Непрерывные вероятностные пространства

Допустим, мы хотим определить случайную величину ξ, равную времени (в минутах), которое проводит на этом шаге студент. Для кого-то это 5 минут, для кого-то $- 3.5$ минуты, для кого-то $- 4.11111111111$ минуты. Теоретически значение такой случайной величины может быть любым действительным числом из луча $[0, +\infty)$.

На прошлых уроках вы видели примеры вероятностных пространств с счётным пространством исходов и случайных величин, которые принимают счётное число различных значений. В нашем примере у случайной величины ξ даже больше различных значений. И $\mathbb{N}$, и $[0, +\infty)$ – бесконечные множества, но вторая бесконечность больше первой (понимать это строго не обязательно; строгую формулировку мы обсуждали в дополнительном уроке про теорию множеств).

Как и раньше, сначала мы познакомимся с вероятностными пространствами, и только потом перейдем к случайным величинам. В этом уроке мы познакомимся с вероятностными пространствами с более чем счётным пространством исходов.

Стремительный Витя

У вас день рождения, и вы организовали вечеринку, которая идёт с 19:00 до 22:00. У Вити – вашего друга – из-за работы совершенно не хватает времени на отдых. Поэтому Витя пообещал забежать на вечеринку, обнять вас, подарить подарок и моментально убежать. Витя сказал, что из-за непредсказуемого рабочего расписания он придёт на вечеринку в случайное время.

Будем считать, что Витя приходит на вечеринку в любой момент времени между 19:00 и 22:00 с *одинаковой вероятностью*. Давайте подумаем, как эту фразу можно формализовать. Например, ясно, что вероятность того, что Витя придёт в час с 19 до 20 должна быть такой же, как вероятность прийти в час с 20 до 21. И такой же, как в час, который идёт с 20:30 до 21:30. То же самое должно быть верно и для минут: вероятность того, что Витя появится в минуту с 19:17 до 19:18 должна быть такой же, как и вероятность появиться с 20:42 до 20:43. Аналогично для секунд и для любых других промежутков времени.

Тем самым, мы хотим, чтобы вероятность появления Вити в любой промежуток времени вечеринки зависела только от длины промежутка, но не зависела от того, когда этот промежуток начинается.

Давайте подумаем, какова вероятность того, что Витя появится с 19 до 20. Можно разбить всю вечеринку на три непересекающихся часа – с 19:00 до 20:00, с 20:00 до 21:00 и с 21:00 до 22:00. Вероятности появления Вити для каждого из этих часов должны быть равны. Сумма этих вероятностей должна быть равна 1 (так как Витя пообещал, что придёт на вечеринку). Значит, вероятность появления Вити в каждый из этих часов равна $\frac{1}{3}$.

Аналогичное рассуждение про минуты. Ваша вечеринка длится 180 минут, поэтому вероятность появления Вити в каждую из этих минут равна $\frac{1}{180}$.

Более формально

Как мы помним, вероятностное пространство это тройка – пространство исходов, алгебра событий, функция вероятности.

Пространство исходов. Сопоставим времени 19:00 число 0, времени 22:00 число 3. Соответственно всему времени вечеринки сопоставляется отрезок $[0, 3]$. Про это ещё можно думать так: число $t \in [0, 3]$ соответствует моменту времени через t часов после начала вечеринки. Этот отрезок $[0, 3]$ и будет нашим пространством исходов: исход t означает "Витя появился в момент через t часов после начала вечеринки".

Алгебра событий. Давайте пока не будем строго описывать всю алгебру событий. Ясно, что в ней должны лежать все отрезки вида $[a, b]$, такие что $0 \leq a \leq b \leq 3$. То есть каждый такой отрезок будет считаться событием. Таких событий нам пока достаточно (да и вообще для любых практических применений таких событий достаточно).

