Математика для Data Science. Линейная алгебра.
Условия задач

Содержание

Замечание. Таким цветом отмечены ссылки на сайт Stepik, а вот этим цветом — ссылки на страницы внутри этого файла.

Векторное пространство

Задача 1

1. Докажите, что существует и единственен вектор $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, такой что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} = \vec{x} + \vec{y}$. Такой вектор $\vec{y}$ называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Каковы координаты вектора $\vec{0}$?
2. Докажите, что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $0\vec{x} = \vec{0}$ (заметьте, что в левой части равенства ноль это число, а в правой части ноль это вектор).

Задача 2

1. Докажите, что для каждого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ найдётся вектор $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, такой что $\vec{x} + \vec{z} = \vec{0}$. Такой вектор $\vec{z}$ называется противоположным вектору $\vec{x}$ и обозначается $-\vec{x}$. Если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то каковы координаты вектора $-\vec{x}$? Например, каковы координаты вектора, противоположного вектору $(3, -5)$?
2. Докажите, что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$ (заметьте, что в левой части равенства мы умножаем вектор на число, а в правой части рассматриваем противоположный вектор).

Линейные отображения

Задача 1

Какие из этих отображений линейны, а какие нет?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x_1) = x_1^2$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Если отображение линейное, то докажите, что первое и второе условие выполнены. Если отображение не линейное, то приведите пример, на котором одно из условий не выполняется.

Задача 2

Эта задача по формату аналогична предыдущей задаче. Мы разделили их на две, потому что нам так удобнее давать баллы за задачи.

Какие из этих отображений линейны, а какие нет?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = |x|$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_2)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 5x_2$
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2, x_3) = 0$

Если отображение линейное, то докажите, что первое и второе условие выполнены. Если отображение не линейное, то приведите пример, на котором одно из условий не выполняется.

Задача 3

Докажите, что если $f : V \to W$ это линейное отображение, то

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. В левой части используется нулевой вектор из пространства V, а в правой нулевой вектор из пространства W. Мы добавили нижний индекс, чтобы как-то различать эти два нулевых вектора.
2. $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$. В левой части используется вектор, противоположный $\vec{x} \in V$, а в правой вектор, противоположный $f(\vec{x}) \in W$.

Попробуйте не пользоваться покоординатным представлением векторов в своём доказательстве. Например, использовать утверждение $(-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, но не использовать утверждение $(-\vec{x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Задача 4

Обозначение. Когда мы будем оперировать векторами в вычислениях с матрицами, нам будет удобно представлять некоторые векторы не как строку $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, а как столбец. Вот так:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Докажите, что любое отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ задаётся столбцом высоты m.

Подсказка. Доказательство аналогично доказательству с предыдущего шага.
Как можно геометрически представить отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$?

Матрицы

Задача 1

Докажите, что для f выполняется первое условие линейности. То есть $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Напоминаем, что f задаётся так:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

На прошлых шагах мы показали, как по матрице A размера m на n построить отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Однако мы пока не доказывали, что получившееся отображение f является линейным.

Докажите, что отображение f линейно.

Комментарий. Мы уже решали эту задачу для случая матрицы размера $m = 2$ на $n = 3$.

Матрицы и линейные отображения

Задача 1

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (10x_1 - 4x_2, 2x_2 + x_1)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_1)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 10x_2)$
4. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_3 - x_4)$

Комментарий. Для сдачи этой задачи достаточно предъявить правильные матрицы. Все рассуждения про строки проговаривать не нужно (но можно продумать). На прошлом шаге мы разобрали такие же задачи очень подробно, чтобы было понятно, как их решать.

Задача 2

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $f(\vec{x}) = \vec{x}$

Комментарий. Матрица из пункта 4 этой задачи называется единичной матрицей размера n (на английском – identity matrix of size n).

Комментарий. Для сдачи этой задачи достаточно предъявить правильные матрицы.

