שאלון 805 - הצעות לפתרון מבחנים 3 , 8 , 10 , 11 , 12 , 14 , 21 , 27 , 34 , 40

מבחן 3

פתרון שאלה 1

תהליכי גדילה ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

בתהליך דעיכה: $a = 1 - \frac{p}{100}$. על פי הנתונים: $a = 1 - \frac{3}{100} = 0.97$, $u_0 =$ 600,000 ₪ .

<u>מכונה ראשונה</u>: לאחר 4 שנים עוברת שידרוג וערכה עלה ב- 30% :

$u(4) = 600{,}000 \cdot 0.97^4 = 531{,}175.686$ בתוספת 30% $\leftarrow$ $531{,}175.686 \cdot 1.3 = 690{,}528.39$

<u>מכונה שניה</u>: לאחר 4 שנים ערכה יורד ב- 20% $\leftarrow$ $531{,}175.686 \cdot 0.8 = 424{,}940.5488$

נמצא לאחר כמה שנים מיום הרכישה יהיה ערך שתי המכונות יחד קטן ב- 242,109 ₪ מערכן ביום הקניה, כלומר קטן מ- 1,200,000 ש"ח:

$$690{,}528.39 \cdot 0.97^t + 424{,}940.5488 \cdot 0.97^t < 1{,}200{,}000 - 242{,}109$$

$$1115468.939 \cdot 0.97^t < 957{,}891 \leftarrow 0.97^t < 0.858733$$

$$\ln 0.97^t < \ln 0.858733 \leftarrow t \cdot \ln 0.97 < \ln 0.858733$$

נחלק את שני אגפי אי השוויון ב- $\ln 0.97$ שהוא מספר שלילי $\leftarrow$ נהפוך את סימן

אי השוויון: $t > \frac{\ln 0.858733}{\ln 0.97} = 5$. לאחר יותר מ- 5 שנים מיום השדרוג של המכונה הראשונה

$\leftarrow$ לאחר יותר מ- 9 שנים מיום הרכישה .

פתרון שאלה 2

א) נמצא את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$ לפונקציה $y = \frac{a}{x} + 18$:

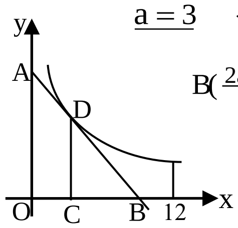
$y = \frac{a}{1} + 18 = a + 18 \leftarrow (1, a+18)$.

$y' = -\frac{a}{x^2} \leftarrow m = -a \leftarrow y - (a+18) = -a(x-1) \leftarrow y = -ax + 2a + 18$

ב) נקודות החיתוך עם הצירים: $B(\frac{2a+18}{a}, 0)$, $A(0, 2a+18)$ $\leftarrow$

$OB = \frac{2a+18}{a}$, $OA = 2a + 18$ $\leftarrow$ סכום אורכי הקטעים הוא:

$OA + OB = 2a + 18 + \frac{2a+18}{a} = 32 \leftarrow 2a^2 - 12a + 18 = 0 \leftarrow \underline{a = 3}$



ג) נציב $a = 3$ בנקודה B, למציאת גבולות האינטגרל: $B(\frac{2a+18}{a}, 0) = (8,0)$

נחלק את השטח לשני חלקים:

S_1 - השטח בין CD לישר $x = 12$, S_2 - הוא שטח המשולש BCD.

$$S_1 = \int_1^{12} (\frac{3}{x} + 18)dx = 3\ln x + 18x \Big|_1^{12} = (3\ln 12 + 216) - (0 + 18) = 198 + 3\ln 12$$

שטח המשולש: $BC = 12$, $CD= 2a + 18 = 21$ $\leftarrow$ $S_2 = S_\Delta = \frac{(8-1)\cdot 21}{2} = 73.5$

$S = S_1 - S_2 = 131.95$

פתרון שאלה 3

א) נתון: שיפוע המשיק ב- $x = 0$ הוא $-4\ln3$.

נגזור את הפונקציה $y' = 9^x \cdot \ln 9 + a \cdot 3^x \cdot \ln 3$ ונציב $x = 0$, $y' = -4\ln3$:

$-4\ln 3 = 9^0 \cdot \ln 9 + a \cdot 3^0 \cdot \ln 3$ $\leftarrow$ $-4\ln 3 = \ln 9 + a \cdot \ln 3$ $\leftarrow$

$-4\ln 3 = 2\ln 3 + a \cdot \ln 3$ $\leftarrow$ $\underline{a = -6}$

נקודת ההשקה משותפת לפונקציה ולמשיק. נציב $x = 0$ במשוואת המשיק

ונמצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה: $y = (-4\ln 3) \cdot 0 - 1 = -1$

נקודת ההשקה היא $(0 , -1)$ $\leftarrow$ נציב את הנקודה בפונקציה: $-1 = 9^0 - 6 \cdot 3^0 + b$

$\leftarrow$ $-6 + b = -2$ $\leftarrow$ $\underline{b = 4}$.

ב) $y' = 9^x \cdot \ln 9 - 6 \cdot 3^x \cdot \ln 3$ נשווה את הנגזרת לאפס: $0 = 9^x \cdot 2\ln 3 - 6 \cdot 3^x \cdot \ln 3$

$0 = 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3(3^x - 3)$ $\leftarrow$ $3^x = 3$ $\leftarrow$ $x = 1$ $\leftarrow$ $y = 9^1 - 6 \cdot 3^1 + 4 = -5$

נבדוק את סוג הקיצון:

$(1 , -5)$ היא נקודת מינימום.

x	$x < 1$	1	$x > 1$
y '	$-$		$+$
y	↘		↗

ג) מהטבלה ניתן לראות כי הפונקציה יורדת כאשר $x < 1$ ועולה כאשר $x > 1$.

פתרון שאלה 4

א) הסדרה: $a_{n+1} = 3n + 4 - a_n$; $a_1 = 3$

האיברים במקומות האי זוגיים הם $a_1, a_3, a_5, \ldots a_n, a_{n+2}$

האיברים במקומות הזוגיים הם $a_2, a_4, a_6, \ldots a_n, a_{n+2}$

נמצא את האיבר במקום ה- a_{n+2} :

$$a_{n+2} = 3(n+1) + 4 - a_{n+1} = 3n + 3 + 4 - (3n + 4 - a_n) = a_n + 3$$

$\leftarrow$ $a_{n+2} - a_n = 3$ $\leftarrow$ ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע ושווה ל- 3 .

סדרות האיברים במקומות האי זוגיים ובמקומות הזוגיים הן סדרות חשבוניות.

ב) מספר האיברים בסדרה הוא $2m$. מתוכם m במקומות האי זוגיים ו- m במקומות הזוגיים.

סכום הסדרה החשבונית של האיברים במקומות האי זוגיים: $a_1 = 3$, $d = 3$:

$S_m = \frac{m}{2}[2 \cdot 3 + (m-1) \cdot 3] = \frac{m}{2}(3 + 3m)$ מקומות אי זוגיים

סכום הסדרה החשבונית של האיברים במקומות הזוגיים: a_1 הוא

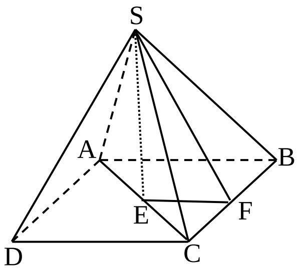
האיבר השני בסדרה הנתונה $d = 3\,,\ \ a_2 = 3\cdot 1 + 4 - a_1 = 4$

מקומות זוגיים $S_m = \frac{m}{2}[2\cdot 4 + (m-1)\cdot 3] = \frac{m}{2}(5+3m)$

סכום איברי הסדרה: $S_{2m} = \frac{m}{2}(3+3m+5+3m) = 3m^2 + 4m$

מבחן 8

פתרון שאלה 1



SABCD פירמידה ישרה. ABCD ריבוע.

גובה הפירמידה 12 ס"מ = SE , $\measuredangle\ SCE = 62.75°$.

א) במשולש SCE: הזווית SEC ישרה ←

$\frac{12}{CE} = tg62.75°$ ← $CE = 6.18$

הבסיס הוא ריבוע ← האלכסונים חוצים זה את זה ← $AC = 2CE = 12.36$.

