Множество

Множество — одно из фундаментальных понятий в математике. Множества возникают почти в любой области математики. Если говорить метафорами, то множества — это материал, из которого будет строиться наша теория. Наберитесь терпения: ближайшие несколько уроков могут показаться не относящимися к DS, но потом вы увидите, что это не так.

Определение. *Множество* — математический объект, являющийся набором других объектов.

Объекты, из которых состоит множество, называют *элементами* множества или *точками* множества. Множества обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а элементы множества — строчными.

- $x \in A$ читается как «x является элементом множества A» или «x принадлежит A»,
- $y \notin A$ читается как «y не принадлежит A».

Задать множество можно двумя способами: перечислением или описанием.

Примеры задания множества перечислением:

- $A = \{0, 1\}$ – множество A состоит из двух элементов: нуля и единицы,
- $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
- $C = \{a, b, c, d, e\}$,
- $D = \{\text{cat}, \text{dog}\}$.

Зачастую множество затруднительно задать, перечислив все его элементы. Например, если множество бесконечно. В таких случаях множества задают описанием.

Примеры задания множества описанием:

- K – множество людей, которые пользовались интернетом за последний час,
- T – множество дней в 2019 году,
- O – множество всех положительных чётных чисел.

Иногда в описании используют знак многоточия. Например, можно написать $O = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Часто описание множества удобно записывать в форме $\{x \mid P(x)\}$, то есть «множество всех x, таких что для них выполнено условие P». Например, $\{x \mid x \in O, x \leq 10\}$ – это множество таких x, что выполнены условия $x \in O$ и $x \leq 10$. Очевидно, $\{x \mid x \in O, x \leq 10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Любой элемент содержится в множестве не больше одного раза. Другими словами, добавление в множество элемента, который уже есть в этом множестве, не меняет множество: $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$.

Множества, отличающиеся порядком элементов, считаются одинаковыми: $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 2, 5, 3, 1\}$.

Аксиоматика множеств (дополнительный материал)

Понятие множества, несмотря на кажущуюся его естественность, отнюдь не тривиально. Долгое время учёные использовали наивную теорию множеств, которая впоследствии оказалась противоречивой. Например, можете почитать про парадокс Рассела: знаний с текущего урока достаточно, чтобы его понять. Сейчас общепринятой в математическом сообществе является теория множеств Цермело-Френкеля, но чтобы её полностью осознать нужно чуть побольше знаний, чем мы сможем дать в этом курсе.

Выберите все подходящие ответы из списка

$a \notin \{a, b, c\}$
$\{f, g\} = \{g, g, f, g\}$
$15 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

Операции над множествами

На множествах есть естественные операции пересечения, объединения и разности.

Определение. *Пересечение* множеств A и B – это множество $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Другими словами, это множество всех элементов x, которые лежат одновременно и в A, и в B. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Например, $\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5\} = \{3,4\}$.

Напоминание. Для введения новых обозначений мы уже использовали знак «$:=$», который читается как «по определению равно».

Определение. *Объединение* множеств A и B – это множество $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Другими словами, это множество всех элементов x, таких что $x \in A$ или $x \in B$. При этом если x лежит и в A, и в B, то он тоже лежит в $A \cup B$. Например, $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

Определение. *Разность* множеств A и B – это множество $A \setminus B \ := \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Другими словами, это множество элементов A, которые при этом не лежат в B. Например, $\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$.

Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B, если все элементы множества A также являются элементами множества B. Обозначение: $A \subset B$.

Например, $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$.

Мнемонические правила

Комментарий 1. В своё время Миша долго не мог запомнить, какой из знаков ∩ и ∪ отвечает за пересечение, а какой за объединение. Потом один Мишин друг сказал, что знак ∪ – объединение, потому что «он похож на корзину, в которую мы кидаем все элементы». С тех пор Миша больше не путался.

Комментарий 2. А ещё на ∪ можно смотреть как на букву U – «union» – «объединение».

