Математика для Data Science. Математический анализ. Решения задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

3.1 Пределы функций и непрерывные функции

Задача 1

Может ли у функции быть два разных предела в одной точке?
Если да — приведите пример такой функции. Если нет —докажите.

Подсказка. Сведите задачу к единственности предела последовательности.

Решение. Пусть у функции f в точке x_0 есть два разных предела: a и b. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ и $x_n \in D\backslash\{x_0\}$ для всех n. Тогда из определения предела функции получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Но на прошлом уроке мы доказали, что предел последовательности единственен. Противоречие

Задача 2

Обозначим через $frac(x)$ разницу между x и наибольшим целым числом, меньшим или равным x.
Найдите предел $\lim\limits_{x \to 3} frac(x)$, если он существует.
Найдите предел $\lim\limits_{x \to -0.5} frac(x)$, если он существует.

Подсказка. Найдите две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, такие что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 3$, но $\lim\limits_{n\to\infty} frac(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} frac(y_n)$.

Решение.

- Рассмотрим последовательности $\{x_n\} = \{3 - \frac{1}{n}\}$ и $\{y_n\} = \{3 + \frac{1}{n}\}$. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 3$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} frac(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} frac(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$. Так как $1 \neq 0$, у функции $frac$ нет предела в точке 3.
- Для всех $x \in (-0.5 - 0.1, -0.5 + 0.1)$ выполнено $frac(x) = 1 + x$. Поэтому для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = -0.5$ выполнено:

  $$\lim_{n\to\infty} frac(x_n) = \lim_{n\to\infty}(1 + x_n) = \lim_{n\to\infty}(1) + \lim_{n\to\infty}(x_n) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

  Значит, предел $frac$ в -0.5 существует и равен 0.5.

Задача 3

Пусть даны две функции f и g с совпадающими областями определения, такие что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.
Определим функцию $(f+g)$ так: значение функции $(f+g)$ в точке x равно $f(x) + g(x)$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ существует и равен $a + b$.

Подсказка. Воспользуйтесь аналогичным утверждением для пределов последовательностей.

Решение. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$, и все x_n не совпадают с x_0 и лежат в области определения функции f. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = a + b,$$

так как в уроке по пределам последовательностей мы доказали, что предел суммы последовательностей это сумма пределов этих последовательностей.

Задача 4

Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные утверждению предыдущего шага для

- произведения функций fg,
- частного функций $\frac{f}{g}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Подсказка. Номер делается аналогично предыдущему.

Решение. Пусть даны две функции f и g с совпадающими областями определения, такие что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) = ab$. И $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$. Доказательство аналогично доказательству из предыдущей задачи (мы воспользуемся утверждениями про произведение и частное последовательностей).

Задача 5

1. Докажите, что функция $g(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$, непрерывна.
2. Докажите, что функция f(x)=x непрерывна.
3. Рассмотрим встречавшуюся нам ранее в этом уроке функцию $frac$, где $frac(x)$ обозначает дробную часть числа x. В каких точках $frac$ непрерывна, а в каких разрывна?

Подсказка. Рассмотрите любую точку x_0 и любую последовательность, сходящуюся к x_0. В третьем пункте вспомните решение задачи 2.

Решение.

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c) = c = g(x_0)$.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0 = f(x_0)$.
3. Аналогично решению задачи 2:
   - для $x_0 \in \mathbb{Z}$ предела $\lim\limits_{x\to x_0} frac(x)$ не существует, поэтому $frac$ разрывна в x_0 (см решение для $x_0 = 3$ из задачи 2).
   - для $x_0 \notin \mathbb{Z}$ предел $\lim\limits_{x\to x_0} frac(x)$ существует и равен $frac(x_0)$, поэтому $frac$ непрерывна в x_0 (см решение $x_0 = -0.5$ из задачи 2).

Задача 6

1. Пусть f и g — непрерывные функции с совпадающими областями определения. Обозначим эту область определения за D. Ясно, что у функции $f+g$ область определения это тоже D. Докажите, что функция $f+g$ непрерывна (то есть непрерывна в каждой точке D)
2. Пусть f и g — непрерывные функции с совпадающими областями определения. Обозначим эту область определения за D. Ясно, что у функции $f \cdot g$ область определения это тоже D. Докажите, что функция $f \cdot g$ непрерывна (то есть непрерывна в каждой точке D)
3. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Докажите, что f непрерывна.

Подсказка. Для решения первых двух пунктов рассмотрите любую точку $x_0 \in D$ и любую последовательность, сходящуюся к x_0. А третий пункт следует из первых двух.

Решение.

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x) + g(x).$$
предпоследнее равенство мы доказали в уроке про последовательности, а последнее равенство следует из непрерывности f и непрерывности g.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty} fg(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x)g(x).$$
предпоследнее равенство мы доказали в уроке про последовательности, а последнее равенство следует из непрерывности f и непрерывности g.
3. В задаче 5 мы доказали, что постоянные функции и функция $f(x) = x$ непрерывны. В двух предыдущих пунктах мы доказали, что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

   Так как функции a_k и x непрерывны, функция a_ix^i непрерывна как произведение непрерывных функций. Сумма непрерывных функций вида a_ix^i непрерывна, поэтому функция $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ непрерывна.

3.3 Производные: формально с доказательствами

Задача 1

1. Найдите производную функции $f(x) = 7$ в точке $x_0 = 4$
2. Найдите производную функции $f(x) = 6x$ в точке $x_0 = 4$
3. Найдите производную функции $f(x) = 6x + 7$ в точке $x_0 = 4$
4. Найдите производную функции $f(x) = ax + b$ в точке x_0 (где $a, b \in \mathbb{R}$).

Подсказка.

