



SORBONNE UNIVERSITÉ
M1 ANDROIDE / IQ

MOGPL

Projet - Automne 2021

**Hugo Abreu
Krisni Almehdi**

soutenu le 17 Décembre 2021

1 Introduction

Dans ce projet, on considère des multigraphes orientés pondérés par le temps. Ce type de graphe est utile notamment pour la planification temporelle - nous considérerons le cas où un réseau de transport aérien est représenté par un tel graphe.

2 Préliminaires

Question 1. En utilisant l'instance de la figure de gauche de l'Exemple 1 (dans l'énoncé) ou une autre instance, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

Par soucis de simplicité et pour être plus concis, une instance alternative est proposée. Considérons $G_1 = (V_1, E_1)$, le multigraphe orienté pondéré par le temps donné par le diagramme de la Figure 1.

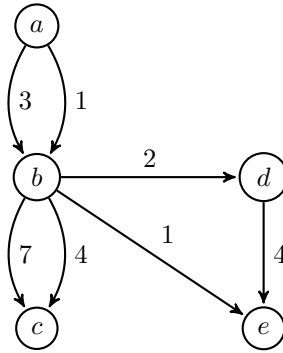


Figure 1: Diagramme représentant le multigraphe orienté pondéré par le temps G_1

Comme dans l'énoncé, G_1 représente un réseau de transport aérien où chaque arête est un vol. On suppose que la durée de chaque vol est de 1 jour (i.e. $\forall e_i \in E_1, e_i = (u_i, v_i, t_i, 1)$).

Assertion 1.1. *Un sous-chemin préfixe d'un chemin d'arrivée au plus tôt peut ne pas être un chemin d'arrivée au plus tôt.*

Réponse. Considérons l'ensemble de chemins $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$ dans le multigraphe G_1 , qui correspond à l'ensemble de tous les chemins réalisables de a à c dans G_1 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(a, c, [0, \infty]) = \{ & P_1 = ((a, b, 1, 1), (b, c, 4, 1)), \\
 & P_2 = ((a, b, 1, 1), (b, c, 7, 1)), \\
 & P_3 = ((a, b, 3, 1), (b, c, 4, 1)), \\
 & P_4 = ((a, b, 3, 1), (b, c, 7, 1)) \}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Pour déterminer le(s) chemin(s) d'arrivée au plus tôt de a à c dans le graphe G_1 , soit un chemin P tel que $\text{fin}(P) = \min(\{\text{fin}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, c, [0, \infty])\})$, calculons les dates de fin pour tout P appartenant à $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$:

$$\begin{aligned}
 \text{fin}(P_1) &= 4 + 1 = 5, \\
 \text{fin}(P_2) &= 7 + 1 = 8, \\
 \text{fin}(P_3) &= 4 + 1 = 5, \\
 \text{fin}(P_4) &= 7 + 1 = 8.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi, $\min(\{5, 8, 5, 8\}) = 5$ et les chemins d'arrivée au plus tôt sont P_1 et P_3 .

$P'_3 = ((a, b, 3, 1))$, un chemin de a vers b , est un sous-chemin préfixe (un sous-chemin partant du sommet de départ) de P_3 . Cependant, il existe un chemin $P_{a \rightarrow b} = ((a, b, 1, 1))$ tel que

$$\text{fin}(P'_3) = 3 + 1 = 4 > \text{fin}(P_{a \rightarrow b}) = 1 + 1 = 2, \quad (3)$$

donc P'_3 n'est pas un chemin d'arrivée au plus tôt de a à b .

Ainsi, un sous-chemin préfixe d'un chemin d'arrivée au plus tôt peut ne pas être un chemin d'arrivée au plus tôt. \square

Assertion 1.2. *Un sous-chemin postfixe d'un chemin de départ au plus tard peut ne pas être un chemin de départ au plus tard.*

Réponse. Considérons de nouveau l'ensemble de chemins $\mathcal{P}(a, c, [0, \infty])$, donné en Équation 1.

Un chemin de départ au plus tard de a à c , dans le multigraphe G_1 , correspond à un chemin P tel que $\text{début}(P) = \max(\{\text{début}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, c, [0, \infty])\})$. On observe facilement que

$$\text{début}(P_1) = \text{début}(P_2) = 1 < \text{début}(P_3) = \text{début}(P_4) = 3, \quad (4)$$

donc les chemins de départ au plus tard entre a et c sont P_3 et P_4 .

$P''_3 = ((b, c, 4, 1))$, un chemin de b vers c , est un sous-chemin postfixe (un sous-chemin partant du sommet final) de P_3 . Cependant, il existe un chemin $P_{b \rightarrow c} = ((b, c, 7, 1))$ tel que

$$\text{début}(P''_3) = 3 < \text{début}(P_{b \rightarrow c}) = 7 \quad (5)$$

donc P''_3 n'est pas un chemin de départ au plus tard de b à c .

Ainsi, un sous-chemin postfixe d'un chemin de départ au plus tard peut ne pas être un chemin de départ au plus tard. \square

Assertion 1.3. *Un sous-chemin d'un chemin le plus rapide peut ne pas être un chemin le plus rapide.*

Réponse. Considérons les chemins de a à d dans G_1 :

$$\mathcal{P}(a, d, [0, \infty]) = \{P_5 = ((a, b, 1, 1), (b, d, 2, 1), (d, e, 4, 1))\}. \quad (6)$$

Comme il n'existe qu'un seul chemin réalisable, c'est forcément un chemin le plus rapide de a à d , un chemin P tel que $\text{durée}(P) = \min(\{\text{durée}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, d, [0, \infty])\})$.

$P'_5 = ((b, d, 2, 1), (d, e, 4, 1))$, un chemin de b à e , est un sous-chemin de P_5 . Cependant, il existe un chemin $P_{b \rightarrow e} = ((b, e, 1, 1))$ de b vers e tel que

$$\text{durée}(P'_5) = (4 + 1) - 1 = 4 > \text{durée}(P_{b \rightarrow e}) = (1 + 1) - 1 = 1, \quad (7)$$

donc P'_5 n'est pas un chemin le plus rapide de b à e .

Ainsi, un sous-chemin d'un chemin le plus rapide peut ne pas être un chemin le plus rapide. \square

Assertion 1.4. *Un sous-chemin d'un plus court chemin peut ne pas être un plus court chemin.*

Réponse. Considérons de nouveau les chemins $\mathcal{P}(a, d, [0, \infty])$ de a vers d donnés en Équation 6.

De même, comme il n'existe qu'un seul chemin réalisable, P_5 est forcément le chemin le plus court: un chemin P tel que $\text{dist}(P) = \min(\{\text{dist}(P') : P' \in \mathcal{P}(a, d, [0, \infty])\})$.

Considérons de nouveau les chemins P''_5 et $P_{b \rightarrow e}$ donnés en Assertion 1.3.

$$\text{dist}(P'_5) = 1 + 1 = 2 > \text{dist}(P_{b \rightarrow e}) = 1, \quad (8)$$

donc P'_5 n'est pas un chemin le plus court de b à e .

Ainsi, un sous-chemin d'un chemin le plus court peut ne pas être un chemin le plus court. \square

3 Algorithmes de plus court chemin dans des multigraphes orientés pondérés par le temps

Dans cette partie, les réponses aux questions 2 et 3 et du sujet sont données au fûr et à mesure de la présentation des algorithmes.

Question 2. En utilisant comme base la transformation de G à \tilde{G} , montrer comment calculer de manière efficace les 4 types de chemins minimaux.

Question 3. Calculer la complexité de différents algorithmes proposés.

3.1 Structure de données pour la représentation de multigraphes

Pour représenter des multigraphes (et des graphes classiques, également), on choisit de travailler avec des dictionnaires représentant des listes d'adjacence (dans ce cas, des listes de successeurs). Ce choix est efficace vu que l'accès aux dictionnaires en python est d'une complexité de $\mathcal{O}(1)$, via l'utilisation fonctions de hashage gérées automatiquement par python.

Pour un multigraphe G , les clés du dictionnaire correspondent aux sommets de G , et ses valeurs à la liste des arcs sortants pour chaque sommet. Comme un arc (s_1, s_2, dDD, cDT) - où s_1 correspond au sommet de départ, s_2 au sommet de destination, dDD la date de départ du vol, et cDT la durée du vol - est forcément associé à un sommet de départ dans le dictionnaire (la clé), on ne garde que (s_2, dDD, cDT) .

3.2 Transformation multigraphe \rightarrow graphe

Pour adapter des algorithmes standards à des multigraphes orientés pondérés par le temps (MOPLT), une technique est proposée dans le sujet pour transformer un MOPLT en un graphe classique qui prend en compte le temps de manière explicite.

On propose une approche légèrement différente à celle proposée dans le sujet. On calcule \tilde{V}_{in} et \tilde{V}_{out} , et on crée une liste de d'adjacence. Cependant, on ne donne pas de poids aux arcs: avec une comparaison en $\mathcal{O}(1)$ on peut déterminer si deux noeuds sont les mêmes (et donc un poids de 0) où différents (un poids de 1).

Pour le faire, on a implémenté une fonction `transformeGraphe` qui prend en argument un multigraphe G (représenté sous-forme d'un dictionnaire) et retourne le graphe \tilde{G} (lui aussi sous forme de dictionnaire). Cette fois, les clés du dictionnaire représentant \tilde{G} correspondent au tuple (s_1, t_1) où $s_1 \in G$ et t_1 correspond à la valeur de dDD dans un des arcs sortant de s_1 . Les valeurs du dictionnaire de \tilde{G} correspondent à deux listes de sommets (s_2, t_2) et (s_3, t_3) où (s_2, t_2) correspond à un vol de s_1 à s_2 le jour t_2 , et (s_3, t_3) correspond à un vol de s_3 à s_1 le jour t_3 .

Pour que les algorithmes proposés dans les sections suivantes soient plus efficaces, on choisit également d'ordonner les dates des sommets sortants par ordre croissante.

Le pseudo-code pour cette fonction est donné en Algorithme 1.

Pour calculer la complexité, on assume que $|V| < |E|$. Ainsi, la complexité temporelle de l'algorithme 1 est la suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\text{Algorithme 1}) &= \mathcal{O}((|V| + |E|) + (|V| + (|V| + |E|) \log(|V| + |E|))) \\ &= \mathcal{O}(2(|V| + |E|) + (|V| + |E|) \log(|V| + |E|)) \\ &= \mathcal{O}((|V| + |E|) \log(|V| + |E|)), \end{aligned} \tag{9}$$

et la complexité spatiale (la taille de \tilde{G}):

$$\mathcal{O}(\text{Algorithme 1}) = \mathcal{O}(|V| + |E|) \tag{10}$$

Algorithm 1: tranformeGraphe

Data: G multigraphe orienté pondéré par le temps, sous forme de dictionnaire
Result: \tilde{G} graphe orienté, sous forme de dictionnaire
 $\tilde{G} \leftarrow$ dictionnaire vide ;
foreach s_i *in* $\text{sommets}(G)$ **do**
 foreach (s_j, dDD, cDT) *in* $\text{arcs}(G[s_i])$ **do**
 sommet_courant $\leftarrow (s_i, dDD)$;
 sommet_suivant $\leftarrow (s_j, dDD + cDT)$;
 $\tilde{G}[\text{sommet_courant}][1] \leftarrow \tilde{G}[\text{sommet_courant}][1] + (\text{sommet_suivant})$;
 $\tilde{G}[\text{sommet_suivant}][0] \leftarrow \tilde{G}[\text{sommet_suivant}][0] + (\text{sommet_courant})$;
 end
end
foreach s_i *in* $\text{sommets}(G)$ **do**
 foreach (s_j, dDD_j) *in* $\text{sommets}(\tilde{G})$ **do**
 sommets_a_ajouter \leftarrow liste vide ;
 if $s_i = s_j$ **then**
 sommets_a_ajouter \leftarrow sommets_a_ajouter + (s_j, dDD_j) ;
 end
 sommets_a_ajouter \leftarrow triage_croissant(sommets_a_ajouter);
 idx_sommet $\leftarrow 1$;
 while $i < \text{len}(\text{sommets_a_ajouter})$ **do**
 sommet_courant \leftarrow sommets_a_ajouter[$i - 1$];
 sommet_suivant \leftarrow sommets_a_ajouter[i];
 $\tilde{G}[\text{sommet_courant}][1] \leftarrow \tilde{G}[\text{sommet_courant}][1] + \text{sommet_suivant}$;
 $\tilde{G}[\text{sommet_suivant}][0] \leftarrow \tilde{G}[\text{sommet_suivant}][0] + \text{sommet_courant}$;
 idx_sommet \leftarrow idx_sommet + 1;
 end
 end
end

3.3 Problème du chemin d'arrivée au plus tôt

Pour le problème du chemin d'arrivée au plus tôt, comme pour les deux problèmes suivants, on utilise une variante du BFS (Breadth-First Search) - c'est un algorithme efficace lorsqu'il s'agit de trouver un seul chemin (optimal) d'un point à un autre dans un graphe. Ce sera la méthode utilisée pour les 3 premiers problèmes.

Vu que ce n'étais pas précisé, on a décidé de garder uniquement les chemins d'un point du graphe à un autre. Mais notre algorithme parcourt forcément tous les points, donc la complexité pour récupérer les chemins les plus court d'un point à tous les autres serait la même.

L'idée de cet algorithme est de partir du sommet de départ dans \tilde{G} et de faire tourner BFS.

Pour calculer le chemin d'arrivée au plus tôt, on crée une pile contenant tous les successeurs du sommet de départ - et on ajoute progressivement les fils de ces sommets en vérifiant si on est au sommet de destination et en gardant le meilleur temps (indiqué directement dans le sommet de \tilde{G}). En plus de garder les successeurs, on considère aussi ce qu'on appelle un "state": c'est un tuple contenant le sommet courant, le jour actuel, et le père (le noeud précédent) de l'état. Pour récupérer le chemin optimal, on n'a qu'à dépiler.

Le pseudo-code pour cet algorithme est donné en Algorithme 2.

Vu que l'on utilise la représentation $G = (\tilde{V}_1, E_1)$ du multigraphe $G = (V_2, E_2)$, juste un seul BFS est nécessaire pour trouver le chemin optimal. Supposons que $|V_2| < |E_2|$: ainsi, tant $|V_1|$ comme $|E_1|$

Algorithm 2: cheminArriveeAuPlusTot

Data: \tilde{G} graphe orienté, sous forme de dictionnaire. sommetDepart, tuple. sommetArrivee, tuple.

Result: res , liste de sommets de \tilde{G} formant un chemin d'arrivée au plus tôt de sommetDepart à sommetArrivee.

pile \leftarrow liste vide;
 $res \leftarrow$ liste vide;
state \leftarrow (sommetDepart, 1, None);

if (sommetDepart, 1) in sommets(\tilde{G}) **then**
 foreach (s_i, dDD_i) in arcs($\tilde{G}[(\text{sommetDepart}, 1)]$) **do**
 pile \leftarrow pile + (s_i, dDD_i, state);
 end

else
 foreach (s_i, dDD_i) in sommets(\tilde{G}) **if** $s_i = \text{sommetDepart}$ **do**
 pile \leftarrow pile + (s_i, dDD_i, state);
 end

end
bestChemin \leftarrow empty tuple;
bestTime \leftarrow None;