Комментарий 3. А если вам ближе русский, то можно смотреть на ∩ как на букву П – «пересечение» :)

Выберите все подходящие ответы из списка

$\{3, 4, 5, 6\} \setminus \{1, 2, 3, 6\} = \{4, 5\}$

$\{\frac{24}{12}, 3^2, \sqrt{16}\} = \{4, 2, 9\}$

$13 \in \{a \mid a < 10 \text{ или } a \text{ чётное}\}$

$3 \in \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4\}$

$\{d, d, a\} \subset \{a, b, c, d\}$

Философское отступление. Выдадим математику набор базовых определений из какого-то существующего раздела математики, с которым он не знаком. Посадим математика в пещеру, в которой нет математических текстов и других математиков. Тогда из этих базовых определений математик построит теорию, близкую к уже существующей, или и вовсе совпадающую с уже существующей. В нашем курсе мы попробуем провернуть что-то подобное, только без пещеры.

Задача. На основании определений, которые вы изучили в этом уроке, попробуйте формально определить равенство множеств A и B. Ответ можно прочитать в закреплённом комментарии этого шага.

Комментарий. В нашем курсе будут встречаться задачи, ответ на которые разбирается в закреплённом комментарии или далее в курсе. Мы надеемся, что вы не сразу будете читать ответ, а попробуете сначала придумать его сами: во-первых, вдруг получится? :) Во-вторых, даже если не выйдет, вам будет легче воспринимать ответ, подумав про задачу сперва самостоятельно.

Отправленный вами ответ не проверяется, стоимость у таких задач 1 балл. Чтобы получить его, в поле ответа можно написать, например, "Я супер умница, всё решил(а) сам(а), ответ правильный!" или "Ответ подсмотрел(а), но всё понятно".

Диаграммы Эйлера

Дисклеймер: следующие пять шагов мы будем изучать диаграммы Эйлера и диаграммы Эйлера-Венна — это способы изобразить множества. Освоить этот курс можно и без этих знаний, но мы решили всё-таки дать материал про диаграммы, чтобы вы потренировались визуализировать абстрактные объекты.

Множества и отношения между ними можно представлять себе на диаграммах Эйлера. На них множества рисуются как круги. Смысл таких картинок станет понятнее, если нарисовать внутри кругов элементы. Рядом с множеством мы будем писать букву, которой это множество обозначено. А элементы внутри кругов будем обозначать с помощью точек.

Примеры:

Диаграмма Эйлера для множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$:

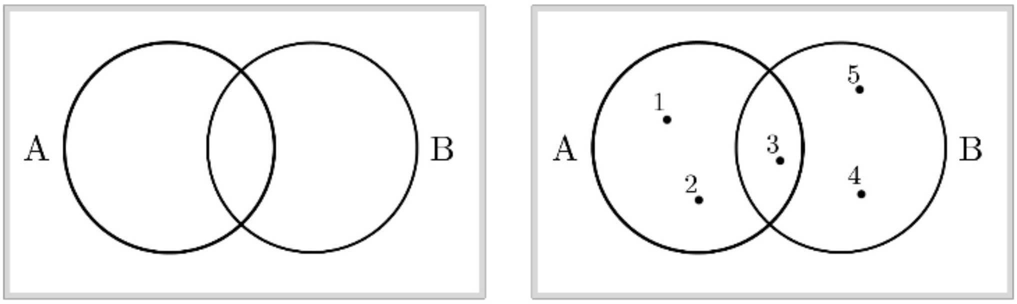


Диаграмма Эйлера для множеств $A = \{6, 7, 8\}$ и $B = \{9, 10\}$:

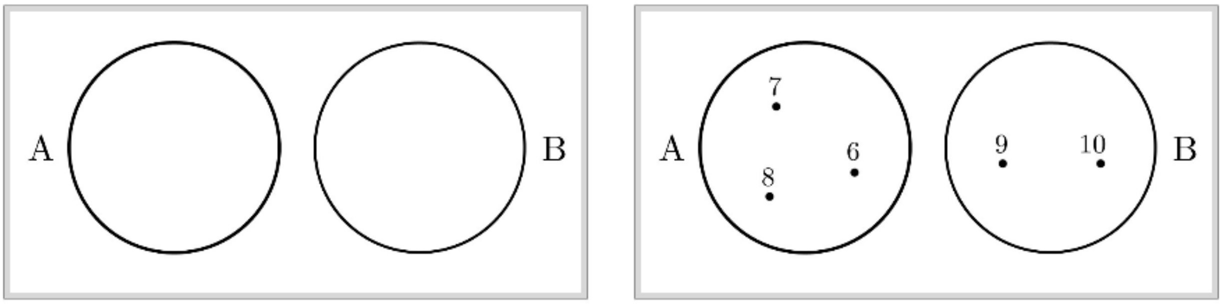
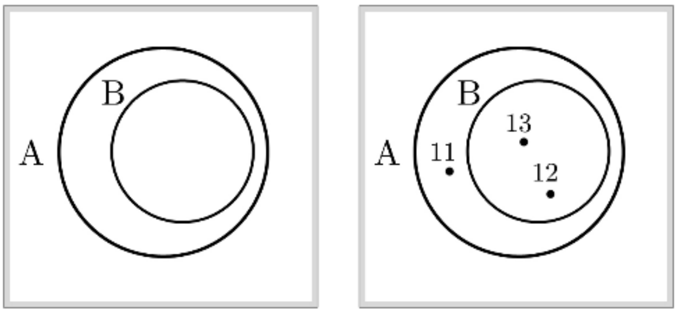


Диаграмма Эйлера для множеств $A = \{11, 12, 13\}$ и $B = \{12, 13\}$:



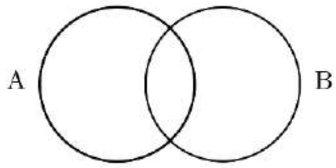
Задача. Множества 1.

Нарисуйте диаграмму Эйлера для трёх множеств $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3\}$.

Замечание. Напоминаем, что ответ, который вы присылаете в окошко в задачах с зелёным заголовком "задача", никак не оценивается. Поэтому в поле для ответа не обязательно что-то вводить.

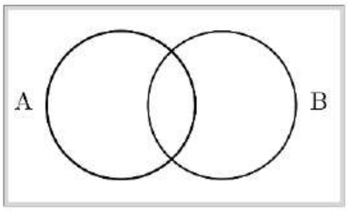
Диаграммы Эйлера-Венна

В общем случае, если про множества ничего не известно, рисуют *диаграмму Эйлера-Венна*, то есть диаграмму Эйлера со всеми возможными пересечениями. Для двух множеств диаграмма Эйлера-Венна будет выглядеть следующим образом:



В таком случае, какими бы ни были множества, для каждого элемента найдётся подходящая область на диаграмме, однако некоторые области могут остаться пустыми. Проверим это утверждение на примерах, которые мы рассматривали ранее:

Диаграмма для множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$:



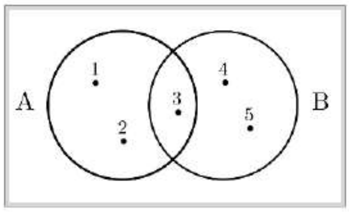
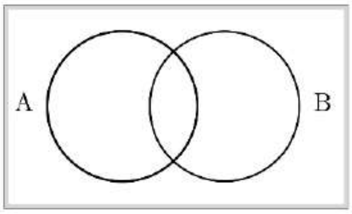


Диаграмма для множеств $A = \{6, 7, 8\}$ и $B = \{9, 10\}$:



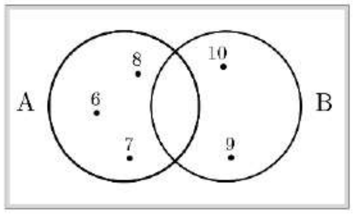
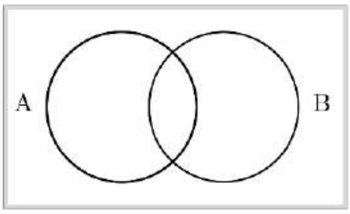
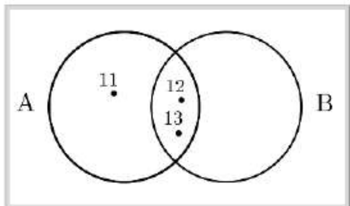


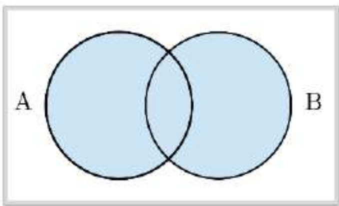
Диаграмма для множеств $A = \{11, 12, 13\}$ и $B = \{12, 13\}$:



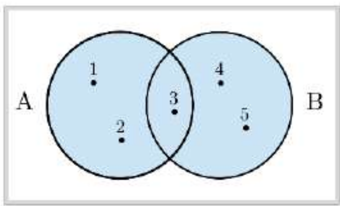


Операции над множествами на диаграммах Эйлера-Венна

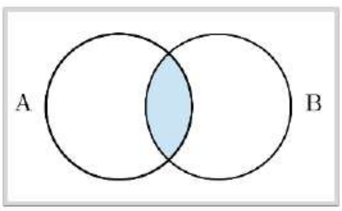
На диаграммах Эйлера-Венна удобно изображать только что изученные нами операции над множествами. Рассмотрим множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$ и посмотрим, как будут выглядеть на диаграмме различные операции над ними:



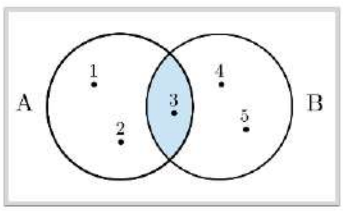
A∪B — объединение множеств



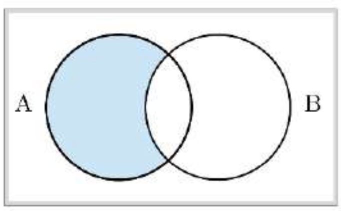
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



