



Fenwick Trees

- Binary Indexed Trees
- Autores:
 - Almir Braggio
 - Guilherme Zat

Fenwick Trees

- Baseado em: A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables, Peter M. Fenwick, March - 1994

A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables

peter m. fenwick

*Department of Computer Science, University of Auckland, Private Bag 92019, Auckland,
New Zealand (email: p_fenwick@cs.auckland.ac.nz)*

Fenwick Trees - Intro

- Resumo:
 - Decomposição de somas cumulativas
 - Baseado em codificação binária
 - Código compacto
 - Tempo de acesso $\alpha \log(N)$

Item	0	2	1	5	9	3	1
Sum	0	2	3	8	17	20	21



Fenwick Trees - Intro

- Árvore Binária Indexada
- Atualização e Soma Prefixa eficiente
- Utilidades:
 - Soma prefixa e de segmentos
 - Atualização de elementos
 - Aplicações em outros algoritmos
 - Processamento digital de sinais

Fenwick Trees - Prefix Sum

- Soma de uma sequência em ordem prefixa
- Soma de varredura ou cumulativa

$$Y(i) = Y(i-1) + X(i)$$

- Lista: Atualizar $O(1)$, Somar $O(N)$
- Soma: Atualizar $O(N)$, Somar $O(1)$

Item	0	2	1+6	5	9	3	1
Sum	0	2	3+6	8+6	17+6	20+6	21+6

Fenwick Trees - Solução

- Problema de complexidade de tempo

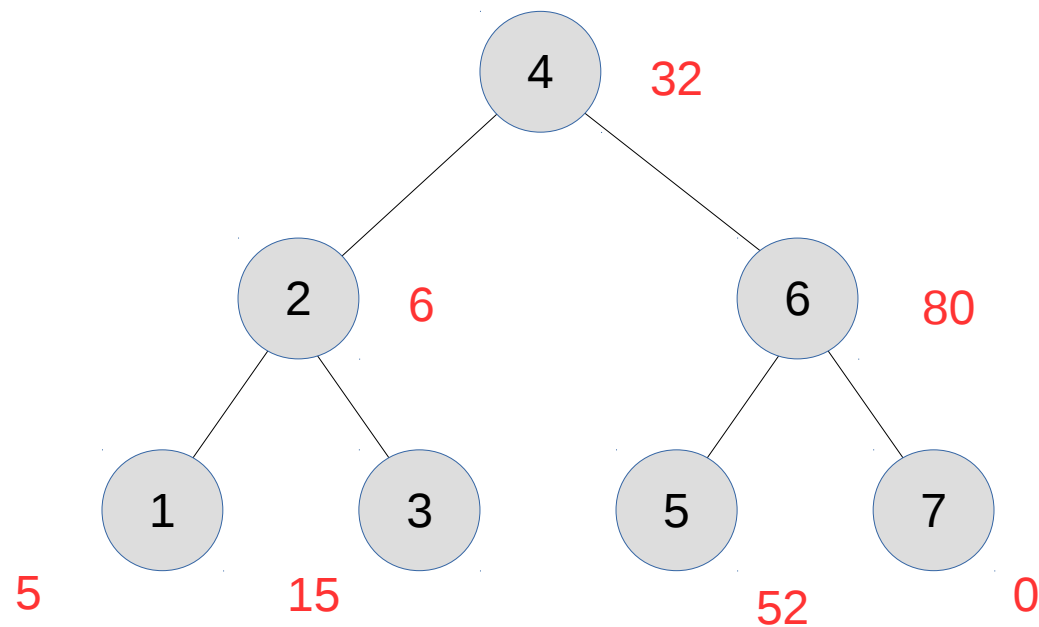
$$\text{Lista}(N) = 1000$$

- Solução com árvore binária

$$\text{Árvore}(N) = \log(1000)/\log(2) = 10$$

- Cada nó armazena a soma cumulativa de todos os nós a sua esquerda, incluindo ele mesmo
- Assim, é fácil determinar a soma cumulativa de um ponto