Решение. Решим сразу последний пункт, а из него уже будут следовать предыдущие пункты. Найдём производную функции $f(x) = ax + b$ в точке $x_0 = 2$. Воспользуемся определением:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a(x_0 + \Delta x) + b) - (ax_0 - b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a.$$

При этом выражение $\dfrac{a\Delta x}{\Delta x}$ определено при всех Δx кроме $\Delta x = 0$. Взятию предела при $\Delta x \to 0$ это не мешает.

Задача 2

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Докажите, что

1. функция cf тоже дифференцируема в точке x_0 и $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$, для любого числа $c \in \mathbb{R}$,
2. функция $f + g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $((f + g)(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Обозначение. Если мы считаем производную конкретной функции в конкретной точке, например, если $f(x) = 7x - 3$ и $x_0 = 5$, то можем записать $f'(x_0)$ так: $(7x - 3)'|_{x_0=5}$ (читается как "производная функции $7x - 3$ в точке $x_0 = 5$"). Аналогично через палочку будем обозначать значение функции в точке. Например, $(7x - 3)|_{x_0=5}$ будет читаться как "значение функции $7x - 3$ в точке $x_0 = 5$".

Подсказка. Вспомните, что предел суммы функций равен сумме пределов функций, а также что предел функции, умноженной на константу, равен этой константе, умноженной на предел функции.

Решение.

1. Проверим, что функция $f + g$ дифференцируема в точке x_0:

$$((f+g)(x_0))' = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{t} =$$
$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

Здесь мы воспользовались задачей 3 из урока 3.1 о пределе суммы функций.

2. Переходим к проверке дифференцируемости функции cf в точке x_0:

$$(cf(x_0))' = \lim_{t \to 0} \frac{cf(x_0 + \Delta x) - cf(x_0)}{t} = c \cdot \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{t} = cf'(x_0)$$

Здесь мы воспользовались задачей 4 из урока 3.1 о пределе произведения функций (в нашем случае одна из функций постоянна и равна c).

Задача 3

На этом шаге мы докажем, что дифференцируемость – более сильное свойство, чем непрерывность. Другими словами все дифференцируемые функции непрерывны, но не все непрерывные функции дифференцируемы.

Это свойство понадобится нам на следующем шаге, когда мы будем находить производную произведения двух функций.

Задача. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Напоминание:

- По определению, f дифференцируема в точке x_0 если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- По определению, f непрерывна в точке x_0 если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Подсказка. Утверждение задачи эквивалентно следующему утверждению: если функция f разрывна в точке x_0, то у f нет производной в точке x_0.

Решение. Пусть f разрывна в точке x_0. Это значит, что найдётся такое $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0, что $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ для всех x_n. Но тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ не существует. Значит, и $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ не существует.

Из разрывности функции в x_0 следует, что производная в x_0 не существует. Значит, из существования производной в x_0 следует непрерывность функции в x_0.

Задача 4

На этом шаге мы научимся находить производную произведения двух функций.

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в точке x_0.

1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0)$
2. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0)$
3. Докажите, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Тем самым,

$$(fg(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Подсказка. Полезно будет вспомнить, что предел суммы функций равен сумме пределов, а предел произведения равен произведению пределов. Кроме того, в первом пункте пригодится предыдущая задача.

Решение.

1. Воспользуемся тем, что предел произведения функций равен произведению пределов функций:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f'(x_0)g(x_0)$$

   В последнем равенстве мы воспользовались предыдущей задачей: если функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в ней, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

2. Аналогично предыдущему пункту

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)\cdot\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)$$

3.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

поскольку мы добавили и вычли одно и то же выражение $f(x_0)g(x)$ в числителе. Продолжая цепочку равенств, получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+$$
$$+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Мы воспользовались тем, что предел суммы функций равен сумме пределов функций, а также формулами из двух предыдущих пунктов.

Задача 5

Производная x^2, первый способ. На прошлом шаге в Примере 4 мы нашли производную функции x^2. Напомним, по формуле для производной произведения:

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'\cdot x+x\cdot x'=1\cdot x+x\cdot 1=2x.$$

Заметьте, что

- при $x>0$ величина $2x>0$, то есть значение функции x^2 растёт при $x>0$,
- при $x<0$ величина $2x<0$, то есть значение функции x^2 убывает при $x>0$.

Нарисуйте график функции x^2 и убедитесь, что эта функция действительно так себя ведёт.

Производная x^2, второй способ. Кстати, эту же производную можно вычислить напрямую из определения производной, не пользуясь формулой для производной произведения. Найдем производную функции x^2 в точке x_0 :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

Производная x^3. Найдём производную функции x^3:

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'\cdot x+x^2\cdot x'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=2x^2+x^2=3x^2.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что мы раньше уже доказали $(x^2)'=2x$.
Производная x^4. Найдём производную функции x^3:

$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+x^3\cdot x'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=3x^3+x^3=4x^3.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что мы раньше уже доказали $(x^3)'=3x^2$.
Задача. Найдите производную функции x^n для произвольного натурального n.

Подсказка 1. Самостоятельно найдите производную функции x^5.
Подсказка 2. Угадайте ответ:

- $(x^2)'=2x$
- $(x^3)'=3x^2$
- $(x^4)'=4x^3$

- $(x^n)' =??????$

Решение.

Первый способ. Аналогично тому, как это было сделано в условии, можно найти производную функции x^5 :

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot x' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 4x^4 + x^4 = 5x^4.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что мы раньше уже доказали $(x^4)' = 4x^3$.

Итак, мы уже показали, что

- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3)' = 3x^2$
- $(x^4)' = 4x^3$
- $(x^5)' = 5x^4$

Можно заметить закономерность и предположить, что

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Эту формулу мы уже доказали для $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Предположим, что мы уже доказали формулу для производной x^n. