение (24.1) и имея в виду, что член $v \frac{\partial u}{\partial y}$ мал, мы получим

$$-U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = 2l^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (24.33)$$

Длину пути перемешивания будем считать постоянной по ширине b спутного течения и, кроме того, пропорциональной b , т. е. примем, что

$$l = \beta b(x).$$

Поскольку предполагается, что профили скоростей аффинны между собой, введем в качестве независимой переменной величину

$$\eta = \frac{y}{b}.$$

Далее, в соответствии с указанными выше степенными законами изменения ширины спутного течения и глубины впадины профиля скоростей примем, что

$$b = B (c_w dx)^{1/2}, \quad (24.34)$$

$$u_1 = U_\infty \left(\frac{x}{c_w d} \right)^{-1/2} f(\eta). \quad (24.35)$$

Внеся эти выражения b и u_1 в уравнение (24.33), мы получим для определения $f(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2} (f + \eta f') = \frac{2\beta^2}{B} f' f''$$

с граничными условиями

$$u_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b,$$

т. е.

$$f = f' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1.$$

Проинтегрировав это уравнение один раз, мы найдем

$$\frac{1}{2} \eta f = \frac{\beta^2}{B} f'^2,$$

причем постоянная интегрирования равна нулю вследствие граничных условий. Проинтегрировав второй раз, мы получим

$$f = \frac{1}{9} \frac{B}{2\beta^2} (1 - \eta^{3/2})^2.$$

Внеся принятые для u_1 выражение (24.35) в интеграл (24.32) и имея в виду, что

$$\int_{-1}^{+1} (1 - \eta^{3/2})^2 d\eta = \frac{9}{10},$$

мы получим для постоянной B значение

$$B = \sqrt{10} \beta.$$

Следовательно, окончательным решением будет

$$b = \sqrt{10} \beta (x c_w d)^{1/2} \quad (24.36)$$

и

$$\frac{u_1}{U_\infty} = \frac{\sqrt{10}}{18\beta} \left(\frac{x}{c_w d} \right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{3/2} \right]^2. \quad (24.37)$$

Таким образом, формула (24.3) привела опять, как и при исследовании развития во времени слоя раздела двух потоков, к конечной ширине зоны перемешивания. И теперь на границе зоны перемешивания, т. е. при $y = b$, кривизна профиля скоростей изменяется прерывно. В середине же зоны перемешивания, т. е. при $y = 0$, производная $\partial^2 u / \partial y^2$ имеет бесконечно большое значение, следовательно, здесь профиль скоростей имеет точку заострения.

На рис. 24.4 показано сравнение теоретической кривой 1, соответствующей уравнению (24.37), с результатами измерений Г. Шлихтинга [29] позади круглого цилиндра. Совпадение получается очень хорошее. Единственная

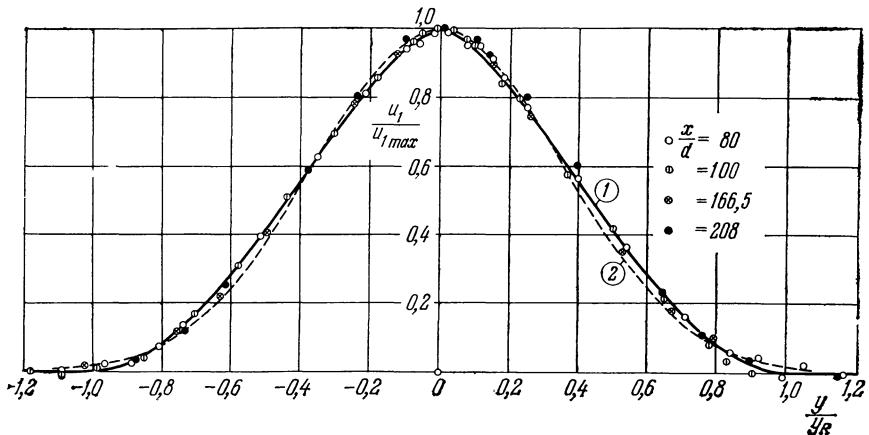


Рис. 24.4. Распределение скоростей в плоском следе позади круглого цилиндра; сравнение теоретических кривых (1) [уравнение (24.37)] и (2) [уравнение (24.39)] с измерениями Шлихтинга [29].

свободная постоянная β , входящая в формулы (24.36) и (24.37), по-прежнему должна быть определена из опыта. В частности, для этого можно воспользоваться измерениями Г. Райхардта [23] и Г. Шлихтинга [29], изображенными

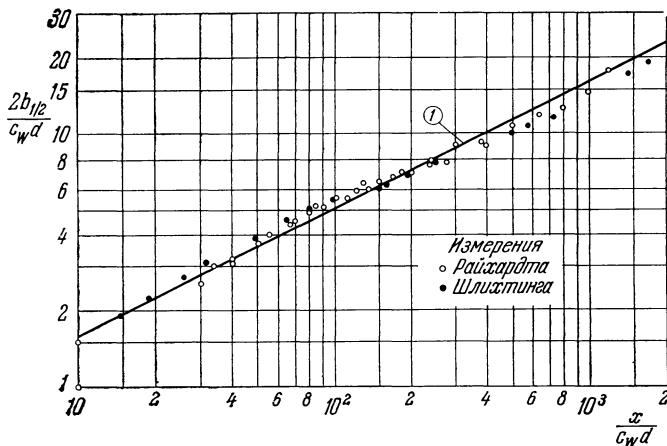


Рис. 24.5. Увеличение ширины плоского следа позади круглого цилиндра по мере удаления от последнего. Кривая (1) соответствует формуле $b_{1/2} = \frac{1}{4}(xc_w d)^{1/2}$.

на рис. 24.5 и показывающими зависимость ширины спутного течения позади круглых цилиндров разных диаметров d от расстояния x . Из этих измерений следует, что

$$b_{1/2} = \frac{1}{4} (xc_w d)^{1/2},$$

где $b_{1/2}$ есть половина ширины впадины профиля скоростей на половине глубины этой впадины. Так как $b_{1/2} = 0,441b$, то

$$0,441 \sqrt{10} \beta = \frac{1}{4},$$

откуда

$$\beta = \frac{l}{b} = 0,18.$$

Полученное решение представляет собой приближенное решение для большого расстояния от тела; согласно измерениям, оно пригодно только для $x/c_{Wd} > 50$. Для меньших расстояний в выражение скорости спутного течения следует ввести дополнительные члены, пропорциональные x^{-1} и $x^{-3/2}$.

Решение на основе формулы (24.5). В этом случае замена τ в уравнении (24.1) его значением из формулы (24.5) приводит к уравнению

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (24.38)$$

Каждая кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = \kappa_1 u_{1m} b = \varepsilon_0,$$

т. е. постоянна. Следовательно, для u_1 получается такое же дифференциальное уравнение, как и при ламинарном спутном течении [см. уравнение (9.44)], с той только разницей, что теперь вместо обычной кинематической вязкости ν в уравнение входит каждая кинематическая вязкость ε_0 . Поэтому мы можем использовать прежнее решение. Положив

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\varepsilon_0 x}},$$

мы найдем из уравнений (9.45) и (9.48), что

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{4} \eta^2 \right).$$

Постоянная интегрирования C определяется из соотношения (24.32) и равна

$$C = \frac{c_W}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty d}{\varepsilon_0}}.$$

Таким образом, окончательно мы имеем

$$\frac{u_1}{U_\infty} = \frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty c_{Wd}}{\varepsilon_0}} \left(\frac{x}{c_{Wd}} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{4} \eta^2 \right). \quad (24.39)$$

Половина ширины впадины профиля скоростей на половине глубины этой впадины равна

$$b_{1/2} = 1,675 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{U_\infty c_{Wd}}} (x c_{Wd})^{1/2}$$

Сравнив это значение $b_{1/2}$ с указанным выше экспериментальным значением, мы получим

$$\frac{\varepsilon_0}{U_\infty c_{Wd}} = 0,0222.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$U_\infty c_{Wd} = 2,11 \cdot 2 b_{1/2} u_{1m},$$

мы найдем для эмпирической постоянной ε_0 значение

$$\varepsilon_0 = 0,047 \cdot 2 b_{1/2} u_{1m}.$$

Таким образом, согласно решению на основе формулы Прандтля (24.5), распределение скоростей по ширине спутного течения представляется функцией ошибок. Решение (24.39) изображено на рис. 24.4 в виде кривой 2. Мы видим, что разница по сравнению с решением (24.37) очень незначительна.

В. Толмин [42] рассчитал плоское спутное течение, взяв для турбулентного касательного напряжения формулу Кармана (19.19). При выполнении этого расчета В. Толмину пришлось ввести некоторые дополнительные допущения в окрестности точки перегиба профиля скоростей, где производная $\partial^2 u / \partial y^2$ принимает нулевое значение. Тщательные исследования турбулентных пульсаций в следе позади круглого цилиндра выполнены А. А. Таунсендом [43] при числах Рейнольдса, начиная примерно с 8000. Выяснилось, что позади цилиндра, на расстояниях, равных примерно от 160 до 180 диаметров цилиндра, турбулентное течение развивается еще не на всей ширине следа. Полная турбулентность возникает только в ядре следа, по краям же течение получается временами ламинарным, временами турбулентным.

Измерения в спутном течении позади симметричного крылового профиля выполнены Г. Муттреем [18].

Расчет осесимметричного спутного течения выполнила Л. М. Свэн [35], причем для турбулентного касательного напряжения она взяла формулу (24.3). Для распределения скоростей получилось опять уравнение (24.37), т. е. такое же уравнение, как и при плоском спутном течении. Для ширины же спутного течения и скорости в середине струи получились иные степенные законы, а именно:

$$b \sim x^{1/3} \quad \text{и} \quad u_{1 \max} \sim x^{-2/3}$$

(см. таблицу 24.1 на стр. 654).

До самого последнего времени считалось твердо установленным, что в спутном течении распределение скоростей далеко позади тела не зависит от формы тела и поэтому носит универсальный характер. Это представление было поставлено под сомнение после выполненных Г. Райхардтом и Р. Эрмсхаусом [25] измерений скоростей позади тела вращения. Эти измерения показали, что позади сплющеных тел (диск, конус с отношением диаметра к высоте 1 : 1) профили скоростей получаются более полными, чем позади тонких тел (например, позади конуса с отношением диаметра к высоте от 1 : 4 до 1 : 6). В то же время профили скоростей на различных расстояниях позади тела в любом случае остаются подобными один другому. В плоском спутном течении такого рода различия не наблюдаются.

4. Спутное течение позади решетки из стержней. Со спутным течением позади изолированного тела весьма сходно спутное течение позади решетки, составленной из большого числа отдельных стержней, расположенных один от другого на одинаковом расстоянии λ , называемом шагом решетки (рис. 24.6). Этот случай исследован теоретически и экспериментально Р. Гран Ольсоном [13]. На некотором расстоянии позади решетки ширина спутного течения, вызванная одним стержнем, равна шагу решетки, т. е. $b = \lambda$. И здесь скорость спутного течения $u_1 = U_\infty - u$ мала по сравнению со скоростью U_∞ ; поэтому уравнение (24.1) упрощается и принимает вид

$$-U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (24.40)$$

В рассматриваемом случае вычисления выполняются особенно просто, если для турбулентного касательного напряжения взять формулу (24.4). Прежде

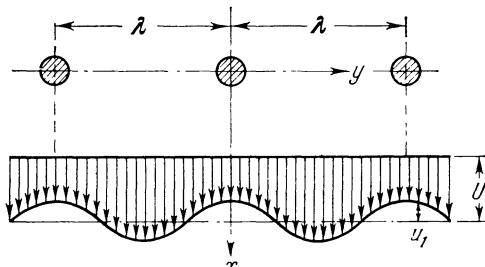


Рис. 24.6. Схема течения позади решетки из стержней.

всего необходимо найти степенной закон, устанавливающий связь между u_1 и x . Примем, что

$$u_1 \sim x^p f(y);$$

тогда мы будем иметь

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \sim x^{p-1}.$$

Так как длина пути перемешивания пропорциональна ширине спутного течения, а потому постоянна, то для правой части уравнения (24.40) мы имеем оценку

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \sim \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim x^{2p}.$$

Следовательно,

$$p - 1 = 2p,$$

откуда $p = -1$. Таким образом, скорость спутного течения уменьшается пропорционально x^{-1} .

Из характера задачи следует, что распределение скоростей по ширине спутного течения при вполне развитившемся течении должно выражаться периодической относительно y функцией с периодом λ . Поэтому примем, что

$$u_1 = U_\infty A \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-1} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right),$$

где A есть свободная постоянная, подлежащая определению. Точка $y = 0$ совпадает с серединой впадины профиля скоростей спутного течения. Внеся это выражение u_1 в формулу (24.4) для касательного напряжения τ и положив $l = \text{const}$, мы получим особенно простой результат, если примем, что длина

$$l_1 = \frac{\lambda}{2\pi}$$

(такое допущение оправдывается из наглядных соображений). А именно в этом случае мы будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = l^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-2} U_\infty^2 A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right).$$

Внеся это выражение в правую часть уравнения (24.40), мы найдем, что

$$A = \frac{\left(\frac{\lambda}{l} \right)^2}{8\pi^3};$$

следовательно, окончательным решением будет

$$u_1 = \frac{U_\infty}{8\pi^3} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \frac{\lambda}{x} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right). \quad (24.41)$$

Как показали измерения Р. Гран Ольсона, это распределение скоростей совпадает с действительным распределением, начиная с $x/\lambda > 4$.

Для длины пути перемешивания позади решетки из цилиндрических стержней с отношением $\lambda/d = 8$ получается значение

$$\frac{l}{\lambda} = 0,103.$$

Р. Гран Ольсон выполнил расчет спутного течения позади решетки из стержней также на основе формулы (24.3), т. е. для случая, когда $l_1 = 0$. Такой расчет оказался значительно более трудоемким. Расчет на основе

формулы (24.5), выполненный Г. Гёртлером [12], привел опять к распределению скоростей (24.41)¹⁾. Г. Кордес [5] вычислил распределение скоростей позади решетки также на малом расстоянии от нее.

Решетки с очень тесно расположеннымми стержнями применяются для успокоения потока воздуха в аэродинамических трубах, т. е. для получения пространственно равномерного распределения скоростей. Часто струи воздуха, получающиеся после прохождения потока через решетку, сливаются, что препятствует выравниванию распределения скоростей. Особенности течения позади успокоительной решетки из параллельных стержней с острыми ребрами изучены И. Г. Болем [3]. Им исследованы решетки, для которых отношение лобовой площади всех стержней к площади поперечного сечения трубы составляло $m = 0,308; 0,462$ и $0,615$. При малых m отдельные струи остаются параллельными. Слияние струй начинается при m , равном приблизительно от 0,37 до 0,46.

5. Плоская свободная струя. Впервые расчет турбулентной плоской струи был выполнен В. Толмином [41] на основе формулы Прандтля (24.3) для длины пути перемешивания. Изложим здесь вкратце более простое решение на основе формулы Прандтля (24.5), полученное Г. Райхардтом [23] и Г. Гёртлером [12]. Измерения распределения скоростей выполнены Э. Фёртманом [8] и Г. Райхардтом [23].

Степенные законы $b \sim x$ и $U \sim x^{-1/2}$, устанавливающие зависимость ширины струи b и скорости U от x , были указаны в таблице 24.1. Внеся значение τ из формулы (24.5) в уравнение (24.1), мы получим

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (24.42)$$

К этому уравнению следует присоединить уравнение неразрывности. Кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = \kappa_1 b U,$$

где U есть скорость в середине струи. Обозначим через U_s скорость в середине струи на некотором постоянном расстоянии s от щели, а через b_s — ширину струи в этом месте; тогда мы будем иметь

$$U = U_s \left(\frac{x}{s} \right)^{-1/2}, \quad b = b_s \frac{x}{s}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \varepsilon_s \left(\frac{x}{s} \right)^{1/2},$$

где $\varepsilon_s = \kappa_1 b_s U_s$.

Далее, введем новую переменную

$$\eta = \sigma \frac{y}{x},$$

¹⁾ Положив $\varepsilon = K \lambda (u_{\max} - u_{\min})$, мы получим

$$u = \frac{U_\infty}{8\pi^2 K} \frac{\lambda}{x} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right).$$

Сравнив с формулой (24.41), мы найдем для K значение

$$K = \pi \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 0,103^2 \pi = 0,0333.$$

Следовательно, кажущаяся вязкость в рассматриваемом случае равна

$$\varepsilon = 0,0333 \lambda (u_{\max} - u_{\min}).$$

где σ есть свободная постоянная. Для интегрирования уравнения неразрывности введем функцию тока ψ в следующем виде:

$$\psi = \sigma^{-1} U_s s^{1/2} x^{1/2} F(\eta).$$

В таком случае

$$u = U_s \left(\frac{x}{s} \right)^{-1/2} F', \quad v = \sigma^{-1} U_s s^{1/2} x^{-1/2} \left(\eta F' - \frac{1}{2} F \right).$$

Внеся эти выражения в уравнение (24.42), мы получим для определения функции $F(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2} F'^2 + \frac{1}{2} FF'' + \frac{\varepsilon_s}{U_s s} \sigma^2 F''' = 0 \quad (24.42a)$$

с граничными условиями

$$F = 0 \quad \text{и} \quad F' = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad \text{и} \quad F' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty.$$

Так как в выражении для ε_s содержится еще одна свободная постоянная κ_1 , то мы можем принять, что

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_s s}{\varepsilon_s}} \quad (24.43)$$

Подставив это выражение σ в уравнение (24.42а) и дважды проинтегрировав последнее, мы получим

$$F^2 + F' = 1. \quad (24.44)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (9.56) для плоской ламинарной струи. Оно имеет решение

$$F = \operatorname{th} \eta,$$

следовательно, составляющая скорости u равна

$$u = U_s \left(\frac{x}{s} \right)^{-1/2} (1 - \operatorname{th}^2 \eta).$$

Характерную скорость U_s можно выразить через постоянный импульс, отнесенный в единице длины струи, т. е. через величину

$$J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy.$$

В самом деле,

$$J = \frac{4}{3} \rho U_s^2 \frac{s}{\sigma},$$

Введя кинематический импульс $J/\rho = K$, мы получим искомое решение в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{K \sigma}{x}} (1 - \operatorname{th}^2 \eta), \\ v &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{K}{x \sigma}} [2\eta(1 - \operatorname{th}^2 \eta) - \operatorname{th} \eta], \\ \eta &= \sigma \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (24.45)$$

Для единственной эмпирической постоянной σ измерения Г. Райхардта [23] дали значение $\sigma = 7,67$. На рис. 24.7 теоретическое распределение скоростей изображено в виде кривой 2. Кружочками отмечены результаты измерений Э. Фёртмана. Для сравнения на том же рисунке показана также кривая 1

для теоретического распределения, полученного В. Толмином [41] на основе формулы Прандтля (24.3). Совпадение результатов измерений с теоретической кривой 2 несколько лучше, чем с кривой 1, так как кривая 2 в окрестности максимума несколько полнее кривой 1.

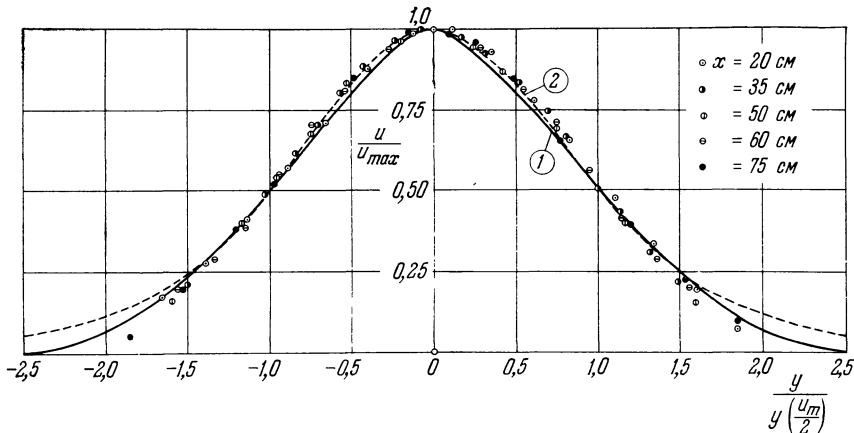


Рис. 24.7. Распределение скоростей в плоской турбулентной свободной струе. По измерениям Фёртмана [8]. Теоретическая кривая (1) — по Толмину, теоретическая кривая (2) — по формулам (24.45).

Если ввести в расчет величину $b_{1/2}$, т. е. половину ширины струи на половине глубины впадины профиля скоростей, то для кажущейся кинематической вязкости мы получим формулу

$$\varepsilon = \frac{1,125}{4\sigma} b_{1/2} U$$

или, после замены с его значением,

$$\varepsilon = 0,037 b_{1/2} U.$$

6. Круглая свободная струя. Измерения для круглой струи выполнены В. Циммом [47] и П. Руденом [27], а также Г. Райхардтом [28] и В. Вюстом [46]. Некоторые результаты опубликованы также в «Трудах Гёттингенской аэродинамической лаборатории» [48].

Теоретически впервые исследовал круглую струю В. Толмин [41] на основе формулы Прандтля (24.3). Однако вычисления получаются значительно более простыми, если воспользоваться формулой Прандтля (24.5). Согласно таблице 24.1, ширина струи пропорциональна x , а скорость в середине струи $U \sim x^{-1}$. Следовательно, кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = \kappa_1 b U \sim x^0 = \text{const} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае как и в плоском спутном течении, кажущаяся кинематическая вязкость постоянна во всей струе. Это означает, что для распределения скоростей получается формально такое же дифференциальное уравнение, как и в случае ламинарной струи, но с заменой кинематической вязкости ν на кажущуюся кинематическую вязкость ε турбулентного течения. Следовательно, мы можем использовать решение (11.15) — (11.17), полученное для ламинарной круглой струи. Выразив напряженность струи по-прежнему через постоянный кинематический импульс K , мы получим

$$K = 2\pi \int_0^\infty u^2 y dy$$

и затем найдем

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3}{8\pi} \frac{K}{\varepsilon_0 x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2}, \\ v &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4}\eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2}, \\ \eta &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon_0} \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (24.46)$$

Эмпирической постоянной в данном случае является величина \sqrt{K}/ε_0 . Согласно измерениям Г. Райхардта, половина ширины струи на половине глубины впадины профиля скоростей равна

$$b_{1/2} = 0,0848x.$$

Имея в виду, что $\eta = 1,286$ при $u = u_m/2$, мы получим

$$b_{1/2} = 5,27x \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{K}},$$

откуда

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{K}} = 0,0161.$$

С другой стороны, для круглой струи

$$\sqrt{K} = 1,59Ub_{1/2},$$

поэтому

$$\varepsilon_0 = 0,0256b_{1/2}U,$$

где $b_{1/2}$ по-прежнему означает половину ширины струи на половине глубины впадины профиля скоростей.

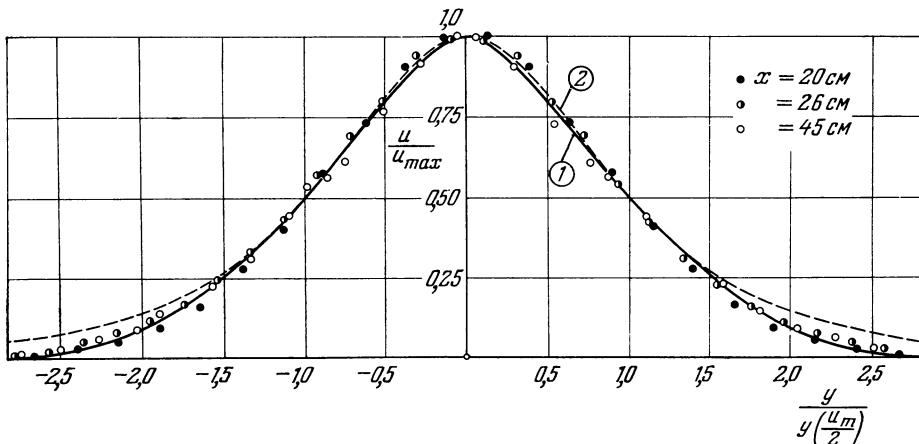


Рис. 24.8. Распределение скоростей в круглой турбулентной свободной струе. По измерениям Райхардта [23]. Теоретическая кривая (1) — по Толмину, теоретическая кривая (2) — по формулам (24.46).

Полученное теоретическое решение изображено на рис. 24.8 в виде кривой 2, а теоретическое решение В. Толмина, выведенное на основе формулы Л. Прандтля (24.3), — в виде кривой 1. На том же рисунке для сравнения показаны результаты измерения распределения скоростей. Мы видим,

что и в случае круглой струи решение на основе формулы (24.3) дает распределение скоростей, несколько заостренное вблизи максимума, в то время как решение (24.46), полученное на основе формулы (24.5), совпадает с изменениями в этой области лучше. На рис. 24.9 изображена картина линий тока в струе. С боков струя увлекает за собой покоящуюся жидкость, вследствие чего количество жидкости, которое несет струя, увеличивается по мере удаления от отверстия. Количество жидкости, протекающее через сечение струи, находящееся на расстоянии x от отверстия, определяется формулой (11.18), которая, после замены v на указанное выше значение кажущейся кинематической вязкости ε_0 принимает вид

$$Q = 0,404 \sqrt{K} x. \quad (24.47)$$

Расчет распределения скоростей и распределения температуры в плоской и круглой струях на основе формул Прандтля и Тэйлора выполнен также Л. Хоуартом [15]. Экспериментальным исследованием движения струи, вытекающей из круглого насадка в широкую трубу, заполненную жидкостью, занимался К. Викторин [44]. В его опытах отношение скорости движения жидкости в трубе к скорости истечения менялось в пределах от 0 до 4. Измерения показали, что — в отличие от случая перемешивания струи с окружающей жидкостью в свободном пространстве — при перемешивании в трубе происходит повышение давления в направлении течения. Теоретический расчет такого течения, выполненный на основе формулы Прандтля (24.3) для длины пути перемешивания, привел к такому же распределению скоростей, как и в осесимметричном спутном течении (ширина струи $b \sim x^{-1/3}$, скорость в середине струи $u \sim x^{-2/3}$).

А. М. Кьюз [17], а также Г. Б. Сквайр и Дж. Троунсер [32] рассмотрели струю конечной ширины, вытекающую из сопла в равномерный поток жидкости. В этом случае вблизи отверстия сопла происходит преобразование равномерного распределения скоростей в распределение скоростей, вычисленное выше. Турбулентная струя, вытекающая из сопла в поток жидкости, движущийся со скоростью U_∞ в одном направлении со струей, отличается от спутного течения позади изолированного тела в основном только знаком скорости u_1 в формуле (24.31), а именно в случае струи $u > U_\infty$, а в случае спутного течения $u < U_\infty$. В частности, далеко позади сопла, где $|u_1| \ll U_\infty$, струя расширяется по таким же законам, как плоское спутное течение и спутное течение за телом вращения (таблица 24.1). Г. Райхардт [26] из экспериментов нашел, что распределение полного давления или соответственно избытка импульса

$$\rho u_{\text{изб}}^2 = \rho (u^2 - U_\infty^2)$$

по ширине струи везде, за исключением непосредственной близости к соплу, сходно с гауссовым распределением ошибок и поэтому может быть представлено уравнением

$$\frac{u^2 - U_\infty^2}{u_m^2 - U_\infty^2} = e^{-(\ln 2)(y/b)^2}.$$

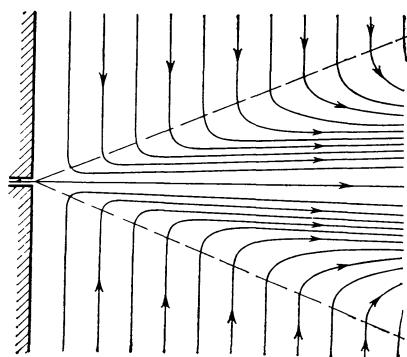


Рис. 24.9. Картина линий тока в круглой турбулентной свободной струе.

Масштаб для ширины b выбран при этом так, чтобы при $y = b$ выполнялось равенство

$$\frac{u^2 - U^2}{u_m^2 - U^2} = \frac{1}{2}.$$

Так как интеграл от избытка импульса

$$K = 2\pi \int_0^\infty (u^2 - U_\infty^2) y dy$$

должен иметь одно и то же значение на всех расстояниях x от сопла, то разность $u_m^2 - U_\infty^2$ изменяется пропорционально $1/b^2$. Для установления закона возрастания ширины b при увеличении x необходимы дальнейшие допущения. Г. Райхардт на основе своих опытов вывел формулу

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^3 + \left[\left(\frac{b}{r}\right)^2 + (\ln 2) J_0\right]^{3/2}}{3\beta_1 (\ln 2) J_0} + \frac{\left(\frac{b}{r}\right)}{2\beta_0} - C,$$

где r есть радиус сопла, x_0 — расстояние от сопла, на котором $b/r = \sqrt{\ln 2}$, а $J_0 = (u_m^2 - U_\infty^2)/U_\infty^2$ — избыток импульса на оси в точке x_0 . Далее, C есть постоянная интегрирования, равная

$$C = \sqrt{\ln 2} \left[\frac{1 + (1 + J_0)^{3/2}}{3\beta_1 J_0} + \frac{1}{2\beta_0} \right],$$

а β_0 и β_1 суть эмпирические постоянные, для которых опыты дали значения $\beta_0 = 0,032$ и $\beta_1 = 0,096$.

Распространение турбулентной струи в потоке, перпендикулярном к оси струи, рассмотрено в работе Дж. Ф. Кифера и В. Д. Бэйнса [16]. Экспериментальное исследование перемешивания турбулентной струи, ограниченной с одной стороны стенкой, с внешним течением выполнено Ф. Томасом [40].

Обзор новых экспериментальных исследований о свободных струях имеется в работе Р. Вилле [45a].

§ 4. Закон Райхардта переноса импульса

Рассмотренные выше многочисленные примеры показывают полную пригодность полуэмпирических формул турбулентного касательного напряжения для расчета свободной турбулентности. Более того, распределения скоростей, вычисленные на основе различных формул для турбулентного касательного напряжения, мало отличаются одно от другого. Основная идея всех изложенных выше теорий турбулентности состоит в том, что вводится некоторое подходящее предположение о связи между турбулентным трением и осредненным движением. На основе этого предположения производится математическое исследование более или менее сложных случаев течения, и затем полученные реaultы сравниваются с измерениями. Все эти *дедуктивные теории турбулентности* озбладают одним общим недостатком: заранее нельзя сказать, какое из полуэмпирических предположений о связи между турбулентным касательным напряжением и осредненным движением наиболее близко соответствует физической действительности. Нельзя этого сделать прежде всего потому, что результаты различных теорий турбулентности отличаются один от другого, как уже было сказано, сравнительно мало.

Г. Райхардт [22], [23] сделал попытку пойти по обратному пути, а именно по пути создания *индуктивной теории турбулентности*. Вместо того, чтобы исходить из какой-либо гипотезы о турбулентности, например из гипотезы о пути перемешивания, допускающей сравнение с измерениями только после выполнения длительных вычислений, Г. Райхардт пытался обойтись совсем без гипотез о турбулентности. На основе критического изучения обширного экспериментального материала о свободной турбулентности, а также на основе своих собственных, очень тщательных измерений Г. Райхардт установил, что в любом случае профиль скоростей с большой точностью может быть аппроксимирован либо функцией ошибок, либо интегралом ошибок¹⁾. Исходя из этого вывода, Г. Райхардт сводит

¹⁾ Как мы видели в предыдущем параграфе, теоретическое исследование плоского спутного течения и свободной границы струи привело именно к таким профилям скоростей.

закономерности свободной турбулентности к простой системе формул, не требующей поисков решения дифференциальных уравнений гидродинамики путем утомительного интегрирования, производимого часто без полного отчета о физической сущности явления. Он ставит перед собой задачу вычислить на основе измеренного распределения динамического давления, без введения каких-либо гипотез о турбулентности, такие характерные для свободной турбулентности величины, которые либо совсем не поддаются измерению, либо поддаются, но с трудом. Г. Райхардт исходит из уравнения импульсов, составленного для осредненных по времени величин и имеющего для плоского течения, если пренебречь членами, учитывающими вязкость, следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v}) = 0, \quad (24.48)$$

В таком виде это уравнение, представляющее собой осредненное по времени уравнение движения в направлении x , было использовано уже О. Рейнольдсом для выявления турбулентного кажущегося трения [см. уравнения (18.6а) и (18.8)]. В случае свободной турбулентности из уравнения (24.48) выпадает давление. Второе уравнение, используемое Г. Райхардтом, носит феноменологический характер и имеет вид

$$\bar{u}\bar{v} = -\Lambda \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y}, \quad (24.49)$$

где $\Lambda = \Lambda(x)$ есть *коэффициент переноса импульса*, имеющий размерность длины и подлежащий определению путем опыта. Левая часть этого уравнения представляет собой, с точностью до множителя ρ , касательное напряжение; ее можно понимать также как перенос x -составляющей импульса в направлении y (поток импульса). Согласно уравнению (24.49) поток x -составляющей импульса в поперечном направлении пропорционален градиенту импульса в поперечном направлении. Следовательно, этот закон переноса импульса аналогичен основному закону теплопроводности, согласно которому поток тепла пропорционален градиенту температуры, причем коэффициент переноса Λ соответствует коэффициенту теплопроводности λ . Исключив из уравнений (24.48) и (24.49) величину $\bar{u}\bar{v}$ и имея в виду, что для свободной турбулентности $\bar{p} = 0$, мы получим уравнение Райхардта

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = \Lambda(x) \frac{\partial^2 \bar{u}^2}{\partial y^2}. \quad (24.50)$$

Это основное уравнение теории Райхардта определяет распределение скоростей (распределение x -составляющей импульса) при свободной турбулентности. Если в уравнении (24.50) положить $\Lambda = \text{const}$ и понимать под x время, а под y пространственную координату, то оно совпадет с уравнением одномерной теплопроводности. Следовательно, по Г. Райхардту, распределение импульса при свободной турбулентности удовлетворяет обобщенному уравнению теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от времени. Решения уравнения (24.50) выражаются, как известно из теории теплопроводности, через функцию ошибок или через интеграл ошибок. Таким образом, уравнение (24.50) правильно передает свойство профилей скоростей свободной турбулентности, установленное измерениями, а именно зависимость формы этих профилей от функции ошибок или интеграла ошибок.

Поясним на примере идею Г. Райхардта. Как показывают измерения, распределение импульса в плоской свободной струе и в плоском спутном течении можно представить с хорошим приближением посредством уравнения

$$\bar{u}_2^2 = c_1 + \frac{c_2}{b} \exp \left[-\left(\frac{y}{b} \right)^2 \right],$$

содержащего функцию ошибок. Величины c_1 и c_2 представляют собой постоянные, а b есть длина, зависящая от x и являющаяся мерой ширины зоны перемешивания. Легко убедиться в прямой подстановкой, что это уравнение является решением дифференциального уравнения (24.50) при условии, что коэффициент переноса импульса принимается равным

$$\Lambda(x) = \frac{b}{2} \frac{db}{dx}.$$

Теория Райхардта позволяет вывести степенные законы для скорости в середине струи или спутного течения, а также для ширины этих течений без помощи гипотез о турбулентности, использованных в § 1 настоящей главы.

§ 5. Диффузия температуры при свободной турбулентности

При турбулентном перемешивании происходит перенос и перемешивание свойств текущей среды в направлении, перпендикулярном к главному движению. Прежде всего происходит перенос импульса главного движения; кроме того, переносятся субстанции, содержащиеся в жидкости (взвешенные вещества, химические примеси), а также тепло. Мерой интенсивности переноса какого-либо определенного свойства в попечном направлении служит соответствующий коэффициент турбулентного обмена. Обозначим коэффициенты турбулентного обмена для импульса и тепла соответственно через A_τ и A_q . Уравнения, определяющие эти коэффициенты, имеют вид (см. § 1 главы XXIII)

$$\tau = A_\tau \frac{du}{dy}, \quad q = A_q c_p \frac{dT}{dy},$$

где u и $c_p T$ суть соответственно импульс и количество тепла, отнесенные к единице массы, τ — поток импульса и q — поток тепла (т. е. количество тепла, переносимое в единицу времени через единицу площади). Под u и T следует понимать осредненные по времени значения. Так как механизм турбулентного обмена для импульсов и тепла не одинаков, то коэффициенты турбулентного обмена A_τ и A_q в общем случае не совпадают. Однако при применении теории пути перемешивания Прандтля к свободной турбулентности принимается, что механизм турбулентного обмена для импульсов и тепла одинаков, следовательно, одинаковы A_τ и A_q . Между тем измерения А. Фэйджа и В. М. Фокнера [39] показали, что в спутном течении позади нагретого стержня профиль температур шире, чем профиль скоростей, и что приближенно $A_q = 2A_\tau$. Это совпадает с выводами теории Тейлора, изложенной в § 3 главы XIX и основанной на предположении, что при турбулентном перемешивании происходит обмен не импульсов, а вихревой напряженности. Впоследствии проблема распространения тепла была исследована теоретически и экспериментально Г. Райхардтом [24]. Теоретические соображения, примененные Г. Райхардтом, по своему характеру тесно примыкают к соображениям, изложенным в предыдущем параграфе. Так же, как и там для распределения скоростей (распределения импульса), Г. Райхардт вывел для распределения температуры приближенные формулы только на основе измерений, т. е. не прибегая к какой-либо гипотезе о турбулентности. Путем ряда умозаключений, подробностей которых мы не можем здесь излагать, Г. Райхардт установил, что между распределением температуры и распределением скоростей существует следующая примечательная связь:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^{A_\tau/A_q}.$$

Масштабы для u и T должны быть выбраны так, чтобы точки $u = 0$ и $T = 0$ соответствовали одна другой. Результаты измерений Г. Райхардта, выполненных для плоской свободной струи (рис. 24.10), а также для плоского спутного течения, хорошо передаются законом

$$\frac{T}{T_{\max}} = \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^{1/2},$$

откуда следует, что коэффициенты турбулентного обмена A_q и A_τ связаны между собой соотношением

$$\frac{A_q}{A_\tau} = 2,$$

что совпадает с теорией Дж. И. Тэйлора [39].

Измерения распределения температуры в нагретой круглой струе выполнили С. Корсун и М. С. Юберой [6], а также И. О. Хинце и Б. Г. Ван дер Хегге-Цейнен [14]. Измерением распределения температуры позади плоской решетки из стержней занимался Р. Гран Ольсон [13].

Естественную конвекцию, возникающую исключительно вследствие подъемной силы нагретых частиц, исследовал В. Шмидт [30]. Он рассмотрел два случая: 1) плоское течение над линейным тепловым источником, расположенным на горизонтальном основании, и 2) осесимметричное течение над

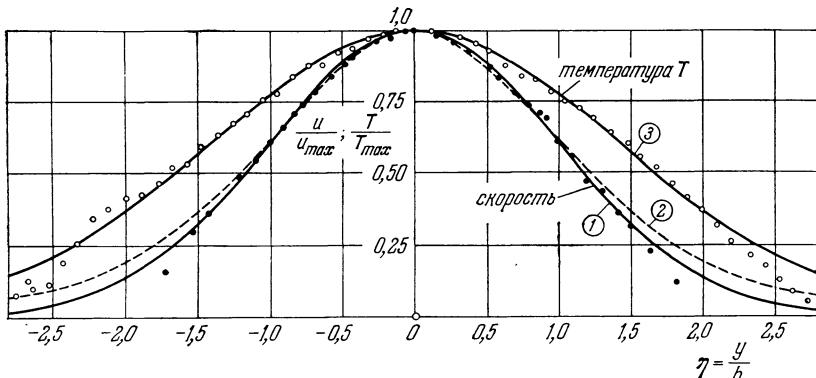


Рис. 24.10. Распределение температуры и скоростей в плоской свободной струе. По измерениям Рай-Кардта [23]. Кривая (1) соответствует формуле $u/u_{\max} = \exp(-\eta^2/2)$. Кривая (2) — первой из формул (24.45): $u/u_{\max} = 1 - \text{th}^2(K\eta)$. Кривая (3) — формуле $T/T_{\max} = \exp(-\eta^2/4) = (u/u_{\max})^{1/2}$.

точечным тепловым источником. В обоих случаях ширина профиля температуры и профиля скоростей возрастает пропорционально высоте x над основанием. При плоском течении скорость по высоте постоянна, в то время как температура уменьшается пропорционально x^{-1} . При осесимметричном течении скорость пропорциональна $x^{-1/3}$, а температура пропорциональна $x^{-5/2}$. Для плоского течения теоретические расчеты были выполнены как на основе теории пути перемешивания Прандтля, так и на основе теории переноса завихренности Тэйлора, а для осесимметричного течения — только на основе теории Прандтля, так как теория Тэйлора в этом случае неприменима. Для осесимметричного течения были выполнены также измерения, которые хорошо подтвердили правильность теоретических расчетов. Распространение тепла позади точечного и линейного тепловых источников в турбулентном пограничном слое на плоской стенке экспериментально исследовано К. Вигхардтом [45]. В случае точечного теплового источника распространение тепла в стороны происходит значительно интенсивнее, чем в направлении, перпендикулярном к стенке. Из своих измерений К. Вигхардт вывел формулы, позволяющие перенести полученные результаты на другие аналогичные случаи. См. в связи с этим также работу Б. Фроста [9].

Литература к главе XXIV]

1. A n d e r g l i k E., Math. termeszett. Ertes 52, 54 (1935).
2. B a k k e P., An experimental investigation of a wall-jet. J. Fluid Mech. 2, 467—472 (1957).
3. v o n B o h l J. G., Das Verhalten paralleler Luftstrahlen. Ing.-Arch. 11, 295—314 (1940).
4. B o u r g u e C., N e w m a n n B. G., Re-attachment of a two dimensional incompressible jet to an adjacent flat plate. Aero. Quart. 11, 201—232 (1960).
5. C o r d e s G., Statische Druckmessung in turbulenten Strömung. Ing.-Arch. 8, 245—270 (1937).
6. C o r r s i n S., U b e r g o i M. S., Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet. NASA TN 998 (1950).

7. Davies D. R., The problem of diffusion into a turbulent boundary layer from a plane area source, bounded by two straight perpendicular edges. Quart. J. Mech. Appl. Math. 7, 468—471 (1954).
8. Förtmann E., Über turbulente Strahlausbreitung. Ing.-Arch. 5, 42 (1934); NACA TM 789 (1936).
9. Frost B., Turbulence and diffusion in the lower atmosphere. Proc. Roy. Soc. A 186, 20 (1946).
10. Glauert M. B., The wall-jet. J. Fluid Mech. 1, 625—643 (1956).
11. Goedertum P. B., Wood G. P., Brevoort M. J., Investigation with an interferometer of the turbulent mixing of a free supersonic jet. NACA Rep. 963 (1950).
12. Görtler H., Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM 22, 244—254 (1942).
13. Gransson R., Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulentem Strömung. ZAMM 16, 257—267 (1936).
14. Hinze J. O., van der Hegge Zijnen B. G., Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet. Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech. 2, Part I, 286—299 (1948).
15. Howarth L., Concerning the velocity temperature distributions in plane and axially symmetrical jets. Proc. Cambr. Phil. Soc. 34, 185 (1938).
16. Keefer J. F., Barnes W. D., The round turbulent jet in a cross-wind. J. Fluid Mech. 15, 481—496 (1963).
17. Kuethe A. M., Investigations of the turbulent mixing regions formed by jets. J. Appl. Mech. 2, A 87—95 (1935).
18. Muttaway H., Die experimentellen Tatsachen des Widerstandes ohne Auftrieb. Handb. d. Exper. Physik IV, часть 2, 233—336 (1931).
19. Pai S. I., Fluid dynamics of jets. New York 1954. [Имеется русский перевод: Байдиши, Теория струй, Физматгиз, Москва 1960.]
20. Pai S. I., On turbulent jet mixing of two gases at constant temperature. J. Appl. Mech. 22, 41—47 (1955).
21. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids. В книге: Durand W. F., Aerodynamic Theory III, 166 (1935) [Имеется русский перевод: Дюранд В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939]; см. также Verhdlg. d. II. Intern. Kongr. f. angew. Mech. Zürich 1926.
22. Reichardt H., Über eine neue Theorie der freien Turbulenz. ZAMM 21, 257 (1941).
23. Reichardt H., Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. VDI-Forschungsheft 414 (1942); 2-е изд. 1951.
24. Reichardt H., Impuls- und Wärmeaustausch in freier Turbulenz. ZAMM 24, 268 (1944).
25. Reichardt H., Ermshaus R., Impuls- und Wärmeübertragung in turbulenten Windschatten hinter Rotationskörpern. Int. J. Heat Mass Transfer 5, 251—265 (1962).
26. Reichardt H., Turbulente Strahlausbreitung in gleichgerichteter Grundströmung. Forschg. Ing.-Wes. 30, 133—139 (1964).
27. Ruden P., Turbulente Ausbreitung im Freistrahlg. Naturwissenschaften 21, 375—378 (1933).
28. Sawyer R. A., The flow due to a two-dimensional jet issuing parallel to a flat plate. J. Fluid Mech. 9, 543—560 (1960).
29. Schlichting H., Über das ebene Windschattenproblem. Диссертация, Гöttingen 1930. Ing.-Arch. 1, 533—571 (1930).
30. Schmidt W., Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. ZAMM 21, 265 и 271 (1941).
31. Siggia S., Measurements of skin friction in plane turbulent wall jet. J. Roy. Aero-Soc. 62, 873—877 (1958).
32. Squire H. B., Trouncer J., Round jets in a general stream. ARC RM 1974 (1944).
33. Squire H. B., Reconsideration of the theory of free turbulence. Phil. Mag. 39, 1—20 (1948).
34. Squire H. B., Jet flow and its effect on aircraft. Aircraft Engineering 22, 62—67 (1950).
35. Swain L. M., On the turbulent wake behind a body of revolution. Proc. Roy. Soc. London A 125, 647 (1929).
36. Szabiewski W., Zur Theorie der turbulenten Strömung von Gasen stark veränderlicher Dichte. Ing.-Arch. 20, 67 (1952).
37. Szabiewski W., Zeitliche Auflösung einer ebenen Trennungsfläche der Geschwindigkeit und Dichte. ZAMM 35, 464—468 (1955).
38. Szabiewski W., Turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahlen von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur. Ing.-Arch. 20, 73 (1952).
39. Taylor G. I., The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Добавление A. Fage'a и V. M. Falkner'a. Proc. Roy. Soc. A 135, 685—705 (1932).

40. Thomas F., Untersuchungen über die Grenzschicht an einer Wand stromabwärts von einem Ausblasespalt. Abhdlg. Braunschweig, Wiss. Ges. 15, 1—17 (1963).
41. Tollmien W., Berechnung turbulenten Ausbreitungsvorgänge. ZAMM 16, 468—478 (1926); NACA TM 1085 (1945).
42. Tollmien W., Die von Kármánsche Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenz-Theorie und das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. 4, 1—15 (1933).
43. Townsend A. A., Momentum and energy diffusion in the turbulent wake of a cylinder. Proc. Roy. Soc. London A 197, 124—140 (1949).
44. Víktorin K., Untersuchungen turbulenten Mischvorgänge. Forschg. Ing.-Wes. 12, 16 (1941); NACA TM 1096 (1946).
45. Wieghardt K., Über Ausbreitungsvorgänge in turbulenten Reibungsschichten. ZAMM 28, 346—355 (1948).
- 45a. Wille R., Beiträge zur Phänomenologie der Freistrahlen (Dritte Otto-Lilienthal-Vorlesung 1962). ZFW 11, 222—233 (1963).
46. West W., Turbulente Mischvorgänge in zylindrischen und kegeligen Fangdüsen. Z. VDI 92, 1000 (1950).
47. Zimm W., Über die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. VDI-Forschungsheft 234 (1921).
48. Ergebnisse der AVA Göttingen, вып. 2, 69—77 (1923).
49. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй. Физматгиз, Москва 1960.

Г л а в а XXV

Определение профильного сопротивления

§ 1. Предварительные замечания.

Полное сопротивление обтекаемого тела состоит из *сопротивления трения*, представляющего собой интеграл касательных напряжений по поверхности тела, и из *сопротивления давления*, представляющего собой интеграл нормальных сил. Сумму обоих сопротивлений называют *профильным сопротивлением*. Сопротивление трения с некоторой степенью надежности может быть определено путем расчета способами, указанными в предыдущих главах. Сопротивление давления, которое при невязком течении равно нулю, возникает потому, что распределение давления в вязком течении получается под влиянием пограничного слоя иным, чем в невязком течении. Определение сопротивления давления путем расчета весьма затруднительно. Это обстоятельство заставляет производить определение полного сопротивления главным образом путем измерений. Однако в настоящее время имеется несколько способов, позволяющих находить профильное сопротивление путем расчета. В конце главы мы кратко изложим эти способы.

Экспериментальное определение профильного сопротивления посредством измерения сил сопротивления во многих случаях слишком неточно. Например, в аэродинамической трубе эта неточность возникает вследствие большого дополнительного сопротивления подвесок, с помощью которых крепится исследуемое тело. В других же случаях такое экспериментальное определение вообще невозможно, например в условиях полета. В таких случаях большую ценность представляет изложенный в главе IX способ определения профильного сопротивления по распределению скоростей в спутном течении. Часто этот способ является вообще единственным возможным способом определения профильного сопротивления. Он применим и к плоской, и к осесимметричной задаче, однако здесь мы ограничимся описанием его только для плоского течения.

Формула (9.41), выведенная в § 6 главы IX для определения сопротивления по распределению скоростей в спутном течении, применима только на сравнительно больших расстояниях позади тела. Эта формула дает для полного сопротивления тела величину¹⁾

$$W = b\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u(U_\infty - u) dy, \quad (25.1)$$

где b есть длина цилиндрического тела в направлении оси цилиндра, U_∞ — скорость набегающего потока, а $u(y)$ — распределение скоростей в спутном течении позади тела. Интегрирование следует производить на таком большом

¹⁾ В главе IX полное сопротивление тела мы обозначали через $2W$ (обе поверхности пластины); здесь мы будем обозначать полное сопротивление через W .

расстоянии позади тела, на котором статическое давление в спутном течении равно статическому давлению невозмущенного течения. Однако при практическом выполнении такого определения в аэродинамической трубе или в полете возникает неизбежная необходимость использовать распределение скоростей на более близком расстоянии от тела. В таком случае статическое давление вносит в формулу (25.1) дополнительный член. Этот член при измерениях на небольших расстояниях позади тела (например, в случае крыла — на расстоянии, меньшем хорды крыла) играет большую роль, и поэтому его значение должно быть известно довольно точно. Формулу для определения сопротивления с учетом дополнительного члена впервые указал А. Бетц^[8], а затем Б. М. Джонс^[20]. Хотя в настоящее время чаще применяется формула Джонса, так как она проще, приведем здесь все же и формулу Бетца, поскольку ее вывод представляет самостоятельный интерес.

§ 2. Экспериментальный метод Бетца

Проведем вокруг тела контрольную поверхность так, как показано на рис. 25.1. Во входном сечении I впереди тела течение не испытывает сопротивления, и полное давление равно здесь g_∞ . Пусть полное давление позади тела, в выходном сечении II, равно $g_2 < g_\infty$, и пусть боковые граничные плоскости лежат на таком большом расстоянии от тела, на котором течение остается невозмущенным. Уравнение неразрывности выполняется для контрольной поверхности только в том случае, если скорость u_2 в некоторой части сечения II больше невозмущенной скорости U_∞ . Применив теорему импульсов к проведенной контрольной поверхности, мы получим для сопротивления цилиндра длиной b величину

$$W = b \left[\int_{y=-\infty}^{+\infty} (p_1 + \rho u_1^2) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} (p_2 + \rho u_2^2) dy \right]. \quad (25.2)$$

Для определения по этой формуле сопротивления на основе выполненных измерений необходимо преобразовать интегралы так, чтобы их пределы не выходили дальше впадины профиля скоростей. Имея в виду, что полное давление

$$\left. \begin{array}{l} \text{в бесконечности равно } g_\infty = p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2, \\ \text{в сечении I} — \qquad \qquad \qquad g_\infty = p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2, \\ \text{в сечении II} — \qquad \qquad \qquad g_2 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2, \end{array} \right\} \quad (25.3)$$

мы можем переписать формулу (25.2) в следующем виде:

$$W = b \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (g_\infty - g_2) dy + \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1^2 - u_2^2) dy \right]. \quad (25.4)$$

Первый интеграл уже приведен к требуемому виду, так как полное давление вне впадины всюду равно g_∞ . Для того чтобы преобразовать необходимым образом и второй интеграл, введем в плоскости II гипотетическое течение $u'_2(y)$, которое вне впадины пусть всюду совпадает с течением u_2 , во

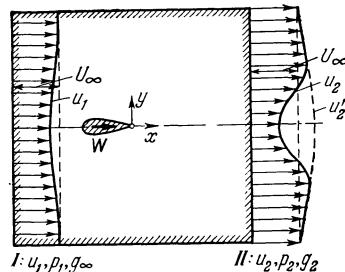


Рис. 25.1. К определению профильного сопротивления. По А. Бетцу.^[8]

впадине же отличается от течения u_2 тем, что для него полное давление равно g_∞ . Следовательно,

$$g_\infty = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2'^2. \quad (25.5)$$

В то время как течение со скоростями u_1 , u_2 , существующее в действительности, удовлетворяет уравнению неразрывности, гипотетическое течение со скоростями u_1 , u_2' , в котором $u_2' > u_2$, не удовлетворяет этому уравнению, так как количество жидкости, протекающее через выходное сечение, слишком велико. Для учета этого обстоятельства следует принять, что внутри контрольной поверхности, там, где расположено тело, имеется источник, мощность которого равна

$$Q = b \int (u_2' - u_2) dy. \quad (25.6)$$

На источник, находящийся в невязком параллельном течении, имеющем скорость U_∞ , действует тяга

$$R = -\rho U_\infty Q. \quad (25.7)$$

Применим теперь теорему импульсов еще раз в виде формулы (25.4) к гипотетическому течению со скоростью u_1 в сечении I и со скоростью u_2' в сечении II. Так как $g_2' = g_\infty$ и так как результирующая сила равна R , то на основании формулы (25.7) мы будем иметь

$$-\rho U_\infty Q = b \frac{\rho}{2} \int (u_1^2 - u_2'^2) dy.$$

Вычтя это равенство из равенства (25.4), мы получим

$$W + \rho U_\infty Q = b \left[\int (g_\infty - g_2) dy + \frac{\rho}{2} \int (u_2'^2 - u_2^2) dy \right] \quad (25.8)$$

или, после замены Q его выражением (25.6),

$$W = b \left[\int (g_\infty - g_2) dy + \frac{\rho}{2} \int (u_2'^2 - u_2^2) dy - \rho U_\infty \int (u_2' - u_2) dy \right].$$

Теперь каждое интегрирование следует производить только в пределах впадины профиля скоростей, поскольку вне впадины $u_2' = u_2$. Так как

$$u_2'^2 - u_2^2 = (u_2' - u_2)(u_2' + u_2),$$

то предыдущей формуле можно придать вид

$$W = b \left[\int (g_\infty - g_2) dy + \frac{\rho}{2} \int (u_2' - u_2)(u_2' + u_2 - 2U_\infty) dy \right]. \quad (25.9)$$

Для определения сопротивления по этой формуле необходимо измерить позади тела (в сечении II) полное давление g_2 и статическое давление p_2 . Полное давление g_∞ получается при этом измерении как давление g_2 вне впадины профиля скоростей. Гипотетическую скорость u_2' следует вычислить из формулы (25.5).

