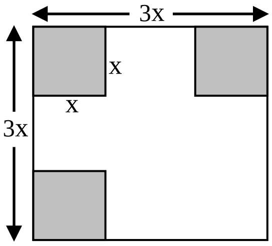
שאלון 804 - הצעות לפתרון מבחנים 12 , 14 , 16 , 22 , 23 , 26 , 33 , 35 , 36 , 38

**מבחן 12**

**פתרון שאלה 1**




א) שטח החדר $(3x)^2 = 9x^2$

שטח כל מתקן $x^2$ ולכן שטח שלושה המתקנים $3x^2$

השטח הפנוי : $9x^2 - 3x^2 = \underline{6x^2}$

ב) בספריית "אחווה" :

אורך החדר $3x \cdot 110\% = \frac{3x \cdot 110}{100} = 3.3x$ , רוחב החדר $3x \cdot 90\% = \frac{3x \cdot 90}{100} = 2.7x$

שטח החדר $3.3x \cdot 2.7x = 8.91x^2$ . המתקנים זהים לכן שטחם $3x^2$

השטח הפנוי : $8.91x^2 - 3x^2 = \underline{5.91x^2}$

ג) $5.91x^2 + 2.25 = 6x^2$ ← $2.25 = 0.09x^2$ ← $x^2 = 25$   <u>x = 5 מ'</u>

**פתרון שאלה 2**

א) נבדוק מהם השיפועים של הצלעות : $m_{AB} = \frac{10-(-2)}{7-3} = 3$ , $m_{BC} = \frac{23-10}{28-7} = \frac{13}{21}$ ,

$m_{CD} = \frac{23-(-25)}{28-12} = 3$ , $m_{AD} = \frac{-25-(-2)}{12-3} = \frac{-23}{9}$ ← AB מקביל ל- CD

ו- BC לא מקביל ל- AD ← המרובע הוא טרפז. נמצא את אורכי השוקיים:

$BC = \sqrt{(28-7)^2 + (23-10)^2} = \sqrt{610}$ , $AD = \sqrt{(12-3)^2 + (-25+2)^2} = \sqrt{610}$

← המרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

ב) משוואת האלכסון AC : $m_{AC} = \frac{23+2}{28-3} = 1$ ← $y + 2 = 1\cdot(x-3)$ ← $y = x - 5$

משוואת האלכסון BD : $m_{BD} = \frac{-25-10}{12-7} = -7$ ← $y - 10 = -7\cdot(x-7)$ ← $y = -7x + 59$

נקודה E היא פתרון המשוואות של שני הישרים : $x - 5 = -7x + 59$ ← $8x = 64$ ←

$x = 8$ ← $y = 3$ ← $\underline{E(8 , 3)}$

ג) $CD = \sqrt{(12-28)^2 + (-25-23)^2} = \sqrt{2560}$ , $AB = \sqrt{(7-3)^2 + (10+2)^2} = \sqrt{160}$

← $\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{2560}}{\sqrt{160}} = 4$

ד) $CE = \sqrt{(28-8)^2 + (23-3)^2} = \sqrt{800}$ , $AE = \sqrt{(8-3)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50}$ ← $\frac{CE}{AE} = 4$

**פתרון שאלה 3**

נגדיר : A – עובד ייצור , $\overline{A}$ – עובד מנהלה , B – תומך בדן , $\overline{B}$ – תומך באלי

נתון : $p(\overline{B}) = 0.64$ ← $P(B) = 0.36$ . $P(A) = 1.5P(\overline{A})$ . ידוע כי $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

← $1.5P(\overline{A}) + P(\overline{A}) = 1$ ← $2.5P(\overline{A}) = 1$ ← $P(\overline{A}) = 0.4$ ← $P(A) = 0.6$

נתון: $P(B/A)=0.4 \leftarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.4 \leftarrow P(B\cap A)=0.4\cdot P(A)=0.4\cdot 0.6=0.24$

נארגן את הנתונים בטבלה:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.24 | | 0.6 |
| $\overline{A}$ | | | 0.4 |
| | 0.36 | 0.64 | |

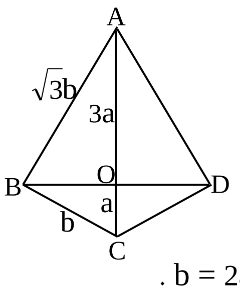
נשלים את הטבלה:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.24 | 0.36 | 0.6 |
| $\overline{A}$ | 0.12 | 0.28 | 0.4 |
| | 0.36 | 0.64 | |

א) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.24}{0.36}=\frac{2}{3}$

ב) ההסתברות לבחור עובד שהוא גם עובד מנהלה וגם תומך בדן: $P(\overline{A}\cap B)=0.12$

## פתרון שאלה 4




א) נסמן: $OC=a \leftarrow AO=3a$ , $BC=b \leftarrow AB=\sqrt{3}\cdot b$

ABCD דלתון $\leftarrow$ האלכסונים מאונכים זה לזה.

משפט פיתגורס במשולש ABO : $BO^2=(\sqrt{3}b)^2-(3a)^2=3b^2-9a^2$

משפט פיתגורס במשולש CBO : $BO^2=b^2-a^2$

$\leftarrow 3b^2-9a^2=b^2-a^2 \leftarrow 2b^2=8a^2 \leftarrow b^2=4a^2 \leftarrow b=2a$.

$\leftarrow$ משולש CBO הוא משולש ישר זווית שבו הניצב OC שווה למחצית היתר $\leftarrow \measuredangle OBC=30°$

$\leftarrow \measuredangle OCB=60° \leftarrow \underline{\measuredangle BCD=120°}$.

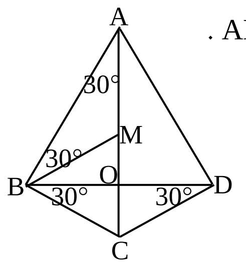
לפי משפט פיתגורס $BO^2=(2a)^2-a^2=3a^2 \leftarrow BO=\sqrt{3}\cdot a$. סימנו:

$AB=\sqrt{3}\cdot b=\sqrt{3}\cdot 2a$

$\leftarrow$ משולש ABO הוא משולש ישר זווית שבו הניצב BO שווה למחצית היתר $\leftarrow \measuredangle OAB=30°$

$\leftarrow \measuredangle OBA=60° \leftarrow \underline{\measuredangle ABC=90°}$ , $\underline{\measuredangle ADC=90°}$ , $\underline{\measuredangle BAD=60°}$.

ב) מסעיף א' ניתן לראות כי סכום זוויות נגדיות בדלתון הוא $180° \leftarrow$ את המרובע ABCD
ניתן לחסום במעגל לכן נקודה C נמצאת על המעגל החוסם את משולש ABD.




ג) AC הוא קוטר במעגל (הזווית ההיקפית הנשענת עליו היא זווית ישרה)

$\leftarrow$ נקודה M נמצאת באמצע AC. מצאנו בסעיף א' כי $\measuredangle OAB=30°$.

$AM=BM=R \leftarrow \measuredangle ABM=30°$ (זוויות בסיס במש"ש)

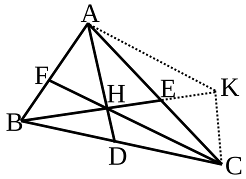
מצאנו בסעיף א' כי $\measuredangle OBC=30°$. $BC=CD$ (נתון) $\leftarrow \measuredangle BDC=30°$ (זוויות בסיס במש"ש)

$\leftarrow \Delta CBD \sim \Delta MAB$ (זווית , זווית).

## פתרון שאלה 5

א) במשולש ABC נתונים אורכי התיכונים: $CF = 30$ ס״מ , $BE = 21$ ס״מ , $AD = 24$ ס״מ.

נסמן ב- H את נקודת מפגש התיכונים. נקודה H מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ ←




$HE = 7$ ס״מ , $BH = 14$ ס״מ , $AH = 16$ ס״מ , $HD = 8$ ס״מ ,

$CH = 20$ ס״מ , $HF = 10$ ס״מ .

<u>נאריך</u> את BE בקטע EK השווה באורכו לקטע HE.

נוצרה מקבילית AHCK (מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה).

← $AK = CH = 20$ ס״מ (צלעות נגדיות במקבילית). כמו כן $AH = 16$ ס״מ , $HK = 14$ ס״מ

משפט הקוסינוסים במשולש AHK : $20^2 = 16^2 + 14^2 - 2\cdot 16\cdot 14\cdot \cos AHK$

← $\cos\sphericalangle AHK = 0.11607$

משפט הקוסינוסים במשולש AHE : $AE^2 = 16^2 + 7^2 - 2\cdot 16\cdot 7\cdot 0.11607 = 279$

← $AE = \sqrt{279} = 16.703$ ס״מ ← $AC = 2\cdot 16.703 = 33.41$ ס״מ

ב) מצאנו כי $\cos\sphericalangle AHK = 0.11607$ ← $\sphericalangle AHK = 83.3°$.

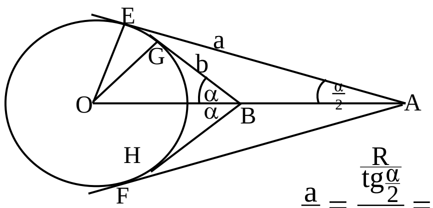
משפט הסינוסים במשולש AEH : $\frac{7}{\sin HAE} = \frac{16.703}{\sin 83.3}$ ← $\sphericalangle HAE = 24.596°$

← $S_{\Delta ACD} = 0.5\cdot 33.41\cdot 24\cdot \sin 24.596° = 166.86$ סמ״ר   התיכון AD מחלק את משולש ABC

לשני משולשים שווי שטח ← $S_{\Delta ABC} = 2\cdot 166.86 = 333.73$ סמ״ר

## פתרון שאלה 6

א) $OE \perp AE$ (רדיוס מאונך למשיק) ← במשולש AOE : $\frac{R}{a} = tg\frac{\alpha}{2}$ ← $a = \frac{R}{tg\frac{\alpha}{2}}$




$OG \perp BG$ (רדיוס מאונך למשיק) ←

במשולש BOG : $\frac{R}{b} = tg\alpha$ ← $b = \frac{R}{tg\alpha}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{R}{tg\frac{\alpha}{2}}}{\frac{R}{tg\alpha}} = \frac{tg\alpha}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

ב) במשולש AOE : $\sphericalangle EAO = 0.5\alpha$ , $\sphericalangle AEO = 90°$ ← $\sphericalangle AOE = 90° - 0.5\alpha$

במשולש BOG : $\sphericalangle GBO = \alpha$ , $\sphericalangle BGO = 90°$ ← $\sphericalangle BOG = 90° - \alpha$

← $\sphericalangle EOG = 90° - 0.5\alpha - (90° - \alpha) = 0.5\alpha$

$OE = OG$ (רדיוסים) לכן משולש EOG שווה שוקיים וזווית הבסיס שלו $90° - 0.25\alpha$ .

משפט הסינוסים במשולש EOG : $\frac{R}{\sin(90-0.25\alpha)} = \frac{EG}{\sin 0.5\alpha}$ ←

$$\frac{EG}{R} = \frac{\sin 0.5\alpha}{\cos 0.25\alpha} = \frac{2\sin 0.25\alpha\cos 0.25\alpha}{\cos 0.25\alpha} = 2\sin 0.25\alpha$$

## פתרון שאלה 7

**יש להוסיף בשאלה: $b$ שלם**

א) נגזור את הפונקציה: $f'(x)=\frac{10x\cdot(x^2+b)-2x\cdot5x^2}{(x^2+b)^2}=\frac{10bx}{(x^2+b)^2}$

נציב: כאשר $x=2$ אז $m=1.2$ $\quad 1.2=\frac{10b\cdot2}{(4+b)^2}$ ← $\underline{b=6}$ או $\cancel{b=\frac{8}{3}}$ ($b$ שלם).

ב) (1) $f(-a)=\frac{5\cdot(-a)^2}{(-a)^2+b}=\frac{5\cdot a^2}{a^2+b}=f(a)$ ← $f(x)$ זוגית

$f'(-a)=\frac{10b\cdot(-a)}{[(-a)^2+b]^2}=\frac{-10b\cdot a}{(a^2+b)^2}=-f(a)$ ← $f'(x)$ אי זוגית

(2) בגלל האי זוגיות של $f'(x)$ : $m=f'(-2)=-f'(2)=-1.2$

ג) I $\quad x=0$ ← $f(0)=0$ , $m=f'(0)=0$ ← משוואת המשיק: $\underline{y=0}$

II $\quad x=-2$ ← $f(-2)=2$ , $m=f'(-2)=-1.2$ ← משוואת המשיק: $\underline{y=-1.2x-0.4}$

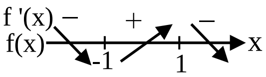
ד) לכל $x>0$ ערכי הפונקציה חיוביים והפונקציה נמצאת מעל ציר $x$ ←

$$S=\int_0^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^2=2-0=2$$

## פתרון שאלה 8

א) נגזור את הפונקציה $\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=\frac{4\cdot(x^2+1)-4x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=f'(x)$ ונשווה את הנגזרת לאפס:

$f'(x)=0$ ← $-4x^2+4=0$ ← $x=\pm1$ נמצא את סוג הקיצון:

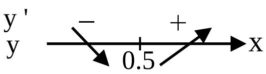



← נקודת המקסימום היא $\underline{A\ (1\ ,0)}$ .

ב) נסמן את הנקודה על $g(x)$ ב- $(t,\sqrt{t+3})$ . מרחק נקודה זו מנקודה A הוא:

$$y=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t+3}-0)^2}=\sqrt{t^2-t+4}$$

נגזור: $y'=\frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+4}}$ ונשווה לאפס: $y'=0$ ← $t=0.5$




← $\underline{(0.5,\sqrt{3.5})}$

ג) המרחק המינימלי הוא: $y=\sqrt{0.5^2-0.5+4}=\sqrt{3.75}$

## פתרון שאלה 9

א) $y'$ הוא האינטגרל של $y''$ : $y'=\int(6x-7)dx=\frac{6x^2}{2}-7x+c_1=3x^2-7x+c_1$

$x=\frac{1}{3}$ נקודת מקסימום לכן בנקודה זו $y'=0$ : $0=3\cdot(\frac{1}{3})^2-7\cdot\frac{1}{3}+c_1$ ← $c_1=2$

נשווה את $y'$ לאפס ונמצא נקודות קיצון: $0=3x^2-7x+2$ ← $x=\frac{1}{3}$ או $x=2$ .

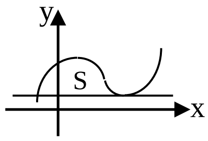
← ערך ה- x בנקודת המינימום הוא 2 ← נקודת המינימום: (2 , 1).

y הוא האינטגרל של y' :

$$y=\int(3x^2-7x+2)dx=\frac{3x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+2x+c_2=x^3-3.5x^2+2x+c_2$$

נציב בפונקציה את הנקודה (2 , 1) : $1=2^3-3.5\cdot(2)^2+2\cdot2+c_2$ ← $c_2=3$

← $\underline{y=x^3-3.5x^2+2x+3}$

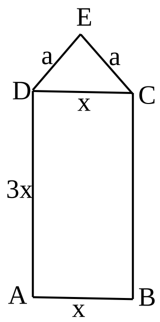



ב) משוואת הישר המקביל לציר x היא $y=1$

$$S=\int_0^2(x^3-3.5x^2+2x+3-1)dx=\frac14x^4-\frac76x^3+x^2+2x\Big|_0^2=4-\frac{28}{3}+4+4-(0)=2\frac23$$

## מבחן 14

### פתרון שאלה 1




שטח החלון מורכב משטח המלבן + שטח המשולש.

שטח המלבן : $x\cdot3x=3x^2$

שטח המשולש : נסמן $ED=EC=a$ . נתון שהמשולש הוא ישר זווית

← $a^2+a^2=x^2$ ← $a^2=\frac12x^2$ ← $S=\frac12a^2=\frac14x^2$

שטח החלון : $3x^2+\frac14x^2=3744$ ← $x^2=1152$ ← $a^2=\frac12\cdot1152=576$

← <u>CE = a = 24 ס"מ</u>

### פתרון שאלה 2

א) נוודא כי הנקודה (11 , 6) נמצאת על המעגל: $(11-3)^2+(6-5)^2=64+1=65$

מכאן שהנקודה נמצאת על המעגל.

שיפוע הרדיוס המחבר את מרכז המעגל (3 , 5) עם הנקודה (11 , 6) : $m=\frac{6-5}{11-3}=\frac18$

המשיק המבוקש מאונך לרדיוס זה, לכן שיפועו -8

משוואת המשיק : $y-6=-8(x-11)$ ← $\underline{y=-8x+94}$

ב) הקוטר המקביל למשיק שמצאנו עובר במרכז המעגל (3 , 5) ושיפועו -8

משוואת הקוטר : $y-5=-8(x-3)$ ← $\underline{y=-8x+29}$

ג) נקודות החיתוך של הקוטר והמעגל : $(x-3)^2+(-8x+29-5)^2=65$

← $(x-3)^2+(-8x+24)^2=65$ ← $x^2-6x+9+64x^2-384x+576=65$

← $65x^2-390x+520=0$ ← $x^2-6x+8=0$ ← $x=2$ או $x=4$

נקבע בצורה שרירותית : C(2 , 13) , B(4 , -3)

← נמצא את שיפוע הישר AB : $m_{AB}=\frac{-3-6}{4-11}=\frac97$

מקביל ל- AB בנקודה C : $y-13=\frac{9}{7}(x-2)$ ← $7y-91=9x-18$ ← $7y-9x=73$

נקודה D היא חיתוך הישר עם המשיק: $7(-8x+94)-9x=73$ ← $x=9$ ← $D(9,22)$

נמצא את אורכי הצלעות: $AB=\sqrt{(11-4)^2+(6+3)^2}=\sqrt{130}$ , $BC=2R=2=\sqrt{65}$ ,

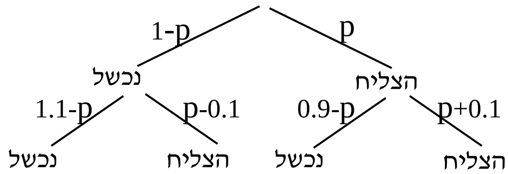
$CD=\sqrt{(9-2)^2+(22-13)^2}=\sqrt{130}$ , $CD=\sqrt{(9-11)^2+(22-6)^2}=\sqrt{260}$

← $P=AB+BC+CD+AD=\underline{55.05}$

## פתרון שאלה 3

א) יצליח בדיוק במבחן אחד פירושו -

(יצליח ב I וגם ייכשל ב II) או (יצליח ב II וגם ייכשל ב I)




$p(0.9-p)+(1-p)(p-0.1)=0.38$

$p=0.6$ , $p=0.4$

נתון $p>0.5$ לכן $p=0.6$

ב) $0.6\cdot 0.7=0.42$ ( הצליח בשני המבחנים )p

ג) נסמן: A – הצליח ב- I , $\overline{A}$ – נכשל ב- I , B – הצליח ב- II , $\overline{B}$ – נכשל ב- II

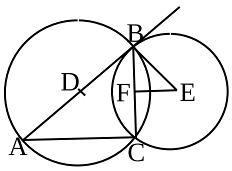
$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{p(0.9-p)}{p(0.9-p)+(1-p)(1.1-p)}=\frac{0.6\cdot 0.3}{0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.5}=0.474$$

## פתרון שאלה 4

נתונים שני מעגלים נחתכים שמרכזיהם בנקודות D ו- E בהתאמה.

AB הוא קוטר במעגל D ומשיק למעגל E.

EF מאונך למיתר המשותף BC . AC = 16 ס"מ , EF = 4.5 ס"מ .




א) צ"ל: BE משיק למעגל D

ב) צ"ל: אורך BC .

הוכחה: $\measuredangle BFE=90^\circ$ (נתון), $\measuredangle ACB=90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

← $\measuredangle BFE=\measuredangle ACB=90^\circ$ .