משפט פיתגורס: $AB^2 + BC^2 = 2AB^2 = AC^2 = 152.77$ ← $AB = 8.74$

נפח הפירמידה: $V = \frac{1}{3}AB^2\cdot SE = 305.58$ סמ"ק

ב) שטח המעטפת הוא סכום השטחים של 4 הפאות הצדדיות החופפות זו לזו.

במשולש SCE: $\frac{12}{CS} = \sin 62.75°$ ← $CS = 13.498$

בנית עזר: $FB = FC$. המשולש BCS הוא שווה שוקיים (בפירמידה ישרה המקצועות

הצדדיים שווים) ← $SF \perp BC$ התיכון לבסיס הוא גם גובה

במשולש SFC: $0.5\cdot BC = FC = 4.37$

משפט פיתגורס $SF = \sqrt{SC^2 - FC^2}$ ← $SF = 12.771$

שטח פאה צדדית: $S = \frac{1}{2}BC\cdot SF = 55.8$ ← שטח המעטפת: $M = 4S = 223.24$ סמ"ר

פתרון שאלה 2

א) נתון: $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$

(1) נקודות החיתוך עם ציר x: $\ln^2 x + 2\ln x = 0$ ← $\ln x(\ln x + 2) = 0$

$\ln x = 0$ ← $x = 1$, $\ln x = -2$ ← $x = e^{-2}$ ← $(1\ ,0)$, $(e^{-2}\ ,0)$

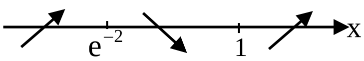
(2-3) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון בנקודות בהן הנגזרת שווה אפס:

$x = 1$: $f(x)$ יורדת עבור $x < 1$ (הנגזרת שלילית) ועולה עבור $x > 1$ (הנגזרת

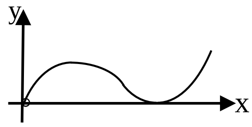
חיובית) ← $x = 1$ נקודת מינימום

$x = e^{-2}$: $f(x)$ עולה עבור $x < e^{-2}$ (הנגזרת חיובית) ויורדת עבור $x > e^{-2}$

(הנגזרת שלילית) ← $x = e^{-2}$ נקודת מקסימום



ב) (1)



(2) נמצא את הנגזרת של כל אחת מהמשוואות הנתונות:

(a) $f(x)=x\cdot\ln^2x \quad \leftarrow \quad f'(x)=\ln^2x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln^2x+2\ln x$

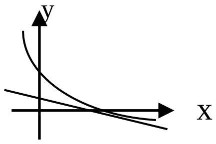
(b) $f(x)=x^2\cdot\ln x \quad \leftarrow \quad f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

(c) $f(x)=(x\cdot\ln x)^2 \quad \leftarrow \quad f'(x)=2x\ln^2x+x^2\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=2x\ln^2x+2x\ln x$

המשוואה המתאימה לפונקציה $f(x)$ היא a .

פתרון שאלה 3

נתונה הפונקציה $y=e^{2-x}-e$



א) נתון כי המשיק מקביל לישר $y = -ex + 5$ לכן שיפוע המשיק הוא $-e$.

נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל $-e$:

$y'=-e^{2-x} \quad \leftarrow \quad -e=-e^{2-x} \quad \leftarrow \quad e=e^{2-x} \quad \leftarrow \quad 1=2-x \quad \leftarrow \quad x=1$.

נציב $x = 1$ בפונקציה ונקבל $y=e^{2-1}-e=e-e=0$. נקודת ההשקה היא $\underline{(1\ ,0)}$.

משוואת המשיק על פי הנקודה $(1\ ,0)$ והשיפוע $-e$: $y-0=-e(x-1)$

$\leftarrow \quad \underline{y=-ex+e}$

ב) $S=\int_0^1(e^{2-x}-e+ex-e)dx=-e^{2-x}-2ex+\frac{ex^2}{2}\Big]_0^1=-e-2e+0.5e-(-e^2-0+0)$

$S=e^2-2.5e$

פתרון שאלה 4

נתונות שתי סדרות. חשבונית: $x\ ,17\ ,y$ והנדסית: $x\ ,8\ ,y$

צ״ל את האיבר הרביעי בכל סדרה .

בסדרה החשבונית: $y-17=17-x \quad \leftarrow \quad x+y=34 \quad \leftarrow \quad y=34-x$

בסדרה ההנדסית: $\frac{8}{x}=\frac{y}{8} \quad \leftarrow \quad xy=64 \quad \leftarrow \quad y=\frac{64}{x} \quad \leftarrow \quad 34-x=\frac{64}{x}$

$\leftarrow$ (1) $x=2\ ,y=32$ או (2) $x=32\ ,y=2$.

פתרון I: סדרה חשבונית: $2\ ,17\ ,32 \quad \leftarrow \quad \underline{a_4=47}$, סדרה הנדסית: $2\ ,8\ ,32 \quad \leftarrow \quad \underline{a_4=128}$

פתרון II: סדרה חשבונית: $32\ ,17\ ,2 \quad \leftarrow \quad \underline{a_4=-13}$, סדרה הנדסית: $32\ ,8\ ,2 \quad \leftarrow \quad \underline{a_4=0.5}$

מבחן 10

פתרון שאלה 1

תהליכי גידול ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

$u_0 = 800,000$, $a = 1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{2}{100} = 0.98$

א) ערך הדירה ירד ב- 25% הערך החדש של הדירה $800,000 \cdot 0.75 = 600,000$

$600,000 = 800,000 \cdot 0.98^t \leftarrow 0.75 = 0.98^t \leftarrow \ln 0.75 = t\ln 0.98$

$t = \frac{\ln 0.75}{\ln 0.98} = 14.24$ ← ערך הדירה ירד ב- 25% כעבור 14.24 שנים

ב) $u(10) = 800000 \cdot 0.98^{10} = 653658.25$

← ערך הדירה 10 שנים לאחר קנייתה הוא 653,658.25 ₪ .

ג) (1) הדירה מאבדת מחצית מערכה ← ערך הדירה הוא 50% מערכה ההתחלתי:

$\frac{1}{2}u_0 = u_0 \cdot 0.98^t \leftarrow \ln\frac{1}{2} = \ln 0.98^t \leftarrow t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.98} = 34.3$

כעבור 34.3 שנים הדירה מאבדת מחצית מערכה.

(2) נסמן עבור המחסן $a_1 = 1 + \frac{p}{100}$.

$u(t) = 2u_0$, $t = 34.3096 \leftarrow 2 = a_1^{34.3096} \leftarrow$

$\ln 2 = 34.3096 \cdot \ln a_1 \leftarrow a_1 = 1.0204 \leftarrow 1.0204 = 1 + \frac{p}{100} \leftarrow p = 2.04$

ערך המחסן עולה כל שנה ב- $\underline{2.04\%}$.

פתרון שאלה 2

בסדרה הנדסית: $a_1 \cdot a_n = 4608 \leftarrow a_n = \frac{4608}{a_1}$

$a_1 + a_n = 1539 \leftarrow a_n = 1539 - a_1 \leftarrow 1539 - a_1 = \frac{4608}{a_1}$

$\leftarrow -a_1^2 - 1539a_1 + 4608 = 0 \leftarrow a_1 = 3 , 1536$

$a_1 = 1536 \leftarrow a_n = \frac{4608}{1536} = 3$ נתון שהסדרה עולה ← הפתרון לא מתאים

$a_1 = 3 \leftarrow a_n = \frac{4608}{3} = 1536$

$a_n = a_1 q^{n-1} \leftarrow 1536 = 3q^{n-1} \leftarrow q^{n-1} = 512$

סכום שני האיברים האחרונים: $a_n + a_{n-1} = 1536 + \frac{1536}{q} = 2304 \leftarrow$

$1536q + 1536 = 2304q \leftarrow q = 2$

$q^{n-1} = 512 \leftarrow 2^{n-1} = 512 = 2^9 \leftarrow \underline{n = 10}$

פתרון שאלה 3

א) נתונה הפונקציה $y=\frac{\ln(ax-2)}{ax-2}$.