Вероятность. Вероятность P это функция, которая на вход принимает событие, а на выход выдаёт число. Ясно, что вероятность всего отрезка $[0, 3]$ должна быть равна единице. В прошлом параграфе мы показали, что вероятности первого часа, второго часа и третьего часа равны $\frac{1}{3}$. В наших терминах это значит $P([0, 1]) = P([1, 2]) = P([2, 3]) = \frac{1}{3}$. Аналогично, вероятность любого отрезка $[a, b]$ с $0 \leq a \leq b \leq 3$ определим как отношение его длины к длине отрезка $[0, 3]$. То есть $P([a, b]) := \frac{b-a}{3}$.

Пример 1. Какова вероятность, что Витя придёт за 15 минут до конца вечеринки или позже? Событие "за четверть часа до конца вечеринки или позже" это отрезок $[2\frac{3}{4}, 3]$. Вероятность этого события равна $\dfrac{3 - 2\frac{3}{4}}{3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$.

Пример 2. Ясно, что наша функция вероятности даёт ответ и для объединения интервалов. Например, вероятность того, что Витя придёт в первый или третий час вечеринки равна $P([0, 1] \cup [2, 3]) = P([0, 1]) + P([2, 3]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Давайте решим задачу на вычисление. А потом посмотрим на ещё один пример события в этом вероятностном пространстве. Этот пример настолько важный, что мы вынесли его в отдельный шаг.

С 19:00 до 19:45 вы планируете знакомить гостей друг с другом, а с 21:00 до 21:30 задувать свечи и есть праздничный торт.

Найдите вероятность того, что Витя поздравит вас во время одного из этих занятий. Ответ округлите до сотых.

Введите численный ответ

Введите число

Пример – конкретное время

Какова вероятность того, что Витя придёт ровно в 20:30, то есть ровно в момент времени $1.5 \in [0, 3]$?

Приведём два рассуждения, приводящих к одному и тому же ответу.

Рассуждение 1. Выберем маленькое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отрезок $[1.5 - \varepsilon, 1.5 + \varepsilon]$. Ясно, что так как 1.5 лежит в этом отрезке, то вероятность прийти ровно в момент 1.5 должна быть не больше, чем вероятность этого отрезка. А вероятность этого отрезка равна $P([1.5 - \varepsilon, 1.5 + \varepsilon]) = \frac{(1.5+\varepsilon)-(1.5-\varepsilon)}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$. То есть вероятность прийти ровно в момент 1.5 не больше числа $\frac{2\varepsilon}{3}$ для любого $\varepsilon > 0$. Ясно, что отсюда следует, что вероятность прийти ровно в момент 1.5 равна 0.

Рассуждение 2. Формально, по нашему определению вероятности $P([a, b]) := \frac{b-a}{3}$ для любых $0 \le a \le b \le 3$. Если мы возьмём $a = b = 1.5$, то отрезок $[a, b]$ превратится ровно в точку 1.5. Значит, вероятность прийти ровно в момент 1.5 равна $P([1.5, 1.5]) = \frac{1.5-1.5}{3} = \frac{0}{3} = 0$.

То же самое верно не только для 1.5, но и для любого другого конкретного времени $t \in [0, 3]$.

Тем самым, для любого $t \in [0, 3]$ вероятность того, что Витя придёт в момент времени t равна 0.

Подозрительно

Как же так? Вероятность каждого исхода $t \in [0, 3]$ равна нулю, но все эти исходы вместе образуют отрезок $[0, 3]$, вероятность которого равна 1? Разве это не противоречие?

С точки зрения жизненной интуиции. Вроде бы нет никакого противоречия. Да, Витя придёт на вечеринку с вероятностью 1. Но вероятность прийти в конкретный момент времени равна 0: если зафиксировать время t, то момент прихода Вити будет отличаться от t хотя бы на миллисекунду, или микросекунду, или какую-то более малую долю секунды ;)

С точки зрения математики. Технически, ни к какому математическому противоречию мы пока не пришли, так что наша математическая конструкция пока не сломалась.

