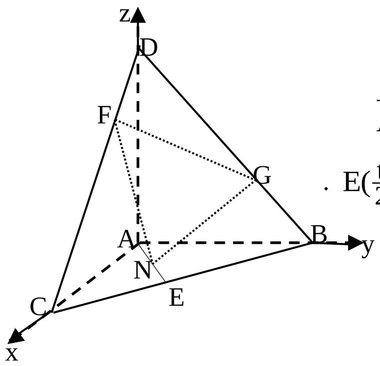
שאלון 807 הצעות לפתרון למבחנים 1 , 6 , 25 , 29 , 31 , 33 , 36 , 37 , 38 , 40

מבחן 1

פתרון שאלה 1



נסמן: $AB = AC = t$, $AD = 2t$ $\leftarrow$

$A(0,0,0)$, $B(0,t,0)$, $C(t,0,0)$, $D(0,0,2t)$.

המשולש ABC הוא שווה שוקיים. כמו כן $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$

$\leftarrow$ AE הוא גם גובה וגם תיכון לבסיס $\leftarrow$ $E(\frac{t}{2},\frac{t}{2},0)$.

N היא אמצע AE $\leftarrow$ $N(\frac{t}{4},\frac{t}{4},0)$

$\overrightarrow{DF}:\overrightarrow{FC} = 1:3$ $\leftarrow$ $F(\frac{t}{4},0,\frac{3t}{2})$.

$\overrightarrow{DG}:\overrightarrow{GB} = 2:1$ $\leftarrow$ $G(0,\frac{2t}{3},\frac{2t}{3})$.

א) נמצא את משוואת המישור NFG: וקטור המקדמים (a, b, c) של המישור מאונך למישור לכן הוא מאונך לכל ישר במישור.

נרשום שני כיוונים במישור: $\overrightarrow{GF} = (\frac{t}{4},-\frac{2t}{3},\frac{5t}{6})$, $\overrightarrow{NF} = (0,\frac{t}{4},-\frac{3t}{2})$ $\leftarrow$

$\overrightarrow{NF}\cdot(a,b,c) = 0$ $\leftarrow$ $0\cdot a + \frac{t}{4}b - \frac{3t}{2}c = 0$

$\overrightarrow{GF}\cdot(a,b,c) = 0$ $\leftarrow$ $\frac{t}{4}a - \frac{2t}{3}b + \frac{5t}{6}c = 0$

מהמשוואה הראשונה מקבלים $b = 6c$. נציב $b = 6c$ במשוואה השנייה ונקבל $a = \frac{38}{3}c$.

נבחר $c = 3$ ונקבל: $38x + 18y + 3z + d = 0$. את d נקבל ע״י הצבת אחת מהנקודות N , F או G

$\leftarrow$ $d = -14t$ $\leftarrow$ משוואת המישור EFG היא $38x + 18y + 3z - 14t = 0$.

הנקודה $(3,-2,2)$ נמצאת במישור $\leftarrow$ $38\cdot3 + 18\cdot(-2) + 3\cdot2 - 14t = 0$ $\leftarrow$ $t = 6$

גובה הפירמידה הוא $\underline{AD = 2t = 12}$.

ב) בסיס הפירמידה הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים שאורך הניצב שלו הוא $t = 6$.

שטח הבסיס: $S = \frac{6\cdot6}{2} = 18$ $\leftarrow$ נפח הפירמידה הוא $V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot AD = \frac{1}{3}\cdot18\cdot12 = 72$

פתרון שאלה 2

נסמן: $A(x_1,y_1)$. פרבולה קנונית סימטרית לציר x $\leftarrow$ $B(x_1,-y_1)$

משיק לפרבולה בנקודה A: $yy_1 = p(x + x_1)$

משיק לפרבולה בנקודה B: $-yy_1 = p(x + x_1)$

הנקודה C היא נקודת מפגש המשיקים:

$p(x + x_1) = yy_1 = -yy_1$ $\leftarrow$ $2yy_1 = 0$

$y = 0$ $\leftarrow$ $p(x + x_1) = 0$ $\leftarrow$ $x = -x_1$ $\leftarrow$ $C(-x_1,0)$

$CO = OD = x_1$ $\leftarrow$ $CD = 2x_1$. $\measuredangle CAD = 60°$ (משולש ABC שווה צלעות)

$\frac{CD}{AD}=tg\,60°$ ← $\frac{2x_1}{y_1}=\sqrt{3}$ ← $y_1=\frac{2x_1}{\sqrt{3}}$

הנקודה A על הפרבולה ← $y_1^2=2px_1$ ← $\frac{4x_1^2}{3}=2px_1$ ← $x_1=\frac{3p}{2}$

← $AC=2y_1=\frac{4x_1}{\sqrt{3}}=\frac{6p}{\sqrt{3}}$. $\frac{R}{AC}=tg\,30°$ ← $R=\frac{6p}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2p$

פתרון שאלה 3

א) נתון: $S_{10}=130+5i$ ← $\frac{10}{2}\cdot[2a_1+(10-1)d]=130+5i\,/:5$ ← $2a_1+9d=26+i$

נתון: $S_6=54+15i$ ← $\frac{6}{2}\cdot[2a_1+(6-1)d]=54+15i\,/:3$ ← $2a_1+5d=18+5i$

נחסר את המשוואות $4d=8-4i$ ← $\underline{d=2-i}$, $a_1=4+5i$

ב) נרשום נוסחה לאיבר הכללי a_n :

$$a_n=a_1+(n-1)d=4+5i+(n-1)(2-i)=2+2n+i(6-n)$$

כדי שאיבר בסדרה יהיה מספר ממשי, החלק המדומה צריך להתאפס ←

צריך להתקיים $6-n=0$ ← $n=6$ ← האיבר הממשי הוא $\underline{a_6=14}$.

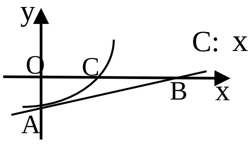
פתרון שאלה 4

א) $y=e^{kx}-k$. נגזור: $y'=ke^{kx}$ נתון k טבעי לכן הנגזרת חיובית לכל x והפונקציה עולה.

ב) נציב $x=0$ בפונקציה. נקודת ההשקה: $(0\,,\,1-k)$. נציב $x=0$ בנגזרת. שיפוע המשיק: k.

← משוואת המשיק: $y-(1-k)=k(x-0)$ ← $y=kx+1-k$

ג) חיתוך הפונקציה עם ציר x: $e^{kx}=k$ ← $kx=\ln k$ ← $C:\ x=\frac{\ln k}{k}$



חיתוך המשיק עם ציר x: $B:\ x=\frac{k-1}{k}$

נחשב את שטח משולש AOB ונחסר ממנו את השטח OCA שבין גרף הפונקציה לציר x.

$$S=\tfrac{k-1}{k}\cdot[-(1-k)]\cdot\tfrac{1}{2}-\int_0^{\frac{\ln k}{k}}[0-(e^{kx}-k)]dx=\tfrac{(k-1)^2}{2k}-[-\tfrac{e^{kx}}{k}+kx\Big|_0^{\frac{\ln k}{k}}]=\frac{k^2-2k\ln k-1}{2k}$$

פתרון שאלה 5

תהליכי גדילה ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t)=u_0a^t$

בתהליך גדילה: $a=1+\frac{p}{100}$ ובתהליך דעיכה: $a=1-\frac{p}{100}$

א) על פי הנתונים: $a=1-\frac{2}{100}=0.98$, ערך הדירה יורד ב- 25% ← $u(t)=0.75u_0$

← $0.75=0.98^t$ ← $t\cdot\ln0.98=\ln0.75$ ← <u>t = 14.24 שנים</u>

ב) $a = 0.98$, $u_0 = 800000$, $t = 10$ ← $u(10) = 800000 \cdot 0.98^{10} = 653658.2$

ערך הדירה 10 שנים לאחר קנייתה הוא כ- 653,658 ש"ח.

ג) (1) $a = 0.98$, $u(t) = 0.5u_0$ ← $0.5 = 0.98^t$ ← $t \cdot \ln 0.98 = \ln 0.5$ ← $\underline{t =}$ $\underline{\text{שנים } 34.3096}$

(2) נסמן עבור המחסן $b = 1 + \frac{p}{100}$. $u(t) = 2u_0$, $t = 34.3096$ ← $2 = b^{34.3096}$

← $\ln 2 = 34.3096 \cdot \ln b$ ← $b = 1.0204$ ← $1.0204 = 1 + \frac{p}{100}$ ← $p = 2.04$

ערך המחסן עולה כל שנה ב- $\underline{2.04\%}$.

מבחן 6

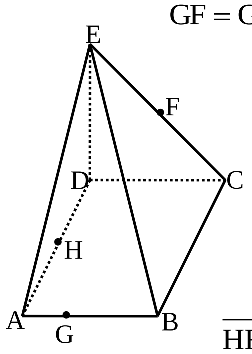
פתרון שאלה 1

נסמן: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$ (על פי הנתון ED שווה לצלע המעוין)

$\measuredangle A = 60°$ ← $\underline{u} \cdot \underline{v} = a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}a^2$, ED אנך לבסיס ← $\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

א) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{w}) = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$

$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF} = -t\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) = (\frac{1}{2} - t)\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$



ב) $\cos HFG = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GF}}{|\overrightarrow{HF}| \cdot |\overrightarrow{GF}|}$

$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GF} = (\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})[(\frac{1}{2} - t)\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})$

$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GF} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t)\underline{u}^2 + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t)\underline{u}\underline{v}$

$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GF} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t)a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t) \cdot \frac{1}{2}a^2 = (\frac{11}{8} - \frac{3}{4}t)a^2$

$|\overrightarrow{HF}| = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2 + \frac{1}{2}\underline{u}\underline{v}} = \sqrt{a^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})} = a$

$|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{(\frac{1}{2} - t)^2\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2 + 2 \cdot (\frac{1}{2} - t)\underline{u}\underline{v}} = \sqrt{(\frac{1}{4} - t + t^2 + 1 + \frac{1}{4})a^2 + (1 - 2t) \cdot \frac{1}{2}a^2}$

$|\overrightarrow{GF}| = a\sqrt{2 - 2t + t^2}$ ← $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\frac{11}{8} - \frac{3}{4}t)a^2}{a \div a\sqrt{2 - 2t + t^2}}$

נצמצם ב a^2 , נכפול בהצלבה ונעלה בריבוע ← $6 - 6t + 3t^2 = (\frac{11}{4} - \frac{3}{2}t)^2$

פתרון המשוואה: $t = -5.08$ לא מתאים (נקו' G על AB), $\underline{t = 0.58}$

פתרון שאלה 2א

א) ממשוואת האליפסה $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{20} = 1$ נובע כי $a^2 = 60$, $b^2 = 20$ ולכן $c^2 = 60 - 20 = 40$

← מוקדי האליפסה הם: $(\pm\sqrt{40}, 0)$ ורדיוס המעגל הוא $\sqrt{40}$. מרכז המעגל נמצא בראשית הצירים (באמצע הקטע המחבר את המוקדים). משוואת המעגל: $x^2 + y^2 = 40$.

ב) נמצא את נקודות החיתוך של המעגל והאליפסה.

מעגל: $x^2+y^2=40$ אליפסה: $x^2+3y^2=60$

פתרון המשוואות הוא: $(\sqrt{30},\sqrt{10})$, $(-\sqrt{30},\sqrt{10})$, $(\sqrt{30},-\sqrt{10})$, $(-\sqrt{30},-\sqrt{10})$

נקודות אלה יוצרות מרובע שצלעותיו מקבילות לצירים. זהו מלבן.

אורך המלבן $2\sqrt{30}$, רוחבו $2\sqrt{10}$ ושטחו $S=2\sqrt{30}\cdot 2\sqrt{10}=40\sqrt{3}=69.3$

פתרון שאלה 2ב

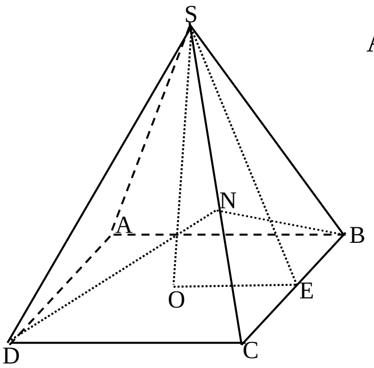
נתון $x+yi=(1-\sqrt{3}i)^9$ נציג את $1-\sqrt{3}i$ בהצגה קוטבית: $r=\sqrt{1+3}=2$,

$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{1}$ ← $\theta=-60°$ (הזווית ברביע הרביעי) ← $1-\sqrt{3}i=2cis(-60°)$

$$x+yi=(1-\sqrt{3}i)^9=[2cis(-60°)]^9=2^9cis180°=-512$$

← $x=-512$, $y=0$ ← $\underline{\sqrt[3]{y-x}=\sqrt[3]{512}=8}$

פתרון שאלה 3



ABCDS היא פירמידה ישרה. ABCD ריבוע, AB = 6 ס"מ

הזווית בין פאה צדדית לבסיס היא $58°$

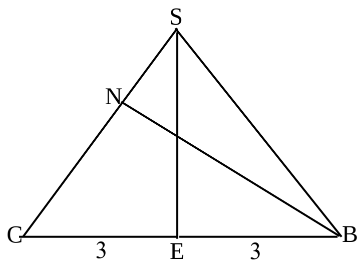
SO הוא גובה לבסיס.

הפירמידה ישרה $\Leftarrow$ כל פאה צדדית היא

משולש שווה שוקיים.

נעביר את SE גובה וגם תיכון לבסיס.

הזווית הנתונה היא $\measuredangle SEO=58°$.



