Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

www.inatel.br

C201 – Introdução à Engenharia - Computação

Lógica Formal

Prof. Guilherme Augusto Barucke Marcondes

Baseado nos livros: Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação – Judith L. Gersting – Quinta Edição e Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios – Menezes, Toscani e López – Volume 19

Proposição ou Declaração

Lógica formal → pode representar afirmações que fazemos.

Proposição ou Declaração → uma sentença falsa ou verdadeira.

– Dez é menor do que sete.
– Como está você?
– Ela é muito talentosa.
– Existe vida em outros planetas do universo.

Proposição ou Declaração

– Dez é menor do que sete.
  É uma proposição, pois é uma afirmação falsa.

– Como está você?
  Não é uma proposição. É uma pergunta (não é falsa e nem verdadeira).

– Ela é muito talentosa.
  Não é uma proposição. Ela não está especificada.

– Existe vida em outros planetas do universo.
  É uma proposição. Pode ser falsa ou verdadeira, mesmo eu não sabendo a resposta.

Conectivos

Permitem combinar frases simples: “e” / “ou”.

“Elefantes são grandes.”
“Guepardos são rápidos.”

Elefantes são grandes **e** guepardos são rápidos.

“João é engenheiro.”
“João não gosta de matemática.”

João é engenheiro **ou** João não gosta de matemática.

Conectivos

Conjunção

A / B → proposições

A ^ B (lê-se A e B)

Tabela Verdade

A	B	A ^ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

→ Se A é verdadeiro e B é verdadeiro ➔ A ^ B é verdadeiro
→ Se A é verdadeiro e B é falso ➔ A ^ B é falso
→ Se A é falso e B é verdadeiro ➔ A ^ B é falso
→ Se A é falso e B é falso ➔ A ^ B é falso

Conectivos

Disjunção

A / B → proposições

A v B (lê-se A ou B)

A	B	A v B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

→ Se A é verdadeiro ou B é verdadeiro ➔ AvB é verdadeiro
→ Se A é verdadeiro ou B é falso ➔ A v B é verdadeiro
→ Se A é falso e B é verdadeiro ➔ A v B é verdadeiro
→ Se A é falso e B é falso ➔ A v B é falso

Conectivos

Negação

A → proposição

A’ (lê-se não A)

Pode-se encontrar também: ¬A e ~A

A	A’
V	F
F	V

Conectivos

Condições

Necessária

Sem a proposição A, não acontece a proposição B.

Suficiente

A proposição A é suficiente para que a proposição B ocorra.

Necessária e Suficiente

A proposição A é necessária e já é suficiente para que a proposição B ocorra.

Conectivos

Condições - exemplos

Necessária

– É necessário jogar na Mega-Sena para ganhar.
– É necessário que um número seja divisível por 3 para ser divisível por 6.

Suficiente

– Se é um mamífero, então é animal.
– Se um número é divisível por 9, então ele é divisível por 3.

Necessária e Suficiente

– Se acertei seis números de uma aposta válida da Mega-Sena, então sou ganhador.
– Se um número é divisível por 2, então ele é par.

Conectivos

Condição

A / B → proposições

A → B (lê-se A implica B) – Se A, então B.
A é condição suficiente para B.

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

→ Se A é verdadeiro, B tem que ser verdadeiro.

→ Se A é falso, B pode ser verdadeiro ou falso.

Conectivos

Bicondição

A / B → proposições

A ↔ B – equivale a (A → B) ^ (B → A)

A é condição necessária e suficiente para B.

A	B	A ↔ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

→ Se A é verdadeiro, B tem que ser verdadeiro.

→ Se A é falso, B tem que ser falso.

Conectivos - Exemplos

A' ^ B

(A ^ B') v (A' ^ B)

A' → B

A	B	A^B	AvB	A→B
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Conectivos - Exemplos

A' ^ B

A	B	A'	A' ^ B
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Conectivos - Exemplos

(A ^ B') v (A' ^ B)

A	B	A'	B'	A ^ B'	A' ^ B	(A ^ B') v (A' ^ B)
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

Conectivos - Exemplos

A’ → B

A	B	A’	A’ → B
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Tautologias

Tautologia → intrinsicamente verdadeira; é verdadeira independentemente dos valores lógicos atribuídos.

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee F \Leftrightarrow A$	$A \wedge V \Leftrightarrow A$
$A \vee A' \Leftrightarrow V$	$A \wedge A' \Leftrightarrow F$

Tautologias

Leis de De Morgan

$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$ $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$

Prove!!!!!!

