Матрицы и линейные отображения

На этом уроке мы

1. потренируемся строить матрицы конкретных линейных отображений,
2. поймём, как интерпретировать столбцы матрицы,
3. покажем, что матрицы и линейные отображения это одно и то же.

Примеры: линейное отображение $\to$ матрица

На прошлом уроке мы научились по матрице строить линейное отображение. Давайте попробуем действовать в другом направлении – по линейному отображению строить матрицу.

Пример 1.

Построим матрицу, которая задаёт линейное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по формуле $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. То есть f меняет координаты вектора $\vec{x}$ местами.

Отображение f бьёт из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, поэтому наша матрица будет размера 2 на 2. Ясно, что линейное отображение, соответствующее первой координате, это $f_1(x_1, x_2) = x_2$. Отображению $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ соответствует строка $(0, 1)$. Поэтому первая строка матрицы будет $(0, 1)$. Аналогично, линейное отображение, соответствующее второй координате, это $f_2(x_1, x_2) = x_1$. Поэтому вторая строка матрицы будет $(1, 0)$. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Действительно, по правилам действия матрицы на вектор получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

Разберём ещё один похожий пример.

Построим матрицу, которая задаёт линейное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ по формуле $f(x_1, x_2) = (3x_1 - 4x_2, 5x_1 + 6x_2, -x_2)$.

Отображение f бьёт из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, поэтому наша матрица будет размера 3 на 2. Ясно, что линейное отображение, соответствующее первой координате это $f_1(x_1, x_2) = 3x_1 - 4x_2$. Поэтому первая строка матрицы будет $(3, -4)$. Аналогично, линейное отображение, соответствующее второй координате это $f_2(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2$. Поэтому вторая строка матрицы будет $(5, 6)$. Последняя строка будет $(0, -1)$.

Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Действительно, по правилам действия матрицы на вектор получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Задача с проверкой. Матрицы и линейные отображения 1

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, где $f(x_1,x_2)=(10x_1-4x_2, 2x_2+x_1)$
2. $f:\mathbb{R}^2\ \to\mathbb{R}^4$, где $f(x_1,x_2)=(\ x_2,x_2,x_2,x_1)$
3. $f:\mathbb{R}^3\ \to\mathbb{R}^2$, где $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+2x_3,10x_2)$
4. $f:\mathbb{R}^4\ \to\mathbb{R}^1$, где $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3x_1+x_3-x_4)$

Комментарий. Для устной сдачи этой задачи достаточно предъявить правильные матрицы. Все рассуждения про строки проговаривать не нужно (но можно продумать). На прошлом шаге мы разобрали такие же задачи очень подробно, чтобы было понятно, как их решать.

Проверка. Введите свой ответ для Пункта 3.

Ответ запишите в виде `((1, ...), (2, ...), ...)`, где `(1, ...)` и `(2, ...)` — первая и вторая строки вашей матрицы соответственно. То есть, например, матрица $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ будет записываться как `((0, -1, 0), (0,  0, -4), (1, 2, 3))`.

Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Матрицы и линейные отображения 2

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $f(\vec{x}) = \vec{x}$

Комментарий. Матрица из пункта 4 этой задачи называется *единичной матрицей размера* n (на английском – identity matrix of size n).

Проверка. Введите свой ответ для Пункта 2.

Ответ запишите в виде `((1, ...), (2, ...), ...)`, где `(1, ...)` и `(2, ...)` – первая и вторая строки вашей матрицы соответственно. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача. Матрицы и линейные отображения 3

Как воспринимать столбцы матрицы

Пусть отображение f задано матрицей A размера m на n:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Мы уже знаем, как интерпретировать i-ую строку матрицы A – как линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Это отображение по вектору $\vec{x}$ вычисляет i-ую координату вектора $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Давайте придумаем, как интерпретировать столбцы матрицы. Нам понадобится одно обозначение, которым мы уже пользовались.

Обозначение. Обозначим за $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ вектор, у которого j-ая координата равна единице, а все остальные координаты равны нулю.

1. Найдите $f(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1$, то есть результат действия матрицы A на вектор $\vec{e}_1$ (выпишите его, используя коэффициенты матрицы A)
2. Докажите, что для любого j вектор $f(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j$ совпадает с j-ым столбцом матрицы A.

Отображение f задано матрицей $A = \begin{pmatrix} -4234 & 22 & 211 & -234 \\ 33 & 36 & 423 & 55 \\ 3123 & 46 & 76 & -74 \end{pmatrix}$.