$\measuredangle BEC$ $\measuredangle BEF=\measuredangle=0.5\,CEF$ (אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את הזווית המרכזית)

$\measuredangle BEF=\measuredangle=\alpha\,ABC$ (זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר

ולמחצית הזווית המרכזית הנשענת על המיתר)

← $\Delta BEF\sim\Delta ABC$ לפי ז.ז. ← $\frac{AC}{BF}=\frac{BC}{EF}$

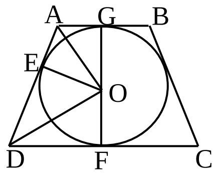
BF=0.5BC (רדיוס המאונך למיתר, חוצה אותו) ← $\frac{16}{0.5BC}=\frac{BC}{4.5}$

← <u>BC = 12 ס"מ</u> מ.ש.ל. ב

במשולש BEF : $\measuredangle EBF = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ $\leftarrow$ $\measuredangle EBF + \measuredangle = 90° - \alpha + \alpha\ ABC = 90°$

$\leftarrow$ $\measuredangle ABE = 90°$ $\leftarrow$ BE מאונך לרדיוס DB ולכן הוא משיק למעגל. מ.ש.ל. א

**פתרון שאלה 5**




צלעות הטרפז משיקות למעגל לכן :

א) OE מאונך ל AD (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)

ב) $DE = DF$ , $AG = AE$ (משיקים מנקודה חיצונית למעגל)

ג) DO חוצה את זווית D , AO חוצה את זווית A

במשולש DOF : $\measuredangle ODF = 0.5\alpha$ , $\measuredangle OFD = 90°$ , $OF = R$

$$\frac{OF}{DF} = \text{tg}\,0.5\alpha \leftarrow DF = \frac{R}{\text{tg}\,0.5\alpha}$$

סכום הזוויות A ו- D הוא $180°$ (זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים)

$\leftarrow$ גודלה של זווית A הוא $180° - \alpha$

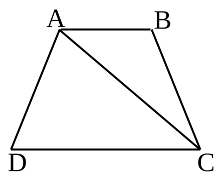
במשולש AOG : $\measuredangle OAG = 90° - 0.5\alpha$ , $\measuredangle OGA = 90°$ , $OG = R$

$$\leftarrow \frac{OG}{AG} = \text{tg}\,(90° - 0.5\alpha) \leftarrow AG = \frac{R}{\text{tg}\,(90° - 0.5\alpha)}$$

גובה הטרפז : 2R , בסיסי הטרפז : $\frac{2R}{\text{tg}\,0.5\alpha}$ , $\frac{2R}{\text{tg}\,(90° - 0.5\alpha)}$ $\leftarrow$

שטח הטרפז : $\frac{4R^2}{\sin\alpha} = 2R^2\left(\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) = R(+\frac{2R}{\text{tg}\,(90°-0.5\alpha)}\ \ \frac{2R}{\text{tg}\,0.5\alpha})$

במשולש ADC : זווית D שווה $\alpha$ , $DC = \frac{2R}{\text{tg}\,0.5\alpha}$ ,



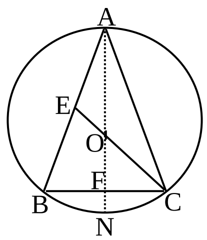

$$\leftarrow AD = AE + ED = +\frac{R}{\text{tg}\,(90°-0.5\alpha)} = \frac{R}{\text{tg}\,0.5\alpha}$$

$$AD = R(\text{tg}\,0.5\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,0.5\alpha}) = R\,\frac{\text{tg}^2 0.5\alpha + 1}{\text{tg}\,0.5\alpha} = \frac{2R}{\sin\alpha}$$

נשתמש במשפט הקוסינוסים למציאת AC :

$$\measuredangle D\ AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \leftarrow AC = \frac{2R}{\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin^2\alpha}$$

**פתרון שאלה 6**




ABC משולש שווה שוקיים , $\measuredangle A = 70°$ $\leftarrow$ $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 55°$

O מרכז המעגל החוסם $\leftarrow$ הקוטר AN יוצר שתי קשתות שוות :

ABN ו- ACN . הקשתות AB ו- AC שוות (מתאימות למיתרים שווים)

לכן הקשתות BN ו- CN שוות (הפרשים של קשתות שוות) $\leftarrow$

$\measuredangle BAO = \measuredangle OAC = 35°$ . CO=AO (רדיוסים) $\leftarrow$ $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = 35°$

א) במשולש AEC: $AC =$ 8 ס"מ , $\measuredangle A = 70°$ , $\measuredangle ECA = 35°$ $\leftarrow$ $\measuredangle CEA = 75°$

משפט הסינוסים במשולש AEC: $\frac{8}{\sin 70} = \frac{AC}{\sin 75}$ $\leftarrow$ <u>$AC =$ 8.22 ס"מ</u>

ב) משפט הסינוסים במשולש ABC: $\frac{AC}{\sin 55} = 2R$ $\leftarrow$ <u>$R =$ 5.02 ס"מ</u>

## פתרון שאלה 7

א) <u>תחום ההגדרה</u>: $8 - x^2 \ge 0$ $\leftarrow$ $-\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8}$

נגזור: $f'(x) = \sqrt{8 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-x^2-x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$ ונשווה לאפס

$f'(x) = 0$ $\leftarrow$ $8 - 2x^2 = 0$ $\leftarrow$ $x = 2$ , $x = -2$ נבדוק את סוג הקיצון:

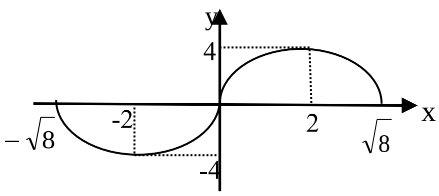
| x | $-\sqrt{8} < x < -2$ | -2 | -2<x<2 | 2 | $2 < x < \sqrt{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | - | 0 | + | 0 | - |
| y | $\searrow$ | מינימום | $\nearrow$ | מקסימום | $\searrow$ |

ערך הפונקציה בנקודות הקיצון: $f(-2) = -2\sqrt{8-4} = -4$ , $f(2) = 2\sqrt{8-4} = 4$

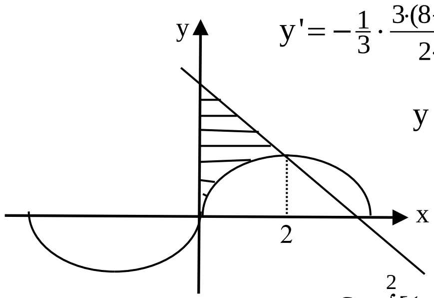
נקודות מקסימום: $(2, 4)$ , $(-\sqrt{8}, 0)$ (קצה),

נקודות מינימום: $(-2, -4)$ , $(\sqrt{8}, 0)$ (קצה)

ב)




ג) (1) $y = -\frac{1}{3}\sqrt{(8-x^2)^3}$ $\leftarrow$ $y' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot (8-x^2)^2 \cdot (-2x)}{2 \cdot \sqrt{(8-x^2)^3}} = x\sqrt{8-x^2}$




(2) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה והישר $y = -x + a$

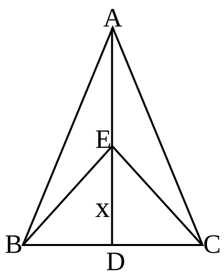
היא נקודת המקסימום $(2, 4)$: $4 = -2 + a$ $\leftarrow$ $a = 6$

הישר: $y = -x + 6$ . השטח המבוקש הוא:

$$S = \int_0^2 [(-x+6) - x\sqrt{8-x^2}]dx = -\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{-\sqrt{(8-x^2)^3}}{3}\Big|_0^2 =$$

$$= -2 + 12 + \frac{8}{3} - 7.542 = 5.124$$

## פתרון שאלה 8




AD גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים לכן הוא גם תיכון

$\leftarrow$ $BD = DC =$ 8 ס"מ . נסמן: $ED = x$

$\leftarrow$ $AE = 22 - x$ $\leftarrow$ $AE^2 = (22-x)^2 = 484 - 44x + x^2$

על פי משפט פיתגורס במשולש BDE (או במשולש CDE):

$BE^2 = CE^2 = 64 + x^2$ $\leftarrow$ $y = 484 - 44x + x^2 + 2 \cdot (64 + x^2) = 3x^2 - 44x + 612$

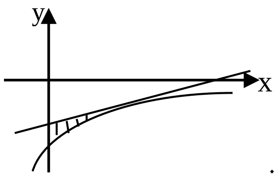
נגזור את הפונקציה: $y' = 6x - 44$ ונשווה לאפס: $6x - 44 = 0$ ← $x = 7\frac{1}{3}$

נבדוק את סוג הקיצון בעזרת הנגזרת השנייה: $y'' = 6$. הנגזרת השנייה חיובית ← מינימום.

**פתרון שאלה 9**

א) נציב $y = -2$ בפונקציה: $-2 = \frac{-4}{\sqrt{x+1}}$ ← $\sqrt{x+1} = 2$ ← $x = 3$ ←

נקודת ההשקה $(3\ ,\ -2)$. כדי למצוא את שיפוע המשיק נגזור את הפונקציה:




$y' = \frac{2}{\sqrt{(x+1)^3}}$ ונציב בנגזרת $x = 3$ : $m = \frac{1}{4}$

משוואת המשיק: $y + 2 = \frac{1}{4}(x-3)$ ← $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$ .

ב) $S = \int_0^3 [\frac{1}{4}x - \frac{11}{4} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}]dx = \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + 8\sqrt{x+1}\Big|_0^3 = \frac{7}{8}$

**מבחן 16**

**פתרון שאלה 1**

מחיר נסיעה באוטובוס לכיוון אחד - x ₪ , מחיר שהייה ליום – 3x ₪

מספר ימים מתוכנן - y

תכנון: $2x + 3xy = 800$ בפועל: $x + 3x(y+1) = 880$

נחסר משוואה שנייה ממשוואה ראשונה:

$$\begin{array}{l} 4x + 3xy = 880 \\ \underline{2x + 3xy = 800} \\ 2x \qquad\quad = 80 \end{array}$$

← $x = 40$ ₪ , $y = 6$ . אלדר נפש 7 ימים.

**פתרון שאלה 2**

א) (1) כדי למצוא את משוואת האנך האמצעי ל- AB יש למצוא את השיפוע של AB ואת נקודת האמצע של AB .

$m_{AB} = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = 2$ ← שיפוע של אנך ל- AB הוא $-0.5$

נסמן את אמצע AB בנקודה D ← $x_D = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ , $y_D = \frac{5+(-3)}{2} = 1$ ← $D(1\ ,\ 1)$

משוואת האנך האמצעי: $y - 1 = -0.5(x-1)$ ← $\underline{y = -0.5x + 1.5}$

(2) $m_{AC} = \frac{5-2}{3-0} = 1$ ← שיפוע של אנך ל- AB הוא $-1$

נסמן את אמצע AC בנקודה E ← $x_E = \frac{3+0}{2} = 1.5$ , $y_E = \frac{5+2}{2} = 3.5$ ← $E(1.5\ ,\ 3.5)$

משוואת האנך האמצעי: $y - 3.5 = -1(x - 1.5)$ ← $\underline{y = -x + 5}$

(3) מרכז המעגל החוסם משולש הוא נקודת המפגש של האנכים האמצעיים. נמצא את נקודה O , נקודת החיתוך של שני האנכים האמצעיים:

$$O(7\,,-2) \leftarrow x=7\,,\ y=-2 \leftarrow 3.5=0.5x \leftarrow -x+5=-0.5x+1.5$$

רדיוס המעגל הוא המרחק בין נקודה O לבין כל אחד מקדקודי המשולש.

$$\underline{(x-7)^2+(y+2)^2=65} \text{ משוואת המעגל } \leftarrow R=OC=\sqrt{(7-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{65}$$

ב) המשיק למעגל בקדקוד C מאונך לרדיוס OC. $m_{OC}=\frac{-2-2}{7-0}=\frac{-4}{7}$ ← שיפוע המשיק $\frac{7}{4}$

משוואת המשיק: $y-2=\frac{7}{4}(x-0) \leftarrow$ $y=\frac{7}{4}x+2$

כדי למצוא נקודת חיתוך עם ציר x נציב $y=0$: $0=\frac{7}{4}x+2 \leftarrow x=-\frac{8}{7} \leftarrow \underline{(-1\frac{1}{7},0)}$

**פתרון שאלה 3**

נגדיר את המאורעות: A – משקה מוגז , B – משקה עם סוכר

<u>נתון</u>: נמכרו פי $1\frac{2}{3}$ בקבוקי משקאות עם סוכר לא מוגזים מאשר בקבוקי דיאט מוגזים ←

$P(B\cap\overline{A})=\frac{5}{3}P(A\cap\overline{B})$ .

70% מבקבוקי הדיאט שנמכרו הם מוגזים ← $P(A/\overline{B})=0.7$ ,

חצי מהמשקאות הממותקים אינם מוגזים ← $P(\overline{A}/B)=0.5$ .

$$P(\overline{A}/B)=0.5=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} \leftarrow P(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{0.5}=\frac{\frac{5}{3}P(A\cap\overline{B})}{0.5}=\frac{10P(A\cap\overline{B})}{3}$$

$$P(A/\overline{B})=0.7=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \leftarrow P(\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{0.7}$$

$$P(B)+P(\overline{B})=1 \leftarrow \frac{10P(A\cap\overline{B})}{3}+\frac{P(A\cap\overline{B})}{0.7}=1 \leftarrow P(A\cap\overline{B})=0.21$$

← $P(B)=0.7$ . נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר:

| | $\overline{A}$ | A | |
|---|---|---|---|
| 0.7 | 0.35 | 0.35 | B |
| 0.3 | 0.09 | 0.21 | $\overline{B}$ |
| 1 | 0.44 | 0.56 | |

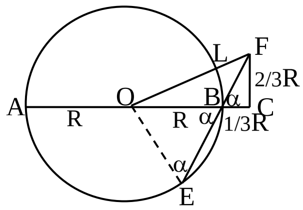
א) P(A)=0.56 ← אחוז המשקאות המוגזים הוא <u>56%</u> .

ב) ההסתברות שמשקה הוא דיאטטי מבין המוגזים: $P(\overline{B}/A)=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{0.21}{0.56}=\underline{0.375}$ .

ג) 0.3 מהמשקאות הם דיאטטיים ← מספר הבקבוקים הדיאטטיים: $8000\cdot0.3=\underline{2400}$ .

**פתרון שאלה 4**

נתון מעגל שמרכזו O . $BC=\frac{1}{3}R$ על המשך הקוטר AB .




$CF \perp AC$ , $CF=\frac{2}{3}R$

א) <u>צריך להוכיח</u>: $\Delta CFO \sim \Delta CBF$

$\frac{CO}{CF}=\frac{4/3\,R}{2/3\,R}=2$ , $\frac{CF}{CB}=\frac{2/3\,R}{1/3\,R}=2$ ← $\frac{CF}{CB}=\frac{CO}{CF}$

הזווית C משותפת לשני המשולשים . ← $\Delta CFO \sim \Delta CBF$ לפי צ.ז.צ   מ.ש.ל א'

ב) <u>צריך להוכיח</u>: הקשת BE גדולה פי שניים מהקשת LB: $\overset{\frown}{BE}=2\overset{\frown}{LB}$

נסמן: $\sphericalangle FBC=\sphericalangle OBE=\alpha$ (זוויות קדקודיות).

$OB=OE$ (רדיוסים) ← $\sphericalangle OEB=\sphericalangle OBE=\alpha$ ( זוויות בסיס במש"ש OBE )

← $\sphericalangle BOE=180°-2\alpha$ . מהדמיון בסעיף א': $\sphericalangle OFC=\alpha$ , $\sphericalangle LOB=90°-\alpha$

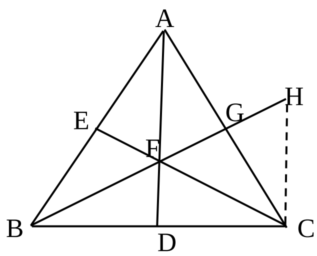
← $\sphericalangle BOE=180°-2\alpha=2(90-\alpha)=2\cdot\sphericalangle LOB$

← $\overset{\frown}{BE}=2\overset{\frown}{LB}$ (הקשת שווה לזווית המרכזית השייכת לה).   מ.ש.ל ב'

## פתרון שאלה 5

נתון: $AB=AC$ , $BD=DC$ , $AE=EB$ , $FG=GH$

AG = 8.5 ס"מ , HC = 10 ס"מ




צ"ל: א) אורך AD

ב) זוויות משולש ABC

פתרון: $BD=DC$ , $AE=EB$ (נתון)

← $AG=GC$ (שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת).

$FG=GH$ (נתון) ← AFCH מקבילית (מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה)

← AF = HC = 10 ס"מ (צלעות נגדיות במקבילית שוות באורכן)

$AF=2FD$ (נקודת מפגש התיכונים במשולש מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2)

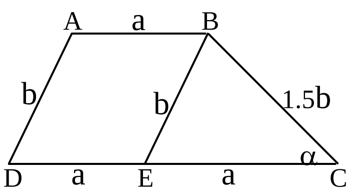
← FD = 5 ס"מ ← <u>AD = 15 ס"מ</u>

ב) $AB=AC$ , $BD=DC$ (נתון) ← $\sphericalangle ADC=90°$ (תיכון לבסיס במש"ש הוא גם גובה)

AG = 8.5 ס"מ (נתון), $AG=GC$ (ראינו בסעיף א) ← AC = 17 ס"מ

במשולש ישר זווית ADC $\sin C=\frac{15}{17}$ ← $\sphericalangle C=61.93°$ ← $\sphericalangle B=61.93°$ , $\sphericalangle A=56.14°$

## פתרון שאלה 6




א) מנקודה B נעביר BE מקביל ל AD . בנייה זאת יצרה מקבילית ABED (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות).
במקבילית הצלעות הנגדיות שוות לכן $BE = b$ , $DE = a$ .
נתון כי $CD = 2a$ $\leftarrow$ $CE = a$ .
במשולש BCE נמצא את $\cos\alpha$ בעזרת משפט הקוסינוסים :

$$\cos\alpha = \frac{a^2+1.25b^2}{3ab} \quad \leftarrow \quad b^2 = a^2 + (1.5b)^2 - 2a\cdot 1.5b\cdot\cos\alpha$$

ב) נציב $b = 1.2a$ בביטוי שקיבלנו בסעיף א :

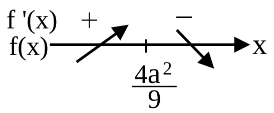
$$\underline{\alpha = 38.94°} \quad \leftarrow \quad \cos\alpha = \frac{a^2+1.25\cdot(1.2a)^2}{3a\cdot 1.2a} = \frac{a^2+1.8a^2}{3.6a^2} = \frac{2.8a^2}{3.6a^2} = 0.778$$

ג) במשולש BCD : $CD = 2a$ , $BC = 1.5b = 1.5\cdot 1.2a = 1.8a$ , $\alpha = 38.94°$ .
נמצא את BD בעזרת משפט הקוסינוסים : $BD^2 = (2a)^2 + (1.8a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 1.8a\cdot\cos 38.94°$

$$\underline{BD = 1.28a} \quad \leftarrow \quad BD^2 = 4a^2 + 3.24a^2 - 5.6a^2 = 1.64a^2$$

## פתרון שאלה 7

א) נגזור את הפונקציה : $f'(x) = 3\cdot(a-\sqrt{x}) + 3x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} = 3a - 3\sqrt{x} - 1.5\sqrt{x} = 3a - 4.5\sqrt{x}$




$f'(x) = 0$ : $3a - 4.5\sqrt{x} = 0$ $\leftarrow$ $3a = 4.5\sqrt{x} \;/^2$ $\leftarrow$ $x = \frac{4}{9}a^2$

מהנתון נובע כי $f(\frac{4}{9}a^2) = 3\frac{5}{9}$ $\leftarrow$ $3\frac{5}{9} = 3\cdot\frac{4}{9}a^2(a-\frac{2a}{3})$ $\leftarrow$ $\underline{a = 2}$

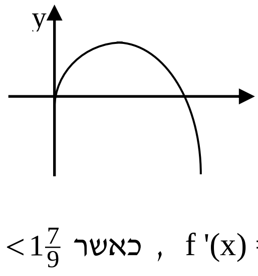
ב) $f(x) = 3x(2-\sqrt{x})$ . בגלל השורש, תחום ההגדרה הוא $x \geq 0$ .

