שאלון 806 הצעה לפתרונות למבחנים 1 , 4 , 10 , 15 , 17 , 19 , 20 , 24 , 26 , 40

## מבחן 1

### פתרון שאלה 1

הדרך מ- A ל- B :

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | דרך (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| I | $v$ | $t$ | $tv$ |
| II | $v + 6$ | $2t$ | $2t(v + 6)$ |

המרחק מ- A ל- B הוא $tv + 2t(v+6)$ $\leftarrow$ $3tv+12v = 3t(v + 4)$ .

זמן ההליכה מ- A ל- B הוא $3t$ .

הדרך חזרה :

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | דרך (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| I | $5$ | $\frac{3t(v+4)}{4\cdot 5}$ | $\frac{3t(v+4)}{4}$ |
| II | $v + 6$ | $\frac{9t(v+4)}{4(v+6)}$ | $\frac{3\cdot 3t(v+4)}{4}$ |

הדרך חזרה עורכת זמן קצר יותר: $\frac{3t(v+4)}{4\cdot 5} + \frac{9t(v+4)}{4(v+6)} < 3t$

נצמצם את שני האגפים ב- $t$ (הזמן חיובי) ונכפול ב- $20(v + 6)$ (המהירות חיובית) :

$$3(v+6)(v+4)+45(v+4)<60(v+6)$$
$$3v^2+15v-108<0$$
$$-9<v<4$$

המהירות היא גודל חיובי $\leftarrow$ $\underline{0 < v < 4}$

### פתרון שאלה 2

א) סכום 2n האיברים האחרונים : $S_{3n}-S_n=\frac{3n}{2}\cdot[2a_1+(3n-1)d]-\frac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)d]=$

$$=\frac{n}{2}\cdot[6a_1+9nd-3d-2a_1-nd+d]=\frac{n}{2}\cdot[4a_1+8nd-2d]$$

סכום 2n האיברים הראשונים: $S_{2n}=\frac{2n}{2}\cdot[2a_1+(2n-1)d]$

נתון : סכום 2n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום 2n האיברים הראשונים $\leftarrow$

$\frac{n}{2}\cdot[4a_1+8nd-2d]=2\cdot\frac{2n}{2}\cdot[2a_1+(2n-1)d]$ $\leftarrow$ $4a_1+8nd-2d=8a_1+8nd-4d$

$\leftarrow$ $2d=4a_1$ $\leftarrow$ $\underline{d=2a_1}$ .

סכום 6 האיברים הראשונים הוא 252 : $252=\frac{6}{2}\cdot(2a_1+5d)$ $\leftarrow$ $\underline{84=2a_1+5d}$

נציב $d=2a_1$ : $84=d+5d$ $\leftarrow$ $a_1=7$ , $d=14$ .

ב) איברי הסדרה: 7 , 21 , 35 , 49 , 63 , 77 , 91 , 105 , 119 , 133 , 147 , 161 , ....

האיברים שספרת היחידות שלהם 1 מהווים סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא 21 ,
ההפרש הוא 70 והאיבר האחרון <u>אינו עולה</u> על 623

$\leftarrow$ $21+(n-1)\cdot 70\le 623$ $\leftarrow$ $n\le 9.6$ $\leftarrow$ $\underline{n=9}$

### פתרון שאלה 3

א) <u>נגדיר את המאורעות</u>: A – סטודנט לומד ביולוגיה    B– תלמיד לומד במגמה הביולוגית

50% מהמגמה הביולוגית הם סטודנטים לביולוגיה: $P(A/B)=0.5$ , $P(\overline{A}/B)=0.5$

$\frac{2}{3}$ מהסטודנטים לביולוגיה למדו במגמה ביולוגית בתיכון: $P(B/A)=\frac{2}{3}$

20% מתלמידי התיכון לומדים במגמה הביולוגית: $P(B)=0.2$

$$P(A\cap B)=0.1 \leftarrow 0.5=\frac{P(A\cap B)}{0.2} \leftarrow P(A/B)=\frac{PA\cap B)}{P(B)}$$

15% מהסטודנטים לומדים ביולוגיה. $\leftarrow P(A)=0.15 \leftarrow \frac{2}{3}=\frac{0.1}{P(A)} \leftarrow P(B/A)=\frac{PA\cap B)}{P(A)}$

ב) (1) אם לפחות סטודנט אחד מתוך ה- 7 לומד ביולוגיה – יהיה ייצוג בוועד לסטודנטים לביולוגיה. נחשב את ההסתברות שאף אחד מה- 7 לא לומד ביולוגיה ונמצא את המשלים:

P(יש בוועד ייצוג לסטודנטים לביולוגיה) $=1-0.85^{7}=\underline{\underline{0.6794}}$

(2) על פי נוסחת ברנולי ההסתברות שבוועד יהיו שני סטודנטים לביולוגיה:

$$P(2)=\binom{7}{2}\cdot 0.15^{2}\cdot 0.85^{5}=\underline{\underline{0.2097}}$$

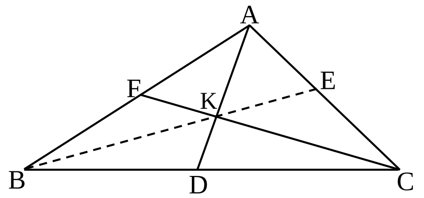
## <u>פתרון שאלה 4</u>

נתון: $BD=DC$ , $AF=FB$ , $AE=EC$ , $\measuredangle AKC=90^\circ$ , AD= 7.5 ס"מ , CF= 18 ס"מ

צ.ל.: א) $AB=?$ , $AC=?$

ב) $BE=?$

ג) $S_{\Delta ABC}=?$




הוכחה:

א) $BD=DC$ , $AF=FB$ , AD= 7.5 ס"מ , CF= 18 ס"מ נתון

← $AK=\frac{2}{3}\cdot 7.5=$ 5 ס"מ , DK = 2.5 ס"מ , $CK=\frac{2}{3}\cdot 18=$ 12 ס"מ , FK = 6 ס"מ

נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2 : 1

$\measuredangle AKC=90^\circ$ ← $AC^{2}=5^{2}+12^{2}=169$ משפט פיתגורס במשולש AKC ← AC= 13 ס"מ

$\measuredangle AKF=90^\circ$ ← $AF^{2}=5^{2}+6^{2}=61$ משפט פיתגורס במשולש AKF

← AB= $2\cdot\sqrt{61}=$ 15.6 ס"מ    מ.ש.ל. (א)

ב) נקודה K היא נקודת מפגש התיכונים ← גם התיכון BE עובר בנקודה K .

← $KE=\frac{1}{2}\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 13=6.5$    KE הוא תיכון ליתר במשולש AKC

← $BE=3\cdot 6.5=$ 19.5 ס"מ    מ.ש.ל. (ב)

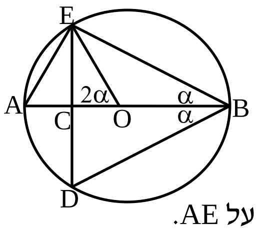
ג) משולש AKF הוא משולש ישר זווית ← $S_{\Delta AKF}=\frac{AK\cdot KF}{2}=\frac{5\cdot 6}{2}=$ 15 סמ"ר

$FK:FC=1:3$ (מפגש התיכונים) ← $S_{\Delta AKF}:S_{\Delta ACF}=1:3$ ← $S_{\Delta ACF}=$ 45 סמ"ר

$AF=FB$ (נתון) ← $S_{\Delta ACF}=S_{\Delta BCF}$ ← <u>$S_{\Delta ABC}=$ 90 סמ"ר</u>

## <u>פתרון שאלה 5</u>

נתון מעגל שמרכזו O . AB הוא קוטר במעגל. C נקודה כלשהי על הקוטר. $DE \perp AB$ .




א) <u>צריך להוכיח</u>: $\Delta DEB \sim \Delta AEO$ .

הרדיוס OA מאונך למיתר ED ולכן חוצה אותו CE=DC.

← במשולש EBD גובה הוא גם תיכון ולכן הוא מש"ש: BE=BD

← $\measuredangle EBA = \measuredangle DBA = \alpha$ . זווית EBA היא זווית היקפית הנשענת על AE.

זווית EOA היא זווית מרכזית הנשענת על AE ← $\measuredangle EOA = 2\alpha = \measuredangle EBD$ .

(זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת).

OA=OE (רדיוסים) ← $\Delta AEO$ ו- $\Delta DEB$ הם שני משולשים שווי שוקיים

בעלי אותה זווית ראש ← כל הזוויות שלהם שוות ← $\Delta DEB \sim \Delta AEO$ לפי ז.ז

ב) AB = 29 ס"מ , AC = 4 ס"מ . <u>יש למצוא את היחס בין שטחי המשולשים AEO ו- DEB</u>.

שני מיתרים במעגל חותכים זה את זה בקטעים פרופורציוניים:

← $AC \cdot CB = CE \cdot CD = CE^2$ (הוכחנו - CE = CD) .

BC=29 – 4= 25ס"מ ← $4 \cdot 25 = CE^2$ ← CE = 10ס"מ.

משפט פיתגורס במשולש ACE: $AE = \sqrt{AC^2 + EC^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$ .

היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון בין המשולשים:

$$\frac{S_{\Delta DEB}}{S_{\Delta AEO}} = \left(\frac{DE}{AE}\right)^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{116}}\right)^2 = \frac{400}{116} = \frac{100}{29}$$

ג) משולש AEO הוא משולש שווה שוקיים. OF הוא גובה לבסיס במשולש זה ולכן גם תיכון

← OF מחלק את משולש AEO לשני משולשים שווי שטח

← שטחו של משולש EFO הוא חצי משטחו של משולש AEO .

BC הוא תיכון במשולש BDE ← BC מחלק את משולש BDE לשני משולשים שווי שטח

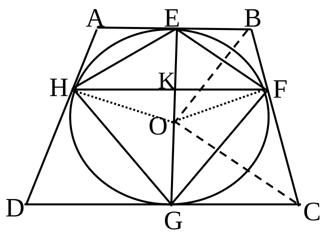
← שטחו של משולש BCE הוא חצי משטחו של משולש DEB .

← היחס בין שטח משולש EFO לבין שטח משולש BCE שווה ליחס שבין שטח משולש

AEO לבין שטח משולש DEB $\frac{S_{\Delta EFO}}{S_{\Delta BCE}} = \frac{29}{100}$ .

## פתרון שאלה 6

א) שטח המשולש EFH הוא: $\frac{FH \cdot EK}{2}$ , שטח המשולש GFH הוא: $\frac{FH \cdot GK}{2}$




מכאן נקבל: $\frac{S_{\Delta EFH}}{S_{\Delta GFH}} = \frac{EK}{GK}$ .

נסמן ב- O את מרכז המעגל.

EO = GO = R ← $EK = R - KO$ , $GK = R + KO$ .

עלינו לחשב את EK. על פי הנתון $\measuredangle BCD = \alpha$

$\leftarrow \measuredangle CFG = CGF = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה
נקודה שווים זה לזה, $CF = CG$ )

$\leftarrow \measuredangle GHF = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר)

$\leftarrow \measuredangle GOF = 180° - \alpha$ (זווית מרכזית שווה כפליים מההיקפית הנשענת על אותה קשת)

$\measuredangle KOF = \alpha$ ( זוויות צמודות)

באותה צורה נוכיח $\measuredangle KOH = \alpha \leftarrow \measuredangle OHK = \measuredangle OFK = 90° - \alpha$ $(OH = OF = R)$

המשלוש OFK הוא ישר זווית : $\frac{OK}{R} = \cos\alpha \leftarrow OK = R\cos\alpha \leftarrow$

$$\frac{S_{\Delta EFH}}{S_{\Delta GFH}} = \frac{EK}{GK} = \frac{R - OK}{R + OK} = \frac{R - R\cos\alpha}{R + R\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$ מ.ש.ל

הסבר : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leftarrow 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \leftarrow 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

ב) לחישוב שטח הטרפז עלינו למצוא את בסיסיו. גובה הטרפז הוא קוטר המעגל החסום .

<u>משולש BEO :</u> $\measuredangle E = 90°$ (המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה).

$\measuredangle EBF = 180° - \alpha$ (משלימה את הזווית C ל- 180 מעלות. זוויות חד צדדיות בין מקבילים)

$\leftarrow \measuredangle EBO = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (הקטע המחבר את נקודת המוצא של שני משיקים, עם המרכז,
חוצה את הזווית בין המשיקים)

$$\frac{R}{BE} = tg(90° - \frac{\alpha}{2}) = ctg\frac{\alpha}{2} \leftarrow BE = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \leftarrow AB = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

<u>משולש GCO :</u> $\measuredangle G = 90°$ (המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה).

$\measuredangle GCF = \alpha$ (נתון)

$\leftarrow \measuredangle GCO = \frac{\alpha}{2}$ (הקטע המחבר את נקודת המוצא של שני משיקים, עם המרכז,
חוצה את הזווית בין המשיקים)

$$\frac{R}{GC} = tg\frac{\alpha}{2} \leftarrow GC = \frac{R}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \leftarrow CD = \frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\underline{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\cdot EG(AB + CD) = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot(\frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}) = \frac{2R^2(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R^2}{\frac{1}{2}\sin\alpha} = \underline{\frac{4R^2}{\sin\alpha}}$$

## <u>פתרון שאלה 7</u>

א) נגזור את הפונקציה פעמיים : $y' = 2 + 2\sin2x \leftarrow y'' = 4\cos2x$

בנקודת הפיתול : $y'' = 0 \leftarrow \cos2x = 0 \leftarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \leftarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k$

הפתרון היחיד בתחום הנתון הוא : $x = \frac{\pi}{4}$ . נבדוק אם יש פיתול בנקודה זו

| | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'' \rightarrow$ | | + | | - | | |
| $y \rightarrow$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | |

נקודת פיתול $(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2})$

ב) משוואת ישר העובר בנקודה $(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2})$ ושיפועו m : $y-\frac{\pi}{2}=m(x-\frac{\pi}{4})$

נציב $x=0$ ← $y-\frac{\pi}{2}=m(0-\frac{\pi}{4})$ ← $y=\frac{\pi}{2}-m\cdot\frac{\pi}{4}$ ← $A(0 , \frac{\pi}{2}-m\cdot\frac{\pi}{4})$

← $AO=\frac{\pi}{2}-m\cdot\frac{\pi}{4}$

נציב $y=0$ ← $0-\frac{\pi}{2}=m(x-\frac{\pi}{4})$ ← $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2m}$ ← $B(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2m} , 0)$

← $BO=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2m}$

$y=AO+BO=\frac{\pi}{2}-m\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2m}=-m\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2m}$ ← $y'=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2m^2}$

$y'=0$ ← $\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2m^2}$ ← $2m^2=4$ ← $m=\sqrt{2}$ או $\underline{m=-\sqrt{2}}$ (הישר יורד)

| m | $m<-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $m>\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ' | − | | + |
| y | ↘ | | ↗ |

← סכום הניצבים מינימלי

כאשר $m=-\sqrt{2}$ ומשוואת הישר

$\underline{y=-\sqrt{2}\cdot x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4}}$

## <u>פתרון שאלה 8</u>

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x\neq 3$

ציר x משיק לגרף הפונקציה ← קיימת נקודת קיצון שערך ה- y שלה הוא 0.

נגזור את הפונקציה : $f'(x)=\frac{(2x+8)\cdot(x-3)-1\cdot(x^2+8x+a)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-a-24}{(x-3)^2}$

$f(x)=0$ וגם $f'(x)=0$ ← $x^2+8x+a=0$ וגם $x^2-6x-a-24=0$

נחבר את המשוואות : $2x^2+2x-24=0$ ← $x=-4$ או $\cancel{x=3}$ (לא בתחום ההגדרה)

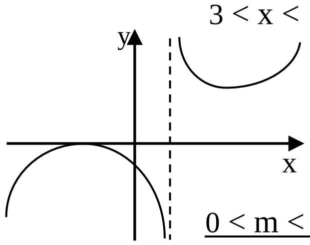
נציב $x=-4$ באחת המשוואות ונקבל $\underline{a=16}$ ← $f'(x)=\frac{x^2-6x-40}{(x-3)^2}$

נשווה את הנגזרת ל- 0 ונקבל את ערכי x של נקודות הקיצון : $x=10 , -4$

סוג הקיצון :

| x | | -4 | | 3 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y ' | + | | − | | − | | + |
| y | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

תחומי עליה : $x<-4$ או $x>10$ , תחומי ירידה : $-4<x<3$ או $3<x<10$




ב) נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה :

לפונקציה נקודת מקסימום $(-4 , 0)$

ונקודת מינימום $(10 , 28)$

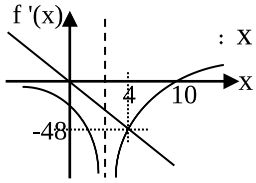
מהשרטוט ניתן לראות כי למשוואה $f(x)=m$ אין פתרון עבור $\underline{0<m<28}$

ג) נגזור את $g(x)=f'(x)$ : $g'(x)=\frac{(2x-6)\cdot(x-3)^2-2\cdot(x-3)\cdot(x^2-6x-40)}{(x-3)^4}=\frac{98}{(x-3)^3}$

$g'(x)>0$ כאשר $x>3$ ולכן בתחום זה הפונקציה $f'(x)$ עולה . $f'(x)$ יורדת כאשר $x<3$ .

ד) $f'(4)=-48$ ← הישר עובר בנקודות $(0 , 0) , (4 , -48)$ ← משוואת הישר $y=-12x$

נחשב את השטח המבוקש בשני חלקים:




שטח משולש $S = \frac{4 \cdot 48}{2} = 96$ והשטח בין גרף הפונקציה וציר x :

$S = \int_{4}^{10} [-f'(x)]dx = -f(x)\Big|_{4}^{10} = -28 - (-64) = 36$.

השטח המבוקש הוא: $S = 96 + 36 = 132$

## פתרון שאלה 9

א) נציב את הנקודה (1, 0) בפונקציה $y = x^2 - ax + b$ : $0 = 1^2 - a \cdot 1 + b \leftarrow b = a - 1$

$\leftarrow$ נקודת ההשקה היא $(3, 8 - 2a)$. $y' = 2x - a \leftarrow m = 6 - a$

משוואת המשיק: $y - (8 - 2a) = (6 - a)(x - 3) \leftarrow \underline{y = (6 - a)x - 10 + a}$

ב) נציב $(0, 0)$ במשוואת המשיק: $0 = (6 - a) \cdot 0 - 10 + a \leftarrow \underline{a = 10} \leftarrow \underline{b = 9}$

משוואת המשיק היא $y = -4x$

ג) נסמן את השטח מעל ציר x ב- $S_1$ ואת השטח מתחת לציר x ב- $S_2$

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 10x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 9x\Big|_0^1 = 4\tfrac{1}{3}$$

$$S_1 + S_2 = \int_1^3 [x^2 - 10x + 9 - (-4x)]dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\Big|_1^3 = 9 \leftarrow S_2 = 4\tfrac{2}{3}$$

$$\leftarrow S_2 - S_1 = 4\tfrac{2}{3} - 4\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}$$

## מבחן 4

## פתרון שאלה 1

א) עד שינוי הקצב עובדים שני הפועלים זמן שווה ובקצב שווה לכן שניהם מייצרים אותה כמות. בטבלה מתוארת עבודת הפועלים

| | הספק (מוצרים בשעה) | זמן (שעות) | עבודה (מוצרים) |
|---|---|---|---|
| I | 4m - 3 | x | (4m-3)· x |
| II | 6m + 1 | x-(m-1) | (6m+1)(x-m+1) |

אחרי שהפועל השני הגביר קצב. שני הפועלים מייצרים אותו מספר של מוצרים:

$(6m + 1)(x - m + 1) = (4m - 3) \cdot x \leftarrow 6mx - 6m^2 + 6m + x - m + 1 = 4mx - 3x$

$\leftarrow 2mx + 4x = 6m^2 - 5m - 1 \leftarrow x = \frac{6m^2 - 5m - 1}{2m + 4}$. הפועל הראשון עבד $x + m$ שעות $\leftarrow$

$\frac{8m^2 - m - 1}{2m+4} = \frac{2m^2 + 4m + 6m^2 - 5m - 1}{2m+4} = m + x = m + \frac{6m^2 - 5m - 1}{2m+4} \leftarrow \frac{8m^2 - m - 1}{2m+4}$ שעות

ב) כדי שיהיה פתרון לבעיה צריכים להתקיים התנאים הבאים:

$4m - 3 > 0$ וגם $6m + 1 > 0$ וגם $m - 1 > 0$ וגם $\frac{8m^2 - m - 1}{2m+4} > 0$

$\leftarrow m > \frac{3}{4}$ וגם $m > -\frac{1}{6}$ וגם $m > 1$ וגם $(-2 < m < -0.29$ או $m > 0.42)$ $\leftarrow \underline{m > 1}$

ג) הפועל הראשון מייצר $4m - 3$ מוצרים כל שעה והפועל השני מייצר $6m + 1$ מוצרים כל שעה

$\leftarrow$ יחד מייצרים כל שעה $10m - 2$ מוצרים $\leftarrow t = \frac{5m^2 - 11m + 2}{10m - 2} = \frac{(5m-1)(m-2)}{2(5m-1)} = \frac{(m-2)}{2}$

## פתרון שאלה 2

א) בסדרה הנדסית $a_2 = a_1\cdot q\,,\ a_{n-1} = a_1\cdot q^{n-2}$

← $a_2\cdot a_{n-1} = a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^{n-2} = a_1\cdot a_1\cdot q^{n-1} = a_1\cdot a_n$

ובצורה כללית: $a_{n-k} = a_1\cdot q^{n-k-1}\,,\ a_{k+1} = a_1\cdot q^{k}$

← $a_{k+1}\cdot a_{n-k} = a_1\cdot q^{k}\cdot a_1\cdot q^{n-k-1} = a_1\cdot a_1\cdot q^{n-1} = a_1\cdot a_n$

ב) שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית $x\,,\ y\,,\ z$ מקיימים $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$ ← $y^2 = x\cdot z$

נסמן את האיבר האמצעי בסדרה ההנדסית ב- $y$ , את האיבר לפניו ב- $x$ ואת האיבר אחריו ב- $z$ . לפי סעיף א מתקיים $x\cdot z = a_1\cdot a_n$ ← $y^2 = x\cdot z = a_1\cdot a_n$ ← $y = \sqrt{a_1\cdot a_n}$

ג) לפי סעיף א: מכפלת שני האיברים האמצעיים שווה $a_1\cdot a_n$ . מאותה סיבה מכפלת שני האיברים הנוספים שווה ל- $a_1\cdot a_n$

← מכפלת ארבעה האיברים האמצעיים שווה $(a_1\cdot a_n)^2$ ← $(a_1\cdot a_n)^2 = 2^{22}$

← $a_1\cdot a_n = \pm 2^{11}$ ← $a_n = \pm\frac{2^{11}}{a_1}$

ד) מסעיף ג $a_n = \pm\frac{2^{11}}{a_1}$ . נתון: $a_1 = 1$ . כמו כן מהנתון נובע כי הסדרה עולה. לכן $q > 1$

← $a_n = \frac{2^{11}}{1} = 2^{11}$ . נתון: $a_n = a_{n-1} + 1024$ ←

$2^{11} = \frac{2^{11}}{q} + 1024 / : 2^{10}$ ← $2 = \frac{2}{q} + 1$ ← $q = 2$ ← $2^{11} = 1\cdot 2^{n-1}$ ← $n = 12$

המקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית שבה 6 איברים. האיבר הראשון הוא $a_2 = a_1 q = 2$

והמנה היא $q^2 = 4$ לכן סכום הסדרה הוא $S_6 = \frac{2\cdot(4^6-1)}{4-1} = 2730$

## פתרון שאלה 3

<u>נגדיר את המאורעות</u>: A – חולה , B – מגיב חיובית לבדיקה

90% מהחולים מגיבים חיובית ← $P(B/A) = 0.9$

מס׳ המגיבים חיובי מבין הבריאים קטן פי 7.5 ממס׳ המגיבים שלילי ← $P(\bar{B}/\bar{A}) = 7.5P(B/\bar{A})$

15% חולים באוכלוסיה ← $P(A) = 0.15$ ← $P(\bar{A}) = 0.85$

$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ← $\frac{P(A\cap B)}{0.15} = 0.9$ ← $P(A\cap B) = 0.135$

$\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})} = 7.5\cdot\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$ ← $7.5P(B\cap\bar{A}) = P(\bar{B}\cap\bar{A})$

$P(A) = P(B\cap\bar{A}) + P(\bar{B}\cap\bar{A})$ ← $0.85 = P(B\cap\bar{A}) + 7.5P(\bar{B}\cap\bar{A})$ ← $P(B\cap\bar{A}) = 0.1$

נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר:

| | A | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| B | 0.135 | 0.1 | 0.235 |
| $\bar{B}$ | 0.015 | 0.75 | 0.765 |
| | 0.15 | 0.85 | 1 |

א) $P(\bar{A}\cap B)=\underline{\underline{0.1}}$

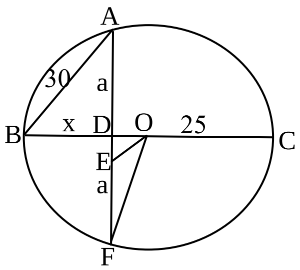
ב) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.135}{0.235}=0.57$ 57% מבין המגיבים חיובית לבדיקה הם חולים.

