Sorbonne Université
M1 Androide / IQ

MOGPL

Projet - Automne 2021

Hugo Abreu
Krisni Almehdi

soutenu le 17 Décembre 2021

1 Introduction

Dans ce projet, on considère des multigraphes orientés pondérés par le temps. Ce type de graphe est utile notamment pour la plannification temporelle - nous considèrerons le cas où un réseau de transport aérien est représenté par un tel graphe.

2 Préliminaires

Question 1. En utilisant l'instance de la figure de gauche de l'Exemple 1 (dans l'énoncé) ou une autre instance, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

Par soucis de simplicité et pour être plus concis, une instance alternative est proposée. Considérons G_1, le multigraphe orienté pondéré orienté par le temps donné par le diagramme de la Figure 1:

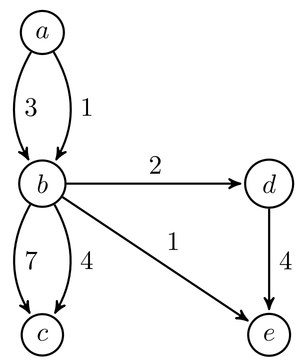

Figure 1: Diagramme représentant le multigraphe pondéré orienté par le temps G_1

Le multigraphe G_1 sera utilisé pour justifier les assertions suivantes.

Assertion 1.1. *Un sous-chemin préfixe d'un chemin d'arrivée au plus tôt peut ne pas être un chemin d'arrivée au plus tôt.*

Réponse. Considérons l'ensemble de chemins $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$ dans le multigraphe G_1, qui correspond à l'ensemble de tous les chemins réalisables de a à c dans G_1:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a, c, [0, \infty]) = \{ & P_1 = ((a, b, 1, 1), (b, c, 4, 1)), \\ & P_2 = ((a, b, 1, 1), (b, c, 7, 1)), \\ & P_3 = ((a, b, 3, 1), (b, c, 4, 1)), \\ & P_4 = ((a, b, 3, 1), (b, c, 7, 1)) \}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour déterminer le(s) chemin(s) d'arrivée au plus tôt de a à c dans le graphe G_1, soit un chemin P tel que $\text{fin}(P) = \min(\{\text{fin}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, c, [0, \infty]\})$, calculons les dates de fin pour tout P appartenant à $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$:

$$\begin{aligned} \text{fin}(P_1) &= 4 + 1 = 5, \\ \text{fin}(P_2) &= 7 + 1 = 8, \\ \text{fin}(P_3) &= 4 + 1 = 5, \\ \text{fin}(P_4) &= 7 + 1 = 8. \end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi, $\min(\{5, 8, 5, 8\}) = 5$ et les chemins d'arrivée au plus tôt sont P_1 et P_3.

$P_3' = ((a, b, 3, 1))$, un chemin de a vers b, est un sous-chemin préfixe (un sous-chemin partant du sommet de départ) de P_3. Cependant, il existe un chemin $P_{a\to b} = ((a, b, 1, 1))$ tel que

$$\text{fin}(P_3') = 3 + 1 = 4 > \text{fin}(P_{a\to b}) = 1 + 1 = 2, \tag{3}$$

donc P_3' n'est pas un chemin d'arrivée au plus tôt de a à b.

Ainsi, un sous-chemin préfixe d'un chemin d'arrivée au plus tôt peut ne pas être un chemin d'arrivée au plus tôt. □

Assertion 1.2. *Un sous-chemin postfixe d'un chemin de départ au plus tard peut ne pas être un chemin de départ au plus tard.*

Réponse. Considérons de nouveau l'ensemble de chemins $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$, donné en Équation 1.

Un chemin de départ au plus tard de a à c, dans le multigraphe G_1, correspond à un chemin P tel que $\text{début}(P) = \max(\{\text{début}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, c, [0, \infty]\})$. On observe facilement que

$$\text{début}(P_1) = \text{début}(P_2) = 1 < \text{début}(P_3) = \text{début}(P_4) = 3, \tag{4}$$

donc les chemins de départ au plus tard entre a et c sont P_3 et P_4.

$P_3'' = ((b, c, 4, 1))$, un chemin de b vers c, est un sous-chemin postfixe (un sous-chemin partant du sommet final) de P_3. Cependant, il existe un chemin $P_{b\to c} = ((b, c, 7, 1))$ tel que

$$\text{début}(P_3'') = 3 < \text{début}(P_{b\to c}) = 7 \tag{5}$$

donc P_3'' n'est pas un chemin de départ au plus tard de b à c.

Ainsi, un sous-chemin postfixe d'un chemin de départ au plus tard peut ne pas être un chemin de départ au plus tard. □

Assertion 1.3. *Un sous-chemin d'un chemin le plus rapide peut ne pas être un chemin le plus rapide.*

Réponse. Considérons les chemins de a à d dans G_1:

$$\mathcal{P}(a, d, [0, \infty]) = \{P_5 = ((a, b, 1, 1), (b, d, 2, 1), (d, e, 4, 1))\}. \tag{6}$$

Comme il n'existe qu'un seul chemin réalisable, c'est forcément un chemin le plus rapide de a à d, un chemin P tel que $\text{durée}(P) = \min(\{\text{durée}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, d, [0, \infty])\})$.

$P_5' = ((b, d, 2, 1), (d, e, 4, 1))$, un chemin de b à e, est un sous-chemin de P_5. Cependant, il existe un chemin $P_{b\to e} = ((b, e, 1, 1))$ de b vers e tel que

$$\text{durée}(P_5') = (4 + 1) - 1 = 4 > \text{durée}(P_{b\to e}) = (1 + 1) - 1 = 1, \tag{7}$$

donc P_5' n'est pas un chemin le plus rapide de b à e.

Ainsi, un sous-chemin d'un chemin le plus rapide peut ne pas être un chemin le plus rapide. □

Assertion 1.4. *Un sous-chemin d'un plus court chemin peut ne pas être un plus court chemin.*

Réponse. Considérons de nouveau les chemins $\mathcal{P}(a, d, [0, \infty])$ de a vers d donnés en Équation 6.

De même, comme il n'existe qu'un seul chemin réalisable, P_5 est forcément le chemin le plus court: un chemin P tel que $\text{dist}(P) = \min(\{\text{dist}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, d, [0, \infty])\})$.

Considérons de nouveau les chemins P_5'' et $P_{b\to e}$ donnés en Assertion 1.3.

$$\text{dist}(P_5') = 1 + 1 = 2 > \text{dist}(P_{b\to e}) = 1, \tag{8}$$

donc P_5' n'est pas un chemin le plus court de b à e.

Ainsi, un sous-chemin d'un chemin le plus court peut ne pas être un chemin le plus court.

□

3 Algorithmes de plus court chemin dans des multigraphes orientés pondérés par le temps

4 Conclusion