ג) $f'(x) = 6 - 4.5\sqrt{x}$ . כדי למצוא נקודות קיצון נשווה את הנגזרת לאפס: $0 = 6 - 4.5\sqrt{x}$
$\leftarrow$ $x = 1\frac{7}{9}$ $\leftarrow$ $\underline{(1\frac{7}{9}, 3\frac{5}{9})}$ נקודת מקסימום (לפי השרטוט בסעיף א)

הנקודה $\underline{(0 , 0)}$ היא נקודת קצה והיא נקודת מינימום לפי השרטוט בסעיף א.

ד) נציב $y = 0$ : $0 = 3x(2-\sqrt{x})$ $\leftarrow$ $x = 0$ או $x = 4$ $\leftarrow$ נקודות חיתוך : $\underline{(4 , 0)}$ , $\underline{(0 , 0)}$

ה) על פי התוצאות בסעיפים ב – ד :




ו) בנקודת המקסימום $x = 1\frac{7}{9}$ $\leftarrow$ $f'(x) = 0$ , כאשר $0 < x < 1\frac{7}{9}$ הפונקציה עולה לכן
$f'(x) > 0$ וכאשר $x > 1\frac{7}{9}$ הפונקציה יורדת לכן $f'(x) < 0$ $\leftarrow$ הגרף המתאים הוא I .

## פתרון שאלה 8

$y = x^2 - 2x + 6$ ← $y' = 2x - 2$ נקודת קיצון: $y' = 0$ ← $x = 1$ ← $B(1, 5)$

משיק בנקודה $(2, 6)$: $m = 2$ ← $y = 2x + 2$

משיק בנקודה $(a, a^2 - 2a + 6)$: $m = 2a-2$ ← $y = (2a-2)x + 6 - a^2$

A נקודת חיתוך המשיקים: $(2a-2)x + 6 - a^2 = 2x + 2$ ← $(2a-4)x = a^2 - 4$

← $2(a-2)x = (a-2)(a+2)$ ← $x = 0.5a + 1, \ a \neq 2$

← $a \neq 2$ $A(0.5a+1, a+4)$

$$AB = \sqrt{(0.5a+1-1)^2 + (a+4-5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5a^2 - 8a + 4}$$

נגזור: $AB' = \frac{10a-8}{2\cdot 2\sqrt{5a^2-8a+4}}$

נשווה לאפס ונקבל $a = 0.8$

| a | $a < 0.8$ | 0.8 | $a > 0.8$ |
|---|---|---|---|
| AB ' | – | 0 | + |
| AB | ↘ | מינימום | ↗ |

**פתרון שאלה 9**

א) נקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - 3$ ושל ציר x. כדי למצוא אותה נציב $f(x) = 0$: $0 = \frac{6}{\sqrt{x}} - 3$ ← $\sqrt{x} = 2$ ← $x = 4$ ← $A(4, 0)$.

ב) נקודה B נמצאת על $f(x)$ ושיעור ה- x שלה הוא $x = 1$ ← $f(1) = 3$ ← $B(1, 3)$.

שיפוע הישר OB: $m_{OB} = \frac{3-0}{1-0} = 3$ ← משוואת הישר OB: $\underline{y = 3x}$

$x_C = x_A = 4$ ← $y_c = 3\cdot x_C = 3\cdot 4 = 12$ ← $\underline{AC = 12}$

ג) $S = \int_1^4 [3x - (\frac{6}{\sqrt{x}} - 3)]dx = 1.5x^2 - 12\sqrt{x} + 3x\Big|_1^4 = 24 - 24 + 12 - (1.5 - 12 + 3) = 19.5$

**מבחן 22**

**פתרון שאלה 1**

| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| הלוך | 6 | $\frac{0.8x}{6}$ | 0.8x |
| | 4 | $\frac{0.2x}{4}$ | 0.2x |
| חזור | 5 | $\frac{x}{5}$ | x |

הדרך חזרה נמשכה חצי שעה יותר: $\frac{0.8x}{6} + \frac{0.2x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x}{5}$ / 60

← $8x + 3x + 30 = 12x$ ← $x = 30$ ← <u>הדרך חזרה נמשכה 6 שעות</u>

**פתרון שאלה 2**

א) נקודה A נמצאת על ציר x ← $y_A = 0$ . נציב $y = 0$ במשוואת AC :

$0 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ← $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{2}$ ← x = -2 ← <u>A(-2 , 0)</u> .

נקודה O , שהיא מרכז המעגל, נמצאת על הקוטר $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ . שיעור ה- x שלה

הוא 2 ← $y = \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{3}{2} = 3$ ← <u>O(2 , 3)</u>. נקודה O היא אמצע AC

← $2 = \frac{-2+x}{2}$ ← x = 6 , $3 = \frac{0+y}{2}$ ← y = 6 ← <u>C(6 , 6)</u> .

ב) מרכז המעגל הוא (2 , 3) . הרדיוס הוא אורך הקטע AO . $R = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2}$

משוואת המעגל : $\underline{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25}$

ג) הנקודות A ו- B נמצאות על ציר x . נציב במשוואת המעגל y = 0 ונקבל

$(x-2)^2 + 9 = 25$ ← $(x-2)^2 = 16$ ← $x_A = -2$ , $x_B = 6$

לכן אורך הצלע AB הוא $x_B - x_A = 6 - (-2) = 8$

הגובה לצלע AB הוא שיעור ה- y של נקודה O , כלומר 3 ← $S_{\Delta ABO} = \frac{8\cdot 3}{2} = 12$ .

ד) נמצא את שטח משולש ABC : זווית B היא זווית היקפית הנשענת על קוטר ←

משולש ABC הוא משולש ישר זווית. מצאנו בסעיף ג כי AB = 8. לנקודות B ו- C

יש אותו ערך של x ← אורך הניצב BC : $y_C - y_B = 6 - 0 = 6$ ← $S_{\Delta ABC} = \frac{8\cdot 6}{2} = 24$

← שטח משולש COB : 24 – 12 = 12

<u>פתרון שאלה 3</u>

א) ההסתברות של הקבוצה הצהובה לזכות במשחק בודד היא p ←

1 – p היא ההסתברות שהקבוצה איננה מנצחת (מסיימת בתיקו או מפסידה).
ההסתברות של הקבוצה הצהובה לזכות לכל היותר ב- 3 משחקים וגם לפחות
בשני משחקים היא ההסתברות לזכות ב- 2 או ב- 3 משחקים.
על פי נוסחת ברנולי :

$$P(\text{נצחון בשני משחקים}) = \binom{5}{2}\cdot P^2 \cdot (1-P)^3 = 10\cdot P^2 \cdot (1-P)^3$$

$$P(\text{נצחון בשלושה משחקים}) = \binom{5}{3}\cdot P^3 \cdot (1-P)^2 = 10\cdot P^3 \cdot (1-P)^2$$

$$P(\text{נצחון בארבעה משחקים}) = \binom{5}{4}\cdot P^4 \cdot (1-P) = 5\cdot P^4 \cdot (1-P)$$

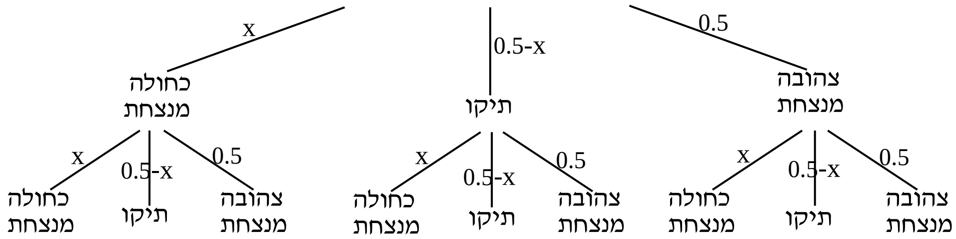
נרכיב את המשוואה : $10\cdot P^2 \cdot (1-P)^3 + 10\cdot P^3 \cdot (1-P)^2 = 4\cdot 5\cdot P^4 \cdot (1-P)$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב- $10P^2(1-P)$ (על פי תנאי הבעיה $P \neq 1, 0$) :

$(1-P)^2 + P(1-P) = 2P^2$ ← $2P^2 + P - 1 = 0$ ← $\underline{P = 0.5}$ , $\cancel{P = -1}$ .

ב) נסמן ב- x את ההסתברות של הקבוצה הכחולה לזכות במשחק בודד ←

ההסתברות לתוצאת תיקו היא $0.5 - x$ . ניעזר בעץ לפתרון :




(1) <u>ההסתברות לתיקו</u> : הצהובה מנצחת במשחק ראשון והכחולה בשני <u>או</u>
הכחולה מנצחת במשחק הראשון והצהובה מנצחת בשני <u>או</u> שני המשחקים
מסתיימים בתיקו $\leftarrow \quad 0.34 = 0.5x + 0.5x + (0.5 - x)^2 = x^2 + 0.25 \quad \leftarrow \quad \underline{x = 0.3}$

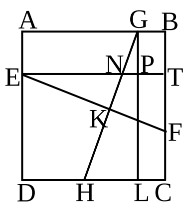
(2) נגדיר מאורעות : A – הקבוצה הכחולה מנצחת במשחק השני
B – התחרות מסתיימת בתיקו $[\,P(B) = 0.34\,]$
ההסתברות שהקבוצה הכחולה ניצחה במשחק השני אם ידוע שהתחרות כולה
הסתיימה בתיקו : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\underline{P(A \cap B)}$ : ההסתברות שהקבוצה הכחולה מנצחת במשחק השני וגם התחרות כולה
מסתיימת בתיקו היא ההסתברות שהצהובה מנצחת במשחק ראשון והכחולה בשני
$\leftarrow \quad P(A \cap B) = 0.5x = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$

$\leftarrow \quad \underline{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.34} = \frac{15}{34}}$

## <u>פתרון שאלה 4</u>

א) נתון : ABCD ריבוע , $EF \perp GH$ , צ"ל : $GH = EF$
הוכחה : ABCD ריבוע ( נתון )
מנקודה G נעביר מקביל GL לצלע הריבוע BC. GBCL מלבן $\leftarrow$ $GL = BC$
ומנקודה E נעביר מקביל ET לצלע הריבוע AB. ABTE מלבן $\leftarrow$ $ET = AB$
$AB = BC$ (צלעות הריבוע) $\leftarrow$ $GL = ET$
שני המקבילים שהעברנו נחתכים בנקודה P .
GBTP מקבילית (שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות)




$\measuredangle B = 90^\circ$ (זווית של הריבוע) $\leftarrow$ GBTP מלבן $\leftarrow$ $\measuredangle P = 90$
נסמן $\measuredangle HGL = \alpha$ , ראינו כי $\measuredangle P = 90^\circ$ $\leftarrow$ $\measuredangle GNP = 90^\circ - \alpha$
$\measuredangle GNP = \measuredangle ENK = 90^\circ - \alpha$ (זוויות קדקודיות שוות זו לזו)
$EF \perp GH$ ( נתון ) $\leftarrow$ $\measuredangle K = 90^\circ$ $\leftarrow$ $\measuredangle TEF = \alpha$

נתבונן במשולשים ETF ו- GLH:

$\measuredangle HGL = \measuredangle TEF = \alpha$ , $GL = ET$ , $\measuredangle GLH = \measuredangle ETF = 90°$

$\leftarrow$ $\Delta ETF \cong \Delta GLH$ ז.צ.ז. $\leftarrow$ $GH = EF$ <u>משל"ל</u>

ב) (1) צ"ל: המרובע EKHD הוא בר חסימה

הוכחה: נתון כי $EF \perp GH$ $\leftarrow$ $\measuredangle EKH = 90°$ . נתון גם כי ABCD הוא ריבוע

$\leftarrow$ $\measuredangle D = 90°$ $\leftarrow$ $\measuredangle EKH + \measuredangle D = 180°$ $\leftarrow$ EKHD הוא בר חסימה. <u>משל"ל</u>

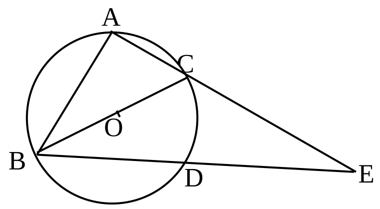
(2) צ"ל: $\measuredangle HKD = \measuredangle DEH$

הוכחה: הוכחנו כי המרובע EKHD הוא בר חסימה. DH הוא מיתר במעגל החוסם

את המרובע EKHD. שתי הזוויות $\measuredangle DEH$ ו- $\measuredangle HKD$ הן זוויות היקפיות

במעגל זה ושתיהן נשענות על המיתר DH $\leftarrow$ שתי הזוויות שוות. <u>משל"ל</u>

<u>פתרון שאלה 5</u>




א) נתון: AB = 9.5 ס"מ , BC = 2R = 12 ס"מ

$\measuredangle A = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

נסמן $\measuredangle ABC = \alpha$

במשולש ישר זווית ABC : (1) $\cos\alpha = \frac{9.5}{12} = 0.792$ $\leftarrow$ $\alpha = 37.6585°$

(2) 7.33144 ס"מ $= \sqrt{53.75} = \sqrt{12^2 - 9.5^2} = AC$ (על פי משפט פיתגורס)

נתון: נקודה C היא אמצע הקשת AD

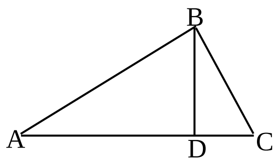
$\leftarrow$ $\measuredangle ABC = \measuredangle CBE = \alpha$ (על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות)

במשולש ישר זווית ABE : $tg2\alpha = \frac{AE}{AB}$ $\leftarrow$ $tg2 \cdot 37.6585 = \frac{AE}{9.5}$ $\leftarrow$ AE = 36.256 ס"מ

$\leftarrow$ CE = AE – AC = 36.256 – 7.33144 = 28.924 ס"מ $\leftarrow$ <u>CE = 28.924 ס"מ</u>

ב) משפט הסינוסים במשולש BCE : $2R = \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{28.924}{\sin 37.6585} = 47.34$ $\leftarrow$ <u>R = 23.67 ס"מ</u>

<u>פתרון שאלה 6</u>




נתון: BD גובה לצלע AC , $\measuredangle ABD = \beta$ , $\measuredangle DBC = \alpha$ , BC = a

במשולש ישר זווית BCD: (1) $\cos\alpha = \frac{BD}{BC}$ $\leftarrow$ $BD = a \cdot \cos\alpha$

(2) $\sin\alpha = \frac{CD}{BC}$ $\leftarrow$ $CD = a \cdot \sin\alpha$

במשולש ישר זווית ABD: (1) $\cos\beta = \frac{BD}{AB}$ $\leftarrow$ $AB = \frac{BD}{\cos\beta} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$

(2) $tg\beta = \frac{AD}{BD}$ $\leftarrow$ $AD = BD \cdot tg\beta = a \cdot \cos\alpha \cdot tg\beta$

היקף המשולש: $p = BC + CD + AD + AB = a + a\cdot\sin\alpha + a\cdot\cos\alpha\cdot tg\beta + \frac{a\cdot\cos\alpha}{\cos\beta} =$

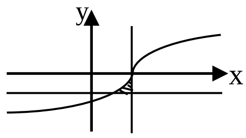
$$= \frac{a\cdot[\cos\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha]}{\cos\beta} = \frac{a\cdot[\cos\alpha+\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)]}{\cos\beta}$$

## פתרון שאלה 7

א) $y' = \frac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+7}} = \frac{2\cdot(x-2)}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+7}} = \frac{x-2}{\cdot\sqrt{x^2-4x+7}}$

ב) a הוא ערך הפונקציה $f(x)$ כאשר $x = 1$ ← $a = f(1) = \frac{1-2}{\sqrt{1^2-4\cdot1+7}} = -0.5$ .

בנקודה A מתקיים $f(x) = 0$ ← $0 = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+7}}$ ← $x = 2$ ← $A(2 , 0)$




מצאנו בסעיף א כי $y' = f(x)$

← הפונקציה הקדומה (האינטגרל) של $f(x)$ היא הפונקציה y

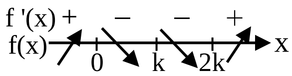
$$S = \int_1^2 [f(x) - (-0.5)]dx = \sqrt{x^2 - 4x + 7} + 0.5x\Big|_1^2 = \sqrt{3} + 1 - (2 + 0.5) = 0.232$$

## פתרון שאלה 8

א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x \neq k$

נגזור: $f'(x) = \frac{2\cdot(x-2k)(x-k)-1\cdot(x-2k)^2}{(x-k)^2} = \frac{(x-2k)(2x-2k-x+2k)}{(x-k)^2} = \frac{(x-2k)\cdot x}{(x-k)^2}$

$f'(x) = 0$ ← $x = 0$ או $x = 2k$ נמצא את סוג הקיצון:




נקודות הקיצון הן: נקודת מינימום $(2k , 0)$ נמצאת על ציר x

נקודת מקסימום $(0 , -4k)$ נמצאת על ציר y .

ב) המשיק $y = -2$ הוא משיק בנקודת קיצון ← $-4k = -2$ ← $\underline{k = 0.5}$

ג) נציב $k = 0.5$ בדיאגרמה בסעיף א ונקבל: הפונקציה עולה כאשר $x > 1$ או $x < 0$

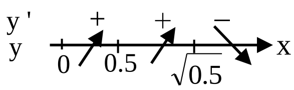
הפונקציה יורדת כאשר $0.5 < x < 1$ או $0 < x < 0.5$

ד) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-0.5}$ , $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot x}{(x-0.5)^2}$ ←

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)\cdot x}{(x-0.5)^2} : \frac{(x-1)^2}{x-0.5} = \frac{(x-1)\cdot x}{(x-0.5)^2}\cdot\frac{x-0.5}{(x-1)^2} = \frac{x}{x^2-1.5x+0.5}$$

נגזור: $y' = \frac{1\cdot(x^2-1.5x+0.5)-x\cdot(2x-1.5)}{(x^2-1.5x+0.5)^2} = \frac{-x^2+0.5}{(x^2-1.5x+0.5)^2}$

$y' = 0$ ← $x = \pm\sqrt{0.5}$ . בתחום $x > 0$ $\underline{x = \sqrt{0.5}}$




ה) כאשר $x < 0$ הפונקציה עולה לכן הפונקציה הנגזרת חיובית וכאשר $0 < x < 0.5$

הפונקציה יורדת לכן הפונקציה הנגזרת שלילית ← בתחום $x < 0.5$ הנגזרת יורדת.

כאשר $0.5 < x < 1$ הפונקציה יורדת לכן הפונקציה הנגזרת שלילית וכאשר $x > 1$

הפונקציה עולה לכן הפונקציה הנגזרת חיובית ← בתחום $x > 0.5$ הנגזרת עולה.

**פתרון שאלה 9**

א) הנגזרת השנייה של פונקציה היא $y'' = 6$ .

נמצא את הנגזרת הראשונה על ידי אינטגרל: $y' = \int 6dx = 6x + c1$ .

נמצא את הפונקציה על ידי אינטגרל:

$$y = \int (6x + c1)dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} + c1 \cdot x + c2 = 3x^2 + c1 \cdot x + c2$$

נציב בפונקציה את הנקודות $(-4,0)$ , $(2\frac{1}{3},0)$ : $(\frac{7}{3})$

$0 = 3 \cdot (-4)^2 + c1 \cdot (-4) + c2$ ← $4c1 - c2 = 48$

$0 = 3 \cdot (\frac{7}{3})^2 + c1 \cdot (\frac{7}{3}) + c2 \quad / \cdot 3$ ← $7c1 + 3c2 = -49$

פתרון המשוואות: $c1 = 5$ , $c2 = -28$ ← $\underline{y = 3x^2 + 5x - 28}$

ב) נציב בפונקציה $x = 2$ ← $y = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 28 = -6$

שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת בנקודת ההשקה: $m = 6 \cdot 2 + 5 = 17$

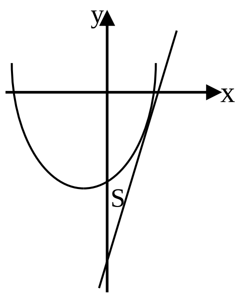
משוואת המשיק: $y - (-6) = 17(x - 2)$ ← $\underline{y = 17x - 40}$

ג)

$$S = \int_0^2 [3x^2 + 5x - 28 - (17x - 40)]dx =$$

$$= \int_0^2 (3x^2 - 12x + 12)dx = x^3 - 6x^2 + 12x \Big|_0^2$$

$$S = 8 - 24 + 24 - 0 = 8$$




**מבחן 23**

**פתרון שאלה 1**

נסמן: מחיר הקנייה של כל בובה x ₪

בעל החנות קנה 200 בובות ושילם סה״כ 200x ש״ח

6 בובות נמכרו במחיר $\frac{1}{2}x$ כל אחת ← סה״כ נמכרו ב- 3x ₪

194 בובות נמכרו במחיר x + 12 כל אחת ← סה״כ נמכרו ב- $194(x + 12)$ ₪

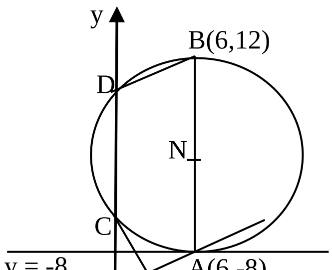
בעל החנות הרוויח 2184 ₪ ← מחיר המכירה פחות מחיר הקנייה = 2184

$3x + 194(x + 12) - 200x = 2184$ ← $3x = 144$ ← $x = 48$

בעל החנות שילם 48 ₪ עבור כל בובה

**פתרון שאלה 2**

א) AB קוטר במעגל שמרכזו N .



הישר y = -8 משיק למעגל בנקודה A ← מאונך ל- AB.

← AB מקביל לציר y ← לנקודות A ו- B אותו ערך

A(6,-8) . מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר ← N(2,6) .

רדיוס המעגל: NA = NB = 10 .

משוואת המעגל: $(x-6)^2+(y-2)^2=100$

ב) נקודות החיתוך של המעגל עם ציר y: $(0-6)^2+(y-2)^2=100$

$y=10\ ,\ y=-6 \quad \leftarrow \quad y-2=\pm 8 \quad \leftarrow \quad (y-2)^2=64$

← C(0 ,-6) , D (0 ,10) .

שיפוע הישר BD: $m=\frac{12-10}{6}=\frac{1}{3}$ ← AE מקביל ל- BD ← $m_{AE}=\frac{1}{3}$

משוואת AE על פי השיפוע ונקודה A: $y+8=\frac{1}{3}(x-6) \qquad y=\frac{1}{3}x-10$

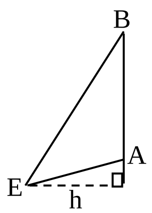
$CE\perp AE$ מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים שווה 1- ← $m_{CE}=-3$

משוואת CE על פי השיפוע ונקודה C: $y+6=-3(x-0) \quad \leftarrow \quad y=-3x-6$

נקודה E היא חיתוך שני הישרים: $\frac{1}{3}x-10=-3x-6 \quad \leftarrow \quad x=1.2$

נציב באחד הישרים למציאת y: $y=-3\cdot 1.2-6=-9.6$

שיעורי הנקודה E: (1.2 ,-9.6) .




משולש ABE: AB = 12 – (-8) = 20

הגובה לצלע AB הוא מרחק הנקודה E מ- AB

$h=6-1.2=4.8 \quad \leftarrow \quad S_{\Delta ABE}=\frac{20\cdot 4.8}{2}=48$

## פתרון שאלה 3

נגדיר את המאורעות: A - בן ← $\overline{A}$ - בת

B - בחר כדור כחול ← $\overline{B}$ - בחר כדור אדום

השתתפו מספר שווה של בנים ובנות ← $P(A)=P(\overline{A})=0.5$

50% מהבנות בחרו כדור כחול ← $P(B/\overline{A})=0.5$

60% מהבוחרים כדור כחול הם בנים ← $PA/B)=0.6$

$P(B/\overline{A})=\frac{p(B\cap\overline{A})}{p(\overline{A})} \quad \leftarrow \quad 0.5=\frac{p(B\cap\overline{A})}{0.5} \quad \leftarrow \quad P(B\cap\overline{A})=0.25$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.6 \quad \leftarrow \quad P(A\cap B)=0.6\cdot P(B) \quad \leftarrow$

$P(\overline{A}\cap B)=0.4p(B)=0.25 \quad \leftarrow \quad P(B)=0.625 \quad \leftarrow$

$P(A\cap B)=0.6\cdot P(B)=0.375$

נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $A$ | $\bar{A}$ | |
| $B$ | 0.375 | 0.25 | 0.625 |
| $\bar{B}$ | 0.125 | 0.25 | 0.375 |
| | 0.5 | 0.5 | 1 |

א) ההסתברות שאם נבחר באקראי בן הוא בחר כדור כחול :

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.375}{0.5}=\underline{\underline{0.75}}$$

ב) אחוז הבנות מבין הבוחרים כדור כחול :

$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0.25}{0.625}=0.4$ $\leftarrow$ 40% מהבוחרים כדור כחול הן בנות

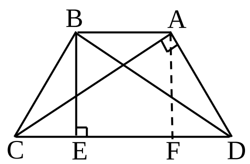
ג) ההסתברות שילד בחר כדור אדום היא 0.375 .

ההסתברות שילד לא בחר כדור אדום (בחר כדור כחול) היא 0.625 .

על פי נוסחת ברנולי ההסתברות שבדיוק שניים מהשלושה בחרו כדור אדום :

$$P(2)=\binom{3}{2}\cdot 0.375^2\cdot 0.625=\underline{0.2637}$$

## פתרון שאלה 4




א) ABCD טרפז שווה שוקיים : $AD=BC$ , $AB\parallel CD$ .

האלכסונים מאונכים לשוקיים : $AC\perp AD$ , $BD\perp BC$

$BE\perp CD$ . צריך להוכיח : $BC^2=EC\cdot DC$

נראה דמיון של המשולשים BCE ו- CDA :

$\measuredangle CAD=\measuredangle E=90^\circ$ (נתון) . $\measuredangle BCE=\measuredangle ADC$ (זוויות בסיס בטרפז שווה שוקיים)

$\leftarrow$ $\Delta BCE \sim \Delta CDA$ לפי משפט דמיון ז.ז $\leftarrow$ $\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{CE}$ צלעות פרופורציוניות

במשולשים דומים . $BC=AD$ (נתון) $\leftarrow$ $BC^2=EC\cdot DC$

ב) בניית עזר : $AF\perp CD$ $\leftarrow$ ABFE מלבן $\leftarrow$ $EF=AB=4$ ס"מ .

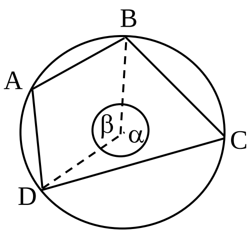
נתון : $CD=8$ ס"מ $\leftarrow$ $CE+FD=4$ . הטרפז שווה שוקיים $\leftarrow$ $CE=FD=2$ ס"מ .

מסעיף א : $BC^2=EC\cdot DC=2\cdot 8=16$ $\leftarrow$ $BC=AD=4$ ס"מ.

משולש BCE : $CE=\frac{1}{2}BC=2$ $\leftarrow$ $\measuredangle CBE=30^\circ$ הזווית החדה מול ניצב השווה

לחצי היתר במשולש ישר זווית, היא $30^\circ$ $\leftarrow$ $\measuredangle C=\measuredangle D=60^\circ$ , $\measuredangle B=\measuredangle A=120^\circ$

## פתרון שאלה 5

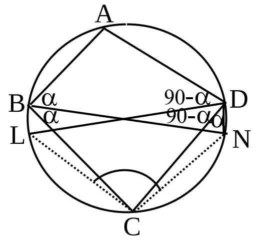



א) צריך להוכיח כי סכום שתי זוויות נגדיות במרובע

חסום במעגל הוא $180^\circ$ : $\measuredangle A+\measuredangle C=180^\circ$ .

$\measuredangle A=\frac{1}{2}\alpha$ , $\measuredangle C=\frac{1}{2}\beta$ (זווית היקפית שווה
לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת).

$\alpha+\beta=360^\circ$ (משלימות למעגל) $\leftarrow$ $\measuredangle A+\measuredangle C=180^\circ$




ב) ABCD מרובע חסום במעגל.

DL חוצה את הזווית ADC , BN חוצה את הזווית ABC .

<u>צריך לחשב</u> את הזווית LCN .

נסמן $\measuredangle ABC=2\alpha$ $\leftarrow$ $\measuredangle ABN=\measuredangle NBC=\alpha$

$\measuredangle ADC=180^\circ-2\alpha$ (זוויות נגדיות במרובע חסום) $\leftarrow$ $\measuredangle ADL=\measuredangle LDC=90^\circ-\alpha$ .

$\measuredangle CDN=\measuredangle CBN=\alpha$ (זוויות היקפיות על CN) $\leftarrow$ $\measuredangle LDN=90^\circ-\alpha+\alpha=90^\circ$

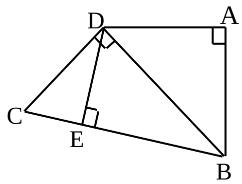
$\leftarrow$ $\measuredangle LCN=90^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע LDNC החסום במעגל).

<u>פתרון שאלה 6</u>

נחשב את שטח המרובע כסכום השטחים של 3 משולשים:

<u>$\Delta CDE$</u> : $\measuredangle CDE=\alpha$ $\leftarrow$ $CE=m\,tg\,\alpha$ $\leftarrow$ $S_{\Delta CDE}=\frac{CE\cdot DE}{2}=\frac{m^2 tg\alpha}{2}$

<u>$\Delta BDE$</u> : $BE=\frac{m}{tg\alpha}$ ; $BD=\frac{m}{\sin\alpha}$ $\leftarrow$ $S_{\Delta BDE}=\frac{BE\cdot DE}{2}=\frac{m^2}{2tg\alpha}$




<u>$\Delta ABD$</u> : $AB=BD\cos\beta=\frac{m\cos\beta}{\sin\alpha}$ , $AD=BD\sin\beta=\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha}$

$\leftarrow$ $S_{\Delta ABD}=\frac{m^2\sin\beta\cdot\cos\beta}{2\sin^2\alpha}$

$\leftarrow$ $S_{ABCD}=\frac{m^2}{2}(tg\alpha+\frac{1}{tg\alpha}+\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha})$

<u>פתרון שאלה 7</u>

הפונקציה $f(x)=\sqrt{(a-x^2)(1+x^2)}$ מוגדרת בתחום $-1\le x\le 1$ .

א) (1) תחום ההגדרה $(a-x^2)(1+x^2)\ge 0$ . $(1+x^2)>0$ לכל x $\leftarrow$

$(a-x^2)\ge 0$ $\leftarrow$ $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ . נתון שהפונקציה מוגדרת בתחום

$-1\le x\le 1$ $\leftarrow$ $\sqrt{a}=1$ $\leftarrow$ $\underline{a=1}$

(2) נקודות חיתוך: $x=0$ $\leftarrow$ $y=\sqrt{a}=1$ $\leftarrow$ (0,1)

$y=0$ $\leftarrow$ $x=\pm 1$ $\leftarrow$ (1,0) , (-1,0)

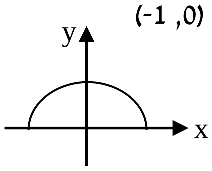
(3) נקודות קיצון: $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}=\sqrt{1-x^4}$

נמצא את סוג הקיצון: $x=0 \leftarrow -4x^3=0 \leftarrow f'(x)=\frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}}=0$

| x | x < 0 | 0 | x > 0 |
|---|---|---|---|
| y ‘ | + | 0 | – |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ |

נקודת מקסימום: (0 ,1) נקודות מינימום בקצות התחום: (1 ,0) , (-1 ,0)

(4) סקיצה של גרף הפונקציה:




ב) $g(x)=f'(x) \quad \leftarrow \quad g(x)=\frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}}$

(1) תחום הגדרה: $-1<x<1 \leftarrow 1-x^4>0$

(2) הפונקציה g(x) חיובית בתחום בו f(x) עולה ← $-1<x<0$

## פתרון שאלה 8

נתונה הפונקציה $y=b^2x^4-3x^2+8bx$.

א) שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת בנקודת ההשקה. נגזור את הפונקציה:

$y'=4b^2x^3-6x+8b$ ונציב $x=2$: $\underline{m}=4b^2\cdot 2^3-6\cdot 2+8b=\underline{32b^2+8b-12}$

ב) בנקודת קיצון שיפוע המשיק הוא אפס: $0=32b^2+8b-12 \rightarrow \underline{b=0.5\ ,\ -0.75}$

לגבי כל ערך של b נוודא כי אכן $x=2$ היא נקודת קיצון.

$b=-0.75 \rightarrow y'=2.25x^3-6x-6$    y': – (2) +    $x=2$ נק' מינימום

$b=0.5 \rightarrow y'=x^3-6x+4$    y': – (2) +    $x=2$ נק' מינימום

ג) נסמן את הפונקציה המתארת את השיפוע ב- m: $m=32b^2+8b-12$

נגזור את הפונקציה, משתנה הגזירה הוא b: $m'=64b+8$

ונשווה את הנגזרת לאפס: $0=64b+8 \rightarrow \underline{b=-0.125}$ נבדוק את סוג הקיצון:

| b | b < -0.125 | -0.125 | b > -0.125 |
|---|---|---|---|
| y ' | – | 0 | + |
| y | ↘ | מינימום | ↗ |

השיפוע מינימלי עבור b = -0.125

## פתרון שאלה 9

א) $f(x)=\frac{4x-4}{x^2+3} \rightarrow f'(x)=\frac{4(x^2+3)-2x(4x-4)}{(x^2+3)^2}=\frac{-4x^2+8x+12}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$ ← $-4(x^2-2x-3)=0$ ← $x=3\,,\ x=-1$

נמצא את סוג הקיצון: $f(3)=\frac{4\cdot3-4}{3^2+3}=\frac{2}{3}$ , $f(-1)=\frac{4\cdot(-1)-4}{(-1)^2+3}=-2$

| x | x<-1 | -1 | -1<x<3 | 3 | x>3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | – | 0 | + | 0 | – |
| y | ↘ | מינימום | ↗ | מקסימום | ↘ |

נקודת מינימום: $(-1\,,\,-2)$ , נקודת מקסימום: $(3\,,\,\frac{2}{3})$

ב) הפונקציה $f'(x)$ חיובית בתחום בו $f(x)$ עולה: $-1<x<3$

הפונקציה $f'(x)$ שלילית בתחום בו $f(x)$ יורדת: $x>3$ או $x<-1$

ג) גרף הפונקציה $f'(x)$ חותך את ציר x בנקודות הקיצון של $f(x)$, $x=3\,,\ x=-1$

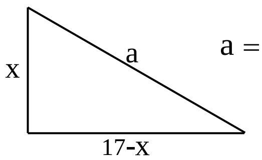
$$S=\int_{-1}^{3}f'(x)dx=f(x)\Big|_{-1}^{3}=f(3)-f(-1)=\frac{2}{3}-(-2)=2\frac{2}{3}$$

## מבחן 26

### פתרון שאלה 1

נתון משולש ישר זווית. סכום הניצבים הוא 17 ס"מ ← ניצב אחד הוא x והשני $17-x$.

נשתמש במשפט פיתגורס לחישוב אורך היתר:




$a^2=x^2+(17-x)^2=289-34x+2x^2$ ← $a=\sqrt{289-34x+2x^2}$

נגדיל כל ניצב ב- 10% ← אורכי הניצבים הם:

$1.1x$ ו- $1.1(17-x)$ ← אורך היתר:

$$\sqrt{1.1^2x^2+1.1^2(17-x)^2}=\sqrt{1.1^2[x^2+(17-x)^2]}=1.1\cdot\sqrt{289-34x+2x^2}=1.1a$$

היתר החדש ארוך ב- 1.3 ס"מ מהיתר המקורי ←

$$\sqrt{289-34x+2x^2}+1.3=1.1\cdot\sqrt{289-34x+2x^2} \leftarrow 1.3=0.1\cdot\sqrt{289-34x+2x^2}$$

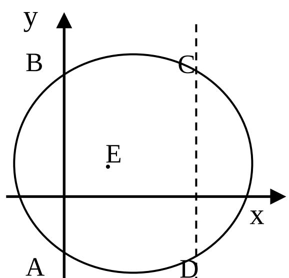
נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל: $1.69=2.89-0.34x+0.02x^2$ ← $x=5\,,\ x=12$

אורכי הניצבים: <u>12 ס"מ , 5 ס"מ</u> אורך היתר: $\sqrt{5^2+12^2}=$ <u>13 ס"מ</u>

### פתרון שאלה 2

נתון המעגל $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ ←

מרכז המעגל: $E(3\,,\,1)$ ורדיוס: $R=5$ .



ציר y חותך את המעגל בנקודות A ו- B ←

נציב במשוואת המעגל x = 0 ונקבל :

$(0-3)^2+(y-1)^2=25$ ← $(y-1)^2=16$ ←

y = 5 או y = -3 ← <u>A(0 , -3)</u> , <u>B(0 , 5)</u>

הישר x = 6 חותך את המעגל בנקודות C ו- D ← נציב במשוואת המעגל x = 6 ונקבל :

$(6-3)^2+(y-1)^2=25$ ← $(y-1)^2=16$ ← y = 5 או y = -3 ← <u>C(6 , 5)</u> , <u>D(6 , -3)</u>

א) נראה כי AC ו- BD הם קטרים במעגל בשתי דרכים שונות :

**I** נראה כי אורך הקטע AC גדול פי 2 מאורכו של רדיוס. $AC=\sqrt{(6-0)^2+[5-(-3)]^2}=10$

ראינו כי R = 5 לכן AC קוטר. **II** BD: נבדוק אם השיפועים של BE ושל ED שווים :

$m_{BE}=\frac{1-5}{3-0}=-\frac{4}{3}$ , $m_{ED}=\frac{1-(-3)}{3-6}=-\frac{4}{3}$ ← השיפועים שווים ←

BED קו ישר העובר במרכז המעגל ← BD קוטר.

ב) נמצא את השיפועים של AC ו- BD : $m_{AC}=\frac{-3-5}{0-6}=\frac{4}{3}$ , מסעיף א $m_{BD}=-\frac{4}{3}$

← מכפלת השיפועים שונה מ- 1– ולכן הם לא מאונכים .

ג) AD מקביל לציר x ← אורך הקטע AD הוא הפרש ערכי x בקצוות : AD = 6 – 0 = 6 .

הגובה ל- AD במשולש ACD הוא 5 – (-3) = 8 ← $S_{\Delta ACD}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$

BC מקביל לציר x ← אורך הקטע BC הוא הפרש ערכי x בקצוות : BC = 6 – 0 = 6 .

הגובה ל- BC במשולש BCE הוא 5 – 1 = 4 ← $S_{\Delta BCE}=\frac{6\cdot 4}{2}=12$ .