Давайте попробуем прийти к противоречию. Кандидат в противоречие у нас следующий:

> *Сложим вероятности всех возможных исходов. Вероятность каждого из них равна 0, значит и сумма равна 0. Но сумма должна быть равна вероятности всего вероятностного пространства, то есть 1. Противоречие.*

Проблема этого рассуждения в том, что мы не можем сложить вероятности всех исходов. Если бы исходов было счётное количество, то мы сложили бы их вероятности (как сумму ряда) и получили бы 0. Но точек на отрезке $[0, 3]$ несчётное количество, то есть нам нужно сложить несчётное количество слагаемых. Этого мы делать не умеем, поэтому таким путём к противоречию прийти нельзя.

Выберите все подходящие ответы из списка

Вероятность того, что Витя придёт в течение первого или последнего часа вечеринки, равна $\frac{2}{3}$.

Вероятность того, что Витя придёт в промежуток с 20:30 до 21:30 равна $\frac{1}{2}$

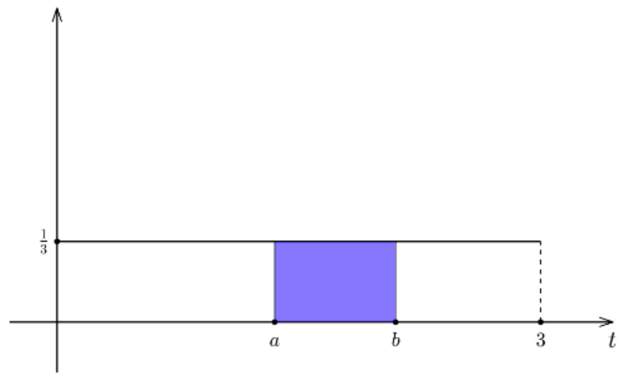
Вероятность того, что Витя придёт ровно в 7:45, равна 0

Вероятность того, что Витя придёт ровно в 20:00 или ровно в 21:00, равна 0

Вероятность как интеграл

Давайте построим ещё один пример непрерывного вероятностного пространства. Для этого нам нужно научиться задавать вероятности событий при помощи интегралов. Сначала посмотрим, как это сделать в уже разобранном нами случае с Витей.

Выберем постоянную функцию $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, которая каждому числу t сопоставляет число $\frac{1}{3}$. График этой функции будет горизонтальным отрезком, как видно на картинке ниже.



Раньше мы задавали вероятность так: $P([a, b]) := \frac{b-a}{3}$.

Эту же самую вероятность можно задать так: $P([a, b]) := \int\limits_a^b f(t)\, dt$. Эта формула действительно даёт ту же самую вероятность:

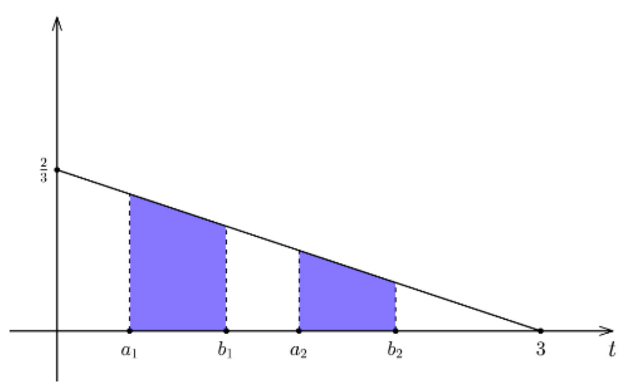
$$P([a, b]) := \int\limits_a^b f(t)\, dt = \int\limits_a^b \frac{1}{3}\, dt = \frac{b-a}{3}$$

Как про это думать? Подграфик функции f это фигура площади 1. Посмотрим на часть этой фигуры, располагающуюся строго над отрезком $[a, b]$. Площадь этой части фигуры это и есть вероятность отрезка $[a, b]$.