<u>במשולש SEO</u>: $\cos58°=\frac{3}{SE}$ ← $SE=5.66$

משולש SEC: $tgC=\frac{5.66}{3}$ ← $\measuredangle C=62.08°$

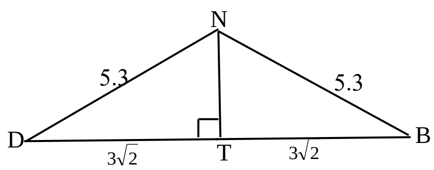
משולש BNC: $\sin62.08°=\frac{BN}{6}$ ← BN = 5.3016 ס"מ

הפאות הצדדיות הן משולשים חופפים ← $BN=ND$

<u>משולש BND</u>: BD הוא אלכסון הבסיס: $BD=6\sqrt{2}$ (משפט פיתגורס במשולש BCD)

$\sin DNT=\frac{3\sqrt{2}}{5.3016}$ ← $\measuredangle DNT=53.15°$

← $\underline{\measuredangle DNB=106.31°}$



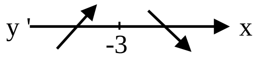
פתרון שאלה 4

נתונה הפונקציה $y=(x+4)e^{-x}$

א) <u>נקודות חיתוך עם הצירים</u>: $y=0 \Rightarrow x=-4 \;,\; x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0\,,\,4)\;,\;(-4\,,\,0)$

<u>נקודות קיצון</u>: נגזור את הפונקציה $y'=1\cdot e^{-x}+(x+4)e^{-x}(-1)=e^{-x}\cdot(-x-3)$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל $x=-3$



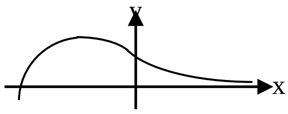
נק' מקס' $(-3,e^{3})$

<u>אסימפטוטות מקבילות לצירים</u>: הפונקציה מוגדרת לכל x לכן אין אסימפטוטות אנכיות.

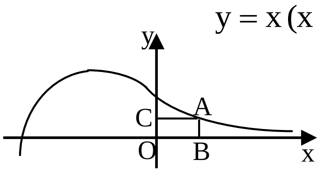
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{e^{x}}=0 \Rightarrow$ יש אסימפטוטה $y=0$ כאשר $x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+4}{e^{x}}=\infty \Rightarrow$ אין אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to-\infty$

ב)



ג) נסמן $A[x\,,(x+4)e^{-x}] \Rightarrow$ שטח המלבן OCAB: $y=x(x+4)e^{-x}$

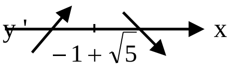


נגזור את הפונקציה $y=(x^{2}+4x)e^{-x}$

$y'=(2x+4)\cdot e^{-x}+(x^{2}+4x)e^{-x}(-1)=e^{-x}(-x^{2}-2x+4)$

$y'=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{-2}=-1\pm\sqrt{5}$

A ברביע הראשון לכן $\underline{x=-1+\sqrt{5}}$. נבדוק כי A נק' מקס'



פתרון שאלה 5

לפונקציה $f(x)=\frac{9}{x}$ מעבירים משיק לפונקציה בנקודה $x=6$ שעל הגרף.

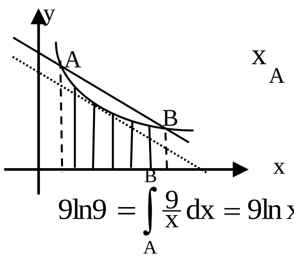
נקודת ההשקה $(6\,,\,1.5)$ נגזור את הפונקציה כדי למצוא את שיפוע המשיק:

$y'=-\frac{9}{x^{2}} \Rightarrow m=-\frac{9}{36}=-\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ משוואת המשיק: $y-1.5=-\frac{1}{4}(x-6) \Rightarrow \underline{y=-\frac{1}{4}x+3}$

מקביל למשיק העובר בנקודה $(0\,,t)$: $y-t=-\frac{1}{4}(x-0) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+t$. נקודות החיתוך

של הפונקציה והמקביל: $\frac{9}{x}=-\frac{1}{4}x+t \;/\cdot 4x \Rightarrow 36=-x^{2}+4xt \Rightarrow x^{2}-4xt+36=0$



$x_{1,2}=\frac{4t\pm\sqrt{16t^{2}-144}}{2} \Rightarrow x_{A}=\frac{4t-\sqrt{16t^{2}-144}}{2}=2t-2\sqrt{t^{2}-9}$

$x_{B}=\frac{4t+\sqrt{16t^{2}-144}}{2}=2t+2\sqrt{t^{2}-9}$

$$9\ln 9=\int_{A}^{B}\frac{9}{x}dx=9\ln x\Big|_{A}^{B}=9[\ln(2t+2\sqrt{t^{2}-9})-\ln(2t-2\sqrt{t^{2}-9})]=9\ln\frac{t+\sqrt{t^{2}-9}}{t-\sqrt{t^{2}-9}}$$

$$\ln 9=\ln\frac{t+\sqrt{t^{2}-9}}{t-\sqrt{t^{2}-9}} \Rightarrow 9=\frac{t+\sqrt{t^{2}-9}}{t-\sqrt{t^{2}-9}} \Rightarrow 9t-9\sqrt{t^{2}-9}=t+\sqrt{t^{2}-9}$$

$$/:2,\ ()^{2} \quad 8t=10\sqrt{t^{2}-9} \Rightarrow 16t^{2}=25t^{2}-225 \Rightarrow t^{2}=25 \Rightarrow t=-5\ ,\ \underline{t=5}$$

מבחן 25

פתרון שאלה 1

נסמן: $t = 0.75 \leftarrow S\cdot h = 4\cdot\frac{S\cdot t\cdot h}{3} \leftarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'B'C'} = S\ ,\ ED' = t\cdot h\ ,\ DD' = h$

$DE : ED' = 1 : 3 \leftarrow$

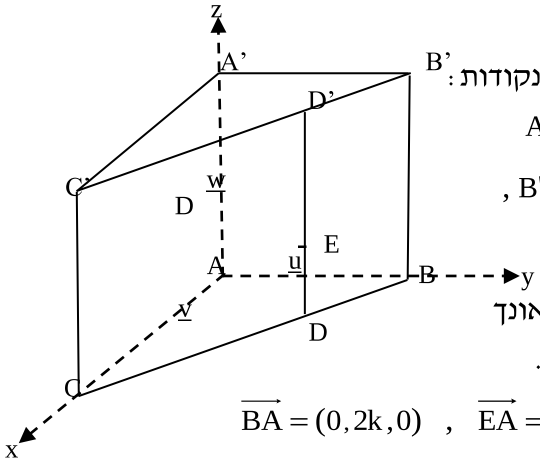
א) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \underline{u} + \frac{1}{3}(\underline{v} - \underline{u}) + \frac{1}{4}\underline{w} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}(\underline{v} - \underline{u}) + \frac{1}{4}\underline{w} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$

ב) נסמן: $|\underline{w}| = 4k\ ,\ |\underline{u}| = 2k\ ,\ |\underline{v}| = k$

$$\cos AEB = \frac{-\frac{2}{9}\cdot 4k^2+\frac{1}{9}\cdot k^2+\frac{1}{16}\cdot 16k^2}{\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 4k^2+\frac{1}{9}\cdot k^2+\frac{1}{16}\cdot 16k^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 4k^2+\frac{1}{9}\cdot k^2+\frac{1}{16}\cdot 16k^2}} = \frac{\frac{2}{9}\cdot k^2}{\sqrt{\frac{26}{9}k^2}\cdot\sqrt{\frac{14}{9}k^2}} = \frac{2}{\sqrt{26\cdot 14}}$$

$\measuredangle AEB = 83.98°$



ג) נוסיף מערכת צירים ונרשום את שיעורי הנקודות:

$A(0\ ,0\ ,0)\ ,\ B(0\ ,2k\ ,0)\ ,\ C(k\ ,0\ ,0)\ ,$

$,\ B'(0\ ,2k\ ,4k)\ D(\frac{k}{3},\frac{4k}{3},0)\ ,\ E(\frac{k}{3},\frac{4k}{3},k)$

נמצא את משוואת המישור ABE:

וקטור המקדמים (a, b, c) של המישור מאונך

למישור לכן הוא מאונך לכל ישר במישור.

נרשום שני כיוונים במישור: $\overrightarrow{BA} = (0, 2k, 0)\quad ,\quad \overrightarrow{EA} = (\frac{k}{3}, -\frac{4k}{3}, k)$

$b = 0 \leftarrow 0\cdot a + 2k\cdot b + 0\cdot c = 0 \leftarrow \overrightarrow{BA}\cdot(a,b,c) = 0$

$a = -3c \leftarrow \frac{k}{3}a - \frac{4k}{3}\cdot 0 + kc = 0 \leftarrow \overrightarrow{EA}\cdot(a,b,c) = 0$

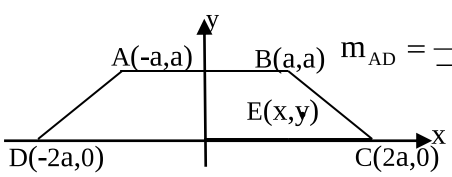
← משוואת המישור ABE היא: $-3cx + 0y + cz + d = 0$

נציב את הנקודה $A(0\ ,0\ ,0)$ ונקבל $d = 0$ ← $-3cx + cz = 0\ /:-c$ ← $\underline{3x - z = 0}$

ד) הוקטור $(3\ ,0\ ,-1)$ מאונך למישור ABE. הכיוון של הישר B'E הוא $(\frac{k}{3}, \frac{-2k}{3}, -3k)$

$\underline{\alpha = 24.15°} \leftarrow \sin\alpha = \frac{k+0+3k}{\sqrt{\frac{1}{9}\cdot k^2+\frac{4}{9}\cdot k^2+9k^2}\cdot\sqrt{9+0+1}} = 0.409 \leftarrow$

פתרון שאלה 2



א) נמצא את משוואות הצלעות AD ו- BC: $m_{AD} = \frac{a-0}{-a-(-2a)} = 1$

$\leftarrow y - 0 = 1(x + 2a) \leftarrow AD:\ -x + y - 2a = 0$

$m_{BC} = \frac{a-0}{a-(2a)} = -1 \rightarrow$ $y - 0 = -1(x - 2a) \leftarrow BC:\ x + y - 2a = 0$

מרחק נקודה $E(x\ ,y)$ מצלע AD הוא $\frac{|-x+y-2a|}{\sqrt{1+1}}$ ← ריבוע המרחק מ- AD הוא $\frac{(-x+y-2a)^2}{2}$

מרחק הנקודה $E(x\ ,\ y)$ מהצלע BC הוא $\frac{|x+y-2a|}{\sqrt{1+1}}$ ← ריבוע המרחק מ- AD הוא $\frac{(x+y-2a)^2}{2}$

מרחק הנקודה $E(x\ ,\ y)$ מהצלע AB הוא $a-y$ ← ריבוע המרחק מ- AB הוא $(a-y)^2$

מרחק הנקודה $E(x\ ,\ y)$ מהצלע CD הוא y ← ריבוע המרחק מ- CD הוא y^2

$$\frac{(-x+y-2a)^2}{2}+\frac{(x+y-2a)^2}{2}+(a-y)^2+y^2=k\ /\cdot 2$$

$$x^2+y^2+4a^2-2xy+4ax-4ay+x^2+y^2+4a^2+2xy-4ax-4ay+2a^2-4ay+2y^2+2y^2=2k$$

$2x^2+6y^2+10a^2-12ay=2k\ /:2$ ← $\underline{x^2+3y^2+5a^2-6ay=k}$

ב) אורכי הצלעות של הטרפז: $BC=AD=\sqrt{(a-0)^2+(a-2a)^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$,

$AB=2a$, $CD=4a$ ← $AB+CD\neq BC+AD$ ← לא ניתן לחסום מעגל בטרפז.

ג) ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ← סכום זוויות נגדיות הוא $180°$ ← ניתן לחסום את הטרפז במעגל. מרכז המעגל הוא מפגש האנכים האמצעיים לצלעות הטרפז.

אחד האנכים האמצעיים (לשני הבסיסים) הוא ציר y או הישר $x=0$.

נמצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AD: $m_{AD}=1$ ← שיפוע האנך האמצעי -1 .

אמצע AD היא הנקודה $(-1.5a\ ,\ 0.5a)$ ← המשוואה: $y-0.5a=-1(x+1.5a)$ ← $y=-x-a$

מרכז המעגל הוא נקודת החיתוך של שני האנכים האמצעיים: $(0\ ,\ -a)$

מחוג המעגל הוא, לדוגמא, מרחק המרכז מקדקוד B: $(0-a)^2+(-a-a)^2=R^2$ ←

$R^2=5a^2$ ← משוואת המעגל: $\underline{x^2+(y+a)^2=5a^2}$

פתרון שאלה 3

א) נסמן $z=x+yi$ ← $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$

$$z-\frac{1}{z}=x+yi-\frac{x-yi}{x^2+y^2}=x-\frac{x}{x^2+y^2}+i(y+\frac{y}{x^2+y^2})=2i\sin\theta$$

← $x-\frac{x}{x^2+y^2}=0$ וגם $y+\frac{y}{x^2+y^2}=2\sin\theta$

$\downarrow$ $\downarrow$

$x^2+y^2=1$ ← $y+\frac{y}{1}=2\sin\theta$

← $y=\sin\theta$ ← $x=\cos\theta$ ← $z=\text{cis}\,\theta$

$\frac{1}{z}=\text{cis}(-\theta)$ ← $z^n=\text{cis}\,n\theta$ ← $\frac{1}{z^n}=\text{cis}(-n\theta)$

$$z^n+\frac{1}{z^n}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=2\cos(n\theta)$$

ב) נסמן $z=r\text{cis}\,\theta$ ← $r^3\text{cis}(3\theta)=1\text{cis}(90°)$ ← $r=1\ ,\ 3\theta=90°+360°k$

← $z = 1cis30°$, $z = 1cis150°$, $z = 1cis270°$

w ברביע הראשון ← $w = 1cis30°$.