<u>פתרון שאלה 3</u>

נגדיר: A – אשה , $\overline{A}$ - גבר , B – הולך , $\overline{B}$ - רץ ← $P(\overline{A})=0.45$ , $P(A)=0.55$

$P(A/\overline{B})=0.25=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$ ← $P(A\cap\overline{B})=0.25P(\overline{B})$

$P(B/\overline{A})=0.4=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B\cap\overline{A})}{0.45}$ ← $P(B\cap\overline{A})=0.18$ נשלים את הטבלה :

| | אשה A | גבר $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| הולך B | 0.46 | 0.18 | 0.64 |
| רץ $\overline{B}$ | 0.09 | 0.27 | 0.36 |
| | 0.55 | 0.45 | 1 |

א) P(הולכים) = 0.64 ← 64% הולכים

ב) P(אשה/רצה) = $P(\overline{B}/A)=\frac{0.09}{0.55}=\underline{0.164}$

ג) לכל היותר 2 מהם רצים : אף אחד לא רץ <u>או</u> אחד מהם רץ <u>או</u> 2 מהם רצים.

ההסתברות שהתושב רץ בבוקר בטיילת: $P = 0.36$

ההסתברות שהתושב אינו רץ (הולך) בבוקר בטיילת: $P = 0.64$

על פי נוסחת ברנולי: P(אף אחד מהארבעה אינו רץ) $= 0.64^4 = 0.1677721$

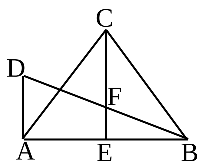
P(אחד מהארבעה רץ) $=\binom{4}{1}\cdot 0.36\cdot 0.64^3 = 0.3774873$

P(שניים מהארבעה רצים) $=\binom{4}{2}\cdot 0.36^2\cdot 0.64^2 = 0.3185049$

חיבור ההסתברויות נותן: <u>P(לכל היותר שניים מהם רצים)=0.864</u>

## <u>פתרון שאלה 4</u>

נתון משולש ABC שווה שוקיים $AB = AC$.



$CE \perp AB$ , $AD \perp AB$ (D היא נקודה כלשהי על האנך).

א) צ"ל: CE חוצה את BD (BN=ND)

ב) נתון גם: $AF = AD$ צ"ל: זווית ADB.

פתרון: א) נתון: $\measuredangle DAB = \measuredangle CEB = 90°$ ← $AD \parallel CE$.

$AB = AC$ , $CE \perp AB$ ← $AE = EB$ (הגובה לבסיס במש"ש הוא גם תיכון).

במשולש ADB הקטע EF הוא קטע אמצעים (יוצא מאמצע הצלע AB ומקביל לצלע AD)

← <u>BF = FD</u> מ.ש.ל.

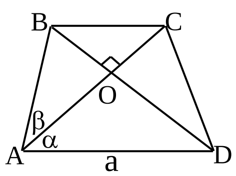
ב) $DAB = 90°$ $\measuredangle$ (נתון), $BF = FD$ (הוכחנו) ←

$AF = FD$ (תיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר)

$AF = AD$ (נתון) ← $AF = AD = FD$ (טרנזיטיביות) ← AFD משולש שווה צלעות

← $\measuredangle DAB = 60°$.

## <u>פתרון שאלה 5</u>



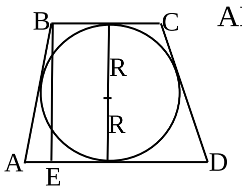
א) במשולש ישר זווית AOD: $\cos\alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{AO}{a}$ ← $AO = a\cdot\cos\alpha$

במשולש ישר זווית AOB: $tg\,\beta = \frac{BO}{AO}$

← $BO = AO\cdot tg\beta = a\cdot\cos\alpha\cdot tg\beta$

$\measuredangle BOC = \measuredangle DAC = \alpha$ זוויות מתחלפות בין מקבילים

במשולש ישר זווית BOC: $\sin\alpha = \frac{BO}{BC}$ ← $BC = \frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{a\cdot\cos\alpha\cdot tg\,\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha}$



ב) (1) במשולש ישר זווית AOB: $\cos\beta = \frac{AO}{AB}$ ← $AB = \frac{AO}{\cos\beta} = \frac{a\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}$

גובה הטרפז BE שווה לקוטר המעגל 2R

במשולש ישר זווית ABE: $\sin(\alpha+\beta) = \frac{BE}{AB} = \frac{2R}{AB}$

$\leftarrow \quad 2R = AB\cdot\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{a\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \quad \leftarrow \quad R = \dfrac{a\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\beta}$

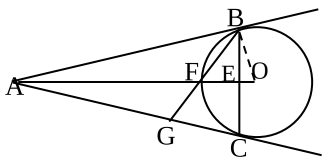
(2) במרובע חוסם מעגל סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות האחרות

$\leftarrow$ כדי לחשב את ההיקף מספיק לחבר את שני הבסיסים ולכול ב- 2

$$P = 2\cdot[a + \frac{a\cdot tg\beta}{tg\alpha}] = 2\cdot\frac{a\cdot tg\alpha + a\cdot tg\beta}{tg\alpha} = \frac{2a\cdot(tg\alpha+tg\beta)}{tg\alpha}$$

## פתרון שאלה 6

א) משפט : קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים ומאונך למיתר המחבר את נקודות ההשקה.




$\leftarrow \measuredangle BAO = \measuredangle CAO = 25^\circ \ , \ \measuredangle E = 90^\circ$

במשולש ישר זווית ABE : $\cos 25^\circ = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE}{10}$

$\leftarrow AE = 10\cdot\cos 25^\circ =$ 9.063 ס"מ

במשולש ישר זווית ABO : $\cos 25^\circ = \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{10}{AO} \quad \leftarrow \quad AO = \dfrac{10}{\cos 25^\circ} =$ 11.034 ס"מ

$OE = AO - AE = 11.034 - 9.063 =$ 1.97 ס"מ

ב) חישוב זוויות : $\measuredangle AOB = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ , $\measuredangle ABO = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק) ,

$\measuredangle OBE = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

$\Delta BOF$ משו"ש $\leftarrow \measuredangle OFB = \measuredangle OBF = 57.5^\circ \leftarrow \measuredangle CBG = 57.5^\circ - 25^\circ = 32.5^\circ$

$\measuredangle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ \leftarrow$ ב- $\Delta BCG$ : $\measuredangle G = 180^\circ - 65^\circ - 32.5^\circ = 82.5^\circ$

במשולש המבוקש מצאנו את כל הזוויות. נמצא את אורך הצלע BC .

במשולש ישר זווית ABE : $\sin 25^\circ = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BE}{10} \quad \leftarrow \quad BE = 10\cdot\sin 25^\circ =$ 4.226 ס"מ

$\leftarrow$ BC = 8.45 ס"מ . משפט הסינוסים : $\dfrac{8.45}{\sin 82.5^\circ} = \dfrac{BG}{\sin 65^\circ} \quad \leftarrow$ BG = 7.73 ס"מ

$\leftarrow S = 0.5\cdot 8.45\cdot 7.73\cdot\sin 32.5^\circ =$ 17.54 סמ"ר

## פתרון שאלה 7

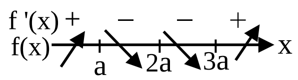
א) (1) תחום הגדרה : $x - 2a \ne 0 \quad \leftarrow \quad \underline{x \ne 2a}$

(2) $x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = \dfrac{0-3a^2}{0-2a} = 1.5a \quad \leftarrow \quad y = 0 \ , \quad \leftarrow \quad 0 = \dfrac{x^2-3a^2}{x-2a} \quad \leftarrow$

$x^2 - 3a^2 = 0 \leftarrow x = \pm a\sqrt{3}$ . נקודות החיתוך : $(0,1.5a)$ , $(a\sqrt{3},0)$ , $(-a\sqrt{3},0)$

(3) נגזור : $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-2a)-1\cdot(x^2-3a^2)}{(x-2a)^2} = \dfrac{2x^2-4ax-x^2+3a^2}{(x-2a)^2} = \dfrac{x^2-4ax+3a^2}{(x-2a)^2}$

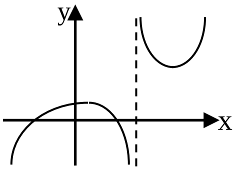
$f'(x) = 0 \quad \leftarrow \quad x^2 - 4ax + 3a^2 = 0 \quad \leftarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{2} = \dfrac{4a\pm 2a}{2}$



← $x = a$ או $x = 3a$ נמצא את סוג הקיצון:

מינימום $(3a , 6a)$ , מקסימום $(a , 2a)$

(4) על פי תחום ההגדרה האסימפטוטה היא: $\underline{x = 2a}$




ב) נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה בעזרת התוצאות שקבלנו בסעיף א:

ג) המשיקים בנקודות הקיצון הם: $y = 6a$ , $y = 2a$

המרחק בין המשיקים הוא: $6a - 2a = 4a$ ← $4a = 4$ ← $\underline{a = 1}$

ד) מהשרטוט רואים כי ערכי הפונקציה הם 6 ומעלה או 2 ← $k \le 2$ או $k \ge 6$

## פתרון שאלה 8

נסמן ב- $x$ את מספר התוספות של 20 יחידות מעל 100 יחידות

← מספר היחידות הנמכרות הוא $100 + 20x$ , מחיר יחידה הוא $50 - 2x$ ₪

← הפדיון של המפעל הוא: $y = (100 + 20x)(50 - 2x) = -40x^2 + 800x + 5000$

א) כדי לקבל פדיון מקסימלי נגזור: $y' = -80x + 800$ ונשווה לאפס $0 = -80x + 800$

← $x = 10$ . נבדוק את סוג הקיצון: $y'' = -80$ ← $y'' < 0$ ← מקסימום

← מספר היחידות שכדאי למפעל למכור: $100 + 20 \cdot 10 =$ <u>300 יחידות</u>

ב) מחיר יחידה $50 - 2 \cdot 10 =$ <u>30 ש"ח</u>

## פתרון שאלה 9

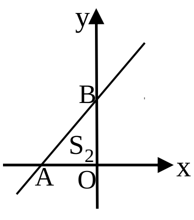
א) $x = 1$ ← $y = 1 + a$ ← נקודת ההשקה היא $(1 , 1 + a)$

נגזור את הפונקציה כדי למצוא את שיפוע המשיק: $y' = 3x^2$ ← $m = 3$

משוואת המשיק: $y - (1+a) = 3 \cdot (x - 1)$ ← $\underline{y = 3x + a - 2}$

ב) (1) $S_1 = \int_0^1 [x^3 + a - (3x + a - 2)]dx = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\Big|_0^1$

$S_1 = 0.25 - 1.5 + 2 - 0 = 0.75$




(2) $S_2$ הוא שטח משולש AOB

נקודה B: נציב $x = 0$ במשוואת המשיק ← $y = a - 2$

← אורך הניצב BO : $a - 2$

נקודה A: נציב $y = 0$ במשוואת המשיק ← $x = \frac{-(a-2)}{3}$ ← אורך הניצב AO:

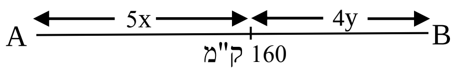
$\frac{(a-2)}{3}$ (הפכנו סימן כי ערך ה- $x$ של נקודה A שלילי ואורך הוא חיובי).

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-2)}{3} \cdot (a - 2) = \frac{(a-2)^2}{6}$

(3) $\frac{(a-2)^2}{6}=2\cdot 0.75$ $\leftarrow$ $a^2-4a+4=9$ $\leftarrow$ $a^2-4a-5=0$ $\leftarrow$ $\underline{a=5}$ או $\cancel{a=-1}$

## **מבחן 33**

### **פתרון שאלה 1**




$x$ - מהירות הרוכב הראשון היוצא מ- $A$

$y$ - מהירות הרוכב השני היוצא מ- $B$

עד הפגישה רכב השני 4 שעות ועבר דרך של $4y$ ק"מ. הראשון יצא שעה לפניו ולכן רכב

עד הפגישה 5 שעות ועבר דרך של $5x$ ק"מ. סה"כ עברו את כל הדרך: $5x+4y=160$ (1)

אחרי הפגישה: השני רוכב דרך של $5x$ במהירות $y$. זמן הרכיבה: $\frac{5x}{y}$.

הראשון רכב דרך של $4y$ במהירות $x$. זמן הרכיבה: $\frac{4y}{x}$.

נתון כי השני מגיע ל- $A$ $3\frac{2}{3}$ שעות לאחר שהראשון מגיע ל- $B$: $\frac{4y}{x}+3\frac{2}{3}=\frac{5x}{y}$ (2)

נסמן: $\frac{x}{y}=a$ , $\frac{y}{x}=\frac{1}{a}$ $\leftarrow$ $\frac{4}{a}+3\frac{2}{3}=5a\ /\cdot 3a$ $\leftarrow$ $15a^2-11a-12=0$ $\leftarrow$ $a=\frac{4}{3}$

$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$ $\leftarrow$ $4y=3x$.

נציב במשוואה (1): $5x+3x=160$ $\leftarrow$ $\underline{x=20\text{ קמ"ש}}$ $\underline{y=15\text{ קמ"ש}}$

### **פתרון שאלה 2**

נתונים שני מעגלים: $(x-8)^2+(y-4)^2=8$ , $(x-9)^2+(y-1)^2=10$

א) נפשט את משוואות המעגלים: $x^2-16x+y^2-8y+72=0$

$x^2-18x+y^2-2y+72=0$

למציאת נקודות החיתוך, נחסר את המשוואות: $2x - 6y = 0$ $\leftarrow$ $x = 3y$

נציב במשוואת המעגל הראשון: $(3y-8)^2+(y-4)^2=8$ $\leftarrow$

$9y^2-48y+64+y^2-8y+16=8$ $\leftarrow$ $10y^2-56y+72=0$ $\leftarrow$

בנקודות החיתוך: $y=3.6$ , $y=2$.

$x=3y$ $\leftarrow$ נקודות החיתוך: $\underline{A(10.8,\ 3.6)}$ , $\underline{B(6,\ 2)}$

ב) שיפוע AB: $m=\frac{3.6-2}{10.8-6}=\frac{1}{3}$ $\leftarrow$ משוואת הישר: $y-2=\frac{1}{3}(x-6)$ $\leftarrow$ $\underline{y=\frac{1}{3}x}$

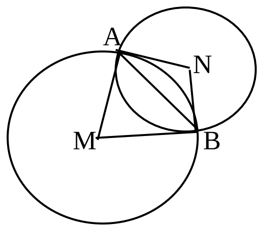
אורך המיתר: $AB=\sqrt{(10.8-6)^2+(3.6-2)^2}=\sqrt{25.6}=\underline{5.06}$

ג) מרכזי המעגלים: $M(8,4)$ ו- $N(9,1)$.

שיפוע הישר המחבר את מרכזי המעגלים: $m=\frac{4-1}{8-9}=-3$

שיפוע המיתר AB: $y=\frac{1}{3}x$ $\leftarrow$ $m=\frac{1}{3}$

מכפלת השיפועים של שני הישרים היא 1- ← הישרים מאונכים זה לזה .




ד) קטע המרכזים מאונך ל – AB ←
שטח המרובע ANBM הוא חצי
מכפלת האלכסונים .

$$MN = \sqrt{(9-8)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$

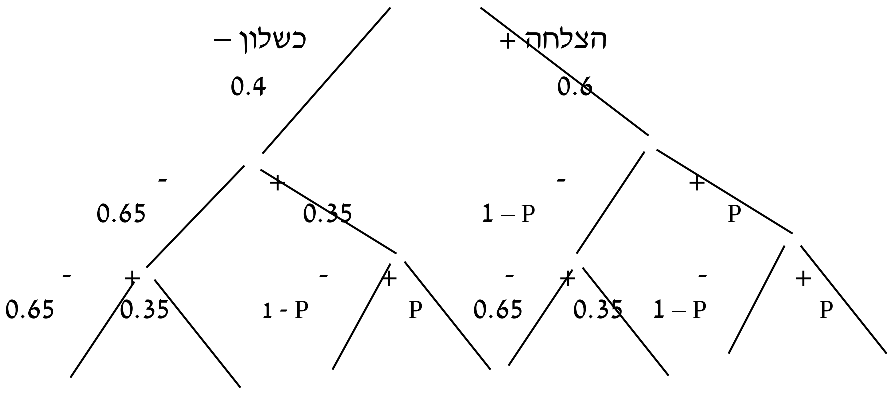
בסעיף ב חישבנו את אורך AB : $AB = 5.06$

$S = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{5.06 \cdot 3.16}{2} = 8$ סמ"ר

## פתרון שאלה 3

נסמן : ההסתברות שהניסוי יכשל : p ← ההסתברות שהניסוי יצליח : 1.5p

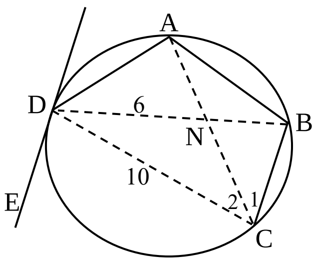
$1.5p + p = 1$ ← $2.5p = 1$ ← $p = 0.4$ (כשלון) , $p = 0.6$ (הצלחה)




א) 3 הצלחות : $0.6 \cdot P^2 = 0.294$ ← $P = 0.7$

ב) יותר הצלחות ב- 3 ניסויים ← 2 או 3 הצלחות.

$$P = 0.294 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.35 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.35 \cdot 0.7 = 0.581$$
(+ + +) (+ - +) (+ + -) (- + + )




## פתרון שאלה 4

DE משיק למעגל ← $\measuredangle EDC = \measuredangle DBC$

(זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית
הנשענת על המיתר מצידו השני).

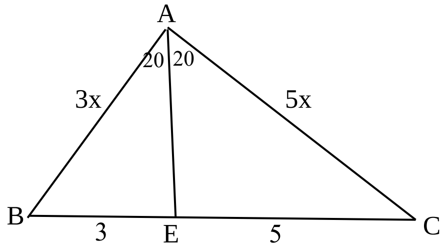
$DE \| BC$ ← $\measuredangle EDC = \measuredangle DCB$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים) ← $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB$ ←

BD=DC = 10 ס"מ (מול זוויות שוות במשולש, מונחות צלעות שוות. ← BN = 4 ס"מ .

נתון : AD=AB ← $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$ (על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות).

← CN הוא חוצה זווית C במשולש BDC ← על פי תכונת חוצה זווית במשולש :

$\frac{DN}{NB}=\frac{DC}{BC}$ ← $\frac{6}{4}=\frac{10}{BC}$ ← $\underline{BC = 6\frac{2}{3}}$ ס"מ




## פתרון שאלה 5

EA חוצה זווית במשולש ABC ←

$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}=\frac{3}{5}$ (חוצה זווית במשולש מחלק

את הצלע שמול לזווית לשני חלקים המתייחסים זה לזה כיחס הצלעות הכולאות את הזווית).

נסמן : $AC = 5x$ , $AB = 3x$ .

א) משפט הקוסינוסים במשולש ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A$

← $8^2 = (3x)^2 + (5x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5x\cdot \cos 40°$

$64 = 9x^2 + 25x^2 - 22.98x^2$ ← $64 = 11.02x^2$ ← $x^2 = 5.81$ ← $x = 2.41$

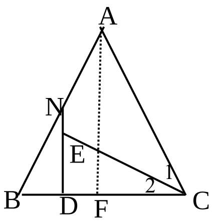
$AB = 3x = 3\cdot 2.41 = 7.23$ ← $\underline{AB = 7.23}$ ס"מ

ב) רדיוס המעגל החוסם את משולש ACE :

$\frac{CE}{\sin 20°} = 2R$ ← $R=\frac{5}{2\text{sun}20°}$ ← $R = 7.31$ ס"מ

## פתרון שאלה 6

ABC משולש שווה שוקיים. זווית הראש היא $\measuredangle A = 2\alpha$ . נמצא את הזוויות בשרטוט :




$\measuredangle B = \measuredangle ACB = 90° - \alpha$ , $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2 = 45° - 0.5\alpha$ ,

$\measuredangle D = 90°$ ← $\measuredangle BND = \alpha$ . נעביר AF גובה ל- BC.

ND קטע אמצעים במשולש ABF (N אמצע צלע AB ו- $ND||AF$ )

← $AF = 2ND = 2a$ .

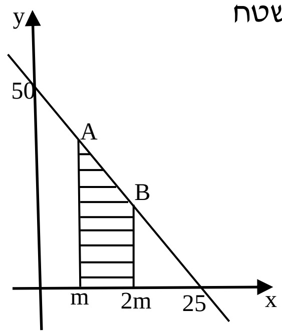
א) במשולש AFC : $\frac{CF}{AF} = \text{tg}\,\alpha$ ← $BF = CF = 2a\text{tg}\alpha$ ← $FD = \underline{BD = a\text{tg}\alpha}$

$BC = 2FC$ ← $\underline{BC = 4a\text{tg}\alpha}$

ב) במשולש DEC : $DC = 3a\text{tg}\alpha$ , $\frac{DE}{DC} = \text{tg}(45 - 0.5\alpha)$ ← $DE = 3a\text{tg}\alpha\ \text{tg}(45 - 0.5\alpha)$

$S_{\Delta DEC} = 0.5\cdot DC\cdot DE = 0.5\cdot 3a\ \text{tg}\alpha\cdot 3a\ \text{tg}\alpha\ \text{tg}(45° - 0.5\alpha) = 4.5a^2\text{tg}\,\alpha\ \text{tg}(45° - 0.5\alpha)$

## פתרון שאלה 7




נתונה הפונקציה f(x)=50 - 2x . עלינו למצוא את m שעבורו השטח

המקווקו מקסימלי $(0 < m < 12.5)$ . הנקודות A ו- B נמצאות

על גרף הפונקציה : $A(m\ ,50 - 2m)$ , $B(2m\ ,50 - 4m)$ .

א) השטח המקווקו הוא שטח טרפז :

בסיסי הטרפז : $50-2m$ ו- $50-4m$ . גובה הטרפז : $2m - m = m$

$$S=\frac{1}{2}\cdot(50-2m+50-4m)\cdot m=50m-3m^2$$

נגזור את הפונקציה למציאת נקודת המקסימום : $S'=50-6m$

$S'=0$ $\leftarrow$ $m=8\frac{1}{3}$ . נוודא שהשטח מקסימלי : $S''=-6<0$

השטח המקסימלי מתקבל עבור $\underline{m=8\frac{1}{3}}$ .

ב) $y=\frac{a}{25}x^2+bx$ נציב $x=m=8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$ : $y=\frac{a}{25}\cdot(\frac{25}{3})^2+b\cdot\frac{25}{3}=\frac{25(a+3b)}{9}$

$\leftarrow$ נקודת ההשקה : $(\frac{25}{3},\frac{25(a+3b)}{9})$

שיפוע המשיק : $y'=\frac{2ax}{25}+b$ $\leftarrow$ $m=y'(\frac{25}{3})=\frac{2a}{3}+b$

המשיק הוא $f(x)=50-2x$ $\leftarrow$ $m=-2$ $\leftarrow$ $\frac{2a}{3}+b=-2$ $\leftarrow$ $2a+3b=-6$

קשר נוסף בין הפרמטרים : $\frac{25(a+3b)}{9}=\frac{100}{3}=\frac{25}{3}\cdot 2-50=f(\frac{25}{3})$ $\leftarrow$

$300=25(a+3b)$ נחלק ב- 25 $\leftarrow$ $a+3b=12$ וגם $2a+3b=-6$

פתרון המשוואות : $a=-18$ , $b=10$

**פתרון שאלה 8**

א) $y=\frac{2x}{x^2-15x+a}$ $\leftarrow$ $y'=\frac{2(x^2-15x+a)-2x(2x-15)}{(x^2-15x+a)^2}$

$$y'=\frac{2x^2-30x+2a-4x^2+30x}{(x^2-15x+a)^2}=\frac{-2x^2+2a}{(x^2-15x+a)^2}.$$

נציב בנגזרת $x=6$ ונשווה לאפס : $-2\cdot 36+2a=0$ $\leftarrow$ $a=36$

הפונקציה : $y=\frac{2x}{x^2-15x+36}$

ב) (1) תחום הגדרה : $x^2-15x+36\neq 0$ $\leftarrow$ $x\neq 12, x\neq 3$

(2) נקודות קיצון : נציב את a בנגזרת שמצאנו בסעיף א : $y'=\frac{-2x^2+72}{(x^2-15x+36)^2}$

$y'=0$ $\leftarrow$ $x^2=36$ $\leftarrow$ $x=-6$ , $x=6$

$$y(6)=\frac{2\cdot 6}{6^2-15\cdot 6+36}=-\frac{2}{3} \quad , \quad y(-6)=\frac{2(-6)}{(-6)^2-15(-6)+36}=-\frac{2}{27}$$

נמצא את סוג הקיצון :

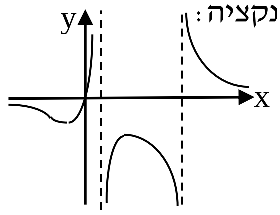
| x | x<-6 | -6 | -6<x<3 | 3 | 3<x<6 | 6 | 6<x<12 | 12 | x>12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | – | 0 | + | | + | 0 | – | | – |
| y | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |

נקודת מינימום $(-6,-\frac{2}{27})$ , נקודת מקסימום $(6,-\frac{2}{3})$

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים: אנכיות על פי תחום ההגדרה $x=12\ ,\ x=3$

אופקית: $y=0 \leftarrow y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-15x+36}=0$

ג) סקיצה של גרף הפונקציה:




ד) משיק בנקודה $x=2$: $(2\ ,0.4)$ נקודת ההשקה $\leftarrow y=\frac{2\cdot 2}{2^2-15\cdot 2+36}=0.4$

שיפוע המשיק: $m=y'(2)=\frac{-2\cdot 2^2+72}{(2^2-15\cdot 2+36)^2}=0.64$

משוואת המשיק: $y=0.64x-0.88 \leftarrow y-0.4=0.64(x-2)$

חיתוך עם האסימפטוטות: $x=1.375 \leftarrow 0=0.64x-0.88 \leftarrow y=0$

$y=7.68-0.88=6.8 \leftarrow x=12$

$y=1.92-0.88=1.04 \leftarrow x=3$

נקודות החיתוך: $(1.375\ ,0)$ , $(3\ ,1.04)$ , $(12\ ,6.8)$

**פתרון שאלה 9**

א) $f(x)=\int(2x-2)dx=x^2-2x+c$

נקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=-4x$: $-4x=x^2-2x+c$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4c}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{1-c}}{2}=1\pm\sqrt{1-c} \leftarrow x^2+2x+c=0$

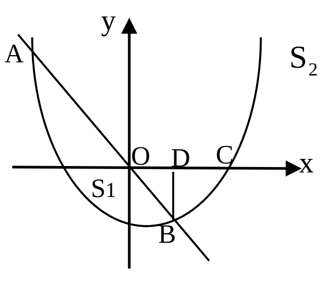
ההפרש בין ערכי x הוא 6: $2\sqrt{1-c}=6 \leftarrow 1+\sqrt{1-c}-(1-\sqrt{1-c})=6$

$f(x)=x^2+2x-8 \leftarrow c=-8 \leftarrow 1-c=9 \leftarrow \sqrt{1-c}=3$

ב) $S_1=\int_{-4}^{2}[-4x-(x^2-2x-8)]dx=-\frac{x^3}{3}-x^2+8x\Big|_{-4}^{2}=(-\frac{8}{3}-4+16)-(\frac{64}{3}-16-32)$

$S_1=36$

נעביר את BD אנך לציר x. האנך מחלק את השטח $S_2$ למשולש BOD ולשטח BCD:




$S_2=S_\Delta+\int_{2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\frac{2\cdot 8}{2}+(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x)\Big|_{2}^{4}=$

$S_2=8+(-\frac{64}{3}+16+32)-(-\frac{8}{3}+4+16)=17\frac{1}{3}$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{36}{17\frac{1}{3}}=\frac{27}{13}$$

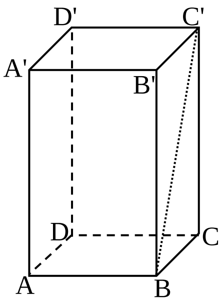
## מבחן 35

### פתרון שאלה 1

נסמן: $AB = x$ . הצלע BC ארוכה מהצלע AB ב- 20% $\leftarrow$ $BC=\frac{120x}{100}=1.2x$

הצלע 'CC ארוכה מהצלע AB ב- 60% $\leftarrow$ $CC'=\frac{160x}{100}=1.6x$

נתון: $BC' = 10$ . נשתמש במשפט פיתגורס במשולש ישר הזווית 'BCC:




$(1.2x)^2+(1.6x)^2=10^2$ $\leftarrow$ $1.44x^2+2.56x^2=100$

$4x^2=100$ $\leftarrow$ $x^2=25$ $\leftarrow$ $x=5$

AB = 5 ס"מ , BC = 6 ס"מ , CC' = 8 ס"מ

נפח התיבה: $V=5\cdot6\cdot8=$ 240 סמ"ק

שטח הפנים של התיבה: $2\cdot(5\cdot6+5\cdot8+6\cdot8)=$ 236 סמ"ר

### פתרון שאלה 2

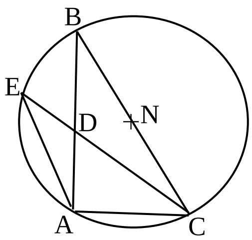
הנקודות A(4, 5) , B(16, -1) , C(-2, -7) הן קדקודי משולש.

א) צ"ל: המשולש ישר זווית. נחשב את שיפועי הצלעות:

$$m_{AB}=\frac{-1-5}{16-4}=-\frac{1}{2}\ ,\ m_{BC}=\frac{-1-(-7)}{16-(-2)}=\frac{1}{3}\ ,\ m_{AC}=\frac{-7-5}{-2-4}=2$$

מכפלת שיפועי הצלעות AB ו- AC היא 1- $\leftarrow$ $AC\perp AB$ $\leftarrow$ המשולש ישר זווית.

ב) צ"ל: את משוואת המעגל החוסם את המשולש




מרכז המעגל הוא אמצע היתר BC:

$x=\frac{-2+16}{2}=7\ ,\ y=\frac{-7+(-1)}{2}=-4$ $\leftarrow$ N(7, -4)

רדיוס המעגל הוא המרחק של N מכל אחד מהקדקודים:

$R = NA = NB = NC$ .

$$R^2=AN^2=(7-4)^2+(-4-5)^2=90$$

משוואת המעגל: $\underline{(x-7)^2+(y+4)^2=90}$

ג) הנקודה D היא אמצע AB: D(10 ,2) .

משוואת CE: $m=\frac{-7-2}{-2-10}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ $\leftarrow$ $y-2=\frac{3}{4}(x-10)$ $\leftarrow$ $y=\frac{3}{4}x-5\frac{1}{2}$

הנקודה E היא נקודת החיתוך של המעגל והישר CE: $(x-7)^2+(\frac{3}{4}x-5\frac{1}{2}+4)^2=90$

$$x^2-14x+49+\frac{9x^2-36x+36}{16}=90 \quad\leftarrow\quad (x-7)^2+\left(\frac{3x-6}{4}\right)^2=90$$

פתרון המשוואה: $x = 12.4$ , $\cancel{x = -2}$ (נקודה C)

$. E(12.4\ ,3.8) \quad\leftarrow\quad y=\frac{3}{4}\cdot 12.4-5\frac{1}{2}=3.8$

אורך AE: $AE=\sqrt{(12.4-4)^2-(3.8-5)^2}=\sqrt{72}=8.49$

## פתרון שאלה 3

נגדיר את המאורעות: A – חולה , B – מגיב חיובית לבדיקה

90% מהחולים מגיבים חיובית $\leftarrow$ $P(B/A)=0.9$

מספר המגיבים חיובית מבין הבריאים קטן פי 7.5 ממספר המגיבים שלילית

$\leftarrow$ $P(\bar{B}/\bar{A})=7.5P(B/\bar{A})$

15% חולים באוכלוסיה $\leftarrow$ $P(A)=0.15$ $\leftarrow$ $P(\bar{A})=0.85$

$$P(A\cap B)=0.135 \quad\leftarrow\quad \frac{P(A\cap B)}{0.15}=0.9 \quad\leftarrow\quad P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$7.5P(B\cap\bar{A})=P(\bar{B}\cap\bar{A}) \quad\leftarrow\quad \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})}=7.5\cdot\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$$

$$0.85=P(B\cap\bar{A})+7.5P(\bar{B}\cap\bar{A}) \quad\leftarrow\quad P(A)=P(B\cap\bar{A})+P(\bar{B}\cap\bar{A})$$

$\leftarrow$ $P(B\cap\bar{A})=0.1$ נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.135 | 0.1 | 0.235 |
| $\bar{B}$ | 0.015 | 0.75 | 0.765 |
| | 0.15 | 0.85 | 1 |

א) $P(\bar{A}\cap B)=\underline{\underline{0.1}}$

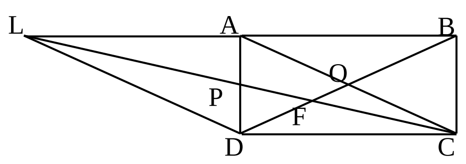
ב) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.135}{0.235}=0.57$ $\leftarrow$ 57% מבין המגיבים חיובית לבדיקה הם חולים.

ג) ההסתברות שאדם, שידוע שהוא חולה, מגיב חיובית לבדיקה: $P(B/A)=0.9$

על פי נוסחת ברנולי: $P(4)=\binom{5}{4}\cdot 0.9^4\cdot 0.1=0.32805$

ההסתברות ש- 4, מתוך 5 החולים שנבחרו באקראי, מגיבים חיובית היא 0.32805.

## פתרון שאלה 4




נתון: ABCD מלבן , AC||DL

AB=8 ס"מ , AC=3 ס"מ

א) צ"ל את שטח המשולש DLP.

ABCD מלבן (נתון) ← $AB \parallel DC$ (צלעות נגדיות במלבן)

$AC \parallel DL$ (נתון) ← ACDL מקבילית (שני זוגות של מקבילים)

AD הוא גובה לצלע CD של המקבילית ← $S_{ACDL} = 8 \cdot 3 = 24$ סמ"ר

$\Delta LDC \cong \Delta CAL$ (צ.צ.צ.) ← $S_{\Delta LDC} = S_{\Delta CAL} = \frac{24}{2} = 12$ סמ"ר

LP=PC (אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה) ←

$S_{\Delta DLP} = \frac{12}{2} = 6$ סמ"ר (תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח)

ב) $S_{\Delta BCD} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ סמ"ר , BO=OD (אלכסונים במלבן חוצים זה את זה) ←

$S_{\Delta COD} = \frac{12}{2} = 6$ סמ"ר (תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח) ← $S_{\Delta COD} = S_{\Delta DCP}$

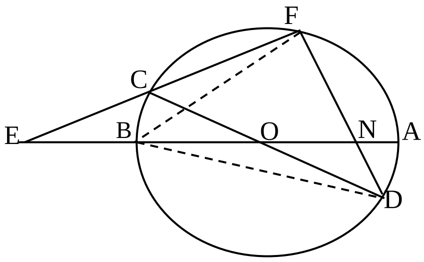
נחסר משני השטחים את שטח משולש DFC ונקבל $S_{\Delta FOC} = S_{\Delta DPF}$

$S_{\Delta APC} = \frac{CD \cdot AD}{4}$ (התיכון CP במשולש ADC מחלק לשני משולשים שווי שטח)

$S_{\Delta BOC} = \frac{CD \cdot AD}{4}$ (רבע משטח המלבן ABCD) ← $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta APC}$

**פתרון שאלה 5**

א) $\measuredangle FBD = \measuredangle FCD$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת




$\measuredangle FBD = \measuredangle FNB$ נתון

← $\measuredangle FNB = \measuredangle FCD$

← $\measuredangle ECO = \measuredangle OND$ צמודות לזוויות שוות

$\measuredangle NOD = \measuredangle COE$ זוויות קדקדיות

← $\Delta COE \sim \Delta NOD$ על פי משפט דמיון ז. ז מ.ש.ל א'

ב) $\measuredangle FBD = \measuredangle FNB$ נתון

$\measuredangle CFD = \measuredangle NFE$ זווית משותפת

← $\Delta CDF \sim \Delta NEF$ על פי משפט דמיון ז. ז מ.ש.ל ב'

ג) מהדמיון שהוכחנו בסעיף ב' נקבל: $\frac{CD}{NE} = \frac{DF}{EF}$ . ונתון $CD = 2R$ $EF = 2R$

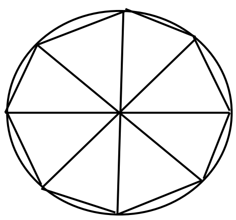
← $\frac{2R}{NE} = \frac{DF}{2R}$ ← $4R^2 = FD \cdot EN = 64$ ← <u>R = 4 ס"מ</u>

**פתרון שאלה 6**

היקף המתומן הוא סכום 8 הצלעות שלו ←

אורך צלע המתומן 10 ס"מ = 80 : 8 . נחלק את המתומן

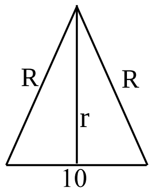
ל- 8 משולשים חופפים שווי שוקיים כך שקדקוד אחד של



כל משולש הוא מרכז המתומן ושני הקדקודים הנותרים
הם קדקודים סמוכים של המתומן. השוק של המשולש היא
R, רדיוס המעגל החוסם והבסיס הוא צלע המתומן.

א) זווית הראש של כל משולש היא $360^\circ : 8 = 45^\circ$ ← זווית בסיס היא $67.5^\circ$ .

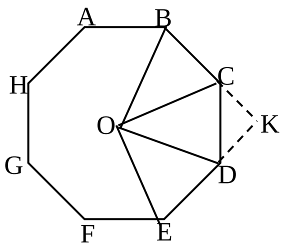
הגובה לבסיס r הוא גם תיכון וגם חוצה זווית.




$\frac{5}{R} = \cos 67.5$ ← $R = \frac{5}{\cos 67.5} = 13.066$ ס"מ

$\frac{r}{5} = tg\, 67.5$ ← $r = 5 \cdot tg\, 67.5 = 12.07$ ס"מ

שטח המתומן הוא 8 פעמים שטח משולש: $S = 8 \cdot \frac{10 \cdot 12.07}{2} = 482.84$ סמ"ר




ב) מסעיף א: $\measuredangle DCO = 67.5^\circ = \measuredangle BCO$ ←

$\measuredangle KCD = 45^\circ$ משלימה ל- $180^\circ$

כנ"ל: $\measuredangle EDO = \measuredangle CDO = 67.5^\circ$ ←

$\measuredangle KDC = 45^\circ$ משלימה ל- $180^\circ$

נשלים ל- $180^\circ$ את זוויות המשולש KCD:

$\measuredangle K = 90^\circ$ . נחשב את השוק: $\frac{CK}{CD} = \frac{CK}{10} = \sin 45^\circ$ ← $CK = DK = 5\sqrt{2}$

שטח המשולש: $S = \frac{1}{2} CK \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2})^2 = 25$

שטח המצולע הוא שטח המתומן + שטח המשולש: $S = 507.84$ סמ"ר .