Tautologias

Leis de De Morgan

$(A \vee B)' \leftrightarrow A' \wedge B'$

A	B	A v B	(A v B)'	A'	B'	A' ^ B'
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

$(A \wedge B)' \leftrightarrow A' \vee B'$

A	B	A ^ B	(A ^ B)'	A'	B'	A' v B'
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Tautologias

Leis de De Morgan – Exemplo Prático

Condição de aprovação – disciplinas T + P do Inatel

Proposição A → NPT ≥ 60

Proposição B → NPL ≥ 60

Aprovação	Não Aprovação
A ^B	(A ^ B)' → A' v B'
Prop. A → NPT ≥ 60 Prop. B → NPL ≥ 60	Prop. A' → (NPT ≥ 60)' → NPT < 60 Prop. B' → (NPL ≥ 60)' → NPL < 60
A ^ B → NPT≥60 e NPL≥60	A' v B' → NPT < 60 ou NPL < 60

Conectivos – Situações Reais

Um alarme tem dois sensores: um de presença (A) e outro de abertura de porta (B). Ele deve disparar se qualquer um dos dois for acionado. Qual a expressão lógica?

Conectivos – Situações Reais

Um alarme tem dois sensores: um de presença (A) e outro de abertura de porta (B). Ele deve disparar se qualquer um dos dois for acionado. Qual a expressão lógica?

Acionamento do Alarme ➔ (A v B)

Em um teclado, se a tecla *shift* (A) estiver apertada no momento de apertar a tecla w (B), a letra w deve ser maiúscula. Qual a expressão lógica?

Conectivos – Situações Reais

Um alarme tem dois sensores: um de presença (A) e outro de abertura de porta (B). Ele deve disparar se qualquer um dos dois for acionado. Qual a expressão lógica?

Acionamento do Alarme ➔ (A v B)

Em um teclado, se a tecla *shift* (A) estiver apertada no momento de apertar a tecla w (B), a letra w deve ser maiúscula. Qual a expressão lógica?

Letra W ➔ (A ^ B)

Conectivos – Situações Reais

Em um teclado:

- se a tecla *shift* (A) estiver apertada no momento de apertar a tecla w (B), a letra w deve ser maiúscula;
- se a tecla Caps Lock (C) estiver ativada e a tecla w for apertada, a letra w deve ser maiúscula;
- a letra w não deve ser maiúscula se a tecla Caps Lock (C) estiver ativada, a tecla *shift* (A) estiver apertada e a tecla w (B) for apertada,;

Qual a expressão lógica?

Conectivos – Situações Reais

Em um teclado:

- se a tecla *shift* (A) estiver apertada no momento de apertar a tecla w (B), a letra w deve ser maiúscula;
- se a tecla Caps Lock (C) estiver ativada e a tecla w for apertada, a letra w deve ser maiúscula;
- a letra w não deve ser maiúscula se a tecla Caps Lock (C) estiver ativada, a tecla *shift* (A) estiver apertada e a tecla w (B) for apertada,;

Qual a expressão lógica?

Letra W ➔ (A ^ B ^ C’) v (A’ ^ B ^ C)

Conectivos – Exercícios

1. A é V, B é F e C é V. Qual o valor lógico das expressões a seguir?

   a. A ^ (B v C) b. (A ^ B) v C c. (A ^ B)’ v C
   d. A’ v (B’ ^ C) e. (A’ → B) ^ C f. (B ↔ C’) v A

2. Qual o valor lógico de cada uma das proposições a seguir?

   a. 8 é par ou 6 é ímpar. b. 8 é par e 6 é ímpar. c. 8 é ímpar ou 6 é ímpar.
   d. Se a for ímpar, então b é par. (considere a = 2 e b = 4)
   e. Se a for par, então b é ímpar. (considere a =1 e b = 4)

Conectivos – Exercícios

1. A é V, B é F e C é V. Qual o valor lógico das expressões a seguir?

   a. A ^ (B v C) - **V ^ (F v V) – V**

   b. (A ^ B) v C - **(V ^ F) v V – V**

   c. (A ^ B)’ v C - **(V ^ F)’ v V – V**

   d. A’ v (B’ ^ C) - **V’ v (F’ ^ V) – V**

   e. (A’ → B) ^ C - **(V’ → F) ^ V – V**

   f. (B ↔ C’) v A - **(F ↔ V’) v V – V**

2. Qual o valor lógico de cada uma das proposições a seguir?

   a. 8 é par ou 6 é ímpar.
   V v F V

   b. 8 é par e 6 é ímpar.
   V ^ F F

   c. 8 é ímpar ou 6 é ímpar.
   F v F F

   d. Se a for ímpar, então b é par. (considere a = 2 e b = 4)
   F → V V

   e. Se a for par, então b é ímpar. (considere a =1 e b = 4)
   F → F V

Tautologia / Contradição / Contingência

- Tautologia

  Independentemente dos valores lógicos das variáveis, é sempre V.

  Exemplo: $A \vee A'$

- Contradição

  Independentemente dos valores lógicos das variáveis, é sempre F.

  Exemplo: $A \wedge A'$

- Contingência

  Quando uma expressão lógica tem valores V e F.