Если в сечении, в котором производятся измерения, статическое давление равно статическому давлению невозмущенного течения, т. е. $p_2 = p_\infty$, то

$$u_2' = U_\infty,$$

и формула (25.9) переходит в формулу (25.1).

Введем для сопротивления безразмерный коэффициент c_w . Для этого примем, что

$$W = c_w b l q_\infty, \quad (25.9a)$$

где $q_\infty = \rho U_\infty^2/2$ есть динамическое давление, а bl — лобовая площадь обтекаемого тела. Тогда из формулы (25.9) мы получим

$$c_W = \int \frac{g_\infty - g_2}{q_\infty} d\left(\frac{y}{l}\right) + \\ + \int \left(\sqrt{\frac{g_\infty - p_2}{q_\infty}} - \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \right) \left(\sqrt{\frac{g_\infty - p_2}{q_\infty}} + \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} - 2 \right) d\left(\frac{y}{l}\right). \quad (25.10)$$

Для обработки экспериментальных результатов эта формула наиболее удобна.

§ 3. Экспериментальный метод Джонса

После А. Бетца аналогичный способ для определения профильного сопротивления разработал, как уже было упомянуто, Б. М. Джонс [20], причем окончательная формула, к которой приводит метод Джонса, несколько проще формулы Бетца.

Пусть сечение II (рис. 25.2), в котором производятся измерения, расположено близко к телу и поэтому в нем статическое давление p_2 заметно отличается от статического давления p_∞ невозмущенного течения. Сечение же I пусть лежит на таком большом расстоянии позади тела, что в нем $p_1 = p_\infty$. Тогда, в соответствии с формулой (25.1), для сечения I мы будем иметь

$$W = bp \int u_1 (U_\infty - u_1) dy_1. \quad (25.11)$$

Для того чтобы определить скорость u_1 посредством измерений в сечении II , воспользуемся уравнением неразрывности для жидкой струйки, т. е. уравнением

$$\rho u_1 dy_1 = \rho u_2 dy_2. \quad (25.12)$$

Определив отсюда u_1 и внеся его в формулу (25.11), мы получим

$$W = bp \int u_2 (U_\infty - u_1) dy. \quad (25.13)$$

Далее, Б. М. Джонс [20] вводит предположение, что между сечениями II и I течение происходит без потерь энергии, следовательно, для каждой жидкой струйки между сечениями II и I полное давление остается постоянным, т. е.

$$g_2 = g_1. \quad (25.14)$$

Введя в расчет полные давления

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 = g_\infty, \quad p_\infty + \frac{\rho}{2} u_1^2 = g_1 = g_2, \quad p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 = g_2,$$

мы приведем формулу (25.13) к следующему виду:

$$W = 2b \int \sqrt{g_2 - p_2} (\sqrt{g_\infty - p_\infty} - \sqrt{g_2 - p_\infty}) dy, \quad (25.15)$$

причем интегрирование следует производить в сечении II . И теперь подынтегральное выражение не равно нулю только во впадине профиля скоростей. Введем опять посредством формулы (25.9а) безразмерный коэффициент сопротивления c_W . Тогда, имея в виду, что

$$g_\infty - p_\infty = q_\infty,$$

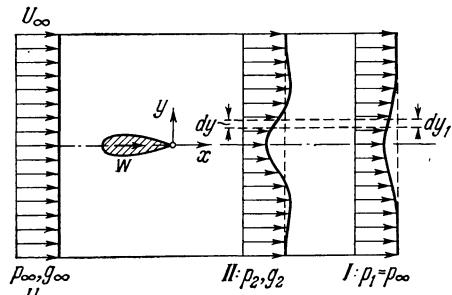


Рис. 25.2. К определению профильного сопротивления. По Б. М. Джонсу [20].

мы получим

$$\boxed{c_w = 2 \int \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \left(1 - \sqrt{\frac{g_2 - p_\infty}{q_\infty}} \right) d \left(\frac{y}{l} \right).} \quad (25.16)$$

Если в сечении, в котором производятся измерения, статическое давление равно статическому давлению невозмущенного течения, т. е. $p_2 = p_\infty$, то формула Джонса также переходит в простую формулу (25.1).

С целью более удобного вычисления интеграла (25.16) А. Д. Янг [52] преобразовал формулу Джонса, введя в нее аддитивный поправочный член, который хотя и зависит от формы впадины в спутном течении, однако может быть вычислен раз навсегда. Критические замечания по поводу формулы Янга имеются в заметке Дж. И. Тэйлора [44].

Метод определения профильного сопротивления, предложенный Б. М. Джонсом, нашел широкое применение как при измерениях в полете, так и при измерениях в аэродинамических трубах [5], [10], [14], [22], [25], [26], [39], [40], [46], [47]. Во всех случаях получаются весьма удовлетворительные результаты. Г. Дёч [5] показал, что при измерениях позади крылового профиля формулы Бетца и Джонса можно применять на расстояниях от задней кромки крыла, составляющих всего только 5% хорды крыла. В этом случае дополнительный член в формуле Бетца составляет по своей величине около 30% от величины первого члена. Особенно пригоден экспериментальный метод определения профильного сопротивления для установления влияния шероховатости обтекаемой поверхности на профильное сопротивление, а также для определения очень малого сопротивления ламинаризованных профилей.

А. Д. Янг [48] распространил метод Джонса на сжимаемые течения. Уравнение неразрывности теперь имеет вид

$$\rho_1 u_1 dy_1 = \rho_2 u_2 dy_2. \quad (25.17)$$

Для сопротивления получается формула

$$W = b \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_2 u_2 (U_\infty - u_1) dy_2. \quad (25.18)$$

В этой формуле опять следует выразить скорость u_1 через величины, характеризующие течение в плоскости II. Аналогом сделанного Джонсом допущения о том, что $g_1 = g_2$, в случае сжимаемого течения является предположение о сохранении энтропии вдоль жидкой струйки на пути от плоскости II к плоскости I. Это приводит к адиабатическому соотношению

$$\frac{p_2}{\rho_2^\kappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}. \quad (25.19)$$

Если статическое давление

$$p_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\kappa - 1}{2} \frac{\rho}{2} w^2 + p_i \right), \quad (25.20)$$

которое подлежит измерению в сжимаемом течении при помощи трубки Пито, обозначить через g , то соотношение (25.19) также приводит к допущению $g_1 = g_2$. Это позволяет с помощью уравнения Бернулли для сжимаемой среды выразить скорость u_1 следующим образом:

$$u_1^2 = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{g_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - 1 \right]. \quad (25.21)$$

Если скорость u_2 также выразить через давления g_2 и p_2 , подлежащие измерению в плоскости II, то задача определения сопротивления тела по измеренным в плоскости II значениям полного и статического давлений принципиально будет решена. Однако вследствие того, что в уравнении Бернулли для сжимаемого течения связь между скоростями и дав-

лениями сложная, для сопротивления получается формула, очень неудобная для вычислений. Поэтому А. Д. Янг разлагает скорости u_1 и u_2 в ряды вида

$$u^2 = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \left[\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{g-p}{p} - \frac{\kappa-1}{2\kappa^2} \left(\frac{g-p}{p} \right)^2 + \dots \right]. \quad (25.22)$$

Это позволяет выделить из выражения для сопротивления величину (25.15), найденную Джонсом для несжимаемого течения, а остальные слагаемые расположить по степеням числа Маха. В результате для коэффициента сопротивления получается ряд

$$c_W = c_{W \text{ несж}} + A_1 Ma_\infty^2 + A_2 Ma_\infty^4 + \dots, \quad (25.23)$$

где $c_{W \text{ несж}}$ есть коэффициент сопротивления (25.16) для несжимаемого течения, а коэффициенты A_1, A_2, \dots при числах Маха суть некоторые интегралы, которые могут быть вычислены по значениям p_2, p_2 и g_2 , измеренным в плоскости II . Если для малых чисел Маха ограничиться первыми двумя членами ряда (25.23) и ввести обозначение $q_\infty = g_\infty - p_\infty$, то мы получим

$$c_W = 2 \int_{y=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \left(1 - \frac{g_2 - p_\infty}{q_\infty} \right) \left\{ 1 + \frac{Ma_\infty^2}{8} \left[3 \cdot \frac{p_2 - p_\infty}{q_\infty} + 3 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\kappa - 2 \frac{g_2 - p_\infty}{q_\infty} - (2\kappa - 1) \sqrt{\frac{g_2 - p_\infty}{q_\infty}} \right] \right\} d\left(\frac{y}{l}\right). \quad (25.24)$$

Добавочный член, зависящий от числа Маха, вносит в коэффициент сопротивления отрицательный вклад. Если принять, что впадина профиля скоростей в спутном течении имеет определенную форму, то добавочный член, как показал А. Д. Янг, может быть вычислен раз навсегда.

§ 4. Определение профильного сопротивления путем расчета

И. Преч [27], а также Г. Б. Сквайр и А. Д. Янг [42] разработали методы расчетного определения профильного сопротивления. Эти методы связаны с расчетом пограничного слоя, изложенным в главе XXII, причем кроме использованных там эмпирических соотношений вводятся некоторые новые, также эмпирические соотношения, учитывающие сопротивление давления, поскольку определение последнего при расчете пограничного слоя не производится.

Мы изложим здесь вкратце метод Сквайра — Янга с учетом некоторых новых результатов. Введем в рассмотрение толщину потери импульса, определяемую формулой (8.34), и коэффициент сопротивления, определяемый формулой (25.9а); тогда мы сумеем придать формуле (25.1), определяющей сопротивление через распределение скоростей в спутном течении на большом расстоянии позади тела, следующий вид:

$$c_W = 2 \frac{\delta_{2\infty}}{l}, \quad (25.25)$$

где величина

$$\delta_{2\infty} = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy$$

есть толщина потери импульса в спутном течении на большом расстоянии позади тела. С другой стороны, выполнив расчет пограничного слоя так, как было показано в главе XXII, мы можем найти толщину потери импульса δ_{21} на задней кромке тела. Основная идея метода Сквайра — Янга заключается в отыскании такого соотношения между δ_{21} и $\delta_{2\infty}$, которое позволило бы использовать формулу (25.25) для вычисления профильного сопротивления.

Уравнение импульсов (22.6), выведенное для пограничного слоя, применимо также для спутного течения, с той только разницей, что в спутном

течении касательное напряжение на стенке отсутствует. Следовательно, в спутном течении мы имеем¹⁾

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H+2)\delta_2 \frac{U'}{U} = 0, \quad (25.26)$$

где

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad \text{и} \quad U' = \frac{dU}{dx}.$$

Под x теперь следует понимать расстояние, измеренное вдоль центральной линии спутного течения от задней кромки тела. Уравнение (25.26) можно представить также в несколько ином виде:

$$\frac{1}{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} = -(H+2) \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{U}{U_\infty} \right).$$

Проинтегрировав это уравнение по x , начиная от задней кромки тела (индекс 1) до такой точки спутного течения далеко позади тела, в которой $U = U_\infty$ и $p = p_\infty$, мы получим

$$[\ln \delta_2]_\infty^1 = - \left[(H+2) \ln \frac{U}{U_\infty} \right]_\infty^1 + \int_{\infty}^1 \ln \frac{U}{U_\infty} \frac{dH}{dx} dx.$$

Но на большом расстоянии позади тела $H = 1$, поэтому

$$\ln \frac{\delta_{21}}{\delta_{2\infty}} + (H_1 + 2) \ln \frac{U_1}{U_\infty} = \int_{H=1}^{H=H_1} \ln \frac{U}{U_\infty} dH, \quad (25.26a)$$

где $H_1 = \delta_{11}/\delta_{21}$ есть значение формпараметра $H = \delta_1/\delta_2$ на задней кромке тела, известное из расчета пограничного слоя. Уравнение (25.26a) и дает искомую связь между $\delta_{2\infty}$ и δ_{21} при условии, что известны отношение U_1/U_∞ и значение интеграла в правой части. Решив это уравнение относительно $\delta_{2\infty}$, мы найдем

$$\delta_{2\infty} = \delta_{21} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{H_1+2} \exp \left(\int_1^{H_1} \ln \frac{U_\infty}{U} dH \right). \quad (25.27)$$

Для вычисления интеграла необходимо знать связь между статическим давлением в спутном течении, определяющим скорость U , и распределением скоростей в спутном течении, определяющим формпараметр H . В спутном течении величина $\ln(U_\infty/U)$ монотонно уменьшается от значения $\ln(U_\infty/U_1)$ на задней кромке тела до нуля на большом расстоянии позади тела; одновременно уменьшается и величина H от значения H_1 на задней кромке до единицы на большом расстоянии от тела. Связь между $\ln(U_\infty/U)$ и H установлена Г. Б. Сквайром из опытов, которые показали, что

$$\frac{\ln \frac{U_\infty}{U}}{H-1} = \frac{\ln \frac{U_\infty}{U_1}}{H_1-1} = \text{const.}$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^{H_1} \ln \frac{U_\infty}{U} dH = \frac{H_1-1}{2} \ln \frac{U_\infty}{U_1}.$$

¹⁾ В этой главе мы будем обозначать формпараметр δ_1/δ_2 для упрощения записи через H , а не через H_{12} , как это делалось в предыдущих главах.

Внеся это значение в формулу (25.27), мы будем иметь

$$\delta_{2\infty} = \delta_{21} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{\frac{H_1+5}{2}}$$

или, если принять, что $H_1 = 1,4$,

$$\delta_{2\infty} = \delta_{21} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3,2}.$$

Подставив найденное значение $\delta_{2\infty}$ в формулу (25.25), мы получим для коэффициента профильного сопротивления формулу

$c_{W \text{ проф}} = 2 \frac{\delta_{21}}{l} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3,2}.$

(25.28)

Эта формула позволяет вычислить профильное сопротивление, если путем расчета пограничного слоя определена толщина потери импульса на задней кромке тела и, кроме того, известна скорость U_1 потенциального течения на задней кромке. Эту скорость можно определить, например, путем измерения статического давления.

Как показал Г. Б. Хельмольд [18], можно избежать определения отношения U_1/U_∞ , если поступить следующим образом. Определим толщину потери импульса δ_{21}/l на задней кромке по формуле (22.20), положив в ней $n = 4$, и подставим найденное значение в формулу (25.28); тогда величина U_1/U_∞ войдет в полученную новую формулу в степени +0,2. Это дает основание считать этот множитель с хорошим приближением равным единице, так как само отношение U_1/U_∞ всегда близко к единице. В результате мы получим для коэффициента профильного сопротивления *одной* стороны профиля формулу¹⁾

$$c_{W \text{ проф}} = \frac{0,074}{Re^{1/5}} \left[\int_{x_{\text{пер}}/l}^1 \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3,5} d\left(\frac{x}{l}\right) + C \right]^{0,8}, \quad (25.29)$$

где

$$C = 62,5 \left(\frac{\delta_{2\text{пер}}}{l} \right)^{5/4} Re^{1/4} \left(\frac{U_{\text{пер}}}{U_\infty} \right)^{3,75}, \quad (25.30)$$

а Re есть число Рейнольдса $U_\infty l / v$. Индексом «пер» отмечены значения в точке перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Постоянная C определяется из условия, что в точке перехода толщина потери импульса в ламинарном и турбулентном пограничных слоях одинакова, т. е. из условия

$$\delta_{2\text{пер}} = \delta_{2\text{пер,турб}} = \delta_{2\text{пер,лам}}$$

[см. равенство (22.33)]. Толщину потери импульса $\delta_{2\text{пер,лам}}$ можно определить по формуле (10.37). Для однородного потенциального течения $U = U_\infty$ и $C = 0$, и формула (25.29) переходит в формулу закона сопротивления для продольно обтекаемой плоской пластины при полностью турбулентном течении [формула (21.11)].

Э. Труккенбротт [45] преобразовал формулу (25.29) так, что в нее вместо теоретического потенциального распределения скоростей вошли параметры, определяющие форму профиля, что, естественно, значительно упрощает вычисления.

¹⁾ Эта довольно простая формула выведена Л. Шпайделем [41] и проверена на большом числе примеров.

Г. Б. Сквайр и А. Д. Янг [42] рассчитали ряд примеров несколько иным способом. Приведем здесь некоторые из полученных результатов (рис. 25.3). Относительная толщина профилей изменялась от $d/l = 0$ (плоская пластина) до $d/l = 0,25$. Число Рейнольдса изменялось в пределах от $Re = U_\infty / \nu = 10^6$ до 10^8 . Мы видим, что профильное сопротивление очень сильно зависит от положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Положение этой точки менялось от $x_{\text{пер}}/l = 0$ до $0,4$. Увеличение профильного сопротивления с толщиной профиля следует приписать в основном увеличению сопротивления давления. Представление об относительной доле сопротивления трения и сопротивления давления в полном (профильном) сопротивлении дает рис. 25.4. Аналогичные расчеты были выполнены И. Пречем [27] для ряда профилей Кармана — Трефтца. На результат сравнения

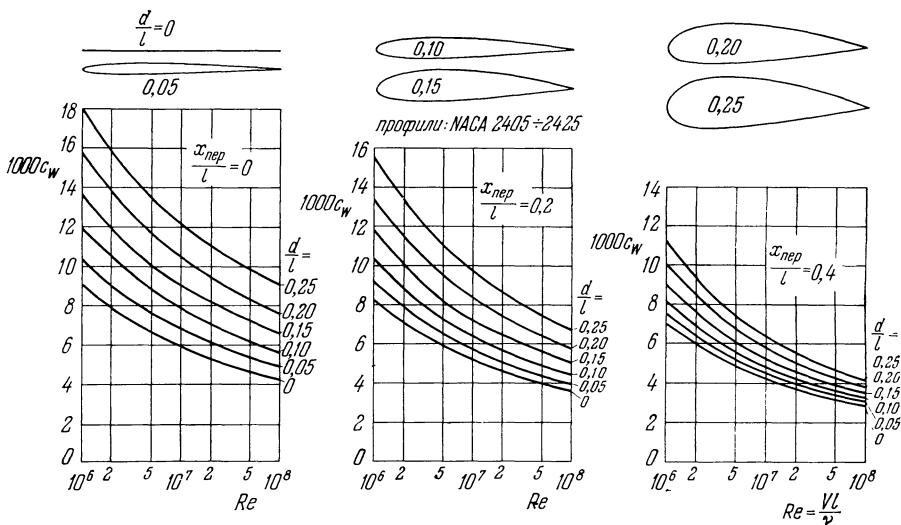


Рис. 25.3. Зависимость коэффициента профильного сопротивления крыловых профилей при несжимаемом течении от числа Рейнольдса. По расчетам Сквайра и Янга [42]. $x_{\text{пер}}$ — положение точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

расчетов с измерениями решающее влияние оказывает выбор положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Из сказанного в главе XVII мы знаем, что положение точки перехода зависит в основном от градиента давления потенциального течения. Как было там разъяснено (см. рис. 17.8), в первом приближении можно принять, что при больших числах Рейнольдса, порядка $Re \approx 10^7$, точка перехода совпадает с точкой, в которой давление имеет минимум. Коэффициенты профильного сопротивления, вычисленные при таком предположении, хорошо совпадают с измеренными коэффициентами.

Распространение изложенного метода расчета на осесимметричный случай впервые было выполнено А. Д. Янгом [49]. В дальнейшем Н. Шольц [36] существенно развил этот метод как для плоского, так и для осесимметричного случая, причем применил его также к шероховатым стенкам. Из большого числа выполненных им расчетов для профилей (плоское течение) и тел вращения он установил зависимость профильного сопротивления от относительной толщины обтекаемого тела. Эта зависимость графически изображена на рис. 25.5, на котором через $\Delta c_f = c_f - c_{f0}$ обозначено превышение вычисленного коэффициента сопротивления c_f , отнесенного к смоченной поверхности, над коэффициентом сопротивления c_{f0} плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении. Кривая для плоского случая довольно хоро-

совпадает с результатами, изображенными на рис. 25.3 для полностью турбулентного пограничного слоя ($x_{\text{пер}}/l = 0$). См. в связи с этим также работу П. С. Гренвила [16].

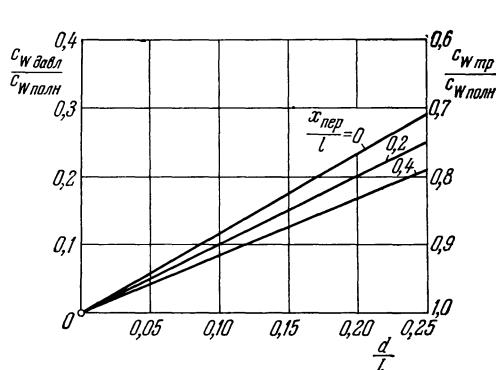


Рис. 25.4. Отношение сопротивления давления к полному (профильному) сопротивлению при различных значениях относительной толщины d/l профиля.

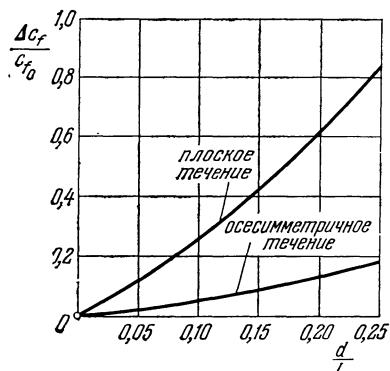


Рис. 25.5. Зависимость дополнительного профильного сопротивления от относительной толщины обтекаемого тела. По расчетам Н. Шольца [36].

Для крыловых профилей эти расчеты позволяют определить также влияние трения на подъемную силу. Дело в том, что вытесняющее действие пограничного слоя так изменяет распределение давления на профиле, что экспериментальная подъемная сила меньше теоретической, соответствующей

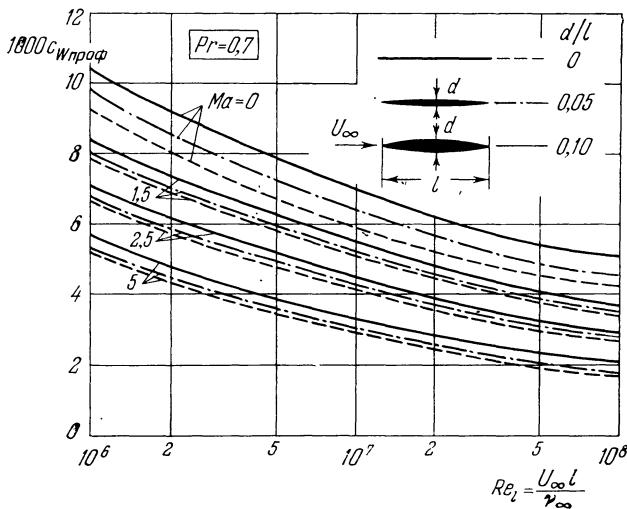


Рис. 25.6. Зависимость коэффициента профильного сопротивления двояковыпуклых профилей от числа Рейнольдса при сверхзвуковой скорости и при полностью турбулентном пограничном слое. По А. Д. Янгу и С. Киркби [53]. Теплопередача отсутствует. Число Прандтля $Pr = 0,7$. К профильному сопротивлению следует добавить волновое сопротивление, определяемое по формуле (25.31).

потенциальному течению. Эта потеря подъемной силы вследствие трения определена К. Кремером [23] путем расчета для углов атаки, при которых не происходит отрыва потока от профиля.

Рассмотренный выше метод расчета профильного сопротивления, основанный на использовании теоремы импульсов, распространен А. Д. Янгом и С. Киркби [53] на сверхзвуковые течения. На рис. 25.6 изображены некоторые полученные ими результаты для двояковыпуклых профилей с различной

относительной толщиной при симметричном обтекании. Полученные значения коэффициента сопротивления c_w проф включают в себя и сопротивление давления, и сопротивление трения¹⁾. К профильному сопротивлению при сверхзвуковых скоростях добавляется еще волновое сопротивление течения без трения. Для двояковыпуклого профиля волновое сопротивление по линейной теории равно

$$c_{w \text{ волн}} = \frac{16}{3} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{Ma^2 - 1}}. \quad (25.31)$$

Как показывает рис. 25.6, влияние толщины профиля на профильное сопротивление при сверхзвуковых скоростях обтекания незначительно. Влияние

числа Маха на профильное сопротивление для двояковыпуклых профилей и для продольно обтекаемой пластины примерно одного порядка.

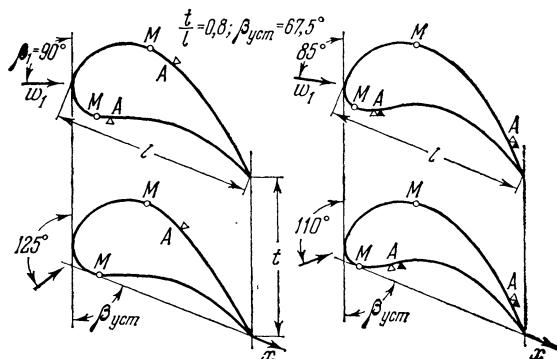
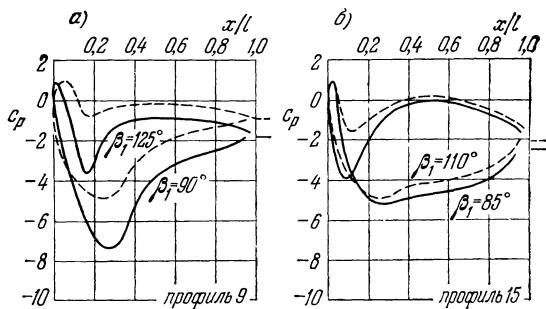


Рис. 25.7. Теоретическое потенциальное распределение давления вдоль лопаток турбинной решетки и положение точек отрыва пограничного слоя на лопатках при двух различных углах натекания β_1 . По Ф. В. Ригельсу [28]. Угол установки лопаток $\beta_{уст} = 67,5^\circ$. Относительный шаг $t/l = 0,8$. Буквой M обозначено положение точки минимума давления, а буквой A — положение точки отрыва при $Re = 10^6 (\Delta)$ и при $Re = 10^4 (\blacktriangle)$. На оси ординат кривых распределения давления отложены

$$\text{значения } c_p = (p - p_\infty) / \frac{\rho}{2} w_\infty^2.$$

отдельного крыла давление далеко впереди одинаково. При потенциальном же течении через решетку такое равенство давлений в общем случае нарушается, а именно позади решетки возникает понижение давления, если решетка преобразует давление в скорость (турбинная решетка), и, наоборот, возникает повышение давления, если решетка преобразует скорость в давление (насосная, или компрессорная, решетка). Совокупное действие такого понижения (или повышения)

¹⁾ Сопротивлением давления здесь является та часть волнового сопротивления, которая вызвана вытесняющим действием пограничного слоя.

