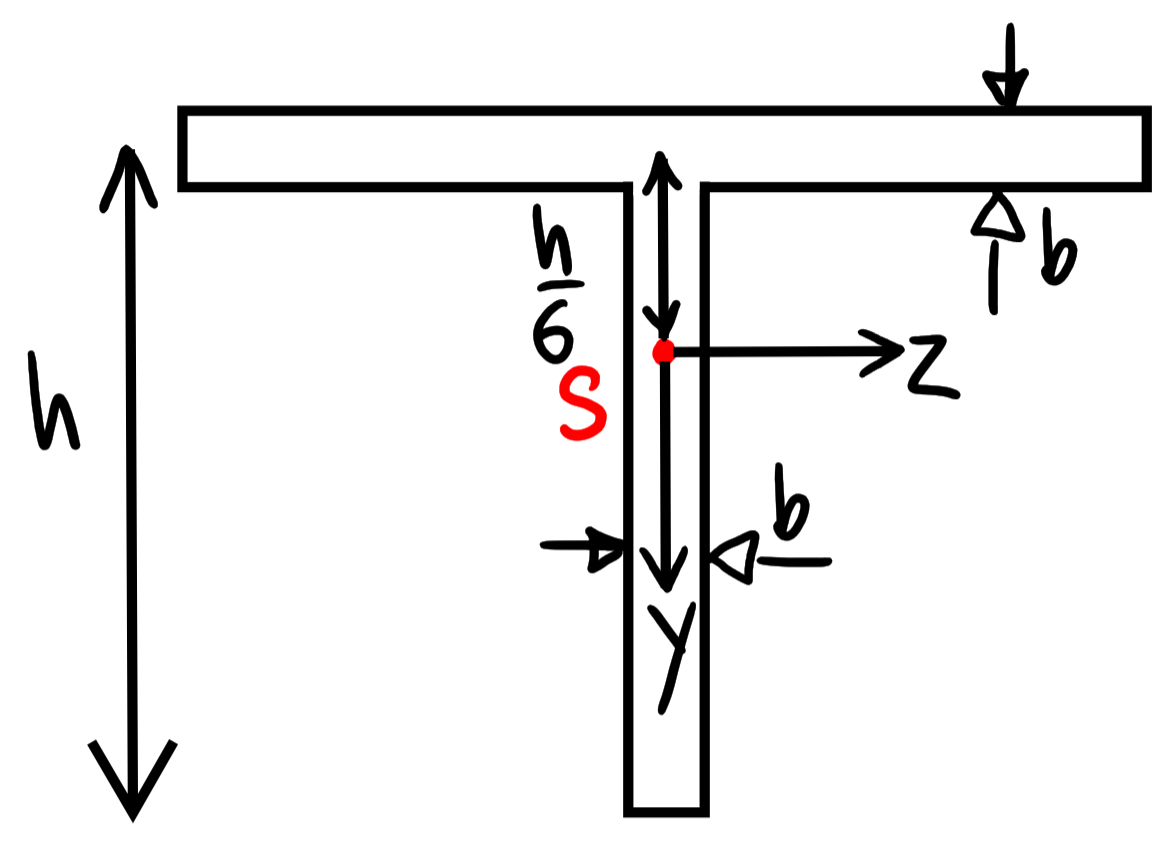
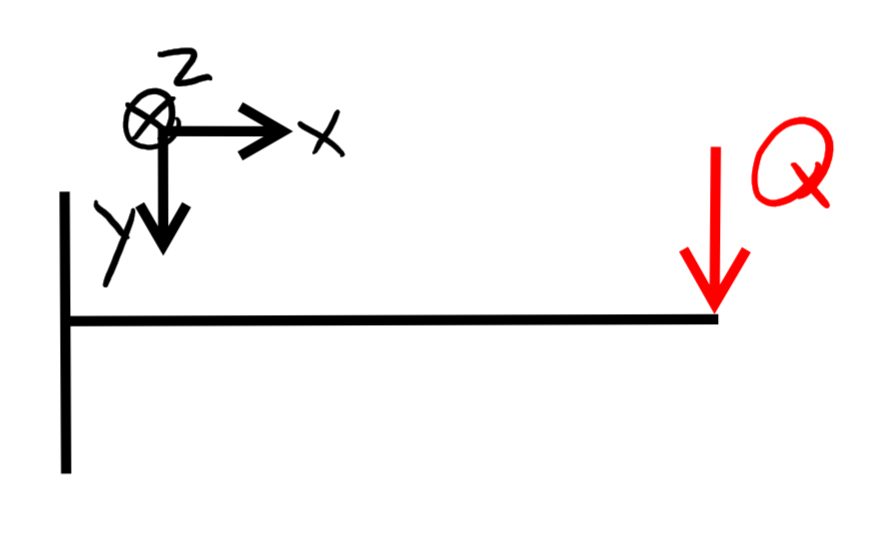
# Aufgabe S1:

Gegeben sei ein dünnwandiger Balken () mit einem T-förmigen Querschnitt. Eine Punktlast mit Betrag wirkt entlang der Symmetrielinie in positiver y-Richtung.

Geg.:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| S1a). |  |  |  |
| 5 mögliche Antworten |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

1. Welche der folgenden Skizzen entspricht der Schubspannungsverteilung im Querschnitt, wenn man den Balken von rechts schneidet?
2. Berechnen Sie das statische Moment im unteren Abschnitt des Querschnitts.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| S1b). |  |  |  |
| 5 mögliche Antworten |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

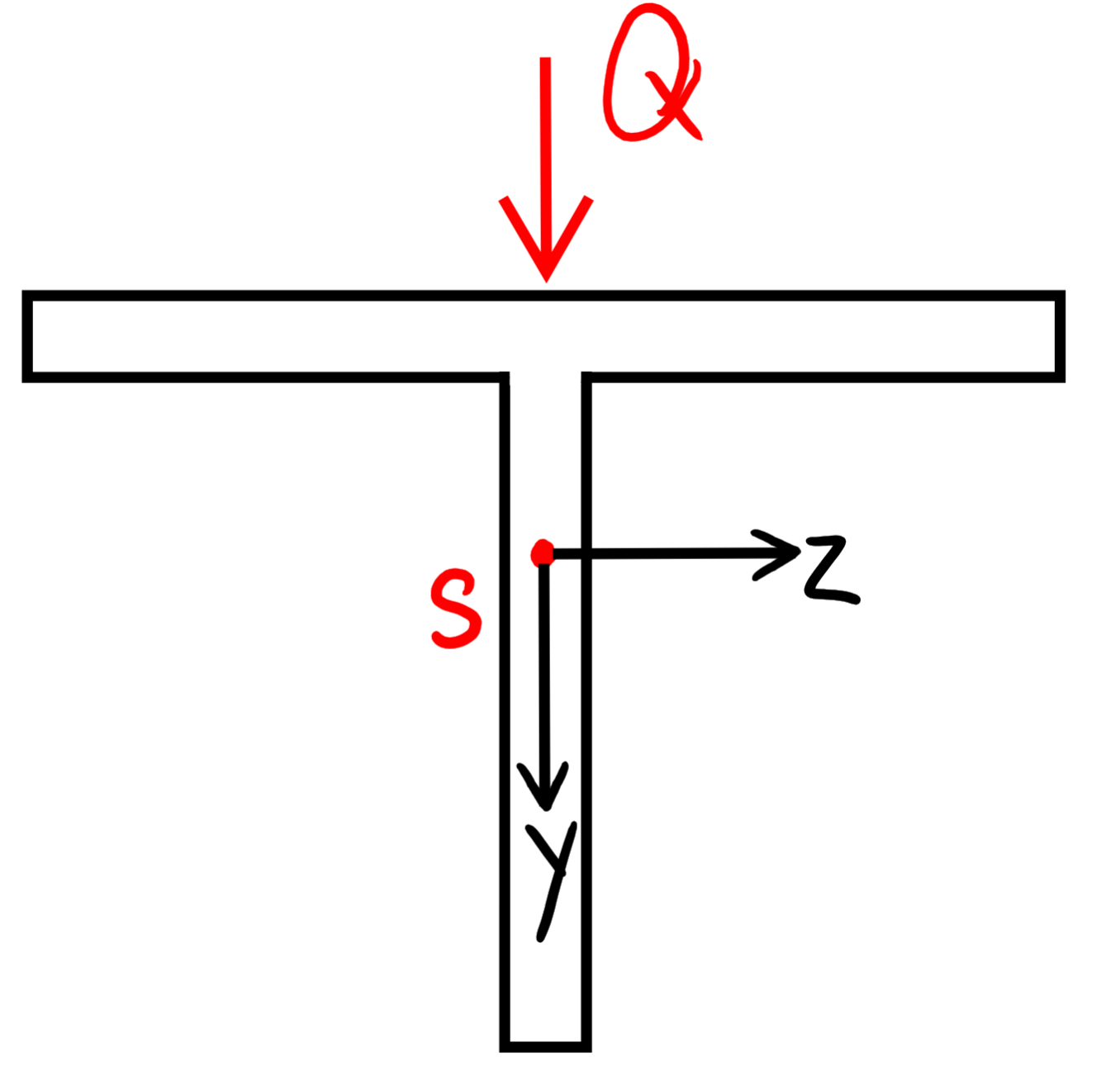
1. Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung von im Querschnitt.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| S1c). |  |  |  |
| 5 mögliche Antworten |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