Предусмотрительная Света

Света похожа на Витю – у неё мало свободного времени, она приходит на вечеринку, поздравляет вас и уходит. Света также приходит в случайный момент времени. Но в отличие от Вити Света стремится прийти пораньше – то есть она скорее придёт ближе к началу вечеринки, чем ближе к концу. Формализуем это так.

Рассмотрим функцию $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, определённую так: $g(t) = \frac{2}{9}(3 - t)$.



Определим вероятность прихода Светы в отрезок времени $[a, b]$ как $\int\limits_a^b g(t)\, dt$.

Как про это думать? Подграфик функции g это фигура площади 1. Посмотрим на часть этой фигуры, располагающуюся строго над отрезком $[a, b]$. Площадь этой части фигуры это и есть вероятность отрезка $[a, b]$.

Видно, что теперь для промежутков $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ равной длины вероятности попасть в эти промежутки будут разные. Как видно из рисунка, при $a_1 < a_2$ площадь, закрашенная над отрезком $[a_1, b_1]$, будет больше площади, закрашенной над отрезком $[a_2, b_2]$.

Сравним вероятностное пространство, построенное для Вити, и вероятностное пространство, построенное для Светы. Ясно, что в обоих этих пространствах одно и то же пространство исходов $[0, 3]$. Алгебры событий в этих вероятностных пространствах тоже совпадают. Но функции вероятности в этих вероятностных пространствах разные. Так что это два разных вероятностных пространства.

Задача с проверкой. Непрерывные случайные величины 1

Пример. Найдём вероятность того, что Света придёт в промежуток с 20:00 до 21:00.

Решение. В наших обозначениях 20:00 соответствует точке 1, а 21:00 соответствует точке 2. Тем самым искомая вероятность это

$$\int_1^2 g(t)\,dt := \int_1^2 \frac{2}{9}(3-t)\,dt.$$

Первообразная $\frac{2}{9}(3-t)$ это $\frac{2}{9}(3t-\frac{t^2}{2})$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{2}{9}(3-t)\,dt = \frac{2}{9}(3\cdot 2-\frac{2^2}{2}) - \frac{2}{9}(3\cdot 1-\frac{1^2}{2}) = \frac{2}{9}(6-2) - \frac{2}{9}(3-\frac{1}{2}) = \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

Задача. Докажите, что вероятность прихода Светы в течение вечеринки действительно равна 1. То есть, что

$$P([0,3]) = \int_0^3 g(t)\,dt = 1.$$

Можете строго найти интеграл, используя первообразную. А можете считать, что мы уже убедились, что интеграл это площадь, и просто найти площадь нужных частей подграфика (используя формулы площади прямоугольника и площади прямоугольного треугольника).

Задача для проверки.

Заполните пропуски

1. Вероятность того, что Света придёт в промежуток с 19:00 до 20:00, равна ____ (ответ округлите до тысячных)

2. Вероятность того, что Света придёт ровно в 20:45 равна ____ (ответ округлите до тысячных)

Двумерное вероятностное пространство

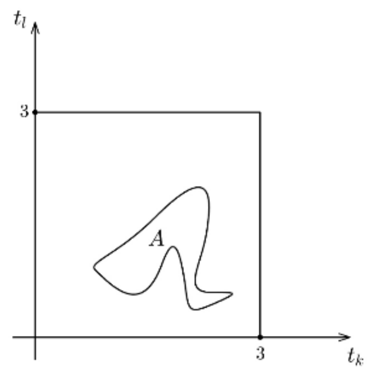
Приведём ещё один пример вероятностного пространства (в этом примере нам интегралы не понадобятся).

Два ваших друга, Костя и Лена, не знакомы друг с другом и оба идут на вашу вечеринку. Каждый из них приходит в случайный момент времени с одинаковой вероятностью (также, как Витя). При этом их приходы независимы друг от друга – то есть по информации о том, когда пришёл Костя, ничего нельзя сказать про то, когда придёт Лена.