ג) ההסתברות שאדם, שידוע שהוא חולה, מגיב חיובית לבדיקה: $P(B/A)=0.9$

על פי נוסחת ברנולי: $P(4)=\binom{5}{4}\cdot 0.9^4\cdot 0.1=0.32805$

ההסתברות ש- 4, מתוך 5 החולים שנבחרו באקראי, מגיבים חיובית היא 0.32805.

## <u>פתרון שאלה 4</u>




BC קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו 25 ס״מ.

AF מיתר מאונך לקוטר. AB = 30 ס״מ.

א) <u>צריך למצוא</u> את אורכי הקטעים AF ו- BD.

$AF\perp OB$ ← $AD=DF=a$ – רדיוס המאונך למיתר, חוצה אותו.

נסמן $BD=x$.

שני מיתרים נחתכים, מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת

קטעי המיתר השני ← $BD\cdot DC=AD\cdot DF$ ← $x\cdot(50-x)=a^2$.

משפט פיתגורס ב- $\Delta ABD$: $AD^2=AB^2-BD^2$ ← $a^2=30^2-x^2=900-x^2$

← $a^2=900-x^2=x\cdot(50-x)$ ← $\underline{x=BD=18}$ <u>ס״מ</u> ← $a=24$ ס״מ.

← $\underline{AF=48}$ <u>ס״מ</u> מ.ש.ל א׳

ב) OE חוצה זווית DOF. <u>צריך למצוא</u> את OE.

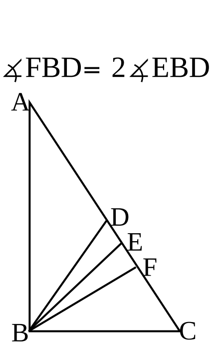
$DF=a=24$ , $DO=R-x=7$ , $OF=R=25$.

על פי תכונת חוצה זווית: $\frac{DE}{EF}=\frac{DO}{OF}$ ← $\frac{DE}{24-DE}=\frac{7}{25}$ ← $DE=5.25$

משפט פיתגורס במשולש DOE: $OE=\sqrt{DO^2+DE^2}=\sqrt{7^2+5.25^2}=\underline{8.75}$ <u>ס״מ</u>

## <u>פתרון שאלה 5</u>

א) נתון: $\measuredangle ABC=90^\circ$, $\measuredangle BFC=90^\circ$, $AD=DC$, $\measuredangle ABE=\measuredangle EBC$ צ״ל: $\measuredangle FBD=2\measuredangle EBD$




הוכחה: $\measuredangle BFC=90^\circ$ (נתון) , נסמן $\measuredangle C=\alpha$

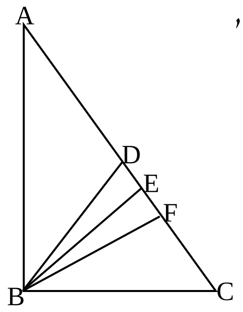
← $\measuredangle CBF=90^\circ-\alpha$ (משלימה ל- $180^\circ$ במשולש BFC)

$\measuredangle ABC=90^\circ$, $\measuredangle ABE=\measuredangle EBC$ (נתון) ← $\measuredangle ABE=\measuredangle EBC=45^\circ$

$\measuredangle ABC=90^\circ$, $AD=DC$ (נתון) ← $BD=DC$ (תיכון ליתר במש״ז שווה למחצית היתר)

← $\angle EBC = \angle C = \alpha$ (זוויות בסיס במש״ש)

← $\angle EBD = \alpha - 45°$ , $\angle FBD = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$ ← $\angle FBD = 2\angle EBD$




ב) נתון: $\angle ABC = 90°$, $\angle BFC = 90°$ , $AD = DC$ , $\angle ABE = \angle EBC$ ,

$BC = 12$ ס״מ , $AB = 16$ ס״מ

צ״ל: (1) $BF = ?$ , $BD = ?$ (2) $S\Delta BDE : S\Delta BFE = ?$

הוכחה: (1) נתון $\angle ABC = 90°$ , $BC = 12$ ס״מ , $AB = 16$ ס״מ

← $AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ ס״מ

$\angle BFC = \angle ABC = 90°$ , זווית C משותפת ← $\Delta ABC \sim \Delta BFC$ (ז.ז.)

$\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{AB}$ (יחסים בין צלעות מתאימות במשולשים דומים) ← $BF = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9.6$ ס״מ

$AD = DC$ (נתון) ← $BF = 0.5AC = 10$ ס״מ (תיכון ליתר במ״ז שווה למחצית היתר)

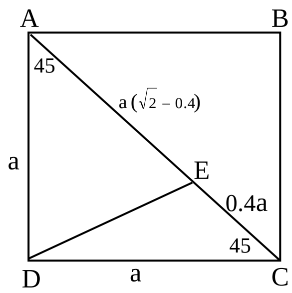
(2) נתון: $\angle ABC = 90°$, $\angle BFC = 90°$ , $AD = DC$ , $\angle ABE = \angle EBC$ ,

הוכחנו בסעיף א כי $\angle FBD = 2\angle EBD$ ← BE חוצה זווית B במשולש DBF

← $DE : EF = BD : BF = 10 : 9.6 = 25 : 24$ (משפט חוצה זווית במשולש)

← $S\Delta BDE : S\Delta BFE = DE : EF = 25 : 24$ (קטע היוצא מקדקוד משולש מחלק את המשולש לשני משולשים שיחס שטחיהם כיחס הקטעים על הצלע ממול)

## פתרון שאלה 6




א) במשולש CDE: $\angle C = 45°$ , $CD = a$ , $CE = 0.4a$

← משפט הקוסינוס: $DE^2 = (0.4a)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot 0.4a \cdot \cos 45°$

$DE^2 = a^2(0.16 + 1 - 0.4\sqrt{2}) = 0.5943a^2$ ← $\underline{DE = 0.771a}$

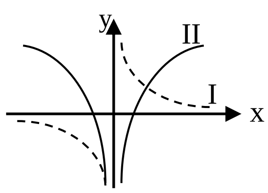
ב) משפט פיתגורס במשולש ADC: $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ ←

$AE = AC - CE = a(\sqrt{2} - 0.4)$ , $\angle DAE = 45°$ , $AD = a$ ←

$$\underline{S_{\Delta ADE}} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a(\sqrt{2} - 0.4) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{0.359a^2}$$

## פתרון שאלה 7

א) ניתן לראות כי בתחום בו גרף II עולה אז גרף I חיובי ובתחום בו גרף II יורד אז גרף I שלילי




← גרף I הוא הנגזרת של גרף II ← $f''(x) - I$ , $f'(x) - II$ .

ב) <u>תחום הגדרה</u>: המכנה שונה מאפס ← $\underline{\underline{x \neq 0}}$

אסימפטוטה אנכית על פי תחום ההגדרה: $\underline{x = 0}$

אסימפטוטה אופקית: $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^2x^2+1}{ax}=\pm\infty$ אין אסימפטוטה אופקית.

נגזור: $f'(x)=\frac{2a^2x\cdot ax-a(a^2x^2+1)}{a^2x^2}=\frac{a^2x^2-1}{ax^2}$ ונשווה לאפס: $x=\pm\frac{1}{a}$

← $(\frac{1}{a}\ ,\ 2)$ , $(-\frac{1}{a}\ ,-2)$ . נגזרת שנייה בנקודות קיצון: $f''(x)=\frac{2a^2x}{ax^2}=\frac{2a}{x}$

← $f''(\frac{1}{a})=2a^2>0$ מינימום , $f''(-\frac{1}{a})=-2a^2<0$ מקסימום

ג) נגזרת שנייה: $f''(x)=\frac{2a^2x\cdot ax^2-2ax\cdot(a^2x^2-1)}{a^2x^4}=\frac{2}{ax^3}$ הנגזרת השנייה אינה מתאפסת.

עבור $a>0$    f'': − | + (0) x      עבור $a<0$    f'': − | + (0) x

∪ : $x>0$ , ∩ : $x<0$      ∩ : $x>0$ , ∪ : $x<0$

ד) לפונקציה יש שני חלקים המופרדים על ידי נקודת אי הגדרה $x=0$ . לאחד החלקים יש ערכים חיוביים שגדולים מערך הפונקציה בנקודת המינימום, כלומר גדולים מ- 2 .
לחלק השני יש ערכים שליליים שקטנים מערך הפונקציה בנקודת המקסימום, כלומר קטנים מ- -2 . לפיכך - למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון עבור $-2<k<2$ .

ה) כאשר בודקים את הגרף של $f''(x)$ רואים כי תחומי הקעירות מתאימים ל- $a>0$ .

## פתרון שאלה 8

א) (1) נגזור את הפונקציה: $f'(x)=-2\sin2x-3\cdot2\cos x\cdot(-\sin x)-0.5$ ←

$f'(x)=-2\sin2x+3\sin2x-0.5=\sin2x-0.5$ . $f'(x)=0$ ← $\sin2x=0.5$ ←

בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{12}$ , $x=\frac{5\pi}{12}$ . סוג הקיצון: 0 ↘ π/12 ↗ 5π/12 ↘ π x

הפונקציה עולה בתחום: $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$ ויורדת בתחום: $\frac{5\pi}{12}<x<\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{12}$

(2) $f''(x)=2\cos2x$ נשווה לאפס: $2\cos2x=0$ ← $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ← $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$

בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{4}$ , $x=\frac{3\pi}{4}$ . f''(x): 0 + π/4 - 3π/4 + π x ; ∪ ∩ ∪

<u>קעירות</u> ∪ : $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{4}$ , ∩ : בתחום: $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ .

ב) מספר פתרונות המשוואה הוא מספר נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x .

ערך הפונקציה בקצות הקטע: $f(0)=\cos2\cdot0-3\cos^2 0-0.5\cdot0=1-3=-2$ ,

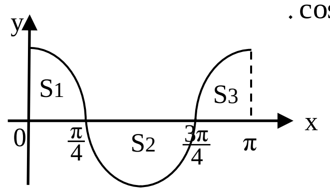
$f(\pi)=\cos2\pi-3\cos^2\pi-0.5\cdot\pi=1-3-0.5\pi=-3.57$ .

ערכי הפונקציה בקצות הקטע שליליים. ערך הפונקציה בנקודת המקסימום: $f(\frac{5\pi}{12})=-1.72$

← בתחום הנתון, גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת לציר x ואינו חותך את הציר

← אין פתרון למשוואה $\cos2x-3\cos^2x-0.5x=0$ .

ג) גרף הפונקציה $f''(x)=2\cos2x$ :




הגרף חותך את ציר x בנקודות $x=\frac{\pi}{4}$ , $x=\frac{3\pi}{4}$

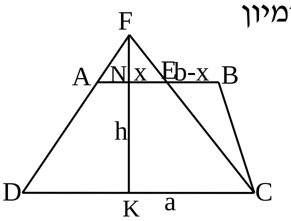
$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\,dx = \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1 \qquad S_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [0 - 2\cos 2x]dx = -\sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 1-(-1) = 2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 \quad \leftarrow \quad S_3 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 2\cos 2x\,dx = \sin 2x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = 0-(-1) = 1$$

**פתרון שאלה 9**

נסמן: $AE = x$ . $AE \parallel DC \leftarrow \Delta DFC \sim \Delta AFE$

היחס בין גבהים מתאימים במשולשים דומים שווה ליחס הדמיון




$$\leftarrow \frac{FN}{FK} = \frac{AE}{DC} \leftarrow \frac{FN}{h+FN} = \frac{x}{a} \leftarrow FN = \frac{hx}{a-x}$$

שטח המשולש $BCE$: $S = \frac{BE \cdot h}{2} = \frac{(b-x)\cdot h}{2}$

שטח המשולש $AFE$: $S = \frac{AE \cdot FN}{2} = \frac{hx^2}{2(a-x)}$

הפונקציה המתארת את סכום שטחי שני המשולשים: $y = \frac{hx^2}{2(a-x)} + \frac{(b-x)\cdot h}{2}$

נגזור את הפונקציה: $y' = \frac{2hx\cdot 2(a-x) + 2\cdot hx^2}{4(a-x)^2} - \frac{h}{2} = \frac{4ahx - 4hx^2 + 2hx^2 - 2ha^2 + 4ahx - 2hx^2}{4(a-x)^2}$

$y' = \frac{-2hx^2 + 4ahx - ha^2}{2(a-x)^2}$ . $y' = 0 \leftarrow -h(2x^2 - 4ax + a^2) = 0 \leftarrow x = a(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$

נמצא את סוג הקיצון: $y'' = \frac{-4hx + 4ah}{2(a-x)^2} = \frac{-2h(x-a)}{2(a-x)^2}$ (נגזרת מקוצרת בנקודות קיצון)

$y''[a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})] = \frac{-2ah(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)}{(a-x)^2} < 0 \leftarrow x = a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ מקסימום.

$y''[a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})] = \frac{-2ah(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1)}{(a-x)^2} > 0 \leftarrow x = a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ מינימום.

סכום השטחים מינימלי עבור $\underline{AE = a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}$ .

**מבחן 10**

**פתרון שאלה 1**

א) נסמן: מהירות רוכב הקטנוע x קמ"ש , זמן הרכיבה של רוכב הקטנוע עד הפגישה t שעות

נרכז בטבלה את הנתונים על הנסיעה עד הפגישה

| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| אופניים | 16 | $t + 3$ | $16(t + 3)$ |
| קטנוע | $x$ | $t$ | $tx$ |

נתון: עד הפגישה עבר רוכב האופניים 32 ק"מ יותר מרוכב הקטנוע

$$\leftarrow \quad I \quad 16(t+3) = xt + 32$$

הדרך שנותרה לכל אחד מהרוכבים אחרי הפגישה היא הדרך שעבר הרוכב האחר לפני הפגישה

| דרך | זמן | מהירות | |
|---|---|---|---|
| $tx$ | $\frac{tx}{16}$ | 16 | אופניים |
| $16(t+3)$ | $\frac{16(t+3)}{x}$ | $x$ | קטנוע |

נתון : רוכב הקטנוע הגיע ל- A 20 דקות (שליש שעה) אחרי שרוכב האופניים הגיע ל- B

$\leftarrow$ II $\frac{16(t+3)}{x}=\frac{tx}{16}+\frac{1}{3}$

נבודד את x ממשוואה I $x=\frac{16(t+1)}{t}$ ונציב אותו במשוואה II $\frac{16(t+3)t}{16(t+1)}=\frac{t\cdot 16(t+1)}{16t}+\frac{1}{3}$

$\leftarrow \frac{(t+3)t}{(t+1)}=t+1+\frac{1}{3} / \cdot 3(t+1) \leftarrow 3t^2+9t=3t^2+6t+3+t+1 \leftarrow t=2 \ , \ x=24$

מהירותו של רוכב הקטנוע היא 24 קמ״ש

ב) עד הפגישה של המכונית והקטנוע נסע הקטנוע 1.5 שעות ולכן עבר דרך של 36 ק״מ $= 24\cdot 1.5$

המכונית עברה את הדרך של 36 ק״מ בחצי שעה לכן מהירותה 72 קמ״ש $= 36:0.5$

לאחר שעקפה את הקטנוע הורידה המכונית את מהירותה ל 64 קמ״ש

עד שהמכונית עקפה את הקטנוע – נסע רוכב האופניים 4.5 שעות .

| דרך | זמן | מהירות | |
|---|---|---|---|
| 36<br>64y | 0.5<br>y | 72<br>64 | מכונית |
| $16(y+4.5)$ | $y+4.5$ | 16 | אופניים |

מסעיף א ניתן לחשב את המרחק בין A ל- B : $tx+16(t+3)=2\cdot 24+16(2+3)=128$

$\leftarrow$ המרחק בין A ל- B הוא 128 ק״מ

$\leftarrow 36+36y+16(y+4.5)=128 \leftarrow 80y=20 \leftarrow y=0.25$

המכונית פגשה את האופניים רבע שעה לאחר הפגישה עם הקטנוע, כלומר בשעה 12:45

## פתרון שאלה 2

נתונה סדרה הנדסית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ . $S_n=1530$ , $q=2$

יוצרים סדרה חדשה : $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, ..., a_{n-1}+a_n$

סכום איברי הסדרה החדשה הוא 2286 . צ״ל : את מספר האיברים בסדרה - n.

$S_n=1530 \leftarrow a_1(2^n-1)=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=1530 \leftarrow \underline{a_1=\frac{1530}{2^n-1}}$

סכום הסדרה החדשה:

$$2286=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_5)+...+(a_{n-1}+a_n)$$

כל איבר בסדרה, פרט לראשון ולאחרון, מופיע פעמיים $\leftarrow$

$$2286=a_1+2a_2+2a_3+...+2a_{n-1}+a_n=2\cdot S_n-(a_1+a_n) \leftarrow$$

$2286=2\cdot 1530-(a_1+a_n) \leftarrow a_1+a_n=774$ . נציב $a_n=a_1\cdot 2^{n-1} \leftarrow$

$$\underline{a_1=\frac{774}{1+2^{n-1}}} \leftarrow \quad a_1+a_1\cdot 2^{n-1}=a_1(1+2^{n-1})=774$$

נשווה את שני הביטויים שקבלנו ל- $a_1$ : $\frac{1530}{2^n-1}=\frac{774}{1+2^{n-1}} \leftarrow$

$$\leftarrow \quad 1530+765\cdot 2^n=774\cdot 2^n-774 \quad \leftarrow \quad 1530+1530\cdot 2^{n-1}=774\cdot 2^n-774$$

$$\underline{n=8} \quad \leftarrow \quad 2^n=256$$

## פתרון שאלה 3

א) המשלים של אשה אחת לפחות הוא 0 נשים, כלומר 4 גברים. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור גבר $\leftarrow$ $p^4=1-0.9919=0.0081$ $\leftarrow$ $p=0.3$ $\leftarrow$ במפעל 30% גברים ו- 70% נשים.

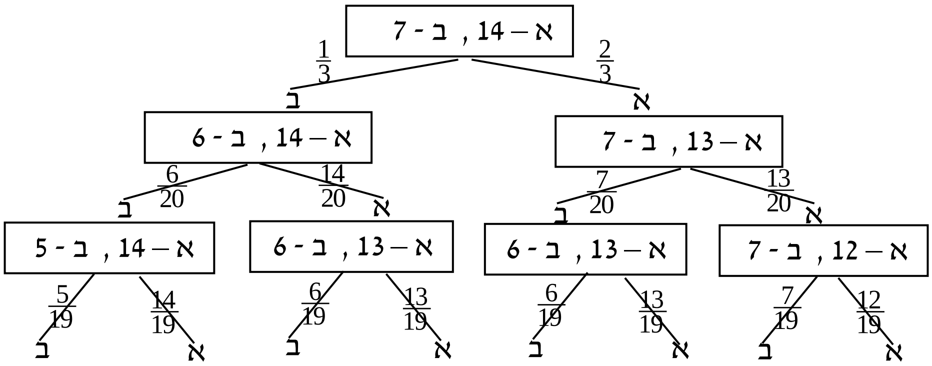
ב) המשלים של לפחות 2 מתוך ה- 4 תהיינה נשים הוא: 0 נשים או אשה אחת. ההסתברות ל- 0 נשים היא 0.0081 כפי שראינו בסעיף א. את ההסתברות שתהיה בדיוק אשה אחת

נחשב בעזרת נוסחת ברנולי: $n=4$ , $k=1$ , $p=0.7$ $\quad P(1)=\binom{4}{1}\cdot 0.7^1\cdot 0.3^3=\underline{\underline{0.0756}}$

ההסתברות שלפחות 2 מתוך ה- 4 תהיינה נשים: $1-(0.0081+0.0756)=\underline{0.9163}$

ג) במפעל 40 עובדים. מתוכם 70% נשים $\leftarrow$ במפעל 28 נשים. 50% מהנשים במחלקה א'

$\leftarrow$ 14 נשים במחלקה א, 7 נשים במחלקה ב ו- 7 במחלקה ג.

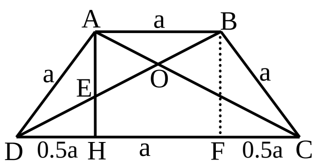



ההסתברות שנבחרו יותר נשים ממחלקה ב:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}+\frac{1}{3}\cdot\frac{14}{20}\cdot\frac{6}{19}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{20}\cdot\frac{14}{19}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}=\frac{282}{1140}=\frac{47}{190}$$

## פתרון שאלה 4

ABCD הוא טרפז שווה שוקיים: $AB \parallel CD$ , $AD=BC$ .




נתון: $AD=AB=BC=a$ , $CD=2a$ , $AH\perp CD$ .

א) <u>צריך להוכיח</u>: $\Delta HDA \sim \Delta BCD$ .

נעביר את BF מאונך ל- CD $\leftarrow$ ABFH מלבן $\leftarrow$ $HF=a$ . הטרפז שווה שוקיים $\leftarrow$

$\Delta ADH\cong\Delta BCF \leftarrow$ $DH=FC=\frac{CD-HF}{2}=0.5a$ .

$\frac{AD}{DC}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ , $\frac{DH}{BC}=\frac{0.5a}{a}=\frac{1}{2}$ $\leftarrow$ $\frac{AD}{DC}=\frac{DH}{BC}$ . $\measuredangle C=\measuredangle D$ (זוויות בסיס בטרפז ש"ש).

← $\Delta HDA \sim \Delta BCD$ על פי צ.ז.צ      מ.ש.ל א'

ב) משולש ADH ישר זווית שבו הניצב DH שווה לחצי היתר ← $\measuredangle D = 60°$ , $\measuredangle DAH = 30°$

משפט פיתגורס: $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{a^2 - (0.5a)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

נתון $AB \| CD$ ← $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים).

נתון $AD = AB$ ← $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB$ (זוויות בסיס במשו"ש) ← $\measuredangle BDC = \measuredangle ADB$

← DE הוא חוצה זווית במשולש ADH ← $\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{DH} = \frac{a}{0.5a} = 2$ ← $AE = 2EH$ .

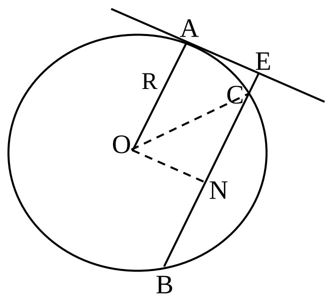
נתון $AH \perp CD$ ← DH הוא גובה במשולשים ADE ו- EDH .

$$S_{\Delta EDH} = \tfrac{1}{2} EH \cdot DH \ , \ S_{\Delta ADE} = \tfrac{1}{2} AE \cdot DH = EH \cdot DH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

← $S_{\Delta ADH} = 1\tfrac{1}{2} EH \cdot DH = 2\sqrt{3}$ ← $S_{\Delta ADH} = \frac{1}{2} \cdot 0.5a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ← $\underline{a = 4}$

## פתרון שאלה 5

AE משיק למעגל שמרכזו O . המיתר BC מקביל ל- AO . $AE = 8$ ס"מ , $CE = 4$ ס"מ .




צריך לחשב א) את רדיוס המעגל – R .

ב) את זווית AOC .

א) מנקודה E יוצאים משיק וחותך למעגל.

מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק:

$AE^2 = BE \cdot CE$ ← $8^2 = 4 \cdot BE$ ← $BE = 16$

← $BC = BE - CE = 12$ ס"מ .

בניית עזר: $ON \perp BC$ ← $BN = NE = 6$ ס"מ (האנך למיתר ממרכז המעגל, חוצה אותו)

← $NE = NC + CE = 10$ ס"מ . המרובע AONE הוא מלבן (יש בו שני זוגות צלעות מקבילות וזווית ישרה) ← $AO = NE$ ← $\underline{R = 10}$ ס"מ      מ.ש.ל.

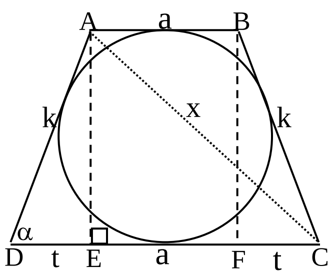
ב) ראינו כי המרובע AONE הוא מלבן ← $ON = AE = 8$ (צלעות נגדיות במלבן שוות.)

מצאנו כי $NE = 10$ , נתון כי $CE = 4$ ← $NC = NE - CE = 10 - 4 = 6$

משולש CON הוא משולש ישר זווית ← $tg\measuredangle CON = \frac{6}{8} = 0.75$ ← $\measuredangle CON = 36.87°$

← $\measuredangle AOC = 90° - 36.87° = \underline{53.13°}$ .

## פתרון שאלה 6




AE גובה בטרפז ← $AE = 2R$   נסמן: $AD = BC = k$

במשולש AED : $\sin\alpha = \frac{AE}{AD}$ ← $AD = \frac{2R}{\sin\alpha}$

ABCD הוא מרובע חוסם מעגל לכן סכום שתי צלעות נגדיות

שווה לסכום השתיים האחרות ← $AB + CD = 2k = \frac{4R}{\sin\alpha}$

שטח הטרפז: $S = \frac{1}{2}(AB+CD)\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{4R}{\sin\alpha}\cdot 2R = \frac{4R^2}{\sin\alpha}$

המשולשים AED ו- BFC חופפים ← $DE = FC = t$ . ABFE מלבן ← $AB = EF = a$

← $AB + CD = 2a + 2t$ ← $a + t = \frac{2R}{\sin\alpha}$ ← משפט פיתגורס במשולש AEC

$AC^2 = AE^2 + EC^2 = 4R^2 + \frac{4R^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4R^2\sin^2\alpha+4R^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4R^2(\sin^2\alpha+1)}{\sin^2\alpha}$ ← $AC = \frac{4R^2}{\sin\alpha}$

## פתרון שאלה 7

א) נגזור את הפונקציה: $y' = \frac{2(x+4)-1(2x-5)}{(x+4)^2} = \frac{13}{(x+4)^2}$ ← המונה והמכנה חיוביים

לכל x בתחום ההגדרה לכן הנגזרת חיובית והפונקציה עולה.

ב) צריך למצוא נקודה שבה ערך הנגזרת שווה לערך הנגזרת של הנגזרת $y' = y''$

נגזרת שנייה: $y'' = \frac{-26}{(x+4)^3}$ ← $\frac{-26}{(x+4)^3} = \frac{13}{(x+4)^2}$ ← $\frac{-2}{x+4} = 1$ ← $x = -6$

נציב $x = -6$ בפונקציה ונקבל: $y = 3.25$ . נציב $x = -6$ בנגזרת ונקבל $m = 3.25$

משוואת המשיק: $y - 3.25 = 3.25(x + 6)$ ← $\underline{y = 3.25x + 22.75}$ $(4y = 13x + 91)$

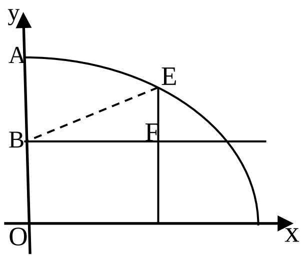
ג) $\frac{13}{(x+4)^2} > \frac{2x-5}{x+4} - 5.25$ ← $\frac{13}{(x+4)^2} - \frac{2x-5}{x+4} + \frac{21}{4} > 0 \,/\cdot 4(x+4)^2$ ←

$\frac{52-8x^2-12x+80+21x^2+168x+336}{4(x+4)^2} > 0$ ← $\frac{13x^2+156x+468}{4(x+4)^2} > 0$ ← $\frac{13(x^2+12x+36)}{4(x+4)^2} > 0$

$\frac{13(x+6)^2}{4(x+4)^2} > 0$ ← מתקיים לכל x פרט ל- $x = 4$ (תחום הגדרה) ול- $x = 6$ (שוויון $0 = 0$)

## פתרון שאלה 8

גרף הפונקציה חותך את ציר y בנקודה A ← $A(0, 3)$ , $B(0, 1.5)$ . נסמן: $E(t, \sqrt{9-2t})$




משוואת הישר l: $y = 1.5$ ← $F(t, 1.5)$ .

נרשום פונקציה y המבטאת את שטח משולש BEF:

$$y = \frac{1}{2}\cdot[t\cdot(\sqrt{9-2t} - 1.5)]$$

נגזור: $y' = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{9-2t} + t\cdot\frac{-2}{2\sqrt{9-2t}} - 1.5) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{9-2t-t}{\sqrt{9-2t}} - 1.5)$

← $y' = \frac{1}{2}\cdot(\frac{9-3t}{\sqrt{9-2t}} - 1.5)$ . נשווה את הנגזרת לאפס $\frac{1}{2}\cdot(\frac{9-3t}{\sqrt{9-2t}} - 1.5) = 0$

← $\frac{9-3t}{\sqrt{9-2t}} = 1.5$ ← $9 - 3t = 1.5\sqrt{9-2t}$ נחלק ב- 1.5: $6 - 2t = \sqrt{9-2t}$ .

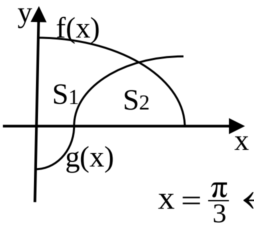
נעלהבריבוע: $36 - 24t + 4t^2 = 9 - 2t$ ← $4t^2 - 22t + 27 = 0$ ←

$\cancel{t = 3.65}$ (לא בתחום ההגדרה) או $t = 1.85$

נבדוק את סוג הקיצון :

| t | $0 < t < 1.85$ | $1.85$ | $1.85 < t < 3$ |
|---|---|---|---|
| y ' | + | 0 | – |
| y | ↗ | מקסימום | ↘ |

## פתרון שאלה 9




א) נמצא את החיתוך של שתי הפונקציות : $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \leftarrow \cos x = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \leftarrow$$

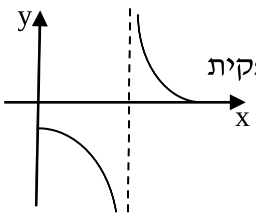
$$x = \frac{\pi}{3} \leftarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k \leftarrow \cancel{x = -\frac{2\pi}{3} + x + 2\pi k} \text{ או } x = \frac{2\pi}{3} - x + 2\pi k \leftarrow$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos x - \sin(x - \tfrac{\pi}{6})]dx = \sin x + \cos(x - \tfrac{\pi}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (0 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x - \tfrac{\pi}{6})dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos(x - \tfrac{\pi}{6})\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$S_1 - S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 = 0.598$$

ב) $y'= \frac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin^2(x-\frac{\pi}{6})} = \frac{-\sqrt{3}}{\sin^2(x-\frac{\pi}{6})} \leftarrow y'= \frac{-\sin x \cdot \sin(x-\frac{\pi}{6}) - \cos x \cdot \cos(x-\frac{\pi}{6})}{\sin^2(x-\frac{\pi}{6})} \leftarrow y = \frac{\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{6})}$




(1) הנגזרת שלילית לכל x בו היא מוגדרת ← הפונקציה יורדת.

(2) המכנה מתאפס כאשר $x = \frac{\pi}{6}$ ← $x = \frac{\pi}{6}$ אסימפטוטה אופקית

(3) נמצא את נקודות הקצה : $(0 , -0.5)$ , $(\frac{\pi}{2}, 0)$

## מבחן 15

## פתרון שאלה 1

ברז א' ממלא x מ"ק בדקה, ברז ב' ממלא y מ"ק בדקה

ביום הראשון ממלא ברז א' 100 מ"ק. הזמן שברז א' היה פתוח הוא $\frac{100}{x}$ דקות. באותו יום

ממלא ברז ב' 300 מ"ק. הזמן שברז ב' היה פתוח הוא $\frac{300}{y}$ דקות ← $\frac{100}{x} + \frac{300}{y} = 13.75$

למחרת פתחו את ברז א ל- $\frac{100}{x}$ דקות ואז פתחו גם את ברז ב . המילוי נמשך 7 דקות

← ברז ב' היה פתוח $(7 - \frac{100}{x})$ דקות ← $7x + (7 - \frac{100}{x})y = 400$

מהמשוואה הראשונה : $\frac{100}{x} = 13.75 - \frac{300}{y}$

נציב במשוואה השניה : $7x + (7 - 13.75 + \frac{300}{y})y = 400$ ← $7x = 100 + 6.75y$

נרחיב את השבר $\frac{100}{x}$ במשוואה הראשונה : $\frac{700}{7x} + \frac{300}{y} = 13.75$ ונציב את $7x = 100 + 6.75y$

$371.25y^2 - 5400y - 120000 = 0 \quad \leftarrow \quad \frac{700}{100+6.75y} + \frac{300}{y} = 13.75 / \cdot y(100+6.75y)$

$\underline{x = 40} \leftarrow \underline{y = 26\frac{2}{3}}$ או $\cancel{y = -\frac{400}{33}} \leftarrow$ .

## פתרון שאלה 2

נתון: $a_2 + a_5 + a_8 + .... = 2320 \ \text{I}$ . $a_1 + a_5 + a_9 + .... = 1632 \ \text{II}$

נסמן את הפרש הסדרה המקורית ב- d.

I - האיברים $a_2 , a_5 , a_8 ....$ מהווים סדרה חשבונית שההפרש בין איבריה $3d$

מיקום האיברים ( 2 , 5 , 8 ...) מהווה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 2 , d = 3 , a_n \le 48$

נמצא את מספר האיברים בסדרה $2 + 3(n-1) \le 48 \leftarrow 3n \le 49 \leftarrow n \le 16.3$

$\leftarrow n = 16$

II - האיברים $a_1 , a_5 , a_9 ....$ מהווים סדרה חשבונית שההפרש בין איבריה $4d$

מיקום האיברים ( 1 , 5 , 9 ...) מהווה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 1 , d = 4 , a_n \le 48$

נמצא את מספר האיברים בסדרה $1 + 4(n-1) \le 48 \leftarrow 4n \le 51 \leftarrow n \le 12.75$

$\leftarrow n = 12$

| | סדרה מקורית | סדרה I | סדרה II |
|---|---|---|---|
| איבר ראשון | $a_1$ | $a_2 = a_1 + d$ | $a_1$ |
| הפרש | $d$ | $3d$ | $4d$ |
| מספר איברים | 48 | 16 | 12 |
| סכום | | 2320 | 1632 |

$2320 = 8[2(a_1 + d) + 15 \cdot 3d] / :8 \quad \leftarrow \quad 290 = 2a_1 + 47d$

$1632 = 6[2a_1 + 11 \cdot 4d] / :6 \quad \leftarrow \quad 272 = 2a_1 + 44d$ -

נחסר את המשוואות: $3d = 18 \leftarrow \underline{d = 6}$ , $\underline{a_1 = 4}$ .

ב) בסדרה 48 איברים. כדי למצוא את הסכום של 20 האיברים האחרונים, נחסר מסכום כל האיברים את סכום 28 האיברים הראשונים:

$S_{20}$ (איברים אחרונים) $= S_{48} - S_{28} = 24(8 + 47 \cdot 6) - 14(8 + 27 \cdot 6) = 6960 - 2380 = \underline{4580}$

## פתרון שאלה 3

נגדיר: A – לומד שחיה בבריכת "פרפר"     B – לומד שחיה בבריכת "תכלת"

C – לומד שחיה בבריכת "נועם"     D – עובר את משחה הסיום

$P(B)=0.4 \quad \leftarrow \quad P(A)=P(C)=0.3$

36% מהעוברים בהצלחה את משחה סיום הקורס, הם תלמידי בריכת "נועם":

$P(C/D)=0.36=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}$ ← $P(C\cap D)=0.36P(D)$

64% מהעוברים בהצלחה את משחה הסיום הם תלמידי "פרפר" ו- "תכלת":

$P(B/D)+P(A/D)=0.64$ ← $\frac{P(B\cap D)}{P(D)}+\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=0.64$ ←

$P(A\cap D)+P(B\cap D)=0.64P(D)$

אחוז העוברים בבריכת "תכלת" גדול פי $1\frac{2}{3}$ מאחוז העוברים בבריכת "פרפר":

$P(B\cap D)=\frac{5}{3}P(A\cap D)$ ← $P(A\cap D)+\frac{5}{3}P(A\cap D)=\frac{8}{3}P(A\cap D)$

← $\frac{8}{3}P(A\cap D)=0.64P(D)$ ← $P(A\cap D)=0.24P(D)$ ←

$P(B\cap D)=\frac{5}{3}P(A\cap D)=0.4P(D)$

ההסתברות, שתלמיד של בריכת "נועם" נכשל במשחה הסיום קטנה פי 4 מההסתברות שתלמיד בריכת "פרפר" נכשל במשחה הסיום: $P(A\cap\overline{D})=4P(C\cap\overline{D})$ .

סה"כ תלמידי פרפר הם התלמידים שעברו את משחה הסיום + התלמידים שלא עברו את המשחה: $P(A)=P(A\cap D)+P(A\cap\overline{D})$ ← $0.3=0.24P(D)+4P(C\cap\overline{D})$

כנ"ל לגבי תלמידי "נועם": $P(C)=P(C\cap D)+P(C\cap\overline{D})$ ← $0.3=0.36P(D)+P(C\cap\overline{D})$

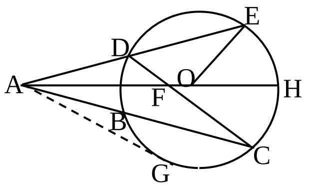
פתרון מערכת המשוואות: $P(C\cap\overline{D})=0.03$ $P(D)=0.75$ נשלים את הטבלה:

| | "פרפר" A | "תכלת" B | "נועם" C | |
|---|---|---|---|---|
| עובר D | 0.18 | 0.3 | 0.27 | 0.75 |
| לא עובר $\overline{D}$ | 0.12 | 0.1 | 0.03 | 0.25 |
| | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 1 |

א) P(עוברים בהצלחה) = <u>0.75</u>

ב) $P(C/\overline{D})$ = P(נכשל/לומד ב"נועם") = $\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{0.03}{0.25}=\underline{0.12}$

**<u>פתרון שאלה 4</u>**




<u>נתון</u>: AC=AE

<u>צ.ל.</u> א) ∡EOH = ∡EDC ב) ΔAOE ~ ΔADF

<u>הוכחה</u>: AC=AE (נתון), OE = OC = R , AO צלע משותפת

← ΔAOE ≅ ΔAOC (צ.צ.צ)

∡EOA = ∡COA (מתאימות מהחפיפה)

נסמן α = ∡EOH = ∡COH (צמודות לזוויות שוות)

$\measuredangle EDC = 0.5\measuredangle COE = 0.5\cdot 2\alpha = \alpha$ (ז. היקפית שווה לחצי ז. מרכזית על אותה קשת) מ.ש.ל.(א)

הוכחנו $\measuredangle EOH = \measuredangle EDC = \alpha$ $\leftarrow$ $\measuredangle EOA = \measuredangle ADC = 180^0 - \alpha$

$\measuredangle EAO$ משותפת $\leftarrow$ $\Delta AOE \sim \Delta ADF$ (ז.ז.) מ.ש.ל. (ב)

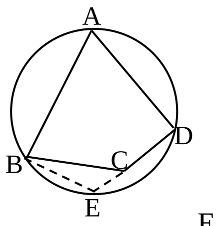
ג) <u>נתון</u>: $AO = 10.125$ ס"מ , $AF = 8$ ס"מ , AG משיק למעגל.

$AG^2 = AD\cdot AE$ (ריבוע המשיק שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני)

מהדמיון: $\frac{AO}{AD}=\frac{AE}{AF}$ $\leftarrow$ $AD\cdot AE = AO\cdot AF$

$AG^2 = AO\cdot AF = 10.125\cdot 8 = 81$ $\leftarrow$ <u>$AG = 9$ ס"מ</u>

## <u>פתרון שאלה 5</u>




א) <u>נתון</u>: $\measuredangle A + \measuredangle C = 180^\circ$

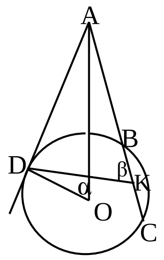
<u>צ.ל.</u>: מעגל עובר דרך A , B , C , D

<u>הוכחה</u>: הנקודות A , B , D יוצרות משולש, וכל משולש ניתן לחסום במעגל. נניח כי מעגל העובר דרך A , B , D אינו עובר ב C. נאריך את DC עד שיחתוך את המעגל ב- E.

$\measuredangle BCD > \measuredangle E$ (חיצונית למשולש EBC)

$\measuredangle A + \measuredangle E = 180^\circ$ (זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל)

$\measuredangle A + \measuredangle C > 180^\circ$ $\rightarrow$ זו סתירה לנתון והיא נובעת מההנחה כי המעגל אינו עובר ב C.




ב) <u>נתון</u>: AD משיק למעגל , BK=KC

<u>צ.ל.</u>: $\alpha = \beta$

<u>הוכחה</u>: AD משיק למעגל (נתון)

$OD \perp AD$ (רדיוס מאונך למשיק)

$BK = KC$ (נתון)

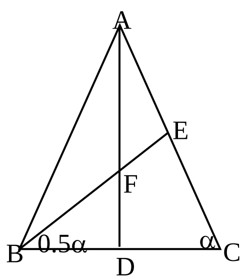
$OK \perp BC$ (קטע המחבר מרכז מעגל עם אמצע מיתר – מאונך למיתר)

מכאן שניתן לחסום את המרובע ADOK במעגל (סכום זוויות נגדיות $180^\circ$)

$\leftarrow$ $\alpha = \beta$ (זוויות היקפיות על AD במעגל החוסם את המרובע ADOK)

ג) AO הוא הקוטר במעגל החוסם את המרובע ADOK (נשענת עליו זווית היקפית ישרה)

$\leftarrow$ נקודה E , אמצע AO היא המרכז של מעל זה $\leftarrow$ $AE = KE$ (רדיוסים במעגל).




## <u>פתרון שאלה 6</u>

א) מרכז המעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזוויות.

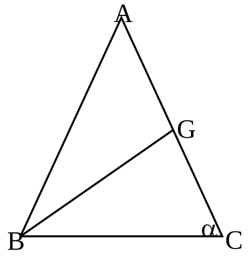
נעביר AD ו- BE חוצי זוויות הנפגשים ב- F .

AD הוא חוצה זווית הראש במש"ש $\leftarrow$ AD הוא גם תיכון וגם גובה.

← FD הוא רדיוס המעגל החסום במשולש. במשולש ישר זווית BDF:

$\frac{r}{BD} = tg0.5\alpha \leftarrow BD = \frac{r}{tg0.5\alpha} \leftarrow BC = \frac{2r}{tg0.5\alpha}$

במשולש ישר זווית ACD $\quad AB = \frac{BD}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha \cdot tg0.5\alpha}$




BG תיכון לשוק ← $\quad CG = \frac{r}{2\cos\alpha \cdot tg0.5\alpha}$

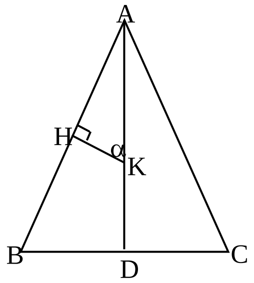
נמצא את BG בעזרת משפט הקוסינוסים במשולש BCG:

$$BG^2 = \frac{4r^2}{tg^2 0.5\alpha} + \frac{r^2}{4tg^2 0.5\alpha \cdot \cos^2\alpha} - \frac{4r^2}{2tg^2 0.5\alpha\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$$BG^2 = \frac{8r^2 \cdot \cos^2\alpha + r^2}{4tg^2 0.5\alpha \cdot \cos^2\alpha} \leftarrow BG = \frac{r\cot\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha}$$

ב) מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש.

AD הוא אנך אמצעי.




נעביר HK אנך אמצעי לצלע AB ← K מרכז המעגל החוסם

← AK הוא R רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

AH שווה למחצית השוק לכן $AH = \frac{r}{2\cos\alpha \cdot tg0.5\alpha}$.

$\measuredangle BAD = 90° - \alpha \leftarrow \measuredangle AKH = \alpha$

במשולש AKH $\quad \frac{AH}{R} = \sin\alpha \leftarrow R = \frac{r}{\sin2\alpha \cdot tg0.5\alpha}$

<u>פתרון שאלה 7</u>

א) בנקודה $x = -2$ יש נקודת קיצון ולכן הנגזרת בנקודה זו שווה אפס:

$$f'(x) = 2x\sqrt{x^3+a} + x^2 \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+a}} = \frac{4x(x^3+a)+3x^4}{2\sqrt{x^3+a}} = \frac{4x^4+4ax+3x^4}{2\sqrt{x^3+a}}$$

← $f'(x) = \frac{7x^4+4ax}{2\sqrt{x^3+a}}$ . נאפס את הנגזרת: $f'_{(-2)} = \frac{7\cdot16-8a}{2\sqrt{8+a}} = 0 \leftarrow a = 14$

ב) $g(x) = x^2\sqrt{x^3-14}$

$$g'(x) = 2x\sqrt{x^3-14} + x^2 \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-14}} = \frac{4x(x^3-14)+3x^4}{2\sqrt{x^3-14}} = \frac{4x^4-56x+3x^4}{2\sqrt{x^3-14}} = \frac{7x^4-56x}{2\sqrt{x^3-14}}$$

$g'(x) = 0 \quad 7x^4 - 56x = 0 \leftarrow\leftarrow 7x(x^3-8) = 0 \leftarrow x = 0\ ,\ x = 2$

נבדוק אם הנקודות שקבלנו הן בתחום ההגדרה.

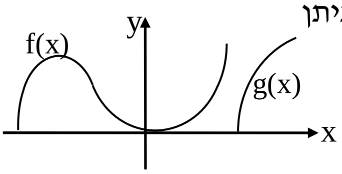
תחום הגדרה: $x^3 - 14 \ge 0 \leftarrow x^3 \ge 14 \leftarrow x \ge \sqrt[3]{14} \leftarrow x \ge 2.41$

שתי הנקודות שקבלנו אינן נמצאות בתחום לכן לפונקציה אין נקודות בהן הנגזרת מתאפסת. בקצה התחום יש נקודת מינימום $(\sqrt[3]{14}\ ,0)$.

<u>תחומי עלייה וירידה</u>: לכל x בתחום ההגדרה $g'(x) > 0$ ←

<u>הפונקציה עולה לכל x בתחום ההגדרה</u> כלומר, עולה לכל $x \ge \sqrt[3]{14}$ .

ג-ד)  נבדוק אם יש לשתי הפונקציות נקודות משותפות :




$x^2\sqrt{x^3+14} = x^2\sqrt{x^3-14}$  $g(x)$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$ לכן ניתן

לצמצם ב- $x^2$ $\leftarrow$ $\sqrt{x^3+14} = \sqrt{x^3-14}$ . נעלה בריבוע :

$x^3+14 = x^3-14$ $\leftarrow$ $14 = -14$ $\leftarrow$ אין נקודות משותפות.

## פתרון שאלה 8

נתונה הפונקציה $y = \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-2x}$

א) <u>תחום הגדרה</u> : $x^2-2x \neq 0$ $\leftarrow$ $x(x-2)\neq 0$ $\leftarrow$ $\underline{x \neq 0\ ,\ 2}$

ב) <u>אסימפטוטות מקבילות לצירים</u> :  נפרק לגורמים מונה ומכנה  $y = \frac{(x+5)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+5}{x}$

הפונקציה הנתונה שווה לפונקציה $y = \frac{x+5}{x}$ בכל $x$ פרט לנקודה שבה $x = 2$

הנקודה $(2\ ,\ 3.5)$ היא נקודת אי רציפות סליקה.