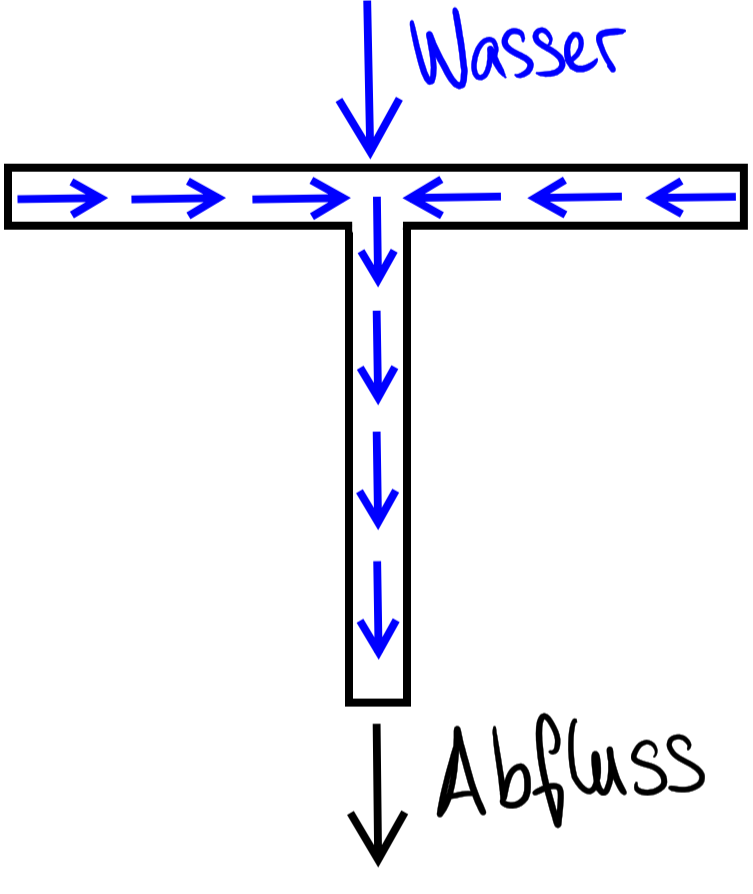
# Lösung zu Aufgabe S1:

Aufgabenteil a):

Wenn man den Balken von rechts schneidet sieht man, dass die Querkraft in positiver y-Richtung zeigt und die Schubspannungsverteilung deshalb von oben nach unten verläuft.

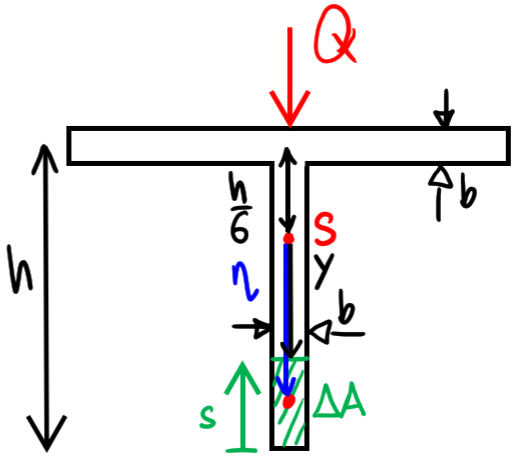


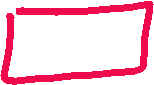
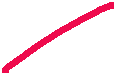
Man kann sich die Schubspannungsverteilung ähnlich einem Wasserfluss vorstellen, wenn man beim Punkt, wo die Kraft angreift, Wasser in den Querschnitt eingiesst.



Aufgabenteil b):

1. **Skizze**



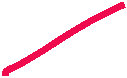


1. **bestimmen**

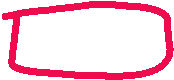
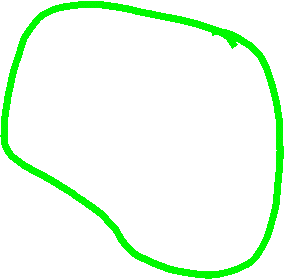
ist der Abstand vom Schwerpunkt der Querschnittsfläche zum Schwerpunkt der Fläche . Da wächst, ändert sich auch .

1. **berechnen**

Um zu berechnen, müssen wir zuerst die Laufvariable , die die Höhe der Fläche bestimmt, definieren.

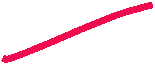


Mit der konstanten Breite ist demzufolge



1. **bestimmen**

Setzt man die gefundenen Werte in die Gleichung ein, erhält man das folgende Resultat:

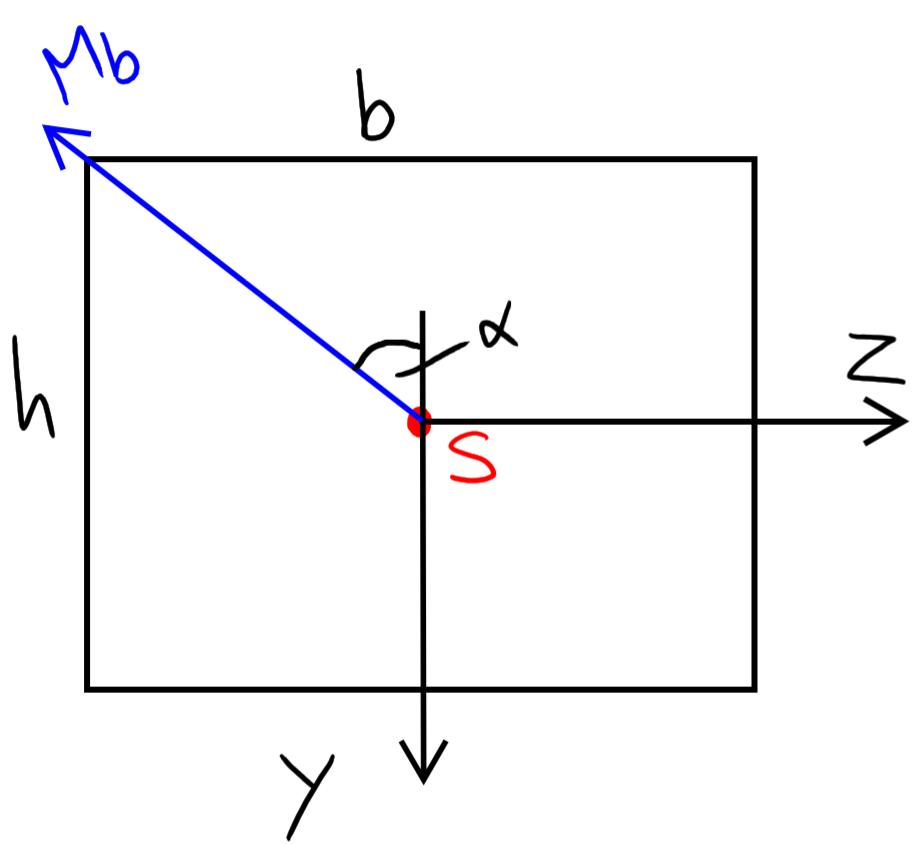


Aufgabenteil b):

Um die Schubspannung zu berechnen, muss man das Resultat aus Aufgabe a) in die Gleichung einsetzen und bekommt dann

# Aufgabe S2:

Berechnen Sie die maximale Spannung auf dem Querschnitt mit der gegebenen Belastung und Geometrie.



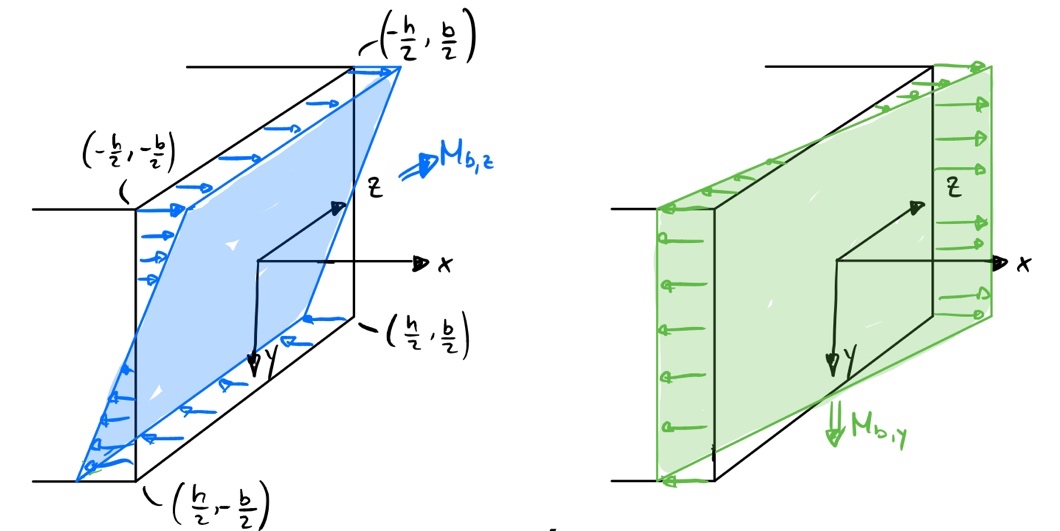
# Lösung zu Aufgabe S2:

In dieser Aufgabe haben wir eine kombinierte Belastung, welche wir auf eine Biegung um die y-Achse und eine um die z-Achse aufteilen können.

1. **auf der y- und z-Achse abbilden**
2. **Trägheitsmomente und berechnen**
3. **Maximale Spannung berechnen**