§ 5. Потери энергии в лопаточных решетках

Определение профильного сопротивления путем расчета, поясненное в предыдущем параграфе для отдельного крылового профиля, распространено Г. Шлихтингом и Н. Шольцем [30], [34] на случай течения через крыловые или лопаточные решетки. Если в турбине или в компрессоре с осевым протеканием через направляющее и рабочее колёса провести цилиндрическое сечение с осью, совпадающей с осями обоих колес, и затем развернуть это сечение в плоскость, то в последней получится так называемая *плоская решетка* из отдельных профилей крыльев или лопаток. Параметрами этой решетки являются *относительный шаг* t/l , т. е. отношение шага t решетки к хорде профиля, и угол установки $\beta_{уст}$ профиля (рис. 25.7).

При потенциальном обтекании

давления и формы профиля лопатки определяет распределение давления на контуре лопатки и тем самым поведение пограничного слоя. На рис. 25.7 изображено распределение давления для двух турбинных решеток и показано положение точек отрыва на контуре лопатки. Мы видим, что для профиля 9 (рис. 25.7, а) точка отрыва при угле натекания $\beta_1 = 90^\circ$ лежит немногого позади точки минимума давления и на верхней, и на нижней сторонах контура, однако только при малом числе Рейнольдса $Re = 10^6$; при более же высоком числе Рейнольдса $Re = 10^6$ отрыв не возникает ни на верхней, ни на нижней стороне контура. Для профиля 15 (рис. 25.7, б) картина получается иная: при обоих углах натекания $\beta_1 = 85^\circ$ и $\beta_1 = 110^\circ$ на напорной стороне лопатки точка отрыва лежит немногого позади точки минимума давления, а на подсасывающей стороне — совсем близко от задней кромки и при низком, и при высоком числах Рейнольдса.

Различное поведение пограничного слоя в турбинной и насосной решетках подтверждается снимками течения в каналах между лопатками. На рис. 25.8 изображены такие снимки, полученные по методу интерференционных полос. Смещение полос, заметное в отдельных местах снимков, показывает изменение плотности по сравнению с плотностью в невозмущенном течении. Внешний край пограничного слоя легко узнать по очень резкому перегибу интерференционных полос, возникающему вследствие разности плотностей в пограничном слое и вне его (в свою очередь эта разность обусловлена большой разностью температур в пограничном слое и вне его, возникающей вследствие трения).

Отрыв пограничного слоя замечен по его сильному утолщению. На лопатках турбинной решетки (рис. 25.8, а), на той их стороне, на которую жидкость натекает, отрыв не возникает; на противоположной же стороне (на «спинке» лопатки) происходит слабый отрыв вблизи задней кромки (на фотографии он намечен штрихами). Иная картина получается при обтекании насосной решетки (рис. 25.8, б): сильный отрыв начинается на спинке лопаток уже вблизи носика лопатки, в результате чего возникает область застоя, заполняющая приблизительно половину просвета канала.

В работе [30] показано, как при помощи изложенного в § 4 настоящей главы метода можно вычислить коэффициенты потерь в плоской решетке при различных углах натекания. Обширная систематика таких расчетов и их сравнение с результатами измерений имеется в работе Н. Шольца и Л. Шпайделя [38].

Распределение скоростей непосредственно позади выхода из решетки имеет в направлении фронта решетки четко выраженные впадины, возникающие под влиянием пограничных слоев отдельных лопаток. Ниже по течению эта разность скоростей вследствие турбулентного перемешивания выравнивается, что влечет за собой дальнейшую потерю энергии. Эту потерю можно вычислить на основании теоремы импульсов. Найденное значение следует присоединить к потере, возникающей в пограничном слое на решетке.

Таким образом, теоретическое вычисление потерь энергии, вызываемых прохождением потока через решетку, сводится к решению следующих трех

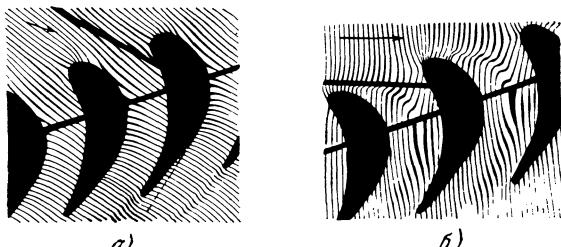


Рис. 25.8. Снимки обтекания лопаток, соединенных в решетки. Получены по методу интерференционных полос Э. Эккера. а) Данные для турбинной решетки (понижение давления): $\beta_1 = 48^\circ$; $t/l = 0,524$; $Re = 1,59 \cdot 10^6$. б) Данные для насосной решетки (повышение давления): $\beta_1 = 20^\circ$; $t/l = 0,614$; $Re = 1,97 \cdot 10^6$. Стрелки указывают направление притекания жидкости.

задач: 1) к определению теоретического потенциального распределения давления вдоль контура лопатки; 2) к расчету ламинарного и турбулентного пограничных слоев на контуре лопатки; 3) к вычислению потери энергии вследствие турбулентного перемешивания в спутном течении позади решетки.

Полную потерю энергии, возникающую вследствие прохождения потока через решетку, проще всего выразить через разность Δg между полным давлением g_1 невозмущенного течения до решетки и полным давлением g'_2 выровнявшегося действительного течения далеко позади решетки. Эта разность равна

$$\Delta g = g_1 - g'_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 - \left(p'_2 + \frac{\rho}{2} w'_2^2 \right), \quad (25.32)$$

где p'_2 и w'_2 суть давление и скорость в действительном, т. е. происходящем с потерями энергии, течении далеко позади решетки (значения p'_2 и w'_2 не совпадают с соответствующими значениями p_2 и w_2 в идеальном течении, происходящем без потерь). Потерю Δg полного давления целесообразно сделать безразмерной, разделив ее для этого на динамическое давление, соответствующее осевой составляющей скорости

$$w_{\text{осев}} = w_1 \sin \beta_1 = w_2 \sin \beta_2$$

(эта составляющая определяет количество жидкости, протекающее через решетку, и имеет, вследствие неразрывности течения, одинаковые значения до и позади решетки). Таким путем мы получим безразмерный коэффициент потери энергии в решетке¹⁾

$$\zeta_{\text{пот}} = \frac{\Delta g}{\frac{\rho}{2} w_{\text{осев}}^2}. \quad (25.33)$$

Систематические исследования решеток проведены в Брауншвейге [31], [32], [37], [38], [41]. Коэффициенты потерь определялись и путем теоретического расчета, и посредством измерения. На рис. 25.9 изображены некоторые из полученных результатов. Все решетки имеют лопатки с симметричным профилем NACA 0010. Относительный шаг решеток $t/l = 0,5; 0,75$ и $1,0$, а угол выноса лопаток $\beta_{\text{вын}} = 90^\circ$ (без выноса), 120° и 150° . Коэффициент потерь, определяемый формулой (25.33), дан в зависимости от коэффициента поворота скорости

$$\delta_{\text{пов}} = \frac{\Delta w_{\text{пов}}}{w_{\text{осев}}},$$

где $\Delta w_{\text{пов}}$ означает скорость, созданную решеткой в направлении фронта решетки. Для решетки без выноса лопаток ($\beta_{\text{вын}} = 90^\circ$) как положительные, так и отрицательные значения $\delta_{\text{пов}}$ означают, что решетка является насосной, для решетки же с выносом лопаток положительные значения $\delta_{\text{пов}}$ соответствуют насосной решетке, а отрицательные — турбинной решетке. При небольших углах поворота уменьшение шага решетки во всех случаях влечет за собой сильное увеличение коэффициента потерь. Причина этого заключается в том, что при меньшем шаге число лопаток возрастает, а при небольших углах поворота коэффициент потерь в первом приближении пропорционален числу лопаток. При больших углах поворота во всех случаях наступает

¹⁾ В теории паровых турбин принято выражать потерю энергии, вызванную прохождением потока через решетку, посредством коэффициента скорости ψ , показывающего отношение действительной скорости после выхода из решетки к скорости после выхода из решетки без учета потерь, следовательно, $\psi = w'_2/w_2$. Коэффициенты $\zeta_{\text{пот}}$ и ψ связаны между собой отношением

$$\zeta_{\text{пот}} = \frac{1 - \psi^2}{\sin^2 \beta_2}.$$

внезапное сильное увеличение коэффициента потерь, что объясняется отрывом течения на подсасывающей стороне лопаток вследствие сильной нагрузки подъемной силой. У турбинных решеток коэффициенты потерь вообще меньше, а возможные углы поворота больше, чем у насосных решеток. Причиной такого различия в свойствах турбинных и насосных решеток является различное поведение в них пограничных слоев (см. рис. 25.7).

Измерения и теоретические расчеты были выполнены для числа Рейнольдса $Re = w_2 l / v = 5 \cdot 10^5$. Теоретические расчеты были проведены для

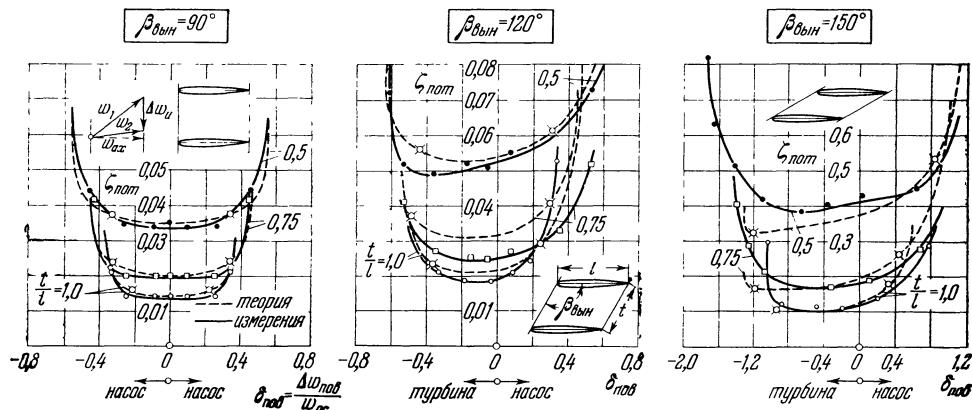


Рис. 25.9. Зависимость коэффициента потерь ζ от коэффициента поворота $\delta_{\text{пов}} = \Delta w_{\text{пов}} / w_{\text{ос}}$ [формула (25.33)] для решеток с различным относительным шагом t/l и с различным углом выноса $\beta_{\text{вын}}$. По Шлихтингу [31], [32]. Профиль лопаток NACA 0010. Число Рейнольдса $Re = w_2 l / v = 5 \cdot 10^5$. Измерения — по Н. Шольцу [33], теория — по Л. Шпайделю [41].

полностью турбулентного пограничного слоя. При измерениях такой пограничный слой был обеспечен помещением вблизи носка лопаток турбулизующих проволочных колец. Коэффициенты потерь, определенные теоретически, хорошо совпадают с результатами измерений даже в отношении резкого увеличения коэффициента при больших углах поворота.

Влияние числа Рейнольдса. Вопрос об изменении аэродинамических характеристик решетки при изменении числа Рейнольдса имеет важное значение для переноса результатов измерений, полученных при опытах с моделями, на гидромашины в натуральном размере. Влияние числа Рейнольдса в основном проявляется на коэффициенте потерь. Этому влиянию посвящены многочисленные работы, например [4], [28], [43]. С физической точки зрения влияние числа Рейнольдса на коэффициент потерь в плоской лопаточной решетке такое же, как на сопротивление одиночного несущего крыла, так как в обоих случаях число Рейнольдса оказывает свое влияние через посредство пограничного слоя.

Если распределение давления вдоль контура лопаток решетки такое, что не происходит сколько-нибудь заметных отрывов течения, то потери в лопаточной решетке обусловливаются в основном пограничным слоем. В этом случае потери зависят от числа Рейнольдса примерно так же, как коэффициент сопротивления продольно обтекаемой плоской пластины, т. е. при ламинарном течении они пропорциональны $Re^{-1/2}$, а при турбулентном течении пропорциональны $Re^{-1/5}$, причем Re есть число Рейнольдса, составленное по хорде лопатки. Однако коэффициент потерь сильно зависит также от положения точки перехода ламинарного течения в турбулентное; при увеличении числа Рейнольдса эта точка перемещается вперед, к носку профиля. В случае безотрывного обтекания лопаток зависимость коэффициента потерь от числа Рейнольдса может быть определена путем расчета

способом, указанным К. Герстеном [12]. Результат одного из таких расчетов для турбинной решетки с очень толстым и очень изогнутым профилем лопаток изображен на рис. 25.10. Кружочками отмечены результаты измерений, выполненных в довольно широком диапазоне чисел Рейнольдса, а именно $Re_2 = w_2 l/v = 4 \cdot 10^4$ до $4 \cdot 10^5$. Для сравнения с измерениями на рисунке вычерчена теоретическая кривая, вычисленная в предположении (в соответствии с данными, приведенными в работе [38]), что потери вследствие

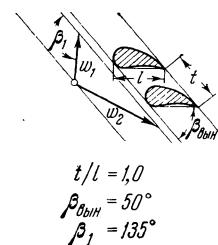
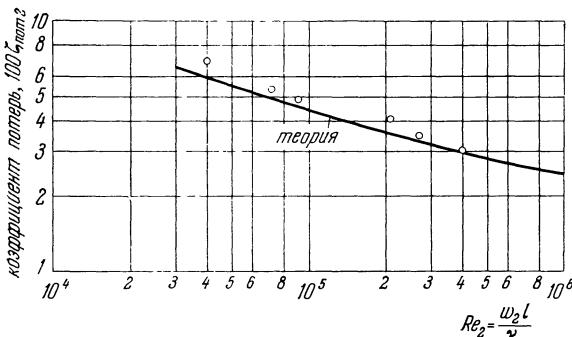


Рис. 25.10. Зависимость коэффициента потерь в турбинной решетке от числа Рейнольдса Re_2 . По К. Герстену [12].

отрыва пограничного слоя невелики. Что касается точки перехода, то ее положение при расчетах было взято в соответствии с измерениями, которые показали, что пограничный слой на напорной стороне лопатки остается ламинарным вплоть до задней кромки, а на подсасывающей стороне — только до точки минимума давления. Совпадение расчетов с измерениями, как это видно из рис. 25.10, получилось вполне хорошим.

Сведения о влиянии числа Маха и степени турбулентности потока на коэффициент потерь в лопаточной решетке имеются в брауншвейгских диссертациях И. Бара [2] и Г. Хеббеля [17]. См. в связи с этим также работу [35].

Подробное изложение всего комплекса вопросов, связанных с лопаточными решетками, имеется в недавно вышедшей книге Н. Шольца [38a]. Краткое изложение этих вопросов можно найти в двух обзорных статьях Г. Шлихтинга и А. Даса [35a], [35b].

Литература к главе XXV

1. Abbott J. H., von Doenhoff A. E., Stivers L. S., Summary of airfoil data. NACA Rep. 824 (1945).
 2. Bahr J., Untersuchungen über den Einfluss der Profildicke auf die kompressible ebene Strömung durch Verdichtergitter. Диссертация, Braunschweig 1962. Forschg. Ing.-Wes. 30, 14–25 (1964).
 3. Betz A., Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. ZFM 16, 42 (1925).
 4. Davis H., Kottas H., Moody A. M., The influence of Reynolds number on the performance of turbo-machinery. Trans. ASME 73, 499–509 (1951).
 5. Dotsch H., Profilwiderstandsmessungen im grossen Windkanal der DVL. Luftfahrtforschung 14, 173 и 370 (1937).
 6. Dowlen E. M., A shortened method for the calculation of aerofoil profile drag. J. Roy. Aero. Soc. 56, 109–116 (1952).
 7. Drouge G., Comparison between different methods of calculating the profile drag as determined by the pitot traverse method at high speeds. The Aeronautical Research Institut Flygtekniska Försöksanstalten Stockholm, Rep. № 21 (1950).
 8. Eastman N., Jacobs E. N., Sherman A., Aerofoil section characteristics as affected by variation of the Reynolds number. NACA RM 586 (1937).
 9. Fage A., Falkner V. M., Walker W. S., Experiments on a series of symmetrical Joukowski sections. ARC RM 1241 (1929).
 10. Fage A., Profile and skin-friction airfoil drags. ARC RM 1852 (1938).

11. Gersten K., Experimenteller Beitrag zum Reibungseinfluss auf die Strömung durch ebene Schaufelgitter. Abhdlg. Braunschweig. Wiss. Ges. 7, 93—99 (1955).
12. Gersten K., Der Einfluss der Reynolds-Zahl auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. Abhdlg. Braunschweig. Wiss. Ges. 11, 5—19 (1959).
13. Goett H. J., Bullivant W. K., Tests of NACA 0009, 0012, 0018 aerofoils in the full scale tunnel. NACA Rep. 647 (1938).
14. Goett H. J., Experimental investigation of the momentum method for determining profile drag. NACA Rep. 660 (1939).
15. Göthert B., Widerstandsbestimmung bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten aus Impulsverlustmessungen. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 148 (1941).
16. Granville P. S., The calculation of the viscous drag of bodies of revolution. David W. Taylor Basin Rep. 849 (1953).
17. Hebbel H., Über den Einfluss der Mach-Zahl und der Reynolds-Zahl auf die aerodynamischen Beiwerte von Turbinenschaufelgittern bei verschiedener Turbulenz der Strömung. Диссертация, Braunschweig 1962. Forschg. Ing.-Wes. 30, 65—77 (1964).
18. Heldbold H. B., Zur Berechnung des Profilwiderstandes. Ing.-Arch. 17, 273 (1949).
19. Jacobs E. N., Ward K. E., Pinkerton R. M., The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable density wind tunnel. NACA Rep. 460 (1935).
20. Jones B. M., The measurement of profile drag by the pitot traverse method. ARC RM 1668 (1936).
21. Jones R., Williams D. H., The profile drag of aerofoils at high Reynolds number in the CAT. ARC RM 1804 (1937).
22. Jones B. M., Flight experiments on boundary layers. JAS 5, 81—101 (1938); см. также Engineering 145, 397 (1938) и Aircraft Eng. 10, 135 (1938).
23. Kraemer K., Grenzschichtrechnungen an zwölf Profilen. Bericht 55/A/01 der AVA Göttingen (1955).
24. Lock C. N., Hilton W. F., Goldstein S., Determination of profile drag at high speeds by a pitot traverse method. ARC RM 1971 (1946).
25. Piercy N. A. V., Preston J. H., Whitehead L. G., Approximate prediction of skin friction and lift. Phil. Mag. 26, 791 (1938).
26. Pfeiffer W., Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung bei Profilwiderstandsmessungen. Mitt. Inst. f. Aerodyn. ETH Zürich, № 8 (1943).
27. Pretsch J., Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 61—81 (1938); английский перевод в NACA TM 1009 (1942).
28. Roden H. G., Effects of Reynolds number on the flow of air through a cascade of compressor blades. ARC RM 2919 (1956).
- 29a. Riegels F. W., Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. ZFW 9, 2—15 (1961).
29. Schäffer H., Untersuchungen über die dreidimensionale Strömung durch axiale Schaufelgitter mit zylindrischen Schaufeln. Диссертация, Braunschweig 1954. Forschg. Ing.-Wes. 21, 9—19, 41—49 (1955).
30. Schlichting H., Scholz N., Über die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters. Ing.-Arch. 19, 42—65 (1951).
31. Schlichting H., Ergebnisse und Probleme von Gitteruntersuchungen. ZFW 1, 109—122 (1953).
32. Schlichting H., Problems and results of investigations on cascade flow. JAS 21, 163—178 (1954). [Имеется русский перевод в сб. «Механика», 1954, № 6 (28).]
33. Schlichting H., Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 447 (1955).
34. Schlichting H., Anwendung der Grenzschichttheorie auf Strömungsprobleme der Turbomaschinen. Siemens Z. 33, 429—438 (1959); см. также Application of Boundary Layer Theory in Turbo-machinery, J. Basic Eng. 81, 543—551 (1959).
35. Schlichting H., Neuere Untersuchungen über Schaufelgitterströmungen. Siemens Z. 37, 827—837 (1963).
- 35a. Schlichting H., Das A., Recent research on cascade-flow problems. Trans. ASME, J. Bas. Eng. 3, 221—228 (1966).
356. Schlichting H., Das A., Über einige grundlegende Fragen auf dem Gebiet der Aerodynamik der Turbomaschinen. L'Aerotechnica 46, 179—194 (1966).
36. Scholz N., Über eine rationelle Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche. Jb. Schiffbautechn. Ges. 45, 244—259 (1951).
37. Scholz N., Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 442 (1954).
38. Scholz N., Speidel L., Systematische Untersuchungen über die Strömungsverluste von ebenen Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 464 (1957).
- 38a. Scholz N., Aerodynamik der Schaufelgitter, т. I, G. Braun, Karlsruhe 1965.
39. Schrenk M., Über die Profilwiderstandsmessung im Fluge nach dem Impulsverfahren. Luftfahrtforschung 2, 1 (1928); NACA TM 557 и 558 (1930).

40. Serby J. E., Morgan M. B., Cooper E. R., Flight tests on the profile drag of 14% and 25% thick wings. ARC RM 1826 (1937).
41. Speidel L., Berechnung der Strömungsverluste von ungestaffelten ebenen Schaufelgittern. Диссертация, Braunschweig 1953. Ing.-Arch. 22, 295—322 (1954).
42. Squire H. B., Young A. D., The calculation of the profile drag of aerofoils. ARC RM 1838 (1938).
43. Stuart D. J. K., Analysis of Reynolds number effects in fluid flow through two-dimensional cascades. ARC RM 2920 (1956).
44. Taylor G. I., The determination of drag by the pitot traverse method. ARC RM 1808 (1937).
45. Truckenbrodt E., Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. Ing.-Arch. 21, 176—186 (1953).
46. Wanner A., Kretz P., Druckverteilungs- und Profilwiderstandsmessungen im Flug an den Profilen NACA 23012 und Göttingen 549. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 111 (1941).
47. Weidinger H., Profilwiderstandsmessungen an einem Junkers-Tragflügel. WGL-Jb. 1926, 112; NACA TM 428 (1927).
48. Young A. D., Note of the effect of compressibility on Jones' momentum method of measuring profile drag. ARC RM 1881 (1939).
49. Young A. D., The calculation of the total and skin friction drags of bodies of revolution at 0° incidence. ARC RM 1947 (1939).
50. Young A. D., Winterbottom B. A., Winterbottom N. E., Note on the effect of compressibility on the profile drag of aerofoils at subsonic Mach numbers in the absence of shock waves. ARC RM 2400 (1950).
51. Young A. D., Note on momentum methods of measuring profile drags at high speeds. ARC RM 1963 (1946).
52. Young A. D., Note on a method of measuring profile drag by means of an integrating comb. ARC RM 2257 (1948).
53. Young A. D., Kirkby S., The profile drag of biconvex wing sections at supersonic speeds. В книге «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», Braunschweig 1955, 419—431.

Литература

Учебники и обзорные работы

1. Advances in applied Mechanics, Academic Press, New York. Т. I, под ред. R. v. Mises'a и Th. v. Kármán'a, 1948.
Dryden H. L., Recent advances in the mechanics of boundary layer flow, стр. 2—40.
Burgers J. M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, стр. 171—199.
[Обе статьи переведены на русский язык и помещены в сб. «Проблемы механики», вып. I, ИЛ, Москва 1955.]
T. II, под ред. R. v. Mises'a и Th. v. Kármán'a, 1951.
von Kármán Th., Lin C. C., On the statistical theory of isotropic turbulence, стр. 2—19.
Kuetert G., The laminar boundary layer in compressible flow, стр. 23—92.
[Обе статьи переведены на русский язык и помещены в сб. «Проблемы механики», вып. I, ИЛ, Москва 1955.]
T. III, под ред. R. v. Mises'a и Th. v. Kármán'a, 1953.
Frenkiel F. N., Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence, стр. 61—107.
Rosenthal L., Vortex systems in wakes, стр. 185—195.
[Обе статьи переведены на русский язык и помещены в сб. «Проблемы механики», вып. I, ИЛ, Москва 1955.]
T. IV, под ред. H. L. Dryden'a и Th. v. Kármán'a, 1956.
Clauser F. H., The turbulent boundary layer theory, стр. 2—51.
Moog F. K., Three-dimensional boundary layer theory, стр. 160—228.
[Обе статьи переведены на русский язык и помещены в сб. «Проблемы механики», вып. II, ИЛ, Москва 1959.]
T. VI, под ред. H. L. Dryden'a, Th. v. Kármán'a и G. Kuerti, 1960.
Stewartson K., The theory of unsteady, laminar boundary layers.
Ludwig G., Heil M., Boundary-layer theory with dissociation and ionisation.
Chester W., The propagation of shock waves along ducts of varying cross section.
Oswatitsch K., Similarity and equivalence in compressible flow.
Willie R., Kármán vortex streets.
[Все статьи переведены на русский язык и помещены в сб. «Проблемы механики», вып. IV, ИЛ, Москва 1963.]
2. Advances in Aeronautical Sciences, т. I и II. Proceedings of the First International Congress in the Aeronautical Sciences, Madrid, 8—13 IX 1958, Pergamon Press, London 1959.
3. Advances in Aeronautical Sciences, т. III и IV. Proceedings of the Second International Congress in the Aeronautical Sciences, Zürich, 12—16 IX 1960, Pergamon Press, London 1962.
4. Batchelor G. K., Davies R. M. (редакторы): Surveys in mechanics. The G. I. Taylor 70th anniversary volume. Cambridge University Press, 1956.
5. Batchelor G. K., The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 1953. [Имеется русский перевод: Бэтчелор Дж., Теория однородной турбулентности, ИЛ, Москва 1955.]
6. Becker E., Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungsstößen und Expansionsswellen. Progress in Aeronautical Sciences. Под ред. A. Ferri, D. Küchemann'a, L. H. Sterne'a, Pergamon Press. Oxford 1961, т. I, стр. 104—173.
7. Berker R., Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Статья в «Handbuch der Physik», т. VIII/2, 1—384, под ред. S. Flügge, Berlin 1963.
8. Betz A., Konforme Abbildung, изд. 2-е, Springer, Berlin 1964.
9. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. M., Transport phenomena. John Wiley, New York 1960.