while pile $\neq \emptyset$ **do**
 currentState \leftarrow pile[0];
 pile \leftarrow pile[1 :];
 if currentState = sommetArrivee and (bestTime > currentState[1] or bestTime = None) **then**
 bestTime \leftarrow currentState[1];
 bestChemin \leftarrow currentState;
 else
 foreach (s_i, dDD_i) in sommets($\tilde{G}[(\text{currentState}[0], \text{currentState}[1])]$) **do**
 pile \leftarrow (s_i, dDD_i, currentState);
 end
 end

end
while bestChemin \neq None **do**
 $res \leftarrow$ (bestChemin[0], bestChemin[1]);
 bestChemin \leftarrow bestChemin[2];
end
inverse(res);

sont bornés par $\mathcal{O}(|E_2|)$. La complexité cet algorithme est donc:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\text{Algorithme 2}) &= \mathcal{O}(|V_1| + |E_1|) \\ &= \mathcal{O}(2|E_2|) \\ &= \mathcal{O}(|E_2|).\end{aligned}\tag{11}$$

L'algorithme proposé pour le problème de chemin d'arrivée au plus tôt est donc en temps linéaire après la transformation du graphe.

3.4 Problème du chemin de départ au plus tard

Pour le problème du chemin de départ au plus tard, on procède d'une manière similaire à celui de l'arrivée au plus tôt. L'idée est de partir du sommet de départ dans \tilde{G} et de faire tourner BFS à l'envers. Le temps maximal trouvé correspond au chemin de départ au plus tard.

Le pseudo-code pour cet algorithme est donné en Algorithme 3.

Algorithm 3: cheminDepartAuPlusTard

Data: \tilde{G} graphe orienté, sous forme de dictionnaire. sommetDepart, tuple. sommetArrivee, tuple.

Result: res , liste de sommets de \tilde{G} formant un chemin de départ au plus tard de sommetDepart à sommetArrivee.

pile \leftarrow liste vide;

$res \leftarrow$ liste vide;

state \leftarrow (sommetDepart, 1, None);

if (sommetDepart, 1) in sommets(\tilde{G}) **then**

foreach (s_i, dDD_i) in arcs($\tilde{G}[(\text{sommetDepart}, 1)]$) **do**

 | pile \leftarrow pile + (s_i, dDD_i, state);

end

else

foreach (s_i, dDD_i) in sommets(\tilde{G}) **if** $s_i = \text{sommetDepart}$ **do**

 | pile \leftarrow pile + (s_i, dDD_i, state);

end

end

bestChemin \leftarrow empty tuple;

lastDeparture \leftarrow None;

while pile $\neq \emptyset$ **do**

 currentState \leftarrow pile[0];

 pile \leftarrow pile[1 :];

if currentState = sommetArrivee **then**

while currentState[0] \neq sommetDepart **do**

 | currentState \leftarrow currentState[2];

end

 startTime \leftarrow currentState[1];

if lastDeparture < startTime[1] or lastDeparture = None **then**

 | lastDeparture \leftarrow startTime;

 | bestChemin \leftarrow currentState;

end

else

foreach (s_i, dDD_i) in sommets($\tilde{G}[(\text{currentState}[0], \text{currentState}[1])]$) **do**

 | pile \leftarrow ($s_i, dDD_i, \text{currentState}$);

end

end

end

while bestChemin \neq None **do**

 | $res \leftarrow$ (bestChemin[0], bestChemin[1]);

 | bestChemin \leftarrow bestChemin[2];

end

inverse(res);

Cet algorithme, comme le premier, est également en $\mathcal{O}(|E_2|)$.

3.5 Problème du chemin le plus rapide

3.6 Problème du plus court chemin

3.7 Problème du plus court chemin en Programmation Linéaire

3.8 Algorithmes sans transformation de graphe

3.8.1 Problème du chemin d'arrivée au plus tôt

3.8.2 Problème du chemin de départ au plus tard

3.8.3 Problème du chemin le plus rapide

3.8.4 Problème du plus court chemin

3.9 Tests de performance entre les différents algorithmes

4 Conclusion