נגזור את הפונקציה: $y'=\frac{\frac{a}{ax-2}\cdot(ax-2)-a\cdot\ln(ax-2)}{(ax-2)^2}=\frac{a[1-\ln(ax-2)]}{(ax-2)^2}$

נציב בנגזרת $x=2+e$ וגם $y'=0$:

$0=\frac{a[1-\ln(2a+ae-2)]}{(2a+ae-2)^2} \leftarrow a[1-\ln(2a+ae-2)]=0$

$a\neq 0$ (עבור $a=0$ נקבל בפונקציה $\ln(-2)$ שאינו מוגדר)

$\ln(2a+ae-2)=1 \leftarrow 2a+ae-2=e \leftarrow a(2+e)=2+e \leftarrow \underline{a=1}$

נציב $a=1$ בפונקציה ובנגזרת $y=\frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y'=\frac{1-\ln(x-2)}{(x-2)^2}$

ב) <u>תחום הגדרה</u>: לוגריתם מוגדר עבור מספרים חיוביים בלבד לכן $x-2>0$

כמו כן מכנה שונה מאפס $x\neq 2 \leftarrow \underline{x>2}$

ג) <u>נקודות קיצון</u>: נשווה את הנגזרת לאפס $0=\frac{1-\ln(x-2)}{(x-2)^2} \leftarrow 1-\ln(x-2)=0$

$\ln(x-2)=1 \leftarrow e=x-2 \leftarrow x=e+2$ $y=\frac{\ln(e+2-2)}{e+2-2}=\frac{1}{e}$

נבדוק את סוג הקיצון:

x	$2<x<e+2$	$x=e+2$	$x>e+2$
y '	+	0	–
y	↗	מקסימום	↘

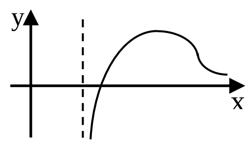
$\underline{(e+2\ ,\ \frac{1}{e})}$ נקודת מקסימום

ד) <u>נקודות חיתוך עם הצירים</u>: $x=0$ אינו בתחום ההגדרה לכן <u>אין חיתוך עם ציר y</u> .

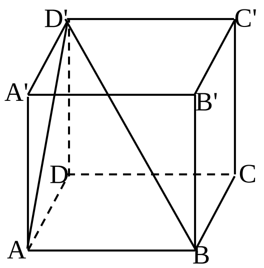
נציב בפונקציה $y=0$ ונקבל $0=\frac{\ln(x-2)}{x-2} \leftarrow \ln(x-2)=0 \leftarrow e^0=x-2$

נקודת חיתוך עם ציר x : $\underline{(3\ ,\ 0)}$

ה) <u>סקיצה של גרף הפונקציה</u>:



פתרון שאלה 4



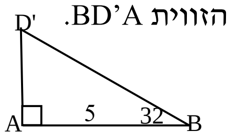
$ABCDA'B'C'D'$ תיבה. הבסיס הוא ריבוע $ABCD$.

הזווית בין האלכסון BD' לבין הפיאה $ADD'A'$ היא

הזווית $BD'A$. AB מאונך לפאה $ADD'A'$

ולכן מאונך לכל ישר במישור

הפאה ← הזווית A ישרה



$\frac{5}{AD'}=tg32 \leftarrow AD'=8$.

משפט פיתגורס במשולש $AA'D'$: $5^2+DD'^2=8^2 \leftarrow DD'=\sqrt{39}$

א) נפח התיבה: $V=5^2\cdot\sqrt{39}=$ 156.15 סמ"ק

ב) שטח הפנים: שטח הבסיס = 25 , שטח פאה צדדית: $5\cdot\sqrt{39}$ ←

$P = 2\cdot 25 + 4\cdot 5\sqrt{39} =$ 174.9 סמ"ר

מבחן 11

פתרון שאלה 1

תהליכי גידול ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0a^t$

במשך 4 חודשים גדלה כמות השתילים בחממה שבמרכז מ- 503 ל- 710.

$710 = 503\cdot a^4$ ← $a^4 = 1.4115$ ← $4\ln a = \ln 1.4115$ ← $\ln a = 0.0862$ ← $a = 1.09$.

נמצא את כמות השתילים ששתל החקלאי במרכז: $503 = u_0\cdot 1.09^6$ ← $u_0 = 299.9$

החקלאי במרכז שתל 300 שתילים, כמות כפולה מהחקלאי בצפון ← החקלאי בצפון

שתל 150 שתילים. לאחר 6 חודשים היו בחממה בצפון 296 שתילים ←

$296 = 150\cdot a^6$ ← $a^6 = 1.9733$ / $\sqrt[6]{\ }$ ← $a = 1.12$.

נסמן ב- p את אחוז הגידול בצפון $a = \frac{100+p}{100}$ ← $1.12 = \frac{100+p}{100}$ ← $p = 12\%$

בחממה הצפונית יש גידול של 12% לחודש.

פתרון שאלה 2

א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$ לכן הפונקציה אינה חותכת את ציר y .

הפונקציה אינה חותכת את ציר x כיוון שהמונה הוא חזקה של 4 ולכן הוא חיובי לכל x .

ב) נגזור את הפונקציה: $y' = \frac{3\cdot 4^{3x}\cdot\ln 4\cdot x - 1\cdot 4^{3x}}{x^2} = \frac{4^{3x}(3x\ln 4 - 1)}{x^2}$

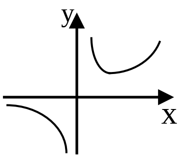
4^{3x} ו- x^2 חיוביים לכל x. הנגזרת חיובית והפונקציה עולה כאשר $3x\ln4 > 1$ ← $x > \frac{1}{3\ln4}$

הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת כאשר $x < \frac{1}{3\ln4}$ ו $x \neq 0$ ← $x < 0$ או $0 < x < \frac{1}{3\ln4}$

ג) $y = \frac{4^{3x}}{x}$. המונה חיובי לכל x בתחום ההגדרה לכן ערכי הפונקציה חיוביים כאשר $x > 0$

(המכנה חיובי) ושליליים כאשר $x < 0$ (המכנה שלילי).

ד) לפי תחומי העליה והירידה ניתן להסיק כי יש נקודת מינימום ב $x = \frac{1}{3\ln4}$



פתרון שאלה 3

א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$ לכן אין חיתוך עם ציר y .

נציב $y = 0$: $0 = \frac{4}{x} - m$ ← $x = \frac{4}{m}$ נקודת החיתוך היחידה עם הצירים: $(\frac{4}{m},0)$

ב) $-\frac{m}{3} = \frac{4}{x} - m$ ← $\frac{2m}{3} = \frac{4}{x}$ ← $2mx = 12$ ← $x = \frac{6}{m}$ $x = \frac{6}{m}$ ← $E(\frac{6}{m}, -\frac{m}{3})$

ג) $$S=\int_{\frac{4}{m}}^{\frac{6}{m}} -(\tfrac{4}{x}-m)dx=-4\ln x+mx\Big|_{\frac{4}{m}}^{\frac{6}{m}}=-4\ln\tfrac{6}{m}+6-(4\ln\tfrac{4}{m}+4)=$$

$$=-4\ln(\tfrac{6}{m}:\tfrac{4}{m})+2=-4\ln 1.5+2=0.378$$

פתרון שאלה 4

א) בסדרה חשבונית: $a_2+a_{n-1}=a_1+d+a_n-d=a_1+a_n$

$$a_3+a_{n-2}=a_1+2d+a_n-2d=a_1+a_n$$

$$a_1+a_n=406 \quad\leftarrow\quad 1218=a_1+a_2+a_3+a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3(a_1+a_n) \quad\leftarrow$$

נשתמש בנוסחה $S_n=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2} \quad\leftarrow\quad 11368=406\cdot\frac{n}{2} \quad\leftarrow\quad n=56$

שני האיברים האמצעיים נמצאים במקומות $\frac{56}{2}+1$, $\frac{56}{2}$ וסכומם שווה לסכום a_1+a_n

$$\leftarrow\quad \underline{a_{28}+a_{29}=406}$$

ב) $$79.8d=12.6a_1 \quad\leftarrow\quad a_1+54d+a_1+55d=14.6\cdot(a_1+2d) \quad\leftarrow\quad a_{55}+a_{56}=14.6\cdot a_3$$

$$a_1=203-27.5d \quad\leftarrow\quad a_1+a_1+55d=406 \quad\leftarrow\quad a_1+a_{56}=406$$

$$\underline{a_1=38}\ ,\ \underline{d=6} \quad\leftarrow\quad 79.8d=2557.8-346.5d \quad\leftarrow\quad 79.8d=12.6\cdot(203-27.5d)$$