סכום הסדרה ההנדסית: $S = \frac{1\cdot(w^{12}-1)}{w-1} = \frac{cis360°-1}{cis30°} = 0$

פתרון שאלה 4

נתונה הפונקציה $y = \ln x + \frac{1}{\ln(bx)}$

א) תחום ההגדרה: $x > 0$ וגם $bx > 0$ וגם $\ln(bx) \neq 0$

← $b > 0$, $bx \neq 1$ ← הפונקציה מוגדרת עבור $b > 0$.

ב) תחום הגדרה $x > 0$ וגם $x \neq \frac{1}{b}$

נקודות קיצון $y' = \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(bx)} = \frac{\ln^2(bx)-1}{x\ln^2(bx)}$ נשווה את הנגזרת לאפס:

$\ln^2(bx) = 1$ ← $\ln(bx) = 1$ או $\ln(bx) = -1$ ← $bx = e$ או $bx = e^{-1}$

← $x = \frac{e}{b}$ או $x = \frac{1}{be}$.

ערך הפונקציה בנקודות הקיצון: $y_{(\frac{e}{b})} = \ln\frac{e}{b} + \frac{1}{\ln e} = 1 - \ln b + 1 = 2 - \ln b$

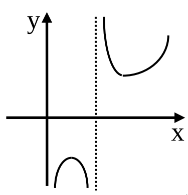
$y_{(\frac{1}{be})} = \ln(\frac{1}{be}) + \frac{1}{\ln\frac{1}{e}} = -1 - \ln b - 1 = -2 - \ln b$. נמצא את סוג הקיצון:

x	$0 < x < \frac{1}{be}$	$\frac{1}{be}$	$x > \frac{1}{be}$	$\frac{1}{b}$	$x < \frac{e}{b}$	$\frac{e}{b}$	$x > \frac{e}{b}$
y'	+	0	-		-	0	+
y	↗	מקסימום	↘		↘	מינימום	↗

נקודת מינימום $(\frac{e}{b}, 2 - \ln b)$ נקודת מקסימום $(\frac{1}{be}, -2 - \ln b)$

אסימפטוטות $x = 0$, $x = \frac{1}{b}$ על פי תחום ההגדרה

ג) כאשר $b = 1$:



האסימפטוטה $x = \frac{1}{b}$ תהיה $x = 1$,

ונקודות קיצון יהיו $(e, 2)$ מינימום, $(\frac{1}{e}, -2)$ מקסימום

כאשר $b > 1$ האסימפטוטה $x = \frac{1}{b}$ תזוז שמאלה ותהיה בין 0 ל- 1

שתי נקודות הקיצון יזוזו שמאלה ולמטה, אולם הצורה של הגרף תישאר אותה צורה.

ד) נתון כי הישר המחבר את נקודות הקיצון יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר x

מכאן ששיפוע הישר הוא 1 ← $\frac{2-\ln b-(-2-\ln b)}{\frac{e}{b}-\frac{1}{be}} = 1$ ← $4 = \frac{e}{b} - \frac{1}{be}$ ← $b = \frac{e^2-1}{4e}$

פתרון שאלה 5

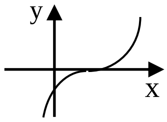
א) תחום ההגדרה הוא R.

נקודות חיתוך עם הצירים: $x=0 \rightarrow y=-e^2 \;,\; y=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,0) \;,\; (0,-e^2)$

נגזור את הפונקציה: $y'=e^{3x^2-6x+2}+(x-1)e^{3x^2-6x+2}(6x-6)=e^{3x^2-6x+2}(1+6x^2-12x+6)$

$y'=e^{3x^2-6x+2}(6x^2-12x+7)$. $6x^2-12x+7>0$ לכל x, $e^{3x^2-6x+2}>0$ לכל x $\rightarrow$

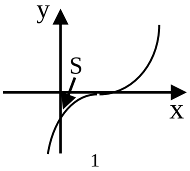
הפונקציה עולה לכל x.



ב)

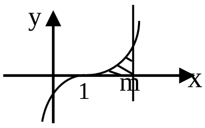
ג) כדי לחשב אינטגרל של הפונקציה $y=(x-1)e^{3x^2-6x+2}$ נציב $u=e^{3x^2-6x+2}$ $\rightarrow$

$$\frac{du}{dx}=e^{3x^2-6x+2}(6x-6)=u\cdot 6(x-1) \rightarrow dx=\frac{du}{6u(x-1)} \rightarrow$$



$$\int (x-1)e^{3x^2-6x+2}dx=\int (x-1)\cdot u\cdot\frac{du}{6u(x-1)}=\int\frac{du}{6}=\frac{u}{6}+c=\frac{e^{3x^2-6x+2}}{6}+c$$

השטח המוגבל בגרף הפונקציה ובצירים: $S=-\int_0^1 (x-1)e^{3x^2-6x+2}dx=-\frac{e^{3x^2-6x+2}}{6}\Big|_0^1=\frac{e^3-1}{6e}$



ד) $\frac{e^3-1}{6e}=\int_1^m (x-1)e^{3x^2-6x+2}dx=\frac{e^{3x^2-6x+2}}{6}\Big|_1^m=\frac{e^{3m^2-6m+2}-e^{-1}}{6}$

$\rightarrow e^3-1=e(e^{3m^2-6m+2}-e^{-1}) \rightarrow e^3-1=e^{3m^2-6m+3}-1 \rightarrow e^3=e^{3m^2-6m+3}$

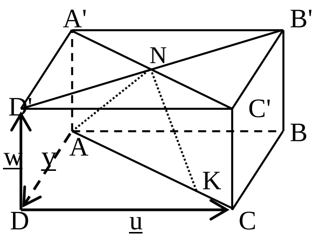
$\rightarrow 3=3m^2-6m+3 \rightarrow 3m(m-2)=0 \rightarrow \underline{m=2}$ או $\cancel{m=0}$ (נתון $m>1$)

מבחן 29

פתרון שאלה 1

$ABCDA'B'C'D'$ היא תיבה.

$ABCD$ ריבוע שצלעו a. גובה התיבה $0.5a$.



נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u} \;,\; \overrightarrow{AD}=\underline{v} \;,\; \overrightarrow{DD'}=\underline{w}$

מקצועות התיבה מאונכים: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

נתון: $\overrightarrow{AK}=t\overrightarrow{AC}$

א) צריך למצוא את ערכי t שעבורם $\measuredangle ANK$ היא זווית קהה.

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{AA'}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AN}=t(-\underline{u}-\underline{v})+(\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v})=(\frac{1}{2}-t)\underline{u}+(\frac{1}{2}-t)\underline{v}+\underline{w}$$

כדי שהזווית $\measuredangle ANK$ תהיה זווית קהה, הקוסינוס שלה צריך להיות שלילי.

$\cos ANK = \frac{\vec{AN}\cdot\vec{KN}}{|\vec{AN}|\cdot|\vec{KN}|} < 0$. המכנה הוא מכפלת אורכי הוקטורים והוא חיובי, לכן

על המונה להיות שלילי : $\vec{AN}\cdot\vec{KN} = [(\frac{1}{2}-t)\underline{u} + (\frac{1}{2}-t)\underline{v} + \underline{w}\,]\,[\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}] < 0$

$(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t)|\underline{u}|^2 + (\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t)|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 = a^2(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} - t < 0 \quad \leftarrow \quad t > \frac{3}{4}$.

הנקודה K על AC ← $0 < t < 1$ וגם $t > \frac{3}{4}$ ← $\underline{\frac{3}{4} < t < 1}$

ב) $t = 0.9$ ← $\vec{KN} = (\frac{1}{2}-t)\underline{u} + (\frac{1}{2}-t)\underline{v} + \underline{w} = -0.4\underline{u} - 0.4\underline{v} + \underline{w}$

$$|\vec{KN}| = \sqrt{0.16a^2 + 0.16a^2 + 0.25a^2} = a\sqrt{0.57}$$

$$|\vec{AN}| = \sqrt{0.25a^2 + 0.25a^2 + 0.25a^2} = a\sqrt{0.75}$$

$$\vec{AN}\cdot\vec{KN} = (0.5\underline{u} + 0.5\underline{v} + \underline{w})(-0.4\underline{u} - 0.4\underline{v} + \underline{w}) = -0.2|\underline{u}|^2 - 0.2|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2$$

$$\vec{AN}\cdot\vec{KN} = a^2(-0.2 - 0.2 + 0.25) = -0.15a^2$$

$$\cos ANK = \frac{\vec{AN}\cdot\vec{KN}}{|\vec{AN}|\cdot|\vec{KN}|} = \frac{-0.15a^2}{a\sqrt{0.75}\cdot a\sqrt{0.57}} = -0.229 \quad \rightarrow \quad \underline{\measuredangle ANK = 103.26^\circ}$$

פתרון שאלה 2

א) מרכז המעגל נמצא על הישר $y = x - 2$. נסמן את מרכז המעגל $(t\,,\,t-2)$.

המרחק של מרכז המעגל מהישר $l\!: 3x - 4y = 29$ הוא 5 ←

$$\frac{|3t - 4(t-2) - 29|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \quad \leftarrow \quad t = 4 \quad \text{או} \quad t = -46$$

נתון כי מרכז המעגל נמצא ברביע הראשון לכן הוא בנקודה $(4\,,\,2)$.

משוואת המעגל : $(x-4)^2 + (y-2)^2 = R^2$. המעגל עובר בנקודה $(4\,,\,12)$ לכן

$$(4-4)^2 + (12-2)^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = 100$$

משוואת המעגל : $\underline{(x-4)^2 + (y-2)^2 = 100}$

ב) ערכי ה- x של מרכז המעגל ושל נקודה A שווים (שניהם שווים 4) לכן הרדיוס המחבר את נקודה A עם מרכז המעגל מקביל לציר y ← המשיק בנקודה A מקביל לציר x ומשוואתו $y = 12$. ידוע כי משוואת ישר זה היא $y = (R-10)x + 12$.

כדי ששתי המשוואות יתלכדו, ערכו של R צריך להיות 10.

פתרון שאלה 3

נמצא את המקום הגיאומטרי המתואר ע"י המשוואה : $|z + i| = 2\sqrt{1.5}$. נסמן : $z = x + yi$

$\leftarrow \quad \sqrt{x^2+(y+1)^2} = |x+(y+1)i| = |z+i| \quad \leftarrow \quad \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{1.5}$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל: $x^2+(y+1)^2 = 6$. המקום הגיאומטרי הוא מעגל.

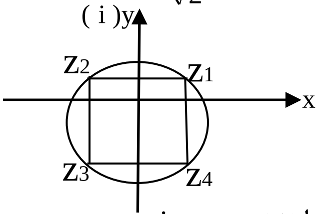
א) הנקודה $z_1 = \sqrt{2}+bi$ נמצאת על המעגל $x^2+(y+1)^2 = 6 \quad \leftarrow \quad (\sqrt{2})^2+(b+1)^2 = 6$

$\leftarrow \quad 2+(b+1)^2 = 6 \quad \leftarrow \quad (b+1)^2 = 4 \quad \leftarrow \quad b+1 = 2 \quad \leftarrow \quad b = 1$ או $b+1 = -2 \quad \leftarrow \quad b = -3$

z_1 ברביע ראשון $\leftarrow \quad \underline{b = 1} \quad \leftarrow \quad z_1 = \sqrt{2}+i$.

ב) נעביר את z_1 להצגה קוטבית: $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{3}$, $tg\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = 35.26°$

$\leftarrow \quad \underline{z_1 = \sqrt{3}\,cis35.26°}$



צלעות המלבן מקבילות לצירים $\leftarrow$ z_1z_2 מקביל לציר x $\leftarrow \quad z_2 = x+i$

הנקודה z_2 נמצאת על המעגל $\leftarrow \quad x^2+(1+1)^2 = 6 \quad \leftarrow \quad x^2 = 2 \quad \leftarrow \quad x = \pm 2 \quad \leftarrow$

$z_2 = -\sqrt{2}+i$. נמצא הצגה קוטבית של z_2 : $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{3}$,

$tg\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = -35.26°+180° = 144.74° \quad \leftarrow \quad \underline{z_2 = \sqrt{3}\,cis144.74°}$

z_1z_4 מקביל לציר y $\leftarrow \quad z_4 = \sqrt{2}+yi$. הנקודה z_4 נמצאת על המעגל $x^2+(y+1)^2 = 6$

$\leftarrow \quad (\sqrt{2})^2+(y+1)^2 = 6 \quad \leftarrow \quad (y+1)^2 = 4 \quad \leftarrow \quad y = -3, 1 \quad \leftarrow \quad z_4 = \sqrt{2}-3i$.

הצגה קוטבית של z_4 : $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$, $tg\theta = -\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\theta = -64.76° = 295.24°$

$\leftarrow \quad \underline{z_4 = \sqrt{11}\,cis295.24°}$

z_3z_4 מקביל לציר x , z_3z_2 מקביל לציר y $\leftarrow \quad z_3 = -\sqrt{2}-3i$. הצגה קוטבית של z_3 :

$r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$, $tg\theta = \frac{-3}{-\sqrt{2}} \quad \theta = 64.76°+180° = 244.76°$

$\leftarrow \quad \underline{z_3 = \sqrt{11}\,cis244.76°}$

ג) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \sqrt{3}\,cis35.26° \cdot \sqrt{3}\,cis144.74° \cdot \sqrt{11}\,cis244.76° \cdot \sqrt{11}\,cis295.24°$

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 33cis(35.26°+144.74°+244.76°+295.24°) = 33cis720°$

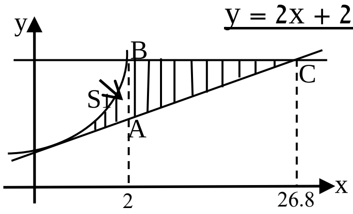
$\underline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 33}$

פתרון שאלה 4

נתונה הפונקציה $y = e^{2x}+1$. בנקודה $x = 0$ מעבירים משיק.