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

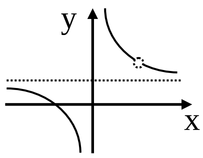
נבדוק אסימפטוטה אופקית :  $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{5}{x}) = 1$

אסימפטוטות מקבילות לצירים :  $y = 1$ , $x = 0$

ג) <u>תחומי עליה וירידה</u> :  נגזור את הפונקציה ה"תאומה"  $y' = \frac{1\cdot x-1\cdot(x+5)}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$

הנגזרת שלילית לכל $x$ בתחום ההגדרה לכן הפונקציה יורדת לכל  $\underline{x \neq 0\ ,\ 2}$

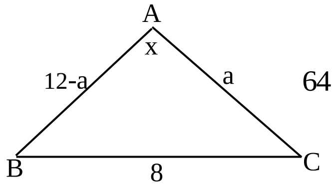
ד) <u>סקיצה של גרף הפונקציה</u> :




ה)  $y'' = \frac{10}{x^3}$ . בתחום $-4 < x < -2$ הפונקציה מוגדרת ומקבלת ערכים שליליים

$\leftarrow$  $S = \int_{-4}^{-2}(-y'')dx = -y'\Big|_{-4}^{-2} = -(\frac{-5}{x^2})\Big|_{-4}^{-2} = \frac{5}{4} - \frac{5}{16} = \frac{15}{16}$

## פתרון שאלה 9




נסמן:  $\measuredangle A = x$ , $AC = a$ $\leftarrow$ $AB = 12-a$ .

משפט הקוסינוס :  $64 = a^2 + (12-a)^2 - 2\cdot a\cdot(12-a)\cdot \cos x$

$\leftarrow$  $\cos x = \frac{2a^2-24a+80}{2a(12-a)} = \frac{a^2-12a+40}{12a-a^2}$

קבלנו פונקציה עבור הזוית. נגזור את הפונקציה שהתקבלה  (משתנה הגזירה הוא a)

$y' = (\cos x)' = \frac{(2a-12)(12a-a^2)-(12-2a)(a^2-12a+40)}{(12a-a^2)^2} = \frac{(2a-12)\cdot 40}{(12a-a^2)^2}$ .

$y'=0 \leftarrow a=6$ . סוג הקיצון: $y''=\frac{2\cdot 40}{(12a-a^2)^2}$ (נגזרת מקוצרת לצורך סימן)

$y''(6)>0 \leftarrow$ עבור $a=6$ , $\cos x$ מקבל ערך מינימלי .

ככל שקוסינוס הזווית קטן יותר $\leftarrow$ הזווית גדולה יותר (לזווית משולש $0<x<180°$ )

$\leftarrow$ הזווית A מקסימלית עבור $a=6 \leftarrow \cos x=\frac{1}{9} \leftarrow \underline{\measuredangle A = 83.62°}$

**מבחן 17**

**פתרון שאלה 1**

א) קבוצה ראשונה יכולה לבצע את העבודה בעצמה ב- $x$ שעות

קבוצה שנייה יכולה לבצע את העבודה בעצמה ב- $y$ שעות

| | הספק | זמן | עבודה |
|---|---|---|---|
| קבוצה א | $\frac{1}{x}$ | 6 | $\frac{6}{x}$ |
| קבוצה ב | $\frac{1}{y}$ | 7 | $\frac{7}{y}$ |
| קבוצה א | $\frac{1}{x}$ | 3a | $\frac{3a}{x}$ |
| קבוצה ב | $\frac{1}{y}$ | a | $\frac{a}{y}$ |

בצעו יחד 80% מהעבודה: $\frac{6}{x}+\frac{7}{y}=0.8 / \cdot a$

בצעו יחד 70% מהעבודה: $\frac{3a}{x}+\frac{a}{y}=0.7 / \cdot 2$

$\frac{6a}{x}+\frac{7a}{y}=0.8a$

$\frac{6a}{x}+\frac{2a}{y}=1.4$

נחסר את המשוואות: $\frac{5a}{y}=0.8a-1.4 / \cdot 5 \leftarrow \frac{25a}{y}=4a-7 \leftarrow y=\frac{25a}{4a-7}$

נציב במשוואה הראשונה: $\frac{6}{x}+\frac{7(4a-7)}{25a}=0.8 \leftarrow \frac{6}{x}=\frac{20a-28a+49}{25a} \leftarrow \frac{6}{x}=\frac{-8a+49}{25a}$

$\leftarrow x=\frac{150a}{49-8a}$

ב) ההספק של הקבוצה הראשונה הוא $\frac{1}{x}=\frac{49-8a}{150a}$ ,

ההספק של הקבוצה השנייה הוא $\frac{1}{y}=\frac{4a-7}{25a} \leftarrow \frac{4a-7}{25a}=\frac{49-8a}{150a}+\frac{1}{90} / \cdot 450a$

$\leftarrow 72a-126=147-24a+5a \leftarrow 91a=273 \leftarrow \underline{a=3}$

**פתרון שאלה 2**

א)

| | סדרה נתונה | מקומות זוגיים | מקומות אי זוגיים |
|---|---|---|---|
| איבר ראשון | $a_1$ | $a_1q$ | $a_1$ |
| מנה | $q$ | $q^2$ | $q^2$ |
| מספר איברים | $2n$ | $n$ | $n$ |

סכום האיברים במקומות הזוגיים: $\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}$ , הסכום במקומות האי זוגיים: $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$

$\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}=3\cdot\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$ ← $\underline{q=3}$ .

ב) $a_6=a_5+54$ ← $a_1\cdot3^5=a_1\cdot3^4+54$ ← $162a_1=54$ ← $\underline{a_1=\frac{1}{3}}$

ג) בסדרה האינסופית: $a_1=3$ , $q=\frac{1}{3}$. סכום האיברים החל מ- $a_n$ הוא $\frac{3\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}}{\frac{2}{3}}$

סכום האיברים עד $a_n$ (לא כולל) הוא $\frac{3[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{\frac{2}{3}}$ ←

$\frac{3[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{\frac{2}{3}}=26\cdot\frac{3\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}}{\frac{2}{3}}$ ← $26\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=1-(\frac{1}{3})^{n-1}$ ← $27\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=1$ ← $(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{27}$

← $n-1=3$ ← $\underline{n=4}$

## פתרון שאלה 3

נגדיר מאורעות: A – לספר כריכה קשה B – הספר בשפה העברית

נתון: 30% מהספרים הם בעלי כריכה "קשה" ← $P(A)=0.3$ , $P(\overline{A})=1-0.3=0.7$

72% מבין מהספרים בעלי הכריכה ה"קשה" הם ספרים בעברית ←

$P(B/A)=0.72$ ← $P(B\cap A)=P(B/A)\cdot P(A)=0.72\cdot0.3=0.216$

60% מבין הספרים בעלי הכריכה ה"רכה" הם ספרים בעברית ←

$P(B/\overline{A})=0.6$ ← $P(B\cap\overline{A})=P(B/\overline{A})\cdot P(\overline{A})=0.6\cdot0.7=0.42$ . נשלים את הטבלה

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.216 | 0.42 | 0.636 |
| $\overline{B}$ | 0.084 | 0.28 | 0.364 |
| | 0.3 | 0.7 | 1 |

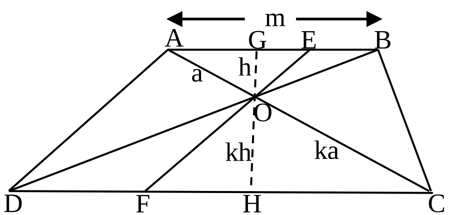
א) $P(B)=0.636$ ← $\underline{63.6\%}$ מהספרים הם ספרים בעברית

ב) ההסתברות שלפחות אחד משני הספרים הוא בעל כריכה "רכה" היא המשלים להסתברות ששני הספרים הם בעלי כריכה "קשה". נמצא את ההסתברות שספר הוא בעל כריכה "קשה" כאשר ידוע שהוא בעברית: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.216}{0.636}=0.3396$

ההסתברות ששני הספרים הם בעלי כריכה "קשה": $0.3396^2=0.115$

ההסתברות שלפחות אחד משני הספרים הוא בעל כריכה "רכה": $1-0.115=\underline{0.885}$

## פתרון שאלה 4



ABCD הוא טרפז : $AB\parallel CD$ .

EF מקביל לשוק AD ועובר ב- O . $CD = k\cdot AB$ .

<u>צריך למצוא</u> את היחס בין השטחים : $\frac{S_{EBCF}}{S_{COD}}$ .

א) דרך נקודה O נעביר גובה בטרפז $GH\perp AB$ . נסמן $AB=m$ , $CD=k\cdot m$ . $AB\parallel CD \leftarrow$

לפי משפט תאלס : $\frac{AB}{CD}=\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}=\frac{EO}{OF}=\frac{GO}{OH}=\frac{m}{km}=\frac{1}{k}$ . נסמן $AO=a$ , $OC=ka$

$EO\parallel AD$ מכאן על פי משפט תאלס : $DF=\frac{km}{k+1} \leftarrow \frac{(k+1)a}{a}=\frac{km}{DF} \leftarrow \frac{AC}{AO}=\frac{DC}{DF}$

במרובע AEFD יש שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות $\leftarrow$ מקבילית $\leftarrow$ $AE=DF$

$$EB=AB-AE=m-\frac{km}{k+1}=\frac{m}{k+1}\ ,\ FC=DC-DF=km-\frac{km}{k+1}=\frac{k^2m}{k+1}$$

נסמן : $GH=(k+1)h\ ,\ OH=kh \leftarrow GO=h$

$$S_{EBCF}=\frac{(EB+FC)\cdot GH}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{k+1}+\frac{k^2m}{k+1}\right)\cdot(k+1)h=\frac{mh(k^2+1)}{2}$$

$$S_{DOC}=\frac{DC\cdot OH}{2}=\frac{1}{2}\cdot km\cdot kh=\frac{mhk^2}{2}$$

היחס בין השטחים : $\frac{S_{EBCF}}{S_{DOC}}=\frac{o.5mh(k^2+1)}{0.5mhk^2}=\underline{\frac{k^2+1}{k^2}}$

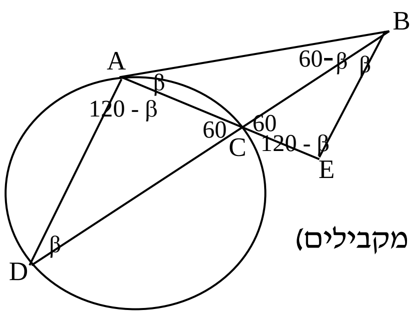
ב) $\frac{mh\cdot(k+1)^2}{2}:\frac{mh\cdot(k^2+1)}{2}=9:5 \leftarrow S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot GH}{2}=\frac{(m+km)\cdot(k+1)h}{2}=\frac{mh\cdot(k+1)^2}{2}$

$\cancel{k=0.5}$ או $\underline{k=2} \leftarrow 4k^2-10k+4=0 \leftarrow 9k^2+9=5k^2+10k+5 \leftarrow \frac{(k+1)^2}{k^2+1}=\frac{9}{5}$

<u>פתרון שאלה 5</u>

נחשב זוויות : $\measuredangle ADB=\measuredangle CBE=\beta$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים)

$\leftarrow$ $\measuredangle BAE=\beta$ (זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר)




$\measuredangle ABE=60^\circ$ (נתון) $\leftarrow \measuredangle ABC=60^\circ-\beta$

$\measuredangle BAD=120^\circ$ (זווית חד צדדיות בין מקבילים),

משלימה ל- $180^\circ$ את הזווית ABE ) $\leftarrow$

$\measuredangle AEB=120^\circ-\beta=\measuredangle DAE$ ( זוויות מתחלפות בין מקבילים)

$\measuredangle ACD=\measuredangle BCE=60^\circ$ (סכום זוויות במשולש)

א) שטח המשולש ABC הוא : $S=\frac{AC^2\cdot\sin\beta\cdot\sin120}{2\sin(60-\beta)}$ . נמצא את AC : המשולש ACD

חסום במעגל $\leftarrow AC=2R\sin\beta \leftarrow S=\frac{4R^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin\beta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sin(60-\beta)}=\underline{\frac{\sqrt{3}\cdot\sin^3\beta}{\sin(60-\beta)}}$

ב) שטח המשולש BCE הוא: $S=\frac{BC^2\cdot\sin\beta\cdot\sin60}{2\sin(120-\beta)}$ . נמצא את BC בעזרת משפט

הסינוסים במשולש ABC: $\leftarrow \quad BC=\frac{2R\sin^2\beta}{\sin(60-\beta)} \quad \leftarrow \quad \frac{BC}{\sin\beta}=\frac{2R\sin\beta}{\sin(60-\beta)}$

$$S=\frac{4R^2\cdot\sin^4\beta\cdot\sin\beta\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{\sin^2(60-\beta)\cdot2\sin(120-\beta)}=\frac{\sqrt3\cdot\sin^5\beta}{\sin^2(60-\beta)\cdot\sin(120-\beta)}=\underline{\frac{\sqrt3\cdot\sin^5\beta}{\sin^2(60-\beta)\cdot\sin(60+\beta)}}$$

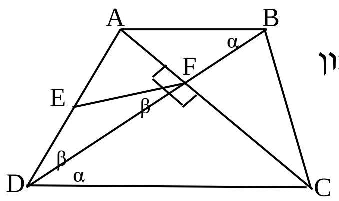
ג) השטחים של שני המשולשים שווים $\leftarrow$ $\frac{\sqrt3R^2\sin^5\beta}{\sin^2(60-\beta)\cdot\sin(60+\beta)}=\frac{\sqrt3R^2\sin^3\beta}{\sin(60-\beta)}$

$$\leftarrow \quad \sin(60-\beta)\cdot\sin(60+\beta)=\sin^2\beta \quad \leftarrow \quad \frac{\sin^2\beta}{\sin(60-\beta)\cdot\sin(60+\beta)}=1 \quad \leftarrow$$

$$\leftarrow \quad \tfrac12(\cos2\beta-\cos120^\circ)=\sin^2\beta \quad \leftarrow \quad \sin(60-\beta)\cdot\sin(60+\beta)=\sin^2\beta$$

$$\underline{\beta=37.76^\circ} \quad \leftarrow \quad \sin\beta=\sqrt{\tfrac38} \quad \leftarrow \quad 2\sin^2\beta=\tfrac34 \quad \leftarrow \quad \tfrac12(1-2\sin^2\beta)=\sin^2\beta$$

## פתרון שאלה 6




נתון: $AE=ED$ , $EF=ED$ ← $\measuredangle AFD=90^\circ$ (משולש שבו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית).

א) EF תיכון , התיכון מחלק את המשולש

לשני משולשים שווי שטח ← שטח המשולש AEF שווה לשטח המשולש DEF .

במשולש CDF: $\measuredangle F=90^\circ$ , $\measuredangle D=\alpha$ ← $FD=d\cos\alpha$

$$S_{\Delta DEF}=\frac{FD^2\cdot\sin^2\beta}{2\sin2\beta}=\frac{d^2\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{2\cdot2\sin\beta\sin\beta}=\underline{\tfrac14d^2\cos^2\alpha\cdot tg\beta=S_{\Delta AEF}}$$

ב) נתון: $\alpha=2\beta=40^\circ$ ← $\beta=20^\circ$ . שטח המשולש AFD שווה לפעמיים שטח

המשולש AEF: $\leftarrow \quad S_{\Delta AFD}=\tfrac12d^2\cos^2\alpha\, tg\beta=\tfrac12d^2\cos^2 40^\circ\cdot tg20^\circ=2.46$

$d=4.8$ ← <u>CD = 4.8 ס״מ</u> .

משולש AFD: $AD=\frac{FD}{\cos\beta}=\frac{d\cos\alpha}{\cos\beta}$ משולש ABD, משפט הסינוסים: $\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin\alpha}$

$\leftarrow$ $AB=\frac{AD\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{d\cos\alpha\cos\alpha}{\cos\beta os\beta s}=\frac{4.8\cdot\cos40^\circ\cdot\sin20^\circ}{\cos20^\circ\cdot\sin40^\circ}$ ← <u>AB = 2.08 ס״מ</u> .

## פתרון שאלה 7

נפשט את הפונקציה $y=\sin^4x-\cos^4x+1=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)+1=1-\cos2x$

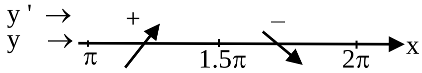
I א) התחום הנתון הוא $\pi\le x\le2\pi$ לכן אין חיתוך עם ציר y.

חיתוך עם ציר x: $x=\pi k \quad \leftarrow \quad 2x=2\pi k \quad \leftarrow \quad \cos2x=1 \quad \leftarrow \quad 0=1-\cos2x$

נקודות החיתוך הן $(2\pi,0)$ , $(\pi,0)$

ב) נגזור את הפונקציה: $y'=2\sin2x$ ונשווה לאפס: $\sin2x=0 \quad \leftarrow \quad y'=0$

$$x=\pi\,,\,1.5\pi\,,\,2\pi \quad \leftarrow \quad x=0.5\pi k \quad \leftarrow \quad 2x=\pi k \quad \leftarrow$$

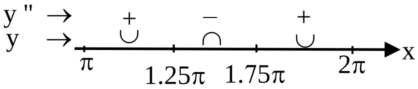
נבדוק את סוג הקיצון: 

נקודת מקסימום: $\left(\frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\right)$, נקודות מינימום: $(\pi,0)$ , $(2\pi,0)$

ג) נמצא נגזרת שנייה: $y''=4\cos2x$ ונשווה לאפס: $y''=0$ ← $\cos2x=0$

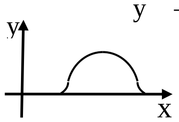
← $2x=0.5\pi+\pi k$ ← $x=0.25\pi+0.5\pi k$ ← $x=1.25\pi\ ,\ 1.75\pi$

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{4}\ ,1\right)$ , $\left(\frac{7\pi}{4},1\right)$



ד) נבדוק את סוג הקעירות:

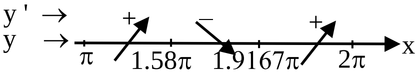
$\cup$: $\pi<x<\frac{5\pi}{4}$ או $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$ $\cap$: $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$

ה) 

II אורכי צלעות המלבן הם שיעורי הנקודה על גרף הפונקציה: $x$ ו- $1-\cos2x$

היקף המלבן: $p=2x+2(1-\cos2x)$ . נגזור: $p'=2+4\sin2x$ ונשווה לאפס:

$P'=0$ ← $\sin2x=-0.5$ ← $2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ← $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$ ←

$x=\frac{23\pi}{12}=1.9167\pi$ , $x=\frac{19\pi}{12}=1.58\pi$ . סוג הקיצון: 

היקף המלבן מינימלי כאשר $\underline{x=1.9167\pi}$

## פתרון שאלה 8

א) $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות ממעלה שלישית ולכן כל אחת מהן חותכת את ציר x לכל היותר ב- 3 נקודות, שהן נקודות החיתוך עם הפונקציה השנייה. $f(x)$ חותכת את ציר x ב- $x=-5$

לכן גם $g(x)$ חותכת את ציר x ב- $x=-5$ . נציב ב- $g(x)$ את הנקודה $(-5\ ,\ 0)$:

$0=[6-(-5)](25-15+c)$ ← $\underline{c=-10}$ ← $g(x)=(6-x)(x^2+3x-10)$ .

עכשיו אפשר למצוא את כל נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x: $0=(6-x)(x^2+3x-10)$

← $x=-5\ ,\ 2\ ,\ 6$ . נציב ב- $f(x)$ את הנקודות $(2\ ,\ 0)$ ו- $(6\ ,\ 0)$:

$0=(2+5)(4-2a+b)$ ו- $0=(6+5)(36-6a+b)$ ← $b=2a-4$ ו- $b=6a-36$

← $6a-36=2a-4$ ← $\underline{a=8}$ , $\underline{b=12}$ . $f(x)=(x+5)(x^2-8x+12)$

ב) בתחום $-5<x<2$ מתקיים $f(x)>g(x)$ ובתחום $2<x<6$ מתקיים $f(x)<g(x)$

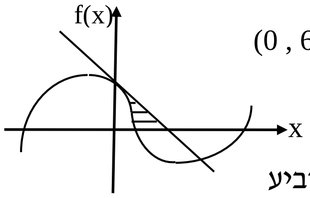
$$\leftarrow\quad S=\int_{-5}^{2}(2x^3-6x^2-56x+120)dx+\int_{2}^{6}(-2x^3+6x^2+56x-120)dx=$$

$$=\frac{x^4}{2}-2x^3-28x^2+120x\Big|_{-5}^{2}+\left[-\frac{x^4}{2}+2x^3+28x^2-120x\Big|_{2}^{6}\right]=$$

$$=8-16-112+240-(312.5+250-700-600)+(-648+432+1008-720)-$$
$$-(-8+16+112-240)=120-(-737.5)+72-(-120)=1049.5$$

ג) (1) נקודת ההשקה $(0\ ,\ 60)$ , $f(x)=x^3-3x^2-28x+60$ ← $f'(x)=3x^2-6x-28$

← $m=-28$ ← משוואת המשיק: $y-60=-28(x-0)$ ← $\underline{y=-28x+60}$




(2) המשיק חותך את ציר x בנקודה $(\frac{15}{7},0)$ ואת ציר y בנקודה (0 , 60)

← שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים : $\frac{15\cdot 60}{7\cdot 2}=64\frac{2}{7}$

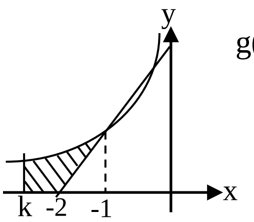
משטח המשולש נחסיר את השטח בין גרף הפונקציה והצירים ברביע

הראשון : $\int_0^2 (x^3-3x^2-28x+60)dx=\frac{x^4}{4}-x^3-14x^2+60x\Big|_0^2=4-8-56+120=60$

השטח המבוקש : $S=64\frac{2}{7}-60=4\frac{2}{7}$

**פתרון שאלה 9**

א) נציב $y = 2$ ב- $f(x)$ : $2=\frac{8}{\sqrt{-16x}}$ ← $\sqrt{-16x}=4$ ← $-16x = 16$ ← $x = -1$

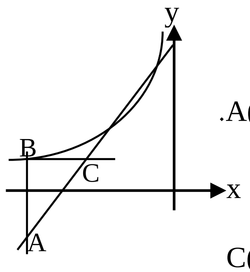



נציב את נק' (-1 , 2) ב- $g(x)$ : $2 = 2\cdot(-1) + a$ ← $\underline{a = 4}$ , $g(x) = 2x + 4$

ב) גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר x ב- $x = -2$

$$7=\int_k^{-1}\frac{8}{\sqrt{-16x}}dx-S_\Delta=-\sqrt{-16x}\Big|_k^{-1}-\frac{1\cdot 2}{2}=-4+\sqrt{-16k}-1$$

$12=\sqrt{-16k}$ ← $144 = -16k$ ← $\underline{k = -9}$




ג) נקודה A נמצאת על $g(x) = 2x + 4$ וערך ה- x שלה -9 ← A(-9 , -14).

נקודה B נמצאת על $f(x)=\frac{8}{\sqrt{-16x}}$ וערך ה- x שלה -9 ← $B(-9,\frac{2}{3})$

נקודה C נמצאת על $g(x) = 2x + 4$ וערך ה- y שלה $\frac{2}{3}$ ← $C(-\frac{5}{3},\frac{2}{3})$

שטח משולש ABC : $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot[-\frac{5}{3}-(-9)]\cdot[\frac{2}{3}-(-14)]=53.78$

**מבחן 19**

**פתרון שאלה 1**

הברז השני הכניס כמות גדולה פי 3.5 מהברז הראשון :

| | הספק (מ"ק לדקה) | זמן (דקות) | עבודה (מ"ק) |
|---|---|---|---|
| ברז I | 15 | t | 15t |
| ברז II | x | 15 | 15x |
| ברז II | x | t | tx |

ברז I : 15t

ברז II : 15x + tx

← 15x + tx = 3.5·15t

← <u>15x + tx = 52.5t</u>

כמות הסולר במיכל מלא גדולה פי 4.5 מהכמות שנכנסה על ידי הברז הראשון

← כמות הסולר במיכל מלא : 4.5·15t = 67.5t

הברז הראשון יכול למלא את המיכל לבדו ב- 5 דקות פחות מאשר השני לבדו :

| | הספק (מ"ק לדקה) | זמן (דקות) | עבודה (מ"ק) |
|---|---|---|---|
| ברז I | 15 | 4.5t | 67.5t |
| ברז II | x | 67.5t / x | 67.5t |

$4.5t+5=\frac{67.5t}{x}\ /\cdot 2x$

<u>9tx + 10x = 135t</u>

מהמשוואה הראשונה: $tx = 52.5t - 15x$

נציב במשוואה השנייה: $9(52.5t - 15x) + 10x = 135t \leftarrow 472.5t - 135x + 10x = 135t$

$\leftarrow 337.5t = 125x \leftarrow x = 2.7t$

נציב במשוואה השנייה: $9t\cdot2.7t + 10\cdot2.7t = 135t$ / :t $\leftarrow 24.3t + 27 = 135$/ :9

$2.7t = 12 \leftarrow x = 12$ הברז השני מזרים 12 מ״ק בדקה.

## פתרון שאלה 2

א) נתון: $a_n = 1.5\cdot 2^n \leftarrow a_{n+1} = 1.5\cdot 2^{n+1}$

$\leftarrow$ המנה של שני איברים סמוכים היא $\frac{1.5\cdot 2^{n+1}}{1.5\cdot 2^n} = 2 \leftarrow$ המנה של כל שני איברים

סמוכים קבועה (אינה תלויה במיקום האיברים) ולכן הסדרה הנדסית.

ב) כאשר מעלים בריבוע את האיברים של סדרה הנדסית מתקבלת סדרה הנדסית חדשה

$a_1^2, a_2^2, a_3^2, .....$ שהמנה שלה $\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2} = (\frac{a_{k+1}}{a_k})^2 = q^2$

| | סדרה נתונה | סדרת ריבועי האיברים |
|---|---|---|
| איבר ראשון | $a_1$ | $a_1^2$ |
| מנה | 2 | 4 |
| מספר איברים | 2n | n |

סכום איברי הסדרה שווה לסכום הריבועים של n האיברים הראשונים $\leftarrow$

$\frac{a_1(2^{2n}-1)}{2-1} = \frac{a_1^2(4^n-1)}{4-1} \leftarrow a_1 = 3$

ג) סדרת האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים וסדרת האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים

הן סדרות הנדסיות $\frac{a_{k+2}}{a_k} = q^2 = 2^2 = 4$

| | מקומות אי זוגיים | מקומות זוגיים |
|---|---|---|
| איבר ראשון | 3 | 6 |
| מנה | 4 | 4 |
| מספר איברים | n | n |

$\frac{6(4^n-1)}{4-1} = \frac{3(4^n-1)}{4-1} + 4095 \leftarrow 2(4^n-1) = 4^n - 1 + 4095 \leftarrow 4^n = 4096 \leftarrow n = 6$

מספר האיברים בסדרה הנתונה הוא 12 (בסדרה 2n איברים)

## פתרון שאלה 3

ההסתברות שלכל היותר שניים מהבולים הם מהאוסף של יובל, מתוך 3 שנבחרו

באקראי, היא 0.875. מכאן, ההסתברות שכל 3 הבולים של יובל היא 0.125.

$P^3 = 0.125 \leftarrow$ P(הסתברות שבול הוא של יובל) =0.5

$\leftarrow$ חצי מהבולים הם של יובל ולכן מספר הבולים של יובל ושל עומר שווה. לכל אחד 800 בולים.

מספר בולי חו״ל של עומר גדול פי 3 ממספר הבולים מהארץ ← לעומר 200 בולים מהארץ ו- 600 בולים מחו״ל.

נגדיר את המאורעות: A – בול מהאוסף של יובל  B – בול מהארץ  ונארגן את הנתונים בטבלה:

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.275 | 0.125 | 0.4 |
| $\overline{B}$ | 0.225 | 0.375 | 0.6 |
| | 0.5 | 0.5 | 1 |

א) ההסתברות שבול מהארץ שנבחר באקראי הוא מהאוסף של עומר: $p(\overline{A}/B)=\frac{0.125}{0.4}=\underline{0.3125}$

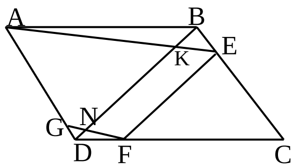
ב) ראינו כי באוסף של עומר יש 600 בולים מחו״ל.

ג) $P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.375}{0.6}=0.625$

ד) ההסתברות של בול להיות מחו״ל היא 0.6 . נציב בנוסחת ברנולי: $n=4\ ,\ k=3\ ,\ p=0.6$

$P_4(3)=\binom{4}{3}\cdot 0.6^3\cdot 0.4^1=4\cdot 0.216\cdot 0.4=0.3456$ ההסתברות ששלושה מחו״ל היא <u>0.3456</u> .

## <u>פתרון שאלה 4</u>




נתון: ABCD מקבילית , $EC = 3BE$

$EF \parallel BD\ ,\ GF \parallel AE$

א) צ״ל: $DN + KB = EF\frac{1}{3}$

הוכחה: $EF \parallel BD$ נתון ← לפי משפט תלס $\frac{EF}{BD}=\frac{CE}{CB}$ ← $\frac{EF}{BD}=\frac{3BE}{4BE}=\frac{3}{4}$

נסמן: $BD = 4m\ ,\ EF = 3m$

$EF \parallel BD\ ,\ GF \parallel AE$ נתון ← NKEF מקבילית ← $NK = EF = 3m$

← $DN + KB = BD - NK = 4m - 3m = m = EF\frac{1}{3}$ <u>משל</u>

ב) נתון: $BK = 2ND$ , צ״ל: $S_{\Delta ABK} : S_{\Delta CEF}$ הוכחה:

BD אלכסון המקבילית מחלק את המקבילית לשני משולשים חופפים ← $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD} = S$

נתון כי $BK = 2ND$ ← $BK = \frac{2}{3}(BK + ND) = \frac{2}{3}m$ ← $BK : BD = \frac{2}{3}m : 4m = \frac{1}{6}$ ←

$S_{\Delta ABK} : S_{\Delta ABD} = \frac{1}{6}$ (במשולשים בעלי גובה משותף יחס השטחים כיחס הצלעות) ← $S_{\Delta ABK} = \frac{S}{6}$

$EF \parallel BD$ (נתון) ← $\Delta\, CEF \sim \Delta\, CBD$ ← $S_{\Delta CEF} : S_{\Delta CBD} = (EF : BD)^2 = 9 : 16$

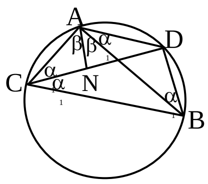
(יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות) ← $S_{\Delta CEF} = \frac{9S}{16}$

← $S_{\Delta ABK} : S_{\Delta CEF} = \frac{S}{6} : \frac{9S}{16} = 8 : 27$ <u>משל</u>

## פתרון שאלה 5

א) משולש ABC חסום במעגל. הנקודה N היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

<u>צריך להוכיח</u> $\Delta ADN$ הוא משולש שווה שוקיים.




<u>הוכחה</u>: הנקודה N היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC

← הנקודה N היא נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש:

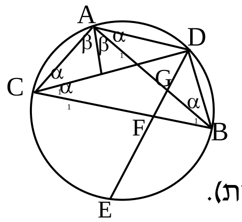
$\measuredangle CAN=\measuredangle NAB=\beta$ , $\measuredangle ACD=\measuredangle DCB=\alpha$

$\measuredangle ACD=\measuredangle ABD=\alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על AD).

$\measuredangle BAD=\measuredangle DCB=\alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על BD).

הזווית AND היא זווית חיצונית למשולש ANC ← $\measuredangle AND=\alpha+\beta$ ←

$\measuredangle AND=\measuredangle NAD=\alpha+\beta$ ← AD=ND ← $\Delta ADN$ הוא משולש שווה שוקיים. מ.ש.ל. א




ב) נתון: נקודה E היא אמצע קשת BC התחתונה

<u>צריך להוכיח</u> $\Delta BFG$ הוא משולש שווה שוקיים.

<u>הוכחה</u>: $\measuredangle CAB=\measuredangle CDB=2\beta$ (זוויות היקפיות הנשענות על CB).

← $\measuredangle BDE=\measuredangle CDE=\beta$ ( זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות).

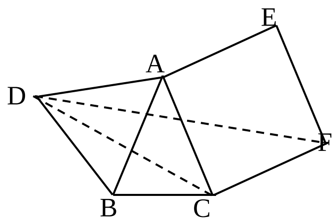
← $\measuredangle BGF=\alpha+\beta$ (ז. חיצונית למשולש BDG שווה לסכום הפנימיות שאינן צמודות לה)

$\measuredangle BFG=\alpha+\beta$ (ז. חיצונית למשולש CDF שווה לסכום הפנימיות שאינן צמודות לה)

← $\measuredangle BGF=\measuredangle CDE$ ← $BF=BG$ ← $\Delta BFG$ הוא משולש שווה שוקיים. מ.ש.ל.ב

## פתרון שאלה 6

במשולש ABC נתונים אורכי הצלעות AB=AC=10 ס"מ , BC=6 ס"מ .




בעזרת משפט הקוסינוסים נמצא את הזוויות:

$10^2=10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cdot\cos ABC$

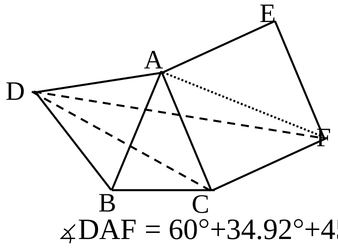
$120\cdot\cos ABC=36$ ← $\cos ABC=0.3$

$\measuredangle ACB=\measuredangle ABC=72.54°$ (משי"ש), $\measuredangle BAC=34.92°$.

ABD הוא משולש שווה צלעות. אורך כל צלע שלו 10 ס"מ וגודל כל זווית 60° .

לכן במשולש BCD : BD=10 ס"מ , BC=6 ס"מ , $\measuredangle DBC=60°+72.54°=132.54°$

משפט הקוסינוסים: $CD^2=100+36-2\cdot10\cdot6\cdot\cos132.54°=217.13$ ← <u>CD=14.7 ס"מ</u>




AF הוא אלכסון של הריבוע AEFC ← $\measuredangle CAF=45°$

את אורכו של AF נמצא על ידי שימוש במשפט פיתגורס

$AF=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=14.14$ .

במשולש DAF : AD=10 ס"מ , AF=14.14 ס"מ , $\measuredangle DAF=60°+34.92°+45°=139.92°$

משפט הקוסינוסים: $DF^2 = 100 + 200 - 2\cdot 10\cdot 14.14\cdot \cos 139.92° = 516.4$ ← DF=22.7ס"מ

## פתרון שאלה 7

א) תחום הגדרה: $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x} \ge 0$ ← $\frac{(x-2)(x-5)}{x(x-5)} \ge 0$ ← $\frac{x-2}{x} \ge 0$ ←

$x \ge 2$ או $x < 0$ וגם $x \ne 0 , 5$ (המכנה ≠ מאפס) ← $x \ge 2 , x \ne 5$ או $x < 0$

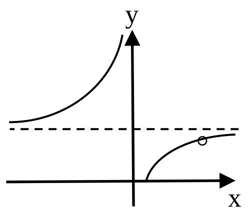
אסימפטוטה אנכית על פי תחום ההגדרה: $x = 0$ (x = 5 היא נקודת אי רציפות סליקה).

אסימפטוטה אופקית: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 1$ ← $y = 1$

נגזור את הפונקציה: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)' = \frac{1}{2\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{2}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^3\cdot(x-2)}}$ ←

הנגזרת חיובית לכל x בתחום ← הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

ב)




ג) $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x}}$ .

נפח גוף הסיבוב המבוקש הוא בין הפונקציות: $g(x)$ והאסימפטוטה $y = 1$ :

$$V = \pi\cdot\int_2^4 \left|[g(x)^2 - 1^2]dx\right| = \pi\cdot\int_2^4 \left|\frac{x-2}{x^3} - 1\right|dx = \pi\cdot\int_2^4 \left|(x^{-2} - 2x^{-3} - 1)dx\right|$$

$$V = \left|\pi\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x\Big|_2^4\right]\right| = \left|\pi\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - 4\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2\right)\right]\right| = 1\frac{15}{16}\pi$$

## פתרון שאלה 8

א) לפונקציה יש מינימום בנקודה $\left(\frac{\pi}{2} , \frac{4\pi+\sqrt{3}}{8} - 2\right)$ ← $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ ←

$a\cos\pi - 2\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 0$ ← $-a + 1 = 0$ ← $a = 1$

$f'(x) = \cos 2x - 2\cos x + 1$ ← $f(x) = \int(\cos 2x - 2\cos x + 1)dx$

$f(x) = 0.5\sin 2x - 2\sin x + x + c$ . ידוע שערך הפונקציה ב- $x = \frac{\pi}{2}$ הוא $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8} - 2$

← $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8} - 2 = 0.5\sin\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + c$ ← $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} - 2 = -2 + \frac{\pi}{2} + c$ ←

$c = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ← $f(x) = 0.5\sin 2x - 2\sin x + x + \frac{\sqrt{3}}{8}$

ב) (1) $f'(x) = 0$ ← $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0$ ← $2\cos^2 x - 1 - 2\cos x + 1 = 0$

$2\cos x(\cos x - 1) = 0$ ← $\cos x = 0 , \cos x = 1$ ← $x = \pm\frac{\pi}{2} , 0$

ערך הפונקציה: $f(-\frac{\pi}{2}) = 0.5\sin(-\pi) - 2\sin(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} = 2 - \frac{4\pi-\sqrt{3}}{8}$ ,

$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{8}$ , ועל פי הנתון: $f(\frac{\pi}{2})=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8}-2$ . נמצא את סוג הקיצון:

$f''(x) = -2\sin2x + 2\sin x \leftarrow f''(0)=0 \;,\; f''(\frac{\pi}{2})>0 \;,\; f''(-\frac{\pi}{2})<0$

נקודת מינימום: $(\frac{\pi}{2} , \frac{4\pi+\sqrt{3}}{8}-2)$ , נקודת מקסימום: $(-\frac{\pi}{2} , 2-\frac{4\pi-\sqrt{3}}{8})$

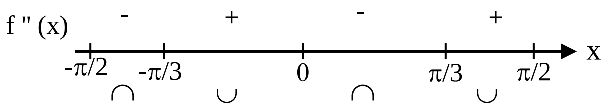
הנקודה $(0,\frac{\sqrt{3}}{8})$ איננה נקודת קיצון.

(2) נשווה לאפס את הנגזרת השנייה: $f''(x) = -2\sin2x + 2\sin x = 0$

$\leftarrow \sin2x = \sin x \leftarrow x = 2x + 2\pi k \;,\; x = \pi - 2x + 2\pi k$

$\leftarrow x = 2\pi k \;,\; x = \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k$ בתחום הנתון: $x = \pm\frac{\pi}{3} , 0$

תחומי קעירות:




הפונקציה קעורה כלפי מעלה ∪ : $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ או $-\frac{\pi}{3}<x<0$

הפונקציה קעורה כלפי מטה ∩ בתחום: $0<x<\frac{\pi}{3}$ או $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{3}$

(3) בנקודת המינימום של הפונקציה $y = \frac{4\pi+\sqrt{3}}{8}-2 = -0.212$ ← הנקודה

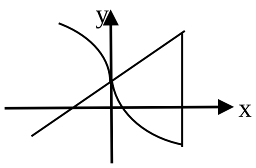
<u>מתחת</u> לציר x. בנקודת המקסימום $y = 2-\frac{4\pi-\sqrt{3}}{8} = 0.645$ ← הנקודה

<u>מעל</u> לציר x. ← הפונקציה חותכת את ציר x <u>פעם אחת</u> בדיוק בתחום הנתון.

ג) נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x) = 0.5\sin2x - 2\sin x + x + \frac{\sqrt{3}}{8}$ ושל הישר $y = x+\frac{\sqrt{3}}{8}$ :

$x+\frac{\sqrt{3}}{8} = 0.5\sin2x - 2\sin x + x + \frac{\sqrt{3}}{8} \leftarrow 0.5\sin2x - 2\sin x = 0 \leftarrow \sin x\cos x - 2\sin x = 0$

$\leftarrow \sin x(\cos x - 2) = 0 \leftarrow \sin x = 0 \leftarrow x = \pi k$ ← הפתרון בתחום הנתון $x = 0$.




$$S = \int_0^{0.5\pi}(2\sin x - 0.5\sin 2x)dx = -2\cos x + 0.25\cos 2x\Big|_0^{0.5\pi} =$$

$$= 0 - 0.25 - (-2 + 0.25) = \underline{1.5}$$

## פתרון שאלה 9

א) צריך למצוא את a $(a \neq 0)$ שעבורו ערך האינטגרל $\int_0^3 (ax-5)^2dx$ מינימלי:

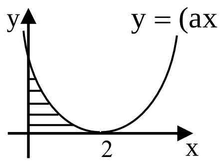
$$\int_0^3 (ax-5)^2dx = \frac{(ax-5)^3}{3a}\Big|_0^3 = \frac{(3a-5)^3}{3a} - \frac{-125}{3a} = \frac{27a^3 - 135a^2 + 225a - 125 + 125}{3a}$$

$$\int_0^3 (ax-5)^2dx = \frac{(ax-5)^3}{3a}\Big|_0^3 = \frac{(3a-5)^3}{3a} - \frac{-125}{3a} = \frac{27a^3-135a^2+225a-125+125}{3a}$$

$$\int_0^3 (ax-5)^2dx = 9a^2 - 45a + 75 \leftarrow y = 9a^2 - 45a + 75 \leftarrow y' = 18a - 45$$

$y' = 0 \leftarrow \underline{a = 2.5}$ .   $y'' = 18 > 0 \leftarrow$ מינימום

ב) צריך לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=(ax-5)^2=(2.5x-5)^2$




והצירים: $S=\int_0^2 (2.5x-5)^2\,dx=\frac{(2.5x-5)^3}{3\cdot 2.5}\Big|_0^2=0-\frac{(-5)^3}{7.5}=\underline{16\frac{2}{3}}$

## מבחן 20

### פתרון שאלה 1

<u>נסמן</u>: אורך המסלול x ק"מ , הזמן t שעות

<u>הנער הראשון</u>:

רוכב שליש מהזמן במהירות v קמ"ש $\leftarrow$ עובר דרך של $\frac{1}{3}tv$ ק"מ.

בזמן הנותר $\frac{2}{3}t$ הולך במהירות 5 קמ"ש $\leftarrow$ עובר דרך של $\frac{2}{3}t\cdot 5=\frac{10t}{3}$ ק"מ.

סה"כ הדרך: $\frac{1}{3}tv+\frac{10}{3}t=x \quad (1)$

<u>הנער השני</u>:

הולך במהירות 5 קמ"ש שליש מהדרך - $\frac{1}{3}x$ $\leftarrow$ זמן ההליכה שלו $\frac{\frac{1}{3}x}{5}=\frac{x}{15}$

רוכב את שאר הדרך - $\frac{2}{3}x$ במהירות v קמ"ש $\leftarrow$ זמן הרכיבה שלו $\frac{\frac{2}{3}x}{v}=\frac{2x}{3v}$

סה"כ הזמן: $\frac{x}{15}+\frac{2x}{3v}=t \quad (2)$

נכפול משוואה (1) ב- 3: $t(v+10)=3x \quad \leftarrow \quad t=\frac{3x}{v+10}$

נכפול משוואה (2) ב- 15v: $xv+10x=15tv \quad \leftarrow \quad t=\frac{xv+10x}{15v}=\frac{x(v+10)}{15v}$

$\leftarrow \quad \frac{x(v+10)}{15v}=\frac{3x}{v+10}$

נכפול בהצלבה: $45xv=x(v+10)^2 \quad /:x \quad (x\neq 0)$

$45v=v^2+20v+100 \quad \leftarrow \quad v^2-25v+100=0$

$v=5$ (נתון $v>5$) , <u>$v=20$ קמ"ש</u>

### פתרון שאלה 2

א) סדרת האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים וסדרת האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים

הן סדרות חשבוניות $a_{k+2}-a_k=2d$

| | מקומות אי זוגיים | מקומות זוגיים |
|---|---|---|
| איבר ראשון | $a_1$ | $a_1+d$ |
| הפרש | 2d | 2d |
| מספר איברים | n | n |

סכום האיברים במקומות הזוגיים: $\frac{n}{2}[2(a_1+d)+(n-1)2d]=n(a_1+nd)$

סכום האיברים במקומות האי זוגיים: $\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)2d]=n(a_1+nd-d)$

ההפרש בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים:

$$n(a_1+nd)-n(a_1+nd-d)=n(a_1+nd-a_1-nd+d)=nd$$

ב) $nd=45$ , $a_1=4d$ ,

$a_1+a_{2n}=111$ ← $a_1+a_1+(2n-1)d=111$ ← $8d+2nd-d=111$

← $7d+2\cdot45=111$ ← $d=3$ ← $n=15$ ← בסדרה 30 איברים

## פתרון שאלה 3

א) המשלים של: לכל היותר ל- 3 מכוניות יש כרית אויר הוא לכל 4 המכוניות יש כרית אויר .

נסמן: p – ההסתברות שלמכונית יש כרית אויר ← $p^4=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$ ← $p=\frac{1}{3}$

← ל- $33\frac{1}{3}\%$ מהמכוניות בארץ יש כרית אויר .

ב) על פי ברנולי: $p=\frac{1}{3}$ , $n=4$ , $k=1$ ← $P_4(1)=\binom{4}{1}(\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$

ג) נגדיר מאורעות: A – מכונית עם כרית אויר , B – מכונית לבנה

מצאנו כי $p(A)=\frac{1}{3}$ ← $p(\overline{A})=\frac{2}{3}$ . נתון: $p(B)=40\%=\frac{2}{5}$ ← $p(\overline{B})=\frac{3}{5}$

נתון: ברבע מהמכוניות הלבנות יש כרית אויר ← $P(A/B)=\frac{1}{4}$ ← $\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{1}{4}$

← $p(A\cap B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ . נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר:

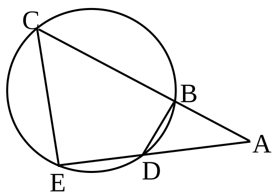
| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $\overline{B}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{3}{5}$ |
| | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | |

ההסתברות שמכונית היא לבנה אם ידוע שיש בה כרית אויר: $P(B/A)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{10}$

ההסתברות שמכונית אינה לבנה אם ידוע שיש בה כרית אויר: $P(\overline{B}/A)=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{10}$

ההסתברות שמכונית אחת לבנה ומכונית אחת אינה לבנה היא ההסתברות שהראשונה לבנה והשנייה לא <u>או</u> השנייה לבנה והראשונה לא ← $p=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}=0.42$

## פתרון שאלה 4




נתון: AB = 3 ס"מ , BC = 5 ס"מ , $S_{BCED}=3S_{ABD}$

צ"ל: א) AD = ? , DE = ?

ב) $S_{\Delta CDE}:S_{\Delta CBD}=?$

<u>הוכחה</u> :

א) $\measuredangle ECB + \measuredangle EDB = 180°$ סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל

$\measuredangle ADB + \measuredangle EDB = 180°$ סכום זוויות צמודות $\leftarrow$ $\measuredangle ADB = \measuredangle ECB$

$\measuredangle A = \measuredangle A$ $\leftarrow$ $\Delta\ ABD \sim \Delta\ AEC$ (ז.ז.)

נתון $S_{BCED} = 3S_{ABD}$ $\leftarrow$ $S_{\Delta AEC} = 4S_{\Delta ABD}$

$\leftarrow$ $(\frac{AB}{AE})^2 = \frac{1}{4}$ יחס השטחים של משולשים דומים הוא ריבוע יחס הצלעות

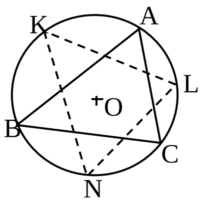
$\leftarrow$ $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ $AD = 0.5AC = 4$ , $AE = 2AB = 6$ $\leftarrow$ <u>AD = 4 ס"מ</u> , <u>DE = 2 ס"מ</u>

ב) מצאנו כי $DE = 2$ , $AD = 4$ $\leftarrow$ $DE = \frac{1}{3}AE$ $\leftarrow$ $S_{\Delta CDE} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACE}$ , $S_{\Delta ACD} = \frac{2}{3}S_{\Delta ACE}$

נתון : $BC = 5$ , $AB = 3$ $\leftarrow$ $BC = \frac{5}{8}AC$ $\leftarrow$ $S_{\Delta CBD} = \frac{5}{8}S_{\Delta ACD} = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}S_{\Delta ACE} = \frac{5}{12}S_{\Delta ACE}$

$\leftarrow$ $S_{\Delta CDE} : S_{\Delta CBD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACE} : \frac{5}{12}S_{\Delta ACE} = \frac{1}{3} : \frac{5}{12} = 4 : 5$

## <u>פתרון שאלה 5</u>




במשולש ABC  AB = 10 ס"מ ; AC = 7 ס"מ ; BC = 8 ס"מ.

בעזרת משפט הקוסינוסים נמצא זווית :

$$8^2 = 10^2 + 7^2 - 2\cdot 10\cdot 7\cdot \cos BAC$$

$140\cdot\cos BAC = 85$ $\leftarrow$ $\cos BAC = 0.607$ $\leftarrow$ $\measuredangle BAC = 52.6°$.

בעזרת משפט הסינוסים נמצא את רדיוס המעגל וזווית נוספת במשולש :

$\frac{BC}{\sin 52.6°} = 2R$ $\leftarrow$ R = 5.035 ס"מ .

$\frac{BC}{\sin 52.6°} = \frac{AB}{\sin ACB}$ $\leftarrow$ $\measuredangle ACB = 83.23°$ $\leftarrow$ $\measuredangle ABC = 44.17°$

N אמצע BC $\leftarrow$ $\measuredangle BAN = \measuredangle CAN = 26.3°$

K אמצע AB $\leftarrow$ $\measuredangle BCK = \measuredangle ACK = 41.6°$

L אמצע AC $\leftarrow$ $\measuredangle CBL = \measuredangle ABL = 22.1°$

על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות לכן :

$\measuredangle BAN = \measuredangle BLN = 26.3°$ , $\measuredangle CKN = \measuredangle CAN = 26.3°$ , $\measuredangle BCK = \measuredangle BLK = 41.6°$ ,

$\measuredangle ANK = \measuredangle ACK = 41.6°$ , $\measuredangle CBL = \measuredangle CKL = 22.1°$ , $\measuredangle ANL = \measuredangle ABL = 22.1°$.

זוויות המשולש KLN : $\measuredangle LKN = 22.1° + 26.3° = 48.4°$

$\measuredangle KNL = 41.6° + 22.1° = 63.7°$  $\measuredangle NLK = 41.6° + 26.3° = 67.9°$

בעזרת משפט הסינוסים נמצא את KN $\frac{KN}{\sin 67.9°} = 2R = 10.07$ $\leftarrow$ $KN = 9.33$

$$S_{\Delta NKL} = \frac{9.33^2\cdot\sin 48.4°\cdot\sin 63.7°}{2\sin 67.9°} = 31.5$$

שטח המשולש <u>31.5 סמ"ר</u>

## פתרון שאלה 6

הריבועים של אורכי צלעות משולש הם: $a^2+ma^2$ , $a^2$ , $a^2-ma^2$ $(m>0)$ .

א) בכל משולש יש שתי זוויות חדות. המשולש יהיה חד זווית אם הזווית הגדולה חדה.

הזווית הגדולה נמצאת מול הצלע הגדולה - $a^2+ma^2$.

משפט הקוסינוסים: $a^2+ma^2=a^2+a^2-ma^2-2\cdot a\cdot a\sqrt{1-m}\cdot\cos\alpha$

$2\sqrt{1-m}\cdot\cos\alpha=1-2m \leftarrow \cos\alpha=\frac{1-2m}{2\sqrt{1-m}}$

α זווית חדה $\leftarrow \cos\alpha>0 \leftarrow 1-2m>0 \leftarrow m<0.5$

נתון $m>0 \leftarrow$ $\underline{0<m<0.5}$ .

ב) כאשר $m=0.36$ : $\cos\alpha=0.175 \leftarrow \alpha=79.92°$ .

הריבועים של אורכי הצלעות הם: $1.36a^2$ , $a^2$ , $0.64a^2$

אורכי הצלעות הם: $1.166a$ , $a$ , $0.8a$ .

שטח המשולש: $S=\frac{1}{2}\cdot0.8a\cdot a\cdot\sin79.92° \leftarrow \underline{S=0.394a^2}$

## פתרון שאלה 7

א) $g(x)=f^2(x) \leftarrow g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)$

ערכי x של נקודות הקיצון של $g(x)$ הם הפתרונות של המשוואה $g'(x)=0$

$\leftarrow$ ערכי x של נקודות הקיצון של $g(x)$ הם הפתרונות של המשוואה $2f(x)\cdot f'(x)=0$ .

מכיוון שהפונקציה $f(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה, יהיו אלה הפתרונות של $f'(x)=0$

ואלה ערכי x של נקודות הקיצון של $f(x)$ .

ראינו כי לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון באותם ערכים של x . עכשיו נראה כי

כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום גם ל- $g(x)$ יש נקודת מינימום.

נסמן $x=a$ נקודת מינימום של $f(x)$ $\leftarrow$ כאשר $x<a$ אז $f'(x)<0$ ואז גם $g'(x)<0$

כי $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)$ ו- $f(x)$ חיובית. וכאשר $x>a$ אז $f'(x)>0$ ואז גם $g'(x)>0$

$\leftarrow$ גם ל- $g(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x=a$ . כנ״ל לנקודת מקסימום.

ב) נמצא את ערכי x של נקודות הקיצון של $g(x)=f^2(x)=\frac{x^4+8x^2-9}{x^4}$

נגזור: $g'(x)=\frac{(4x^3+16x)\cdot x^4-4x^3\cdot(x^4+8x^2-9)}{x^8}=\frac{-16x^5+36x^3}{x^8}=\frac{-16x^2+36}{x^5}$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל $x=\pm1.5$ .

נמצא את סוג הקיצון:

| x | | -1.5 | | 0 | | 1.5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | + | | − | | − | | + |
| y | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ |

את ערכי ה- y נמצא על ידי הצבה ב- $f(x)$ : $\left(\pm1\frac{1}{2},1\frac{2}{3}\right)$ נקודות מקסימום.

## פתרון שאלה 8

א) הפונקציה הנתונה היא $f(x)=\frac{4x-x^2}{x^2-ax+12}$ .

אסימפטוטה אנכית מתקבלת עבור ערכי x המאפסים את המכנה: $x^2-ax+12=0$

אלא אם אותו ערך מאפס גם את המונה ואז מתקבלת נקודה סליקה (נקודת אי הגדרה).

המונה הוא ביטוי ריבועי המתאפס עבור שני ערכים של x: $4x-x^2=0$ $\leftarrow$

$x(4-x)=0$ $\leftarrow$ $x=4$ , $x=0$ . נתון שלפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד

$\leftarrow$ אחד משני הערכים שמצאנו מאפס גם את המונה וגם את המכנה.

נציב במכנה את ערכי x המאפסים את המונה:

$x=0$ $\leftarrow$ $0^2-a\cdot 0+12=12$ לא מאפס את המכנה

$x=4$: $4^2-4a+12=0$ $\leftarrow$ $4a=28$ $\leftarrow$ $a=7$ $\leftarrow$ המכנה הוא $x^2-7x+12$ .

המכנה מתאפס עבור $x=3$ ו- $x=4$ אבל רק $x=3$ היא אסימפטוטה אנכית.

ב) $f(x)=\frac{4x-x^2}{x^2-7x+12}=\frac{4x-x^2}{(x-3)(x-4)}=\frac{x(4-x)}{(x-3)(x-4)}=\frac{x}{3-x}$

<u>תחום הגדרה</u>: $x\neq 4$ , $x\neq 3$ .

<u>תחומי עלייה וירידה</u>: נגזור את הפונקציה $f'(x)=\frac{1(3-x)-x(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3}{(3-x)^2}$ $\leftarrow$

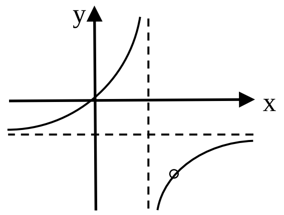
הנגזרת חיובית $\leftarrow$ הפונקציה עולה לכל $x\neq 4$ , $x\neq 3$ .

<u>נקודות חיתוך עם הצירים</u>: $x=0$ $\leftarrow$ $f(0)=\frac{0}{3}=0$ $\leftarrow$ $\underline{(0,0)}$

$y=0$ $\leftarrow$ $0=\frac{x}{3-x}$ $\leftarrow$ $(0,0)$

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{3-x}=-1$ $\leftarrow$ $y=-1$

ג)




ד) נתון: $g(x)=f'(x)=\frac{3}{(3-x)^2}$ . נגזור למציאת שיפוע המשיק: $g'(x)=\frac{6}{(3-x)^3}$

שיפוע המשיק: $m=g'(2)=\frac{6}{(3-2)^3}=6$ . $g(2)=\frac{3}{(3-2)^2}=3$ $\leftarrow$ נקודת ההשקה: $(2,3)$

משוואת המשיק: $y-3=6(x-2)$ $\leftarrow$ $y=6x-9$ . נחשב את השטח.

לא ידוע אם המשיק נמצא מעל לגרף הפונקציה או מתחתיו ולכן נשתמש בערך מוחלט.

כמו כן נתון: $g(x)=f'(x)$ $\leftarrow$ $\int g(x)dx=f(x)+c$ .

$$S=\left|\int_0^2\left[\frac{3}{(3-x)^2}-(6x-9)\right]dx\right|=\left|\frac{x}{3-x}-3x^2+9x\Big|_0^2\right|=|2-12+18-0|=8$$

## פתרון שאלה 9

$(t\,,\,t^2+3)$ נקודה על $f(x)$. נגזור את הפונקציה $f'(x)=2x$ $\leftarrow$ שיפוע המשיק $2t$.

משוואת המשיק: $y-(t^2+3)=2t(x-t)$ $\leftarrow$ $y=2tx-t^2+3$

נמצא את נקודות החיתוך של המשיק ו- $g(x)$: $x^2+x=2tx-t^2+3$ $\leftarrow$

$x^2+(1-2t)x+t^2-3=0$ $\leftarrow$ $x_{A,B}=\frac{-1+2t\pm\sqrt{1-4t+4t^2-4t^2+12}}{2}=\frac{-1+2t\pm\sqrt{13-4t}}{2}$

נרשום פונקציה לאורך הקטע AB: $d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

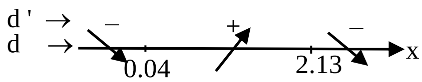
נחשב את $x_A-x_B$: $x_A-x_B=\frac{-1+2t+\sqrt{13-4t}}{2}-\frac{-1+2t-\sqrt{13-4t}}{2}=\sqrt{13-4t}$

$y_A-y_B=2t\,x_A-t^2+3-(2t\,x_B-t^2+3)=2t\,(x_A-x_B)=2t\sqrt{13-4t}$

$\leftarrow$ $d=\sqrt{13-4t+4t^2(13-4t)}=\sqrt{-16t^3+52t^2-4t+13}$

נגזור $d'=\frac{-48t^2+104t-4}{2\sqrt{-16t^3+52t^2-4t+13}}$ ונשווה את הנגזרת לאפס: $-48t^2+104t-4=0$ $\leftarrow$

נקודות הקיצון: $t=2.13$ , $t=0.04$ . סוג הקיצון:




אורך AB מקסימלי כאשר הנקודה היא $(2.13\,,\,7.53)$

## מבחן 24

### פתרון שאלה 1

א) $x$ – זמן הרכיבה של דניאל עד שהשיג את ערן

לערן ודניאל דרכים שוות עד שדניאל השיג את ערן $\leftarrow$ $(a^2-6a+10)\cdot x=a(x+a-2)$

$\leftarrow$ $x(a^2-7a+10)=a(a-2)$ $\leftarrow$ $x(a-5)(a-2)=a(a-2)$ $\leftarrow$ $x=\frac{a}{a-5}$

ב) $a-2>0$ וגם $a^2-6a+10>0$ וגם $\frac{a}{a-5}>0$

$a>2$ וגם $R$ וגם ($a<0$ או $a>5$) $\leftarrow$ $\underline{a>5}$

ג) למשוואה $x(a-5)(a-2)=a(a-2)$ יש אינסוף פתרונות כאשר $a=2$ אבל אז המהירות של ערן היא 0 לכן לא קיים ערך של a שמספק אינסוף פתרונות.

ד) $\frac{a}{a-5}>3$ $\leftarrow$ $\frac{a}{a-5}-3>0$ $\leftarrow$ $\frac{a-3a+15}{a-5}>0$ $\leftarrow$ $\frac{-2a+15}{a-5}>0$ $\leftarrow$ $\underline{5<a<7.5}$

ה) $y$ – זמן הרכיבה של ליאור. לליאור וערן דרכים שוות: $(a+6)y=a(y+a-2+1)$

$\leftarrow$ $y(a+6-a)=a^2-a$ $\leftarrow$ $y=\frac{a^2-a}{6}$

### פתרון שאלה 2

א) בסדרה חשבונית האיבר ה- 19 גדול ב- 56 מהאיבר החמישי

$\leftarrow$ $a_1+18d=a_1+4d+56$ $\leftarrow$ $14d=56$ $\leftarrow$ $\underline{d=4}$ .

סכום 10 איברים הראשונים הוא 70

$$\underline{a_1=-11} \leftarrow 70=5(2a_1+36) \leftarrow 70=\frac{10}{2}\cdot[2a_1+9\cdot 4] \leftarrow$$

ב) דרך I : בסדרה יש 32 איברים. סכום k האיברים האחרונים הוא חלק הסדרה המתחיל באיבר ה- (32 – k + 1) ויש בו k איברים.

איברי הסדרה : $\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{32-k}}_{\text{איברים ראשונים } 32-k},\ \underbrace{a_{33-k}, \dots, a_{32}}_{\text{איברים אחרונים } k}$

$$a_{32-k+1}=a_{33-k}=a_1+(32-k)d=-11+(32-k)\cdot 4=117-4k$$

$$2k^2-115k+950=0 \leftarrow 950=\frac{k}{2}[2\cdot(117-4k)+(k-1)\cdot 4]$$

$\underline{k=10}$ , (k שלם) $\cancel{k=47.5}$

דרך II : סכום כל איברי הסדרה הוא $S_{32}=\frac{32}{2}\cdot[-22+31\cdot 4]=1632$

נתון כי סכום k האיברים האחרונים בסדרה הוא 950

← סכום $32-k$ הראשונים הוא $1632-950=682$

$$682=(32-k)(-11+(31-k)\cdot 2)] \leftarrow 682=\frac{32-k}{2}\cdot[-22+(32-k-1)\cdot 4] \leftarrow$$

$$\cancel{k=47.5} \text{ או } \underline{k=10} \leftarrow 2k^2-115k+950=0 \leftarrow$$

**פתרון שאלה 3**

נגדיר מאורעות : הסטודנט מצליח במבחן הראשון (בתחילת השנה) - A

הסטודנט מצליח במבחן השני (בסיום השנה)- B

ידוע : 70% מצליחים במבחן הראשון : $P(A)=0.7$

80% מבין המצליחים במבחן הראשון, מצליחים גם במבחן השני : $P(B/A)=0.8$

91% מבין הסטודנטים בפקולטה למתמטיקה מצליחים לפחות באחד משני המבחנים :

$P(A\cup B)=0.91$ .

$$P(A\cap B)=0.56 \leftarrow 0.8=\frac{P(A\cap B)}{0.7} \leftarrow P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$P(A\cup B)=0.91=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$

נגדיר מאורעות : הסטודנט מצליח במבחן הראשון (בתחילת השנה) – A

הסטודנט מצליח במבחן השני (בסיום השנה)- B

ידוע : 70% מצליחים במבחן הראשון : $P(A)=0.7$

80% מבין המצליחים במבחן הראשון, מצליחים גם במבחן השני : $P(B/A)=0.8$

91% מבין הסטודנטים בפקולטה למתמטיקה מצליחים לפחות באחד משני המבחנים :

$P(A\cup B)=0.91$ .

$$P(A\cap B)=0.56 \leftarrow 0.8=\frac{P(A\cap B)}{0.7} \leftarrow P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.09 \leftarrow P(A\cup B)=0.91=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר :

| | A | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| B | 0.56 | 0.21 | 0.77 |
| $\bar{B}$ | 0.14 | 0.09 | 0.23 |
| | 0.7 | 0.3 | 1 |

א) ידוע שהסטודנט שנבחר נכשל במבחן הראשון. עלינו לחשב את ההסתברות שיצליח במבחן השני: $P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.21}{0.3} = \underline{0.7}$

ב) בוחרים 4 סטודנטים. ההסתברות של כל אחד מהם להצליח במבחן השני, אם ידוע שנכשל במבחן הראשון, היא 0.7 (חשבנו בסעיף א).
ההסתברות שתנאי זה לא יתקיים היא 0.3.

לפחות שלושה מבין הארבעה שנבחרו יקיימו את התנאי ← 3 או 4 יקיימו.

ההסתברות ש 3 מהם יקיימו את התנאי: $P(3) = \binom{4}{3}\cdot 0.7^3 \cdot 0.3 = 0.4116$

ההסתברות שכל ה-4 יקיימו את התנאי: $P(4) = \binom{4}{4}\cdot 0.7^4 \cdot 0.3^0 = 0.2401$

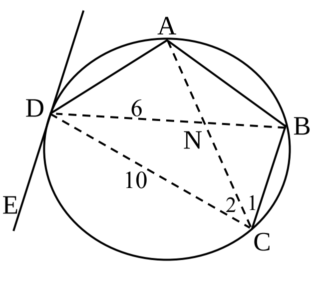
ההסתברות שלפחות 3 מהם יקיימו את התנאי: $P= 0.4116+0.2401=\underline{0.6517}$

ג) 0.56 מהסטודנטים הצליחו בשני המבחנים ← מספר הסטודנטים שהצליחו בשני המבחנים הוא $0.56 \times 50 = 28$. ניסו להתקבל למסלול הישיר 25% ← 7 סטודנטים.

בנוסחת ברנולי נציב: $n = 7$, $k = 0$ או $k = 1$, $p = 0.6$ ← $p = p(0) + p(1)$

$P(0) = \binom{7}{0}\cdot 0.6^0 \cdot 0.4^7 = 0.00164$, $P(1) = \binom{7}{1}\cdot 0.6^1 \cdot 0.4^6 = 0.0172$ ← $\underline{p = 0.01884}$

## פתרון שאלה 4




א) DE משיק למעגל ← $\measuredangle EDC = \measuredangle DBC$
(זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני).

$DE \| BC$ ← $\measuredangle EDC = \measuredangle DCB$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים) ← $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB$ ←

$BD = DC =$ 10 ס"מ (מול זוויות שוות במשולש, מונחות צלעות שוות. ← $BN =$ 4 ס"מ.

נתון: $AD=AB$ ← $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$ (על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות).

← CN הוא חוצה זווית C במשולש BDC ← על פי תכונת חוצה זווית במשולש:

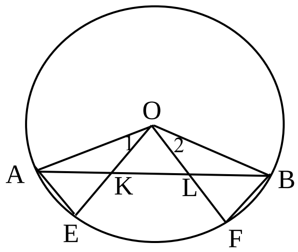
$\frac{DN}{NB} = \frac{DC}{BC}$ ← $\frac{6}{4} = \frac{10}{BC}$ ← $\underline{BC = 6\frac{2}{3}}$ ס"מ

ב) נתון: $\measuredangle BDC = \alpha$ הוכחנו כי $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB$ ← $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB = 90° - 0.5\alpha$

$\measuredangle DAB + \measuredangle DCB = 180°$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°)

← $\measuredangle DAB = 90° + 0.5\alpha$. $AD = AB$ (נתון) ← $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD$ (זוויות בסיס במש״ש)

$\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = 45° - 0.25\alpha$ (משלימות ל- 180° במשולש ABD).




## פתרון שאלה 5

AB מיתר במעגל שמרכזו O. AK=KL=LB.

א) צריך להוכיח: BF=AE

נחפוף משולשים: $\Delta AOK$, $\Delta BOL$:

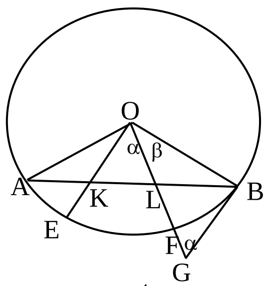
AO=BO (רדיוסים), AK=LB (נתון),

$\measuredangle A = \measuredangle B$ (זוויות בסיס במש״ש AOB) ← $\Delta AOK \cong \Delta BOL$ לפי צ.ז.צ

← $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים).

← BF=AE (לזווית מרכזיות שוות מתאימים מיתרים שווים). מ.ש.ל א׳

ב) צריך להוכיח $BF < EF$




בניית עזר: נמשיך את OF עד G, כך ש OL=LG.

KL=LB (נתון), OL=LG (על פי בניית העזר),

$\measuredangle KLO = \measuredangle GLB$ (זוויות קדקודיות) ←

$\Delta GLB \cong \Delta OLK$ לפי צ.ז.צ

מהחפיפה נקבל $\measuredangle KOL = \measuredangle LGB = \alpha$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים).

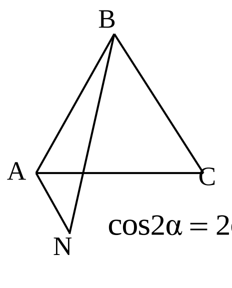
וכן OK=GB (צלעות מתאימות במשולשים חופפים).

OK הוא חלק מהרדיוס ← $OK < OB$ ← $GB < OB$

← $\beta < \alpha$ - במשולש OGB מול הצלע הקטנה מונחת הזווית הקטנה

← $BF < EF$ – לזווית מרכזית קטנה יותר, מתאים מיתר קטן יותר

(BF מתאים ל- β, EF מתאים ל-α). מ.ש.ל ב׳




## פתרון שאלה 6

נסמן $\measuredangle NAC = \measuredangle CAB = \alpha$

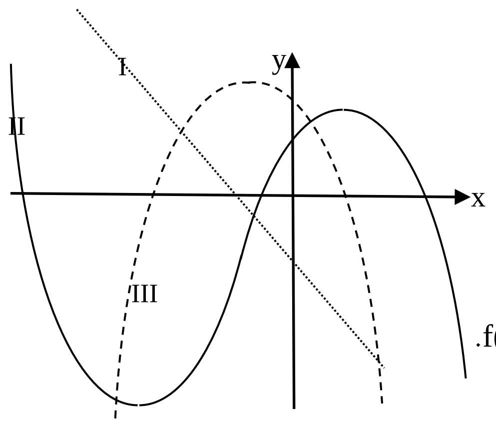
משפט הקוסינוסים במשולש ABC: $a^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$2ab\cos\alpha = b^2$ ← ← $\cos\alpha = \frac{b}{2a}$ ← $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{b^2}{4a^2} - 1 = \frac{b^2 - 2a^2}{2a^2}$

משפט הקוסינוסים ב- $\Delta ABN$: $BN^2 = a^2 + m^2 - 2am\cos 2\alpha = a^2 + m^2 - 2am\cdot\frac{b^2-2a^2}{2a^2} =$

$$= a^2 + m^2 - \frac{mb^2}{a} + 2am = (a+m)^2 - \frac{mb^2}{a}$$

## פתרון שאלה 7




א) בהנחה שהפונקציות הן פולינומים – כל פעם שגוזרים יורדת המעלה של הפולינום ←

גרף I, שהוא קו ישר (פולינום ממעלה ראשונה), מתאר את הנגזרת השנייה $f''(x)$, גרף III, שצורתו פרבולה (פולינום ממעלה שנייה), מתאר את הנגזרת הראשונה $f'(x)$ וגרף II מתאר את $f(x)$.

כמו כן ניתן לראות כי בתחומים בהם גרף II יורד אז גרף III מקבל ערכים שליליים, כאשר גרף II עולה אז גרף III מקבל ערכים חיוביים, ובנקודות הקיצון של גרף II – גרף III מתאפס ← גרף III הוא נגזרת של גרף II.

כאשר גרף III יורד – גרף I שלילי, כאשר גרף III עולה – גרף I חיובי ובנקודת הקיצון של גרף III – גרף I מתאפס ← גרף I הוא נגזרת של גרף III.

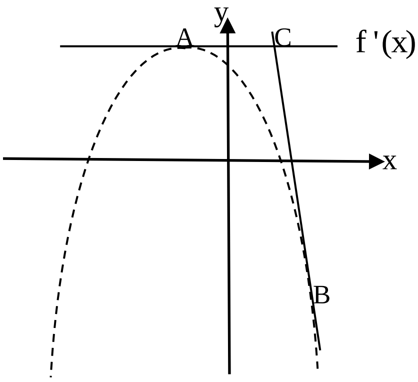
לסיכום: $f(x)$ - II , $f'(x)$ - III , $f''(x)$ - I.

ב) $f'(x)$ מתאר פונקציה ממעלה שנייה $f'(x)=ax^2+bx+c$ לפונקציה זו העבירו שני משיקים. המשיק בנקודה $(-2\ ,\ 16)$ עובר בנקודה $(2\ ,16)$ ולכן המשוואה שלו $y = 16$

← הנקודה $(-2\ ,\ 16)$ היא נקודת הקיצון של $f'(x)$ ← $\frac{-b}{2a}=-2$ ← $b = 4a$

← $f'(x)=ax^2+4ax+c$ . נציב את שתי הנקודות $(6\ ,\ -48)$ ו- $(-2\ ,\ 16)$ בפרבולה

$f'(x)=ax^2+4ax+c$ ונקבל: $-48=36a+24a+c$ ו- $16=4a-8a+c$




פתרון המשוואות: $a = -1\ ,\ c = 12$ ← $f'(x)=-x^2-4x+12$

← $f(x)=-\frac{x^3}{3}-2x^2+12x+d$ .

נמצא את השטח בין $y = 16$ לגרף הפונקציה בין 2- ל- 6 ונחסיר ממנו את שטח משולש ABC .

$$S=\int_{-2}^{6}[16-(-x^2-4x+12)]dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\Big|_{-2}^{6}=$$

$$=72+72+24-(-\frac{8}{3}+8-8)=170\frac{2}{3}$$

שטח משולש ABC: $S_{\Delta}=\frac{[2-(-2)]\cdot[16-(-48)]}{2}=\frac{4\cdot 64}{2}=128$ ← $S=170\frac{2}{3}-128=42\frac{2}{3}$

## פתרון שאלה 8

א) $f(-a)=\frac{\sin^3(-a)}{[\cos^3(-a)-3\cos(-a)]^2}=\frac{-\sin^3a}{[\cos^3a-3\cos a]^2}=-f(a)$ ← הפונקציה היא אי זוגית.

ב) (1) נקודת חיתוך עם ציר y : $x=0$ ← $f(0)=\frac{\sin^3 0}{(\cos^3 0-3\cos 0)^2}=0$

חיתוך עם ציר x: $y=0$ ← $0=\frac{\sin^3x}{(\cos^3x-3\cos x)^2}$ ← $\sin x=0$ ←

$x=\pi k$ ← $x=0,\pi$ ← נקודות החיתוך הן: $(0,0)$ , $(\pi,0)$

(2) תחום ההגדרה של הפונקציה: $(\cos^3x-3\cos x)^2\neq 0$ ← $\cos^3x-3\cos x\neq 0$

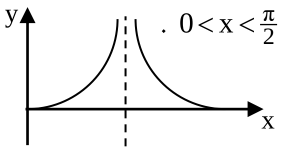
← $\cos x(\cos^2x-3)\neq 0$ ← $\cos x\neq 0,\ \cos^2x-3\neq 0$ ← $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

בתחום הנתון $x\neq\frac{\pi}{2}$ ← <u>אסימפטוטה מקבילה לציר y</u> $x=\frac{\pi}{2}$ .

(3) $f(x)=\frac{\sin^3x}{(\cos^3x-3\cos x)^2}>0$ המכנה חיובי לכל x בתחום ההגדרה ← $\sin^3x>0$ ←

$\sin x>0$ ← הפונקציה חיובית בתחום $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$ .

(4) מהסעיפים הקודמים, גרף הפונקציה הוא:

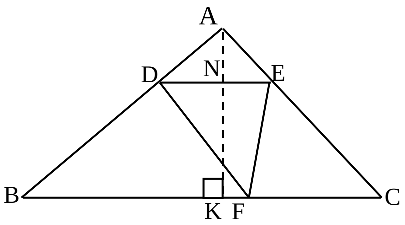



## <u>פתרון שאלה 9</u>

א) נתון משולש ABC , $BC=a$ , $AK=h$ , $DE\parallel BC$ .

F נקודה כלשהי על BC. עלינו למצוא את אורך DE

שעבורו שטח המשולש DEF מקסימלי. נסמן: $DE=x$




נתון $DE\parallel BC$ ← $\Delta ADE\sim\Delta ABC$ ← $\frac{DE}{BC}=\frac{AN}{AK}$ ← $\frac{x}{a}=\frac{AN}{h}$ ← $AN=\frac{hx}{a}$

גובה המשולש DEF: $KN=AK-AN=h-\frac{hx}{a}=\frac{h(a-x)}{a}$

שטח המשולש DEF: $S=\frac{1}{2}DE\cdot NK=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{h(a-x)}{a}=\frac{h}{2a}(ax-x^2)$

למציאת השטח המקסימלי, נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס:

$S'=0$ , $S'=\frac{h}{2a}(a-2x)$ ← $a-2x=0$ ← $x=\frac{a}{2}$

נבדוק אם השטח הוא אכן מקסימלי: $S''=\frac{h}{2a}\cdot(-2)<0$

השטח המקסימלי של משולש DEF מתקבל עבור $\underline{x=\frac{a}{2}}$ והוא: $S=\frac{h}{2a}[a\cdot\frac{a}{2}-(\frac{a}{2})^2]=\underline{\frac{ah}{8}}$

ב) $\Delta ADE\sim\Delta ABC$ ← $\frac{b}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{x}{a}$ ← $AB=\frac{ab}{x}$ ← $BD=\frac{ab}{x}-b$

נתון $AB=AC$ ← $\measuredangle B=\measuredangle C$ ← $\measuredangle ADE=\measuredangle AED$ ← $AD=AE$ ← $BD=CE$

היקף הטרפז: $y=a+x+2(\frac{ab}{x}-b)$ ← $y'=1-\frac{2ab}{x^2}$ ← $y'=0$ כאשר $\underline{x=\sqrt{2ab}}$

**מבחן 26**

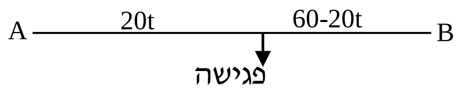
**פתרון שאלה 1**

א) נסמן את מהירות המכונית ב- x. עד לפגישה נסע רוכב האופניים t שעות. המכונית יצאה שעה וחצי אחריו ← נסעה t – 1.5 שעות. הם עברו דרך שווה: $20\cdot t = x(t-1.5)$ (I)

המכונית חזרה ל- A ← מיציאתה לדרך עברה סה"כ פעמיים את המרחק שנסעה עד הפגישה כלומר, 40t וזמן הנסיעה שלה הוא $\frac{40t}{x}$.

הרוכב יצא לדרך שעה וחצי לפני המכונית ← זמן הרכיבה הכולל שלו הוא $\frac{40t}{x}+1\frac{1}{2}$.

נחשב את הדרך שעבר:




בעת הפגישה היה הרוכב במרחק 60 – 20t מ- B ← המרחק עכשיו קטן מ- $\frac{60-20t}{2}$

← הדרך שעבר גדולה מ- $60-\frac{60-20t}{2}=30+10t$ ומכאן:

$(\frac{40t}{x}+1\frac{1}{2})\cdot 20>30+10t$ ← $\frac{800t}{x}+30>30+10t$ ← $x<80$

כמו כן מהירות המכונית גדולה ממהירות האופניים לכן <u>מהירות המכונית</u>: $20<x<80$ .

ב) ממשוואה I נקבל: $x=\frac{20t}{t-1.5}$ ← $0<\frac{20t}{t-1.5}<80$ ← $t>0$ וגם $\frac{20t-80t+120}{t-1.5}<0$

נכפול את שני האגפים ב- $(t-1.5)^2$ ← $(120-60t)(t-1.5)<0$ ← $t>2$ או $t<1.5$ .

$t<1.5$ לא יתכן, כי המכונית עדיין לא יצאה מ- A ← $\underline{t>2}$

**פתרון שאלה 2**

א) נתון: $S_{n+1}=12-30\cdot 4^n-S_n$ ← $S_{n+1}+S_n=12-30\cdot 4^n$

נציב n = 1 ונקבל $S_2+S_1=12-30\cdot 4^1$ ← I $S_2+S_1=-108$

נציב n = 2 ונקבל $S_3+S_2=12-30\cdot 4^2$ ← II $S_3+S_2=-468$

נחסר משוואה ראשונה מהשנייה ונקבל $S_3-S_1=-360$ ← $a_1+a_2+a_3-a_1=-360$

← $a_2+a_3=-360$ ← $\underline{a_1(q+q^2)=-360}$

נחזור למשוואה I: $a_1+a_2+a_1=-108$ ← $2a_1+a_2=-108$ ← $\underline{a_1(2+q)=-108}$

נחלק את המשוואות: $\frac{a_1(q+q^2)}{a_1(2+q)}=\frac{-360}{-108}$ ← $\frac{q+q^2}{2+q}=\frac{10}{3}$ ← $3q+3q^2=20+10q$

← $3q^2-7q-20=0$ ← $q=4$ או $\cancel{q=-\frac{5}{3}}$ (נתון כי q שלם)

נציב q = 4 במשוואה $a_1(2+q)=-108$ ונקבל $a_1=-18$ ← $\underline{a_n=-18\cdot 4^{n-1}}$

ב) נתון: n = 10 . סכום 6 האיברים הראשונים הוא: $S_6=\frac{-18(4^6-1)}{4-1}=-6(4^6-1)$

סכום 6 האיברים האחרונים : האיבר הראשון הוא $a_5$ . $a_5 = -18 \cdot 4^4 = -18 \cdot 256$

$S_6$(איברים אחרונים) $= \frac{-18 \cdot 256 \cdot (4^6-1)}{4-1} = -6 \cdot 256 \cdot (4^6-1)$

היחס בין סכום 6 האיברים האחרונים לסכום 6 האיברים הראשונים הוא <u>256:1</u> .

## פתרון שאלה 3

נגדיר את המאורעות : A- כלי הרכב תקין , B- מכונית פרטית

<u>נתון</u> : 2 מכל 5 כלי רכב שנבדקו הן משאיות $\leftarrow$ $P(\overline{B}) = \frac{2}{5} = 0.4$ $\leftarrow$ $P(B) = 0.6$ ,

אם נבחר באקראי 2 כלי רכב שנבדקו, ההסתברות שבדיוק אחד מהם תקין היא 0.18 $\leftarrow$

על פי נוסחת ברנולי : $0.18 = \binom{2}{1} \cdot P(A) \cdot [1-P(A)]$ $\leftarrow$ $P(A)=0.1$ או $P(A)=0.9$

הפתרון הוא $P(A)=0.9$ על פי הנתון : רוב כלי הרכב נמצאו תקינים.

<u>נתון</u> : 5% מכלי הרכב הפרטיים שנבדקו הורדו מהכביש $\leftarrow$ $P(\overline{A}/B) = 0.05$

$P(\overline{A}/B) = 0.05 = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{0.6}$ $\leftarrow$ $P(\overline{A} \cap B) = 0.03$

$\leftarrow$ $P(A \cap B) = 0.6 - 0.03 = 0.57$

<u>הערה</u> : גם תוצאה זו מחזקת את הבחירה $P(A)=0.9$ כי חייב להתקיים $P(A \cap B) \le P(A)$ .

נארגן את הנתונים בטבלה ונשלים את החסר :

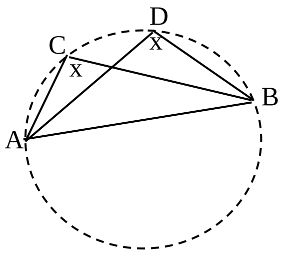
| | $\overline{A}$ | A | |
|---|---|---|---|
| 0.6 | 0.03 | 0.57 | B |
| 0.4 | 0.07 | 0.33 | $\overline{B}$ |
| 1 | 0.1 | 0.9 | |

א) $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.33}{0.4} = 0.825$ $\leftarrow$ <u>82.5%</u> מהמשאיות שנבדקו נמצאו תקינות.

ב) ההסתברות שיש לפחות משאית אחת בין 4 כלי רכב שנבדקו, שווה לכל האפשרויות פרט לאפשרות שכל 4 כלי הרכב הן מכוניות פרטיות : $1-0.6^4 = \underline{0.8704}$

## פתרון שאלה4

א) מהנקודות C ו- D רואים קטע נתון AB בזווית x . עלינו להוכיח

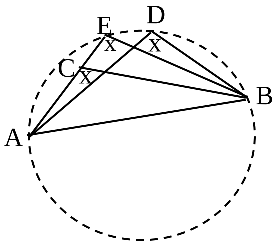



כי הנקודות A, C, D ו- B נמצאות על קשת של מעגל.

נעביר מעגל החוסם את המשולש ABD ונראה

שהנקודה C נמצאת על המעגל. הזווית ADB היא

זווית היקפית במעגל הנשענת על AB . נניח שהנקודה C בתוך המעגל.



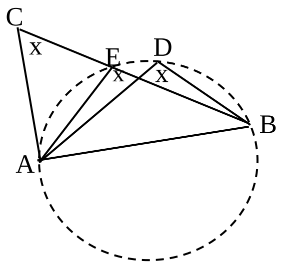

נמשיך את AC עד E, הזווית AEB היא זווית היקפית

הנשענת על AB ← $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = x$ ←

$\measuredangle AEB = \measuredangle ACB = x$ וזה לא יתכן כי קיבלנו במשולש EBC

זווית חיצונית השווה לזווית פנימית שאינה צמודה לה

← הנקודה C איננה בתוך המעגל.




נניח שהנקודה C מחוץ למעגל. הזווית AEB היא זווית

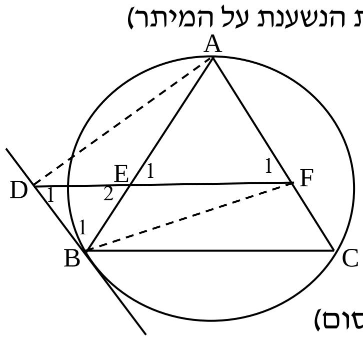
היקפית הנשענת על AB ← $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = x$

← $\measuredangle AEB = \measuredangle ACB = x$ וזה לא יתכן כי קיבלנו במשולש

AEC זווית חיצונית השווה לזווית פנימית שאינה

צמודה לה ← הנקודה C איננה מחוץ למעגל ← הנקודה C על המעגל. מ.ש.ל א׳

ב) (1) $\measuredangle B_1 = \measuredangle C$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר)




$EF \| BC$ (נתון) , $\measuredangle F_1 = \measuredangle C$ (זוויות מתאימות בין מקבילים)

← $\measuredangle F_1 = \measuredangle B_1$ (כלל המעבר)

← לפי סעיף א׳ , נק׳ F, A, D, B נמצאות על קשת של מעגל

← BDAF הוא מרובע בר חסימה

← $\measuredangle DAF + \measuredangle DBF = 180°$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום)

(2) $EF \| BC$ (נתון) ← $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (ז. ז) ← $\Delta ABC \sim \Delta DEB$ (כלל המעבר)

← $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEB}} = (\frac{AB}{DE})^2 = 2^2 = 4$ (היחס בין שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע

היחס בין צלעות מתאימות, ונתון AB = 2DE) ← $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta DEB}$ ( * )

$S_{\Delta AEF} = S_{BCFE}$ (נתון) ← $\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta AEF}+S_{EBCF}} = \frac{S_{\Delta AEF}}{2S_{\Delta AEF}} = \frac{1}{2}$

← $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta AEF}$ ( ** ) ← $S_{\Delta AEF} = 2S_{\Delta DEB}$ מתוך (*) ו- ( ** )

← $S_{BCFE} = 2S_{\Delta DEB}$ (נתון $S_{\Delta AEF} = S_{BCFE}$ )

למשולש DEB ולטרפז BCFE יש גובה שווה שהוא המרחק בין המקבילים BC ו- DF.

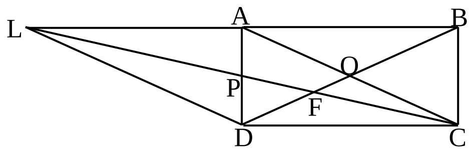
נסמן את הגובה הנ״ל ב- h . $S_{BCFE} = \frac{(BC+EF)\cdot h}{2}$ , $S_{\Delta DEB} = \frac{DE\cdot h}{2}$

← $2\cdot\frac{DE\cdot h}{2} = \frac{(BC+EF)h}{2}$ ← $DE = \frac{BC+EF}{2}$ קטע אמצעים בטרפז שווה

למחצית סכום הבסיסים ← DE שווה לקטע האמצעים בטרפז BCFE . מ.ש.ל

## פתרון שאלה 5

נתון: ABCD מלבן , AC||DL , AB=8 ס״מ , AD=3 ס״מ




צ״ל: א) $S_{\Delta DLP}=?$

ב) $S_{\Delta FOC}=S_{\Delta DPF}$

ג) הוכח: $2\cdot S_{\Delta BOC}=S_{\Delta ADL}$

הוכחה: א) ABCD מלבן (נתון) ← AB||DC (צלעות נגדיות במלבן)

AC||DL (נתון) ← ACDL מקבילית (שני זוגות של מקבילים)

AD הוא גובה לצלע CD של המקבילית ← $S_{ACDL}=8\cdot 3=$ 24 סמ״ר

$\Delta LDC\cong\Delta CAL$ (צ.צ.צ.) ← $S_{\Delta LDC}=S_{\Delta CAL}=\frac{24}{2}=$ 12 סמ״ר

LP = PC (אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה) ←

$S_{\Delta DLP}=S_{\Delta DCP}=\frac{12}{2}=$ 6 סמ״ר (תיכון מחלק משולש למשולשים שווי שטח) <u>מש״ל א</u>

ב) $S_{\Delta BCD}=\frac{8\cdot 3}{2}=$ 12 סמ״ר , BO = OD (אלכסונים במלבן חוצים זה את זה) ←

$S_{\Delta COD}=S_{\Delta BOC}=\frac{12}{2}=$ 6 סמ״ר (תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח)

ACDL מקבילית 6 סמ״ר $=S_{\Delta COD}=S_{\Delta DCP}$

נחסר משני השטחים את שטח משולש DFC ונקבל $S_{\Delta FOC}=S_{\Delta DPF}$ <u>מש״ל ב</u>

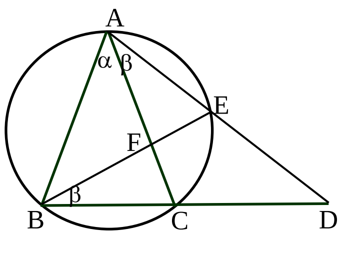
ג) ACDL מקבילית (הוכחנו) ← AL = CD = 8 ס״מ (צלעות נגדיות במקבילית שוות)

← $S_{\Delta ADL}=\frac{8\cdot 3}{2}=$ 12 סמ״ר . ראינו בסעיף ב׳ כי $S_{\Delta BOC}=$ 6 סמ״ר

← $2\cdot S_{\Delta BOC}=S_{\Delta ADL}$ <u>מש״ל ג</u>

## פתרון שאלה 6

נחשב את הזוויות: ABC משו״ש ← $\measuredangle ABC=\measuredangle ACB=90°-0.5\alpha$ .




$\measuredangle EBC=\measuredangle EAC=\beta$ (זוויות היקפיות על אותה קשת)

$\measuredangle ABE=90°-(\beta+0.5\alpha)$

$\measuredangle AEB=\measuredangle ACB=90°-0.5\alpha$ (זוויות היקפיות על אותה קשת)

$\measuredangle AFE=90°-(\beta-0.5\alpha)$ (משלימה ל- 180° במשולש AFE)

$\measuredangle D=90°-(\beta+0.5\alpha)$ (משלימה ל- 180° במשולש ABD)

א) נסמן: R – רדיוס המעגל הנתון. <u>במשולש ABC</u> משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

<u>משולש AEB</u> חסום במעגל הנתון. לפי משפט הסינוסים:

$\frac{AE}{\sin ABE}=\frac{AE}{\sin[90°-(\beta+0.5\alpha)]}=2R=\frac{a}{\sin\alpha}$ ← $AE=\frac{a\cdot\cos(\beta+0.5\alpha)}{\sin\alpha}$ .

נסמן: r – רדיוס המעגל החוסם את המשולש AFE.

$$2r=\frac{AE}{\sin AFE}=\frac{AE}{\sin[90°-(\beta-0.5\alpha)]}=\frac{a\cdot\cos(\beta+0.5\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos(\beta-0.5\alpha)}$$ ← $$\underline{r=\frac{a\cdot\cos(\beta+0.5\alpha)}{2\sin\alpha\cdot\cos(\beta-0.5\alpha)}}$$

ב) <u>משולש ABE</u> חסום במעגל הנתון:

$$\frac{BE}{\sin BAE}=\frac{BE}{\sin(\alpha+\beta)}=2R=\frac{a}{\sin\alpha}$$ ← $$BE=\frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

<u>במשולש BED</u>: $\frac{BE}{\sin D}=\frac{DE}{\sin DBE}$ ← $\frac{BE}{\sin[90°-(\beta+0.5\alpha)]}=\frac{DE}{\sin\beta}$ ←

$$\underline{DE=\frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos(\beta+0.5\alpha)}}$$

## <u>פתרון שאלה 7</u>

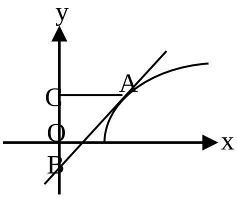
א) $2x-6\ge0$ ← $\underline{x\ge3}$

ב) נגזור את הפונקציה: $y'=\frac{2}{2\sqrt{2x-6}}=\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$ ← המונה הוא 1 ולכן חיובי. המכנה

הוא שורש ריבועי ולכן ערכו חיובי לכל $x>3$ ← $y'>0$ והפונקציה עולה לכל $x>3$.

ג) ערכו של שורש ריבועי אינו שלילי.

ד) נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה. נסמן $A(t,\sqrt{2t-6})$.




שיפוע המשיק בנקודה A הוא

$m=\frac{1}{\sqrt{2t-6}}$ ← משוואת המשיק: $y-\sqrt{2t-6}=\frac{1}{\sqrt{2t-6}}(x-t)$

← $y=\frac{1}{\sqrt{2t-6}}x+\sqrt{2t-6}-\frac{t}{\sqrt{2t-6}}$

כדי למצוא את נקודה B נציב $x=0$: $y=\sqrt{2t-6}-\frac{t}{\sqrt{2t-6}}$ ← $B(0,\sqrt{2t-6}-\frac{t}{\sqrt{2t-6}})$

$y_C=y_A$ ← $C(0,\sqrt{2t-6})$. נמצא את שטח $\Delta ABC$:

$BC=\sqrt{2t-6}-(\sqrt{2t-6}-\frac{t}{\sqrt{2t-6}})=\frac{t}{\sqrt{2t-6}}$, גובה המשולש: $AC=t$ ← $S_\Delta=\frac{t^2}{2\sqrt{2t-6}}$

נגזור: $$S_\Delta'=\frac{2t\cdot2\sqrt{2t-6}-t^2\cdot\frac{4}{2\sqrt{2t-6}}}{4(2t-6)}=\frac{4t\cdot(2t-6)-2t^2}{4(2t-6)^{1.5}}=\frac{3t^2-12t}{2(2t-6)^{1.5}}$$

$S_\Delta=0$ ← $\underline{t=4}$ או $t=0$ לא בתחום. נבדוק את סוג הקיצון

| t | $3<t<4$ | 4 | $t>4$ |
|---|---|---|---|
| y' | – | | + |
| y | ↘ | | ↗ |

עבור $t=4$ השטח מינימלי

הנקודה A: $A(4,\sqrt{2})$

משוואת המשיק: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$

ה) הפונקציה $y=-\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$ נמצאת מתחת לציר x בכל תחום ההגדרה שלה.