Fenwick Trees - Solução

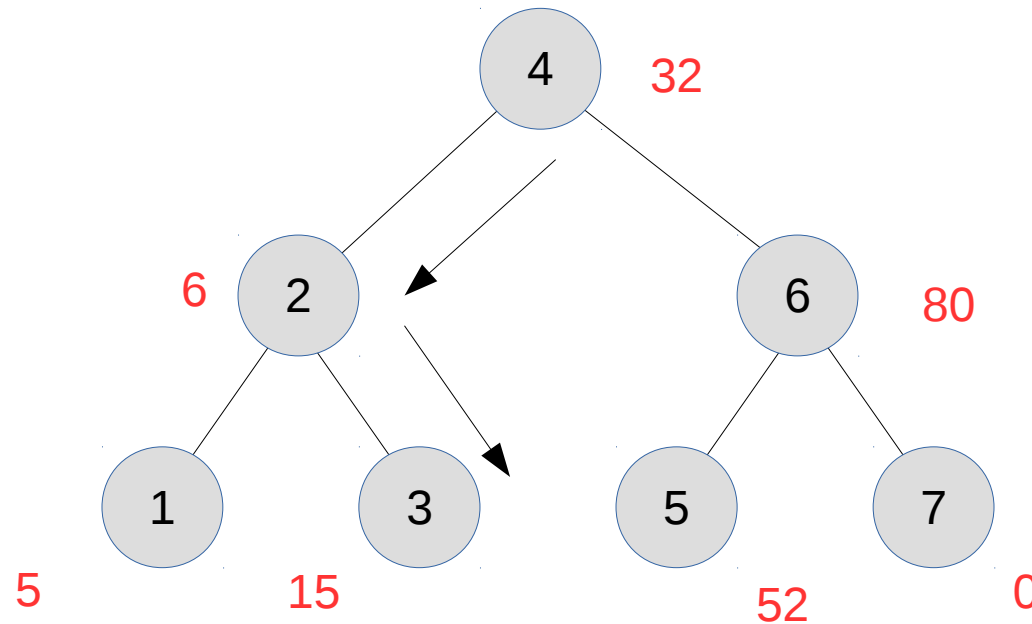


Item	1	2	3	4	5	6	7
Valor	5	1	15	11	52	28	0
Soma	5	6	21	32	84	112	112

Fenwick Trees - Solução

- Somar Iniciando pela Raiz
 - Somador inicia em zero
 - Ao mover para a direita, incrementa
 - Ao mover para a esquerda, mantém
 - Ao encontrar o nó, incrementa