10. Birkhoff G., Zarantonello E. H., *Jets, wakes, and cavities*. Academic Press, New York 1957 (Appl. Math. and Mech., т. II). [Имеется русский перевод: Биркгоф Г., Сарантонелло Э., *Струи, следы и каверны*. «Мир», Москва 1964.]
11. Brun E. A. (редактор), *Séminaire d'Aérothermique de la Faculté des Sciences de Paris, Années 1957—1958. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, № N. T. 85* (1959).
12. Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford 1961.
13. Cooke J. G., Hall M. G., *Boundary layers in three dimensions. Progress in Aeronautical Sciences*. Под ред. A. Ferri, D. Kühemann'a, J. H. Sterne'a, Pergamon Press, Oxford 1962, т. II, стр. 221—282.
14. Corcoran W. H., Orfell J. B., Sage B. H., *Momentum transfer in fluids*, Academic Press, New York 1956.
15. Corsini S., *Turbulence, experimental methods*. Статья в «Handbuch der Physik», т. VIII/2, 524—590, под ред. S. Flügge, Berlin 1963.
16. Curle N., *The laminar boundary layer equations*. Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford 1962.
17. Dorran W. H., *Viscous hypersonic flow. Theory of reacting and hypersonic boundary layers*. McGraw-Hill, New York 1963. [Имеется русский перевод: Дорран У. Х., *Гиперзвуковые течения вязкого газа*, «Мир», Москва 1966.]
18. Dryden H. L., *Fifty years of boundary layer theory and experiment*. Science 121, 375—380 (1955).
19. Dryden H. L., Murnaghan F. P., Bateman H., *Hydrodynamics*, Repr. Dover Publications, New York 1956.
20. Eckert E. R. G., *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*, Springer, Berlin 1959.
21. Eckert E. R. G., Drake R. M. jr., *Heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New York 1959. [Имеется русский перевод: Эккерт Э., Дрейк Р., *Теория тепло- и массообмена*, Госэнергоиздат, Москва 1961].
22. Fiat - Review of German Science 1939—1946 (Fiat-Field Information Agency, Technical). Wiesbaden 1948—1949.
 - a) т. 5, часть II, *Mathematische Grundlagen der Strömungslehre*. Под ред. A. Walther'a; в частности, две статьи H. Görtler'a: *Zähe Flüssigkeiten und Turbulenz*.
 - b) т. 11, *Hydro- und Aerodynamik*. Под ред. A. Betz'a; в частности, статьи: A. Betz, *Inkompressible Strömungen*; W. Tollmien, *Laminare Grenzschichten*; L. Prandtl, *Turbulenz*; A. Betz, *Kompressible Strömungen*; G. Vögelpohl, *Die Hydrodynamik des Schmierfilms*.
23. Франк-Каменецкий Д. А., *Диффузия и теплопередача в химической химии*, Изд. АН СССР, Москва 1947.
24. Friedlander S. K., Troppler L., *Turbulence, classic papers on statistical turbulence*. Interscience Publ., New York 1961.
25. «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung». Eine Festschrift in Originalbeiträgen, под ред. H. Görtler'a и W. Tollmien'a, Braunschweig 1955.
26. Goering H., *Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz*, Akademie-Verlag, Berlin 1958.
27. Goldstein S. (редактор), *Modern developments in fluid dynamics*, т. 1 и 2, Oxford University Press, 1938. [Имеется русский перевод: «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости», под ред. С. Гольдштейна, т. 1 и 2, ИЛ, Москва 1948.]
28. Goldstein S., *Lectures in fluid mechanics*, в книге «Lectures in Applied Mathematics», т. II, Interscience Publ. Inc., London, New York 1960.
29. Görtler H. (редактор), *Grenzschichtforschung. IUTAM-Symposium*, Freiburg Brsg. 1957, Springer, Berlin 1958.
30. Grigull U. (редактор), Groeber H., Egk S., Grigull U., *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*. Изд. 3-е 1955, 2-я допечатка 1961.
31. Hayes W. D., Probsttein R. F., *Hypersonic flow theory*. Academic Press, New York 1959. [Имеется русский перевод: Хейз У. Д. и Пробстайн Р. Ф., *Теория гиперзвуковых течений*, ИЛ, Москва 1962.]
32. Hinze J. O., *Turbulence*, McGraw-Hill Book Comp., New York 1959. [Имеется русский перевод: Хинце И. О., *Турбулентность*, Физматгиз, Москва 1963.]
33. Hoerner S. F., *Fluid dynamic drag*. Опубликовано автором, Midland Park, New Jersey 1958.
34. Holder D. W., *The interaction between shock waves and boundary layers*. Fifth International Aeronautical Conference, Los Angeles, New York 1955.
35. Howarth L. (редактор), *Modern developments in fluid dynamics. High speed flow*, т. 1 и 2, Oxford 1953. [Имеется русский перевод: Ховарт Л., *Современное состояние аэродинамики больших скоростей*, т. I, II, ИЛ, Москва 1956.]
36. Howarth L. (редактор), *Boundary layer effects in aerodynamics*. Proc. of a Symposium at the National Physical Laboratory (NPL), London 1955.

37. Howarth L., Laminar boundary layers, статья в «Handbuch der Physik» (под ред. S. Flügge), т. VIII/1, 264—330, Berlin 1959.
38. Jacob M., Heat transfer, т. 1 и 2, John Wiley, New York 1950 и 1957.
39. von Kármán Th., Collected works of Theodore von Kármán, 4 тома, Butterworth 1956.
40. Kaufmann W., Technische Hydro-und Aerodynamik. Изд. 3-е, Springer, Berlin 1963.
41. Knudsen J. G., Katz D. L., Fluid dynamics and heat transfer. McGraw-Hill, New York 1958.
42. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика под ред. И. А. Кибеля, ч. I и II, Физматгиз, Москва 1963.
43. Крамер К., Bericht über die Grenzschicht-Tagung des AGARD Fluid Dynamics Panel, London, 25—29 апреля 1960. AVA-Bericht 60 A 36 (1960).
44. Kuettner A. M., Schetzer J. D., Foundations of Aerodynamics. John Wiley, New York 1959.
- 44a. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое, «Энергия», Москва, 1972.
45. Lachmann G. V. (редактор), Boundary layer and flow control, т. I и II, London, 1961. В частности, следующие статьи: в томе I: Betz A., History of boundary layer control research in Germany, стр. 1—20; W. West T., Theory of boundary layer suction to prevent separation, стр. 196—208; Pleinnes W., Application of the slotted wing to steep gradient and STOL aircraft, стр. 423—447; в томе II: Tollmien W., Grohne D., The nature of transition, стр. 592—626; West W., Survey of calculation methods of laminar boundary layers with suction in incompressible flow, стр. 761—790.
46. Lamb H., Hydrodynamics, изд. 6-е, Cambridge University Press, Cambridge 1957. [Имеется русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, Москва 1947.]
47. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва 1953.
48. Liepmann H. W., Roshko A., Elements of gasdynamics. John Wiley, New York, 1957. [Имеется русский перевод: Липман Г. В. и Рошко А., Элементы газовой динамики, ИЛ, Москва 1961.]
49. Lin C. C., The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, 1955. [Имеется русский перевод: Линь Цзя-Цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, Москва 1958.]
50. Lin C. C., Reid W. H., Turbulent flow, theoretical aspects. Статья в «Handbuch der Physik» (под ред. S. Flügge), т. VIII/2, 438—523, Berlin 1963.
- 50a. Лойцинский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, Москва 1962.
51. Mécanique de la turbulence, Marseille. 28.VIII—2.IX 1961. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1962.
52. Meksyn D., New methods in laminar boundary layer theory. Pergamon Press, 1961.
53. Müller W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Leipzig 1932.
54. Pai S. I., Viscous flow theory, т. I. (Laminar flow), New York 1956, т. II, Turbulent flow, New York 1957. [Имеется русский перевод второго тома: Бай Ши-и, Тurbulentное течение жидкостей и газов, ИЛ, Москва 1962.]
55. Pai S. I., Fluid dynamics of jets. D. van Nostrand Comp., New York 1954. [Имеется русский перевод: Бай Ши-и, Теория струй, Физматгиз, Москва 1960.]
56. Prandtl L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Intern. Math.-Kongr. Heidelberg 1904; см. также ссылку [60].
57. Prandtl L., Tietjens O., Hydro- und Aeromechanik, т. 1 и 2, Springer, Berlin 1929 и 1931. [Имеется русский перевод: Прандтль Л., Титтенс О., Гидро- и аэромеханика, т. 1 и 2, Москва 1932 и 1935.]
58. Prandtl L., The mechanics of viscous fluids. В книге: Dugard W. F., Aerodynamics Theory, т. III, стр. 34—208, Springer, Berlin 1935. [Имеется русский перевод: Дюранд В., Аэродинамика, т. III, Оборонгиз, Москва 1939.]
59. Prandtl L., Führer durch die Strömungslehre. Изд. 6-е, Braunschweig 1965. [Имеется русский перевод с третьего немецкого издания: Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, Москва 1951.]
60. Prandtl L., Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Под ред. W. Tollmien'a, H. Schlichting'a и H. Görtler'a, 3 тома, Springer, Berlin 1961. При ссылках в настоящей книге упоминается для сокращения как «Gesammelte Abhandlungen».
61. Princeton University Series in High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion.
- т. IV, под ред. F. K. Moore'a, Theory of laminar flow, 1964.
- т. V, под ред. C. C. Lin'я, Turbulent flows and the heat transfer, 1959. [Имеется русский перевод: Линь Ц. Ц. (редактор), Тurbulentное течение и теплопередача, ИЛ, Москва 1963.]

- Раздел A. Dryden H. L., Transition form laminar to turbulent flow.
- Раздел B. Schubauer G. B., Tchen C. M., Turbulent flow.
- Раздел C. Lin C. C., Statistical theories of turbulence.
- Раздел E. Deissler R. G., Sabersky R. H., Convective heat transfer and friction in flow of liquids.
- Раздел F. van Driest E. R., Convective heat transfer in gases.
- Раздел G. Yuan S. W., Colling by protective fluid films.
- T. VI, под ред. W. R. Sears'a, General theory of high speed aerodynamics, 1954. [Имеется русский перевод: Общая теория аэродинамики больших скоростей, под ред. В. Сирса. Воениздат, Москва 1962.]
- T. VII, под ред. A. F. Donovan'a и H. R. Lawrence'a, Aerodynamic Components of Aircraft at high speeds, 1957. [Имеется русский перевод: Аэродинамика частей самолета при больших скоростях, под ред. А. Ф. Доновэна и Г. Р. Лоуренса, ИЛ, Москва 1959.]
- T. IX, под ред. R. W. Ladenburg'a, B. Lewis'a, P. M. Pease'a, H. S. Taylor'a, Physical measurements in gas dynamics and combustion, 1954. [Имеется русский перевод: Физические измерения в газовой динамике и при горении, под ред. Р. У. Ладенбурга, Б. Льюиса, Р. М. Пиза и Х. С. Тэйлора, ИЛ, Москва 1957.]
- Раздел F. Kovasznay L. S. G., Turbulence measurements.
62. Riegels F. W., Aerodynamische Profile. R. Oldenbourg, München 1958; см. также английский перевод: Aerofoil Sections, Butterworths, London 1961.
63. Rosenhead L., Laminar boundary layers. Clarendon Press, Oxford 1963.
64. Rotta J. C., Turbulent boundary layers in incompressible flow. В книге «Progress in Aeronautical Sciences», под ред. A. Ferri, D. Küchemann'a, L. H. Stern'e, Pergamon Press, Oxford 1962, т. II, стр. 1—219. [Имеется русский перевод: Ротта И. К., Тurbulentный пограничный слой в несжимаемой жидкости, «Судостроение» 1967.]
65. Rouse H., Advanced mechanics of fluids. John Wiley, New York 1959.
66. Schlichting H., Truckenbrodt E., Aerodynamik des Flugzeuges, Springer, Berlin, т. I, изд. 2-е, 1967, т. II, 1960.
67. Schlichting H., Entstehung der Turbulenz, статья в «Handbuch der Physik» (под ред. S. Flügge), т. VIII/1, стр. 351—450, Berlin 1959. [Имеется русский перевод: Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности, ИЛ, Москва 1962.]
68. Schlichting H., Boundary layer theory. Статья в «Handbook of Fluid Dynamics» (от 9.3 до 9.64), New York 1961.
69. Schlichting H., Entwicklung der Grenzschichttheorie in den letzten drei Jahrzehnten (Dritte Lanchester Gedächtnis-Vorlesung). Zeitschr. Flugwiss. 8, 93—111; (1960); см. также Some developments in boundary layer research in the past thirty years (The Third Lanchester Memorial Lecture). J. Roy. Aero. Soc. 64, 63—80 (1960).
70. Schlichting H., Application of boundary layer theory in turbomachinery. Trans. ASME 81 (J. Basic Eng.), 543—551 (1959); см. также Siemens-Z. 33, 429—438 (1959).
71. Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. В книге «Advances in Aero. Sci.», т. II, Proc. First Intern. Congress Aero. Sci., Madrid 1958, Pergamon Press, стр. 563—586 (1959).
72. Schlichting H., A background to the problem of boundary layer research (Introductory Paper — AGARD Tagung London, апрель 1960). AGARD-Report № 253 (1960).
73. Schlichting H., Three-dimensional boundary layer flow. Association Internationale de Recherches Hydrauliques. Neuvième Assemblée Générale Dubrovnik Yougoslavie, 1961, 1262—1290.
- 73a. Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse aus der Aerodynamik des Tragflugels (Десятая лекция, посвященная памяти Л. Прандтля, 1966). WGLR Jahrb. 1966, 11—32 (1967).
74. Schmidt E., Einführung in die technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik. Изд. 9-е, Berlin 1962.
75. Schmidt E., Thermodynamics, Clarendon Press, Oxford 1949.
- 75a. Scholz N. Aerodynamik der Schaufelgitter, т. I, G. Braun, Karlsruhe 1965.
76. Shapiro A. H., The dynamics and thermodynamics of compressible flow, т. I и II, Ronald Press, New York 1953.
77. Sommerfeld A., Vorlesungen über theoretische Physik. т. II, Mechanik der deformierbaren Körper. Изд. 2-е, Wiesbaden 1947. [Имеется русский перевод: Зоммерфельд А., Механика деформируемых сред, ИЛ, Москва 1954.]
78. Stewartson K., The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Clarendon Press, Oxford 1964.
79. Thwaites B., Incompressible Aerodynamics. Clarendon Press, Oxford 1960.
80. Tollmien W., Fortschritte der Turbulenzforschung. ZAMM 33, 200—211 (1953).

81. Tollmien W., статьи «Grenzschichtheorie» и «Turbulente Strömung» в «Handbuch der Experimentalphysik» (под ред. W. Wien'a и F. Harms'a), т. 4, часть I, Leipzig 1931.
82. Townsend A. A., The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 1956. [Имеется русский перевод. Т а у н с е н д А. А., Структура турбулентного потока, ИЛ, Москва 1960.]
83. Truitt R. W., Hypersonic aerodynamics. Ronald Press, 1959.
84. Truitt R. W., Fundamentals of aerodynamic heating. Ronald Press, New York 1960.
85. Vogelohl G., Betriebssichere Gleitlager. Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb. Springer, Berlin 1958.
86. Young A. D., Boundary layers (in compressible flow). Добавление к книге [35], т. 1, глава X.
87. Schlichting H., A survey on some recent research on boundary layer and heat transfer. Lecture presented at the Meeting of the «Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute» at the Naval Postgraduate School, Monterey, Cal., June 1970; см. также ниже ссылку [106].
88. Sears W. R., van Dyke M. (редакторы), Annual Review of Fluid Mechanics, т. 1, Palo Alto, Calif. Annual Reviews, Inc. 1969.
89. van Dyke M., Vincenti W. S., Wehausen J. V., Annual Review of Fluid Mechanics, т. 2, Palo Alto, Calif. Annual Reviews, Inc. 1970.
90. Goldstein S., Fluid Mechanics in the first half of this century. Статья в [88].
91. Л о й ц я н с к и й Л. Г., The development of boundary layer theory in the USSR. Статья в [89].
92. Smith A. M. O., A decade of boundary layer research. Appl. Mech. Reviews 23, 1-9 (1970).
93. van Dyke M., Higher order boundary-layer theory. Статья в [88].
94. Bowden K. F., Frenkiel F. N., Tani I., Boundary Layer and Turbulence. Proc. IUGG/IUTAM Symposium 1966. The Physics of Fluids Supplement 1967.
95. Patankar S. V., Spalding D. B., Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. Изд. 2-е Intertex Books, London, 1970.
96. Sovran G., Fluid Mechanics of Internal Flow. Proc. Symp. General Motors, 1967. Elsevier Pub., Amsterdam, London, New York 1967.
97. Walz A., Strömungs- und Temperaturgrenzschichten. G. Braun, Karlsruhe 1966.
98. Wells C. S. (редактор), Viscous drag reduction, Plenum Press, New York 1969.
99. Lumley J. L., Drag reduction by additives. Статья в [88].
100. Betchov R., Criminale O., Stability of parallel flows. Acad. Press, New York 1967.
101. Antonatos P. P., Laminar flow control-concepts and application, Astronautics and Aeronautics 4, 32—38 (1966).
102. Kline S. J., Morkovin M. V., Sovran G., Cockrell D. J., Computation of Turbulent Boundary Layers, 1968. AFOSR-IFP-Stanford Conference, т. 1, Methods, prediction, evaluation and flow structure. Stanford University, California 1969.
103. Coles D. E., Hirst E. A., Computation of Turbulent Boundary Layers. 1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference, т. 2, Complied data. Stanford University, California 1969.
104. Kovasznay L. S. G., The turbulent boundary layer. Статья в Annual Review of Fluid Mech. 2 (редактор M. van Dyke), Palo Alto, Calif., Annual Reviews, Inc. 1970.
105. Proceedings of the Boeing Symposium on Turbulence, held at Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington, U.S.A., 23—27 июня 1969. Cambridge at the University Press 1970.
106. Schlichting H., A Survey on some recent research investigation on Boundary Layers and Heat Transfer. J. Appl. Mech. 38, Series E № 2 (1971), 289—300.

Сокращения, применяемые для обозначения некоторых журналов

AVA	— Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen.
DFL	— Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt, Braunschweig.
DVL	— Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Köln-Wahn.
ETH	— Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
FB...	— Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht №..., издается ZWB (см. ниже).
Forschg. Ing.-Wes.	— Zeitschrift Forschung auf dem Gebiet des Ingenieur-Wesens, VDI-Verlag, Berlin (c 1948 Düsseldorf).
Ing.-Arch.	— Ingenieur-Archiv, Berlin (c 1947 Berlin und Heidelberg).
JAS	— Journal of the Aeronautical Sciences, New York (1932—1958).
JASS	— Journal of the Aerospace Sciences (1959—1962).
AIAA-Journ. ¹⁾	— Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (c 1963).
ASME	— American Society of Mechanical Engineers.
J. Fluid Mech.	— Journal of Fluid Mechanics.
NACA Rep.	— Report of the National Advisory Committee for Aeronautics, Washington DC.
NACA TN	— Technical Note of the National Advisory Committee for Aeronautics, Washington DC.
NACA TM	— Technical Memorandum of the National Advisory Committee for Aeronautics, Washington DC.
NASA	— National Aeronautics and Space Administration.
ONERA	— Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Châtillon-sous-Bagneux.
Proc. Roy. Soc.	— Proceedings of the Royal Society, Ser. A, London.
ARC RM	— Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda, London.
ARC CP.	— Aeronautical Research Council, Current Paper.
VDI	— Verein Deutscher Ingenieure.
VDI-Forschungsheft	— Forschung auf dem Gebiet des Ingenieur-Wesens, вып. ..., VDI-Verlag, Berlin (c 1948 Düsseldorf).
ZAMM	— Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin.
ZAMP	— Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Basel.
ZFM	— Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, München und Berlin.
ZFW	— Zeitschrift für Flugwissenschaften, Braunschweig (c 1953).
ZWB	— Zentrale für wissenschaftliches Berichtwesen der Luftfahrtforschung, Berlin.
J. Heat Transfer	— Journal of Heat Transfer.
J. Roy. Aero. Soc.	— Journal of the Royal Aeronautical Society.
J. Appl. Mech.	— Journal of Applied Mechanics.

¹⁾ Журнал AIAA с 1963 г. полностью переводится на русский язык и издается под названием «Ракетная техника и космонавтика» издательством «Мир».

Список наиболее важных обозначений

В некоторых случаях с целью согласования с другими областями знания оказалось неизбежным применять одну и ту же букву для обозначения разных величин. Так, например, в теории ламинарного и турбулентного движения в трубе буква λ означает коэффициент сопротивления, в теории устойчивости ламинарного пограничного слоя — длину волн возмущающего движения, а в теории теплопередачи — коэффициент теплопроводности.

I. Величины общего характера

- γ — удельный вес (вес единицы объема).
- $\rho = \gamma/g$ — плотность (масса единицы объема).
- g — ускорение свободного падения.
- V, U_∞ — скорость набегающего потока (модуль).
- $q = \rho V^2/2$ — динамическое давление.
- h — ширина канала.
- L, l — длина.
- D, d — диаметр.
- R, r — радиус.
- F — смоченная площадь или лобовая площадь тела.
- p — давление (сила на единицу площади).
- x, y, z — декартовы координаты.
- r, φ, z — цилиндрические координаты.
- u, v, w — составляющие скорости.
- \bar{u} — осредненная по времени скорость (в трубе или в пограничном слое).
- $U(x)$ — распределение скоростей вне пограничного слоя.
- ω — угловая скорость.

II. Вязкая жидкость, турбулентность

- μ — динамический коэффициент вязкости.
- $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.
- $Re (= VL/\nu, \text{ или } \bar{u}d/\nu, \text{ или } U\delta/\nu)$ — число Рейнольдса.
- $Ma = (V/c)$ — число Маха.
- Ri — число Ричардсона.
- S — число Струхала.
- τ — касательное напряжение (сила на единицу площади).

- τ_0, τ_w — касательное напряжение на стенке.
- $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ — динамическая скорость.
- δ — толщина пограничного слоя.
- δ_1 — толщина вытеснения.
- δ_2 — толщина потери импульса.
- δ_3 — толщина потери энергии.
- $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ — первый формпараметр профиля скоростей.
- $H_{32} = \delta_3/\delta_2$ — второй формпараметр профиля скоростей.
- ψ — функция тока.
- λ — коэффициент сопротивления при движении жидкости в трубе.
- Λ, κ — формпараметр профиля скоростей в пограничном слое.
- W — сила сопротивления.
- c_W — коэффициент сопротивления.
- c_f — полный коэффициент сопротивления трения.
- c'_f — местный коэффициент сопротивления трения.
- u', v', w' — составляющие турбулентной пульсации скорости.
- $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \dots$ — осредненные по времени производные турбулентных пульсаций скорости.
- ε — кажущийся кинематический коэффициент турбулентной вязкости.
- l — длина пути перемешивания.
- y — расстояние от стенки.
- χ — эмпирическая постоянная турбулентного течения.
- $\eta = y/v_* \nu$ — безразмерное расстояние от стенки.
- $\varphi = u/v_*$ — безразмерная скорость.

k — высота элемента шероховатости.
 k_s — размер зерна эквивалентной песочной шероховатости.
 U — максимальная скорость в середине трубы.
 b — ширина струи или спутного течения.
 ε — степень турбулентности.

III. Переход ламинарного течения в турбулентное

u', v' — составляющие скорости возмущающего движения.
 $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока возмущающего движения.
 $\lambda = 2\pi/\alpha$ — длина волны возмущающего движения.
 β_r — круговая частота возмущающего движения.
 β_i — коэффициент нарастания (или затухания) возмущающего движения.
 $\beta = \beta_r + i\beta_i$.
 $c = \beta/\alpha = c_r + ic_i$.
 c_r — скорость распространения волны возмущающего движения.
 c_i — коэффициент нарастания (или затухания).
 $U(y)$ — распределение скоростей в пограничном слое.
 $U_m(x)$ — распределение скоростей вне пограничного слоя.
 $\left(\frac{U_m \delta_t}{v}\right)_{kp} = Re_{kp}$ — критическое число Рейнольдса.
 Ta — число Тэйлора.

IV. Температурный и сжимаемый пограничные слои

T — температура.
 T_w — температура стенки.

T_e — равновесная температура стенки.
 ΔT — разность температур.
 β — коэффициент теплового расширения.
 δ_T — толщина температурного пограничного слоя.
 q — поток тепла (количество тепла, протекающее в единицу времени через единицу площади).
 λ — коэффициент теплопроводности.
 $a = \lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности.
 c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.
 c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.
 c — удельная теплоемкость жидкостей.
 $\kappa = c_p/c_v$ — показатель адабаты.
 α — коэффициент теплопередачи.
 $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$ — число Нуссельта.
 $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ — число Прандтля.
 $Gr = g \beta \Delta T \frac{l^3}{v^2}$ — число Грасгофа.
 $Ec = U^2/c_p \Delta T$ — число Эккерта.
 Sc — число Шмидта.
 St — число Стэнтона.
 $c = \sqrt{k_p/\rho}$ — скорость звука.
 ω — показатель степени в законе зависимости вязкости от температуры.
 r — коэффициент восстановления.
 i, h — энталпия.
 Φ — диссиликтивная функция.
 R — газовая постоянная.