Давайте посмотрим на то, какое у нас получится вероятностное пространство.

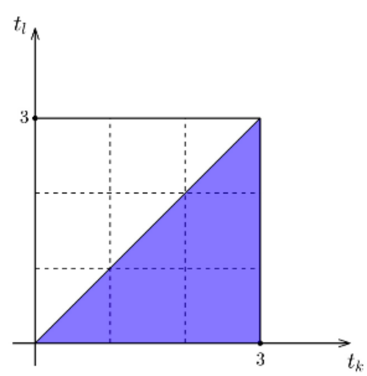
Пространство исходов. Каждый исход это пара чисел (t_k, t_l), где t_k – время прихода Кости, и t_l – время прихода Лены. Очевидно, $t_k \in [0,3]$ и $t_l \in [0,3]$, то есть наше вероятностное пространство это квадрат $[0,3] \times [0,3]$.

События и вероятность. Событиями будем назвать все фигуры, у которых мы можем измерить площадь. А вероятностью каждого события назовём отношение площади фигуры к площади всего квадрата (площадь квадрата $[0,3] \times [0,3]$ равна 9).

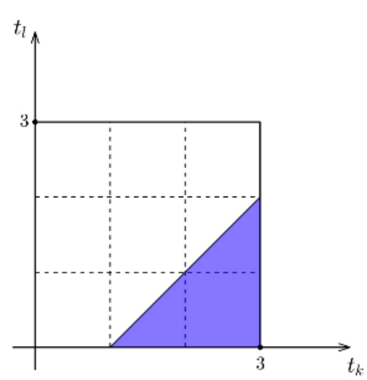


Ниже мы напишем, почему мы так определили вероятности. А пока давайте посмотрим, как применить наше определение.

Пример 1. Какова вероятность того, что Лена придёт раньше Кости? На картинке ниже мы закрасили фигуру, соответствующую этому событию. Убедитесь, что закрашенная область действительно состоит ровно из точек, для которых выполнено $t_l < t_k$. Площадь закрашенной фигуры равна 4.5, поэтому вероятность события равна $\frac{4.5}{9} = 0.5$.



Пример 2. Какова вероятность того, что Лена придёт хотя бы на час раньше Кости? На картинке ниже мы закрасили фигуру, соответствующую этому событию. Убедитесь, что закрашенная область действительно состоит ровно из точек, для которых выполнено $t_l + 1 < t_k$. Её площадь равна 2, поэтому вероятность события равна $\frac{2}{9} \approx 0.22$



Задача с проверкой. Непрерывные случайные величины 2

Задача. Оказывается, что и Костя, и Лена приходят на вечеринку ровно на час. То есть каждый из них приходит на вечеринку, проводит на ней час времени и уходит. Если вечеринка закончилась раньше, чем пройдёт этот час, то человек просто уходит вместе с остальными гостями в конце вечеринки. Найдите вероятность того, что вы сможете представить друг другу Костю и Лену.

Другими словами, найдите вероятность того, что в какой-то момент на вечеринке одновременно будут и Костя, и Лена.

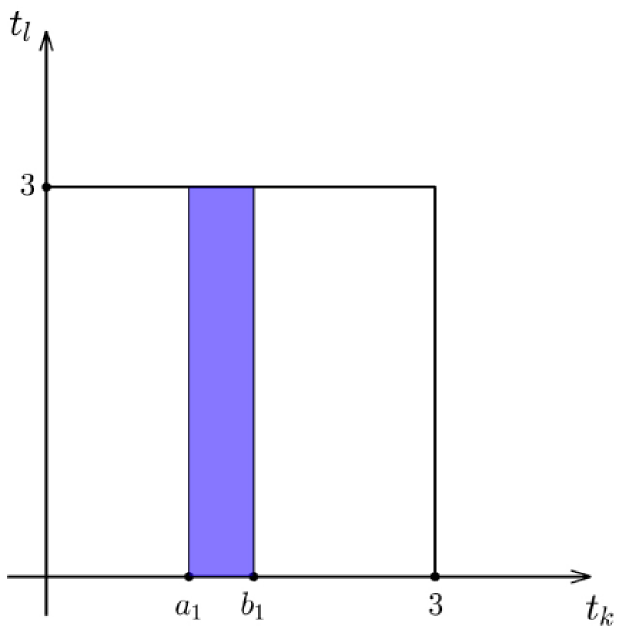
Проверка. Введите ответ. Округлите до третьего знака после запятой.