Fenwick Trees - Solução

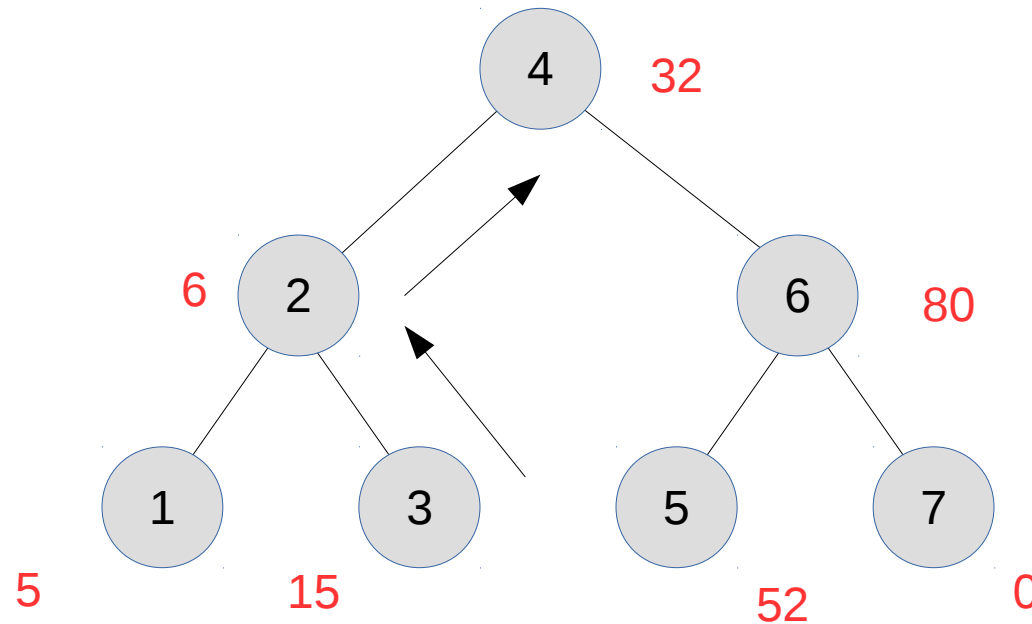


Item	1	2	3	4	5	6	7
Valor	5	1	15	11	52	28	0
Soma	5	6	21	32	84	112	112

Fenwick Trees - Solução

- Somar Iniciando pela Folha
 - Somador inicia com valor do nó
 - Se nó da direita, incrementa
 - Se nó da esquerda, mantém