Чему равен вектор $f(\vec{e}_2) = A\vec{e}_2$?

Выберите один вариант из списка

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 33 & 36 & 423 & 55 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 33 \\ 36 \\ 423 \\ 55 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 22 \\ 36 \\ 46 \end{pmatrix}$

Задача. Матрицы и линейные отображения 4

Любое линейное отображение задаётся матрицей

На ближайших трёх шагах мы покажем, что линейные отображения и матрицы это в точности одно и то же.

На прошлом уроке мы показали, как по любой матрице построить линейное отображение. Сейчас мы сделаем обратное – по любому линейному отображению найдём матрицу, которая задаёт это отображение.

Пусть дано какое-то линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Мы хотим показать, что оно задаётся некоторой матрицей.

Покажите, что

1. Для любого $\vec{x}$ выполнено $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$. Тем самым, линейное отображение f однозначно задаётся векторами $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$. Другими словами, зная $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, можно вычислить $f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

   Подсказка. Решение аналогично рассуждению с этого шага.

2. Покажите, как, зная векторы $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, построить матрицу, задающую отображение f. Другими словами, нужно построить матрицу A, такую что $A\vec{x} = f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Пусть для линейного отображения $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ выполняется следующее:

- $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_4}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$

Найдите $f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Пусть для линейного отображения $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ выполняется:

- $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e_4}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Чему равна матрица отображения f?

Выберите один вариант из списка

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Задача. Матрицы и линейные отображения 5

Докажите, что разные матрицы задают разные линейные отображения.

То есть если

- отображение f задано матрицей A,
- отображение g задано матрицей B,
- и $A \neq B$,

то отображение f не совпадает с отображением g.

Подсказка. Чтобы доказать, что f не совпадает g, достаточно найти $\vec{x}$, такой что $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$.

Пример

Пусть даны две не совпадающие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что они задают разные отображения. Действительно, для $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

- $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$
- $g(\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Тем самым $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$, то есть отображения f и g не сопадают.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Тогда верны следующие утверждения:

Выберите все подходящие ответы из списка

$A\overrightarrow{e_3} = B\overrightarrow{e_3}$
$A\overrightarrow{e_4} = B\overrightarrow{e_4}$
$A\overrightarrow{e_1} = B\overrightarrow{e_1}$
$A\overrightarrow{e_2} = B\overrightarrow{e_2}$

Линейные отображения = Матрицы

Давайте посмотрим, что мы уже доказали.

1. на прошлом уроке мы доказали, что любая матрица задаёт линейное отображение.
2. на позапрошлом шаге мы доказали, что любое линейное отображение задаётся какой-то матрицей.
3. на прошлом шаге мы доказали, что разные матрицы задают разные линейные отображения.

Тем самым, есть *взаимно однозначное соответствие* между матрицами и линейными отображениями. То есть каждой матрице соответствует ровно одно линейное отображение, и каждому линейному отображению поставлена в соответствие ровно одна матрица.

Поэтому можно воспринимать матрицы и линейные отображения как одно и то же, как синонимы.

Комментарий 1. Каждое из перечисленных трёх утверждений необходимо для взаимно-однозначного соответствия. Например, если бы были выполнены первые два утверждения, а третье утверждение было бы не выполнено, то какому-то линейному отображению могли бы соответствовать две разные матрицы. Если вам не совсем понятно, почему каждое из перечисленных трёх утверждений необходимо для взаимно-однозначного соответствия, то задайте вопрос в чате/комментариях или обсудите это с преподавателем.

Комментарий 2. Здесь мы говорим только о линейных отображениях из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, где n и m — натуральные числа. Вообще, *линейное отображение* это более общее понятие. Для определения первого и второго условия линейности достаточно уметь складывать элементы и умножать элементы на числа. Эти операции можно определять не только на элементах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, поэтому и линейные отображения можно определять не только из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. В нашем курсе мы ограничимся линейными отображениями из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Что мы прошли на этом уроке

- Мы научились находить матрицы линейных отображений, заданных формулами.
- Мы поняли, что столбцы матрицы это векторы, в которые отображение переводит единичные векторы, направленные вдоль осей координат.
- Мы показали, что матрицы и линейные отображения можно считать синонимами.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы разберём примеры линейных отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$: растяжение, проекцию, симметрию