Именной указатель

- Аббот Дж. Г. (Abbot J. H.) 493, 517, 690
 Аббот Д. Д. (Abbot D. D.) 217, 568
 Абрамовиц М. (Abramowitz M.) 108, 109
 Абрамович Г. Н. 675
 Адлер М. (Adler M.) 565, 568
 Аккерет Ж. (Ackeret J.) 78, 85, 339, 348, 369,
 373, 566, 567, 599, 623
 Аллен Г. Дж. (Allen H. J.) 293, 304
 Амброк Г. С. 293, 304
 Андерлик Э. (Anderlik E.) 673
 Андерсон А. Д. (Anderson A. D.) 296, 305
 Андраде Э. Н. (Andrade E. N.) 180, 190, 400, 412
 Антонатос П. П. (Antonatos P. P.) 697
 Ардуини К. (Arduini C.) 412
 Аттинелло С. (Attinello S.) 373
 Ашкенас Г. (Ashkenas H.) 250
- Бай Ши-и (Pai S. I.) 180, 191, 351, 595, 649, 695
 Байди Р. Б. (Bird R. B.) 693
 Байрон Л. Ф. (Byron L. F.) 348
 Бакке П. (Bakke P.) 673
 Баммерт К. (Bammert K.) 238
 Бар И. (Bahr J.) 690
 Барбер Р. Э. (Barber R. E.) 647
 Барон Дж. Р. (Baron J. R.) 373
 Барроу Д. Л. (Burrows D. L.) 373
 Баум Э. (Baum E.) 190
 Бауэр Б. (Bauer B.) 562, 568
 Бауэр К. (Bauer K.) 123
 Бёдевадт У. Т. (Bödewadt U. T.) 221, 222, 392
 Беккер И. В. (Becker J. V.) 498
 Беккер Э. (Becker E.) 93, 109, 222, 407, 410, 412,
 556, 558, 623, 693
 Беккигит И. Э. (Beckwith I. E.) 331, 348, 351
 Бекман В. (Beckmann W.) 299, 300, 307
 Бенджамиン Т. Б. (Benjamin T. B.) 465, 493
 Бенини Д. Дж. (Benni D. J.) 446, 447
 Берг Г. (Bergh H.) 445, 446
 Беркер Р. (Berker R.) 86, 109, 693
 Бернар Г. (Bernat H.) 493
 Бертрам М. (Bertram M.) 640, 645, 648
 Бетель Г. Э. (Bethel G. E.) 217
 Бетц А. (Betz A.) 17, 35, 150, 155, 211, 216, 353,
 373, 529, 535, 619, 622, 623, 677, 690, 693—695
 Беччоу Р. (Betchou R.) 600, 697
 Биверс Г. С. (Beavers G. S.) 645, 648
 Бикли У. (Bickley U.) 177, 190
 Бинни А. М. (Binnie A. M.) 223
 Биркгоф Г. (Birkhoff G.) 694
 Биркебак Р. (Birkbeck R.) 293, 305
 Блазиус Г. (Blasius H.) 38, 39, 53, 108, 109, 132,
 134, 140, 161, 190, 272, 385, 412, 537, 568
 Блек Дж. (Black J.) 247
 Бленк Г. (Blenk H.) 40, 53, 169, 599
 Блоттер Ф. Г. (Blottner F. G.) 190, 191
 Блум М. (Bloom M.) 493
 Блумер К. Б. (Blumer K. B.) 348, 494
 Богданов С. М. (Bogdonoff S. M.) 342, 348
 Боднареску М. (Bodnărescu M.) 305
 Болей Б. А. (Boley B. A.) 138, 140
 Болен Т. (Bohlen T.) 197, 202, 203, 216, 232, 334
 Боль И. Г. (Bohl J. G.) 665, 673
 Больцте Э. (Boltze E.) 227, 228, 387, 389, 390, 412
 Бонд Р. (Bond R.) 232, 252
 Брайнерд Дж. Г. (Brainerd J. G.) 315, 349
 Брайсон А. Э. (Bryson A. E.) 447
 Бреворт М. Дж. (Breevort M. J.) 659, 674
 Бринич П. Ф. (Brinich P. F.) 491, 493, 645
 Броун А. Ф. (Brown A. F.) 591
 Броун Б. (Brown B.) 364, 374
 Броун С. Н. (Brown S. N.) 156
 Брун Э. А. (Brun E. A.) 287, 304
 Брэдфильт В. С. (Bradfield W. S.) 348
- Бредшоу П. (Bradshow P.) 216, 579
 Брэй Р. С. (Bray R. S.) 374
 Брэйнт Г. Д. (Braint G. D.) 625
 Браслоу А. Л. (Braslow A. L.) 373, 493
 Буазон Ж. (Boison J.) 494
 Будингер Р. Э. (Budinger R. E.) 624
 Буземан А. (Busemann A.) 312, 345, 346, 348
 Булливан В. К. (Bullivant W. K.) 691
 Буниоль Ф. (Bouniol F.) 319, 348
 Бургграф О. Р. (Burggraf O. R.) 645
 Бургесс В. К. (Burgess W. C.) 494
 Бури А. (Buri A.) 603, 604, 606, 607, 623
 Бурк К. (Bourque C.) 673
 Бурн Д. Э. (Bourne D. E.) 293, 304, 645
 Буссинеск Ж. (Boussinesq J.) 520, 535
 Буссман К. (Bussman K.) 209, 216, 367, 376, 458,
 466, 493
 Бъргум О. (Bjorgum O.) 529, 535
 Бърклунд И. С. (Bjorklund I. S.) 304
 Беббер Р. Э. (Babber R. E.) 647
 Бейнс В. Д. (Baines W. D.) 670, 674
 Бейтмен Г. (Bateman H.) 694
 Бэкон Дж. В. (Bacon J. W.) 375
 Бэкстер Д. К. (Baxter D. C.) 190
 Бардсли О. (Bardsley O.) 345, 348
 Барнс Г. Т. (Barnes H. T.) 416, 446
 Барри Ф. В. (Barry F. W.) 348
 Бэрстосту Л. (Bairstow L.) 134, 140
 Бэтчелор Г. К. (Batchelor G. K.) 106, 109, 517,
 535, 693
 Бююктүр А. Р. (Büyüktür A. R.) 304
 Бюргерс И. М. (Burgers J. M.) 49, 53, 138, 140,
 419, 439, 446, 501, 517, 572, 599, 693
- Вадвха И. Д. (Wadwha I. D.) 392, 414
 Вайберг И. А. (Weiberg J. A.) 374
 Вайдингер Г. (Weidinger H.) 692
 Вайзе В. (Weise W.) 285, 293, 296, 304
 Вайль Г. (Weil H.) 141, 498
 Вайцзеккер К. Ф. (Weizsäcker C. F.) 513, 514, 519,
 535
 Вальц А. (Walz A.) 204, 211, 217, 366, 697
 Ван Даин М. (Dyke M. van) 138, 140, 697
 Ван Дриест Э. Р. (Driest E. R. van) 310, 349, 477,
 478, 494, 636, 640, 641, 646, 696
 Ван дер Хегге Цейнен (Hegge Zijnen B. G. van der)
 49, 54, 138, 139, 306, 419, 439, 447, 673, 674
 Ван Инген И. Л. (Ingen J. L. van) 460, 495
 Ван Ле Н. (Le N. van) 624
 Ванг Г. Э. (Wang H. E.) 284, 298, 306, 404, 413
 Ваннер А. (Wanner A.) 692
 Вануччи Дж. Б. (Vanucci J. B.) 361, 375
 Ватсон Дж. (Watson J.) 96, 98, 404
 Ватсон Э. Дж. (Watson E. J.) 110, 217, 363, 376,
 394, 414
 Вебер Г. Э. (Weber H. E.) 223, 253
 Вендт Г. (Wendt H.) 316, 318, 338, 349
 Вендт Ф. (Wendt F.) 498
 Веннер К. (Wenner K.) 285, 295, 307
 Веролле Э. (Verolle E.) 581, 599
 Вигхарт К. (Wieghardt K.) 154, 156, 212, 253,
 376, 519, 541, 570, 589, 600, 608, 626, 673, 675
 Видерхольд В. (Wiederhold W.) 570
 Визельсбергер К. (Wieselsberger C.) 54, 237, 253,
 449, 579, 600
 Вийкер Г. (Wijker H.) 499
 Викторин К. (Viktorin K.) 675
 Вилле Р. (Wille R.) 670, 675, 693
 Вилькен Г. (Wilken H.) 619, 626
 Вильямс Д. Г. (Williams D. H.) 600, 691
 Вильямс Дж. (Williams J.) 376, 519, 618, 626
 Винклер Э. М. (Winkler E. M.) 643, 646, 648
 Винченти В. С. (Vincenti W. S.) 697

- Висконти Ф. (Visconti F.) 373, 493
 Виттинг Г. (Witting H.) 187, 190, 447, 496
 Вольхарт В. Д. (Wohlhart W. D.) 247, 252
 Вортман Ф. К. (Wortmann F. K.) 371, 377, 444, 449
 Враге Э. (Wrage E.) 289, 308
 Вребалович Т. (Vrebalovich T.) 479, 496
 Вуд Г. П. (Wood G. P.) 659, 699
 Вундт Г. (Wundt H.) 392, 414
 Вюст В. (Wuest W.) 352, 358, 361, 377, 416, 499,
 625, 675, 695
- Гавильо Дж. Дж. (Gaviglio J. J.) 517
 Гаис Т. (Geis Th.) 155, 243, 251, 384
 Галавич Ф. (Galavics F.) 562, 568
 Гарбс К. (Garbsch K.) 222
 Гарднер Г. О. (Gardner G. O.) 646
 Гарнер Г. К. (Garner H. C.) 603, 604, 606, 624, 691
 Гаррик Дж. Э. (Garrick J. E.) 451, 498
 Геберс Ф. (Gebers F.) 579, 599
 Гезли К. (Gazley C.) 374
 Гейзенберг В. (Heisenberg W.) 447, 514, 518, 535
 Гербер А. (Gerber A.) 367, 374
 Герберс В. (Gerbers W.) 94, 109
 Геринг Г. (Goering H.) 517, 694
 Герстен К. (Gersten K.) 249, 251, 378, 495, 567,
 599, 623, 624, 690, 691
 Гёттер Г. (Götterl H.) 15, 150, 155, 171, 172, 186,
 187, 190, 207, 216, 226, 235, 245, 246, 251,
 374, 394, 412, 446, 447, 470, 483, 484, 486
 Гёттер Б. (Göthert B.) 691
 Гётт Г. И. (Goett H. J.) 691
 Гидт В. Г. (Giedt W. H.) 305
 Гинцель И. (Ginzel I.) 332, 349
 Глауэрт М. Б. (Glaupert M. B.) 98, 216, 226, 251,
 402, 404, 412, 674
 Годдард Ф. Э. (Goddard F. E.) 644, 646
 Голанд Л. (Goland L.) 289, 305
 Гольдштайн С. (Goldstein S.) 134, 140, 145, 155,
 172, 174, 185, 190, 370, 374, 387, 412, 473,
 487, 488, 494, 495, 547, 561, 568, 583, 599,
 691, 694, 697
 Гом А. (Gosh A.) 400, 402, 403, 412
 Гран Ольссон Р. (Gran Olsson R.) 663, 664, 673, 674
 Гретт Дж. Л. (Gregg J. L.) 302, 303, 308, 392, 413
 Грегори Н. (Gregory N.) 369, 374, 486, 493, 495,
 579, 599
 Гриббен Р. Дж. (Gribben R. J.) 412
 Гриминг Дж. (Greeming J.) 376
 Гранвилл П. С. (Granville P. S.) 444, 447, 495, 685,
 691
 Григул У. (Grigull U.) 277, 305, 694
 Гринспон Г. П. (Greenspan H. P.) 446, 447
 Гриффит А. А. (Griffith A. A.) 375
 Гроне Д. (Grohne D.) 237, 251, 436, 447, 695
 Гросе Дж. Ф. (Grosse J. F.) 374
 Гроф Э. (Groth E.) 375
 Грунвигт Э. (Gruschnitz E.) 155, 219, 251, 334,
 336, 338, 349, 603, 606, 610, 611, 624
 Гудерсон П. Б. (Gooderson P. B.) 659, 674
 Гуха К. Р. (Guga C. R.) 293, 305
 Гуче Ф. (Gutsche F.) 622, 624
 Гэдд Г. Э. (Gadd H. E.) 339, 347—349, 579, 599
 Гюмбель Л. (Gümbel L.) 120, 123
- Дайслер Р. Г. (Deissler R. G.) 633, 644, 645, 696
 Даас А. (Das A.) 247, 690, 691
 Данн Д. В. (Dunn D. W.) 478, 494
 Данненберг Р. Э. (Danneberg R. E.) 374
 Даннинг Р. В. (Dunning R. W.) 494
 Дарси Г. (Darcy H.) 546, 568
 Даттон Р. А. (Dutton R. A.) 519, 579, 599
 Дайвер Г. А. (Dwyer H. A.) 253
 Деферэ А. Н. (Devereux A. N.) 375
 Де Гроот С. Р. (De Groot S. R.) 69, 74
 Де Грофф Г. М. (Groff H. M. de) 305
 Де Клер Б. (des Clers B.) 316, 349
 Декурсен Д. Г. (Decoursen D. G.) 348
 Деметриадес А. (Demetriades A.) 494
 Денисон М. Р. (Denison M. R.) 190
 Дёнх Ф. (Dönch F.) 601, 624
 Дёнх Э. Э. (Doenhoff A. E.) 374, 493, 494, 603,
 604, 606, 610, 624, 690
 Детра Р. В. (Detra R. W.) 566, 568
 Дёч Г. (Doetsch H.) 446, 461, 494, 599, 680, 690
 Джек Дж. Р. (Jack J. R.) 495
 Джекобс В. (Jacobs W.) 251, 591, 599
 Джекобс Э. Н. (Jacobs E. N.) 690, 691
 Джексон Т. В. (Jackson T. W.) 302
 Джейфрис Г. (Jeffreys H.) 495
 Джибелато С. (Gibbelato S.) 402, 403, 412
- Джонс Б. М. (Jones B. M.) 461, 495, 671, 679, 680
 Джонс М. (Jones M.) 362, 374
 Джонс Р. Т. (Jones R. T.) 251, 691
 Джонсон А. Ф. (Johnson A. F.) 331, 349
 Джонсон Г. А. (Johnson G. A.) 351
 Джонсон Д. В. (Johnson D. V.) 296, 306
 Джонсон Д. С. (Johnson D. S.) 631, 646
 Джонстон Дж. П. (Johnston J. P.) 623, 624
 Диагуила А. Дж. (Diaguila A. J.) 305
 Диаконис Н. С. (Diaconis N. S.) 495, 645
 Дильт З. В. (Diehl Z. W.) 511, 518
 Дин В. Р. (Dean W. R.) 565
 Динеман В. (Dienemann W.) 246, 291, 292, 304
 Диппрей Д. Ф. (Dipprey D. F.) 636, 637, 646
 Домм У. (Domm U.) 44, 53
 Донован А. Ф. (Donovan A. F.) 696
 Донован В. Ф. (Donovan W. F.) 110
 Доноух П. Л. (Donoughue P. L.) 293, 304, 364, 374
 Дорренс В. Г. (Dorrance W. H.) 310, 374, 694
 Даунлен Э. М. (Downlen E. M.) 690
 Даур Ф. Дж. (Dore F. J.) 374
 Драйден Х. Л. (Dryden H. L.) 17, 419, 422, 426,
 439, 446, 447, 486, 490, 494, 515—518, 693, 696
 Древитц О. (Drewitz O.) 293, 304
 Дрейк Р. М. (Drak R. M.) 304
 Друг Г. (Drougge G.) 690
 Дубс В. (Dubs W.) 53, 447
 Дхаван С. (Dhawans S.) 140, 141, 341, 446, 646
 Дюма Р. Ж. (Dumas R. J.) 517, 581, 599
 Дюранд В. Ф. (Durand W. F.) 18, 123, 217, 447, 695
 Дэвис Г. (Davis H.) 690
 Дэвис Р. Т. (Davis R. T.) 187
 Дэвис Г. Дж. (Davis H. J.) 346, 348
 Дэвис Д. Р. (Davies D. R.) 293, 304, 645, 674
- Жаке Б. М. (Jaquet B. M.) 247
 Жубер П. Н. (Joubert P. N.) 623, 624
- Зайдф А. (Seiff A.) 647
 Зайдферт Р. (Seifert R.) 569
 Заловчик И. А. (Zalovcik J. A.) 499
 Зексль Т. (Sexl Th.) 404, 413, 492, 497
 Зэнген Э. (Soengen E.) 303
 Зикман И. (Siekmann J.) 295, 307
 Зоммерфельд А. (Sommerfeld A.) 120, 123, 431,
 449, 691
- Иайэн К. С. (Eian C. S.) 645
 Ибелль В. Э. (Ibele W. E.) 305
 Иглиш Р. (Iglisch R.) 359, 362
 Иенсон В. Г. (Jenson V. G.) 79, 85
 Иих К. С. (Iih K. S.) 293, 305
 Иллингворт К. Р. (Illingworth C. R.) 238, 251,
 306, 320, 349, 392, 413
 Имай И. (Imai I.) 138, 141, 308
 Инмен Р. М. (Inman R. M.) 339, 349
 Иодльбаузер К. (Jodlbauer K.) 304, 306
 Иоханнесен Н. Г. (Johannesen N. H.) 345, 350
 Ирвинг Т. Ф. (Irvine T. F.) 305, 553, 563
 Истмен Н. (Eastman N.) 690
 Ито Х. (Ito H.) 565, 568
- Какутани Т. (Kakutani T.) 449
 Каллерт В. (Kahler W.) 121, 123
 Каминг Г. Г. (Cuming H. G.) 566, 568
 Камингс Э. В. (Comings E. W.) 304
 Карман Т. (Kármán Th.) 43, 54, 102, 109, 155, 192,
 216, 319, 350, 501, 517, 518, 530, 535, 547,
 560, 568, 579, 583, 599, 633, 639, 646, 693
 Кати Д. Л. (Katz D. L.) 306, 695
 Кауфман Л. (Kaufmann L.) 362, 375, 695
 Квик А. В. (Quick A. W.) 187
 Келли Г. Р. (Kelly H. R.) 232, 251
 Кель А. (Kehl A.) 603, 611, 624
 Кемпф Г. (Kempf G.) 105, 109, 579, 583, 589, 599
 Кеплер К. Э. (Kepler C. E.) 342, 348
 Кёрл Н. (Curle N.) 331, 346, 349, 374, 444, 446, 694
 Кестер Р. Г. (Kester R. H.) 599, 639, 645
 Кестин И. (Kestin J.) 55, 74, 284, 298, 299, 304,
 306, 308, 413, 596, 632, 646
 Кетеролл Д. (Catherall D.) 108, 109
 Кибель И. А. 695
 Кимбер К. В. (Kimber K. W.) 493
 Киппенхан К. И. (Kippenhahn C. J.) 161, 191,
 278, 307
 Кирде К. (Kirde K.) 91, 109
 Киркби С. (Kirkby S.) 685, 692
 Кирстен Г. (Kirsten H.) 536, 568

- Кирхгесснер К. (Kirchgässner K.) 495
 Киршер О. (Kirscher O.) 305
 Кистлер А. Л. (Kistler A. L.) 628, 630, 646
 Кифер Дж. Ф. (Keefer J. F.) 670, 674
 Клайн С. Дж. (Kline S. J.) 566, 568, 569, 637,
 647, 697
 Кларк Дж. Г. (Clarke J. H.) 374
 Клаттер Д. В. (Clutter D. W.) 190, 191
 Клаузер Кс. М. (Clauser X. M.) 485, 493
 Клаузер Ф. Г. (Clauzer F. H.) 485, 493, 624, 693
 Клембон П. С. (Klebanoff P. S.) 419, 420, 423,
 427, 446—448, 487, 510, 511, 513, 518, 603,
 625, 646
 Клейн А. Л. (Klein A. L.) 516, 518
 Клейн И. (Klein J.) 293, 306
 Кленшоу К. В. (Clenshaw C. W.) 445, 446
 Клёнкенс Г. (Kläukens H.) 238
 Клэпп Дж. Т. (Clapp J. T.) 304
 Кнудсен И. Г. (Knudsen J. G.) 306, 695
 Ко С. И. (Ko S. I.) 306
 Ковашней Л. С. (Kovasznay L. S.) 518, 630, 646,
 696, 697
 Кокер Э. Г. (Coker E. G.) 416, 446
 Кокрелл Дж. (Cockrell D. J.) 567, 568, 697
 Коллати Л. (Collatz L.) 235
 Колмогоров А. Н. 513, 514
 Комацу Х. (Komatsu H.) 308
 Кон В. Ф. (Cope W. F.) 348
 Конье М. (Korpe M.) 551
 Кордес Г. (Cordes G.) 665, 673
 Коркеги Р. Г. (Korkegi R. H.) 491, 495
 Коркорен В. Г. (Corcoran W. H.) 694
 Корниш Дж. Дж. (Cornish J. J.) 625
 Коркос Г. М. (Corcos G. M.) 492, 494
 Коррсин С. (Corrsin S.) 501, 517, 673, 694
 Костелло Г. Р. (Costello G. R.) 251
 Коттес Г. (Kottas H.) 690
 Коулброн К. Ф. (Colebrook C. F.) 560, 568
 Коулей М. К. (Cauley M. C.) 494
 Коулз Д. (Coles D.) 348, 581, 599, 642, 645, 697
 Кох Р. (Coch R.) 568
 Кохэрэн В. Г. (Cochran W. G.) 102, 104, 109, 391
 Коин Н. Е. 695
 Коин К. Б. (Cohen C. B.) 325, 327, 328, 331, 348, 349
 Коин Н. Б. (Cohen N. B.) 414, 645
 Крабтри Л. Ф. (Crabtree L. F.) 234, 251, 252, 338,
 351
 Крамер М. О. (Kramer M. O.) 465, 495, 496
 Кребб Р. С. (Crabbe R. S.) 248, 252
 Кремер К. (Kraemer K.) 490, 495, 613, 624, 685,
 691, 695
 Крёнер Р. (Kröner R.) 601, 624
 Кретц П. (Kretz P.) 692
 Крепши Р. Дж. (Cresci R. J.) 375
 Криминале В. О. (Criminale W. O.) 600, 697
 Кронко Л. (Crococo L.) 312, 319, 348, 349, 642, 645
 Крукилин Г. Н. 306
 Крюгер В. (Krüger W.) 569
 Крюгер Г. (Krüger H.) 469, 496
 Кук Дж. К. (Cooke J. C.) 223, 232, 256, 694
 Кулик Ф. Э. К. (Culick F. E. C.) 374, 645
 Купер Р. Д. (Cooper R. D.) 517
 Купер Э. Р. (Cooper E. R.) 692
 Курики К. (Kuriki K.) 497
 Кутателадзе С. С. 627, 646, 695
 Куэйко М. Х. (Queijo M. J.) 247, 252
 Куэти Г. (Kuetli G.) 312, 350, 393
 Куэтт М. (Couette M.) 446
 Кзыровский М. (Krywoblocki M. Z.) 180, 191,
 226, 249, 251, 406
 Кьюз А. М. (Kueethe A. M.) 494, 516, 517, 669,
 674, 695
 Кэй Дж. (Kaye J.) 318, 350
 Кэй Дж. М. (Kaye J. M.) 318, 362, 375, 637, 647
 Кэйс В. М. (Kays W. M.) 304
 Кэррье Г. Ф. (Carrier G. F.) 138, 140, 249
 Кэррье П. (Carriere P.) 374, 618, 624
 Кюхеман Д. (Küchemann D.) 247, 251, 496
- Лав А. (Love A. E. H.) 74
 Ладенбург Р. У. (Ladenburg R. W.) 696
 Лайон Г. М. (Lyon H. M.) 624
 Лайте Р. И. (Leite R. J.) 492, 496
 Лайтхилл М. Дж. (Lighthill M. J.) 216, 232, 293,
 294, 306, 402, 413
 Лакстон Р. Э. (Luxton R. E.) 331, 350
 Лэмб Г. (Lamb H.) 74, 81, 695
 Ланге А. Г. (Lange A. H.) 479, 496
 Ланхгаар Г. (Langhaar H.) 235, 251
 Ландаль М. Т. (Landahl M. T.) 465, 496
 Ландон Л. Д. 695
- Ландвебер Л. (Landweber L.) 580, 599
 Ларренс Дж. К. (Laurence J. C.) 511, 518
 Лахфер И. (Laufer J.) 479, 496, 511, 518, 603, 624
 Лахман Г. В. (Lachmann G. V.) 353, 371, 375, 695
 Левек М. А. (Leveque M. A.) 272, 306
 Леви С. (Levy S.) 306
 Лей Д. К. Ф. (Leigh D. C. F.) 191, 363
 Леонтьев А. И. 627, 646, 695
 Лепаж Л. (Lepage L.) 375
 Ле Февр Э. Ж. (Le Fevre E. J.) 302, 306
 Ле Фюр Б. (Le Fur B.) 293, 295, 306
 Ли Р. Э. (Lee R. E.) 479, 496
 Ли Т. И. (Li T. I.) 324, 325, 327, 331, 350
 Либби П. А. (Libby P. A.) 350, 362, 374, 375
 Либе В. (Liebe W.) 247, 251
 Либерс Л. (Lieber L.) 44, 53, 169
 Ливингуд Дж. Н. Б. (Livingood J. N. B.) 292,
 293, 304, 364, 374
 Лиз Л. (Lees L.) 350, 351, 476, 478, 496
 Лильей Г. М. (Lilley G. M.) 331, 350, 646
 Линдгрен Э. Р. (Lindgren E. R.) 469, 493, 496
 Линке В. (Linke W.) 169, 191, 475, 496
 Линн П. Ш. (Lin C. C.) 44, 54, 138, 140, 156, 299,
 413, 422, 439, 446, 447, 476, 478, 494, 496, 501,
 517, 518, 535, 626, 693, 695, 696
 Липман Г. В. (Liepmann H. W.) 140, 141, 294,
 306, 339, 341, 345, 350, 476, 496, 599, 644,
 646, 695
 Литце А. Ф. (Lietzke A. F.) 306
 Лифшиц Е. М. 695
 Лобб Р. К. (Lobb R. K.) 643, 646
 Лойцинский Л. Г. 695, 697
 Локк К. Н. Г. (Lock C. N. H.) 691
 Локк Р. К. (Lock R. C.) 181, 191
 Лопозер Дж. Д. (Loposer J. D.) 599
 Лоренц Г. Г. (Lorenz H. H.) 303, 306
 Лорентц Г. А. (Lorentz H. A.) 42, 3447
 Лоу Г. М. (Low G. M.) 375, 47, 8496
 Лоуренс Г. Р. (Lawrence H. R.) 696
 Лоус Г. Н. (Lauze G. N.) 106, 109
 Лофтинг Л. К. (Loftin L. K.) 374
 Лохтенберг В. Г. (Lochtenberg B. H.) 452, 496
 Лук Б. К. (Look B. C.) 293
 Лукашевич И. (Lukasiewicz I.) 345, 350
 Лумлей Дж. Л. (Lumley J. L.) 697
 Лус Г. Г. (Loos H. G.) 248, 251
 Лью Г. Г. (Lew H. G.) 361, 364, 375
 Льюис Б. (Lewis B.) 696
 Льюис Г. В. (Lewis G. W.) 447
 Людвиг Г. (Ludwig H.) 237, 251, 483, 496, 603,
 624, 631, 632, 646, 693
 Люккерт Г. И. (Luckert H. J.) 152, 155
 Лютхандер С. (Luthander S.) 237, 251
- Мазур Р. (Mazur R.) 69, 74
 Майер Э. (Meyer E.) 554, 568
 Майзель Д. С. (Maisel D. C.) 306
 Майкснер Дж. (Meixner J.) 74
 Майлс Ф. Г. (Miles F. G.) 375
 Майр В. А. (Mair W. A.) 350
 Майрелс Г. (Mirels H.) 410, 413
 Мак Адамс К. (Mc Adams C.) 373
 Мак Куллагх Г. Б. (Mc Cullogh G. B.) 305
 Мак Лафферти Г. Г. (McLafferty G. H.) 647
 Макк Л. М. (Mack L. M.) 499, 647
 Манглер В. (Mangler W.) 211, 212, 216, 239, 252,
 331
 Манглер К. В. (Mangler K. W.) 108
 Марклед Э. (Markladd E.) 567, 568
 Мартин Дж. К. (Martin J. C.) 238, 252
 Матье Р. Д. (Mathieu R. D.) 375
 Махони И. И. (Mahoney I. I.) 624
 Мёбис Г. (Möbius H.) 562, 568
 Медер П. Ф. (Maeder P. F.) 284, 298, 304, 306,
 404, 413
 Мексин Д. (Meksyn D.) 135, 141, 208, 216, 306,
 346, 350, 422, 448, 484, 496, 695
 Мёller В. (Möller W.) 234, 252
 Мёллер Э. (Möller E.) 54
 Менкес Г. Р. (Menkes H. R.) 374
 Мередит Ф. В. (Meredith F. W.) 375
 Мерк Г. И. (Merk H. J.) 292, 306
 Мессон Д. Дж. (Masson D. J.) 374
 Мизес Р. (Mises R. von) 151, 156, 210, 431, 448, 693
 Минкли Г. С. (Mickley H. S.) 315
 Милликен К. Б. (Millikan C. B.) 216, 232, 516,
 518, 620, 624
 Миллс Р. Г. (Mills R. H.) 191
 Миллсапс К. (Millsaps K.) 107, 109, 277, 306
 Митуиси С. (Mituishi S.) 487, 498, 600
 Митчел А. Р. (Mitchell A. R.) 152, 156