מבחן 12

פתרון שאלה 1

א) צ"ל: את a_{n+3} באמצעות a_n

$$a_{n+2}=1-\frac{1}{a_{n+1}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{a_n}}=1-\frac{a_n}{a_n-1}=\frac{-1}{a_n-1}$$

$$\underline{a_{n+3}=a_n} \quad\leftarrow\quad a_{n+3}=1-\frac{1}{a_{n+2}}=1-\frac{1}{\frac{-1}{a_n-1}}=1-\frac{a_n-1}{-1}=a_n$$

ב) צ"ל: את סכום 240 האיברים הראשונים בסדרה

בסעיף א' הוכחנו $a_{n+3}=a_n$ $\leftarrow$ נוכל לחלק את 240 האיברים ל-3 סדרות, בכל סדרה 80 איברים השווים זה לזה:

(1) $a_1,a_4,a_7,\ldots,a_{238}$. נתון $a_1=2$ $\quad\leftarrow\quad S_{(1)}=2\cdot 80=160$

(2) $a_2,a_5,a_8,\ldots,a_{239}$. נמצא את a_2 : $a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\leftarrow\quad S_{(2)}=0.5\cdot 80=40$

(3) $a_3,a_6,a_9,\ldots,a_{240}$. נמצא את a_3 : $a_3=1-\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{0.5}=-1$ $\quad\leftarrow\quad S_{(3)}=-1\cdot 80=-80$

סכום 240 האיברים הראשונים בסדרה: $S_{240}=160+40-80=\underline{120}$

פתרון שאלה 2

א) $S1 = \int_{a}^{2a} \frac{5}{x}dx = 5\ln x\Big|_{a}^{2a} = 5\ln 2a - 5\ln a = 5\ln\frac{2a}{a} = 5\ln 2$

$\underline{S1 = S2 = 5\ln 2} \quad \leftarrow \quad S2 = \int_{2a}^{4a} \frac{5}{x}dx = 5\ln x\Big|_{2a}^{4a} = 5\ln 4a - 5\ln 2a = 5\ln\frac{4a}{2a} = 5\ln 2$

ב) $a^2 = 9 \quad \leftarrow \quad 5\ln 9 = \int_{a}^{a^3} \frac{5}{x}dx = 5\ln x\Big|_{a}^{a^3} = 5\ln a^3 - 5\ln a = 5\ln\frac{a^3}{a} = 5\ln a^2$

$\leftarrow$ $\underline{a = 3}$ (ברביע הראשון $a > 0$).

פתרון שאלה 3 א

תחום הגדרה: לוגריתם מוגדר עבור מספרים חיוביים בלבד $\leftarrow x > 0 \leftarrow \underline{x > 0}$

נקודות קיצון: נגזור את הפונקציה $y' = 5 - \frac{5}{5x} = 5 - \frac{1}{x}$

בנקודות קיצון הנגזרת שווה אפס לכן $0 = 5 - \frac{1}{x} \quad \leftarrow \quad x = 0.2$

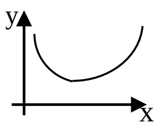
$x = 0.2 \quad \leftarrow \quad y = 5\cdot 0.2 - \ln 5\cdot 0.2 = 1 - \ln 1 = 1$

נבדוק את סוג הקיצון:

x	$0 < x < 0.2$	$x = 0.2$	$x > 0.2$
y'	–	0	+
y	↘	מינימום	↗

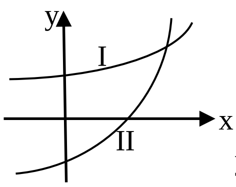
$\underline{(0.2\ ,\ 1)}$ נקודת מינימום

סקיצה של גרף הפונקציה:



פתרון שאלה 3 ב

כדי להתאים פונקציה לגרף נמצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם ציר y.



נציב $x = 0$ בפונקציה $y = e^x \quad \leftarrow \quad y = 1$

נציב $x = 0$ בפונקציה $y = e^{2x} - 2 \quad \leftarrow \quad y = -1$

$\leftarrow$ גרף I מתאים ל- $y = e^x$, גרף II מתאים ל- $y = e^{2x} - 2$

נמצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים: $e^{2x} - 2 = e^x \quad \leftarrow \quad (e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

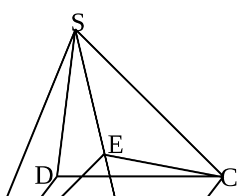
נפתור משוואה ריבועית: $e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \leftarrow \quad e^x = 2$ או $\cancel{e^x = -1}$ (e^x חיובי לכל x)

בנקודת החיתוך של שני הגרפים $e^x = 2 \quad \leftarrow \quad x = \ln 2$. נחשב את השטח:

$$S = \int_{0}^{\ln 2} [e^x - (e^{2x} - 2)]dx = e^x - 0.5e^{2x} + 2x\Big|_{0}^{\ln 2} = 2 - 2 + 2\ln 2 - (1 - 0.5 + 0)$$

$S = 2\ln 2 - 0.5 = \underline{0.89}$

פתרון שאלה 4



א) המשולשים ΔASB ו- ΔBSC הם משולשים שווי שוקיים חופפים

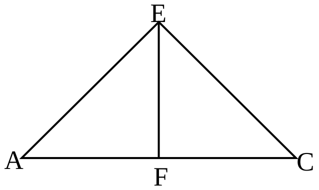
$\measuredangle CBE = \measuredangle ABE$ (זוויות בסיס של שני המשולשים),

$AB = BC$ (צלעות של ריבוע), BE צלע משותפת $\leftarrow$

$\Delta ABE \cong \Delta CBE$ (צ.ז.צ).

נתון כי AE גובה ל- SB לכן CE גובה ל- SB.

ב) אורך צלע הריבוע 8 ס״מ $\leftarrow$ אורך AC אלכסון הריבוע $8\sqrt{2}$ ס״מ



משולש AEC הוא משולש שווה שוקיים.

אורך צלעותיו: $AE = CE = 6$, $AC = 8\sqrt{2}$

נעביר EF גובה לבסיס (שהוא תיכון וחוצה זווית).

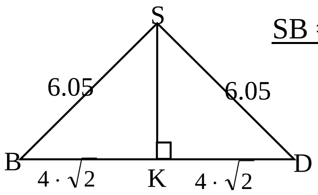
במשולש ישר זווית CEF: $\sin CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = 0.9428$ $\leftarrow$ $\measuredangle CEF = 70.53°$

$\leftarrow$ $\measuredangle CEA = 70.53° \cdot 2 = 141.06°$

ג) במשולש ישר זווית ABE: $\sin ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{6}{8} = 0.75$ $\leftarrow$ $\measuredangle ABE = 48.59°$

ב- ΔASB שווה הבסיס 8 ס״מ וכל אחת מזוויות הבסיס $48.59°$. נעביר גובה לבסיס

ונחשב את SB: $\frac{4}{SB} = \cos 48.59°$ $\leftarrow$ $\underline{SB = 6.05}$ ס״מ



ד) $\cos SBD = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{6.05} = 0.935$ $\leftarrow$ $\measuredangle SBD = 20.7°$

מבחן 14

פתרון שאלה 1

תהליכי גידול ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

ערך הנכס עלה במשך 6 שנים ב- 50%. נציב בנוסחה את נתוני עליית הערך:

$1.5u_0 = u_0 a^6$ $\leftarrow$ $a^6 = 1.5 / \sqrt[6]{}$ $\leftarrow$ $a = 1.07$

נסמן ב- p את אחוז העלייה $a = 1 + \frac{p}{100}$ $\leftarrow$ $1.07 = 1 + \frac{p}{100}$ $\leftarrow$ $p = 7\%$

ערך הנכס עלה כל שנה ב- 7%.

נתון כי אחוז הירידה נמוך ב- 2% מאחוז העלייה $\leftarrow$ בתקופת המשבר ירד ערך הנכס

ב- 5% כל שנה.

א) ערך הנכס ביום המכירה: $u(t) = 1.5u_0 \cdot 0.95^3 = 1.286u_0$

אברהם הרוויח בסך הכל $\underline{28.6\%}$.