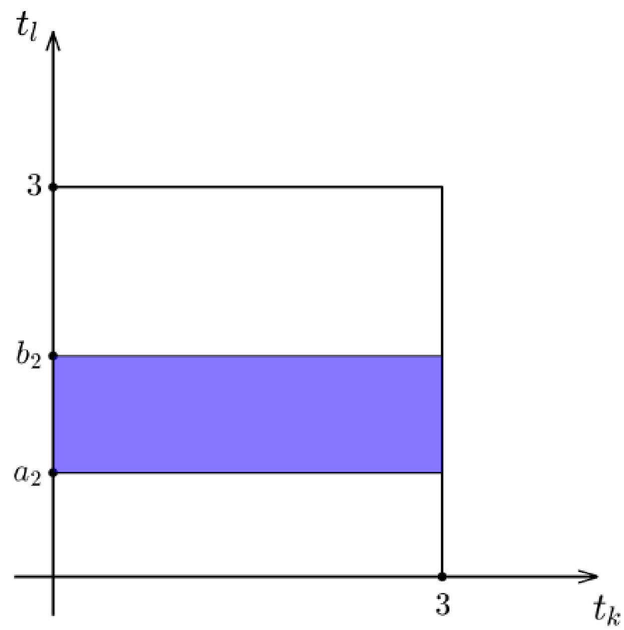
Введите численный ответ

Введите число

Почему мы так определили вероятности

Костя приходит в любой момент времени с одинаковой вероятностью, поэтому $P(t_k \in [a_1, b_1]) := \frac{b_1 - a_1}{3}$ для любых $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 3$ (как и в случае Вити). Аналогично, $P(t_l \in [a_2, b_2]) := \frac{b_2 - a_2}{3}$ для любых $0 \leq a_2 \ \leq b_2 \ \leq 3$. В пространстве исходов события $t_k \in [a_1, b_1]$ и $t_l \in [a_2, b_2]$ выглядят так:

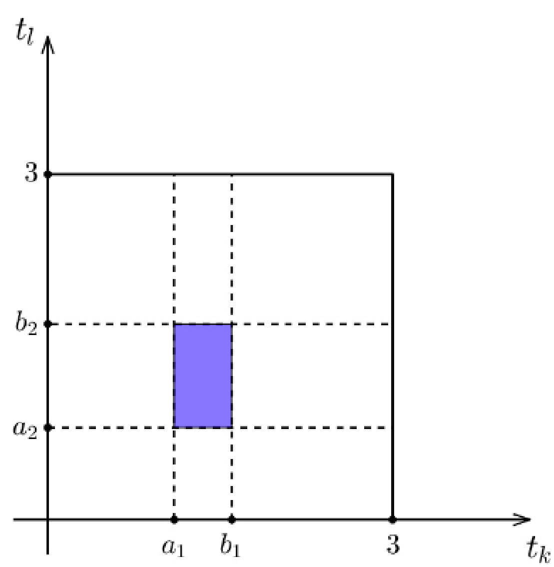




Так как эти события независимы, вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий:

$$P(t_k \in [a_1, b_1], t_l \in [a_2, b_2]) = P(t_k \in [a_1, b_1]) \cdot \ P(t_l \in [a_2, b_2]) = \frac{b_1 - a_1}{3} \cdot \frac{b_2 - a_2}{3} = \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{9}$$