- Михалке А. (Michalke A.) 234, 252, 445, 448
 Мичел А. Г. М. (Michell A. G. M.) 123
 Мишель Р. (Michel R.) 459, 496
 Мозер Ф. (Moser F.) 338
 Мокк В. К. (Mock W. C.) 517
 Монахэн Р. Дж. (Monaghan R. J.) 319, 331, 350
 Морган А. Дж. А. (Morgan A. J. A.) 277, 307
 Морган Г. В. (Morgan G. W.) 307
 Морган М. Б. (Morgan M. B.) 692
 Мордухов М. (Morduchow M.) 331, 350, 375
 Морковин М. В. (Morkovin M. V.) 446, 448, 630,
 647, 697
 Моррис Д. Н. (Morris D. N.) 332, 350
 Моттадр Э. Дж. (Mottard E. J.) 599
 Мотцфельд Г. (Motzfeld H.) 518, 581, 599
 Moody А. М. (Moody A. M.) 690
 Moody Л. Ф. (Moody L. F.) 568
 Мур К. А. (Moore C. A.) 569
 Мур Л. Л. (Moore L. L.) 319, 350
 Мур Ф. К. (Moore F. K.) 250, 252, 339, 350, 384,
 413, 693, 695
 Мурнаган Ф. П. (Murnaghan F. P.) 694
 Муттрей Г. (Muttray H.) 663, 674
 Мэйджер А. (Mager A.) 248, 251, 621, 624, 642, 647
 Мэсон Дж. (Masson D. J.) 374
 Мэйдью Р. К. (Maydew R. C.) 350
 Мэллок А. (Mallock A.) 496
 Мэттинг Ф. В. (Matting F. W.) 647
 Мэр В. А. (Mair W. A.) 345, 348
 Мильтер В. (Müller W.) 94, 109, 695
 Мильтер Э. А. (Müller E. A.) 346, 350, 476
 Мионц Г. (Münz H.) 466
 Миесман Г. (Muesmann H.) 622, 624
- Навье Л. (Navier L.) 72
 Нагамату Х. Т. (Nagamatsu H. T.) 324, 325, 327,
 331, 350
 Наме Р. (Nahme R.) 276, 307
 Наме Ф. (Nahme F.) 124, 123
 Нарасимха Р. (Narasimha R.) 446
 Науман А. (Naumann A.) 35, 569
 Нейдейл Дж. Ф. (Naleid J. F.) 579, 599, 600, 620
 Несс Н. (Ness N.) 375
 Нёттер Ф. (Noether F.) 447
 Нигам С. Д. (Nigam S. D.) 238, 240, 252, 254, 392,
 413
 Нидал Дж. Э. (Nidal J. E.) 221, 253
 Никель К. (Nickel K.) 150, 156, 375
 Никурадзе И. (Nikuradse J.) 138, 141, 234, 518,
 536, 538, 541, 544, 647, 549, 551, 553, 555,
 560, 562, 564, 569, 580, 587, 600, 601, 603,
 607, 624
 Нипперт Г. (Nippert H.) 565, 569
 Нихольм Дж. Р. (Nyholm J. R.) 647
 Нойман Э. П. (Neumann E. P.) 348
 Нуундер В. (Nunner W.) 636, 647
 Нуссельт В. (Nußelt W.) 307, 569
 Ньюмен Б. Г. (Newmann B. G.) 673
- О'Доннел Р. М. (O'Donnell R. M.) 318, 349, 643,
 646
 Озен К. В. (Oseen C. W.) 94, 109, 114, 123
 Окуно А. Ф. (Okuno A. F.) 624
 Олдройд Дж. Г. (Oldroyd J. G.) 307
 Омбек Г. (Ombek H.) 569
 Orr В. М. Ф. (Orr W. M. F.) 448
 Осака Х. (Osaka H.) 308
 Осватич К. (Oswatitsch K.) 551, 569, 693
 Острах С. (Ostrach S.) 307, 384, 413
 Оуэн П. Р. (Owen P. R.) 636, 637, 693
 Оуэр Э. (Ower E.) 624
- Паллоне А. (Pallone A.) 375
 Паннел Дж. Р. (Pannell J. R.) 569
 Пантел К. (Pantell K.) 600
 Паппас К. К. (Pappas K. K.) 350, 375, 476, 495,
 619, 624, 625, 647
 Парр О. (Parr O.) 227, 620, 625
 Патанкар К. Б. (Patankar C. B.) 697
 Пекерис К. Л. (Pekeris C. L.) 492, 496
 Перш Дж. (Persh J.) 448, 498, 643, 646
 Пехау В. (Pechau W.) 375, 616, 625
 Пешке В. (Paeschke W.) 600
 Пиз М. М. (Pease P. M.) 696
 Пинкerton Р. М. (Pinkerton R. M.) 691
 Пипкин А. К. (Pipkin A. K.) 307
 Пирси Н. А. В. (Piercy N. A. V.) 212, 216, 486, 496,
 694
 Плэтт Р. К. (Platt R. K.) 516, 518
- Польгаузен К. (Pohlhausen K.) 107, 109, 161, 191,
 192, 197, 203, 206, 211, 216, 277, 334
 Польгаузен Э. (Pohlhausen E.) 280, 299, 302, 306,
 307
 Польцин И. (Polzin I.) 601, 625
 Попплтон Э. Д. (Poppleton E. D.) 368, 375
 Поттер Дж. Л. (Potter J. L.) 496
 Поттер О. Э. (Potter O. E.) 181, 191
 Прагер В. (Prager W.) 74
 Прандтль Л. (Prandtl L.) 15—17, 50, 52—54, 109,
 112, 123, 124, 128, 134, 141, 150, 152, 156, 185,
 191, 213, 217, 245, 248, 252, 307, 355, 365, 367,
 375, 418, 422, 431, 447, 448, 473, 497, 521,
 522, 524, 525, 529, 530, 534, 535, 547, 548, 565,
 569, 572, 576, 577, 586, 598, 600, 606, 633, 634,
 647, 651, 655, 674, 694, 695
 Престон Дж. Г. (Preston J. H.) 216, 217, 375, 447,
 487, 488, 493, 494, 579, 600, 691
 Преч И. (Pretsch J. H.) 209, 234, 252, 363, 375,
 424, 448, 451, 453, 459, 467, 492, 493, 497,
 605, 625, 684, 691
 Пригожин И. (Prigogine I.) 69, 74
 Пробстейн Р. Ф. (Probstein R. F.) 232, 252, 694
 Шазиль Ж. (Poiseuille J.) 26, 35, 109, 416
 Пуассон С. Д. (Poisson S. D.) 72, 74
 Пуассон-Кантон Ф. (Poisson-Quinton Ph.) 375
 Пуннис Б. (Punnis B.) 94, 109, 235, 252
 Путс Г. (Poots G.) 331, 351
 Прайфер Г. (Pfeiffer H.) 35
 Пфенninger В. (Pfenninger W.) 369, 371, 373,
 375, 691
 Пфляйдерер К. (Pfleiderer C.) 222, 252
 Пэк Д. К. (Pack D. C.) 226, 252
 Пэн В. М. (Pun W. M.) 292, 308, 312
 Пэнхерст К. Р. (Pankhurst C. R.) 371, 375
- Райнбольдт В. (Rheinboldt W.) 376
 Райх рдт Г. (Reichardt H.) 473, 482, 497, 508,
 518, 525, 526, 533, 535, 543, 561, 569, 632,
 633, 647, 651, 658, 659, 661, 663, 665—674
 Рамзей В. Дж. (Ramsey W. J.) 567, 570, 601, 626
 Рас М. (Ras M.) 369, 373
 Рауз Г. (Rouse H.) 696
 Регеншайдт Б. (Regenscheit B.) 376
 Режье А. (Regeir A.) 110
 Рейл В. Г. (Reid W. H.) 518, 695
 Реймер В. 1. (Raymer W. G.) 375, 624
 Рейнберд В. Дж. (Rainbird W. J.) 252
 Рейнольдс Осборн (Reynolds Osborn) 16, 17, 35,
 115, 307, 415, 416, 422, 228, 492, 504, 518,
 637, 647
 Рейнольдс О. (Reynolds O.) 647
 Респет А. (Raspet A.) 362, 376, 617, 625
 Решотко Е. (Reshotko E.) 327, 328, 331, 348, 351,
 478, 497, 645, 647
 Рибнер Г. С. (Ribner H. S.) 518
 Ривза Б. Л. (Reeves B. L.) 161, 191, 278, 307, 351
 Ригельс Ф. В. (Riegels F. W.) 122, 123, 150, 156,
 309, 451, 497, 691, 696
 Риген Дж. Д. (Rigan J. D.) 339
 Ридберг А. (Rydberg A.) 237
 Риддел Ф. Р. (Riddell F. R.) 250
 Ринглеб Ф. (Ringlеб F.) 366, 376
 Рихтер Г. (Richter H.) 565, 569
 Рихтмиер Р. Д. (Richtmyer R. D.) 188, 191
 Ричардс Э. Дж. (Richards E. J.) 307, 376, 413, 496
 Ричардсон Л. Ф. (Richardson L. F.) 473, 497
 Ричардсон П. Д. (Richardson P. D.) 632, 646
 Ричардсон Э. Г. (Richardson E. G.) 406, 486
 Роберте Г. Э. (Roberts H. E.) 376
 Робертсон Дж. М. (Robertson J. M.) 601, 625
 Робинсон Р. Б. (Robinson R. B.) 494
 Роджерс М. Г. (Rogers M. H.) 106, 109
 Родэн Г. Г. (Rheden H. G.) 691
 Роз Р. К. (Rose R. C.) 375
 Розе Н. В. 695
 Розенбрук Г. (Rosenbrook G.) 444, 448
 Розенхэд Л. (Rosenhead L.) 152, 156, 217, 387,
 412, 693, 696
 Розенцивейг М. Л. (Rosenzweig M. L.) 402, 413
 Розин Л. А. 385, 413
 Рой Д. (Roy D.) 400, 413
 Ройл Дж. К. (Royle J. K.) 345, 350
 Росс А. О. (Ross A. O.) 497
 Росс Д. (Ross D.) 601, 625
 Ротт Н. (Rott H.) 234, 252, 338, 339, 348, 351,
 402, 413
 Ротта И. К. (Rotta J. C.) 417, 418, 448, 493, 501,
 518, 562, 569, 603, 608, 615, 625, 627, 629,
 630, 636, 638, 644, 647, 648, 696
 Роуз Р. К. (Rose R. C.) 375

- Рошко А. (Roshko A.) 44, 54, 169, 341, 350, 695
 Рубах Г. (Rubach H.) 54, 395, 413
 Рубезин М. В. (Rubesin M. W.) 293, 304, 318, 348, 351, 376, 498, 619, 625
 Руден П. (Ruden P.) 667, 674
 Рэйли (Rayleigh J. W. S., Lord) 109, 413, 422, 428, 430, 448, 497
 Рябушинский Д. 105, 109
- Саберский Р. Г. (Sabersky R. H.) 636, 637, 646
 Салтер К. (Salter C.) 518
 Сальников В. (Salynikov V.) 252
 Сарантонелло Э. Г. (Zarantonello E. H.) 694
 Сатерленд Д. М. (Sutherland D. M.) 310
 Сато К. (Sato K.) 307
 Сато Т. (Sato T.) 308
 Сато Х. (Sato H.) 452, 497
 Саттон В. Г. Л. (Sutton W. G. L.) 207, 212
 Саф В. (Saph V.) 569
 Свейн Л. М. (Swain L. M.) 663, 674
 Себан Р. А. (Seban R. A.) 252, 307
 Севье Ж. Р. (Sevier J. R.) 494
 Селлерс Дж. Р. (Sellers J. R.) 492, 494
 Сен-Венан Б. (Saint Venan B. de) 72, 74
 Серби Дж. Э. (Serby J. E.) 692
 Серджент Р. (Sargent R.) 345, 349, 447
 Сёренсен Э. (Sørensen E.) 600
 Сесс Р. Д. (Cess R. D.) 308
 Сигалла С. (Sigalla S.) 674
 Сильверстейн А. (Silverstein A.) 498
 Симмонс Л. Ф. Г. (Simmons L. F. G.) 518, 625
 Симпсон Дж. Г. (Simpson J. H.) 152, 156
 Сингх С. Н. (Singh S. N.) 295, 307
 Синклер А. Р. (Sinclair A. R.) 478, 494
 Синхар К. Д. П. (Sinhari K. D. P.) 363, 376
 Сирс В. Р. (Sears W. R.) 245, 250, 252, 696, 697
 Сквайер А. Л. (Squyers A. L.) 375
 Сквайр Г. Б. (Squire H. B.) 226, 253, 290, 292, 294, 308, 375, 426, 449, 480, 611, 620, 625, 669, 674, 681, 682, 684, 692
 Сквайр Л. К. (Squire L. C.) 413
 Скотец М. Б. 292, 308
 Скотт П. Э. (Scott P. E.) 373
 Скрамстед Г. К. (Skramsted H. K.) 439, 441, 446, 448, 452, 497, 517
 Скуг Р. Б. (Skog R. B.) 499
 Скан Сильвия (Scan S. W.) 155, 158
 Слоугер Р. Дж. (Slogar R. J.) 625
 Смит А. Г. (Smith A. G.) 292, 308
 Смит А. М. (Smith A. M.) 376
 Смит А. М. О. (Smith A. M. O.) 190, 191, 211, 217, 459, 485, 498, 697
 Смит Д. В. (Smith D. W.) 579, 600
 Смит Дж. В. (Smith J. W.) 332, 350
 Смит К. Г. (Smith K. G.) 648
 Смит М. Г. (Smith M. H.) 371, 376
 Соваран Г. (Sovran G.) 697
 Соджин Г. Г. (Sogin H. H.) 298, 306
 Соффер Р. А. (Soffer R. A.) 674
 Спарроу Э. М. (Sparrow E. M.) 289, 293, 302, 303, 305, 308, 384, 392, 413
 Спенс Д. А. (Spence D. A.) 645, 647, 648
 Сполдинг Д. Б. (Spalding D. B.) 292–294, 308, 637, 639, 647, 697
 Стеннинг А. Г. (Stenning A. H.) 402, 412
 Стернберг Дж. (Sternberg J.) 349, 498
 Стиверс Л. С. (Stivers L. S.) 690
 Стокс Г. Г. (Stokes G. G.) 67, 72, 74, 81, 92, 94, 110, 112, 123
 Столдер Дж. Р. (Stalder J. R.) 498
 Стоянович Д. (Stojanovic D.) 308
 Стритер В. Л. (Streeter V. L.) 562, 570
 Струхал В. (Strouhal V.) 54
 Стрэтфорд Б. С. (Stratford B. C.) 616, 626, 645, 648
 Стэнтон Т. Э. (Stanton T. E.) 546, 569
 Стюарт Д. Дж. К. (Stuart D. J. K.) 106, 110, 692
 Стюарт Дж. Т. (Stuart J. T.) 95, 366, 376, 404, 413, 430, 474, 481, 486, 487, 495, 498
 Стюарт В. Э. (Stewart W. E.) 375
 Стэркортон К. (Stewartson K.) 106, 110, 156, 159, 191, 232, 249, 253, 320, 351, 407, 413, 693
 Сугавара С. (Sugawara S.) 308
 Седней Р. (Sedney R.) 238, 253, 339, 351
 Сайдж Б. Г. (Sage B. H.) 307, 694
 Сэндборн В. А. (Sandborn V. A.) 625
- Тайлер Э. (Tyler E.) 406, 413
 Таккер М. (Tucker M.) 418, 518, 645, 647, 648
 Тан Г. С. (Tan H. S.) 248, 253
- Тани И. (Tani I.) 170, 171, 191, 212, 217, 351, 413, 449, 488, 498, 499, 600
 Тао Л. Н. (Tao L. N.) 110
 Таркотт Д. Л. (Turcotte D. L.) 619, 626
 Таунсенд А. А. (Townsend A. A.) 449, 501, 519, 535, 581, 600, 663, 675, 697
 Таунсенд Г. К. Г. (Townsend H. C. H.) 449
 Тацутии Т. (Tatsumi T.) 445, 449
 Твэйт Б. (Thwaits B.) 210, 211, 217, 366, 374, 376
 Тен-Бос М. (Ten Bosch M.) 304
 Тенделенд Т. Г. (Tendeland T. H.) 498
 Теодорсен Т. (Theodorson T.) 498
 Теодорсон Т. (Theodorson Th.) 110, 135, 141
 Тёльфер К. (Töpfer C.) 135, 141
 Террил Р. М. (Terril R. M.) 207, 217
 Тетервин Н. (Tetervin N.) 152, 253, 373, 498, 603, 604, 606, 624, 626
 Тидстром К. Д. (Tidstrom K. D.) 446, 447
 Тилман В. (Tillmann W.) 471, 600, 603, 624, 626
 Тимман Р. (Timman R.) 249, 253
 Тимме А. (Timme A.) 54, 91, 110
 Тириот К. Г. (Thiriot K. H.) 391, 392, 414
 Титъенс О. (Tietjens O.) 54, 431, 449, 695
 Тиффорд А. Н. (Tifford A. N.) 166, 167, 191, 235, 238, 253, 293, 295, 308, 316, 339, 348, 351
 Толбот Л. (Talbot L.) 235, 253
 Толмийн В. (Tolmien W.) 15, 17, 18, 141, 150, 156, 174, 177, 191, 389, 411, 413, 430–433, 436, 439, 449, 476, 485, 498–519, 657, 663, 665, 667, 668, 675, 694–696
 Том А. (Thom A.) 169, 191
 Томас А. (Thomas A.) 647
 Томас Л. Г. (Thomas L. H.) 439, 449
 Томас Ф. (Thomas F.) 618, 626, 670, 675
 Томотика С. (Tomotika S.) 232, 234, 253
 Томпсон Б. Г. Дж. (Thompson B. G. J.) 615, 626
 Томпсон М. Дж. (Thompson M. J.) 579
 Томсон В. Р. (Thomson W. R.) 636, 637, 647
 Томсон Дж. И. (Thomson J. I.) 152, 156
 Топпер Л. (Topper L.) 517, 694
 Торда Т. П. (Torda T. P.) 366, 376
 Трибус М. (Tribus M.) 293, 306
 Триллинг Л. (Trilling L.) 366, 376
 Тримпи Р. Л. (Trimpi R. L.) 414
 Тринес Г. (Trines H.) 599
 Троунсер Дж. (Trouncer J.) 674, 669
 Труккенброт Э. (Truckenbrdt E.) 235, 237, 252, 253, 366, 376, 603, 605, 611–615, 620, 626, 683, 692, 696
 Тулчин М. П. (Tulin M. P.) 517
 Тулукян Я. С. (Tulukian Y. S.) 308
 Тьян К. Л. (Tien C. L.) 308
 Тэйлор Дж. И. (Taylor G. I.) 223, 253, 429, 449, 473, 474, 480, 498, 501, 512–514, 517, 518, 526, 535, 547, 570, 633, 648, 674, 680, 692
 Тэйлор Дж. Ф. (Taylor J. F.) 304
 Тэйлор М. Ф. (Taylor M. F.) 645
- Уайлд Дж. М. (Wild J. M.) 246, 253
 Уайт К. М. (White C. M.) 560, 565, 570
 Уайтфилд Дж. Д. (Whitfield J. D.) 496
 Уайтхед Л. Г. (Whithead L. G.) 691
 Удар А. (Oudart A.) 248
 Уилсон Р. Е. (Wilson R. E.) 641, 648
 Уинтер К. Г. (Winter K. G.) 648
 Уинтерботтом Б. А. (Winterbottom B. A.) 692
 Уинтерботтом Н. Э. (Winterbottom N. E.) 692
 Уинтерниц Ф. А. Л. (Winternitz F. A. L.) 567, 570, 601, 602
 Ульман Э. Ф. (Ulmann E. F.) 494
 Ульрих А. (Ulrich A.) 164, 191, 208, 219, 211, 217, 454, 458, 467, 493, 497, 498
 Уокер В. С. (Walker W. S.) 369, 374, 486, 495, 690
 Уокер Дж. Г. (Walker J. H.) 579
 Уорд К. Э. (Word K. E.) 691
 Уорнер В. Г. (Warner W. H.) 307
 Уорсап Дж. Г. (Warsap J. H.) 599
 Утида С. (Uchida S.) 404, 414
 Уэстервелт П. Дж. (Westervelt P. J.) 414
- Фавр А. Ж. (Favre A. J.) 353, 374, 512, 517, 581, 599
 Файнд К. (Feind K.) 568, 598, 599
 Файндт Э. Г. (Feindt E.) 491, 494, 498, 598, 599
 Фаннелёп Т. К. (Fannelöp T. K.) 187, 189, 190, 253
 Фарбер Б. Н. (Furber B. N.) 294, 298, 305
 Фельдман Ф. (Feldmann F.) 339, 348
 Фёппль А. (Föppl A.) 74
 Феррари К. (Ferrari C.) 646
 Фёртман Э. (Förthmann E.) 665, 666, 674

- Фёттингер Г. (Föttinger H.) 441, 600
 Фила Г. Г. (Fila G. H.) 476, 496, 599
 Фишер П. (Fischer P.) 263, 305
 Флаксбарт О. (Flachsbart O.) 35, 169
 Флат Дж. (Platt J.) 374
 Флюгге-Лотц Ирма (Flügge-Lotz I.) 187, 189, 190, 331, 349
 Флюгель Г. (Flügel G.) 354, 374
 Фогарти Л. Э. (Fogarty L. E.) 248
 Фогельполь Г. (Vogelpohl G.) 120, 121, 123, 253, 308, 694, 697
 Фокнер В. М. (Falkner V. M.) 305, 309
 Фокнер М. Б. (Falkner M. B.) 155, 158, 190, 581, 599, 606, 624, 631, 648, 672, 674, 690
 Фокс Г. (Fox H.) 374
 Фокс Р. В. (Fox R. W.) 568
 Форстер В. Т. (Forster V. T.) 599
 Фоулдер К. Р. (Faulders C. R.) 374
 Франк-Каменецкий Д. А. 694
 Френкиль Ф. Н. (Frenkiel F. N.) 693, 697
 Фрёссель В. (Frössel W.) 120, 123, 550, 551, 568
 Фрёсслинг Н. (Frössling N.) 99, 109, 164, 169, 190, 228—229, 251, 287—289, 292, 293, 298, 305
 Фридлендер С. К. (Friedlaender S. K.) 517, 694
 Фридман М. Б. (Friedmann M. B.) 138, 140
 Фрик К. В. (Frick C. W.) 305
 Фримбергер Р. (Frimberger R.) 44, 54
 Фримен Г. Б. (Freeman H. B.) 624
 Фритцице А. Ф. (Fritzsche A. F.) 305
 Фрич В. (Fritsch W.) 555, 568
 Фромм К. (Fromm K.) 555, 568
 Фрост Б. (Frost B.) 613, 674
 Фруд Б. (Froude B.) 420, 447
 Фукс Д. (Fuchs D.) 44, 53, 169
 Фурман Г. (Fuhrmann G.) 35
 Фурье Ж. (Fourier J.) 255
 Фэйнис Б. С. (Fadnis B. S.) 238
 Фэйдж А. (Fage A.) 169, 190, 234, 305, 345, 349, 447, 487, 488, 494, 599, 624, 631, 648, 672, 674, 690
 Хаазе Д. (Haase D.) 568
 Хаген Г. (Hagen G.) 26, 35, 89, 109, 416
 Хайль М. (Heil M.) 693
 Хайт Г. (Hein H.) 481, 497
 Хама Р. (Hama R.) 487, 498, 600
 Хамель Г. (Hamel G.) 78, 85, 91, 107, 109, 161, 447, 529, 535
 Хамман Дж. (Hamman J.) 410, 413, 624
 Ханеман Г. (Hahnemann H.) 184, 191, 568
 Хансен А. Г. (Hansen A. G.) 141, 251
 Хансен М. (Hansen M.) 138, 139, 248, 419, 439, 572, 599
 Ханнах Д. М. (Hannah D. M.) 235, 251
 Хантцице В. (Hantzsche W.) 316, 318, 338, 349
 Хара Т. (Hara T.) 302, 305
 Харли Д. Г. (Hurley D. G.) 374
 Харрин Э. Н. (Harrin E. N.) 495
 Харрингтон Р. П. (Harrington R. P.) 362, 375
 Харрис Д. П. (Harris D. P.) 250
 Хартнетт Дж. П. (Hartnett J. P.) 293, 296, 305, 306, 374
 Хартри Д. Р. (Hartree D. R.) 155, 191, 211, 293, 327, 348, 453
 Хассан Г. А. (Hassan H. A.) 293, 305, 355, 412
 Хаттон К. Т. (Hutton C. T.) 624
 Хаузаман В. (Hausamann W.) 495
 Хаузенблас Г. (Hausenblas H.) 277, 306
 Хаукинс Г. А. (Hawkins G. A.) 308
 Хауторн В. Р. (Hauwthorne W. R.) 568
 Хаяши Х. А. (Hayashi H. A.) 412
 Хеббел Г. (Hebbel H.) 690, 691
 Хейд У. Д. (Hayes W. D.) 251, 494
 Хельмбольд Г. Б. (Helmbold H. B.) 683, 691
 Хеммерлин Г. (Hämmerlin G.) 484, 486, 495
 Херман Р. (Hermann R.) 303, 306, 568
 Хёрнер С. Ф. (Hoerner S. F.) 516, 518, 694
 Хертель Г. (Hertel H.) 495
 Херциг Г. Ц. (Herzig H. Z.) 248, 251
 Хиггинс Р. В. (Higgins R. W.) 476, 495
 Хилл Дж. А. Ф. (Hill J. A. F.) 645
 Хилл П. Г. (Hill P. G.) 402, 412
 Хилл Ф. К. (Hill F. K.) 646
 Хилтон Дж. Г. (Hilton J. H.) 495
 Хилтон У. Ф. (Hilton W. F.) 691
 Хил-Шоу Г. С. (Hele-Shaw H. S.) 121, 123
 Хильперт Р. (Hilpert R.) 295, 306
 Хилеменц К. (Niemenz K.) 98, 109, 162, 164, 169, 191, 206
 Химмелькамп Г. (Himmelskamp H.) 621, 624
 Хинце И. О. (Hinze J. O.) 501, 518, 673, 674, 694
 Хислоп Г. С. (Hislop G. S.) 441, 447
 Холдер Д. В. (Holder D. W.) 339, 694
 Холл А. А. (Hall A. A.) 441, 444, 447
 Холл М. Г. (Hall M. G.) 250
 Холлиндейл С. (Hollingdale S.) 349, 445, 447
 Хольцаузер К. А. (Holzhauser C. A.) 374
 Хольштейн Г. (Hoistain H.) 197, 202, 203, 216, 232, 334, 369, 374, 447, 495
 Хоман Ф. (Homann F.) 32, 35, 109, 561
 Хонда М. (Honda M.) 346
 Хонф Л. (Hornf L.) 74, 431, 447, 554, 568
 Хори Э. (Hori E.) 402, 412
 Хорнун Г. Г. (Hornung H. G.) 623, 624
 Хоскин Н. Э. (Hoskin N. E.) 237, 251
 Хоуарт Л. (Howarth L.) 98, 109, 134, 135, 141, 162, 164, 169—171, 187, 191, 214, 238, 251, 253, 259, 306, 320, 331, 445, 447, 624, 669, 674, 694, 695
 Хоурд Л. Н. (Howard L. N.) 445, 447
 Хофман Э. (Hofmann E.) 646
 Хохшильд Г. (Hochschild H.) 621, 624
 Христиан В. Дж. (Christian W. J.) 181, 190
 Худ М. Дж. (Hood M. J.) 599
 Хэд М. Р. (Head M. R.) 212, 216, 362, 374, 495
 615, 624
 Хюбнер Э. (Hübner E.) 564, 568
 Чаа И. А. (Zaat J. A.) 156, 253, 331, 351
 Цзянь Х. С. (Tsien H. S.) 250, 319, 350
 Цимм В. (Zimm W.) 667, 675
 Цудзи Х. (Tsuji H.) 412, 414
 Цумбуш О. (Zumbusch O.) 584
 Чжан И. Х. (Chen I. H.) 648
 Чандрасекар С. (Chandrasekhar S.) 694
 Чарнекий К. Р. (Czarnecki K. R.) 478, 494, 495
 Чен К. М. (Tchen C. M.) 696
 Чен С. Ф. (Shen S. F.) 351, 438, 448, 498, 535
 Чепмен Д. Р. (Chapman D. R.) 181, 190, 293, 304, 318, 348, 599, 639, 645, 647
 Честер В. (Chester W.) 693
 Чжен С. И. (Cheng S. J.) 424, 426
 Чи С. В. (Chi S. W.) 639, 647
 Чу С. Т. (Chu S. T.) 238, 253, 295, 308, 339, 348
 Шаблевский В. (Szablewski W.) 543, 570, 600, 626, 658, 674
 Шаде Г. (Schade H.) 438, 445, 448
 Шао В. Х. (Shao W. Y.) 307
 Шапиро А. Г. (Shapiro A. H.) 696
 Шапиро Г. А. (Shapiro H. A.) 348
 Шапиро Н. М. (Shapiro N. M.) 498
 Швабе М. (Schwabe M.) 395, 413
 Шварц Ф. (Schwarz F.) 617, 625
 Шелл Дж. И. (Shell J. I.) 304, 308
 Шён И. (Schoen J.) 238
 Шёнауэр В. (Schönauer W.) 206, 217
 Шёнхер К. Е. (Schoenherr K. E.) 579, 600
 Шеппард (Sheppard) 92
 Шербарт К. (Scherbarth K.) 598, 600
 Шервуд Т. К. (Sherwood T. K.) 306
 Шерман А. (Sherman A.) 690
 Шеррер Р. (Scherrer R.) 316, 351, 497
 Шетцер И. Д. (Schetzer J. D.) 695
 Шеффер Г. (Schäffer H.) 691
 Шеффер М. (Schäfer M.) 519
 Шиллер Л. (Schiller L.) 94, 109, 169, 191, 234, 252, 416, 439, 448, 487, 497, 551, 569
 Шиманский Ф. (Szymanski F.) 93, 110
 Шлихтинг Г. (Schlichting H.) 15, 18, 54, 94, 110, 177, 182, 191, 208, 209, 211, 217, 223, 235, 237, 238, 250, 252, 273, 293, 307, 331, 351, 363, 366, 376, 397, 413, 422, 437—439, 441, 446, 448, 453, 470, 473, 485, 497, 518, 562, 567, 569, 581, 587, 590, 600, 616, 617, 619, 625, 659, 661, 674, 686, 690, 691, 696, 697
 Шмидбауэр Г. (Schmidbauer H.) 620, 625
 Шмиден Р. (Schmieden C.) 584, 600
 Шмидт В. (Schmidt W.) 105, 110, 535, 583, 673, 674
 Шмидт Г. (Schmidt H.) 141
 Шмидт Э. (Schmidt E.) 289, 295, 297, 299, 300, 303, 307, 696
 Шодер Э. Г. (Schoder E. H.) 569
 Шолькемайер Ф. В. (Scholkemeyer F. M.) 230, 232, 234, 252
 Шольц Н. (Scholz N.) 559, 569, 610, 613, 625, 684, 686, 687, 690, 691