ב) ערך הנכס ביום הקניה הוא u_0, ערך הנכס בתחילת ירידת הערך הוא $1.5u_0$.

t הוא הזמן שעבר מתחילת ירידת הערך $\leftarrow$

$$t = 7.9 \leftarrow t=\frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 0.95} \leftarrow \frac{2}{3}=0.95^t \leftarrow u_0 = 1.5u_0\cdot 0.95^t$$

נוסיף את 6 השנים של עליית הערך: $t + 6 = 13.9$

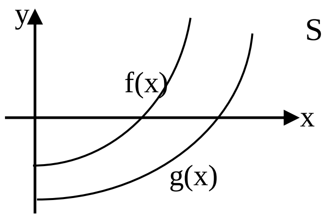
הזמן שעבר מקניית הנכס עד שערכו יחזור לערך הקנייה הוא 13.9 שנים

פתרון שאלה 2

א) נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר x: $(1.5,0) \leftarrow x=1.5 \leftarrow 2^{2x}=2^3 \leftarrow 4^x=8$

הגרף נמצא מתחת לציר x $\leftarrow$ $S=\int_0^{1.5} -(4^x-8)dx = -\frac{4^x}{\ln 4}+8x\Big|_0^{1.5}$

$$S=(-\frac{8}{\ln 4}+12)-(-\frac{1}{\ln 4}+0)=12-\frac{7}{\ln 4}=6.95$$

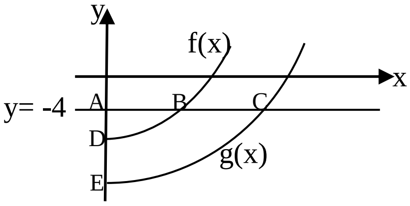


ב) $f(x)=4^x-8 \;,\; g(x)=e^x-9$

ג) נקודות החיתוך של הפונקציות עם הישר $y = -4$:

$$x=1 \leftarrow 4^x=4 \leftarrow -4=4^x-8$$

$$x=\ln 5 \leftarrow 5=e^x \leftarrow -4=e^x-9$$

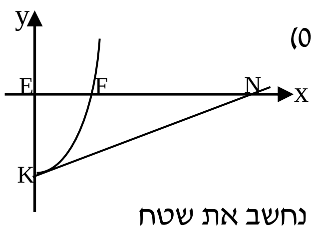


נחשב את השטח AEC ונחסר ממנו את השטח ABD.

$$S_{(AEC)}=\int_0^{\ln 5}[-4-(e^x-9)]dx=\int_0^{\ln 5}(5-e^x)dx=5x-e^x\Big|_0^{\ln 5}=(5\ln 5-5)-(0-1)=4.047$$

$$S_{(ABD)}=\int_0^1[-4-(4^x-8)]dx=\int_0^1(4-4^x)dx=4x-\frac{4^x}{\ln 4}\Big|_0^1=(4-\frac{4}{\ln 4})-(0-\frac{1}{\ln 4})=1.83595$$

$$S=4.047-1.83595=2.211$$



ד) נקודת ההשקה היא נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y - (0 ,-9)

שיפוע המשיק: $m=e^0=1 \leftarrow g'(x)=e^x$

משוואת המשיק: $y=x-9 \leftarrow y-(-9)=1(x-0)$

כדי לחשב את השטח בין המשיק, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר x, נחשב את שטח המשולש ENK ונחסר ממנו את השטח EFK. הנקודה F היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x $\leftarrow$ (ln9 ,0). הנקודה N היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר x $\leftarrow$ (9 ,0).

$$S_{(EFK)}=\int_0^{\ln 9}-(e^x-9)dx=-e^x+9x\Big|_0^{\ln 9}=(-9+9\ln 9)-(-1+0)=11.77 \;,\; S_{\Delta ENK}=\frac{9\cdot 9}{2}=40.5$$

$$S=40.5-11.77=28.72$$

פתרון שאלה 3

א) בסדרה הנתונה האיבר הראשון הוא a_1. נסמן את מנת הסדרה ב- q ←

סכום הסדרה: $S_1 = \frac{a_1}{1-q}$

כאשר מחליפים את הסימנים במקומות הזוגיים מקבלים סדרה הנדסית חדשה שבה:

$a_1, -a_2, a_3, ...$ האיבר הראשון הוא a_1 ומנת הסדרה היא $-q$ ←

סכום הסדרה: $S_2 = \frac{a_1}{1-(-q)} = \frac{a_1}{1+q}$.

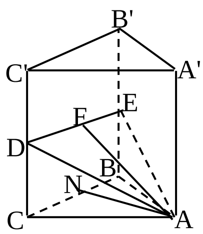
נתון: $S_1 = 2S_2$ ← $\frac{a_1}{1-q} = 2 \cdot \frac{a_1}{1+q}$ ← $2-2q = 1+q$ ← $q = \frac{1}{3}$.

ב) הריבועים של איברי הסדרה מהווים סדרה הנדסית אינסופית $a_1^2, a_2^2, a_3^2, ...$

האיבר הראשון הוא a_1^2 והמנה היא q^2 ←

סכום הסדרה: $\frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{9a_1^2}{8}$ ← $\frac{9a_1^2}{8} = \frac{9}{2}$ ← $a_1^2 = 4$ ← $a_1 = \pm 2$

פתרון שאלה 4

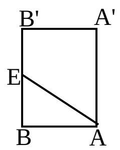


נתונה מנסרה ישרה. נתון: גובה המנסרה 18 ס"מ = AA',

$S_{ABC} = 50\sqrt{3}$, $CD = C'D$, $BE = B'E$, $AB = AC = BC$

שטח הבסיס: $\frac{1}{2}AB^2 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$

← $AB^2 = 200$ ← $AB = 10\sqrt{2}$



9 ס"מ = BE (מחצית הגובה) ← משפט פיתגורס במשולש ABE:

$AE = \sqrt{9^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{281}$. באותה צורה נמצא $AD = \sqrt{281}$.

א) נסמן: $\measuredangle DAE = \alpha$, $DE = BC = 10\sqrt{2}$

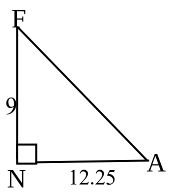
נשתמש במשפט הקוסינוס במשולש DAE: $DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2 \cdot AE \cdot AD \cdot \cos\alpha$

$200 = 281 + 281 - 2 \cdot 281 \cdot \cos\alpha$ ← $\alpha = 49.9°$

ב) זווית הנטייה של FA לבסיס ABC היא הזווית FAN. (הנקודה N היא אמצע BC)

AN הוא גובה בבסיס, כלומר גובה במשולש שווה צלעות

ואורכו $\frac{AN}{AB} = \sin 60°$ ← $AN = 12.25$



$tg\measuredangle FAN = \frac{9}{12.25}$ ← $\measuredangle FAN = 36.3°$

מבחן 21

פתרון שאלה 1

תהליכי גדילה ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

בתהליך דעיכה: $a = 1 - \frac{p}{100}$. נתון: $p = 3\%$ $\leftarrow$ $a = 0,97$.

א) ערך המכונה ירד בשליש מערכה ביום הקנייה $\leftarrow$ ערך המכונה הוא שני שליש מערכה ביום הקנייה. נסמן: ערך המכונה ביום הקנייה $u_0 = A$ $\leftarrow$ $\frac{2}{3}A = A \cdot 0.97^t \;/:A$

$\leftarrow \frac{2}{3} = 0.97^t \leftarrow \ln\frac{2}{3} = \ln 0.97^t \leftarrow \ln\frac{2}{3} = t \cdot \ln 0.97 \leftarrow$ $t =$ <u>13.31 שנים</u>

ב) $u_0 = 1000000$, $u(t) < 800000$ $\leftarrow$ $1000000 \cdot 0.97^t < 800000 \;/:1000000$

$\leftarrow 0.97^t < 0.8 \leftarrow \ln 0.97^t < \ln 0.8 \leftarrow t \cdot \ln 0.97 < \ln 0.8 \;/:\ln 0.97$

$\ln 0.97$ הוא מספר שלילי לכן אי השוויון מתהפך <u>$t > 7.33$</u>.

ערך המכונה יהיה פחות מ- 800000 ₪ לאחר יותר מ- 7.33 שנים.

ג) $u(5) = 1000000 \cdot 0.97^5$, $u(12) = 1000000 \cdot 0.97^{12}$.

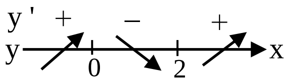
המחיר פחת ב- $u(5) - u(12)$. הגודל הבסיסי ממנו פחת המחיר הוא $u(5)$.