Заметьте, что у дроби $\frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{9}$ числитель равен площади прямоугольника, соответствующего событию $(t_k \in [a_1, b_1], t_l \in [a_2, b_2])$, а знаменатель равен площади квадрата, соответствующего всему вероятностному пространству $[0, 3] \times [0, 3]$. Прямоугольник, соответствующий событию $(t_k \in [a_1, b_1], t_l \in [a_2, b_2])$ выглядит так:



Значит, для событий, соответствующих прямоугольникам, выполнено условие "вероятность события равна отношению площади соответствующей фигуры к площади всего квадрата". Очевидно, это же условие выполнено и для фигур, составленных из нескольких прямоугольников.

Фраза "мы можем измерить у фигуры A площадь" равносильна фразе "мы можем приблизить A прямоугольниками сколь угодно точно" (это мы обсуждали в начале урока про интеграл). Поэтому для всех фигур, у которых мы можем измерить площадь, тоже выполнено условие "вероятность события равна отношению площади соответствующей фигуры к площади всего квадрата".

Случайные величины с более чем счётным числом исходов

В этом уроке мы посмотрели на несколько примеров недискретных вероятностных пространств (то есть не счётных и не конечных). Недискретные вероятностные пространства бывают очень разные, и классифицировать их сложно.

Но основной интерес в прикладных науках представляют собой случайные величины. Поскольку случайные величины принимают значения в $\mathbb{R}$, для них проще выработать единую теорию.

Поэтому далее мы будем в основном обсуждать случайные величины и их распределения, а к самому вероятностному пространству возвращаться редко. Но важно помнить, что вероятностное пространство там есть. Как мы уже видели на дискретных примерах, случайные величины взаимодействуют между собой через вероятностное пространство.

Чтобы говорить про случайные величины в отрыве от вероятностного пространства, наших текущих определений недостаточно. В дискретном случае распределением были пары: значение и вероятность. Однако, в случае, когда число значений случайной величины более чем счётно, такой подход не сработает. Для непрерывных случайных величин нам потребуется *функция распределения*, которую мы пройдём на следующем уроке.

Дополнительный материал

Вероятностные пространства с более чем счётным числом исходов

Основной интерес для нас представляют случайные величины. Но прежде чем мы начнём про них разговор, давайте немного формализуем понятие вероятностного пространства для более чем счётного множества исходов. Для понимания оставшейся части курса нам будет достаточно интуитивного представления о вероятностном пространстве, поэтому этот материал мы сделали дополнительным.

Обозначение. Для любого множества X можно рассмотреть также множество всех его подмножеств — оно обозначается 2^X. Мнемоническое правило: для конечного множества верно равенство $|2^X| = 2^{|X|}$. При этом множество всех подмножеств можно рассматривать и для бесконечных множеств.

Мы с вами увидели несколько примеров вероятностных пространств с более чем счётным числом элементарных исходов. Но пока не определили, каким требованиям должно удовлетворять вероятностное пространство в этом случае. Напомним, что вероятностное пространство — это тройка

- Ω — множество элементарных исходов
- $F \subset 2^\Omega$ — алгебра событий, где 2^Ω обозначает множество всех подмножеств Ω
- $P : F \to [0, 1]$ — вероятность

Для дискретных вероятностных пространств алгебра событий всегда содержала все подмножества Ω, то есть было выполнено $F = 2^\Omega$. Но на отрезке есть такие хитрые множества, что попытка приписать какому-то из них вероятность неизбежно приведет к противоречию. Аналогично и для других более чем счётных множеств. Именно поэтому нужна алгебра событий — это те события, для которых можно вычислить вероятность.

Требования к вероятностному пространству

Множество элементарных исходов

Ω — по-прежнему любое множество.

Алгебра событий

Идейно требования следующие.

