# План пятой недели

В последней неделе мы:

- На первом уроке мы немного поупражняемся в работе со случайными величинами — во многом это будет повторение.
- Мы наконец-то познакомимся с *нормальным распределением* — одним из самых важных распределений в теории вероятностей и статистике. Об этом будем говорить на втором уроке недели.
- Также мы разберем основные понятия и принципы статистики — об этом пойдет разговор в третьем и четвёртом уроках.
- Наконец, познакомимся с фундаментальными теоремами теории вероятностей: *Законом больших чисел (ЗБЧ)* и *Центральной предельной теоремой (ЦПТ)*. Этому будет посвящен пятый урок недели.
- В заключении мы расскажем, что стоит ещё изучить из статистики. Со знаниями полученными на этом курсе можете смело за неё приниматься.

# Арифметика случайных величин

В следующих уроках мы будем комбинировать несколько случайных величин в одну при помощи сложения и умножения. Это понадобится нам для *центральной предельной теоремы* и в процессе построения *статистического теста*. Нам нужно будет уметь вычислять математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины. Поэтому в этом уроке мы будем смотреть на то, как ведут себя математическое ожидание и дисперсия при сложении и умножении.

## Сложение, умножение, $E[X], Var(X)$

Нам потребуются следующие формулы.

**Математическое ожидание суммы.** Математическое ожидание суммы двух случайных величин это сумма их математических ожиданий. То есть

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y].$$

**Дисперсия суммы.** Если две случайных величины независимы, то дисперсия их суммы это сумма дисперсий. То есть

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

**Сложение с константой.** Для любой случайной величины $X$ и любого числа $c \in \mathbb{R}$ выполнено

$$E[X+c] = E[X] + c \text{ и } Var(X+c) = Var(X).$$

**Умножение на константу.** Для любой случайной величины $X$ и любого числа $c \in \mathbb{R}$ выполнено

$$E[cX] = cE[X] \text{ и } Var(cX) = c^2 Var(X).$$

Мы уже доказали эти формулы для дискретных случайных величин. Эти же формулы выполнены и для непрерывных случайных величин. Мы не будем это доказывать, хотя все инструменты для этого у нас есть (достаточно заменить сумму на интеграл в доказательствах для дискретных случайных величин).

Собственно, поэтому мы и потратили столько времени на дискретные случайные величины – там можно всё потрогать руками и наработать интуицию, которая работает и для непрерывных случайных величин.

# Пример

Там внизу длинные формулы, но на самом деле они несложные (после прочтения этого шага вы научитесь писать такие же). В принципе, каждую из этих формул можно было бы записать как одно равенство. Но мы расписали подробно, чтобы все переходы были понятны.

Пусть непрерывные случайные величины $X$ и $Y$ независимы, при этом $E[X] = 1, Var(X) = 2, E[Y] = 3, Var(Y) = 4.$

**Математическое ожидание.** Найдём математическое ожидание случайной величины $\frac{5X-3Y}{2} + 11$. Цепочка равенств получилась длинная, но каждое из этих равенств простое:

$$E\left[\frac{5X-3Y}{2} + 11\right] = E\left[\frac{5X-3Y}{2}\right] + 11 = \frac{E[5X-3Y]}{2} + 11 = \frac{5E[X]-3E[Y]}{2} + 11 = \frac{5\cdot 1 - 3\cdot 3}{2} + 11 = 9.$$

**Дисперсия.** Найдём дисперсию случайной величины $\frac{5X-3Y}{2} + 11$. Цепочка равенств получилась ещё длиннее, поэтому мы разбили её на две.

$$Var\left(\frac{5X-3Y}{2} + 11\right) = Var\left(\frac{5X-3Y}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(5X-3Y) = \frac{1}{4}Var(5X-3Y).$$

Так как $X$ и $Y$ независимы, мы можем применим формулу для дисперсии суммы:

$$\frac{1}{4}Var(5X-3Y) = \frac{1}{4}(Var(5X) + Var(-3Y))) = \frac{1}{4}(5^2 \cdot Var(X) + (-3)^2 \cdot Var(Y))) = \frac{1}{4}(25 \cdot Var(X) + 9 \ \cdot Var(Y))) = \\ = \frac{1}{4}(25 \cdot 2 + 9 \ \cdot 4)) = 21.5$$

**Важно.** Как мы увидели, $Var(5X-3Y) = Var(5X) + Var(-3Y) = 25Var(X) + 9Var(Y)$. Иногда в таком вычислении люди допускают ошибку, выписывая неверную цепочку равенств $Var(5X-3Y) = Var(5X) - Var(3Y) = 25Var(X) - 9Var(Y)$.