$\leftarrow P = \frac{u(5)-u(12)}{u(5)} \cdot 100 = 19.2\%$

פתרון שאלה 2

א) נגזור: $y' = -2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot (-e^{-x}) = x \cdot e^{-x}(x-2)$

$y' = 0$ $\leftarrow$ $x = 0$ או $x = 2$. נציב בפונקציה כדי לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון $\leftarrow$ $(0,0)$, $(2,-4 \cdot e^{-2})$. נבדוק את סוג הקיצון:

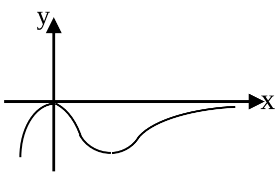


נקודת מקסימום: $(0,0)$, נקודת מינימום: $(2,-4 \cdot e^{-2})$

נציב בפונקציה $y = 0$ $\leftarrow$ $x = 0$

נציב בפונקציה $x = 0$ $\leftarrow$ $y = 0$

נקודת החיתוך עם הצירים: $(0,0)$



ב) $y = y'$ $\leftarrow$ $-x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}(x-2)$ $\leftarrow$ $x \cdot e^{-x}(x-2+x) = 0$ $\leftarrow$ $x \cdot e^{-x}(2x-2) = 0$

$\leftarrow$ $x = 0$ או $x = 1$ $\leftarrow$ $A(0,0)$ או $A(1,-e^{-1})$

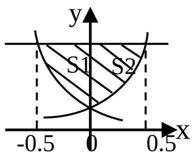
ג) בנקודה $A(0,0)$ המשיק הוא: $y - 0 = 0(x-0)$ $\leftarrow$ <u>$y = 0$</u>

בנקודה $A(1,-e^{-1})$ המשיק הוא: $y + e^{-1} = -e^{-1}(x-1)$ $\leftarrow$ <u>$y = -\frac{1}{e}x$</u>

פתרון שאלה 3א

נסמן: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x) = 4^x$ ונמצא את נקודות

החיתוך של $f(x)$ עם $g(x)$ ושל כל אחת מהן עם הישר.



$$x = 0 \leftarrow 2x = 0 \leftarrow x = -x \leftarrow 4^x = 4^{-x} \leftarrow 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$x = 0.5 \leftarrow 2x = 1 \leftarrow 2^{2x} = 2 \leftarrow 4^x = 2$$

$$x = -0.5 \leftarrow -2x = 1 \leftarrow 2^{-2x} = 2^1 \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2$$

השטח המבוקש הוא סכום השטחים S1 ו- S2:

$$S_1 = \int_{-0.5}^{0}\left[2-\left(\tfrac{1}{4}\right)^x\right]dx = 2x - \frac{1}{\ln 0.25}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^x\Big|_{-0.5}^{0} = 0 - \frac{1}{\ln 0.25}\cdot 1 - \left(-1 - \frac{1}{\ln 0.25}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-0.5}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{\ln 0.25} + 1 = \frac{1}{-\ln 4} + 1$$

$$S_2 = \int_{0}^{0.5}\left[2-(4)^x\right]dx = 2x - \frac{1}{\ln 4}\cdot(4)^x\Big|_{0}^{0.5} = 1 - \frac{1}{\ln 4}\cdot 2 - \left(0 - \frac{1}{\ln 4}\cdot 1\right) = 1 - \frac{1}{\ln 4}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{-\ln 4} + 1 + 1 - \frac{1}{\ln 4} = \underline{2 - \frac{2}{\ln 4} = 0.557}$$

<u>פתרון שאלה 3ב</u>

נתונה הפונקציה $y = 2 + 3x\ln 3x$

<u>תחום הגדרה</u>: לוגריתם מוגדר עבור מספרים חיוביים בלבד לכן $3x > 0$ $\leftarrow$ $\underline{x > 0}$

נגזור את הפונקציה: $y' = 0 + 3\ln 3x + 3x\cdot\frac{3}{3x} = 3\ln 3x + 3$

נשווה את הנגזרת לאפס: $3x = \frac{1}{e} \leftarrow \ln 3x = -1 \leftarrow 0 = 3\ln 3x + 3$

$x = \frac{1}{3e} \approx 0.123$. נבדוק תחומי עליה וירידה בעזרת טבלה.

x	$0 < x < 0.123$	$x = 0.123$	$x > 0.123$
y '	−	0	+
y	↘	מינימום	↗

עליה: $x > \frac{1}{3e}$; ירידה: $0 < x < \frac{1}{3e}$

<u>פתרון שאלה 4</u>

א) <u>צ״ל</u>: הסדרה $b_n = a_n - 2$ היא הנדסית

נראה כי המנה של כל שני איברים עוקבים, קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3(a_n-2)}{a_n-2} = 3 \leftarrow b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 3a_n - 4 - 2 = 3a_n - 6 = 3(a_n - 2)$$

המנה קבועה לכן הסדרה הנדסית $(q = 3)$.

ב) מהנתון נובע כי $a_n = b_n + 2$ $\leftarrow$ $S = a_1 + a_2 + ... + a_6 = b_1 + 2 + b_2 + 2 + ... + b_6 + 2$

$$S = b_1 + b_2 + ... + b_6 + 2 + 2 + ... + 2$$

את סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה b_n נחשב בעזרת הנוסחה לסכום סדרה הנדסית

כאשר $b_1 = a_1 - 2 = -1$, $q = 3$, $n = 6$: $S = \frac{-1(3^6 - 1)}{3-1} + 2 \cdot 6 = -364 + 12 = -352$

מבחן 27

פתרון שאלה 1

בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים – $2n$. סכום האיברים במקומות האי זוגיים גדול פי 5 מסכום איברי הסדרה כשמחליפים את הסימנים במקומות הזוגיים.

א) האיברים במקומות הזוגיים (או האי זוגיים) הם איברים מהסדרה ההנדסית הנתונה כך שהאיבר המופיע אחרי a_k הוא a_{k+2}. לכן המנה של שני איברים סמוכים היא:

$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{a_1 q^{k+1}}{a_1 q^{k-1}} = q^2$. המנה קבועה לכן האיברים במקומות הזוגיים (או האי זוגיים) מהווים סדרה הנדסית.

	סדרה נתונה	סדרת המקומות האי זוגיים	סדרה עם סימנים מוחלפים במקו' זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	a_1
מנה	q	q^2	$-q$
מספר איברים	$2n$	n	$2n$
סכום הסדרה		$\frac{a_1[(q^2)^n - 1]}{q^2-1} = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$	$\frac{a_1[(-q)^{2n}-1]}{-q-1} = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{-(q+1)}$

$$\frac{\cancel{a_1(q^{2n}-1)}}{q^2-1} = 5 \cdot \frac{\cancel{a_1(q^{2n}-1)}}{-(q+1)} \leftarrow 5 \cdot (q^2 - 1) = -(q+1) \leftarrow 5q - 5 = -1 \leftarrow \underline{q = 0.8}$$

ב) צ"ל: פי כמה גדול סכום הסדרה מסכום האיברים במקומות הזוגיים.

	סדרה נתונה	סדרת המקומות הזוגיים
איבר ראשון	a_1	$a_1 q$
מנה	q	q^2
מספר איברים	$2n$	n
סכום הסדרה	$\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$	$\frac{a_1 q[(q^2)^n-1]}{q^2-1} = \frac{a_1 q(q^{2n}-1)}{q^2-1}$

היחס המבוקש בין הסכומים: $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} : \frac{a_1 q(q^{2n}-1)}{q^2-1} = \frac{q+1}{q} = \frac{0.8+1}{0.8} = \underline{2.25}$

פתרון שאלה 2

כדי לזהות את הגרף המתאים לכל פונקציה נבדוק את נקודות החיתוך עם הצירים.

<u>חיתוך עם ציר y</u> : הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$ ולכן אינה חותכת את ציר y ,

הפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר y בנקודה $(0 , 1)$.

<u>חיתוך עם ציר x</u> : נציב בפונקציה $f(x)$ $y = 0$ ונקבל $0 = a - \frac{a}{x}$ ← $x = 1$ ←

$f(x)$ חותכת את ציר x בנקודה $(1 , 0)$. הפונקציה $g(x)$ אינה חותכת את ציר x

(אין פתרון למשוואה $g(x) = 0$).