Задача 3

Пусть отображение f задано матрицей A размера m на n:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Мы уже знаем, как интерпретировать i-ую строку матрицы A– как линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Это отображение по вектору $\vec{x}$ вычисляет i-ую координату вектора $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Давайте придумаем, как интерпретировать столбцы матрицы. Нам понадобится одно обозначение, которым мы уже пользовались.

Обозначение. Обозначим за $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ вектор, у которого j-ая координата равна единице, а все остальные координаты равны нулю.

1. Найдите $f(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1$, то есть результат действия матрицы A на вектор $\vec{e}_1$ (выпишите его, используя коэффициенты матрицы A)

2. Докажите, что для любого j вектор $f(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j$ совпадает с j-ым столбцом матрицы A.

Задача 4

На прошлом уроке мы показали, как по матрице построить линейное отображение. Сейчас мы сделаем обратное – по отображению найдём матрицу, которая задаёт это отображение.

Пусть дано какое-то линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Мы хотим показать, что оно задаётся матрицей. Покажите, что

1. Для любого $\vec{x}$ выполнено $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$. Тем самым, линейное отображение f однозначно задаётся векторами $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$. Другими словами, зная $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, можно вычислить $f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Покажите, как, зная векторы $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, построить матрицу, задающую отображение f. Другими словами, нужно построить матрицу A, такую что $A\vec{x} = f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Задача 5

Докажите, что разные матрицы задают разные линейные отображения.

То есть если

- отображение f задано матрицей A,
- отображение g задано матрицей B,
- и $A \neq B$,

то отображение f не совпадает с отображением g.

Подсказка. Чтобы доказать, что f не совпадает g, достаточно найти $\vec{x}$, такой что $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$.

Пример

Пусть даны две не совпадающие матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Покажем, что они задают разные отображения. Действительно, для $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

- $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

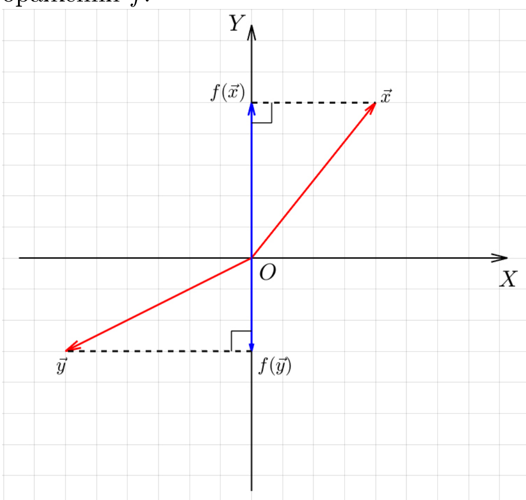
- $g(\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тем самым $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$, то есть отображения f и g не сопадают.

Линейные отображения на плоскости

Задача 1

Отображение f проецирует все векторы на ось OY. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Для решения этой и следующих задач будет полезно использовать клетчатую бумагу. Нарисуйте на ней координатные оси и несколько векторов, например, $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$, $(2,3)$, $(-1,5)$. Посмотрите, как f действует на эти векторы.

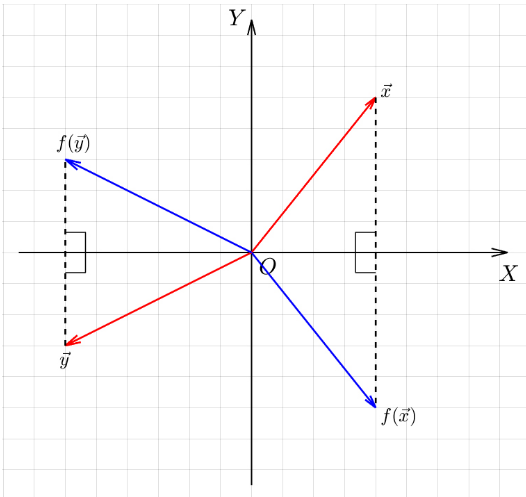
Комментарий. В этой и следующих задачах мы специально не определили строго проекцию, зеркальную и центральную симметрии, ограничившись картинками. Действительно, строгое определение потребовало бы либо формулу f, либо матрицу отображения f. А их-то мы и просим вас выписать. По сути, мы просим вас перевести концепты с наглядно-геометрического языка (картинки) на формальный алгебраический язык (формулы).