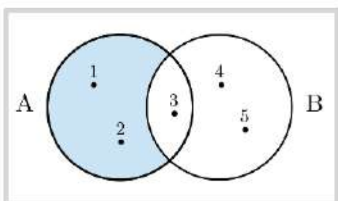
A∩B — пересечение множеств



$A \cap B = \{3\}$

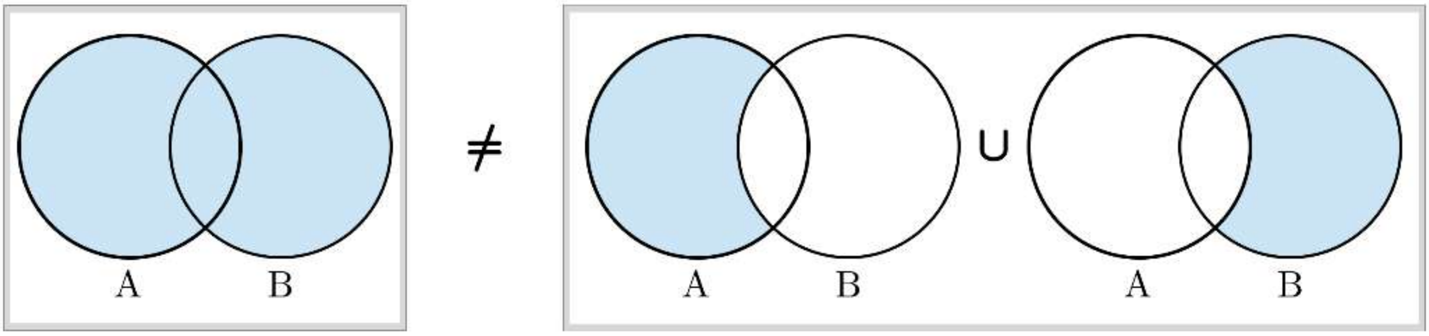


A\B — разность множеств



$A \setminus B = \{1, 2\}$

Поскольку на диаграммах Эйлера-Венна мы рисуем множества в наиболее общем положении, с их помощью можно проверять на истинность различные утверждения про множества. Например $A \cup B = (A \setminus B) \cup \ (B \setminus A)$ – неверно. Чтобы показать это, нужно предъявить *контрпример*, то есть пример двух таких множеств, что $A \cup B \neq \ (A \setminus B) \ \cup (B \setminus A)$. Понять, как его строить, помогут диаграммы Эйлера-Венна. Посмотрим на картинку:

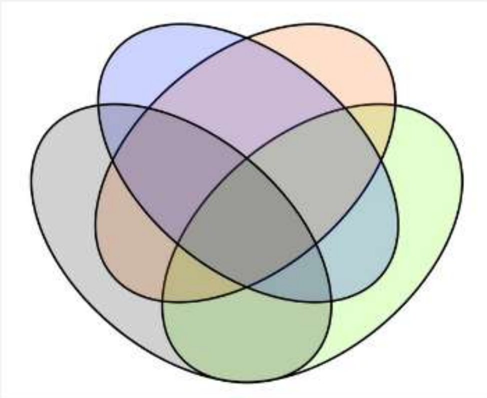


По картинке видно, что левая и правая части в общем случае не равны.

Задача. Попробуйте придумать конкретный пример двух множеств, для которых не будет выполнено равенство выше. Подумайте, что нужно добавить к правой части равенства, чтобы оно стало верным? Ответ вы найдёте в закреплённом комментарии.

Замечание. Кстати, множество $(A \setminus B) \cup \ (B \setminus A)$ называют *симметрической разностью* множеств A и B, обозначается $A \triangle B$. Но эта операция используется не очень часто, её помнить не обязательно.

Вот так выглядит диаграмма Эйлера-Венна для 4 множеств. На этой картинке можно выделить 16 одноцветных кусочков, каждый из них соответствует пересечению некоторого набора из этих 4 множеств. Въедливый читатель заметит, что этих кусочков на самом деле 15, но ошибки тут нет: 16-ый кусочек — белый, туда попадают элементы, которые не лежат ни в одном из 4 множеств.



Источник: Википедия

Подумайте, как будет выглядеть диаграмма Эйлера-Венна для 3 множеств (она выглядит куда проще), сверьте свой ответ с картинкой в закреплённом комментарии. С её помощью попробуйте понять, какие утверждения ниже верны:

Выберите все подходящие ответы из списка

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Часто встречающиеся множества

Нам будут часто встречаться следующие множества, поэтому мы зафиксируем обозначения для них.

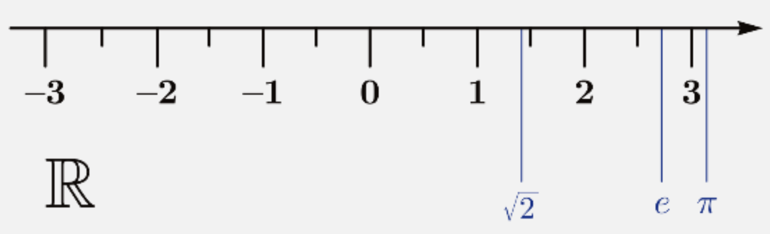
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество *натуральных чисел*, то есть чисел, возникающих при счёте.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ — множество *целых чисел*.
- $\mathbb{Q}$ — множество *рациональных чисел*, то есть чисел, которые можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Например, $\frac{12}{7} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-3}{5} \in \mathbb{Q}$. Мы не будем это доказывать, но, например, числа $\sqrt{5}$ и π не лежат в $\mathbb{Q}$, то есть их нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}$ — множество *действительных чисел*. Ограничимся неформальным определением. Действительное число — это *бесконечная десятичная дробь*, то есть выражение вида