על פי התוצאות שקבלנו ניתן לראות כי הפונקציה העליונה היא $g(x)$ והתחתונה $f(x)$.

$$S = \int_{\frac{a}{6}}^{\frac{5a}{6}} [\frac{a}{a-x} - (a - \frac{a}{x})]dx = -a\ln(a - x) - ax + a\ln x \Big|_{\frac{a}{6}}^{\frac{5a}{6}} =$$

$$= -a\ln\frac{a}{6} - a\cdot\frac{5a}{6} + a\ln\frac{5a}{6} - (-a\ln\frac{5a}{6} - a\cdot\frac{a}{6} + a\ln\frac{a}{6}) =$$

$$= 2a\ln\frac{5a}{6} - 2a\ln\frac{a}{6} - \frac{4a^2}{6} = 2a\ln(\frac{5a}{6}:\frac{a}{6}) - \frac{2a^2}{3} = 2a\ln 5 - \frac{2a^2}{3}$$

$$\leftarrow \quad 2a\ln 5 - \frac{2a^2}{3} = 6\ln 5 - 6 \ /\cdot 3\ /:2 \quad \leftarrow \quad 3a\ln 5 - a^2 = 9\ln 5 - 9$$

$$\leftarrow \quad a^2 - 3a\ln 5 + 9\ln 5 - 9 = 0$$

$$\leftarrow \quad a = \frac{3\ln 5 \pm\sqrt{9(\ln 5)^2 - 36\ln 5 + 36}}{2} = \frac{3\ln 5 \pm\sqrt{(3\ln 5 - 6)^2}}{2} = \frac{3\ln 5 \pm (3\ln 5 - 6)}{2}$$

← $\underline{a = 3}$ או $\underline{a = 3\ln 5 - 3}$

פתרון שאלה 3

נגזור: $\frac{e^x+e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x+e^{-x}+1+e^{-2x}+1-e^{-2x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})(1+e^{-x})-(-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = y'$

א) המונה של הנגזרת הוא סכום של שלושה מחוברים חיוביים לכל x . לכן לא קיים

ערך של x שעבורו הנגזרת שווה אפס ולפונקציה אין נקודות קיצון.

ב) ערכי הנגזרת חיוביים לכל x ← הפונקציה עולה לכל x.

ג) נחשב את ערך הפונקציה ואת ערך הנגזרת בנקודה $x = 0$:

ערך הפונקציה: $y = \frac{1-1}{1+1} = 0$, שיפוע המשיק: $m = \frac{1+1+2}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$

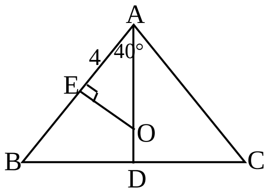
<u>משוואת המשיק</u>: $y - 0 = 1(x - 0)$ ← $\underline{y = x}$

פתרון שאלה 4

א) בסיס הפירמידה הוא משולש שווה שוקיים ABC. $\measuredangle A = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$.

שטח המשולש: $S_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin 80°}{2} =$ 31.514 סמ"ר

נפח הפירמידה: $V = \frac{31.514 \cdot 18}{3} =$ <u>189.08 סמ"ק</u>



ב) גובה הפירמידה יורד למרכז המעגל החוסם את משולש ABC.

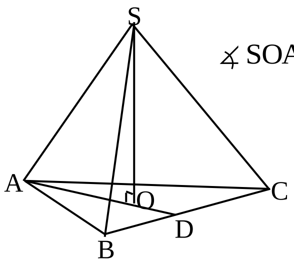
(מפגש האנכים האמצעיים). AD, הגובה לבסיס הוא אנך אמצעי.

נקודה E היא אמצע AB. נעביר אנך ל- AB החותך את AD ב- O.

EO הוא אנך אמצעי ← נקודה O היא מרכז המעגל החוסם.

$\measuredangle BAD = 40°$ (הגובה לבסיס הוא גם חוצה זווית) ←

במשולש ישר זווית AEO: $\cos 40° = \frac{4}{AO}$ ← $AO = \frac{4}{\cos 40°} = 5.2216$



SO גובה לבסיס לכן הוא מאונך לכל ישר בבסיס ← $\measuredangle SOA = 90°$

במשולש ישר זווית SOA: $tgASO = \frac{AO}{SO} = \frac{5.2216}{18} = 0.2901$

← $\measuredangle ASO = 16.18°$

ג) זוויות הנטייה של המקצועות BS ו- AS לבסיס שוות. זווית הנטייה של AS לבסיס היא

הזווית $\measuredangle SAO$. במשולש SOA: $\measuredangle SAO = 180° - 90° - 16.18° = 73.82°$

מבחן 34

פתרון שאלה 1

תהליכי גדילה ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

בתהליך גדילה: $a = 1 + \frac{p}{100}$

א) נתון: $u_0 = 40000$, $u(5) = 45256$. צ"ל: p

$45256 = 40000 \cdot a^5 \; /:40000$ ← $a^5 = 1.1314$ ← $\ln a^5 = \ln 1.1314$ ←

$5 \cdot \ln a = 0.123456 \; / :5$ ← $\ln a = 0.0247$ ← $a = 1.025$ ← <u>$p = 2.5\%$</u>

האוכלוסיה גדלה כל שנה ב- 2.5%.

ב) נתון: $u(5) = 40000$, $p = 2.5\%$. צ"ל: u_0

מסעיף א ידוע כי $a^5 = 1.1314$ ← $40000 = u_0 \cdot 1.1314 \; /:1.1314$ ←

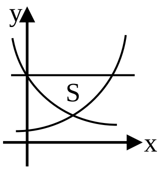
$u_0 = 35354.4$ לפני 5 שנים היו בעיר כ- 35354 תושבים.

ג) מספר התושבים באורן יהיה: $40000 \cdot 1.025^{10} = 51203.38$ כ- 51203 תושבים

אחוז הגידול בברוש: $2.5\%\cdot 1.5=3.75\%$ ← $51203=u_0\cdot 1.0375^{10}$

← $u_0=35434$ בעיר ברוש יש היום כ- 35434 תושבים.

פתרון שאלה 2



א) $e^{2x}=e^{3-x}$ ← $2x=3-x$ ← $x=1$ נקודת החיתוך: $\underline{(1\ ,\ e^2)}$

ב) נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y: $g(x)=e^{3-0}=e^3$ ← $(0,e^3)$

משוואת הישר המקביל לציר x דרך הנקודה $(0,e^3)$: $y=e^3$

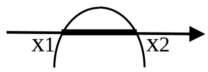
נקודת החיתוך של הישר עם $f(x)$: $e^{2x}=e^3$ ← $2x=3$ ← $x=1.5$

$$S=\int_0^1(e^3-e^{3-x})dx+\int_1^{1.5}(e^3-e^{2x})dx=e^3\cdot x+e^{3-x}\Big|_0^1+e^3\cdot x-0.5e^{2x}\Big|_1^{1.5}$$

$$\underline{S=1.5e^2=11.08}$$

פתרון שאלה 3

א) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $ax^2+x+c>0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4ac}}{2a}$ ←  $x_1<x<x_2$

תחום ההגדרה הנתון $-1.5<x<2$ ← $x_1=-1.5$ וגם $x_2=2$

$-1.5=\frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}$ ← $-3a=-1-\sqrt{1-4ac}$ ← $\sqrt{1-4ac}=3a-1/\ (\ )^2$

$1-4ac=9a^2-6a+1$ ← $\sqrt{1-4ac}=3a-1/\ (\ )^2$

וגם $2=\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$ ← $4a=-1+\sqrt{1-4ac}$ ← $4a+1=\sqrt{1-4ac}\ /\ (\ )^2$

$16a^2+8a+1=1-4ac$ ← $4c=-16a-8$ ← $6-9a=-16a-8$

← $\underline{a=-2}$, $\underline{c=6}$

ב) נקודות קיצון: $f(x)=\ln(-2x^2+x+6)$ ← $f'(x)=\frac{-4x+1}{-2x^2+x+6}$

$f'(x)=0$ ← $x=0.25$ ← $f(x)=\ln(-2\cdot 0.25^2+0.25+6)=\ln 6\frac{1}{8}$

נמצא את סוג הקיצון:

x	$-1.5<x<0.25$	0.25	$0.25<x<2$
y '	+	0	–
y	↗	מקסימום	↘

נקודת מקסימום

$(\frac{1}{4}\ ,\ \ln 6\frac{1}{8})$

ג) הנקודה הגבוהה ביותר של הפונקציה היא $y=\ln 6\frac{1}{8}$. כל ישר המקביל לציר x