Fenwick Trees - Solução

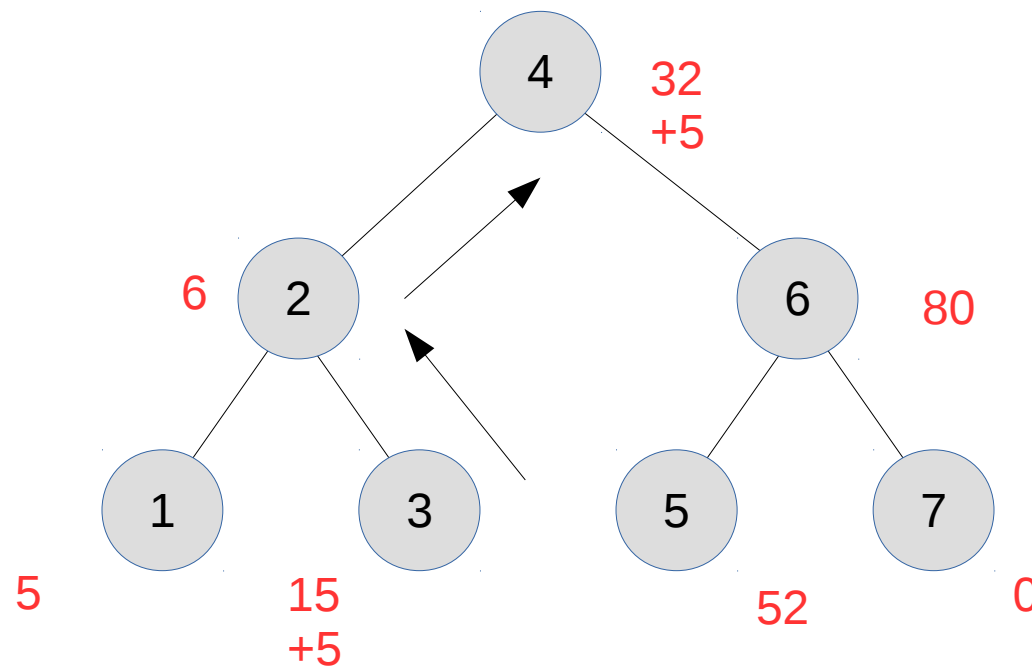


Item	1	2	3	4	5	6	7
Valor	5	1	15	11	52	28	0
Soma	5	6	21	32	84	112	112

Fenwick Trees - Solução

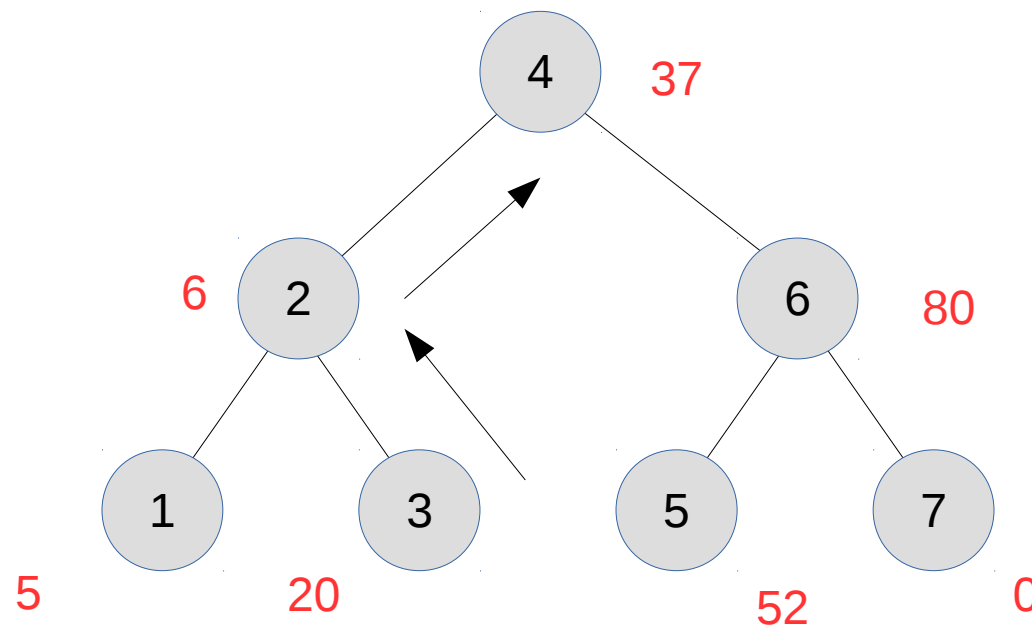
- Atualizar
 - Necessário atualizar sub-árvore da esquerda
 - Busca o nó desejado
 - Incrementa/Decrementa o valor do nó
 - Caminha em direção a raiz
 - Se nó da esquerda, deve-se incrementar/decrementar o valor

Fenwick Trees - Solução



Item	1	2	3	4	5	6	7
Valor	5	1	15+5	11	52	28	0
Soma	5	6	21+5	32+5	84+5	112+5	112+5

Fenwick Trees - Solução



Item	1	2	3	4	5	6	7
Valor	5	1	20	11	52	28	0
Soma	5	6	26	37	89	117	117



Fenwick Trees - Solução

- Soma e Atualização: Simples!
- Recursividade RULZ
- Ver Código



Fenwick Trees - Solução

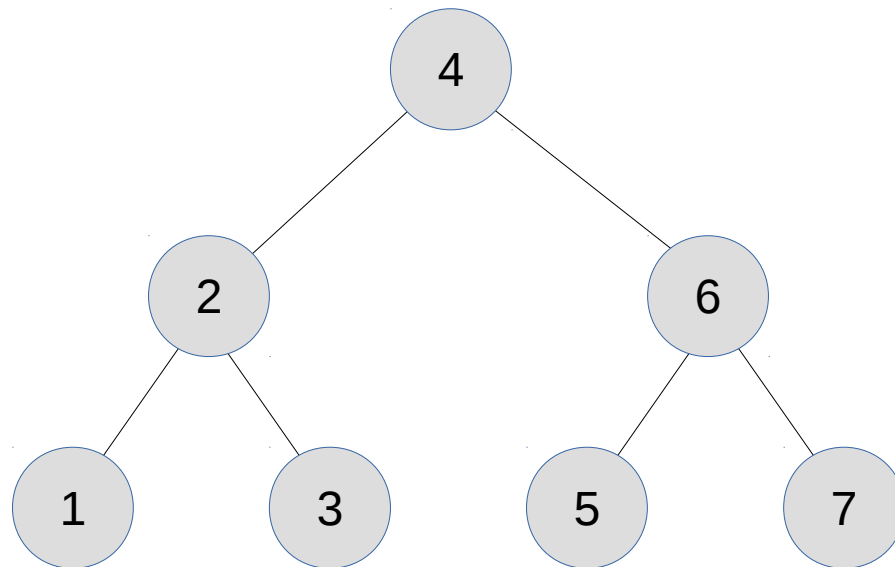
- Como criar a árvore?
 - Uso de árvores balanceadas (AVL)
 - Reaproveitamento de código
 - Solução simples
 - Eficaz e Eficiente