Задача 2

Отображение f переводит все векторы в вектор $\vec{0}$. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.

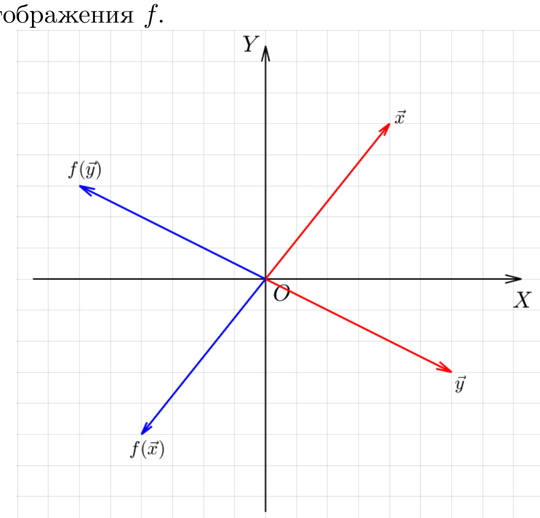
Задача 3

Отображение f переводит все векторы в зеркально симметричные относительно оси OX. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Задача 4

Пусть f – центральная симметрия с центром в $\vec{0}$. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Задача 5

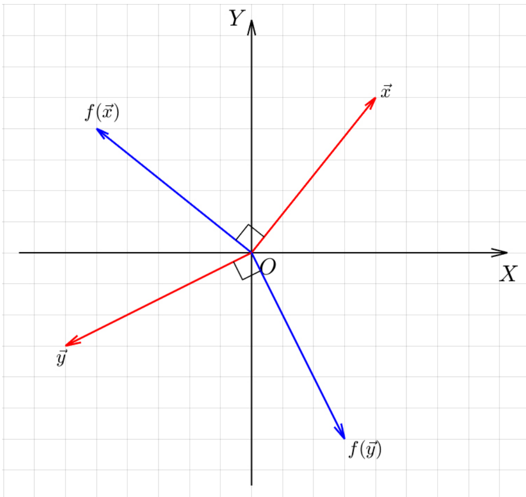
Отображение f растягивает первую координату вектора в два раза и сохраняет вторую координату. То есть $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Выпишите соответствующую матрицу и нарисуйте картинку В этой задаче тоже полезно нарисовать происходящее на клетчатой бумаге.

Задача 6

Можно ли задать матрицей отображение, которое сдвигает все векторы на вектор $\vec{e}_1$? То есть $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$.

Задача 7

Отображение f поворачивает все векторы на 90 градусов против часовой стрелки. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Умножение матриц

Задача 1

Пусть определены два линейных отображения: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Их *композицией* называется отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ и обозначается $g \circ f$. Действует $g \circ f$ на любом векторе $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ так:

1. применяя f, получаем вектор $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$
2. применяя к полученному вектору g, получаем вектор $g(f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^k$

Вектор $g(f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^k$ и называется результатом действия $g \circ f$ на $\vec{x}$.

Докажите, что композиция двух линейных преобразований линейна. Другими словами, докажите, что для преобразования $g \circ f$ выполнены два условия линейности.

Подсказка. Воспользуйтесь условиями линейности для f и g.

Комментарий. Мы пользуемся тем, что пространство, в которое бьёт f, совпадает с пространством, из которого бьёт g. Если бы это было не так, то композиция была бы не определена – мы бы просто не смогли применить g к вектору $f(\vec{x})$.

Задача 2

На этом шаге мы просим вас аналогично предыдущему шагу провести рассуждения уже для произвольного j, а не для $j = 1$:

- Найдите j-ый столбец матрицы BA
- Покажите, что на i-ом месте в j-ом столбце матрицы BA стоит произведение i-ой строки B и j-ого столбца A.
- Запишите это произведение строки на столбец при помощи знака суммы $\sum$.