$$\pm a_0.a_1a_2a_3\dots,$$

  где $\pm$ это знак $+$ или знак $-$, a_0 это целое неотрицательное число, и $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ для всех $i \geq 1$. Например, $\sqrt{2} = 1.414213\dots \in \mathbb{R}$, $\frac{100}{3} = 33.333333\dots \in \mathbb{R}$, $\pi = 3.1415926\dots \in \mathbb{R}$. Отметим, что некоторые десятичные дроби соответствуют одному и тому же действительному числу. Например, число 1 можно представить в виде $1.0000\dots$ и в виде $0.9999\dots$. Верна следующая цепочка включений множеств

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

  Наглядно множество действительных чисел можно представить в виде числовой прямой. Нарисуем прямую, обозначим на ней ноль и единицу. Тогда каждому действительному числу будет соответствовать одна и ровно одна точка числовой прямой.



Источник: Википедия

- $\mathbb{R}^n$ — множество всех наборов из n действительных чисел. В частности, $\mathbb{R}^3$ это множество всех троек действительных чисел. То есть, например, $(4, 1.53, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$. Мы более подробно рассмотрим $\mathbb{R}^n$ на четвёртой неделе этого курса.

Комментарий 1. Другое название действительных чисел – *вещественные числа*.

Комментарий 2. Разные школы математики могут включать или не включать 0 в множество натуральных чисел. Это вопрос договорённостей. В нашем курсе ноль НЕ входит в множество натуральных чисел.

Выберите все подходящие ответы из списка

$A \cup A \neq A$
$(-19)^2 \in \mathbb{Z}$
$\frac{15}{7} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
$\mathbb{Z} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\} = \mathbb{N}$

Промежутки числовой прямой

Нам понадобятся обозначения для нескольких часто встречающихся подмножеств $\mathbb{R}$.

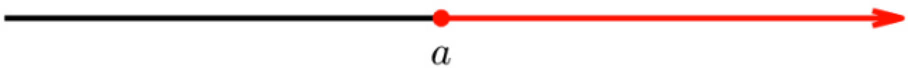
Определение. При $a < b$ *отрезком* называется множество $[a, b] := \{x \mid a \leq\ x \leq b\}$. Точки a и b называются *граничными* точками отрезка.

Определение. При $a < b$ *интервалом* называется множество $(a, b) := \{x \mid a <\ x <\ b\}$.

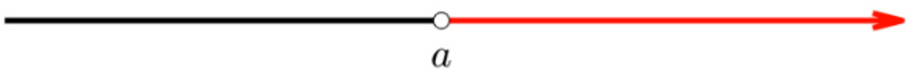
На рисунке красным закрашены только точки, принадлежащие интервалу (a, b). Заметьте, что точка a и точка b не закрашены красным, ведь они не принадлежат интервалу (a, b).

Как видно из предыдущих двух определений, квадратная скобка означает, что конец включен в множество, а круглая – что конец не включён в множество. Например, $[a, b) := \{x \mid a \leq\ x <\ b\}$ – левый конец лежит в множестве, а правый нет.

Определение. *Замкнутыми* лучами называются множества $[a, +\infty) := \{x \mid a \leq x\}$ и $(-\infty,\ a] := \{x \mid x\ \leq a\}$. Точка a называется *граничной* точкой замкнутого луча.



Определение. *Открытыми* лучами называются множества $(a, +\infty) := \{x \mid a <\ x\}$ и $(-\infty,\ a) := \{x \mid x <\ a\}$.