ראינו כי הנגזרת של הפונקציה $y=\sqrt{2x-6}$ היא $y'=\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

← השטח המוגבל בגרף הפונקציה $y=-\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$ , בציר x ובישרים $x = 5$ ו- $x = 11$ הוא

$$S=\int_5^{11}[0-(-\frac{1}{\sqrt{2x-6}})]dx=\int_5^{11}(\frac{1}{\sqrt{2x-6}})dx=\sqrt{2x-6}\Big|_5^{11}=4-2=2$$

המשיק $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$ נמצא מעל ציר x בתחום $5<x<11$ ויוצר טרפז עם ציר x

ועם הישרים $x = 5$ ו- $x = 11$ . אורכי הבסיסים של הטרפז $1.5\sqrt{2}$ ו- $4.5\sqrt{2}$ וגובהו 6

← שטח הטרפז הוא $6\sqrt{2}\cdot 6\cdot 0.5=18\sqrt{2}$ והשטח המבוקש הוא $18\sqrt{2}+2=27.46$

## פתרון שאלה 8

א) נציב את הנקודה הנתונה בפונקציה: $2\frac{1}{4}=\sin\frac{\pi}{6}+a\cos2\cdot\frac{\pi}{6}+b$

← $2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+b$ ← $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}a+b$

נגזור את הפונקציה ונציב $y = 0$ כאשר $x=\frac{\pi}{6}$ : $y'=\cos x-2a\sin 2x$ ←

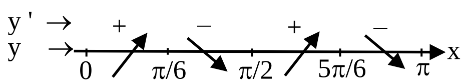
$0=\cos\frac{\pi}{6}-2a\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}$ ← $0=\frac{\sqrt{3}}{2}-2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{3}{2}$

ב) $y=\sin x+0.5\cos 2x+1.5\quad ,\quad y'=\cos x-\sin 2x$

נקודות קיצון: $\cos x-\sin 2x=0$ ← $\cos x-2\sin x\cos x=0$ ← $\cos x(1-2\sin x)=0$

← $\cos x = 0$ או $\sin x = 0.5$ ← $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ או $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ או $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

הפתרונות בתחום $0\le x\le\pi$ : $x=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}$ .




סוג הקיצון:

נקודות מקסימום: $(\frac{5\pi}{6},\frac{9}{4})$ , $(\frac{\pi}{6},\frac{9}{4})$ , נקודות מינימום: $(\frac{\pi}{2},2)$ , $(0\ ,\ 2)$ (קצה) , $(\pi,2)$ (קצה)

נקודות חיתוך עם הצירים: כאשר $x = 0$ מקבלים $y = 2$ ← $\underline{(0\ ,\ 2)}$ . כאשר $y = 0$

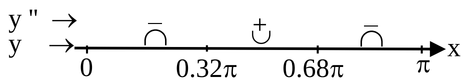
← $0=\sin x+0.5\cos 2x+1.5$ ← $0=\sin x+0.5(1-2\sin^2 x)+1.5$

← $\sin^2 x-\sin x-2=0$ ← $\sin x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ ← $\cancel{\sin x=2}$ או $\sin x = -1$

← אין נקודות חיתוך עם ציר x בתחום $0\le x\le\pi$ .

נקודות פיתול: נמצא נגזרת שנייה $y''=-\sin x-2\cos 2x$ . נשווה לאפס $0=-\sin x-2\cos 2x$

← $0=-\sin x-2(1-2\sin^2 x)$ ← $4\sin^2 x-\sin x-2=0$ ← $x=0.68\pi\ ,0.32\pi$




קעירות: $\cup$ : $0.32\pi<x<0.68\pi$ ,

$\cap$ : $0.68\pi<x<\pi$ או $0<x<0.32\pi$

ג) $y'>0$ כאשר $0<x<\frac{\pi}{6}$ או $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$ , $y''>0$ כאשר $0.32\pi<x<0.68\pi$

$y'>0$ וגם $y''>0$ כאשר $0.5\pi<x<0.68\pi$

## פתרון שאלה 9

א) אסימפטוטה אופקית: $y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x^2-18a}{(x+a)^2} = -3$ ← $(t , -3)$ נקודה על $f(x)$.

נגזור את הפונקציה: $f'(x) = \frac{-6x(x+a)^2+2(x+a)(-3x^2-18a)}{(x+a)^4} = \frac{-12(x-6)}{(x+a)^3}$

$f'(x) = 0$ ← $x = 6$ ← $3t = 6$ ← $\underline{t = 2}$ . נציב בפונקציה את הנקודה $(2 , -3)$

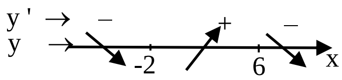
$-3 = \frac{-3\cdot4-18a}{(2+a)^2}$ ← $\cancel{a = 0}$ או $\underline{a = 2}$ . a לא יכול להיות 0 כי אז הפונקציה

תהיה $f(x) = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$ כלומר פונקציה קבועה ללא נקודת קיצון, ללא אסימפטוטה וכו'.

ב) $f(x) = \frac{-3x^2-36}{(x+2)^2}$ המכנה חיובי בכל תחום ההגדרה והמונה שלילי בכל תחום ההגדרה

← ערכי הפונקציה שליליים בכל תחום ההגדרה.

ג) (1) תחום ההגדרה הוא $x \neq -2$

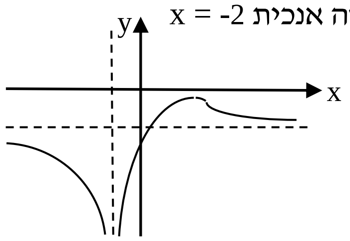



(2) ראינו בסעיף א כי יש נקודת קיצון אחת $(2 , -3)$ מקסימום

(3) תחומי עלייה: $-2 < x < 6$ , תחומי ירידה: $x > 6$ או $x < -2$

(4) מצאנו אסימפטוטה אופקית $y = 3$ . כמו כן יש אסימפטוטה אנכית $x = -2$

ד)




ה) $f'(x) = \frac{-12(x-6)}{(x+2)^3}$ . $f'(x) < 0$ כאשר $(x-6)(x+2) > 0$, כלומר $\underline{x > 6}$ או $\underline{x < -2}$

## מבחן 40

## פתרון שאלה 1

נסמן את מספר הק"מ שסוללת קבוצה ראשונה בשבוע ב- a ← ב 3 שבועות סוללת 3a ק"מ .

נסמן את מספר הק"מ שסוללת קבוצה שנייה בשבוע ב- b ← ב 2 שבועות סוללת 2b ק"מ .

יחד הן מסיימות את סלילת הכביש ← $3a + 2b = 66$ ← $b = 33 - 1.5a$ .

הזמן הדרוש לקבוצה הראשונה כדי לסלול 30 ק"מ הוא $\frac{30}{a}$ ולקבוצה השנייה $\frac{30}{b}$ שבועות .

לקבוצה השנייה דרוש יותר מחצי שבוע פחות מאשר לקבוצה הראשונה כדי לסלול 30 ק"מ כביש

← $\frac{30}{b} > \frac{30}{a} - \frac{1}{2}$ ← $60a > 60b - ab$ $(a , b > 0)$ ← $60a > 60(33-1.5a) - a(33-1.5a)$

← $12 < a < 110$ .

עבור $a = 12$ נקבל $b = 15$ ועבור $a = 110$ נקבל $b < 0$. ברור ש b חיובי $b = 33 - 1.5a > 0$

← $a < 22$ ← $\underline{12 < a < 22}$ , $\underline{0 < b < 15}$

## פתרון שאלה 2

א) נתון: $B_n = 2+8+14+...+(6n-4)$ ← $B_n$ הוא סכום איברים של סדרה חשבונית שבה:

$c_n = 6n-4$ , $c_1 = 2$ , $d = 6$ . לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית:

$c_n = 2+6(n-1) = 6n-4$ ← מספר האיברים בסדרה B הוא n.

← $B_n$ הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה:

$B_n = \frac{n}{2}[2\cdot 2+6(n-1)] = 3n^2 - n$ .

← $a_n = 5n-3n^2+3+3n^2-n = 4n+3$

נוכיח שהסדרה חשבונית: $a_{n+1} = 4(n+1)+3 = 4n+7$

$a_{n+1} - a_n = 4n+7-(4n+3) = 4$

ההפרש בין כל שני איברים עוקבים בסדרה הוא קבוע ← הסדרה חשבונית.

ב) בסדרה הנתונה: $a_1 = 4+3 = 7,\ d = 4 ,\ n = 17$

בסדרת האיברים העומדים במקומות האי זוגיים: $a_1 = 7,\ d = 8 ,\ n = 9$

← $S_n = 4.5(14+8\cdot 8) = 351$ (מקומות אי זוגיים)

סכום האיברים העומדים במקומות האי זוגיים קטן ב- 15 מסכום k האיברים

האחרונים בסדרה ← סכום k האיברים האחרונים הוא 366 = 15 + 351 .

איברי הסדרה: $\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_{17-k}}_{17-k \text{ איברים ראשונים}},\ \underbrace{a_{18-k}, ..., a_{17}}_{k \text{ איברים אחרונים}}$

k האיברים האחרונים הם סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא האיבר ה- 17 – k + 1

← $a_{18-k} = 7+(18-k-1)\cdot 4 = 75-4k$

$S_k = \frac{k}{2}[2(75-4k)+4(k-1)] = 73k - 2k^2$ (k איברים אחרונים)

← $73k-2k^2 = 366$ ← $2k^2-73k+366 = 0$ ← $\underline{k=6}$ , $\cancel{k = 30.5}$ (k שלם)

## פתרון שאלה 3

נגדיר את המאורעות: A – תלמיד י"א , B – בוחר ברוני

גל קיבל ב- 6% יותר מרוני לכן גל קיבל 53% מהקולות ורוני קיבל 47%.

$P(A\cap B) = 1.1P(\overline{A}\cap \overline{B})$ נסמן: $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = x$ ← $P(A\cap B) = 1.1x$

$P(B) = 0.47$ , $P(\overline{B}) = 0.53$ ← $P(\overline{B}/A) = 0.6 = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}$

$P(\overline{B}\cap A) = 0.6P(A)$ ← $P(B\cap A) = 0.4P(A) = 1.1x$

$P(A) = 2.75x$ ← $P(\overline{B}\cap A) = P(A) - P(B\cap A) = 2.75x - 1.1x = 1.65x$

$P(\overline{B})=0.53=P(\overline{B}\cap\overline{A})+P(\overline{B}\cap A)=1.65x+x=2.65x \quad \leftarrow \quad x = 0.2$

נשלים את הטבלה:

| | תלמיד י״א $A$ | תלמיד י״ב $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| בוחר ברוני $B$ | $1.1x = 0.22$ | 0.25 | 0.47 |
| בוחר בגל $\overline{B}$ | $0.65x = 0.33$ | $x = 0.2$ | 0.53 |
| | $2.75x = 0.55$ | 0.45 | 1 |

א) p( תלמיד י״ב ) = $p(\overline{A})=0.45$

ב) $\frac{0.33}{0.53}=0.6226$ = p(בחר בגל/תלמיד י״א) $\leftarrow$ 62.26% מתלמידי י״א בחרו בגל.

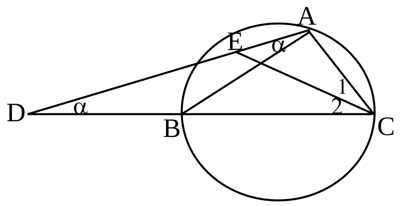
ג) ההסתברות שתלמיד בחר ברוני היא 0.47 .

ההסתברות שגם דן וגם שי בחרו ברוני היא $p = 0.47\cdot 0.47 = \underline{0.2209}$

ד) אם בוחרים באקראי תלמיד יא אז ההסתברות שבחר בגל היא: $\frac{0.33}{0.55}=0.6$

נציב בנוסחת ברנולי: $n = 4 , k = 3 , p = 0.6$ : $p_4(3)=\binom{4}{3}\cdot 0.6^3\cdot 0.4=0.3456$

## פתרון שאלה 4




BC קוטר , BD=AB , $\measuredangle C_1=\measuredangle C_2$

א) <u>צריך לחשב</u> את הזווית AEC.

ב- $\Delta ABD$ : נתון BD=AB

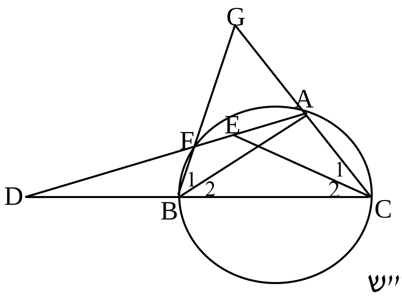
$\leftarrow$ $\measuredangle D=\measuredangle DAB=\alpha$ (זוויות בסיס במש״ש שוות)

$\leftarrow$ $\measuredangle ABC=2\alpha$ (זווית חיצונית למשולש שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה).

ב- $\Delta ABC$ : $\measuredangle A = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר) , $\measuredangle B = 2\alpha$ $\leftarrow$ $\measuredangle C = 90° - 2\alpha$ .

נתון $\measuredangle C_1=\measuredangle C_2$ $\leftarrow$ $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2 = 45° - \alpha$

ב- $\Delta AEC$ : $\measuredangle ACE = 45° - \alpha$ , $\measuredangle EAC = 90° + \alpha$ $\leftarrow$ $\underline{\measuredangle AEC = 45°}$ <u>מ.ש.ל. א</u>




ב) <u>נתון גם</u>: $\measuredangle B_1=\measuredangle B_2$ <u>צ״ל</u>: AC = AG

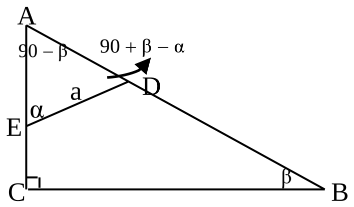
<u>הוכחה</u>: $\measuredangle A = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

נתון $\measuredangle B_1=\measuredangle B_2$

$\leftarrow$ BG = BC משולש שבו הגובה הוא חוצה זווית הוא מש״ש

$\leftarrow$ AC = AG הגובה לבסיס במש״ש הוא גם תיכון <u>מ.ש.ל. ב</u>

## פתרון שאלה 5




נתון: $\measuredangle ABC=\beta$ , $\measuredangle C=90^\circ$ ← $\measuredangle BAC=90^\circ-\beta$

$\measuredangle AED=\alpha$ ← $\measuredangle ADE=90^\circ+\beta-\alpha$

לחישוב היקף המרובע, נמצא את אורכי צלעותיו:

משפט הסינוסים במשולש ADE: $\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{AE}{\sin(90+\beta-\alpha)}=\frac{a}{\sin(90-\beta)}$ ←

$AE=\frac{a\cdot\sin(90+\beta-\alpha)}{\sin(90-\beta)}=\frac{a\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$ , $AD=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\cos\beta}$ . $BD=2AD$ ← $\underline{BD=\frac{2a\cdot\sin\alpha}{\cos\beta}}$

במשולש ABC:

$AB=3AD=\frac{3a\cdot\sin\alpha}{\cos\beta}$ , $AC=AB\sin\beta=\frac{3a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}$ , $\underline{BC}=AB\cos\beta=\underline{3a\sin\alpha}$

$$CE=AC-AE=\frac{3a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{a\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta}=\frac{3a\sin\alpha\sin\beta-a\cos\alpha\cos\beta-a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\underline{CE}=\frac{3a\sin\alpha\sin\beta-a\cos\alpha\cos\beta-a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}=\underline{\frac{2a\sin\alpha\sin\beta-a\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta}}$$

היקף המרובע:

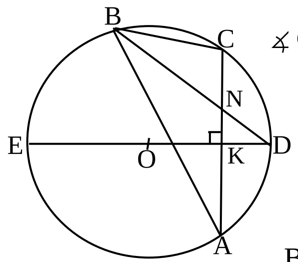
$P=ED+DB+BC+CE$ ← $P=a+\frac{2a\sin\alpha}{\cos\beta}+3a\sin\alpha+\frac{2a\sin\alpha\sin\beta-a\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta}$

$$P=\frac{a}{\cos\beta}(\cos\beta+2\sin\alpha+3\sin\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)$$

$$P=\frac{a}{\cos\beta}[\sin\alpha(2+3\cos\beta+2\sin\beta)+\cos\beta(1-\cos\alpha)]$$ מ.ש.ל.

## פתרון שאלה 6

א) (1) נתון $AC\perp DE$ ← $CK=AK$ , $\measuredangle ABD=\measuredangle CBD=\alpha$ (אנך למיתר ממרכז מעגל, חוצה אותו).




במשולש ABC: $\measuredangle A=\beta$ , $\measuredangle B=2\alpha$ , $\measuredangle C=180^\circ-(2\alpha+\beta)$

משפט הסינוסים: $\frac{BC}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin2\alpha}$ ← $BC=\frac{2a\sin\beta}{\sin2\alpha}$

במשולש BCN: $\measuredangle A=\beta$ , $\measuredangle B=\alpha$ , $\measuredangle N=180^\circ-(\alpha+\beta)$

$$S_{\Delta BCN}=\frac{BC^2\sin B\sin C}{2\sin N}=\frac{4a^2\sin^2\beta\sin\alpha\sin(2\alpha+\beta)}{\sin^2 2\alpha\cdot2\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a^2\sin^2\beta\sin\alpha\sin(2\alpha+\beta)}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

(2) $S_{\Delta ABN}=\frac{AB^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ . נמצא את AB בעזרת משפט הסינוסים במשולש ABC:

$\frac{AC}{\sin2\alpha}=\frac{AB}{\sin(2\alpha+\beta)}$ ← $AB=\frac{2a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin2\alpha}$ ←

$$S_{\Delta ABN}=\frac{4a^2\cdot\sin^2(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2 2\alpha\cdot2\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a^2\cdot\sin^2(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

ב) $\frac{S_{\Delta BCN}}{S_{\Delta BAN}}=0.491$ ← $\frac{S_{\Delta BCN}}{S_{\Delta BAN}}=\frac{2a^2\sin^2\beta\sin\alpha\sin(2\alpha+\beta)}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}:\frac{2a^2\cdot\sin^2(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$

$\frac{S_{\Delta BCN}}{S_{\Delta BAN}}=\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=0.491$ . נתון: $2\alpha+\beta=53.14°$ ← $\frac{\sin\beta}{\sin 53.14°}=0.491$

← $\beta=23.132°$ , $\alpha=15.003°$ . כדי למצוא את NK נמצא את CN ונפחית אותו מ- a.

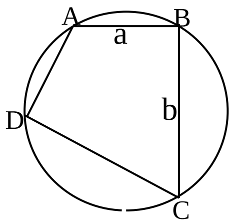
משפט הסינוסים במשולש BCN: $\frac{CN}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)}$ ← $\frac{CN}{\sin\alpha}=\frac{2a\sin\beta}{\sin2\alpha\sin(\alpha+\beta)}$

← $CN=\frac{2a\sin\beta\sin\alpha}{\sin2\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a\sin\beta\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a\sin\beta}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}$

$\underline{NK}=CK-CN=a-\frac{a\sin\beta}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}=a-\frac{a\sin23.132°}{\cos15.003°\sin38.135°}=\underline{0.34a}$

## פתרון שאלה 7

זווית B היא זווית היקפית ישרה ← AC קוטר במעגל ← זווית D ישרה.




לפי משפט פיתגורס במשולש ABC $AC^2=a^2+b^2$ . נסמן: $CD=x$

← לפי משפט פיתגורס במשולש ADC $AD=\sqrt{a^2+b^2-x^2}$

היקף המרובע ABCD: $P=a+b+x+\sqrt{a^2+b^2-x^2}$

נגזור: $P'=1-\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}}$ ונשווה לאפס: $1=\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}}$ ← $a^2+b^2-x^2=x^2$

← $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ . נבדוק את סוג הקיצון:

| x | | $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ | |
|---|---|---|---|
| $P'$ | + | | − |
| $P$ | ↗ | | ↘ |

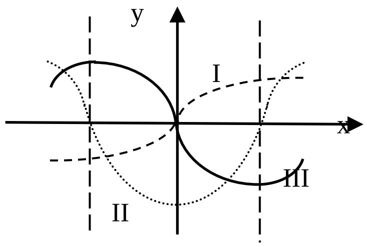
מקסימום.

ב) נביע את שטח המרובע כסכום שטחים של שני משולשים: $S=\frac{1}{2}[ab+x\sqrt{a^2+b^2-x^2}]$

נגזור: $S'=\frac{1}{2}[\sqrt{a^2+b^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}}]$ ונשווה לאפס: $\sqrt{a^2+b^2-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}}$

← $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ .

## פתרון שאלה 8




א) ב- $x=0$ יש לגרף II נקודת מינימום ←

הנגזרת של II שווה אפס ב- $x=0$ .

כאשר $x>0$ גרף II עולה ולכן הנגזרת שלו חיובית

וכאשר $x<0$ גרף II יורד ולכן הנגזרת שלו שלילית.

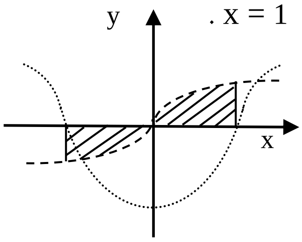
← גרף I יכול להיות הנגזרת של גרף II .

לגרף III יש שתי נקודות קיצון . העברנו אנכים לציר x בנקודות הקיצון וניתן לראות כי גרף II מתאפס בנקודות אלה. כמו כן כאשר גרף III יורד (בין שתי נקודות הקיצון) גרף II שלילי

וכאשר גרף III עולה אז גרף II חיובי. ← גרף II יכול להיות הנגזרת של גרף III.

← גרף III הוא $f(x)$, גרף II הוא $f'(x)$ וגרף I הוא $f''(x)$. ניתן לראות גם כי כאשר $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ אז $f''(x)$ חיובית וכאשר $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ אז $f''(x)$ שלילית.

ב) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$ ← הנקודות בהן $f'(x)$ מתאפסת הן $x = -1$ , $x = 1$.




השטח המקווקו הוא השטח המבוקש:

$$S = \int_{-1}^{0} -f''(x)dx + \int_{0}^{1} f''(x)dx = -f'(x)\Big|_{-1}^{0} + f'(x)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \int_{-1}^{0} -f''(x)dx + \int_{0}^{1} f''(x)dx = -\frac{x^2-1}{x^2+3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2-1}{x^2+3}\Big|_{0}^{1} = = -\frac{1}{3} - 0 + 0 - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

## פתרון שאלה 9

א) $f(-a) = 2\cos(\frac{\pi}{2} - a) - a = -2\cos(\frac{\pi}{2} + a) - a = -f(a)$ ← הפונקציה אי זוגית.

ב) I נגזור את הפונקציה: $f'(x) = -2\sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$. נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0.5$ ← $x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ או $x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ או $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

הפתרון היחיד בתחום $0 < x \le \frac{3\pi}{2}$ הוא $x = \frac{\pi}{3}$ ← $y = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$. נמצא את סוג הקיצון:

| x | $0 < x < \frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| y ' | − | | + |
| y | ↘ | | ↗ |

הנקודה $(\frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{3} - \sqrt{3})$ היא נקודת מינימום

II נגזור נגזרת שנייה: $f''(x) = -2\cos(x + \frac{\pi}{2})$. נשווה את $f''(x)$ לאפס ונקבל

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = 0$ ← $x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ← $x = \pi k$. הפתרון בתחום $0 < x \le \frac{3\pi}{2}$ הוא $x = \pi$.

| x | 0 | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) → | | $\cup$ | | $\cap$ | |
| f "(x) → | | + | | - | |

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $0 < x < \pi$ וקעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

ג) בסעיף א' הוכחנו כי הפונקציה אי זוגית ← אם $(\frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{3} - \sqrt{3})$ היא נקודת מינימום אז $(-\frac{\pi}{3} , -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3})$ היא נקודת מקסימום. כמו כן אם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $0 < x < \pi$ אז היא קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $-\pi < x < 0$ ואם היא קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ אז היא קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$.

ד) ערך הפונקציה ב- $x = 0$ הוא 0