ועובר מתחת הנקודה הגבוהה חותך את גרף הפונקציה $\leftarrow$ $\underline{k \le \ln 6\frac{1}{8}}$

פתרון שאלה 4

א) צ"ל: שני איברים עוקבים בסדרה I שהמנה שלהם שווה להפרש בין שני איברים עוקבים, באותם מקומות, בסדרה II

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_{n+1} - b_n$ $\leftarrow$ $5n - 6 = 3n^2 - 34$ $\leftarrow$ $n = 4$, $n = \cancel{-2.33}$

$\leftarrow$ $\frac{a_5}{a_4} = b_5 - b_4$

נחשב את a_4 ואת a_5 : $a_2 = (5-6)\cdot 3 = -3$, $a_3 = (5\cdot 2-6)\cdot(-3) = -12$,

$\underline{a_4 = (5\cdot 3-6)\cdot(-12) = -108}$, $\underline{a_5 = (5\cdot 4-6)\cdot(-108) = -1512}$

ב) נתון: $a_k = t$, $a_{k+2} = 1326t$ צ"ל: את k

$a_{k+1} = (5k-6)t$ $\leftarrow$ $a_{k+2} = [5(k+1)-6](5k-6)t = 1326t$ $\leftarrow$

$[5k+5-6](5k-6) = 1326$ $\leftarrow$ $\cancel{k = -6.6}$, $\underline{k = 8}$

מבחן 40

פתרון שאלה 1

א) נתון: $a_3 + a_4 + a_5 = 8d$ $\leftarrow$ $a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 8d$ $\leftarrow$ $d = -3a_1$

כאשר x, y, z הם 3 איברים עוקבים בסדרה חשבונית אז מתקיים $z - y = y - x$

$\leftarrow$ $2y = x + z$ $\leftarrow$ $2(a_2{}^2 - 1) = a_5 + 3 + 0.5a_3$ $\leftarrow$

$2[(a_1+d)^2 - 1] = a_1 + 4d + 3 + 0.5(a_1 + 2d)$ נציב $d = -3a_1$ $\leftarrow$

$2[(a_1 - 3a_1)^2 - 1] = a_1 + 4(-3a_1) + 3 + 0.5[a_1 + 2(-3a_1)]$ $\leftarrow$

$2(4a_1{}^2 - 1) = a_1 - 12a_1 + 3 - 2.5a_1$ $\leftarrow$ $8a_1{}^2 + 13.5a_1 - 5 = 0$

$a_1 = \frac{-13.5 \pm \sqrt{182.25 + 160}}{16} = \frac{-13.5 \pm 18.5}{16}$ $\leftarrow$ $a_1 = \frac{5}{16}$ או $a_1 = -2$

$a_1 = \frac{5}{16}$ $\leftarrow$ $d = -3\cdot\frac{5}{16} < 0$ $\leftarrow$ הסדרה יורדת בניגוד לנתון

$a_1 = -2$ $\leftarrow$ $d = -3\cdot(-2) = 6$ $\leftarrow$ הסדרה עולה. תשובה: $\underline{a_1 = -2}$ $\underline{d = 6}$

ב)

	סדרה מקורית	מקומות זוגיים
איבר ראשון	-2	4
הפרש הסדרה	6	12
מספר איברים	2n	n

$\frac{2n}{2}\cdot[2\cdot(-2)+(2n-1)\cdot 6]=1.85\cdot\frac{n}{2}\cdot[2\cdot 4+(n-1)\cdot 12]\ /:n\ /\cdot 2$

$2\cdot(-4+12n-6)=1.85\cdot(8+12n-12)$ ← $24n-20=-7.4+22.2n$ ← $n=7$

בסדרה הנתונה יש 2n איברים לכן יש בה 14 איברים

פתרון שאלה 2

$$y'=\frac{2axe^x-e^x(ax^2+1)}{e^{2x}}=\frac{-ax^2+2ax-1}{e^x}$$

א) לפונקציה אין נקודות קיצון כאשר אין פתרון למשוואה $y'=0$.

← אין פתרון למשוואה $-ax^2+2ax-1=0$

המשוואה יכולה להיות משוואה ממעלה ראשונה $(a=0)$ או ממעלה שנייה

אם $a=0$ מקבלים $-1=0$. זהו פסוק שקר ← אין פתרון למשוואה.

אם יש לנו משוואה ממעלה שניה $(a\neq 0)$ אז אין לה פתרון כאשר $\Delta<0$

$\Delta=(2a)^2-4(-a)(-1)=4a^2-4a$ ← $4a(a-1)<0$ $0<a<1$

לפונקציה אין נקודות קיצון (למשוואה אין פתרון) כאשר $a=0$ או $0<a<1$

← $0\le a<0$

ב) $5e=\frac{-a\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)-1}{e^{-1}}$ ← $5e=(-a-2a-1)e$ ←

$5=-3a-1$ ← $a=-2$ ← נקודת ההשקה (-1 , -e)

← משוואת המשיק: $y+e=5e(x+1)$ ← $y=5ex+4e$

פתרון שאלה 3

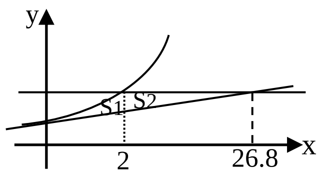
א) ערך הפונקציה בנקודת ההשקה: $y=e^0+1=1+1=2$

נגזור: $y'=2e^{2x}$ ← שיפוע המשיק הוא $m=2e^0=2\cdot 1=2$

משוואת המשיק: $y-2=2(x-0)$ ← $y=2x+2$

ב) נקודת החיתוך של הישר עם הפונקציה:

$e^{2x}+1=e^4+1$ ← $2x=4$ ← $x=2$



נקודת החיתוך של הישר והמשיק:

$2x+2=e^4+1 \leftarrow x=0.5(e^4-1)=26.8$

נחשב את השטח בשני חלקים: S_2 הוא שטח משולש ישר זווית. אורך הניצב האופקי הוא $26.8-2=24.8$. הישר $x=2$ חותך את המשיק בנקודה $(2\ ,\ 6)$ לכן אורך הניצב האנכי של המשולש הוא $e^4+1-6 \approx 49.6 \leftarrow$

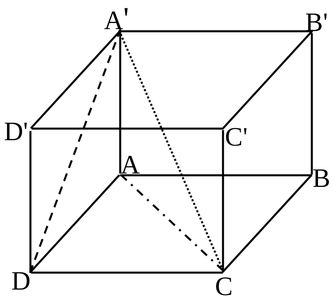
שטח המשולש: $S_2=\frac{24.8\cdot 49.6}{2}=615$

$$S_1=\int_0^2[e^{2x}+1-(2x+1)]dx=\int_0^2(e^{2x}-2x-1)dx=0.5e^{2x}-x^2-x\Big|_0^2=$$

$$S_1=0.5e^4-4-2-(0.5)=20.8$$

$S = 615 + 20.8 = \underline{635.8}$

פתרון שאלה 4



נתון: $A'C=15$ ס״מ , $AC=14.489$ ס״מ

$A'A$ מאונך למישור $ABCD$ $\leftarrow \measuredangle A'AC=90°$

משפט פיתגורס במשולש $A'AC$:

$$AA'=\sqrt{15^2-14.489^2}=3.882$$

CD מאונך למישור $AA'D'D$ $\leftarrow$ $A'D$ הוא ההיטל של $A'C$ במישור $AA'D'D$.

הזווית בין $A'C$ לבין הפאה $AA'D'D$ היא הזווית בין $A'C$ לבין היטלו במישור

$\leftarrow \measuredangle DA'C=53.13°$.

CD מאונך למישור $AA'D'D$ $\leftarrow$ הוא מאונך לכל ישר במישור $\leftarrow$ CD מאונך ל- $A'D$

$\leftarrow \measuredangle A'DC=90°$. במשולש ישר זווית $A'DC$: $\sin 53.13°=\frac{CD}{15}$ $\leftarrow$ $CD=12$ ס״מ

במשולש ישר זווית ADC: $AD=\sqrt{14.489^2-12^2}=8.12$

נפח התיבה: $V = 12 \cdot 8.12 \cdot 3.882 =$ <u>378.2 סמ״ק</u>