א) נקודת ההשקה $y(0)=e^0+1=2$ ← $(0,2)$. ← $y'=2e^{2x}$

שיפוע המשיק: $m=y'(0)=2e^0=2$ משוואת המשיק $\underline{y=2x+2}$



ב) נמצא את נקודות החיתוך של הישר $y=e^4+1$

עם הפונקציה: $e^{2x}+1=e^4+1$ ← $x=2$

ועם המשיק: $2x+2=e^4+1$ ← $x=\frac{e^4-1}{2}=26.8$

$$S_1=\int_0^2(e^{2x}+1-2x-2)dx=\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x\Big|_0^2=(\frac{e^4}{2}-4-2)-(\frac{1}{2}-0)=\frac{e^4}{2}-\frac{13}{2}=20.799$$

נחשב את שטח המשולש ABC: $BC=\frac{e^4-1}{2}-2=\frac{e^4-5}{2}=24.8$

$y(A)=2\cdot2+2=6$, $y(B)=e^4+1$ ← $AB=e^4+1-6=e^4-5$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{e^4-5}{2})\cdot(e^4-5)=\frac{(e^4-5)^2}{4}=614.994 \leftarrow S=S_1+S_\Delta=\underline{635.79}$$

פתרון שאלה 5א

תהליכי גידול ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t)=u_0a^t$

(1) $234=450\cdot a^9$ ← $0.52=a^9$ ← $\ln0.52=9\ln a$ ← $\ln a=-0.073$ ← $a=0.93$.

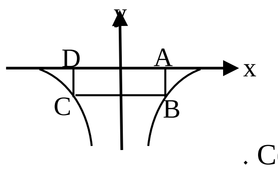
נסמן ב- p את אחוז הירידה היומי $a=1-\frac{p}{100}$ ← $0.93=\frac{100-p}{100}$ ← $p=7\%$

כמות החיידקים ירדה כל יום ב- $\underline{7\%}$.

(2) $100=234\cdot0.93^t$ ← $0.427=0.93^t$ ← $\ln0.427=t\cdot\ln0.93$ ← $t=11.7$

יש להחדיר חומר הדברה <u>12 ימים נוספים</u>.

פתרון שאלה 5ב



נסמן את קדקוד A של המלבן ב- $(t,0)$ ← $B(t,\ln t)$

ערך ה- y של קדקוד C הוא $\ln t$. נמצא את ערך ה- x של קדקוד C:

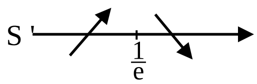
$\ln(-x)=\ln t$ ← $-x=t$ ← $x_C=-t$ ← $D(-t,0)$, $C(-t,\ln t)$.

אורכי הצלעות של המלבן: $AD=t-(-t)=2t$, $AB=0-\ln t=-\ln t$

(יש לזכור כי $0<t<1$ ולכן $\ln t<0$ ואורך הצלע AB הוא חיובי).

שטח המלבן: $S=2t\cdot(-\ln t)=-2t\cdot\ln t$

נגזור: $S'=-2\cdot\ln t-2t\cdot\frac{1}{t}=-2\cdot\ln t-2$ ← $S'=0$ כאשר $\ln t=-1$ ו- $t=\frac{1}{e}$

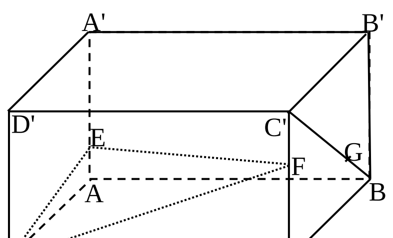
נבדוק את סוג הקיצון: 

זוהי נקודת מקסימום.

צלעות המלבן ששטחו מקסימלי הן: $\frac{2}{e}$ ו- 1. שטח המלבן הוא $S=\frac{2}{e}$.

מבחן 31

פתרון שאלה 1



נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{u}$ נמצא שני כיוונים

במישור DEF: $AE:EA'=1:3$ ← $AE=\frac{1}{4}AA'$ ←

$AE:EA'=1:3$ ← $AE=\frac{1}{4}AA'$ ←

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{w}$.

$CF:FC'=2:1$ ← $CF=\frac{2}{3}CC'$ ←

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}$. הנקודה G נמצאת במישור DEF ← הוקטור $\overrightarrow{DG}$ נמצא במישור.

נסמן: $\overrightarrow{BG}=t\overrightarrow{BC'}$ ← $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+t\overrightarrow{BC'}=\underline{v}-\underline{u}+t(\underline{u}+\underline{w})=(t-1)\underline{u}+\underline{v}+t\underline{w}$

וקטור הנמצא במישור הוא צירוף לינארי של הוקטורים היוצרים את המישור ←

$\overrightarrow{DG}=\alpha\overrightarrow{DE}+\beta\overrightarrow{DF}=\alpha(-\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{w})+\beta(\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w})=-\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+(\frac{1}{4}\alpha+\frac{2}{3}\beta)\underline{w}$ ←

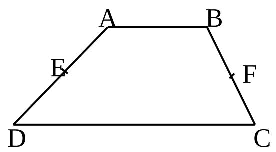
$-\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+(\frac{1}{4}\alpha+\frac{2}{3}\beta)\underline{w}=(t-1)\underline{u}+\underline{v}+t\underline{w}$ ← $-\alpha=t-1$ וגם $\beta=1$

וגם $\frac{1}{4}\alpha+\frac{2}{3}\beta=t$ ← $\alpha=t-1$ ← $\frac{1}{4}(1-t)+\frac{2}{3}=t$ ← $t=\frac{11}{15}$

← $\overrightarrow{BG}=\frac{11}{15}\overrightarrow{BC'}$ ← $\overrightarrow{GC'}=\frac{4}{15}\overrightarrow{BC'}$ ← $\underline{BG:GC'=11:4}$

<u>פתרון שאלה 2</u>

א) מרחק הנקודה E מכל אחד מהבסיסים שווה למחצית גובה הטרפז.



נמצא את המרחק של E מהישר $x+3y=16$:

$\frac{h}{2}=\frac{|3+3\cdot7-16|}{\sqrt{1+9}}$ ← גובה הטרפז: $h=\frac{16}{\sqrt{10}}$

שטח הטרפז 48 ← $48=\frac{(AB+CD)\cdot\frac{16}{\sqrt{10}}}{2}$ ← $AB+CD=6\sqrt{10}$

אורך קטע האמצעים EF שווה למחצית סכום הבסיסים $EF=3\sqrt{10}$

הישר EF מקביל לבסיסים לכן המשוואה שלו היא $x+3y=a$

נציב את נקודה E: $3+3\cdot7=a$ ← $a=24$ ← $EF:\ x+3y=24$

נסמן $F(24-3t\ ,\ t)$ ← $EF=3\sqrt{10}=\sqrt{(24-3t-3)^2+(t-7)^2}$

$\underline{t=4}$ או $t=10$ (נתון כי $y_F<y_E$) ← $\underline{F(12\ ,\ 4)}$

ב) מצאנו: $AB+CD=6\sqrt{10}$ ונתון כי $CD=2\cdot AB$ ← $AB=2\sqrt{10}$, $CD=4\sqrt{10}$.

נמצא את משוואת AD על פי השיפוע הנתון (1) ועל פי נקודה E: $AD:\ y-7=1(x-3)$.

D היא נקודת החיתוך של AD ושל CD ← $\underline{D(1\ ,\ 5)}$

A היא נקודת החיתוך של AD ושל AB ← $\underline{A(5\ ,\ 9)}$

נקודה B נמצאת על AB ← $B(32-3k\ ,\ k)$. מצאנו כי $AB=2\sqrt{10}$ ←

$\sqrt{(32-3k-5)^2+(k-9)^2}=2\sqrt{10}$ ← $k=7$ או $\cancel{k=11}$ $(y_B<y_A)$ ← $\underline{B(11\,,7)}$

F היא אמצע BC ← $\frac{y+7}{2}=4$, $\frac{x+11}{2}=12$ ← $x=13$, $y=1$ ← $\underline{C(13\,,1)}$

פתרון שאלה 3

א) נפתור את המשוואה הריבועית $Z^2+2\sin\alpha\cdot Z+1=0$

$$Z=\frac{-2\sin\alpha\pm\sqrt{4\sin^2\alpha-4}}{2}=\frac{-2\sin\alpha\pm2\sqrt{-\cos^2\alpha}}{2}=-\sin\alpha\pm i\cdot\cos\alpha$$

$$Z_1=-\sin\alpha+i\cdot\cos\alpha=\cos(90^\circ+\alpha)+i\cdot\sin(90^\circ+\alpha)=1\mathrm{cis}(90^\circ+\alpha)$$

$$Z_2=-\sin\alpha-i\cdot\cos\alpha=\cos(270^\circ-\alpha)+i\cdot\sin(270^\circ-\alpha)=1\mathrm{cis}(270^\circ-\alpha)$$

ב) $Z_1-Z_2=-\sin\alpha+i\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha-i\cdot\cos\alpha)=2i\cos\alpha$

$|Z_1-Z_2|=2\cos\alpha=\sqrt{3}$ ← $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← $\underline{\alpha=30^\circ}$

פתרון שאלה 4א

הפונקציה $y=\frac{ax^2+3ax-5x-13}{x+3}$ מוגדרת לכל $x\neq-3$.

נפשט את הפונקציה ע"י חילוק:

$$\begin{array}{l} ax-5 \\ \hline ax^2+3ax-5x-13\,|\,(x+3) \\ \underline{ax^2+3ax} \\ \quad = \quad -5x-13 \\ \quad\quad\;\; \underline{-5x-15} \\ \quad\quad\quad\;\; 2 \end{array}$$

← $y=ax-5+\frac{2}{x+3}$.

נחשב את השטח, נשתמש בערך המוחלט: $S=\left|\int_{-2}^{0}\left(ax-5+\frac{2}{x+3}\right)dx\right|$

$$S=\left|\frac{ax^2}{2}-5x+2\ln(x+3)\Big|_{-2}^{0}\right|=\left|(0+2\ln3)-(2a+10)\right|=2a+10-2\ln3$$

נתון שהשטח שווה $12-\ln9=12-2\ln3$ ← $2a+10-2\ln3=12-2\ln3$ ← $\underline{a=1}$

פתרון שאלה 4ב

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{1+e^{-mx}}$.

(1) עלינו להראות כי לא קיימת נקודת קיצון לפונקציה $f(x)$:

$$f'=\frac{(me^{mx}+me^{-mx})(1+e^{-mx})+me^{-mx}(e^{mx}-e^{-mx})}{(1+e^{-mx})^2}=\frac{m(e^{mx}+e^{-mx}+2)}{(1+e^{-mx})^2}$$

$e^{mx}, e^{-mx}>0$ לכל x (e מספר חיובי ולכן בכל חזקה הוא חיובי) ←

$e^{mx}+e^{-mx}+2>0$ (סכום ביטויים חיוביים) ← הנגזרת לא מתאפסת ←

ל- $f(x)$ אין נקודת קיצון ← ל- $f'(x)$ אין נקודות חיתוך עם ציר x .

(2) $x = 0 \leftarrow$ $f = \frac{e^0 - e^0}{1+e^0} = 0$ נקודת ההשקה היא (0 ,0). שיפוע המשיק:

$m = \frac{4m}{4} = \frac{m(1+1+2)}{(1+1)^2} = f'$. נתון כי השיפוע הוא 1 $\leftarrow m = 1$ משוואת המשיק: $y = x$

פתרון שאלה 5

תהליכי גידול ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0 a^t$

בתהליך דעיכה, כפי שמתואר בשאלה זו: $a = 1 - \frac{p}{100} \leftarrow a = 0.95$

לאחר t ימים כמות הנמלים בקן היא $10000 \cdot 0.95^t$

ההרס של חלק מהקן גרם להשמדה של 30% מהנמלים ולהישרדות של 70% מהנמלים

לכן כמות הנמלים היא עתה $10000 \cdot 0.95^t \cdot 0.7 = 7000 \cdot 0.95^t$

לאחר 2t ימים נוספים כמות הנמלים בקן היא $7000 \cdot 0.95^t \cdot 0.95^{2t} = 7000 \cdot 0.95^{3t}$

הרס נוסף משמיד 40% מהמלים ומותיר 60% $\leftarrow 7000 \cdot 0.95^{3t} \cdot 0.6 = 2647$

$\leftarrow 0.95^{3t} = 0.630238 \leftarrow 3t \cdot \ln 0.95 = \ln 0.630238 \leftarrow \underline{t = 3}$

מבחן 33

פתרון שאלה 1א

משוואת הישר AB: $\underline{x} = (m , m + 1 , m - 2) + t(1 - m , m^2 - m , 7 - 2m)$

נקודה על הישר: $[m + t(1 - m) , m + 1 + t(m^2 - m) , m - 2 + t(7 - 2m)]$

נציב את הנקודה במשוואת המישור:

$$2 \cdot [m + t(1 - m)] + [m + 1 + t(m^2 - m)] - 2 \cdot [m - 2 + t(7 - 2m)] = 8$$

$$2m + t(2 - 2m) + m + 1 + t(m^2 - m) - 2m + 4 + t(-14 + 4m) = 8$$

$$m + 5 + t(m^2 + m - 12) = 8 \leftarrow t(m + 4)(m - 3) = -(m - 3)$$

(1) כאשר $\underline{m = 3}$ t מקבל אינסוף פתרונות וזה אומר שאינסוף נקודות של הישר נמצאות במישור. לכן הישר נמצא במישור.