Die Spannungsverteilung lautet

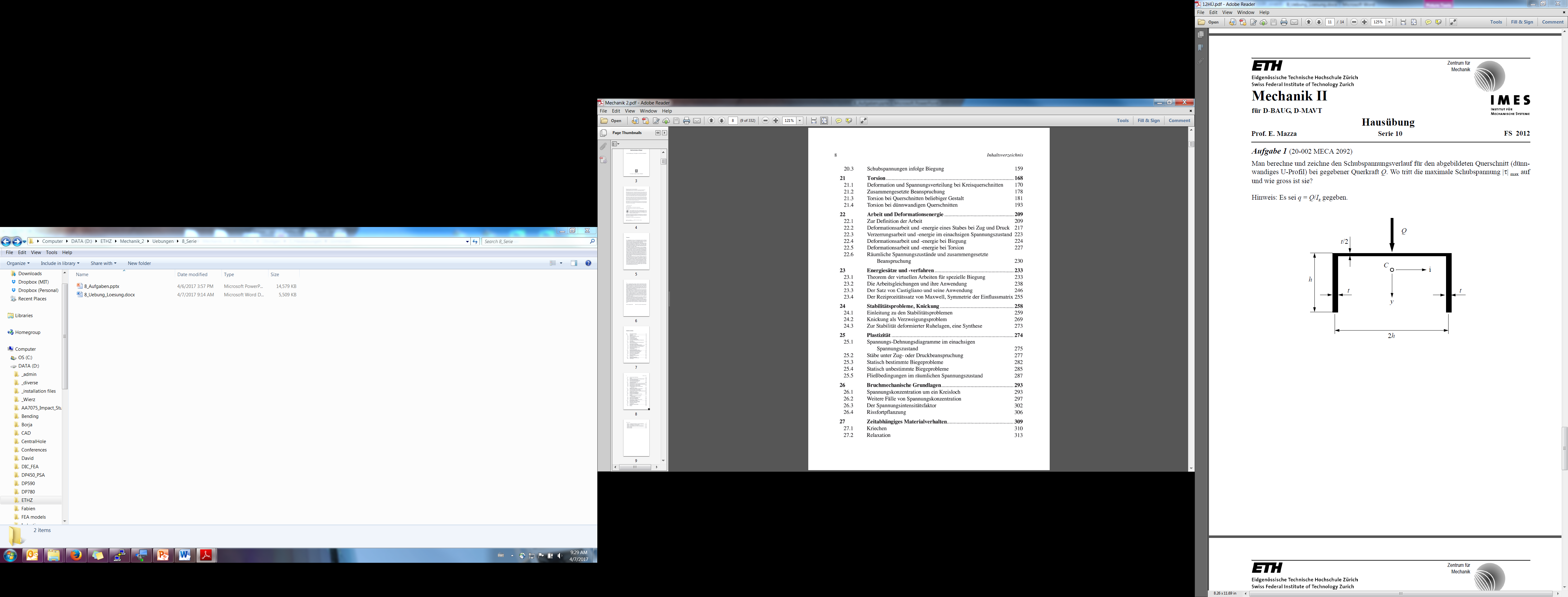
Die Vorzeichen der Formel, kann man sich mit der unten gezeigten Abbildung klar machen. Das blau gezeigte bewirkt positive Spannungswerte in negativer y-Richtung. Aus diesem Grund das Minus. Das grün dargestellte bewirkt hingegen positive Spannungswerte in positiver z-Richtung und braucht den Korrekturfaktor von -1 nicht.



Der Punkt mit der maximalen Spannung ist entweder bei oder bei . Da überlagern sich die beiden positiven oder negativen Spannungswerte aus Biegung von .

# Aufgabe H1:

Bestimmen Sie und zeichnen Sie den Schubspannungsverlauf in Abhängigkeit der gegebenen Koordinaten für den abgebildeten Querschnitt (dünnwandiges U-Profil) bei gegebener Querkraft . Wo tritt die maximale Schubspannung auf und wie gross ist sie?



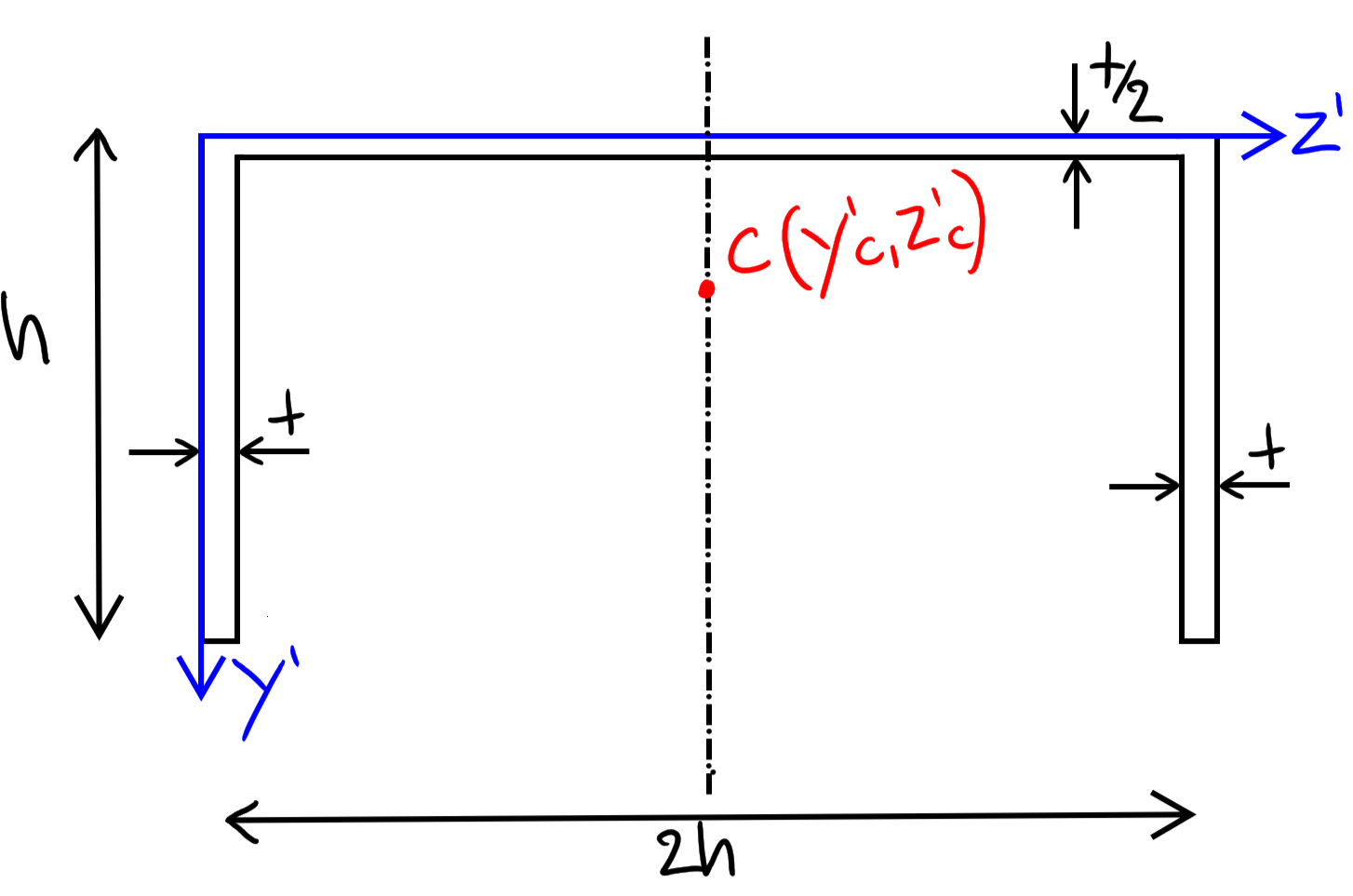
z

Geg:

# Lösung zu Aufgabe H1:

1. **Koordinaten des Schwerpunktes berechnen**

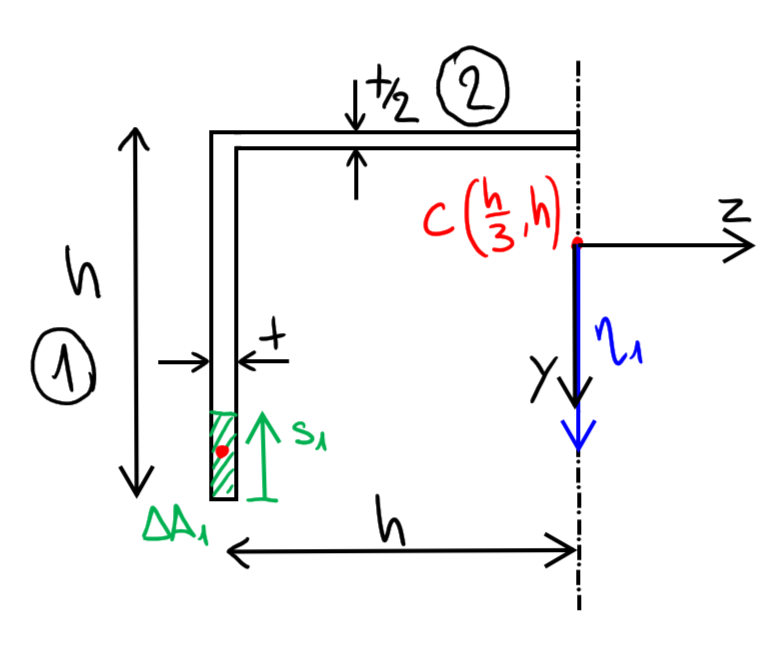
Da der Querschnitt symmetrisch ist, liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrielinie. Deshalb muss nur die -Koordinate berechnet werden.



Bemerkung: Für die Berechnung des Schubspannungsverlaufes wird nur die linke Seite des Querschnittes betrachtet, da der Querschnitt und deshalb auch die Schubspannungsverteilung symmetrisch sind.

1. **Schubspannungsverlauf im Abschnitt 1 berechnen**

Bei dieser Aufgabe haben wir zwei Enden, bei welchen die Schubspannung 0 ist. Diese beiden Enden befinden sich bei den Punkten . Von diesen Punkten aus beginnt man eine Laufvariable s einzuführen und anhand dieser die Schubspannungsverläufe zu berechnen.



Die Schubspannung, welche nun entlang von auf der Fläche wirkt wurde folgendermassen definiert:

Um nun zu berechnen, wird folgende Definition verwendet:

* Zeigt die Laufvariable entlang der y-Koordinatenrichtung, so gilt:
* Zeigt die Laufvariable s entgegen der y-Koordinatenrichtung, gilt:

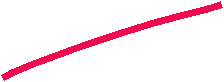
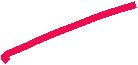
Wählt man also und und setzt sie ein erhält man:

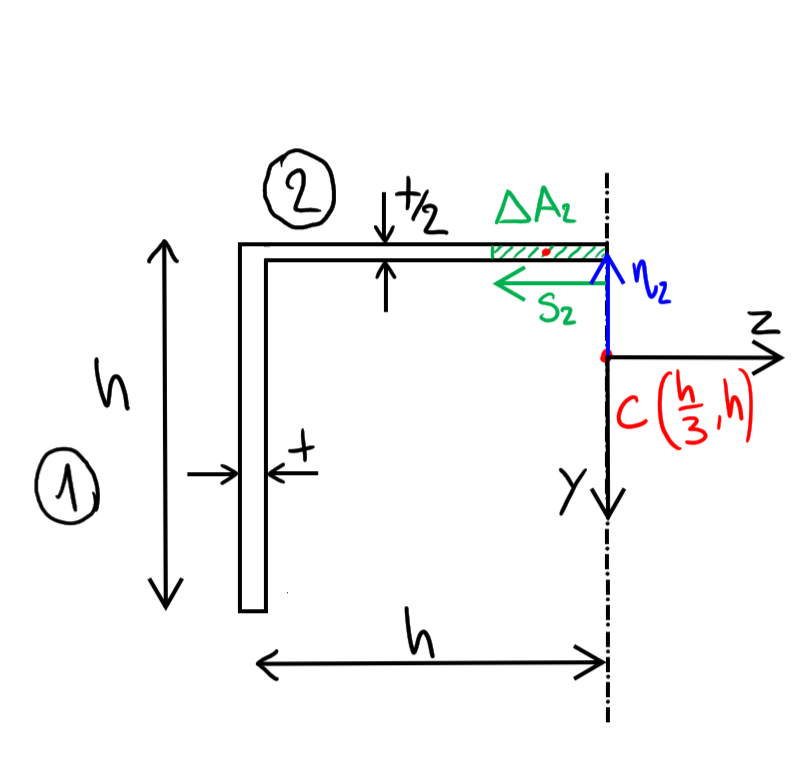


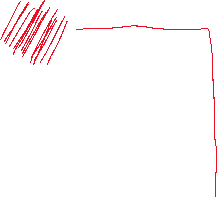
1. **Schubspannungsverlauf im Abschnitt 2 berechnen**



Hier zeigt die Laufvariable entgegen der z-Koordinatenrichtung. Das Vorzeichen wird geändert um zu erhalten und :







An dieser Stelle könnten wir schon aus der Symmetrie des Problems erkennen, dass die Schubspannungen im 3. Teil genau gleich sein müssen, wie im 1. Teil. Der Vollständigkeit halber, wollen wir aber trotzdem die Berechnung demonstrieren.

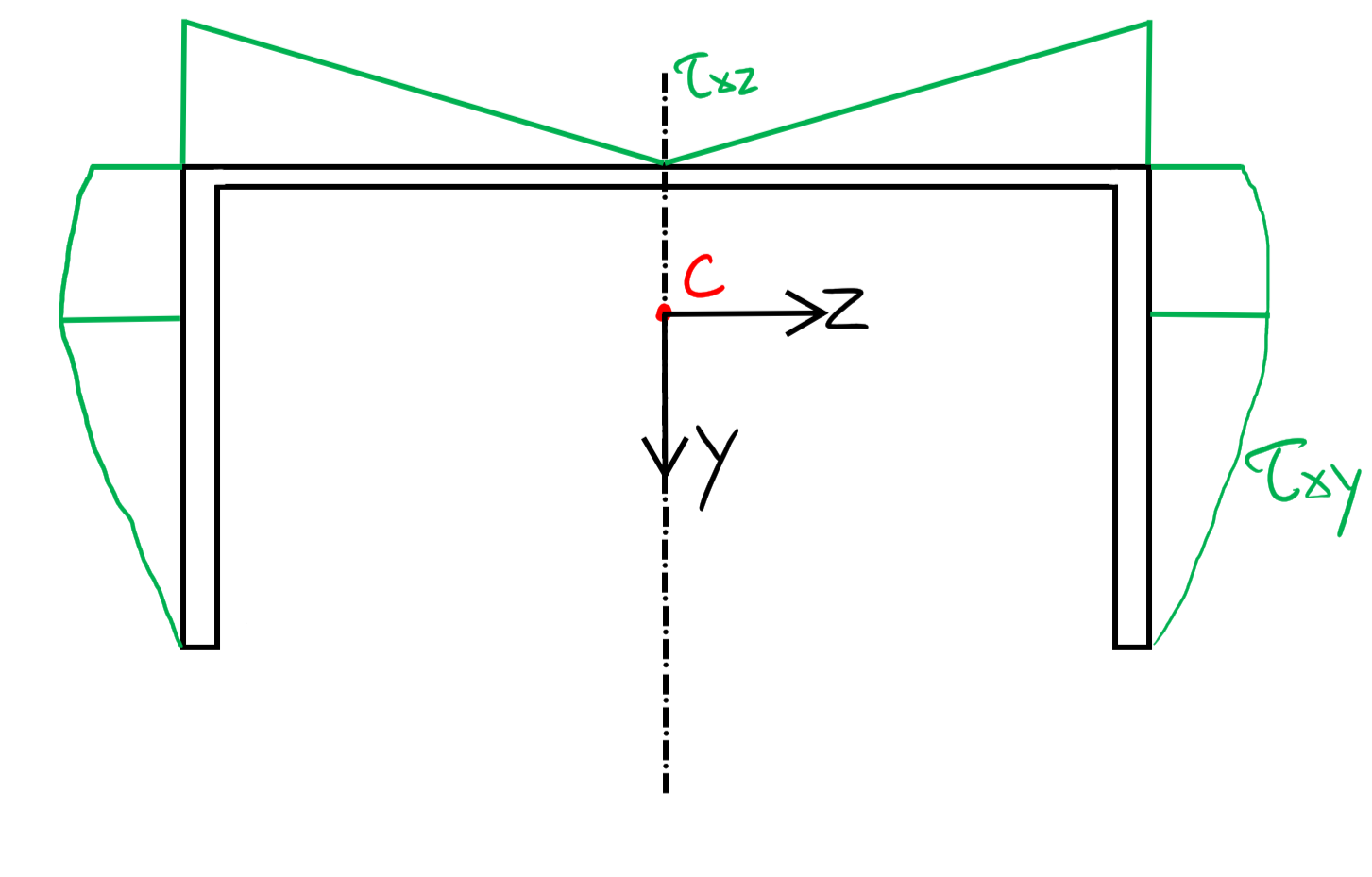


1. **finden**

Die maximale Schubspannung ist entweder im Punkt oder im Punkt .

Die von Betrag grösste Schubspannung im Querschnitt ist dementsprechend im Punkt .

1. **Spannungsverlauf zeichnen**

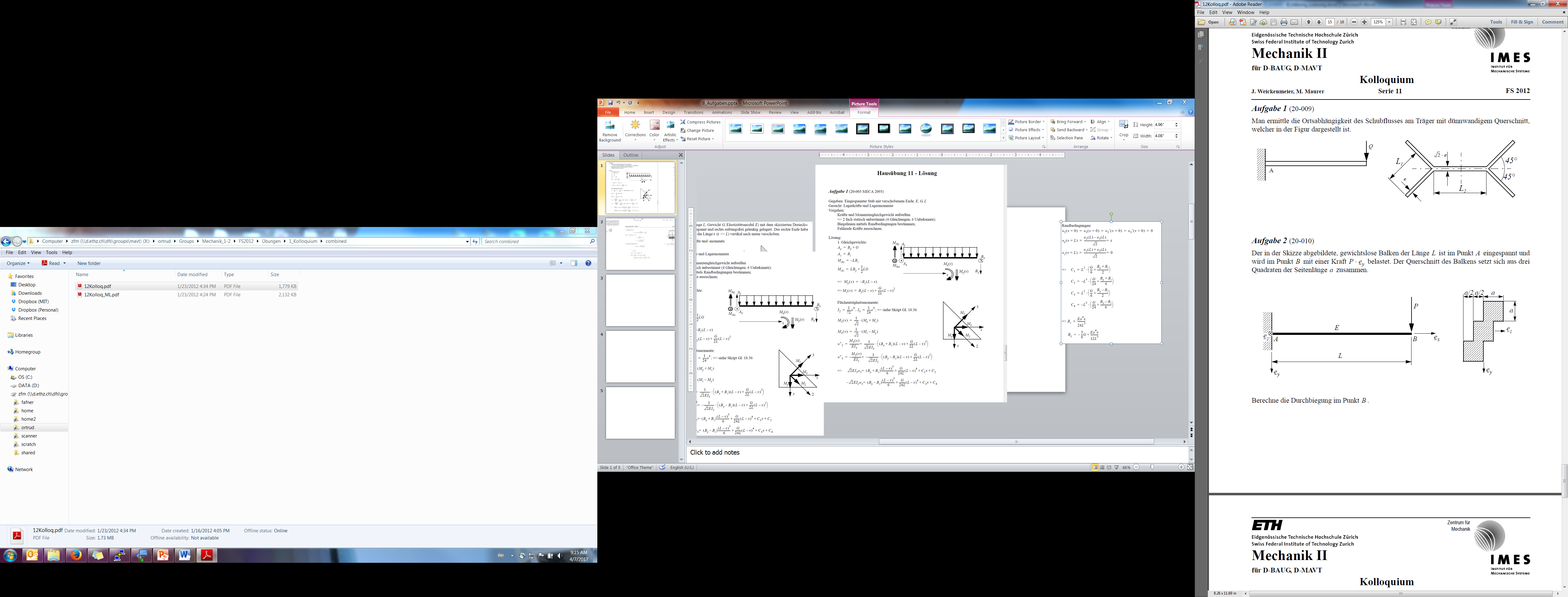


Bemerkung: Beim Zeichnen geht man am besten so vor, dass man zuerst die Stellen markiert, an welchen keine Schubspannung auftritt. Nachdem man dann die Schubspannungen wie oben bestimmt hat, können diese eingezeichnet werden. Um ohne zu rechnen bereits eine Einschätzung machen zu können, kann bei dünnwandigen Querschnitten mit konstanter Dicke das statische Moment

verwendet werden. Im horizontalen Bereich bleibt konstant. Nur verändert sich, warum ein linearer Verlauf entsteht. Beim vertikalen Bereich verändert sich dann sowohl als auch ; der Verlauf ist quadratisch.

# Aufgabe H2:

Ermitteln Sie die Ortsabhängigkeit der Schubspannung am Träger mit dünnwandigem Querschnitt, welcher in der Figur dargestellt ist.



y

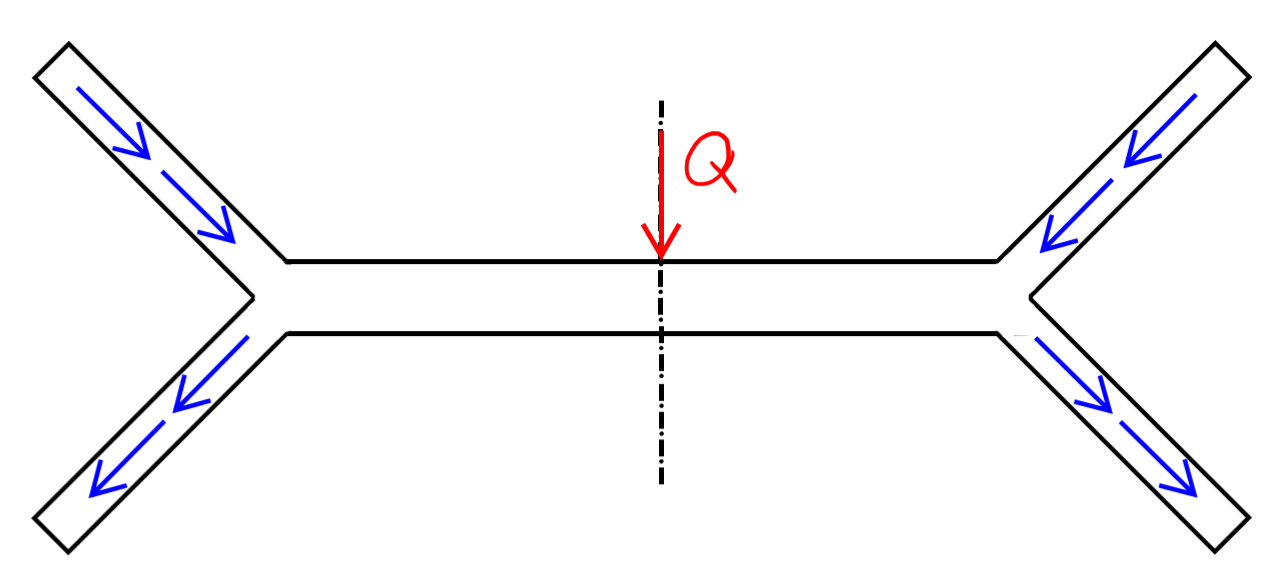
z

Geg.:

# Lösung zu Aufgabe H2:

1. **Schubspannungsverlauf**

Bevor man losrechnet ist bei komplizierteren Querschnitten hilfreich, wenn man zuerst den Verlauf der Schubspannung untersucht.



Bemerkung: Wie in der Aufgabe H2 wird wegen der Symmetrie nur eine Seite des Systems betrachtet. Wie man im folgendem Schritt sieht, gibt es keine Schubspannung im mittleren Bereich.



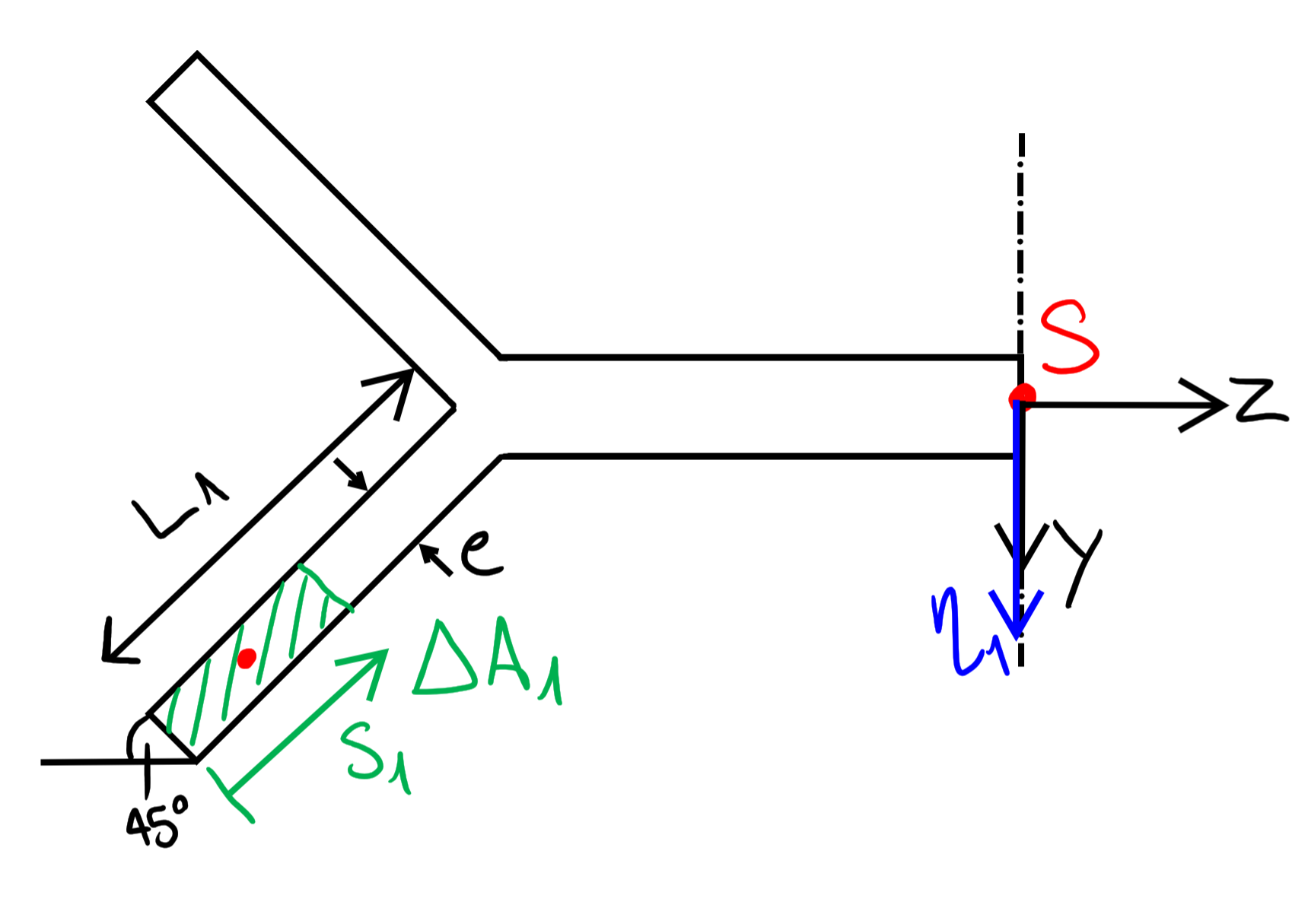
1. **Schubfluss im Abschnitt 2**

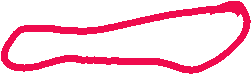




Da die zwei Schwerpunkte auf gleicher Höhe liegen, ist und somit und auch .

1. **Schubspannung im Abschnitt 1**





Die gesuchte Schubspannung ist mit dem gegebenen :

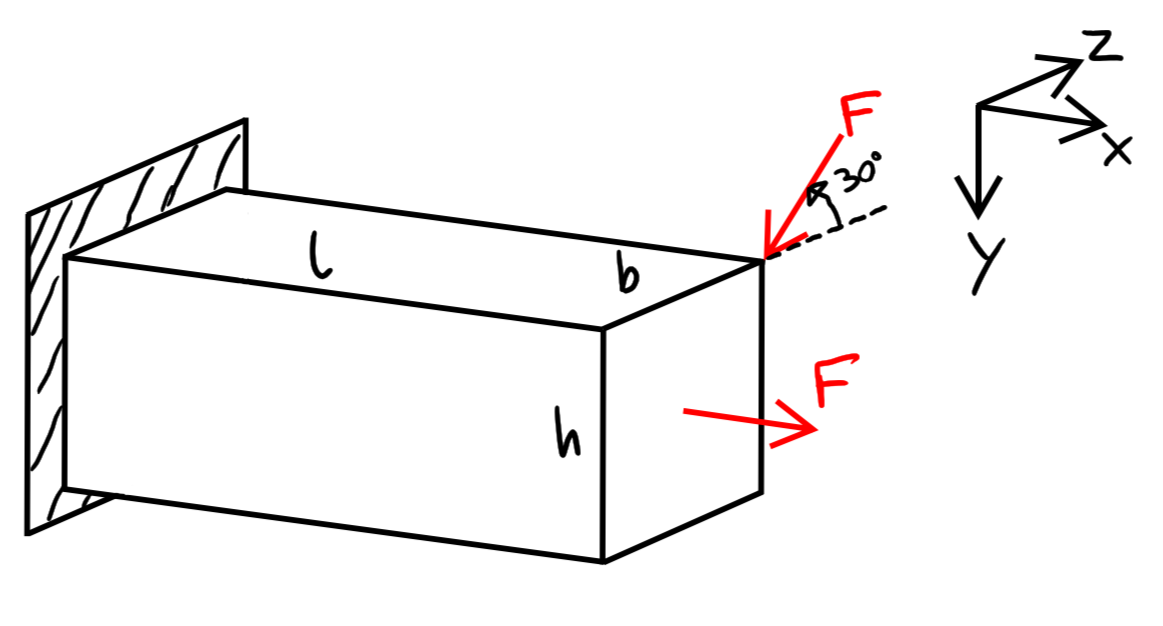


Da Hz3 = 0 ist, verschwindet die Schubspannung im horizontalen Teil des Querschnittes. Des Weiteren gilt die Beziehung tau\_xs1= - tau\_xs2



# Aufgabe H3:

Gegeben sei ein Balken, dessen Belastung und Geometrie in der Skizze gegeben sind.



1. Geben Sie den maximalen Betrag der Kraft an, so dass im Querschnitt nicht überschritten wird.
2. Man nehme an, dass die Kraft und die Länge als unveränderliche Grössen gegeben sind und dass im momentanen Zustand die Spannung im Innern überschreitet. Was würden Sie ihrem Chef vorschlagen, damit die innere Spannung nicht mehr überschreitet?