Fenwick Trees - Solução

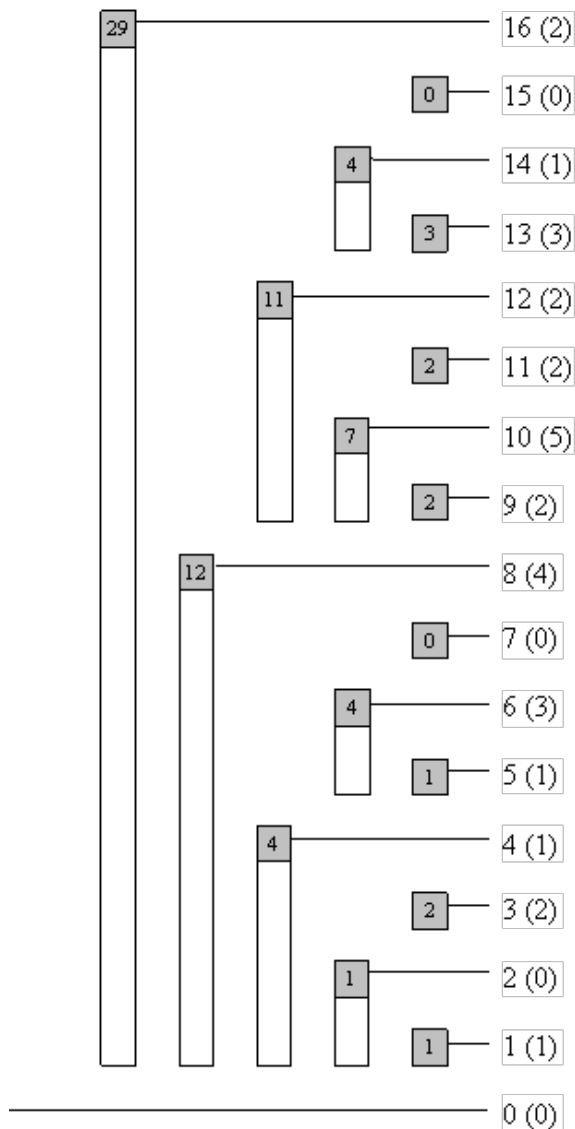
- Como criar a árvore?
 - Observação de Fenwick:
 - Árvore sempre balanceada
 - Truque com índices em binário
 - Uso de rotação de bits (1 LSB)
 - 1: 001 >> 00
 - 2: 010 >> 0
 - ...

Fenwick Trees - Solução

1: 001 >> 00
2: 010 >> 0
3: 011 >> 01
4: 100 >> vazio
5: 101 >> 10
6: 110 >> 1
7: 111 >> 11



Fenwick Trees - Solução



```
~/Desktop/fenwick.c - Sublime Text (UNREGISTERED)
fenwick.c
1 int read(int idx){
2     int sum = 0;
3     while (idx > 0){
4         sum += tree[idx];
5         idx -= (idx & -idx);
6     }
7     return sum;
8 }
9
10 void update(int idx ,int val){
11     while (idx <= MaxVal){
12         tree[idx] += val;
13         idx += (idx & -idx);
14     }
15 }
```

Fenwick Trees - Solução

- Como criar a árvore?
 - Não é preciso armazenar uma árvore explicitamente
 - Pode-se armazenar um vetor e utilizar as técnicas bit a bit para navegação

Fenwick Trees - Aplicações

1



Prefix Sums and Their Applications

Guy E. Blelloch

School of Computer Science

Carnegie Mellon University

Pittsburgh, PA 15213-3890

Fenwick Trees - Aplicações

- Comparação Léxica
- Resolução de Polinômios
- Resolução de Sistemas Lineares
- Algoritmos de Ordenação
 - Counting Sort
 - Radix Sort
 - Quick Sort



Fenwick Trees - Aplicações

- Operações de Convolução
 - Soma de Multiplicações
 - Processamento Digital de Sinais
- Compressão Aritmética
- Códigos Gray
- Compressão de Dados e Texto
- Operações Estatísticas



Fenwick Trees

Q&A

`almir.braggio@pti.org.br`

`guilherme.zat@pti.org.br`