- Если мы умеем считать вероятность события, то хотим уметь считать вероятность дополнения. То есть если множество лежит в F, то и его дополнение должно быть в F.
- Если мы умеем считать вероятность каких-то событий, то хотим уметь считать вероятность их объединения и пересечения. То есть пересечение и объединение множеств из F также должно быть в F. В том числе, мы хотим уметь считать вероятность объединения счётного числа событий.
- Также мы хотим убедиться, что $P(\Omega) = 1$, для этого Ω тоже должно быть в F.

Если говорить формально, то требуют, чтобы алгебра событий F была *сигма-алгеброй*. Подробнее об этом мы написали на следующем шаге.

Функция вероятности

К ней требования вполне естественные и вытекают из требований к алгебре событий. Из определения мы знаем, что P — функция из алгебры событий F в $[0, 1]$. Дополнительно необходимо, чтобы $P(\Omega) = 1$. А также, чтобы функция P была согласована с объединением и пересечением. То есть должно быть выполнено правило суммы — с ним мы уже знакомы. Но, если для конечного множества элементарных событий это правило следовало из определения вероятностного пространства, то тут это является требованием к функции P, то есть частью определения.

Если формально, то функция вероятности должна быть *счётно-аддитивной мерой*. Главное отличие от конечного случая заключается в том, что можно находить меру счётного объединения событий. Подробнее также на следующем шаге.

Дополнительный материал

Формально про вероятностные пространства

Вероятностное пространство — это тройка

- Ω – множество элементарных исходов (любое множество)
- $F \subset 2^{\Omega}$ – алгебра событий (сигма-алгебра на множестве Ω)
- $P : \Omega \to [0, 1]$ – вероятность (счётно-аддитивная мера на F)

Сигма-алгебра и счётно-аддитивная мера — хоть и звучит страшно, но на самом деле их определения лишь формализуют наши интуитивные представления о том, каким должно быть вероятностное пространство.

Определение [сигма-алгебра]. Пусть Ω – произвольное множество. Семейство множеств $S \subset \ 2^{\Omega}$ называется *сигма-алгеброй* (или σ -алгеброй) на множестве Ω, если:

1. $\Omega \in S$.
2. F замкнуто относительно дополнения. То есть, если $A \in \ S$, то $(\Omega \setminus A) \in S$.
3. F замкнуто относительно счётного объединения. То есть объединение любого счётного подсемейства S также лежит в S. Более формально: пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность такая, что $\forall i \in \mathbb{N} : \ A_i \in S$. Тогда $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$.

Замечание. Вместо "семейство множеств" мы могли бы говорить "множество множеств". Мы выбрали первый вариант только ради того, чтобы не было путаницы между всеми этими множествами.

Определение [счётно-аддитивная мера]. Пусть F – сигма-алгебра на множестве Ω. Функция P называется *счётно-аддитивной мерой*, если:

1. $P(\Omega) \ = 1$.
2. Для счётного набора попарно непересекающихся событий из F вероятность их объединения равняется сумме вероятностей каждого из них. Более формально: пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность такая, что $\forall i \in \mathbb{N} : \ A_i \in S$ и $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$. Тогда $P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Заметим, что третье условие из определения сигма-алгебры не следует из более простого $\forall A, B \in S : A \cup B \in S$. Из него следовало бы аналогичное утверждение про объединение любого конечного числа событий из S, но не счётного. Счётное объединение в некотором смысле максимум, который мы можем требовать: для счётного объединения мы можем проверить корректность функции вероятности. Если попробовать обобщить сумму на более чем счётное число слагаемых, неизбежно вылезут парадоксы.

Описанные выше требования к алгебре событий и вероятности — наиболее общие. То, что мы требовали в дискретном случае, следует из этих требований.

Что мы прошли на этом уроке

- Мы посмотрели на непрерывные вероятностные пространства
- Узнали, как можно считать вероятности с помощью интегралов
- В дополнительном материале обсудили более формализованное определение вероятностного пространствас более чем счётным множеством исходов

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- поговорим про функцию распределения
- поймём, что у неё за свойства, и как по ней судить о свойствах случайной величины