  Exemplo: $A \wedge B$

Tautologia / Contradição / Contingência - Exemplos

Indique se é tautologia, contradição ou contingência

$(A \vee B')'$

$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

$(A \rightarrow (A' \rightarrow B))'$

A	B	A ^ B	A v B	A → B	A ↔ B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Tautologia / Contradição / Contingência - Exemplos

Indique se é tautologia, contradição ou contingência

(A v B')'

A	B	B'	A v B'	(A v B')'
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

contingência

Tautologia / Contradição / Contingência - Exemplos

Indique se é tautologia, contradição ou contingência

$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

A	B	A ^ B	A v B	(A ^ B) → (A v B)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

tautologia

Tautologia / Contradição / Contingência - Exemplos

Indique se é tautologia, contradição ou contingência

$(A \rightarrow (A' \rightarrow B))'$

A	B	A'	(A' → B)	A → (A' → B)	(A → (A' → B))'
V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F

contradição

Teorema

Proposição do tipo

$$p \rightarrow q$$

Hipótese   Tese

Que é sempre **verdadeira** (tautologia)

$$p \Rightarrow q$$

Precisa demonstrar que é verdadeiro!!!!

Teorema

$$p \rightarrow q$$

Hipótese – assumida como verdadeira.

Tese – provar que é verdadeira.

Exemplo

0 *é o único elemento neutro da adição em* $\mathbf{N}$.

Hipótese ← *se* ***0*** *é elemento neutro da adição em* $\mathbf{N}$,

Tese ← *então* ***0*** *é o único elemento neutro da adição em* $\mathbf{N}$.

Demonstrações

Prova Direta – $p \rightarrow q$

a soma de dois números pares é um número par

Hipótese ← *se **n** e **m** são dois números pares quaisquer,*

Tese ← *então **n** + **m** é um número par.*

$n = 2s \qquad m = 2r \qquad r \text{ e } s \in N$

$$n + m = 2s + 2r = 2\,(s + r)$$

$(s + r) \in N$, *logo* $n + m$ *é par.*

Demonstrações

Prova por Contraposição - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Hipótese ← *se* $\boldsymbol{n! > (n + 1)}$,

Tese ← *então* $\boldsymbol{n > 2}$. ($n \in N$)

$$n! > (n + 1) \rightarrow n > 2$$

$n \leq 2 \rightarrow n! \leq (n + 1)$ **Inverte hipótese e tese.**

$n = 0 \rightarrow n! = 1 \leq (n + 1) = 1$ **Verdadeiro**

$n = 1 \rightarrow n! = 1 \leq (n + 1) = 2$ **Verdadeiro**

$n = 2 \rightarrow n! = 2 \leq (n + 1) = 3$ **Verdadeiro**

Demonstrações

Prova por Absurdo - $p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow F$

0 *é o único elemento neutro da adição em* $\mathbb{N}$.

Hipótese ← *se* ***0*** *é elemento neutro da adição em* $\mathbb{N}$,

Tese ← *então* ***0*** *é o único elemento neutro da adição em* $\mathbb{N}$.

Suponha ***0*** é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$ e **Hipótese**

0 *não* é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$. **Negação da tese**

$e \neq \mathbf{0}$ elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

se $\mathbf{0}$ é elemento neutro, $n = \mathbf{0} + n = n + \mathbf{0}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$

se $n = e$, $e = \mathbf{0} + e = e + \mathbf{0}$

se $n = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + e = e + \mathbf{0}$

logo $e = \mathbf{0}$, o que é uma contradição, pois assumiu-se $e \neq \mathbf{0}$

Demonstrações

Prova por Indução Matemática

Seja uma propriedade *P*. Ela vale para todo *n* inteiro positivo se:

Duas Hipóteses

$$\begin{cases} P(1) \text{ é verdade} \\ P(k) \text{ é verdade} \rightarrow P(k+1) \text{ é verdade} \end{cases}$$

Prove que a soma de todos os números ímpares até $2n - 1$ (n é um inteiro) é igual a n^2.

Ou seja:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Demonstrações

Prova por Indução Matemática (cont.)

$P(1)$: $n = 1 \rightarrow 1 = 1^2$

$P(k)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

$P(k + 1)$: $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + [2(k + 1) - 1] =$

$= (k + 1)^2$

$= k^2 + [2(k + 1) - 1] =$

$= k^2 + 2k + 2 - 1 =$

$= k^2 + 2k + 1 =$

$= (k + 1)^2$

Demonstração - Exemplos

1. A soma de dois números ímpares é um número par.

2. $n! > (n + 3) \rightarrow n > 3$

3. **1** é o único elemento neutro na multiplicação em N.

Inatel

Instituto Nacional de Telecomunicações

www.inatel.br

C201 – Introdução à Engenharia - Computação

Lógica Formal

Prof. Guilherme Augusto Barucke Marcondes

Baseado nos livros: Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação – Judith L. Gersting – Quinta Edição e Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios – Menezes, Toscani e López – Volume 19