(2) כאשר $\underline{m = -4}$ אין פתרון ל- t וזה אומר שלא קיימת נקודה על הישר שנמצאת במישור. לכן הישר מקביל למישור.

(3) לכל ערך של m כך ש $m \neq 3 , -4$

$m + t(1 - m) = 1$ וגם $m + 1 + t(m^2 - m) = 26$ וגם $m - 2 + t(7 - 2m) = 10$

פתרון המשוואות: $t = 1$, $\underline{m = -5}$

פתרון שאלה 1ב

(1) $-3 - 4i = 5\text{cis}233.13^0 \leftarrow (-3 - 4i)^8 = 5^8\text{cis}8 \cdot 233.13^0 = 164833 + 354144i$

$$(2+i)^{16}=5^8 cis16\cdot 26.57^0=164833+354144i \quad \leftarrow \quad 2+i=\sqrt{5}cis26.57^0$$

$$\frac{(-3-4i)^8}{(2+i)^{16}}=1 \quad \leftarrow$$

$$-iz=rcis\alpha\cdot cis270^\circ=r\cdot cis(270^0+\alpha) \quad \leftarrow \quad z=rcis\alpha \quad , \quad -i=cis270^0 \quad (2)$$

פתרון שאלה 2

א) $F(x\,,\,y)$ היא נקודה על המקום הגיאומטרי.

מרחק הנקודה F מהנקודה $(1\,,\,2)$: $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

מרחק הנקודה F מהישר $y = x - 5$ $(x+y-5=0)$: $\frac{|x+y-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$

לפי הנתון : $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$

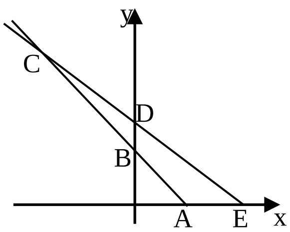
נעלה בריבוע : $x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2+y^2+25+2xy-10x-10y$

$$4x+3y-xy=10 \quad \leftarrow \quad 8x+6y-2xy=20$$

המקום הגיאומטרי הוא : $\underline{4x+3y-xy=10}$

ב) הישר $l: y = 5 - x$ חותך את ציר x בנקודה $E(5\,,\,0)$ ואת ציר y בנקודה $D(0\,,\,5)$.

העקום $4x + 3y - xy = 10$ חותך את ציר x בנקודה $A(2.5\,,\,0)$ ואת ציר y בנקודה $B(0,\frac{10}{3})$.



שיפוע הישר AB : $m=\frac{\frac{10}{3}-0}{0-\frac{5}{2}}=-\frac{4}{3}$

משוואת הישר AB : $y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3} \quad \leftarrow \quad 4x+3y=10$

נמצא את נקודת החיתוך של AB והישר l :

$4x+3(5-x)=10 \quad \leftarrow \quad C(-5\,,\,10)$.

לחישוב שטח משולש BCD נמצא את אורך הצלע BD : $BD=5-\frac{10}{3}=\frac{5}{3}$.

הגובה לצלע זו הוא $|x_C|=5$. $\leftarrow \quad S_{\Delta BCD}=\frac{\frac{5}{3}\cdot 5}{2}=\frac{25}{6}$

לחישוב שטח משולש ACE נמצא את אורך הצלע AE : $AE=5-2.5=2.5$

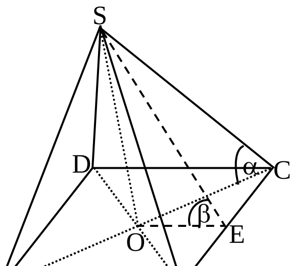
הגובה לצלע זו הוא $y_C=10 \quad \leftarrow \quad S_{\Delta ACE}=\frac{2.5\cdot 10}{2}=12.5$. שטח המרובע ABDE הוא

ההפרש בין שטחי שני המשולשים $\leftarrow \quad S_{ABDE}=S_{\Delta ACE}-S_{\Delta BCD}=\frac{25}{2}-\frac{25}{6}=\frac{25}{3}$

נחשב את היחס המבוקש : $S_{BCD}:S_{ABDE}=\frac{25}{6}:\frac{25}{3}=1:2$

פתרון שאלה 3

א) נקודה O היא מפגש האלכסונים בבסיס ABCD $\leftarrow$



SO הוא גובה לבסיס ← CO הוא ההיטל בבסיס של

המקצוע הצדדי CS ← $\measuredangle SCO=\alpha$

נקודה E היא אמצע BC . ΔBSC הוא משו"צ ← $SE\perp BC$.

גם ΔBOC הוא משו"ש ← $OE\perp BC$. ← $\measuredangle SEO=\beta$.

נסמן אורך מקצוע ב- a. משפט פיתגורס ב - ΔABC : $AC^2=a^2+a^2=2a^2$ ← $OC=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$

משפט פיתגורס ב - ΔSOC : $SO^2=a^2-(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2})^2=\frac{a^2}{2}$ ← $SO=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$

משפט פיתגורס ב - ΔBSE : $SE^2=a^2-(\frac{a}{2})^2=\frac{3a^2}{4}$ ← $SE=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$

במשולש SOC : $\sin\alpha=\frac{SO}{SC}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.   במשולש SOE : $\sin\beta=\frac{SO}{SE}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

← $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ב) כל פאה צדדית היא משו"צ שצלעו a ← שטח פאה צדדית: $\frac{a^2\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

← שטח המעטפת הוא $4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$ ← $a^2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ ← a = 4 ס"מ

← $V=a^2\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16\cdot\sqrt{8}}{3}$ סמ"ק

פתרון שאלה 4

נתונה הפונקציה $y=a-(a+x)\ln(a+x)$ $(a>0)$

א-ב) (1) תחום הגדרה : $a+x>0$ ← $x>-a$

(2) נקודות קיצון : $y'=-(a+x)\cdot\frac{1}{a+x}-\ln(a+x)=-1-\ln(a+x)$ נציב $y'=0$

$\ln(a+x)=-1$ ← $a+x=\frac{1}{e}$ ← $x=\frac{1}{e}-a$.

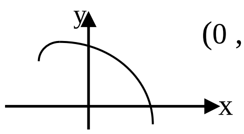
ערך הפונקציה בנק' הקיצון : $y(\frac{1}{e}-a)=a-(a+\frac{1}{e}-a)\ln(a+\frac{1}{e}-a)=a-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=a+\frac{1}{e}$

נמצא את סוג הקיצון :

x	$-a<x<\frac{1}{e}-a$	$\frac{1}{e}-a$	$x>\frac{1}{e}-a$
y'	+	0	–
y	↗	מקסימום	↘

נקודת מקסימום $(\frac{1}{e}-a\ ,\ \frac{1}{e}+a)$

(3) נקודת חיתוך עם ציר y : $x=0$ ← $y=a-a\ln a$ ← $(0\ ,\ a-a\ln a)$



ג) נקודת החיתוך עם ציר y : $(0,a-a\ln a)$. שיפוע המשיק : $m=-1-\ln(a+0)=-1-\ln a$

משוואת המשיק : $y-(a-a\ln a)=(-1-\ln a)x$

נקודת החיתוך עם ציר y היא כמובן $(0\ ,\ a-a\ln a)$

נקודת החיתוך עם ציר x : $0-(a-a\ln a)=(-1-\ln a)x \ \leftarrow\ x=\frac{a(1-\ln a)}{1+\ln a}$

שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים : $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\cdot(1-\ln a)^2}{1+\ln a}$

נגזור לפי המשתנה a : $S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a\cdot(1-\ln a)^2+a^2\cdot 2(1-\ln a)\cdot(-\frac{1}{a})\cdot(1+\ln a)-a^2\cdot(1-\ln a)^2\cdot(\frac{1}{a})}{(1+\ln a)^2}$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot(1-\ln a)[2-2\ln a-2-2\ln a-1+\ln a]}{(1+\ln a)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot(1-\ln a)[-3\ln a-1]}{(1+\ln a)^2}$$

$S'=0 \ \rightarrow\ \ln a=1$ או $\ln a=-\frac{1}{3}$

$\rightarrow\ a=e$ או $a=0.716$

S': $\nearrow$ 0.716 $\searrow$ e $\nearrow$

שטח המשולש מינימלי כאשר <u>$a=e$</u>

<u>פתרון שאלה 5</u>

ב) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{e^{ax}-1}{\sqrt{e^{ax}}-1}$

$\sqrt{e^{ax}}-1\neq 0 \ \rightarrow\ \sqrt{e^{ax}}\neq 1 \ \rightarrow\ e^{ax}\neq 1 \ \rightarrow\ x\neq 0$

א) נפשט את הפונקציה : $f(x)=\frac{e^{ax}-1}{\sqrt{e^{ax}}-1}=\frac{(\sqrt{e^{ax}}-1)\cdot(\sqrt{e^{ax}}+1)}{\sqrt{e^{ax}}-1}=\sqrt{e^{ax}}+1$

ניתן להתייחס לפונקציה $f(x)=\sqrt{e^{ax}}+1$ כאשר $x\neq 0$.

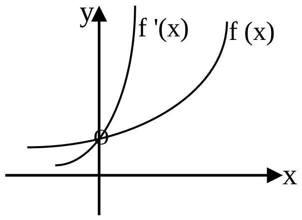
נגזור את הפונקציה : $f'(x)=\frac{a\cdot e^{ax}}{2\cdot\sqrt{e^{ax}}}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{e^{ax}}$ (כאשר $x\neq 0$).

נציב את הפונקציה ואת הנגזרת בנתון $f'(x)=2\cdot f(x)-2$:

$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{e^{ax}}=2(\sqrt{e^{ax}}+1)-2 \ \rightarrow\ \frac{a}{2}\cdot\sqrt{e^{ax}}=2\cdot\sqrt{e^{ax}}+2-2 \ \rightarrow\ \frac{a}{2}\cdot\sqrt{e^{ax}}=2\cdot\sqrt{e^{ax}} \ \rightarrow\ $ <u>$a=4$</u>

ג-ד) נציב $a=4$ בפונקציה ובפונציה הנגזרת : $f(x)=\sqrt{e^{4x}}+1=e^{2x}+1$,

$f'(x)=2\cdot\sqrt{e^{4x}}=2\cdot e^{2x}$



$\rightarrow\ f(x)=e^{2x}+1\ ,\ f'(x)=2\cdot e^{2x}\ ,\ x\neq 0$.

לשתי הפונקציות יש נקודת אי רציפות $(0\ ,\ 2)$.

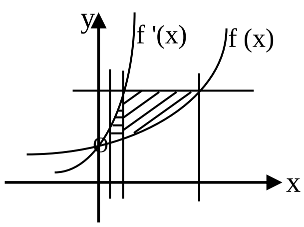
שתי הפונקציות מקבלות ערכים חיוביים בכל תחום הגדרתן.

שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

עבור $x<0$ מתקיים $f'(x)<f(x)$ ועבור $x>0$ מתקיים $f'(x)>f(x)$

ה) נמצא את נקודת החיתוך של הישר $y=4$ עם $f(x)$:

$e^{2x}+1=4 \ \rightarrow\ e^{2x}=3 \ \rightarrow\ 2x=\ln 3 \ \rightarrow\ x=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$



נמצא את נקודת החיתוך של הישר $y = 4$ עם $f'(x)$:

$$x=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2} \;\leftarrow\; 2x=\ln 2 \;\leftarrow\; e^{2x}=2 \;\leftarrow\; 2\cdot e^{2x}=4$$

נחשב את השטח בשני חלקים :

$$S_1=\int_{\ln 1.2}^{\ln\sqrt{2}}[f'(x)-f(x)]=e^{2x}+1-(0.5\cdot e^{2x}+x)\Big|_{\ln 1.2}^{\ln\sqrt{2}}=0.115748$$

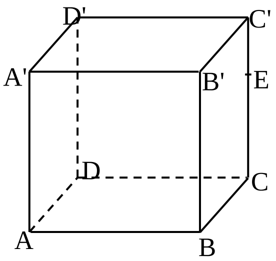
$$S_2=\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{3}}[4-f(x)]=3x-0.5\cdot e^{2x}\Big|_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{3}}=0.108198$$

$$S=0.115748+0.108198=0.224$$

מבחן 36

פתרון שאלה1

א) נתון : $CE=2EC'$, $C'(12,10,-5)$, $E(8,8,-4)$ $\leftarrow$ $C(0,4,-2)$. נתון גם : $B(1,m,0)$.



הוקטורים $\overrightarrow{CB}$ ו- $\overrightarrow{CC'}$ מאונכים זה לזה.

$$\overrightarrow{CB}=(1,m-4,2) \quad , \quad \overrightarrow{CC'}=(12,6,-3)$$

$$\underline{m=3} \;\leftarrow\; 12\cdot 1+6\cdot(m-4)+(-3)\cdot 2=0 \;\leftarrow$$

ב) הוקטור $\overrightarrow{CC'}$ מאונך למישור ABCD לכן הרכיבים שלו

הם המקדמים של x , y , z במשוואת המישור ABCD : $12x+6y-3z+D=0$

נציב את נקודה C הנמצאת במישור : $12\cdot 0+6\cdot 4-3\cdot(-2)+D=0 \;\leftarrow\; D=-30$

משוואת המישור : $12x+6y-3z-30=0\ /:3 \;\leftarrow\; \underline{4x+2y-z=10}$

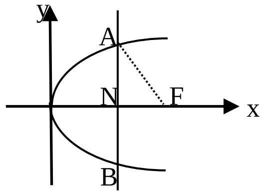
ג) אורך צלע הבסיס הוא אורך הוקטור $\overrightarrow{CB}=(1,-1,2) \;\leftarrow\; |\overrightarrow{CB}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

אורכו של הגובה הוא אורך הוקטור $\overrightarrow{CC'}=(12,6,-3) \;\leftarrow\; |\overrightarrow{CC'}|=\sqrt{144+36+9}=\sqrt{189}$

נפח התיבה : $V=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{189}=6\cdot\sqrt{189}=82.49$

פתרון שאלה 2א

AB מקביל לציר y ואורכו 12 . הפרבולה סימטרית לציר x $\leftarrow$ $BN=AN=6$.