Даны две независимые непрерывные случайные величины $X_1$ и $X_2$ такие, что

- $E[X_1] = 4, Var(X_1) = 2,$
- $E[X_2] = 7, Var(X_2) = 9.$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $6X_1 - 3X_2$.

## Заполните пропуски

1. $E[6X_1 - 3X_2] =$ ______ .
2. $Var(6X_1 - 3X_2) =$ ______ .

## Задача с проверкой. Арифметика случайных величин 1

**Задача.** Даны две совместно независимые непрерывные случайные величины $X_1$ и $X_2$ такие, что

- $E[X_1] = 5, Var(X_1) = 8,$
- $E[X_2] = -3, Var(X_2) = 6.$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{5X_1+2X_2}{3} + 2.$

**Проверка.** Введите ответы. Округлите их до $3$ знаков после запятой.

### Заполните пропуски

1. $E[\frac{5X_1+2X_2}{3} + 2] =$ ______ .
2. $Var(\frac{5X_1+2X_2}{3} + 2) =$ ______ .

## Больше двух случайных величин

Ясно, что ту же логику можно применять и для формул, составленных из большего количества случайных величин.

### Математическое ожидание

Например,

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = E[X_1 + X_2] + E[X_3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3].$$

А также

$$E[2X_1 - 5X_2 + 4X_3] = E[2X_1] + E[-5X_2] + E[4X_3] = 2E[X_1] - 5E[X_2] + 4E[X_3].$$

### Дисперсия

Если $X_1, X_2, X_3$ совместно независимы, то

$$Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2) + Var(X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3).$$

А также

$$Var(2X_1 - 5X_2 + 4X_3 + 11) = Var(2X_1) + Var(-5X_2) + Var(4X_3) + Var(11) = 4Var(X_1) + 25Var(X_2) + 16Var(X_3) + 0.$$

И ещё, например,

$$Var\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{5}\right) = \frac{1}{5^2}Var(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{25}Var(X_1 + X_2 + X_3).$$

Даны совместно независимые непрерывные случайные величины $X_1, X_2, X_3$ такие, что

- $E[X_1] = 3, Var(X_1) = 4,$
- $E[X_2] = -5, Var(X_2) = 2,$
- $E[X_3] = 9, Var(X_3) = 7.$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $8X_1 - 3X_2 + 2X_3$. Округлите ответы до $3$ знаков после запятой.

### Заполните пропуски

1. $E[8X_1 - 3X_2 + 2X_3] =$ ______ .
2. $Var(8X_1 - 3X_2 + 2X_3) =$ ______ .

## Задача с проверкой. Арифметика случайных величин 2

**Задача.** Даны совместно независимые непрерывные случайные величины $X_1, X_2, X_3$ такие, что

- $E[X_1] = 0, Var(X_1) = 1,$
- $E[X_2] = 11, Var(X_2) = 3,$
- $E[X_3] = 8, Var(X_3) = 4.$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{2X_1+4X_2-X_3}{6} - 4.$

**Проверка.** Введите ответы. Округлите их до $3$ знаков после запятой.

### Заполните пропуски

1. $E[\frac{2X_1+4X_2-X_3}{6} - 4] =$ ______ .
2. $Var(\frac{2X_1+4X_2-X_3}{6} - 4) =$ ______ .

## Задача с проверкой. Арифметика случайных величин 3

**Задача.** Даны $n$ совместно независимые непрерывные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ такие, что

$$E[X_1] = E[X_2] = \ldots = E[X_n] = 5$$

$$Var(X_1) = Var(X_2) = \ldots = Var(X_n) = 3.$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$.

**Проверка.** Так как в задаче проверяется формула, то задачу пришлось разделить на два шага: на этом шаге мы проверяем математическое ожидание, а на следующем шаге – дисперсию. Введите математическое ожидание случайной величины $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$.

### Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

**Задача.** Даны $n$ совместно независимые непрерывные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ такие, что

$$E[X_1] = E[X_2] = \dots = E[X_n] = 5$$

$$Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = Var(X_n) = 3.$$

**Проверка.** Введите дисперсию случайной величины $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$.

## Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

## Что мы прошли на этом уроке

- Мы вспомнили формулы для математического ожидания и дисперсии от суммы случайных величин и от случайной величины, умноженной на константу
- Порешали задачки на вычисление математического ожидания и дисперсии для случая двух и нескольких случайных величин

## Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- узнаем, что такое нормальное распределение
- поймём, что происходит при сложении нормально распределённых величин и умножении их на число