היקף המצולע שווה לשבע צלעות של המתומן + השוקיים של המשולש:

$P = 7 \cdot 10 + 2 \cdot 5\sqrt{2} = 84.142$ ס"מ

## פתרון שאלה 7

א) $x = 5$ היא אסימפטוטה אנכית ← $5^2 - b = 0$ ← $b = 25$

נציב בפונקציה את b ואת הנקודה $(-4, -1)$: $-1 = \frac{-4+a}{(-4)^2-25}$ ← $a = 13$

← $f(x) = \frac{x+13}{x^2-25}$

ב) (1) נקודות חיתוך עם הצירים: $x = 0$ ← $f(0) = -\frac{13}{25}$ ← $(0, -\frac{13}{25})$

$y = 0$ ← $0 = x + 13$ ← $(-13, 0)$

(2) נקודות קיצון: $f'(x) = \frac{x^2-25-2x(x+13)}{(x^2-25)^2} = \frac{-x^2-26x-25}{(x^2-25)^2}$

$f'(x) = 0$ ← $-x^2 - 26x - 25 = 0$ ← $x = -25 , x = -1$

$f(-25) = \frac{-25+13}{(-25)^2-25} = -0.02$ , $f(-1) = \frac{-1+13}{(-1)^2-25} = -0.5$

נתחשב בתחום ההגדרה 5, -5 ≠ x ונמצא את סוג הקיצון :

| x | $x>5$ | 5 | $-1<x<5$ | -1 | $-5<x<-1$ | -5 | $-25<x<-5$ | -25 | $x<-25$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | – | | – | | + | | + | | – |
| y | ↘ | | ↘ | מקסי' | ↗ | | ↗ | מיני' | ↘ |

נקודת מקסימום : (-1 ,-0.5)  ,  נקודת מינימום : (-25 ,-0.02)

(3) תחומי עלייה : $-25 < x < -1$ , $x \neq -5$

תחומי ירידה : $x < -25$ או $x > -1$ , $x \neq 5$

ג) $g(x) = \frac{x+13}{x^2-25} - 3$ ← $g(x) = f(x) - 3$

נקודות קיצון : הנגזרת של שתי הפונקציות שווה ← ערך x בנקודות הקיצון וסוג הקיצון שווה. $g(x)$ בכל נקודה קטן ב- 3 מ- $f(x)$ ←

נקודת מקסימום : (-1 ,-3.5)  ,  נקודת מינימום : (-25 ,-3.02)

נקודת חיתוך עם ציר y : $f(0) = -\frac{13}{25}$ ← $g(0) = -3\frac{13}{25}$ ← $(0,-3\frac{13}{25})$

## פתרון שאלה 8

א) נסמן : $A(x,16-x^2)$ הפרבולה סימטרית לציר y ← $B(-x,16-x^2)$

גובה המשולש AOB הוא : $h = 16 - x^2$ , אורך הקטע AB הוא 2x .

$y = \frac{2x\cdot(16-x^2)}{2} = 16x - x^3$ (שטח המשולש AOB) ← $y' = 16 - 3x^2$

$y' = 0$ ← $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , $\cancel{-\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ (הנקודה A ברביע ראשון, $x > 0$)

נוודא שהנקודה היא נקודת מקסימום :

| x | $x > \frac{4\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ | $0 < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ |
|---|---|---|---|
| y ' | – | 0 | + |
| y | ↘ | מקסימום | ↗ |

השטח המקסימלי של המשולש מתקבל עבור $A(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{3})$ , $B(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{3})$

ב) $y = 16 - x^2$ ← $y' = -2x$ ← שיפוע המשיק בנקודה A הוא $m = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

משוואת המשיק : $y - \frac{32}{3} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}(x - \frac{4\sqrt{3}}{3})$ ← $y = -\frac{8\sqrt{3}}{3}x + \frac{64}{3}$

שיפוע המשיק בנקודה B הוא $m = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

משוואת המשיק: $y-\frac{32}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}(x+\frac{4\sqrt{3}}{3}) \quad \rightarrow \quad y=\frac{8\sqrt{3}}{3}x+\frac{64}{3}$

ג) נקודת החיתוך של המשיקים: $-\frac{8\sqrt{3}}{3}x+\frac{64}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}x+\frac{64}{3} \quad \rightarrow \quad C(0,\frac{64}{3})$

<u>משולש ABO</u>: $AB=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3} \quad , \quad h=16-x^2=\frac{32}{3}$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{32}{3}=\frac{128\sqrt{3}}{9}=24.63$$

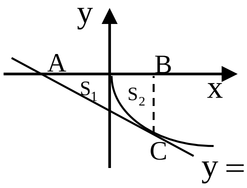
<u>משולש ABC</u>: גובה המשולש $h=\frac{64}{3}-\frac{32}{3}=\frac{32}{3} \quad , \quad AB=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{32}{3}=\frac{128\sqrt{3}}{9}=24.63$$

**פתרון שאלה 9**

א) (1) $f(x)=-\frac{2ax\sqrt{x}}{3} \quad \rightarrow \quad f'(x)=-\frac{2a\sqrt{x}+2ax\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3}=-\frac{2ax+ax}{3\sqrt{x}}=-\frac{3ax}{3\sqrt{x}}=-a\sqrt{x}$

(2) $y=f'(x)-a\sqrt{x}$ משיק בנקודה $x=9$: $y(9)=-3a \quad \rightarrow$ נקודת ההשקה $C(9,-3a)$




שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת בנקודת ההשקה:

$y'=\frac{-a}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad m=\frac{-a}{6}$

משוואת המשיק: $y-(-3a)=\frac{-a}{6}(x-9) \quad \rightarrow \quad y=-\frac{a}{6}x-1.5a$

נקודת החיתוך של המשיק עם ציר $x$: $0=\frac{-a}{6}x-1.5a \quad \rightarrow \quad \frac{a}{6}x=-1.5a \quad \rightarrow \quad x=-9$

שטח משולש ABC שווה לסכום $S_1+S_2 \quad \rightarrow \quad S_1+S_2=\frac{[9-(-9)]\cdot 3a}{2}=27a$

$S_2$ הוא השטח הכלוא בין ציר $x$ והפונקציה $y=-a\sqrt{x}$ :

$$S_2=\int_0^9[0-(-a\sqrt{x})]dx=\frac{ax^{1.5}}{1.5}\Big|_0^9=18a \quad \rightarrow \quad S_1=27a-18a=9a$$

$$S_1:S_2=9a:18a=1:2$$

ב) על פי הגרף הפונקציה הנגזרת שלילית לכל $x\ge 0$ $\rightarrow$

הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל $x\ge 0$ .

**מבחן 36**

**פתרון שאלה 1**

נארגן את הנתונים בטבלה:

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (ש') | דרך (ק"מ) |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| הלוך | x | $\frac{120}{x}$ | 120 |
| חזור | x + 40 | $\frac{120}{x+40}$ | 120 |

הדרך שנוסעת המכונית היא 240 ק״מ (הלוך וחזור)

זמן הנסיעה הלוך וחזור הוא $\frac{120}{x}+\frac{120}{x+40}=\frac{120x+120x+4800}{x(x+40)}=\frac{240x+4800}{x(x+40)}=\frac{240(x+20)}{x(x+40)}$

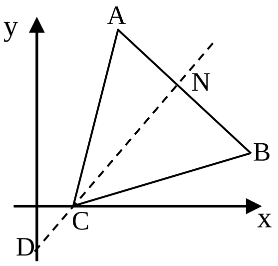
מהירות ממוצעת= $\frac{\text{הדרך הכוללת}}{\text{הזמן הכולל}}$ ← מהירות ממוצעת כפול זמן כולל = דרך כוללת

$240=\frac{240(x+20)}{x(x+40)}\cdot 96$ . נכפול במכנה: $240x(x+40)=240(x+20)\cdot 96$

נחלק ב- 240 : $x(x+40)=96(x+20)$ ← $x^2-56x-1920=0$

← $\cancel{x=-24}$ , $x=80$ . זמן הנסיעה מעיר א׳ לעיר ב׳ הוא: $\frac{120}{x}=\frac{120}{80}=$ <u>1.5 שעות</u>

<u>פתרון שאלה 2</u>




א) <u>נתון</u>: $A(3, 9)$ , $B(11, 3)$

<u>צ״ל</u>: את משוואת האנך לקטע AB.

נמצא את שיעורי נקודה N אמצע הקטע AB:

$y=\frac{3+9}{2}=6$ , $x=\frac{11+3}{2}=7$ ← $N(7,6)$

שיפוע הקטע AB: $m=\frac{3-9}{11-3}=-\frac{3}{4}$ ← שיפוע האנך הוא (הופכי ונגדי): $m=\frac{4}{3}$

משוואת האנך האמצעי על פי שיפוע ונקודה: $y-6=\frac{4}{3}(x-7)$ ← $\underline{y=\frac{4}{3}x-3\frac{1}{3}}$

ב) (1) האנך האמצעי חותך את ציר x בנקודה C. <u>צ״ל</u>: את שטח המשולש ABC.

נקודת החיתוך של האנך עם ציר x: $y=0$ ← $0=\frac{4}{3}x-3\frac{1}{3}$ ← $x=2.5$ ←

$C(2.5 , 0)$. CN הוא גובה במשולש ABC לכן שטח המשולש: $S=\frac{1}{2}AB\cdot CD$

אורך הצלע AB: $AB=\sqrt{(11-3)^2+(3-9)^2}=\sqrt{100}=10$

אורך הגובה NC: $CD=\sqrt{(7-2.5)^2+(6-0)^2}=\sqrt{56.25}=7.5$

שטח המשולש: $S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7.5=\underline{37.5}$

(2) אורך הצלע AC: $AC=\sqrt{(3-2.5)^2+(9-0)^2}=\sqrt{81.25}$

שיעורי הנקודה D: $(0,-3\frac{1}{3})$ ← $DC=\sqrt{2.5^2+(\frac{10}{3})^2}=\sqrt{17.36}$

$AD=\sqrt{3^2+(9+(\frac{10}{3})^2}=\sqrt{161.11}$

$\leftarrow$ היקף המשולש $\underline{P_{\Delta ADC} = 25.873}$

## פתרון שאלה 3

א) התפלגות בינומית. יש שתי אפשרויות: עולה חדש או אינו עולה חדש.

נסמן: p - ההסתברות שחייל שנבחר באקראי הוא עולה.

$p^5 = 0.00243 \rightarrow p = 0.3$ .

רוב לעולים החדשים, פירושו: 3, 4, או 5 עולים.

$$p(3) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^2 = 0.1323$$

$$p(4) = \binom{5}{4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7 = 0.02835$$

$$p(5) = 0.00243$$

ההסתברות שיהיה רוב לעולים: $p = p(3) + p(4) + p(5) = 0.16308$

ב) נסמן מאורעות: A – החייל הוא עולה חדש , B – החייל התנדב למשימה

40% מבין המתנדבים למשימה הם עולים $\leftarrow$ $P(A/B) = 0.4$

80% מהחיילים העולים התנדבו למשימה $\leftarrow$ $P(B/A) = 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.3}$

$P(A \cap B) = 0.24$ $\leftarrow$ $P(A/B) = 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{P(B)}$ $\leftarrow$ $P(B) = 0.6$

נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר:

| | $\overline{A}$ | A | |
|---|---|---|---|
| 0.6 | 0.36 | 0.24 | B |
| 0.4 | 0.34 | 0.06 | $\overline{B}$ |
| 1 | 0.7 | 0.3 | |

נמצא את אחוז המתנדבים למשימה מבין החיילים שאינם עולים חדשים:

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.36}{0.7} = 0.5143$ $\leftarrow$ $\underline{51.43\%}$

## פתרון שאלה 4

<u>נתון</u>: ABCD טרפז , AB = AD , BD = BC

AB = 6.25 ס״מ , CD = 16 ס״מ

<u>צ״ל</u>: א) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ ב) נתון: $S_{\Delta DBC} =$ 48 סמ״ר צ״ל $S_{\Delta ABD}$

<u>הוכחה</u>: א) AB=AD נתון $\leftarrow$ $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB = \alpha$ זוויות בסיס במש״ש

$AB \parallel CD$ נתון ABCD טרפז

$\leftarrow$ $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC = \alpha$ זוויות מתחלפות בין מקבילים + סימון

BD = BC נתון $\leftarrow$ $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = \alpha$ זוויות בסיס במש״ש

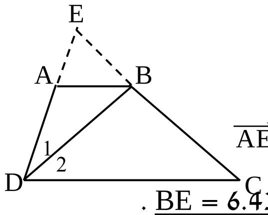
משי״ל א  .לפי משפט דמיון ז. ז  $\Delta ABD \sim \Delta BCD \leftarrow$

ב) נרשום את יחס הצלעות המתאימות במשולשים הדומים:

$$BD = 10 \quad \leftarrow \quad BD^2 = 100 \quad \leftarrow \quad \frac{6.25}{BD} = \frac{BD}{16}$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע היחס בין צלעות מתאימות:

$$\underline{S_{\Delta ABD} = 18.75 \text{ סמ״ר}} \quad \leftarrow \quad \frac{S_{\Delta ABD}}{48} = \left(\frac{6.25}{10}\right)^2 \quad \leftarrow \quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2$$




ג) $\Delta ABE \sim \Delta DCE \leftarrow AB \parallel CD$

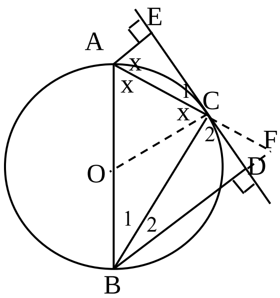
(זוויות מתאימות שוות. משפט דמיון ז. ז)

$$\frac{AE}{AE+6.25} = \frac{6.25}{16} \quad \leftarrow \quad \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} = \frac{BE}{EC} \quad \leftarrow$$

$$.\ \underline{BE = 6.41} \quad \leftarrow \quad \frac{BE}{BE+10} = \frac{AB}{DC} \quad .\ \underline{AE = 4.066} \quad \leftarrow$$

$$\measuredangle A = \measuredangle ACO = x \quad \leftarrow$$

**<u>פתרון שאלה 5</u>**




א) $\measuredangle B_1 = \measuredangle C_1 = \alpha$  זווית בין משיק למיתר שווה

לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר + סימון

$\measuredangle ACB = 90°$  זווית היקפית הנשענת על קוטר

$\leftarrow \quad \measuredangle C_2 = 90° - \alpha$  משלימה ל0 180 מעלות

נתון: $\measuredangle D = 90° \quad \leftarrow \quad \measuredangle B_2 = \alpha$ סכום הזוויות במשולש CDB $\quad \leftarrow \quad \measuredangle ABC = \measuredangle CBD$

ב) במשולש AOC: $OC = OA = R = 9$ , $\measuredangle A = \measuredangle ACO = x \quad \rightarrow \quad \measuredangle AOC = 180° - 2x$

$$\cos x = \frac{AC}{18} \quad \leftarrow \quad AC = 18\cos x \quad \leftarrow \quad \frac{9}{\sin x} = \frac{AC}{2\sin x \cdot \cos x} \quad \leftarrow \quad \frac{9}{\sin x} = \frac{AC}{\sin 2x}$$

משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה $\leftarrow \quad OC \perp CE \quad \leftarrow \quad OC \parallel AE$

$\leftarrow \quad \measuredangle ACO = \measuredangle CAE = x$  זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים

במשולש ACE: $\cos x = \frac{AE}{AC} = \frac{8}{AC} \quad \leftarrow \quad \frac{AC}{18} = \frac{8}{AC} \quad \leftarrow \quad AC^2 = 144$

$\leftarrow$ . <u>AC = 12 ס״מ</u>

ג) $\cos x = \frac{8}{AC} = \frac{8}{12} \quad \leftarrow \quad x = \measuredangle BAF = 48.19°$

$\measuredangle ABC = 90° - x = 41.81°$  סכום זוויות במשולש ABC .

מסעיף א' $\measuredangle ABC = \measuredangle CBD \quad \leftarrow \quad \measuredangle ABF = 83.62° \quad \leftarrow \quad \measuredangle F = 48.19°$

מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות $\leftarrow$ $AB = AF = 18$ ס״מ

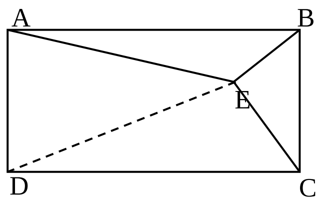
← במשולש ABF : $\frac{AF}{\sin 83.62} = \frac{18}{\sin 48.19}$ ← $AF = 24$

היקף המשולש : $P = 18 + 18 + 24 =$ <u>60 ס״מ</u>

ד) הזוויות חושבו בסעיף ג׳ : $\measuredangle BAC = 48.19°$ , $\measuredangle ABC = 41.81°$ , $\measuredangle ACB = 90°$

**<u>פתרון שאלה 6</u>**

א) במשולש ABE נמצא את זווית ABE בעזרת משפט הקוסינוסים :




$\measuredangle\ 7^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos ABE$ ←

$48\cos ABE = 24$ ← $\cos ABE = 0.5$

← $\measuredangle ABE = 60°$

ABCD הוא מלבן ← $\measuredangle B = 90°$ ← $\measuredangle CBE = 30°$

במשולש BCE נמצא את הצלע CE בעזרת משפט הקוסינוסים :

$CE^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 30°$ ← <u>CE = 2.83 ס״מ</u>

ב) באותו משולש נחשב את $\angle BCE$ בעזרת משפט הסינוסים : $\frac{2.83}{\sin 30°} = \frac{3}{\sin BCE}$

← $\measuredangle\ \sin BCE = \frac{3 \cdot \sin 30°}{2.83} = 0.53$ ← $\measuredangle BCE = 32°$ ← $\measuredangle DCE = 90° - 32° = 58°$

$$S_{\Delta CDE} = \frac{CE \cdot CD \cdot \sin DCE}{2} = \frac{2.83 \cdot 8 \cdot \sin 58°}{2} = 9.6$$

**<u>פתרון שאלה 7</u>**

א) לפונקציה $y = \frac{3x+A}{x^2-9}$ יש נקודת קיצון כאשר $x = 9$ ← $y'(9) = 0$

נגזור את הפונקציה : $y' = \frac{3(x^2-9)-2x(3x+A)}{(x^2-9)^2} = \frac{-3x^2-2Ax-27}{(x^2-9)^2}$

נציב בנגזרת $x = 9$ ונאפס : $0 = -243 - 18A - 27$ ← <u>$A = -15$</u> .

ב) נציב בפונקציה ובנגזרת את ערך A שמצאנו : $y = \frac{3x-15}{x^2-9}$ , $y' = \frac{-3x^2+30x-27}{(x^2-9)^2}$

נשווה את הנגזרת לאפס : $-3x^2 + 30x - 27 = 0$ ← $x = 1 , x = 9$

תחום ההגדרה של הפונקציה $x \neq \pm 3$ נמצא את סוג הקיצון :

| x | x<-3 | -3 | -3<x<1 | 1 | 1<x<3 | 3 | 3<x<9 | 9 | x > 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | - | | - | 0 | + | | + | 0 | - |
| y | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |

תחומי עליה: $1 < x < 9$ , $x \neq 3$

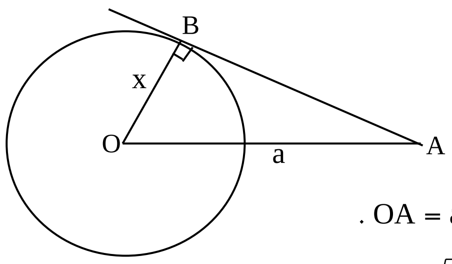
תחומי ירידה: $x > 9$ או $x < 1$ , $x \neq -3$

ג) נתון: $g'(x)=\frac{x^2-10x+9}{(x^2-9)^2}$ . מצאנו: $y'=\frac{-3x^2+30x-27}{(x^2-9)^2}=\frac{-3(x^2-10x+9)}{(x^2-9)^2}$

← $g'(x)=\frac{y'}{-3}$ ← $g(x)=\int g'(x)dx=\int \frac{y'}{-3}dx=\frac{3x-15}{-3(x^2-9)}+c=\frac{5-x}{x^2-9}+c$

$g(5)=0$ ← $0+c=0$ ← $c=0$ ← $g(x)=\frac{5-x}{x^2-9}$

## פתרון שאלה 8




AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B,

הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה

← הזווית B היא זווית ישרה.