Подсказка. Аналогично предыдущему шагу посмотрите, куда BA отправляет вектор $\vec{e}_j$.

Комментарий. Да, это муторные вычисления с кучей индексов, но один раз их сделать стоит. После этого возникает понимание, почему матрицы умножают "строка на столбец". Это гораздо полезнее, чем просто заученная формула.

Задача 3

Вспомним примеры матриц с шага предыдущего урока. На этом шаге мы поняли, что матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ задаёт линейное отображение, которое растягивает все векторы в 3 раза, а матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ задаёт линейное отображение, которое проецирует все векторы на ось OX. Посчитайте, как будет выглядеть матрица BA, и подумайте, какому отображению она будет соответствовать.

Задача 4

Посмотрим на такую матрицу размера n на n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У неё стоят единицы на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (эта диагональ называется главной). А на всех остальных местах стоят нули. Такая матрица называется *единичной*. Чаще всего её обозначают буквами E или I. Если важно подчеркнуть, что матрица именно размера n на n, то добавляют нижний индекс: E_n, I_n.

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $E\vec{x} = \vec{x}$.
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $EA = AE = A$. Из этого и предыдущего пункта ясно, почему E называется единичной матрицей.
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $E_nA = AE_m = A$

Задача 5

Пусть A – любая матрица, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – любое число. Умножим все коэффициенты матрицы A на λ, и будем называть полученную матрицу (λA). Вот так:

$$2\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $(\lambda E)\vec{x} = \lambda\vec{x}$. То есть λE растягивает все векторы в λ раз
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A$
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $(\lambda E_n)A = A(\lambda E_m) = \lambda A$

Комментарий. Размерность матрицы E часто не указывают, когда считают её понятной из контекста. Так, во всех пунктах задачи, в которых написано просто E, имеется в виду E_n.

Задача 6

Иногда матрицы удобнее записывать в виде нескольких блоков, каждый из которых соответствует меньшей матрице. Например, пусть

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{12} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{12} \end{pmatrix}$.

Тогда мы можем так определить блочную матрицу $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{11} & y_{12} \\ 0 & 0 & y_{21} & y_{12} \end{pmatrix}.$$

При этом два нуля в этой блочной матрице, конечно, обозначают заполненные нулями матрицы размера 2 на 2.

Комментарий. Блочные матрицы это не какой-то другой вид матриц, а просто другая запись обычных матриц.

Пусть X_1 и X_2 – матрицы размера k на k, а Y_1 и Y_2– матрицы размера $n-k$ на $n-k$. Докажите, что верно следующее выражение, составленное из матриц размера n на n:

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1X_2 & 0 \\ 0 & Y_1Y_2 \end{pmatrix}$$

При этом два нуля в этих матрицах, конечно, обозначают заполненные нулями матрицы размера $n-k$ на k или k на $n-k$.

Пример. Пусть $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда верно

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} X_1X_2 & 0 \\ 0 & Y_1Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

то есть вторая матрица просто является блочным представлением первой.

Задача 7

Вычислите произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -67 & 94 \\ 0 & 0 & 75 & 63 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -39 & -62 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 8

Определение. Умножение называется *коммутативным*, если $B \cdot A = A \cdot B$ для любых A и B.

1. Пусть A и B – матрицы. Докажите, что AB и BA определены и имеют одинаковый размер, только если A и B это квадратные матрицы одинакового размера.
2. Приведите пример матриц A и B размера 2 на 2, таких что $AB \neq BA$.
3. Пусть $n > 2$. Приведите пример матриц A и B размера n на n, таких что $AB \neq BA$.

Подсказка к пункту 2. Например, рассмотрите такие два отображения: проекция на ось OX и поворот на 90 градусов.

Подсказка к пункту 3. Посмотрите на предыдущую задачу. Подставьте матрицы из пункта 2 в качестве X_1 и X_2, и возьмите заполненные нулями Y_1 и Y_2.