- Шпайдель Л. (Speidel L.) 464, 498, 600, 613, 625, 683, 687, 691
 Шпангенберг В. Г. (Spangenberg W. G.) 610, 625
 Шпильберг К. (Spielberg K.) 492, 497
 Шпренгер Г. (Sprenger H.) 566, 569
 Шрёдер К. (Schröder K.) 144, 150, 156, 187, 191
 Шренк О. (Schrenk O.) 54, 355, 367, 376, 692
 Штальдер Дж. Р. (Stalder J. R.) 498
 Штендер В. (Stender W.) 498
 Штилер И. (Stüber J.) 367, 376, 498, 616, 626
 Шу Г. (Schuh H.) 148, 156, 212, 217, 286, 293, 302, 307, 384, 385, 413
 Шубаэр Г. В. (Schubauer G. B.) 208, 217, 419, 420, 423, 427, 438, 444, 446, 448, 452, 497, 511, 515, 517, 603, 616, 625, 696
 Шульц-Грунов Ф. (Schultz-Grunow F.) 471, 481, 497, 567, 569, 579, 580, 586, 588, 600
 Эбер Г. Р. (Eber G. R.) 349, 494
 Эванс Г. Л. (Evans H. L.) 287, 305, 308
 Эввард Дж. К. (Evvard J. C.) 479, 494
 Эверлинг (Everling) 123
 Эдвардс А. (Edwards A.) 284, 298, 305
 Эйффель Г. (Eiffel G.) 50, 418, 447, 554
 Эйхельбриннер Э. А. ((Eichelbrenner E. A.) 248, 319, 348, 349, 374, 581, 599, 618, 624
 Эйххорн Р. (Eichhorn R.) 296, 305, 308
 Эккер Э. Р. Г. (Eckert E. R. G.) 285, 287, 292, 293, 296, 302, 304, 553, 568, 646, 694
 Экман В. В. (Eckman V. W.) 416, 447
 Элдер Дж. В. (Elder J. W.) 581, 599
 Элиас Ф. (Elias F.) 284, 305
 Эллиот Д. (Elliot D.) 232, 252, 445, 446
 Эмmons Г. В. (Emmons H. W.) 315, 349, 363, 374, 420, 427, 447
 Энглерт Г. В. (Englert G. W.) 645, 646
 Эпплер Р. (Eppler R.) 366, 374, 616, 624
 Эпплтон Дж. П. (Appleton J. P.) 346, 348
 Эрет Л. (Ehret L.) 184, 191
 Эрк С. (Erk S.) 568
 Эрмшхаус Р. (Ermshaus R.) 663, 674
 Эртель Г. (Ertel H.) 473, 494
 Эсдорн Г. (Esdorf H.) 305
 Эттридж Дж. Л. (Attridge J. L.) 348, 349
 Юань Ш. В. (Yuan S. W.) 377
 Юберой М. С. (Uberoi M. S.) 673
 Юнгклас Г. (Jungklaus G.) 249, 251
 Юревич Л. С. (Jurewicz L. S.) 248, 252
 Юхи М. (Jouchi M.) 498
 Якоб М. (Jacob M.) 306, 568, 695
 Ямага И. (Yamaga I.) 238, 253, 295, 308, 332, 351
 Ямamoto К. (Yamamoto K.) 498
 Янг А. Д. (Young A. D.) 312, 331, 345, 350, 351, 364, 377, 600, 611, 620, 625, 626, 648, 680, 681, 684, 685, 692, 697
 Янг Г. Б. В. (Young G. B. W.) 319
 Янг К. Т. (Yang K. T.) 302, 308, 332, 351, 385, 414
 Янссен Э. (Janssen E.) 351

Предметный указатель

- Аблация 355, 371
Автокорреляция пульсаций 518
Анализ размерностей 28
— частотный 513
Аналогия между распределениями температуры и вихревой напряженности 82
— теплопередачей и сопротивлением трения 269
— Рейнольдса 269, 631, 634
Аффинность 132, 138, 143, 194, 451, 573, 655
- Баланс тепловой 82, 254
— энергии в турбулентном течении 514
Барьер тепловой 17
- Вдувание в пограничный слой другого газа 353, 355, 371, 619
Взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения 339
Винт воздушный 621
Вихри, их образование 37, 40, 395, 480, 483
Вихревой винтообразный 483
— Гертлера 480
— Тайлора 480
— Тайлора — Гертлера 484
— ячеековый 480
Возмущение винтообразные 483
— естественные 442
— искусственные 441
— трехмерные 426, 446, 480
Возникновение турбулентности 413, 474
Волна ударная 417
— разрежения 340
Вязкость 21, 26, 91, 124, 310
— кажущаяся 503, 525, 657
— кинематическая 21, 77, 657
— объемная 69
Высота шероховатости 488
— допустимая 592
— критическая 488, 597
- Газ идеальный 256, 309, 372
— реальный 309
Гидравлика 15
Гидромеханика 15, 254
Гипотеза о переносе импульса 670
— подобия Кармана 527, 546, 639
— Прандтля о пути перемешивания 639, 640
— Стокса 67
Гипотезы для расчета турбулентных течений 524—526, 534
«Глубина» профиля скоростей 651
Градиент давления 45, 129, 130, 198, 319, 429, 450, 599
Граница струи свободная 652, 657
Гудение телеграфных проводов 44
- Давление динамическое 23
— жидкости 59
— термодинамическое 59, 67, 68
Движение возмущающее 424
— осредненное 502
— перемешивающее 48, 417, 500, 520
— ползущее 80, 83, 111
— пооперечное 48, 413, 505
— пульсационное 500, 502, 508
— чистого сдвига 21
Дельфины, скорость их движения 464
Деформация 21, 56
Диаметр гидравлический 552
- Диск в кожухе 584
— врачающийся 100, 486, 582, 584
— свободный 582
Диссипация 79, 154, 256, 261, 514, 608, 630
— полная 514
— прямая 514
— турбулентная 514
Дифузия 355, 371, 372
— скачка уплотнения 341
— термическая 371, 372
Диффузор 566
Длина волны возмущения 425, 484
— входного (начального) участка трубы 536
— пути перемешивания 524, 528, 544
Дорожка вихревая Кармана 32, 43, 169
- Жидкость идеальная 19, 33, 34
— изотропная 56
— маловязкая 19
— неоднородная 472
— ньютоновская 56
- Задача на собственные значения 426, 434
— о пластинчатом термометре 268
— об охлаждении 275, 280, 364, 367
— продолжения 149, 184
— Стокса вторая 94
— первая 91
Закон Гука 21, 56
— подобия Рейнольдса 28, 75, 77, 143, 416, 537
— распределения скоростей логарифмический 532, 577
— — степени $1/2$, 532, 540, 541, 573, 582
— — универсальный 532, 543
— Рейхардта переноса импульса 670
— скоростей в средней части потока 529
— пристеночный 530
— сопротивления Блазиуса для труб 537, 540
— для движения в трубе 537, 548, 557, 560
— квадратичный 89
— сохранения импульса 55
— массы 55, 372
— степени $1/7$ 513, 540, 541, 573, 582
— теплопроводности Фурье 255, 630
— трения Ньютона 21, 27
— Хагена — Пуазейля 26, 89
Затухание турбулентности 472, 473
- Изотахи 552, 553, 591
Импульс кинематический 179, 225, 666
Интеграл вероятности полный 92
Истечение через коническую воронку 222
Источник вихревой 222
— колыцеобразный 226
- Канал расширяющийся 601
Кольцо NACA 354
— Таунсенд 354
Конвекция 299, 673
Координаты цилиндрические 73
Корреляция между пульсациями 505, 509
Коэффициент восстановления 315, 476, 638
— вязкости динамический 21, 71
— — кинематический 21, 77
— диффузии 372
— «кажущейся» вязкости 521
— кинематический кажущейся вязкости 521
— корреляции 509
— массодиффузии 371

- Коэффициент момента сопротивления вращающегося диска** 104
 — нарастания колебаний 425
 — отсасывания (расхода) 361, 366, 467
 — перемежаемости 417, 418, 493, 511
 — переноса импульса 671
 — подъемной силы 30, 35
 — сопротивления 30, 679—681
 — крыла 681
 — пластин 40, 135, 578, 579, 587, 588, 639
 — труб 89, 549, 560, 561
 — цилиндра круглого 30, 51
 — шара 30, 32, 51, 113
 — температуропроводности 151, 261, 299
 — тепlopерехода 263, 331, 634
 — теплопроводности 255
 — трения 317, 331
 — турбулентного обмена 521, 534, 548, 631, 650, 672
Коэффициенты безразмерные 29
 — функции 163, 170, 228
Кривая нейтральна 126, 432
Кривизна поперечная пограничного слоя 232
 — профиля скоростей 130, 196, 452, 475
Критерий Рэйли 429, 483
 — Тейдора 481
 — устойчивости Людвига 483
Крыло несущее 16, 36, 49, 53, 213, 241, 338, 595, 684
 — разрезное 354
 — скользящее 241, 246
 — стреловидное 241, 246
- Лопатки турбинные** 297, 596
- Масштаб турбулентности** 502
Матрица напряжений 57, 61
Метод интерференции 297
 — малых колебаний 422
 — продолжения 189
 — разностный 197
 — ширирный 297
 — энергетический 422
Модуль объемной упругости 22
 — продольной упругости 21
Момент сил трения вращающегося диска 103, 104, 236, 582, 584
- Напряжения, кажущиеся** 503
 — касательные 39
 — свида 19
 — турбулентные (кажущиеся) 505, 507, 525, 529
Напряженность вихревая 78—80
Нарастание возмущений 426, 484
Неустойчивость вязкой 429, 454
 — невязкой 429, 454
- Область застойной** 37, 50, 238, 687
Обмен импульсами 49
Обтекание вращающегося винта 622
 — вращающейся лопати 622
 — клина 148, 158, 373, 392, 453
 — конуса 373
 — крыла 47, 51, 210, 241, 248, 614, 617
 — несущего винта вертолета 248
 — пластин 37, 39, 51, 170, 194, 196, 197, 200, 205, 243, 278, 292, 314, 358, 373, 392, 410, 411, 418, 572, 580, 586, 606, 639, 641
 — поворотной лопатки 241
 — тела вращения 295, 389, 620, 621
 — тела вращения, косо поставленного 248
 — тонкого тела 420
 — цилиндра круглого 41, 52, 164, 206, 295, 352, 388, 393, 395
 — эллиптического 388
 — шара 51, 80, 112, 230, 237, 390
 — эллипсоида вращения 248, 249
 — —, косо поставленного 248
Осциллограмма турбулентного течения 452
Отрыв пограничного слоя 16, 37, 40, 41, 44—47, 51, 52, 128, 144, 168, 169, 207, 213, 216, 237, 247—249, 337, 338, 343, 345, 357, 388, 390, 391, 602, 604—606, 615, 617, 686, 687
Отсасывание пограничного слоя 52, 356, 359, 364, 367, 450, 465, 616
 — — минимальное 465
 — — наиболее выгодное 361, 467
Охлаждение обтекаемой стенки 353, 356, 478
Парадокс Даламбера 19, 33
Перемешивание турбулентное 627
Перепад давления 25, 49
Переход ламинарного течения в турбулентное 17, 49, 50, 139, 417, 418, 439, 445, 450, 465, 470, 474, 487
 — турбулентного течения в ламинарное 455
Пластина плоская 37, 40, 50, 52, 132, 148, 172, 192, 193, 205, 243, 278, 290, 314, 315, 418, 431, 572, 606, 630
 — шероховатая 586—588, 593, 594
Плотность 22, 23, 472
Поверхность контрольная 173, 677
 — разрыва скоростей 649
Повышение температуры адиабатическое 257
Подобие механическое и геометрическое 26, 28, 76, 77
Подслой ламинарный 507, 543
Поле температурное в окрестности тела 82
Постоянная газовая 71
Поток тепла 263, 625
Предел устойчивости 427, 456, 461
Предкрылок 354
Преобразование аффинноподобное 92, 97, 100, 132, 144, 145, 160
 — Иллингвортса — Стюарта 320, 323
 — координат 320, 323, 639, 642
 — Манглера 239
Прилипание жидкости к стенке 19, 20, 36
Принцип автономности 244
Пропеллер 622
Профили аффинноподобные 144
Профиль Жуковского 35, 210, 458
 — ламинаризованный 17, 355, 356, 460, 466
 — отсасывания асимптотический 359, 466
Пульсации давления 502
 — скорости 502, 630
 — температуры 630
Путь перемешивания 17, 522
- Развитие пограничного слоя при внезапном возникновении движения** 385
 — — — при ускоренном движении 392
Разгон течения 93, 394
Размерности, соображения о них 28, 77
Распределение давления 33—35, 112, 458, 463
 — скоростей 130, 159, 171, 312, 540, 557, 641
 — — в канале 107, 273, 604
 — — в свободной струе 179, 658, 666, 669
 — — в спутном течении 175, 176
 — — в трубе 416, 539, 552, 553, 557
 — — логарифмический закон 548, 577, 644
 — — при обтекании клина 159
 — — — — круглого цилиндра 168, 207
 — — — — крыла 616
 — — — — шара 230
 — — универсальный закон 529, 542, 546, 644
 — температуры 82, 273, 301, 312, 317, 632, 637, 673
 — энталпии 328, 329
Распространение тепла 672
Расслоение по плотности 472
Режим течения без проявления шероховатости 556, 561
 — гидравлически гладкий 556
 — — с полным проявлением шероховатости 556, 561
Решения уравнений пограничного слоя «подобные» 144, 145, 286, 323, 384, 385, 615
 — — — «полуподобные» 384, 385
 — — — — приближенные 111, 153, 192, 210, 232, 287, 331, 364, 603
Решетка из стержней 663
 — лопаточная 686
 — насосная 687
 — плоская 686
 — турбинная 687
Ротация скорости 78
Ротор Флэттера 353
Ряд Блазуса 161, 171, 229, 244, 287
 — Гётлера 171
- Связь контурная** 149, 212
 — между законом сопротивления и распределением скоростей 540, 560
 — — осесимметричным и плоским пограничными слоями 238
 — — распределением скоростей и температуры 312, 632, 673
Сдувание пограничного слоя 354, 450, 464, 616
Сжатие адиабатическое 257, 259

- Сжимаемость 22, 32, 364, 407, 476, 625
 Сила вязкости (трения) 80, 81, 124
 — инерции 27, 38, 76, 124
 — кориолисова 621
 — касательная (напряжение сдвига) 19, 76
 — массовая 76
 — нормальная (давление) 19, 76
 — поверхности 57, 76, 506
 — подъемная 29, 35, 47, 367
 — архимедова 260, 267
 — поперечная 52, 353
 — трения 27, 38, 76
 — центробежная 101, 219, 450, 470, 582
 Скачки уплотнения 339, 408
 Фазы 433
 Скольжение жидкости вдоль стенки 19
 Крыло боковое 241, 243
 Скорость деформации 21, 56
 динамическая 527, 593
 диффузии 371, 527
 звука 24
 касательного напряжения 527
 распространения волн 425
 спутной струи 226
 фазовая 425
 След 649
 — за телом вращения 653, 654
 — плоский 653, 654
 Слой критический 430
 — ламинарный на границе раздела двух потоков 180, 655
 — пограничный 16, 17, 36, 83, 124, 128, 644
 — — — внутри двугранного угла 623
 — — — двухкомпонентный 371, 619
 — — — динамический 17
 — — — его уравнения 127, 128, 143, 157, 192, 267, 378, 629
 — — — на вращающемся круглом конусе 238
 — — — на вращающемся теле 235, 620
 — — — на изогнутой стенке 483, 619
 — — — на пластине 132
 — — — на скользящем цилиндре 241
 — — — на теле вращения 227, 232, 235, 620
 — — — на шаре 230, 238
 — — — на эллипсоиде 208, 238
 — — — нестационарный 378
 — — — осесимметричный 218, 227, 232, 620
 — — — периодический 381, 396, 401
 — — — поздний ударной волны 407
 — — — превращение его отрыва 52, 53, 213, 332, 617
 — — — при внезапном возникновении движения 385
 — — — с градиентом давления 319, 362
 — — — сжимаемый 307, 407, 627
 — — — сходящийся и расходящийся 622
 — — — температурный (тепловой) 17, 254, 264, 278, 287, 293, 299, 633
 — — — голышма его 38, 49, 51, 124, 128, 222, 572, 582
 — — — трехмерный 241, 486, 620
 — — — турбулентный 601
 — — — разделя 655
 — — — трения см. слой пограничный
 Соотношение интегральное 152, 379
 — — — Кармана 152
 Сопло Лаваля 644
 Сопротивление 19, 30, 31, 33, 38, 45, 113, 174, 175, 193, 639
 — — волновое 686
 — — давления 14, 42, 45, 132, 615, 676
 — — лобовое 29
 — — профильное 615, 676, 681, 683, 684
 — — стока 369
 — — трения 16, 39, 44, 131, 132, 135, 193, 195, 269, 569, 615, 676
 — — шара 113
 Спектр турбулентного течения 513
 — — частотный 513
 Стенка гибкая 464
 — — изогнутая 470, 480, 483, 619
 — — колеблющаяся 94
 — — теплопроводная 268, 231, 313, 314, 324, 327, 334, 476, 641
 — — теплопроводящая 327
 Степень взвешенности внешнего течения 440
 — — турбулентности 298, 440, 515
 Струя, ее свободная граница 625, 652, 657
 — коническая 226
 — круглая 223, 652, 667, 673
 — — спутная 226
 — — плоская 177, 652, 665, 673
 Струя свободная 649, 651, 667
 Сублимация 371
 Тело удобообтекаемое 34
 Температура пластинчатого термометра 276
 — покоя 259
 — — — стекни равновесная 269, 276, 282, 313
 — — — торможения 259
 — — — эффективная 639
 Температуропроводность 261
 Тензор напряжения 57, 507, 628
 — — — кажущегося турбулентного трения 504
 — — — скоростей деформации 64
 Тензир аэродинамическая 177, 649
 Теорема (уравнение) импульсов 153, 173, 192, 193, 197, 332, 333, 365, 605, 623, 644
 — о роли точки перегиба 429, 452, 476
 — — — первая 425
 — — — энергии 155, 212, 332, 333, 608, 645
 Теория переноса завихренности 526, 547, 673
 — подобия в теплопередаче 259
 — смазки гидродинамическая 81, 115, 276
 — турбулентности дедуктивная 670
 — — — индуктивная 670
 — — — устойчивости ламинарного течения 422
 Теплоемкость удаленная 257, 259, 262
 Теплопередача 16, 269, 283, 300, 475, 632, 641
 — на шероховатой поверхности 636
 Теплота, выделяющаяся вследствие трения 279, 283, 474
 Термометр пластинчатый 268
 Течение без трения 77
 — в диффузоре 213, 564, 566, 622
 — — — канале 87, 277, 530
 — — — межлопаточном 241
 — — — расширяющемся 45, 46, 53, 106, 107, 160, 216, 277, 602
 — — — суживающемся 106, 277, 602
 — в лотке прямоугольном 553
 — в насадке сходящемся 622
 — в начальном участке трубы 234
 — — — канала 181
 — виокрестности критической точки 46, 96, 98, 148, 159, 205
 — в трубе, его развитие во времени 93
 — — — криволинейной 664
 — — — ламинарное 25, 26, 89, 93
 — — — нестационарное 567
 — — — осциллирующее 440
 — — — прямоугольной 552
 — — — с поперечным сечением в виде кольца 90
 — — — слабо расширяющейся 108
 — — — треугольной 552
 — — — турбулентное 26, 48, 413, 536
 — — — шероховатой 554
 — вблизи вращающегося диска 110
 — — — колеблющейся стенки 94
 — вдоль вогнутой стенки 619
 — — — выпуклой стенки 619
 — внешнее периодическое 401
 — внутри двугранного угла 249, 623
 — — — цилиндра с вращающейся крышкой 237
 — возвратное 16, 37, 42, 88, 107, 120, 129
 — вторичное 219, 223, 241, 248, 396, 399, 553, 564, 581, 591
 — входное в канале 108
 — — — в трубе 234, 536
 — — — вызываемое вихревым источником 224
 — гиперзвуковое 310
 — закручение 223, 238
 — конвективное вынужденное 264, 267, 278
 — — — естественное 264, 267, 299
 — Куэтта 87, 93, 115, 273, 431, 482, 492, 533, 584
 — ламинарное 24, 48, 213, 415
 — между двумя вращающимися дисками 106
 — — — коаксиальными цилиндрами 90, 470, 480
 — — — ползуном и опорной поверхностью 115
 — неоднородная жидкости 472
 — нестационарное 91
 — около вращающегося свободного диска 582
 — — — диска, вращающегося в кжухе 584
 — — — источника 148
 — — — клина 148, 158
 — — — плоской стенки, внезапно приведенной в движение 91
 — — — стока 148
 — — — шара 112
 — — — перемежающееся 417
 — — — периодическое 381, 396

- Течение поперечное 48, 415, 505
 — потенциальное 78, 96, 124, 165
 — разгонное 91, 93
 — сдвиговое 21, 87
 — спутное 172, 226, 649, 653, 654
 — позади решетки из стержней 663
 Стокса около шара 112, 113
 турбулентное 17, 26, 48, 49, 89, 415, 416, 500, 520
 — Хагена — Пуазеля 24, 88
 — Хиль-Шоу 121, 123
 — через решетку 663, 686
 — чистого сдвига 21, 87
 Течения механические подобные 26
 Толщина вытеснения 40, 137, 153, 154, 155, 195, 200, 232, 332, 358, 573, 604
 — пограничного слоя 38, 40, 50, 128, 136
 — приведенная 335
 — потери импульса 137, 153, 155, 193, 201, 233, 333, 358, 573, 604, 605, 608, 681
 — скорости 332, 333
 — энергии 154, 155, 333, 608, 645
 — увеличения энталпии 332, 333, 645
 Точка нейтральна 427, 456, 457, 469
 — отрыва 129
 — перегиба профиля скоростей 130, 159, 429
 — перехода ламинарного течения в турбулентное 427, 457, 458, 459
 Трение жидкости 15, 19
 — турбулентное кажущееся 17, 505, 507, 628
 Труба шероховатая 554
 Турбулентность 415
 — в аэродинамической трубе 515
 — ее возникновение 413, 450
 — изотропная 440, 514, 515, 534
 — локально изотропная 514
 — однородная 514
 — свободная 524, 571, 649, 672
 Турбулизация пограничного слоя 51
 Угол атаки 35, 47, 457
 Управление пограничным слоем 52, 53, 213, 352, 616
 Уравнение Бернулли 23, 96, 127, 259, 451
 — возмущающего движения дифференциальное 425
 — — — без учета вязкости 428
 — дифференциальное для функции тока 131, 157
 — импульсов 152, 153, 364
 — неразрывности 55, 72, 78, 260, 506
 — Оппа — Зоммерфельда 425
 — переноса вихрей 79
 — потока тепла 290
 — Райхардта для переноса вихрей 671
 — состояния газа 23, 71, 260
 — тепло проводности 150
 — энергии 86, 154, 256, 257, 260, 323, 365, 372
 Уравнения Навье-Стокса 15, 55, 70, 71, 73, 78, 86, 95, 260, 505
 — — — безразмерные 125
 Эйлера 15, 72
 Ускорение конвективное 55, 96
 — локальное 55
 — субстанциальное 55
 Фигуры Кундта пылевые 396, 400
 Формпараметр 199, 200, 335, 454, 604, 611
 Формула Джонса 680
 — Лапласа 24
 — Онзагера 372
 — Сатерленда 310
 — Стокса 113
 Функция автокорреляционная 513
 — диссипативная 256
 — корреляционная 512
 — спектральная 513
 — тока 130
 Цилиндр вращающийся 52, 78, 90, 470
 — круглый 33, 37, 41, 43, 50, 161, 164, 166, 167, 206, 289, 303, 353, 388, 393, 395, 598
 — осциллирующий 396
 — скользящий 241, 245
 — эллиптический 208, 388, 456
 Число Грасгофа 261
 — Дина 565
 — Маха 24, 30, 262, 307, 308, 491, 639
 — Нуссельта 263, 269, 632
 — Пекле 261
 — Прандтля 261, 262, 269, 271, 280, 311, 631
 — турбулентное 631
 — Рейнольдса 28, 29, 77, 80, 81, 125, 143, 261, 689
 — — — критическое 48, 89, 427, 478, 479
 — — — для крылового профиля 461
 — — — для пластины 50, 139, 419, 439, 441, 466
 — — — для трубы 48, 89, 416
 — — — для цилиндра 169, 471
 — — — для шара 516
 — — — теоретическое 427
 — — — приведенное 116, 122
 — Ричардсона 463
 — Стэнтона 619, 632
 — Струхала 44
 — Тэйлора 481
 — Фруда 30
 — Эккерта 262
 Шар, его обтекание 31, 34, 37, 50, 112, 230, 237, 304, 390
 Шероховатость 487, 554, 636, 644
 —, ее допустимая высота 592, 594
 — изолированная, цилиндрическая 488
 — относительная 554, 586
 — песочная 554, 587, 588
 — — эквивалентная 562, 588
 —, распределенная по площади 491
 — техническая 564
 Эллипсоид вращения, его обтекание 208
 Энталпия 332
 — полная 332
 Эффект аннуляций Ричардсона 406
 — Магнуса 353
 Ядро течения 182

Г. Шлихтинг
ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

М., 1974 г., 712 стр. с илл.

Редактор *А. Г. Мордвинцев*
Технический редактор *Н. В. Кошелева*
Корректор *Е. В. Сидоркина*

* * *

Сдано в набор 27/II 1974 г.
Подписано к печати 20/VIII 1974 г.

Бумага 70×108/16
Физ. печ. л. 44,5. Условн. печ. л. 62,3
Уч.-изд. л. 61,67.
Тираж 12 000 экз.
Цена книги 4 р. 61 к.
Заказ № 0201

* * *

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

* * *

•Ордена Трудового Красного знамени Московская
типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательства, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9