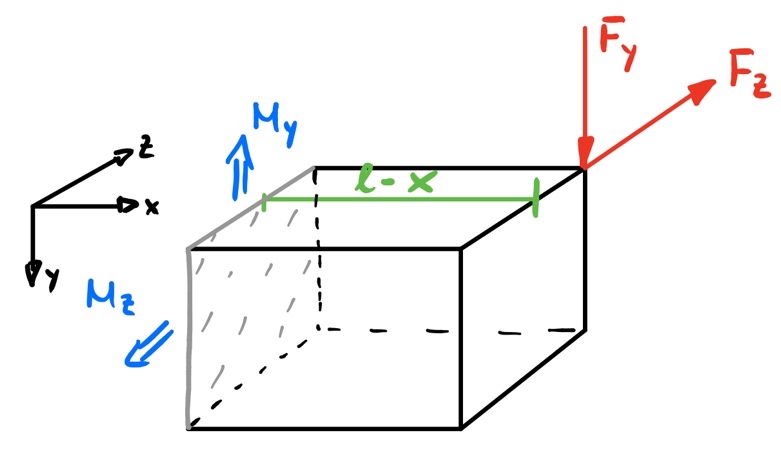
# Lösung zu Aufgabe H3:

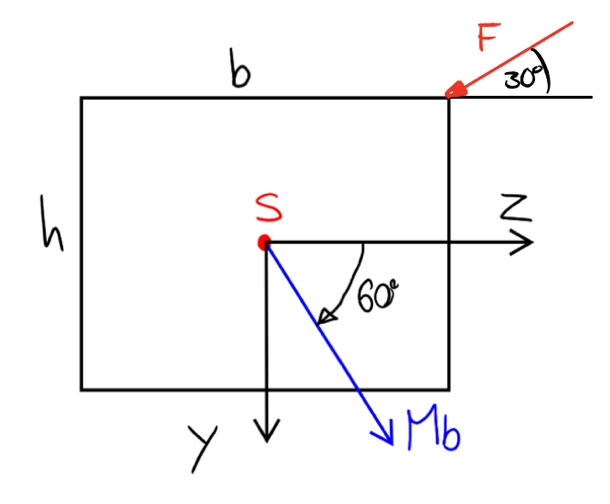
Aufgabenteil a):

Bei dieser Aufgabe geht es erst darum die erzeugte Normalspannung durch Zug und Biegung zu bestimmen, den Ort zu finden, wo sie maximal wird und dann eine Bedingung für F zu finden. Damit der Balken unter der Belastung nicht versagt, muss also kleiner als bleiben.

1. **Richtung des Biegemomentes berechnen**
   1. Richtung

Die Richtung des Momentes ist immer senkrecht zur Kraft, die es erzeugt. Wichtig ist, dass jede Biegung immer durch den Schwerpunkt (neutrale Faser) geht.





1. **Spannungsverteilung im Querschnitt untersuchen**

Die Spannungsverteilung in einem Querschnitt ist allgemein definiert als

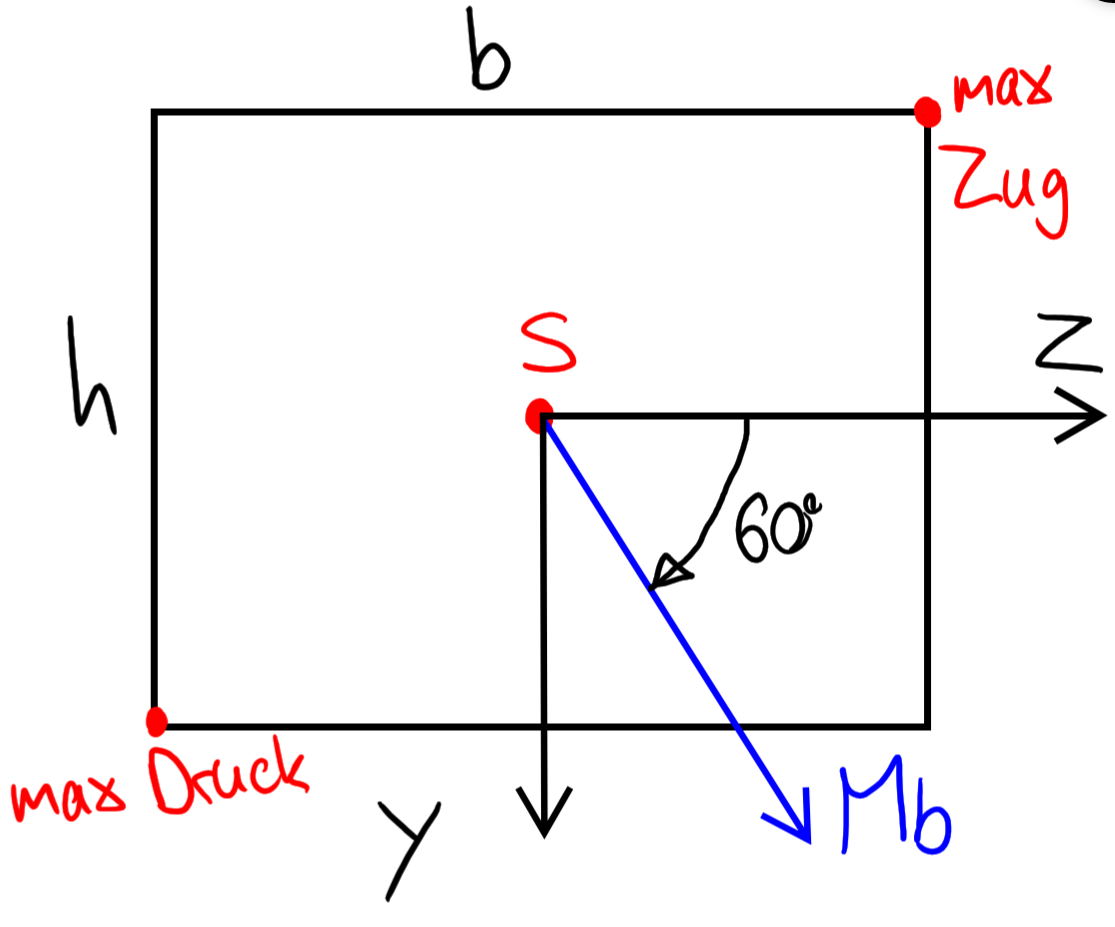
Bemerkung: Die Normalspannung ist zusammengesetzt aus Spannung durch Biegung und durch Zug.

* 1. Momente in y-und z-Richtung bestimmen:

Die Momente werden maximal für :

* 1. Normalspannungskomponente bestimmen:
  2. Trägheitsmomente bestimmen
  3. Spannungsverteilung berechnen

1. **Maximale Spannung im Querschnitt finden**



Zwei Punkte kommen in Frage, wenn man von maximale Spannung spricht: der Punkt, bei dem die Zugspannung am höchsten ist und der Punkt, an dem die Druckspannung maximal wird. Wäre die Beanspruchung nur durch das Biegemoment gegeben, wären die Beträge in den zwei Fällen äquivalent. Da aber noch eine axiale Zugspannung vorliegt, wird der Betrag der maximalen Zugspannung grösser als der Betrag der Druckspannung sein.

Die maximale Spannung im Balken ist also

1. **Die maximal mögliche Kraft bestimmen**

Damit der Balken nicht versagt gilt . Also

Aufgabenteil b):

Wenn man die Spannungsverteilung analysiert, merkt man, dass die z-Koordinate einen grösseren Einfluss auf die Spannung hat als die y-Koordinate, da sie mit einem Koeffizienten von multipliziert wird.

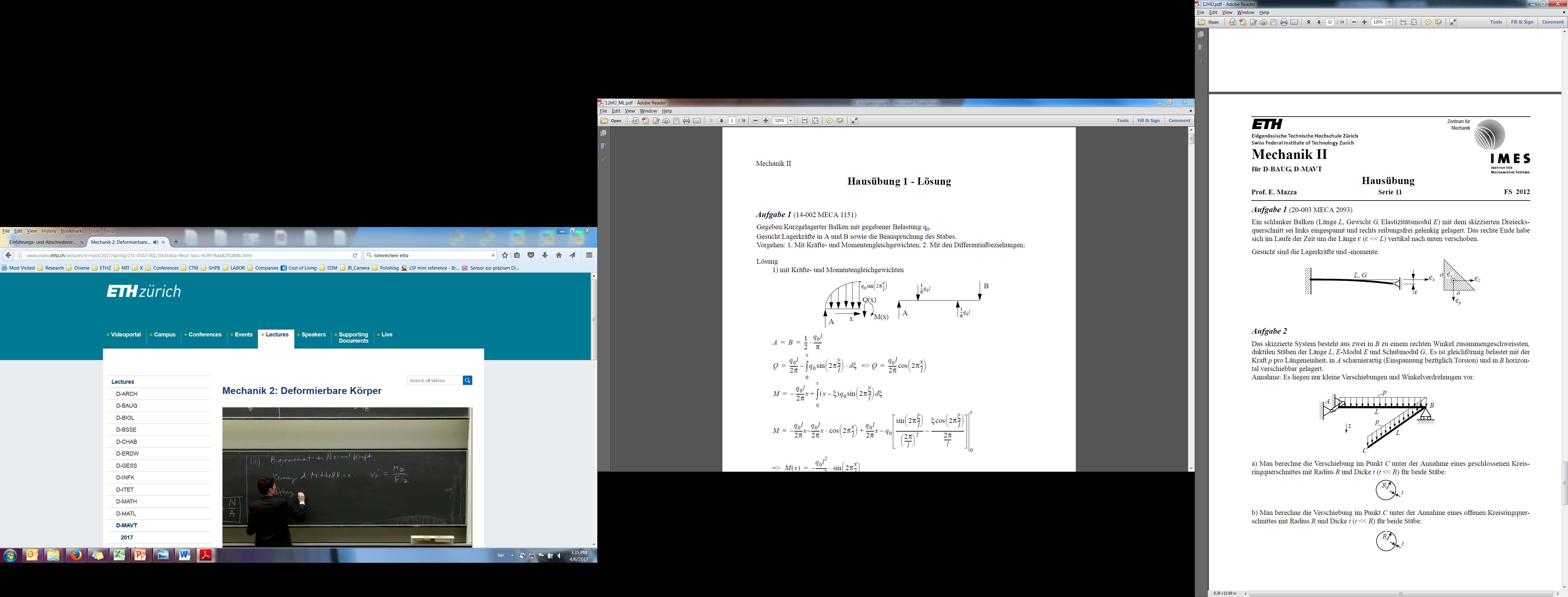
Der Chef ist vor allem daran interessiert, Material (d.h. Geld) zu sparen. Das heisst, dass man die Dimensionen so wenig wie möglich vergrössern soll. Um die innere Spannung so effizient wie möglich zu unterdrücken, wäre der beste Weg die Breite zu erhöhen und die Höhe zu verkleinern, ohne die Querschnittsfläche zu vergrössern. Das Trägheitsmoment um wird also vergrössert.