Комментарий: пустой кружочек на картинке обозначает "выколотую" точку, то есть ту, которая не включается в объект: интервал, луч, график функции и т.п.

Примеры

У нас набралось довольно много обозначений – мы можем написать $\{3, 7\}$, $[3, 7]$ и $(3, 7)$. Давайте ещё раз повторим, что есть что.

- Вот множество $\{3, 7\}$. Оно состоит ровно из 2 элементов: числа 3 и числа 7. Это множество не является ни отрезком, ни интервалом.
- Вот отрезок $[3, 7]$. Он является множеством. В нём бесконечно много элементов. Например, в нём лежат числа $3, 4, 5, 6, 7$, а также 3.5, и 4.18, и даже число π (равное $3.1415926\ldots$).
- Вот интервал $(3, 7)$. Интервал является множеством, и в нём бесконечно много элементов. Множество $(3, 7)$ почти совпадает с множеством $[3, 7]$ – есть только два различия. А именно, числа 3 и 7 не лежат в $(3, 7)$, но лежат в $[3, 7]$.

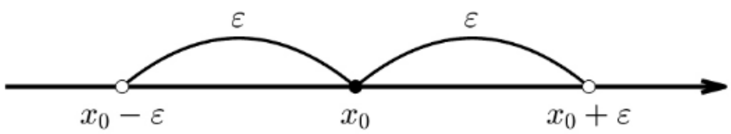
Выберите все подходящие ответы из списка

$[3,7]\cap(1,7)=[3,7]$
$(-\infty,10)\cap(5,+\infty)=(5,10)$
$(12,14)\cup(14,16)=(12,16)$
$[2,6]\cap[5,+\infty)=[5,6]$

Окрестность точки

Нам особенно часто будут нужны следующие подмножества $\mathbb{R}$, поэтому мы ввели для них отдельные обозначения.

Определение. Интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ называется ε*-окрестностью* точки x_0, где ε – положительное действительное число.

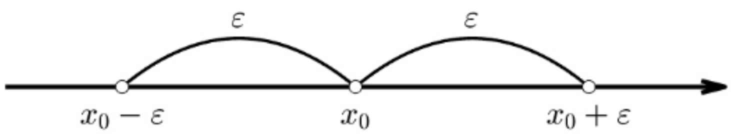


Заметьте, что ε-окрестность точки x_0 состоит ровно из тех точек, расстояние от которых до x_0 меньше ε. Другими словами, ε -окрестность точки x_0 это множество всех x, таких что $|x - x_0| < \varepsilon$.

Комментарий 1. В этом определении мы использовали новый для нас символ – букву ε из греческого алфавита (читается как «эпсилон»). В математике часто употребляются и другие греческие буквы, например, далее в курсе нам встретится буква δ (читается «дельта»).

Комментарий 2. В выражении «ε-окрестность» символ ε — это просто переменная. Вместо ε может быть какое-то конкретное число: например, 0.1 или 1000 — тогда мы получим 0.1-окрестность и 1000-окрестность соответственно. А может быть, например, δ — тогда мы получим δ-окрестность.

Определение. *Проколотой* ε*-окрестностью* точки x_0 называется ε-окрестность точки x_0, из которой исключили саму точку x_0. Другими словами, проколотая ε-окрестность точки x_0 – это объединение интервалов $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.



Определение. *Пустое множество* — это множество, в котором нет элементов.

Оно обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество — это такой аналог нуля в мире множеств:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus A = \emptyset$

Если мы хотим сказать, что множества A и B не пересекаются, то в наших новых обозначениях это будет $A \cap B = \emptyset$. Например, $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$.

Выберите все подходящие ответы из списка

$A \setminus \emptyset = \emptyset$
$[1, 2] \cap [2, 3] = \emptyset$
$\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$
$A \setminus \emptyset = A$
$(1, 2) \cap (2, 3) = \emptyset$