הנקודות A ו- B נמצאות על הפרבולה $y^2=2px$

$36=2px \;\leftarrow\; A(\frac{18}{p},6)\ ,\ B(\frac{18}{p},-6)$.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה ושיעוריה $F(\frac{p}{2},0)$.

נתון : $AF=6.5 \;\leftarrow\; 6.5=\sqrt{(\frac{18}{p}-\frac{p}{2})^2+6^2}$ נעלה בריבוע $42.25=(\frac{18}{p}-\frac{p}{2})^2+36$

$\leftarrow \quad 6.25 = (\frac{18}{p} - \frac{p}{2})^2 \quad \leftarrow \quad \frac{18}{p} - \frac{p}{2} = \pm 2.5 \quad \leftarrow$

$p^2 + 5p - 36 = 0$ או $p^2 - 5p - 36 = 0 \quad \leftarrow \quad p = 4$ או $p = 9 \quad (p > 0)$

משוואת הפרבולה: $\underline{y^2 = 18x}$ או $\underline{y^2 = 8x}$

פתרון שאלה 2ב

(1) נתונה המשוואה: $z^9 = -512i$. נסמן $z = r \cdot cis\alpha \quad \leftarrow \quad z^9 = r^9 \cdot cis 9\alpha$

כמו כן $-512i = 512 \cdot cis 270° \quad \leftarrow \quad r^9 \cdot cis 9\alpha = 512 \cdot cis 270° \quad \leftarrow$

$r^9 = 512$ וכן $9\alpha = 270° + 360°k \ , \ k = 0,1,2,....,8$

$r = 2 \qquad \alpha = 30° + 40°k \ , \ k = 0,1,2,....,8 \quad \leftarrow \quad z_k = 2 \cdot cis(30° + 40°k)$

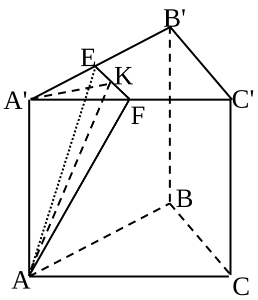
נראה כי המנה של שני שורשים עוקבים היא גודל קבוע ולכן השורשים מהווים סדרה הנדסית:

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{2 \cdot cis[30° + 40°(k+1)]}{2 \cdot cis[30° + 40°k]} = cis 40°$$

(2) נמצא את סכום השורשים בעזרת הנוסחה לחישוב סכום האיברים בסדרה הנדסית:

$S_9 = \frac{a_1 \cdot [q^9 - 1]}{q-1} \quad \leftarrow \quad S_9 = \frac{2 \cdot cis 30° \cdot [1^9 \cdot cis 9 \cdot 40° - 1]}{1 \cdot cis 40° - 1} = 0 \quad \leftarrow$ סכום השורשים הוא 0 .

פתרון שאלה 3



א) $A'E : EB' = A'F : FC'$, $A'B' = A'C'$ $\quad \leftarrow \quad A'EF$ משו"ש.

$\leftarrow \quad \Delta AA'E \cong \Delta AA'F$ (צ.ז.צ.) $\quad \leftarrow \quad AE = AF$

במשולש $\underline{A'B'C'}$: $\frac{EF}{B'C'} = \frac{A'E}{A'B'} = \frac{2}{5} \quad \leftarrow \quad EF = 0.4a$

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{A'B'}{\sin(90° - 0.5\alpha)} \quad \leftarrow \quad A'B' = \frac{a \cdot \cos 0.5\alpha}{\sin \alpha}$

$A'E = 0.4A'B' = \frac{0.4a \cdot \cos 0.5\alpha}{\sin \alpha} = \frac{0.4a \cdot \cos 0.5\alpha}{2 \sin 0.5\alpha \cos 0.5\alpha} = \frac{0.2a}{\sin 0.5\alpha}$

במשולש $\underline{AEF}$: $\frac{EF}{\sin(180° - 2\beta)} = \frac{AE}{\sin \beta} \quad \leftarrow \quad AE = \frac{0.4a \cdot \sin \beta}{\sin 2\beta} = \frac{0.2a}{\cos \beta}$

במשולש $\underline{AA'E}$: $AA' = \sqrt{AE^2 - A'E^2} = \sqrt{(\frac{0.2a}{\cos\beta})^2 - (\frac{0.2a}{\sin 0.5\alpha})^2}$

ב) EF הוא ישר החיתוך של המישורים EAF ו- 'A'B'C.

נסמן את אמצע EF ב- K. ‏A'K ו- AK מאונכים ל- EF (משולשים שווי שוקיים).

לכן הזווית בין מישור EAF למישור 'A'B'C היא $\measuredangle A'KA$.

נתון: $\alpha = 80°$ ו- $\beta = 55° \quad \leftarrow \quad A'E = \frac{0.2a}{\sin 40°} = 0.311a$, $EF = 0.4a$,

$$AA' = \sqrt{(\frac{0.2a}{\cos 55°})^2 - (\frac{0.2a}{\sin 40°})^2} = 0.1574a$$

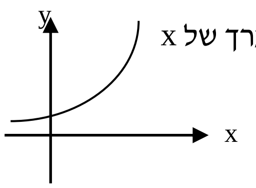
במשולש $A'EF$: $A'K = \sqrt{A'E^2 - (0.5EF)^2} = \sqrt{(0.311a)^2 - (0.2a)^2} = 0.238a$

$tgA'KA = \frac{A'A}{A'K} = \frac{0.1574a}{0.238a} = 0.66 \quad \leftarrow \quad \measuredangle A'KA = \underline{33.478^\circ}$

פתרון שאלה 4

א) נקודות חיתוך עם הצירים: $y = e^{0.5x}$ נציב $x = 0$ $\leftarrow$ $y = 1$ $\leftarrow$ $(0, 1)$

נציב $y = 0$ $\leftarrow$ $e^{0.5x} = 0$ $\leftarrow$ אין נקודת חיתוך עם ציר x.



תחומי עלייה וירידה: $y' = 0.5e^{0.5x}$ $\leftarrow$ הנגזרת חיובית לכל ערך של x

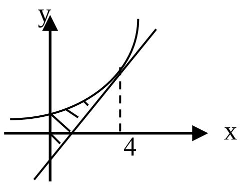
$\leftarrow$ הפונקציה עולה לכל x. סקיצה של גרף הפונקציה:

ב) $x = t$ $\leftarrow$ $y = e^{0.5t}$ $\leftarrow$ נקודת ההשקה: $(t\,,\, e^{0.5t})$

שיפוע המשיק: $y' = 0.5e^{0.5x}$ $\leftarrow$ $m = 0.5e^{0.5t}$

משוואת המשיק: $y - e^{0.5t} = \frac{1}{2}e^{0.5t}(x - t)$ $\leftarrow$ $\underline{y = e^{0.5t}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}t + 1)}$

ג) ידוע שהמשיק חותך את ציר x בנקודה (2, 0): $0 = e^{0.5t}(\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}t + 1)$ $\leftarrow$ $t = 4$



$\leftarrow$ משוואת המשיק היא $y = e^2 \cdot (\frac{1}{2}x - 1)$.

השטח המבוקש: $S = \int_0^4 [e^{0.5x} - (0.5e^2x + e^2)]dx$

$$S = \frac{e^{0.5x}}{0.5} - 0.5e^2 \cdot \frac{x^2}{2} + e^2x \Big|_0^4 = (2e^2 - 4e^2 + 4e^2) - (2 - 0) = 2e^2 - 2 = 5.39$$

פתרון שאלה 5

תהליכי גדילה ודעיכה ניתנים לתיאור על ידי הפונקציה: $u(t) = u_0a^t$

בתהליך גדילה: $a = 1 + \frac{p}{100}$

<u>בחורשה הראשונה</u>: $17271.4 = 8000 \cdot a^{10}$ $\leftarrow$ $2.158925 = a^{10}$ $\leftarrow$ $10\ln a = \ln 2.158925$

$\leftarrow$ $\ln a = 0.07696$ $\leftarrow$ $a = 1.08$ $\leftarrow$ $p = 8\%$

אחוז הגידול השנתי בחורשה א' הוא 8% ולכן אחוז הגידול השנתי בחורשה ב' הוא 10%

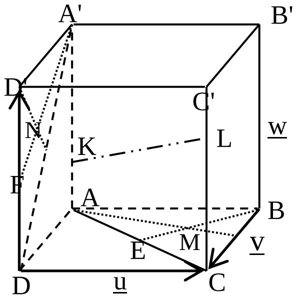
<u>בחורשה השנייה</u>: $a = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$ $\leftarrow$ $26795 = 12500 \cdot 1.1^t$ $\leftarrow$ $2.1436 = 1.1^t$

$\leftarrow$ $t \cdot \ln 1.1 = \ln 2.1436$ $\leftarrow$ $\underline{t = 8}$

מבחן 37

פתרון שאלה 1

אורך מקצוע הקובייה ABCDA' B' C' D' הוא 1.



נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CL}=t\overrightarrow{CC'}$

M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC.

N היא נקודת מפגש התיכונים במשולש DD'A'.

מקצועות הקובייה מאונכים זה לזה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$. צריך למצוא את אורכו של $\overrightarrow{KL}$ שעבורו $\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{MN}$. $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL}=-\frac{1}{3}\underline{w}+\underline{v}+\underline{u}+t\underline{w}=\underline{u}+\underline{v}+(t-\frac{1}{3})\underline{w}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'N}$ נמצא את $\overrightarrow{MB}$ ואת $\overrightarrow{A'N}$. התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס $1:2$ ← $\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})=\frac{2}{3}[\frac{1}{2}(\underline{v}+\underline{u})-\underline{v}]=\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}$

$$\overrightarrow{A'N}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'F}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'F})=\frac{2}{3}(\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w})=\frac{2}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'N}=\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}+\underline{w}-\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}=-\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}$$

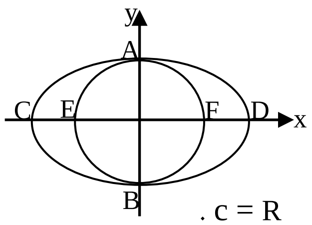
$$\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{MN} \quad \leftarrow \quad \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}=0$$

$$\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}=[\underline{u}+\underline{v}+(t-\frac{1}{3})\underline{w}]\cdot[-\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}]=-\frac{2}{3}|\underline{u}|^2+\frac{1}{3}|\underline{v}|^2+(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9})|\underline{w}|^2$$

אורך מקצוע הקובייה הוא 1 ← $|\underline{u}|^2=|\underline{v}|^2=|\underline{w}|^2=1$ ←

$$-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}=0 \quad \leftarrow \quad t=\frac{5}{6} \quad \leftarrow \quad \overrightarrow{KL}=\underline{u}+\underline{v}+(t-\frac{1}{3})\underline{w}=\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

$$|\overrightarrow{KL}|=\sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+\frac{1}{4}|\underline{w}|^2}=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{2\frac{1}{4}} \quad \leftarrow \quad \underline{|\overrightarrow{KL}|=1\frac{1}{2}}$$



פתרון שאלה 2

א) על פי הנתון: $A(0,R)$, $B(0,-R)$, $E(-R,0)$, $F(R,0)$

משוואת מעגל קנוני שרדיוסו R: $\underline{x^2+y^2=R^2}$

מוקדי האליפסה הם נקודות החיתוך של המעגל עם ציר x ← $c=R$.

בנקודות החיתוך של האליפסה עם ציר y מתקיים $y=\pm R$ ← $b=R$.