נסמן ב- x את מחוג המעגל ← $OA = a$ , $OB = x$ .

משפט פיתגורס במשולש ABO: $AB=\sqrt{a^2-x^2}$

א) $y = x+\sqrt{a^2-x^2}$ (סכום המחוג והמשיק)

$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ . $y'=0$ ← $\sqrt{a^2-x^2}-x=0$

$\sqrt{a^2-x^2}=x$ נעלה בריבוע: $a^2-x^2=x^2$ ← $a^2=2x^2$ ← $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

נוודא שהנקודה היא נקודת מקסימום:

| x | $x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $x > \frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ' | + | 0 | – |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ |

ב) $y = x\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ (מכפלת המחוג והמשיק)

$y'=\sqrt{a^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$y'=0$ ← $a^2-2x^2=0$ ← $a^2=2x^2$ ← $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

נוודא שהנקודה היא נקודת מקסימום:

| x | $x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $x > \frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ' | + | 0 | – |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ |

## פתרון שאלה 9

א) $f'(x)=3x^2+6x-24$ ← $f(x)=\int(3x^2+6x-24)dx=x^3+3x^2-24x+c$

הפונקציה עוברת בנקודה (1 ,-2) ← $f(1)=1^3+3\cdot1^2-24\cdot1+c=-2$

← c = 18 ← $f(x)=x^3+3x^2-24x+18$

ב) נקודות קיצון : $f'(x)=3x^2+6x-24=0$ ← $x=-4\,,\ x=2$

$f(2)=2^3+3\cdot2^2-24\cdot2+18=-10$

$f(-4)=(-4)^3+3\cdot(-4)^2-24\cdot(-4)+18=98$ נמצא את סוג הקיצון :

| x | x<-4 | -4 | -4<x<2 | 2 | x>2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | + | 0 | – | 0 | + |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ | מינימום | ↗ |

נקודת מינימום : (2 ,-10) , נקודת מקסימום : (-4 ,98)

ג) בין הישרים x = 1 ו- x = 2 גרף הפונקציה מתחת לציר x. נתון : f(1) = -2

ומצאנו בסעיף ב' f(2) = -10 ← $S=\int_1^2-(x^3+3x^2-24x+18)dx$

$$S=-\frac{x^4}{4}-x^3+12x^2-18x\Big|_1^2=(-4-8+48-36)-(-\tfrac{1}{4}-1+12-18)=\underline{7.25}$$

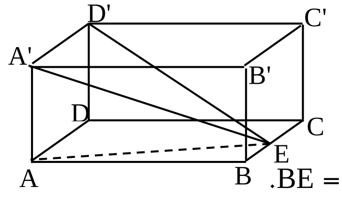
## מבחן 38

## פתרון תרגיל 1

א) נסמן : גובה התיבה x , צלע הריבוע x + 4 ← שטח כל פאה צדדית הוא x(x + 4) .

המעטפת מורכבת מארבע פאות הצדדיות ← 4 · x(x + 4) = 48

חילוק ב- 4 ופתיחת סוגריים : $x^2+4x-12=0$ ← x = 2 או $\cancel{x=-6}$




← גובה התיבה 2 ס"מ וצלע הבסיס הוא 6 ס"מ ←

נפח התיבה : V = 6 · 6 · 2 = 72 סמ"ק

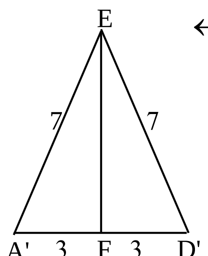
ב) ABE משולש ישר זווית שאורך ניצביו AB = 6 ס"מ , BE = 3 ס"מ.

נמצא את היתר שלו AE בעזרת משפט פיתגורס : $AE=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

AA' מאונך לבסיס התיבה ABCD ← AA' מאונך לכל ישר במישור הבסיס ←

A'AE משולש ישר זווית שאורך ניצביו $\sqrt{45}$ ס"מ ו- 2 ס"מ. (וגם משולש D'DE ישר זווית)

נמצא את היתר שלו A'E בעזרת משפט פיתגורס : $A'E^2=45+4=49$ ←



$A'E = D'E =$ 7 ס״מ .

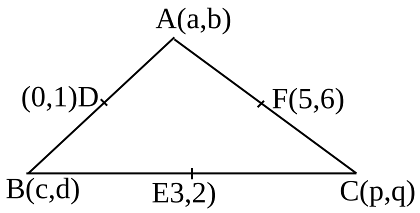
$EA'D'$ הוא משולש שווה שוקיים. אורך צלעותיו 6 ס״מ , 7 ס״מ , 7 ס״מ.

נמצא את שטחו : $EF$ גובה לבסיס ולכן גם תיכון.

על פי משפט פיתגורס $EF = \sqrt{49-9} = 6.325$ ← $S = \frac{6 \cdot 6.325}{2} = 18.975$

שטח החוצץ כ- 18.975 סמ״ר ולכן מחירו $2 \cdot 18.975$ ← <u>37.95 ₪ .</u>

**פתרון שאלה 2**




הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות במשולש ABC .

נסמן את שיעורי הקדקודים במשולש

כמתואר בשרטוט.

הנקודה D היא אמצע AB ←

$\frac{b+d}{2} = 1$ , $\frac{a+c}{2} = 0$ ← $a = -c$ , $b + d = 2$

הנקודה E היא אמצע BC ← $\frac{d+q}{2} = 2$ , $\frac{c+p}{2} = 3$ ← $c+p = 6$ , $d+q = 4$

הנקודה F היא אמצע AC ← $\frac{b+q}{2} = 6$ , $\frac{a+p}{2} = 5$ ← $a+p = 10$ , $b+q = 12$

נפתור את המשוואות : $c + p = 6$ ← $p = 6 - c$ . $a = -c$ , $a + p = 10$ ←

$-c + 6 - c = 10$ ← $c = -2$ ← $a = 2$ , $p = 8$ .

$b + d = 2$ ← $b = 2 - d$ . $d + q = 4$ ← $q = 4 - d$ . $b + q = 12$ ←

$2 - d + 4 - d = 12$ ← $d = -3$ ← $b = 5$ , $q = 7$ .

נציב בקדקודים את הערכים שקבלנו : <u>A(2 , 5)</u> , <u>B(-2, -3)</u> , <u>C(8 , 7)</u>

משוואת AB : $m = \frac{-3-5}{-2-2} = 2$ ← $y - 5 = 2(x-2)$ ← <u>$y = 2x + 1$</u>

משוואת AC : $m = \frac{7-5}{8-2} = \frac{1}{3}$ ← $y - 5 = \frac{1}{3}(x-2)$ ← <u>$y = \frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$</u>

משוואת BC : $m = \frac{-3-7}{-2-8} = 1$ ← $y - 7 = 1(x-8)$ ← <u>$y = x - 1$</u>

**פתרון שאלה 3**

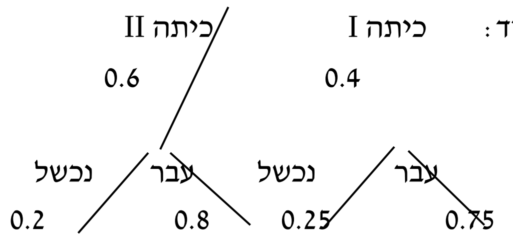
בכיתה הראשונה 20 תלמידים ובשנייה 30 תלמידים, סה״כ 50 תלמידים ← ההסתברות לבחור

באקראי תלמיד מהכיתה הראשונה היא $P = \frac{20}{50} = 0.4$ .

בכיתה הראשונה עברו את המבחן 15 מתוך 20 תלמידים ← $P = \frac{15}{20} = 0.75$

בכיתה השנייה עברו את המבחן 24 מתוך 30 תלמידים ← $P = \frac{24}{30} = 0.8$

נבחר תלמיד :




א) נסמן : A – התלמיד בכיתה II , B – התלמיד עבר את המבחן

ההסתברות שהתלמיד מכיתה II אם ידוע שעבר את המבחן : $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = 0.8\cdot 0.6 = 0.48 \quad , \quad P(B) = 0.4\cdot 0.75 + 0.6\cdot 0.8 = 0.78$

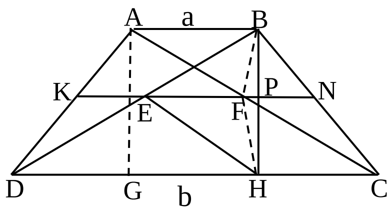
$\leftarrow \quad P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.48}{0.78} = \underline{0.61538}$

ב) $n = 4$ , $P = 0.78$ (עבר את המבחן) $\leftarrow$ $1 - P = 0.22$ , לכל היותר 1 : $k = 0 , 1$

$P = 0.78^4 + \binom{4}{1}\cdot 0.22\cdot 0.78^3 = \underline{0.7877}$

(אין נכשלים) (1 נכשל)

## פתרון שאלה 4




א) נתון : KN הוא קטע אמצעים בטרפז $\leftarrow$

$KE \| AB$ , $AK = KD$ $\leftarrow$ KE הוא

קטע אמצעים במשולש ABD (קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית והוא קטע אמצעים)

$\leftarrow$ $\underline{KE = \frac{1}{2}a}$ . באותה צורה נוכיח FN הוא קטע אמצעים במשולש ABC $\leftarrow$

$\underline{FN = \frac{1}{2}a}$ . קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום הבסיסים $KN = \frac{a+b}{2}$

$\leftarrow$ $\underline{EF} = KN - KE - FN = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \underline{\frac{b-a}{2}}$

ב) בניית עזר $AG \perp CD$ $\leftarrow$ ABHG מלבן $\leftarrow$ $GH = AB = a$ $\leftarrow$ $DG + HC = b - a$

הטרפז שווה שוקיים $\leftarrow$ $DG = HC = \frac{b-a}{2}$ $\leftarrow$ $HC = EF$ .

$EF \| HC$ (קטע אמצעים בטרפז) $\leftarrow$ EFCH מרובע בעל זוג צלעות שוות ומקבילות כלומר מקבילית.

נתון : $EH = \frac{b-a}{2}$ $\leftarrow$ $EH = HC$ $\leftarrow$ EFCH מעוין (מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו היא מעוין) .

ג) קטע אמצעים בטרפז חוצה כל קטע המחבר נקודה על הבסיס העליון עם נקודה על

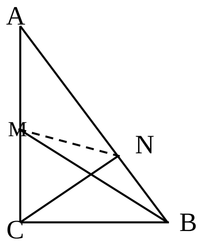
הבסיס התחתון ← $BP = PH$ .

BH מאונך לבסיסים ו- PF מקביל לבסיסים ← $FP \perp BH$ .

FP הוא גם גובה וגם תיכון לצלע BH במשולש FBH ← המשולש שווה שוקיים $\underline{BF = HF}$ .

## פתרון שאלה 5

א) נתון: $AM = MC$ ← $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta MNC} = S$




התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח

← $\underline{S_{\Delta ACN} = 2S}$

ב) זוויות משולש $ACN$: $\measuredangle ACN = \beta$ , $\measuredangle N = 90°$ , $\measuredangle A = 90° - \beta$

$$S_{\Delta ACN} = \frac{AC^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin(90-\beta)}{2\sin 90} = \frac{AC^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{2} = \frac{AC^2 \cdot \sin 2\beta}{4}$$

← $2S = \frac{AC^2 \cdot \sin 2\beta}{4}$ ← $AC^2 = \frac{8S}{\sin 2\beta}$ ← $\underline{AC = \frac{2\sqrt{2}\cdot S}{\sin 2\beta}}$

ג) נסמן: $BC = a$ .

במשולש $ABC$: $\frac{AC}{BC} = tg\beta$ ← $AC = a\, tg\beta$

NM תיכון ל- AC במשולש ANC ← $S_{\Delta ANM} = S_{\Delta CNM} = s$

(תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח).

← $S_{\Delta ANC} = 2s$ ← $2s = \frac{AC^2 \sin A \cdot \sin C}{2\sin N} = \frac{(a\, tg\beta)^2 \sin(90° - \beta)\sin\beta}{2\sin 90°}$ ←

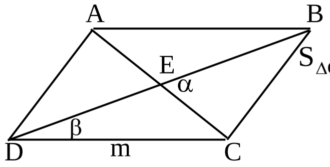
← $4s = a^2 tg^2\beta \cos\beta \sin\beta$ ← $8s = a^2 tg^2\beta \sin 2\beta$ ←

$$\underline{a = BC = \frac{2\sqrt{2s}}{tg\beta\sqrt{\sin 2\beta}} = \frac{2\sqrt{2s}\cdot \cot\beta}{\sqrt{\sin 2\beta}}}$$

## פתרון שאלה 6

משפט הסינוסים במשולש $CDE$: $\frac{m}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{DE}{\sin(\alpha - \beta)}$ ← $DE = \frac{m\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$

א) האלכסונים מחלקים את המקבילית לארבעה משולשים שווי שטח. נחשב את שטח משולש CDE ונכפול אותו ב- 4:




$$S_{\Delta CDE} = \frac{DE\cdot m\sin\beta}{2} = \frac{m\sin(\alpha-\beta)\cdot m\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{m^2 \sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$$

$$S_{ABCD} = 4\cdot\frac{m^2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{2m^2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ב) על פי משפט הסינוסים במשולש EDC: $2R=\frac{DE}{\sin E}=\frac{m}{\sin(180-\alpha)}$ $\leftarrow$ $\underline{R=\frac{m}{2\sin\alpha}}$

## פתרון שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{x^2-2x}=\frac{(x+5)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{x+5}{x}$

א) תחום הגדרה: $x^2-2x\neq 0$ $\leftarrow$ $x\neq 0\ ,\ 2$

ב) אסימפטוטות: אנכית: $x=0$ על פי תחום ההגדרה ($x=2$ מאפס גם מונה), אופקית: $y=1$

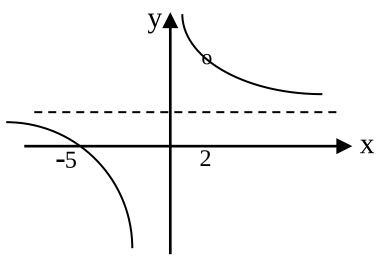
ג) תחומי עליה וירידה: $f'(x)=\frac{1\cdot x-1\cdot(x+5)}{x^2}=\frac{-5}{x^2}$

הנגזרת שלילית לכל $x\neq 0$ $\leftarrow$ הפונקציה יורדת לכל $x\neq 0$ .

ד) נקודות חיתוך עם הצירים: $x=0$ לא בתחום

$y=0$ $\leftarrow$ $x+5=0$ $\leftarrow$ $(-5\ ,0)$

ה) סקיצה של גרף הפונקציה:

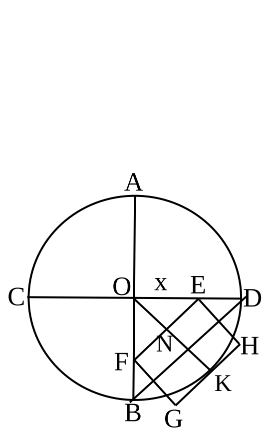



ו) $f'(x)=\frac{-5}{x^2}$ $\leftarrow$ $f''(x)=\frac{10}{x^3}$

בין הישרים $x=-2$ ו $x=-2$ הגרף של הנגזרת השנייה מתחת לציר x :

$$S=\int_{-4}^{-2}-\frac{10}{x^3}dx=\int_{-4}^{-2}-10x^{-3}dx=5x^{-2}\Big|_{-4}^{-2}=\frac{5}{4}-\frac{5}{16}=\underline{\frac{15}{16}}$$

## פתרון שאלה 8




א) $OB=OD=R$ $\leftarrow$ $\measuredangle ODB=\measuredangle OBD$ זוויות בסיס שוות

נתון: $EF\parallel BD$ $\leftarrow$ $\measuredangle OEF=\measuredangle OFE$ (זוויות מתאימות שוות)

$\leftarrow$ $OE=OF$ (מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות)

ב) צלעות המלבן EFGH:

$OE=OF=x$ $\leftarrow$ $EF=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}\cdot x$ $\leftarrow$ $GH=\sqrt{2}\cdot x$

בניית עזר: OK רדיוס. הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה $\leftarrow$ $OK\perp GH$

$\leftarrow$ $ON \perp EF$ $\leftarrow$ ON תיכון ליתר במשולש OEF $\leftarrow$ $ON = \frac{1}{2}EF = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$\leftarrow$ $OK = R$ $\leftarrow$ $KN = R - ON = 20 - \frac{x\sqrt{2}}{2}$ $\leftarrow$ $EH = FG = 20 - \frac{x\sqrt{2}}{2}$

ג) שטח המלבן: $y = x\sqrt{2}\cdot(20 - \frac{x\sqrt{2}}{2}) = 20\sqrt{2}\,x - x^2$

למציאת השטח המקסימלי נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה:

$y' = 20\sqrt{2} - 2x$ $\leftarrow$ $y' = 0$ $\leftarrow$ $x = 10\sqrt{2}$

נוודא שהנקודה היא נקודת מקסימום:

| x | $x < 10\sqrt{2}$ | $10\sqrt{2}$ | $x > 10\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ‘ | + | 0 | – |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ |

שטח מקסימלי של המלבן מתקבל עבור $x = 10\sqrt{2}$

ד) נקבל את אלכסון המלבן בעזרת משפט פיתגורס: $EG^2 = EF^2 + FG^2$

$$EG^2 = (x\sqrt{2})^2 + (20 - \frac{x\sqrt{2}}{2})^2 = 2x^2 + 400 - 20\sqrt{2}\,x + \frac{x^2}{2} = 2.5x^2 + 400 - 20\sqrt{2}\,x$$

$$EG = \sqrt{2.5x^2 + 400 - 20\sqrt{2}\,x}$$

למציאת האורך המינימלי של האלכסון נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה:

$y = \sqrt{2.5x^2 + 400 - 20\sqrt{2}\,x}$ $\leftarrow$ $y' = \frac{5x - 20\sqrt{2}}{2\sqrt{2.5x^2 + 400 - 20\sqrt{2}\,x}}$

$y' = 0$ $\leftarrow$ $x = 4\sqrt{2}$ נוודא שהנקודה היא נקודת מינימום:

| x | $x < 4\sqrt{2}$ | $4\sqrt{2}$ | $x > 4\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ‘ | – | 0 | + |
| y | ↘ | מינימום | ↗ |

אורך אלכסון מינימלי של המלבן מתקבל עבור $x = 4\sqrt{2}$

## פתרון שאלה 9

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ .

א) (1) תחום הגדרה: הביטוי בתוך השורש במכנה חיובי לכל x $\leftarrow$ R

(2) המכנה חיובי לכל x $\leftarrow$ הפונקציה חיובית בתחום בו המונה חיובי: $x > 0$

ושלילית בתחום בו המונה שלילי: $x < 0$ .

(3) $f'(x) = \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+9} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \dfrac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$

הנגזרת חיובית לכל x $\leftarrow$ הפונקציה עולה לכל x

(4) נקודת החיתוך היא (0 ,0)

ב) (1) $y=\sqrt{x^2+9}$ $\leftarrow$ $y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

(2) נמצא את הנקודה: $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=0.8$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונכפול במכנה: $x^2=0.64x^2+5.76$ $\leftarrow$ $x^2=16$

$x=4$ , $\cancel{x=-4}$ ( ערך הפונקציה הוא 0.8 כלומר חיובי, עבור $x=-4$ ערך הפונקציה שלילי)

$$S=\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\sqrt{x^2+9}\Big|_0^4=5-3=2$$