# Wiederholungsaufgabe 1:

Ein schlanker Balken (Länge *L*, Gewichtskraft *G*, Elastizitätsmodul *E*) mit dem skizzierten Dreiecksquerschnitt sei links eingespannt und rechts reibungsfrei gelenkig gelagert. Das rechte Ende habe sich im Laufe der Zeit um die Länge ɛ vertikal nach unten verschoben.

Gesucht ist die absolut maximal auftretende Spannung im Querschnitt des Balkens.

Hinweis: Die Kräfte in x-Richtung sind vernachlässigbar (ɛ<<L).



B

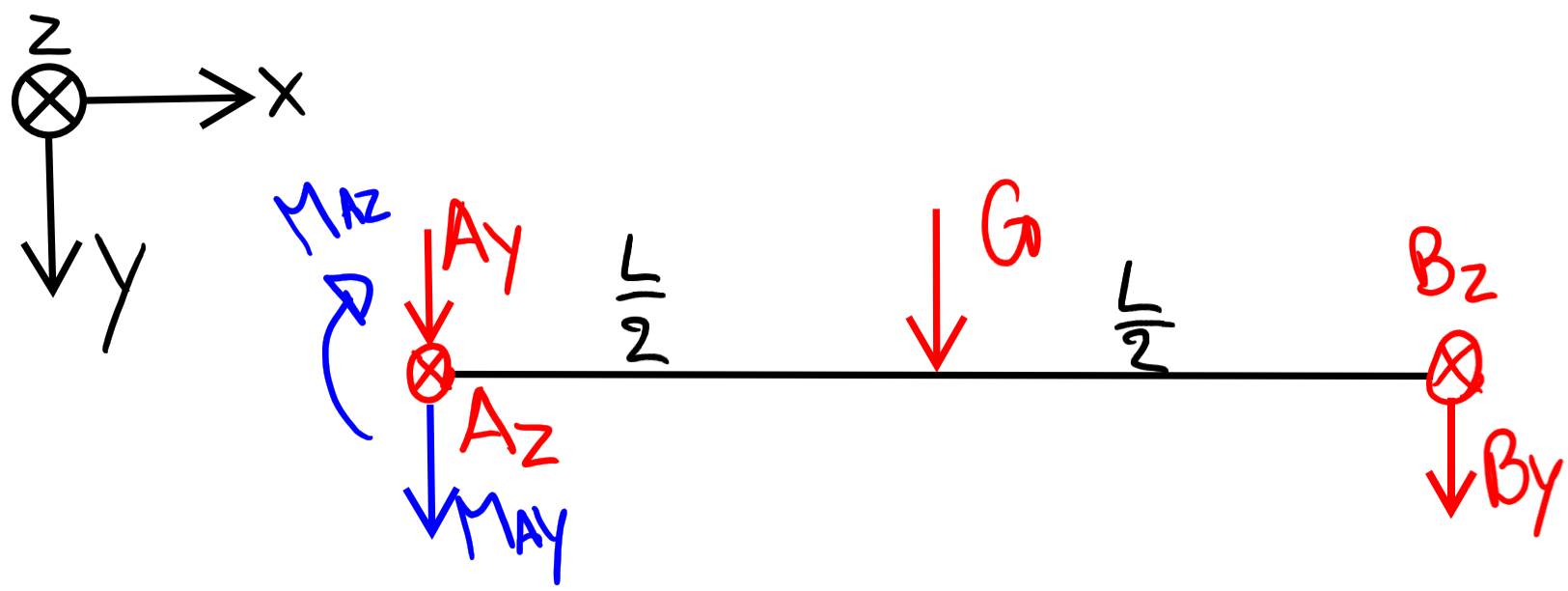
A

Geg.:

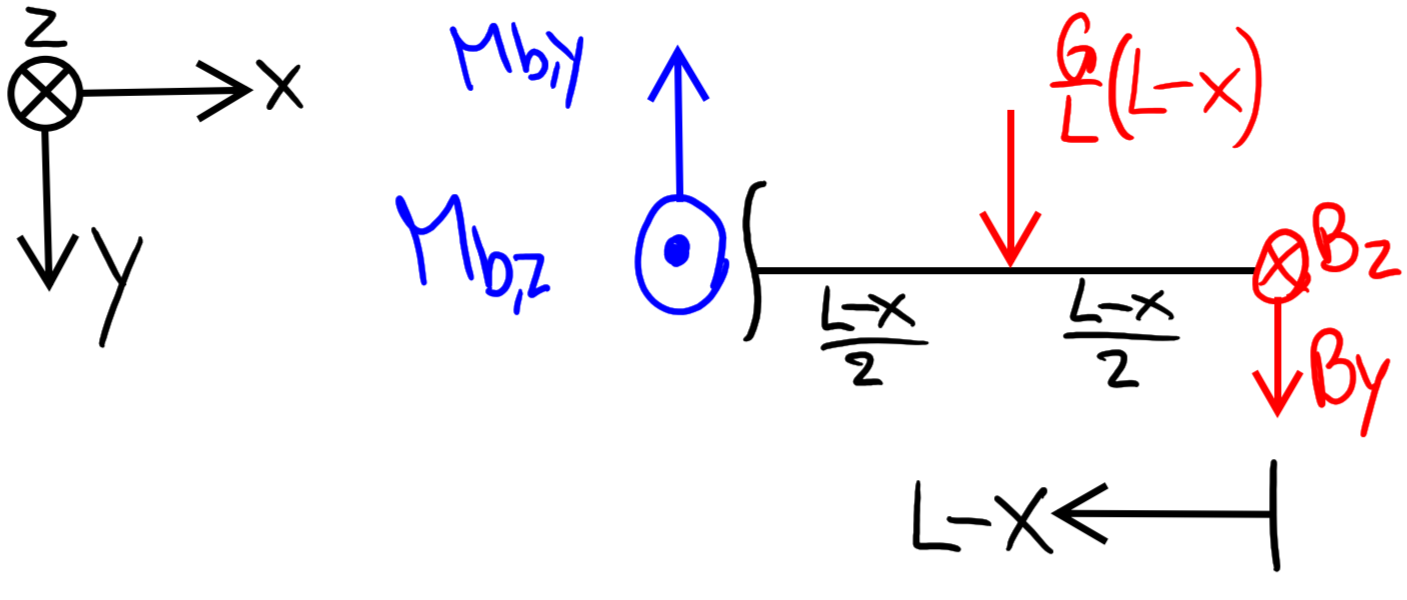
# Lösung zur Widerholungsaufgabe:

1. **Gleichgewichtsbedingungen**

Da das System 2-fach statisch unbestimmt ist (4 Gleichungen, 6 Unbekannten), drücken wir die Lagerkräfte in Punkt A als Funktionen, die von den Lagerkräften in Punkt B abhängen. Die zusätzlichen Randbedingungen der Biegelinie werden dann verwendet, um die 2 fehlenden Unbekannten zu bestimmen.



1. **Biegemomente**



1. **Querschnittsanalyse**

Der Balken biegt sich um die Hauptachsen des Querschnittes, welche aber nicht mit unserem Koordinatensystem übereinstimmen. Aus diesem Grund muss man eine Koordinatentransformation durchführen, um die Biegemomente in Hauptachsenrichtung zu berechnen.



1. **Biegelinie in Hauptachsenrichtung und Lagerkräfte im Punkt B berechnen**
   1. Biegelinie in Hauptachsenrichtung berechnen

Mit

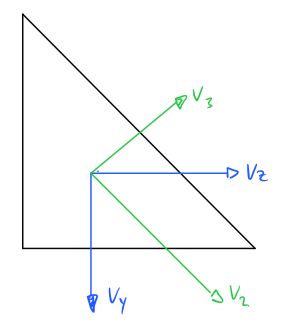
Bemerkung: Da das Moment eine Biegung in Richtung von erzeugt, aber per Definition in zeigt, muss das Vorzeichen beim berechnen der Biegelinie mit dem Korrekturfaktor von -1 angepasst werden.

Mit

Mit den Randbedingungen erhält man für die Integrationskonstanten:

Eingesetzt ergibt das:

* 1. Die Lagerkräfte im Punkt B bestimmen



Da der Punkt B nur in y-Richtung um verschoben ist, bekommt man die Randbedingungen:

Damit hat man genügend Informationen, um die Lagerkräfte in B zu berechnen:

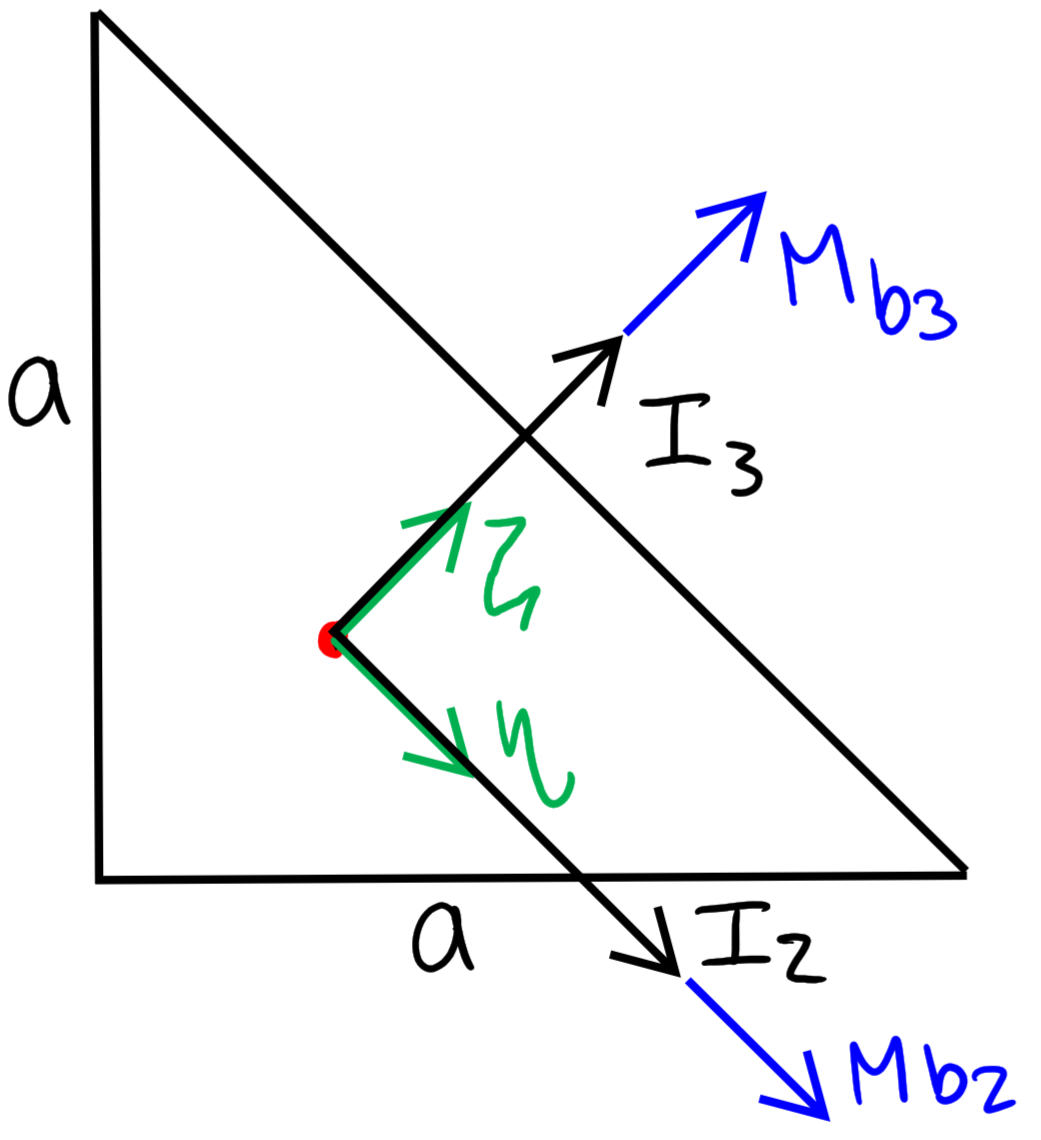
Aus (1) + (2) erhält man:

Setzt man dieses Resultat in (2) ein und löst auf, erhält man

Und somit:

1. **Absolut maximale Spannung im Querschnitt berechnen**
   1. Spannungsverteilung im Querschnitt

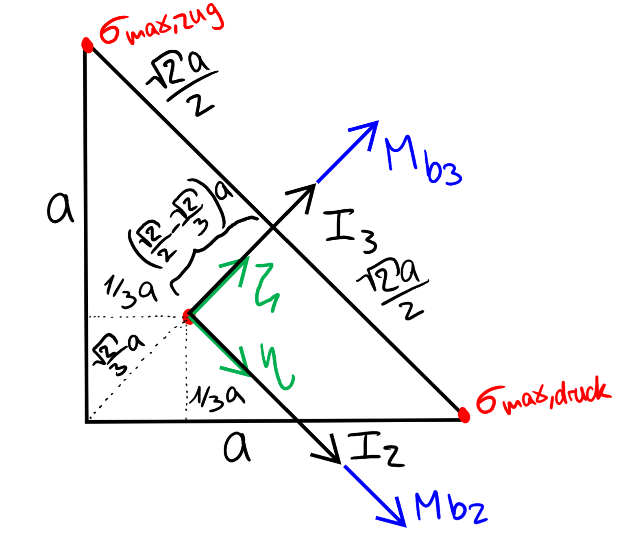
Die Spannungsverteilung im Querschnitt lautet . Setzt man die Lagerkräfte in den Biegemomenten ein erhält man:



Die Spannungsverteilung ist somit

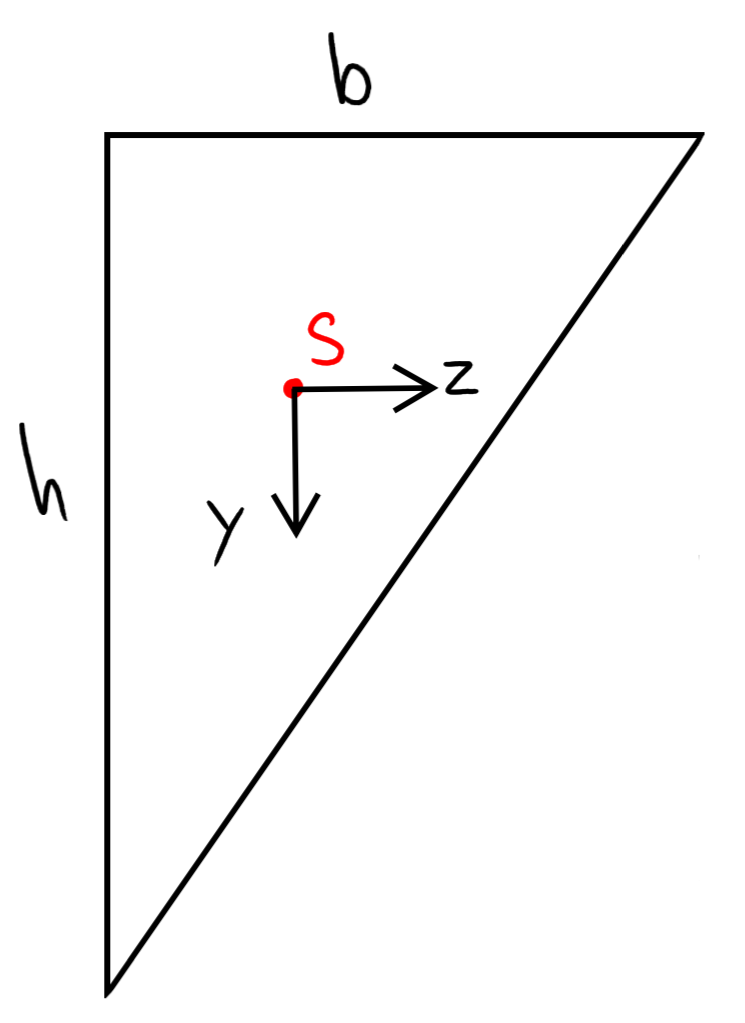
* 1. Absolut maximale Spannung bestimmen

Die maximale Belastung durch die Momente ergibt sich bei . Im Querschnitt ist der am meisten belastete Punkt bei bei (/) oder bei (/).

Wenn man die zwei Punkte einsetzt erhält man:

# Wiederholungsaufgabe 2:

Ein rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt mit Schwerpunktachsen y und z sei gegeben. Er besitze die Breite und die Höhe wie es in der Skizze dargestellt ist.

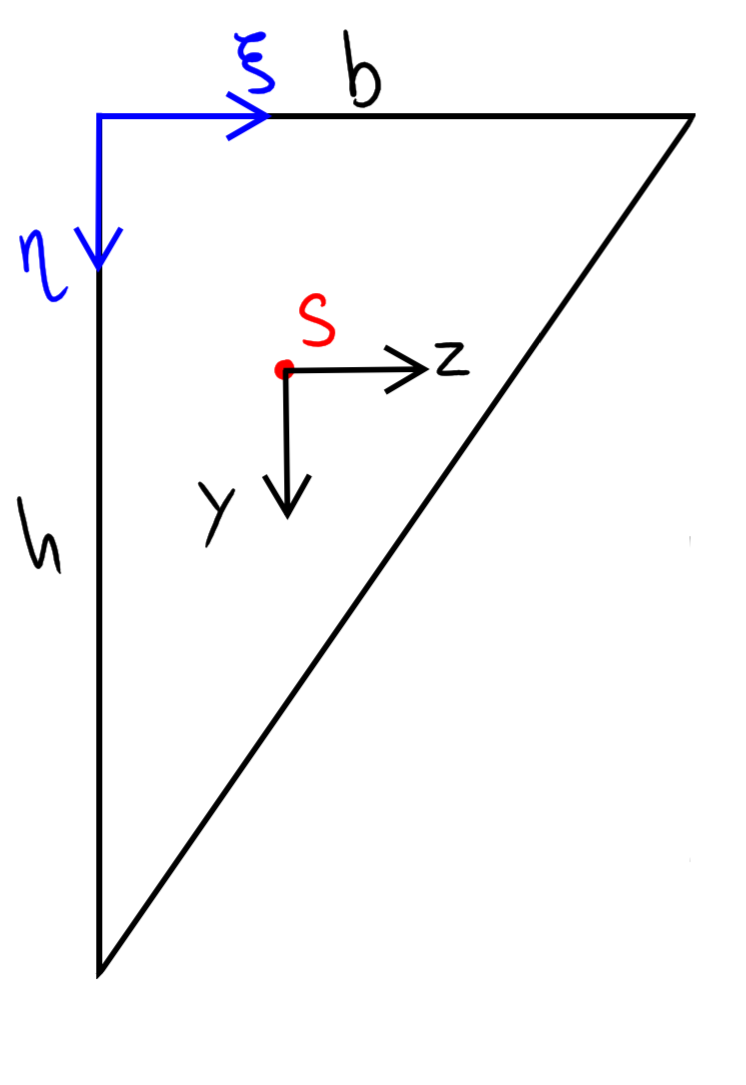


1. Berechnen Sie die axialen Flächenträgheitsmomente und und das Deviationsmoment .
2. Finden Sie die Hauptträgheitsmomente und und die Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis .

# Lösung zur Wiederholungsaufgabe 2:

Aufgabenteil a):

1. **Die Flächenträgheitsmomente bezüglich und berechnen**



Die Funktion der Hypotenuse ist gegeben durch:

1. **Den Schwerpunkt bestimmen**
2. **und finden**

Um die Flächenträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes zu finden, wendet man den Satz von Steiner an.

Aufgabenteil b):

1. **und berechnen**

Mit kriegt man und

1. **Hauptachsen bestimmen**

Bemerkung: Der Aufgabenteil b) ist auch mit dem Mohrschen Kreis lösbar.