$c^2=a^2-b^2$ ← $a^2=R^2+R^2=2R^2$. משוואת האליפסה: $\underline{\frac{x^2}{2R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1}$

ב) שיפוע הישר AF: $\frac{R-0}{0-R}=-1$. משוואת הישר AF: $y=-x+R$ $(x+y-R=0)$

נקודה H היא נקודת חיתוך של הישר AF והאליפסה: $\frac{x^2}{2R^2}+\frac{(-x+R)^2}{R^2}=1$

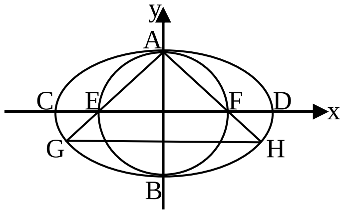
$$x^2+2(x^2-2Rx+R^2)=2R^2 \quad \leftarrow \quad x=\frac{4}{3}R \ , \ x=0 \quad \leftarrow \quad H(\frac{4}{3}R,-\frac{1}{3}R)$$

ובאותה צורה: $G(-\frac{4}{3}R,-\frac{1}{3}R)$

<u>חישוב שטח המשולש בדרך I</u>:

אורך הצלע AH: $\sqrt{(\frac{4}{3}R-0)^2+(-\frac{1}{3}R-R)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}R^2+\frac{16}{9}R^2}=\frac{4}{3}R\sqrt{2}$

הגובה לצלע AH הוא מרחק הנקודה G מהישר AH : $\frac{\left|-\frac{4}{3}R+(-\frac{1}{3}R)-R\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8R}{3\sqrt{2}}$



שטח המשולש : $S=\frac{4}{3}R\sqrt{2}\cdot\frac{8R}{3\sqrt{2}}\cdot 0.5=\frac{16}{9}R^2$

<u>חישוב שטח המשולש בדרך II</u>:

אורך הצלע GH הוא: $\frac{4}{3}R\cdot 2=\frac{8}{3}R$

הגובה לצלע GH הוא: $R-(-\frac{1}{3}R)=\frac{4}{3}R$ שטח המשולש : $S=\frac{8}{3}R\cdot\frac{4}{3}R\cdot 0.5=\frac{16}{9}R^2$

<u>פתרון שאלה 3</u>

א) נסמן $Z=R\text{cis}\,\alpha$ $\leftarrow$ $R^9\text{cis}\,9\alpha=1\text{cis}\,0$ $\leftarrow$ $R^9=1$ $\leftarrow$ $R=1$

$9\alpha=0+360°k$ $\leftarrow$ $\alpha=0+40°k$ $\leftarrow$ $\underline{Z=\text{cis}\,40°k}$ $\quad k=0,1,2,\ldots,8$

ב) $Z_{k+3}=1\text{cis}\,40°(k+3)\quad,\quad Z_k=1\text{cis}\,40°k$

$$|Z_{k+3}-Z_k|=|\text{cis}\,40°(k+3)-\text{cis}\,40°k|=$$

$$=\sqrt{[\cos(40°k+120°)-\cos40°k]^2+[\sin(40°k+120°)-\sin40°k]^2}$$

נשתמש בנוסחאות: $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha-\sin\beta=-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$|Z_{k+3}-Z_k|=\sqrt{[-2\sin(40°k+60°)\sin120°]^2+[2\cos(40°k+60°)\sin120°]^2}=$$

$$=\sqrt{[-2\sin(40°k+60°)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]^2+[2\cos(40°k+60°)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]^2}=$$

$$=\sqrt{3\sin^2(40°k+60°)+3\cos^2(40°k+60°)}=\sqrt{3}$$

<u>פתרון שאלה 4א</u>

השטח הכלוא בגרפים של הפונקציות $y=4^x$, $y=2^x$ ו- $y=4$ מסתובב סביב ציר x.

נמצא את נקודות החיתוך: $2^x=4^x$ $\leftarrow$ $x=0$

$2^x=4$ $\leftarrow$ $x=2$, $4^x=4$ $\leftarrow$ $x=1$

$y=4^x$ חותך את הישר $y=4$ ב- $x=1$, ו $y=2^x$ חותך את הישר $y=4$ ב- $x=2$.

$$V_1=\pi\int_0^1(4^{2x}-2^{2x})dx=\pi[\frac{4^{2x}}{2\ln4}-\frac{2^{2x}}{2\ln2}]_0^1=\pi[(\frac{16}{2\ln4}-\frac{4}{\ln4})-(\frac{1}{2\ln4}-\frac{1}{\ln4})]=\frac{9\pi}{2\ln4}$$

$$V_2=\pi\int_1^2(4^2-2^{2x})dx=\pi[16x-\frac{2^{2x}}{2\ln2}]_1^2=\pi[(32-\frac{16}{\ln4})-(16-\frac{4}{\ln4})]=\pi(16-\frac{12}{\ln4})$$

$$\leftarrow\quad V=V_1+V_2=\pi(\frac{9}{2\ln4}+16-\frac{12}{\ln4})=\pi(16-\frac{15}{2\ln4})=\underline{10.59\,\pi}$$

פתרון שאלה 4ב

כדי שנוכל לחשב את האינטגרל נציג את הפונקציה בצורה הבאה :

$$\frac{2a^2x^3-ax^4+7}{2a-x}=\frac{ax^3(2a-x)}{2a-x}+\frac{7}{2a-x}=ax^3+\frac{7}{2a-x}$$

$$\int_0^1\frac{2a^2x^3-ax^4+7}{2a-x}dx=\int_0^1(ax^3+\frac{7}{2a-x})dx=\frac{1}{4}ax^4-7\ln(2a-x)\Big|_0^1=\frac{1}{4}a-7\ln(2a-1)+7\ln(2a)$$

עלינו למצוא את נקודת המינימום של הפונקציה $y=\frac{1}{4}a-7\ln(2a-1)+7\ln(2a)$

נגזור : $y'=\frac{1}{4}-\frac{7\cdot 2}{2a-1}+\frac{7\cdot 2}{2a}=\frac{1}{4}-\frac{14}{2a-1}+\frac{7}{a}=\frac{2a^2-a-56a+56a-28}{4a(2a-1)}=\frac{2a^2-a-28}{4a(2a-1)}$

נשווה את הנגזרת ל- 0 ונקבל $a = 4$ או $a = -3.5$. המינימום מתקבל עבור $\underline{a = 4}$.

פתרון שאלה 5

נתונה הפונקציה $y=\ln(ax)-2(ax)^2$

א) a לא יכול להיות 0 . כל ערך אחר של a יקבע את ערכי x שעבורם הפונקציה מוגדרת.

ב) $\underline{a>0}$: תחום הגדרה $ax>0$ ← $x>0$. נקודות קיצון $y'=\frac{a}{ax}-4a^2x=\frac{1-4a^2x^2}{x}$

$y'=0$ ← $x^2=\frac{1}{4a^2}$ ← $x=\frac{1}{2a}$ ← $y=\ln\frac{1}{2}-2(\frac{1}{2})^2=-\ln2-0.5$

נמצא את סוג הקיצון :

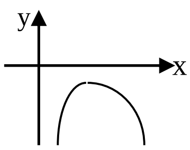
x	$0<x<\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$	$x>\frac{1}{2a}$
y'	+	0	–
y	↗	מקסימום	↘

נקודת מקסימום $(\frac{1}{2a}\ ,\ -\ln2-0.5)$

$\underline{a<0}$: תחום הגדרה $ax>0$ ← $x<0$. נמצא את סוג הקיצון :

x	$x<\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}<x<0$
y'	–	0	+
y	↘	מינימום	↗

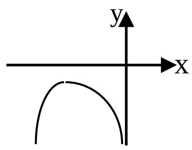
נקודת מינימום $(\frac{1}{2a}\ ,\ -\ln2-0.5)$



$\underline{a=0}$: לא בתחום

ג) $\underline{a>0}$ על פי הטבלה : <u>תחום עלייה</u> $0<x<\frac{1}{2a}$ <u>תחום ירידה</u> $x>\frac{1}{2a}$

ד) $\underline{a<0}$:



מבחן 38

פתרון שאלה 1

א) נמצא את משוואת המישור π : וקטור המקדמים (a, b, c) של המישור מאונך למישור ←

(a, b, c) מאונך לכל כיוון במישור ← $(1,-1,5)(a,b,c)=0$ וגם $(2,0,6)(a,b,c)=0$ ←

$a - b + 5c = 0$ וגם $2a + 6c = 0$ ← $a = -3c$, $b = 2c$. נציב $c = -1$ ונקבל $a = 3$, $b = -2$

← $3x - 2y - z + d = 0$. כדי למצוא את d נציב את הנקודה $(4, 1, 2)$ הנמצאת במישור

← $d = -8$ ← π : $3x - 2y - z - 8 = 0$. האנך למישור הוא $(a,b,c) = (3,-2,-1)$.

ישר המקביל למישור מאונך ל - (a,b,c) ← $(k,1-k,4k)(3,-2,-1) = 0$

← $3k - 2 + 2k - 4k = 0$ ← $k = 2$.

ב) מרחקו של הישר l מהמישור שווה למרחקה מהמישור של נקודה כלשהי על הישר.

מרחק הנקודה $(5, -4, 1)$ מהמישור π : $d=\frac{|3\cdot5-2\cdot(-4)-1-8|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

← מרחק הישר l ממישור π הוא $\sqrt{14}$.

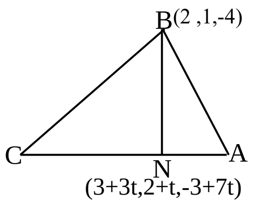
ג) שלושת הקדקודים של המשולש נמצאים במישור π :

$A(x,2,-3)$ ← $3x-2\cdot2-(-3)-8=0$ ← $x=3$ ← $A(3,2,-3)$

$B(2,y,-4)$ ← $3\cdot2-2y-(-4)-8=0$ ← $y=1$ ← $B(2,1,-4)$

$C(6,3,z)$ ← $3\cdot6-2\cdot3-z-8=0$ ← $z=4$ ← $C(6,3,4)$

נפח הפירמידה שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס בגובה . נחשב את שטח הבסיס , כלומר שטח המשולש ABC :



$\overrightarrow{AC}=(3,1,7)$ ← $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+1+49}=\sqrt{59}$.

הגובה לצלע AC הוא מרחק הנקודה B מ- AC . נעביר את $BN \perp AC$. הנקודה N היא נקודה על הישר AC ←

$AC: \underline{x}=(3,2,-3)+t(3,1,7)$ ← $N(3+3t,2+t,-3+7t)$ ←

$\overrightarrow{BN}=(1+3t,1+2t,1+7t)$ ← $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AC}$ ← $(1+3t,1+t,1+7t)(3,1,7)=0$

← $3+9t+1+t+7+49=0$ $\quad 59t+11=0$ $\quad t=-\frac{11}{59}$ ←

$\overrightarrow{BN}=(\frac{26}{59},\frac{48}{59},-\frac{18}{59})$ ← $|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(\frac{26}{59}+\frac{48}{59}-\frac{18}{59})^2}=\frac{\sqrt{3304}}{59}=\frac{\sqrt{4\cdot14\cdot59}}{59}=2\cdot\sqrt{\frac{14}{59}}$

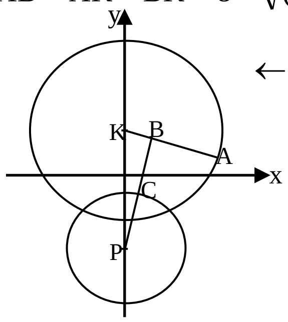
← $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BN}|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{\frac{14}{59}}\cdot\sqrt{59}=\sqrt{14}$. גובה הפירמידה הוא מרחק הקדקוד D מהבסיס. בסיס הפירמידה נמצא במישור π . הקדקוד D על הישר l המקביל למישור

← גובה הפירמידה שווה למרחק הישר l מהמישור π השווה, עפ״י סעיף ב׳ $\sqrt{14}$.

$\leftarrow$ $V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ נפח הפירמידה .

פתרון שאלה 2

נתון: $K(0,5)$, $P(0,-5)$. נסמן $B(x,y)$. $AB=AK-BK=8-\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}$



$BC=BP-CP=\sqrt{(x-0)^2+(y+5)^2}-4$. נתון כי $AB=BC$ $\leftarrow$

$$8-\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y+5)^2}-4$$

$$12=\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+5)^2}$$

נעלה בריבוע:

$$144=x^2+y^2-10y+25+2\sqrt{x^2+(y-5)^2}\sqrt{x^2+(y+5)^2}+x^2+y^2+10y+25$$

$$144=2x^2+2y^2+50+2\sqrt{x^2+(y-5)^2}\sqrt{x^2+(y+5)^2}$$

$$47-x^2-y^2=\sqrt{x^2+(y-5)^2}\sqrt{x^2+(y+5)^2}$$

$$(47-x^2-y^2)^2=x^4+x^2(y+5)^2+x^2(y-5)^2+y^4-50y^2+625$$

$$2209+x^4+y^4+2x^2y^2-94x^2-94y^2=x^4+x^2(2y^2+50)+y^4-50y^2+625$$

$$2209-94x^2-94y^2=50x^2-50y^2+625$$

$$\underline{36x^2+11y^2=396} \quad \leftarrow \quad 144x^2+44y^2=1584$$

פתרון שאלה 3

א) נציב $Z=x+yi$ במשוואה $3(\bar{Z})^2-13=5\bar{Z}-7Z$

$$3(x-yi)^2-13=5(x-yi)-7(x+yi)$$

$$3x^2-6xyi-3y^2-13=5x-5yi-7x-7yi$$

נשווה את החלק הממשי לחוד ואת החלק המדומה לחוד:

$3x^2-3y^2-13=5x-7x$ וגם $-6xy=-5y-7y$

$3x^2-3y^2-13=-2x$ וגם $6y(2-x)=0$

$\underline{x=2}$ $\cancel{y=0}$ (נתון כי המספר אינו ממשי)

$3\cdot 2^2-3y^2-13=-2\cdot 2$ $\leftarrow$ $y^2=1$ $\leftarrow$ $\underline{y=1 \ , \ y=-1}$

פתרונות המשוואה: $Z=2+i$, $Z=2-i$

ב) $a+bi=(2-i)^3=[\sqrt{5}\,\text{cis}\,(-26.56°)]^3=(\sqrt{5})^3\text{cis}\,3\cdot(-26.56°)=2-11i$

$\underline{a=2 \ , \ b=-11}$

$Z^3=2-11i$. נסמן $Z=r\,\text{cis}\,\alpha$ $\leftarrow$ $r^3\text{cis}\,3\alpha=(\sqrt{5})^3\text{cis}\,(-79.695°)$

$k=0\,,\,1\,,\,2 \quad \alpha=-26.565°+120°k \;,\; r=\sqrt{5} \quad \leftarrow \quad 3\alpha=-79.695°+120°k \;,\; r=\sqrt{5}$

$\underline{Z=-1.866-1.232i}$, $\underline{Z=-0.134+2.232i}$

פתרון שאלה 4

נתונה הפונקציה $y=x^2\cdot e^{-2x}$

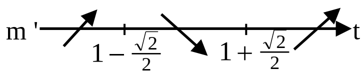
א) נגזור את הפונקציה: $y'=2x\cdot e^{-2x}+x^2\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=2xe^{-2x}(1-x)$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=t$: $m=2te^{-2t}(1-t)$

ב) (1) נגזור את הפונקציה m : $m=e^{-2t}(2t-2t^2)$

$$m'=-2e^{-2t}(2t-2t^2)+e^{-2t}(2-4t)=2e^{-2t}(-2t+2t^2+1-2t)=2e^{-2t}(2t^2-4t+1)$$

כדי למצוא את ערכו של t שעבורו השיפוע מקסימלי נשווה את הנגזרת לאפס:



$t=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \leftarrow \quad 2t^2-4t+1=0 \quad \leftarrow \quad m'=0$

$\underline{t=1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

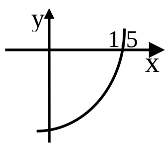
(2) השיפוע המקסימלי: $\underline{m=(\sqrt{2}-1)\cdot e^{\sqrt{2}-2}} \quad \leftarrow \quad m=e^{-2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}(2-\sqrt{2})(1-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

(3) נקודת ההשקה: $(t\,,t^2\cdot e^{-2t})$, שיפוע המשיק: $(\sqrt{2}-1)\cdot e^{\sqrt{2}-2}$ $\leftarrow$ משוואת המשיק:

$y-t^2\cdot e^{-2t}=(\sqrt{2}-1)\cdot e^{\sqrt{2}-2}\cdot(x-t)$. נציב $t=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ונקבל $\underline{y=0.23x-0.02}$

פתרון שאלה 5

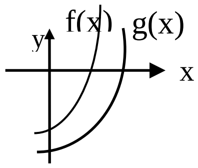
א) $y=4^x-8$ נקודת החיתוך עם ציר x:



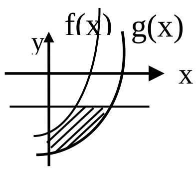
$x=1.5 \quad \leftarrow \quad 4^x=8 \quad \leftarrow \quad y=0$

$$S=-\int_0^{1.5}\left(4^x-8\right)dx=-\left[\frac{4^x}{\ln4}-8x\right]_0^{1.5}=-\left[\frac{8}{\ln4}-12-\frac{1}{\ln4}\right]=12-\frac{7}{\ln4}=6.95$$

ב) נקודות החיתוך עם ציר y הן: $f(0)=-7\,,\,g(0)=-8$ לכן נסרטט:



ג) השטח המבוקש מקווקו בציור:



נחשב את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $g(x)$, בציר y ובישר y = -4

ונחסר ממנו את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $f(x)$, בציר y ובישר y = -4 .

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם הישר y = -4 : $x=1 \leftarrow \quad 4^x=4 \quad \leftarrow \quad 4^x-8=-4$

נקודת החיתוך של $g(x)$ עם הישר y = -4 : $x=\ln5 \leftarrow \quad e^x=5 \quad \leftarrow \quad e^x-9=-4$

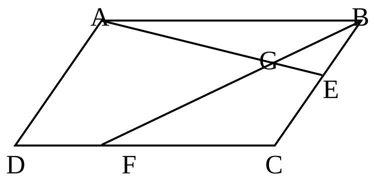
$$S=\int_0^{\ln 5}[-4-(e^x-9)]dx-\int_0^1[-4-(4^x-8)]dx=5x-e^x\Big|_0^{\ln 5}-[4x-\frac{4^x}{\ln 4}\Big|_0^1]=2.211$$

מבחן 40

פתרון שאלה 1

א) $\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}$. נסמן: $\overrightarrow{AG}=t\cdot\overrightarrow{AE}$ ← $\overrightarrow{AG}=t\underline{u}+\frac{2}{5}t\underline{v}$.

$\overrightarrow{BF}=\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{u}$. נסמן: $\overrightarrow{BG}=k\cdot\overrightarrow{BF}$ ← $\overrightarrow{BG}=k\underline{v}-\frac{2}{3}k\underline{u}$.



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$ ← $t\underline{u}+\frac{2}{5}t\underline{v}=\underline{u}+k\underline{v}-\frac{2}{3}k\underline{u}$

יחידות ההצגה לגבי $\underline{u}$: $t\underline{u}=\underline{u}-\frac{2}{3}k\underline{u}$ ← $t=1-\frac{2}{3}k$

יחידות ההצגה לגבי $\underline{v}$: $\frac{2}{5}t\underline{v}=k\underline{v}$ ← $\frac{2}{5}t=k$ נציב את k במשוואה $t=1-\frac{2}{3}k$ ונקבל:

$t=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}t$ ← $t=\frac{15}{19}$, $k=\frac{6}{19}$ ← $\underline{BG:GF=6:13}$, $\underline{AG:GE=15:4}$

ב) $\underline{v}=(15,-21,40)$, $B(1,2,3)$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, ← $C=(1,2,3)+(15,-21,40)=\underline{(16,-19,43)}$

נתון: $\overrightarrow{BF}=(19,-19,38)$, $B(1,2,3)$ ← $F=(1,2,3)+(19,-19,38)=(20,-17,41)$.

$DF:FC=1:2$ $\quad \frac{x_D\cdot 2+16\cdot 1}{3}=20$, $\frac{y_D\cdot 2-19\cdot 1}{3}=-17$, $\frac{z_D\cdot 2+43\cdot 1}{3}=41$ ← ← $D(22,-16,40)$

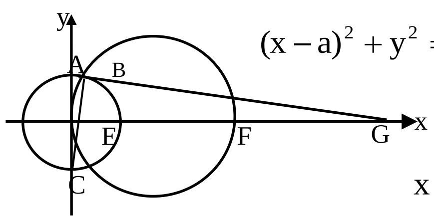
← $A=(22,-16,40)-(15,-21,40)=\underline{(7,5,0)}$. מצאנו כי $BG:GF=6:13$ ←

$x_G=\frac{1\cdot 13+20\cdot 6}{19}=7$, $y_G=\frac{2\cdot 13+(-17)\cdot 6}{19}=-4$, $z_G=\frac{3\cdot 13+41\cdot 6}{19}=15$ ← $\underline{G(7,-4,15)}$.

ג) נמצא את הזווית בין הוקטורים $\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BA}$ ← הוקטורים $(6,3,-3)$, $(15,-21,40)$

← $\cos\alpha=\frac{|(15,-21,40)\cdot(6,3,-3)|}{\sqrt{225+441+1600}\cdot\sqrt{36+9+9}}=\frac{93}{349.8}=0.266$ ← $\underline{\alpha=74.58^\circ}$

פתרון שאלה 2



משוואת המעגל הגדול: $x^2-2ax+y^2=0$ ← $(x-a)^2+y^2=a^2$

משוואת המעגל הקטן: $x^2+y^2=R^2$

פתרון שתי המשוואות: $x=\frac{R^2}{2a}$, $y=\pm\frac{R\cdot\sqrt{4a^2-R^2}}{2a}$

שיעור ה- y של נקודה B הוא חיובי ← $B(\frac{R^2}{2a}\ ,\ \frac{R\cdot\sqrt{4a^2-R^2}}{2a})$

נקודות החיתוך של המעגל הקטן עם ציר y : $A(0,R)$, $C(0,-R)$

נקודת החיתוך של המעגל הגדול עם ציר x : $F(2a\ ,\ 0)$

שיפוע BC : $m_{BC} = \frac{\frac{R\cdot\sqrt{4a^2-R^2}}{2a}+R}{\frac{R^2}{2a}-0} = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}+2a}{R}$, משוואת BC : $y+R = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}+2a}{R}\cdot x$

לחישוב נקודה E נציב y = 0 במשוואת BC : $x_E = \frac{R^2}{2a+\sqrt{4a^2-R^2}} \leftarrow R = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}+2a}{R}\cdot x$

שיפוע AB : $m_{AB} = \frac{\frac{R\cdot\sqrt{4a^2-R^2}}{2a}-R}{\frac{R^2}{2a}-0} = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}-2a}{R}$, משוואת AB : $y-R = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}-2a}{R}\cdot x$

לחישוב נקודה G נציב y = 0 במשוואת AB : $x_G = \frac{R^2}{2a-\sqrt{4a^2-R^2}} \leftarrow -R = \frac{\sqrt{4a^2-R^2}-2a}{R}\cdot x$

נקודת האמצע של הקטע EG : $x = \frac{x_E+x_G}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\frac{R^2}{2a+\sqrt{4a^2-R^2}} + \frac{R^2}{2a-\sqrt{4a^2-R^2}}] =$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\frac{R^2}{2a+\sqrt{4a^2-R^2}} + \frac{R^2}{2a-\sqrt{4a^2-R^2}}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2(2a-\sqrt{4a^2-R^2})+R^2(2a+\sqrt{4a^2-R^2})}{4a^2-4a^2+R^2} = 2a$$

שיעור ה- x של נקודה F הוא 2a לכן נקודה F היא אמצע הקטע EG .

פתרון שאלה 3

א) נסמן $Z = x+yi$ $\quad Z-7+10i = x-7+i(y+10) \leftarrow Z = x+yi$

$$|Z-7+10i|^2 = (x-7)^2+(y+10)^2$$

$$\left|\frac{12}{1+\sqrt{3}\,i}\right|^2 = 3^2\cdot[1^2+(\sqrt{3})^2] = 36 \quad\leftarrow\quad \frac{12}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{12(1-\sqrt{3}\,i)}{1+3} = 3(1-\sqrt{3}\,i)$$

$$36+64 = (x-7)^2+(y+10)^2 \quad\leftarrow\quad |3\sqrt{7}+i|^2 = (3\sqrt{7})^2+1^2 = 64$$

המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו (7 , -10) ורדיוסו 10 : $\underline{(x-7)^2+(y+10)^2 = 100}$

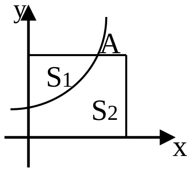
ב) כדי למצוא את נקודה A נציב y = 0 ← A(7 , 0) . BC מקביל לציר הממשי ועובר במרכז המעגל (7 , -10) לכן ערך ה- y בנקודות B ו- C הוא -10 ← $(x-7)^2+(-10+10)^2 = 100$

$BC = 20 \leftarrow C(17,-10)\ ,\ B(-3,-10)\ .\ x = 17\ ,\ -3 \leftarrow$

$$AB = \sqrt{[7-(-3)]^2+[0-(-10)]^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

היקף המשולש : $\underline{20+20\sqrt{2}}$ $\quad$. $AC = \sqrt{[7-17]^2+[0-(-10)]^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

פתרון שאלה 4



א) נמצא את נקודה A – נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם צלע הריבוע :

$A(1,e) \leftarrow x = 1 \leftarrow e^x = e$.

נחשב את השטח S_1 : $S_1 = \int_0^1 (e-e^x)dx = ex-e^x\Big|_0^1 = e-e-(0-1) = 1$

שטח הריבוע הוא e^2 ← $S_2 = e^2-1$

ב) נחשב את הנפח של שני גופים ונחבר אותם. גוף ראשון הוא הגוף שנוצר מסיבוב גרף הפונקציה סביב ציר x בין ציר y ונקודה A . גוף שני הוא הגוף שנוצר מסיבוב הישר

$y=e$ סביב ציר x בין A לבין הקצה הימני של הריבוע שבו $x=e$.

$$V=\pi\cdot\int_0^1 (e^x)^2dx+\pi\cdot\int_1^e (e)^2dx=\pi\cdot[\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1+e^2\cdot x\Big|_1^e]=\frac{\pi}{2}(2e^3-e^2-1)$$

פתרון שאלה 5

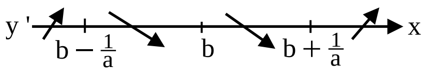
נתונה הפונקציה $y=\frac{a^2x^2-2a^2bx+1+a^2b^2}{a(x-b)}$, $a\,,\,b>0$

א) (1) תחום הגדרה: $x\neq b$

(2) נגזור את הפונקציה: $y'=\frac{(2a^2x-2a^2b)\cdot a(x-b)-(a^2x^2-2a^2bx+1+a^2b^2)\cdot a}{a^2(x-b)^2}$

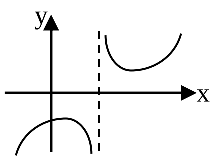
$$y'=\frac{a^3x^2-2a^3bx+a^3b^2-a}{a^2(x-b)^2}=\frac{a^3(x^2-2bx+b^2)-a}{a^2(x-b)^2}=\frac{a[a^2(x-b)^2-1]}{a^2(x-b)^2}$$

$$y'=0 \leftarrow a^2(x-b)^2=1 \leftarrow (x-b)^2=\frac{1}{a^2} \leftarrow x=b\pm\frac{1}{a}$$



נקודת מינימום: $(\frac{1}{a}+b,2)$, נקודת מקסימום: $(-\frac{1}{a}+b,-2)$

ב) סקיצה של גרף הפונקציה:



ג) $$\int_{b+\frac{1}{a}}^{b+\frac{3}{a}}\frac{a^2(x-b)^2+1}{a(x-b)}dx=\int_{b+\frac{1}{a}}^{b+\frac{3}{a}}[a(x-b)+\frac{1}{a(x-b)}]dx=\frac{a}{2}(x-b)^2+\frac{1}{a}\ln(x-b)\Big|_{b+\frac{1}{a}}^{b+\frac{3}{a}}=$$

$$=\frac{a}{2}\cdot(\frac{3}{a})^2+\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{3}{a}-\frac{a}{2}\cdot(\frac{1}{a})^2-\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{a}=\frac{4}{a}+\frac{1}{a}\cdot\ln 3$$

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{a}\cdot\ln 3=8+2\ln 3 \leftarrow \underline{a=0.5}$$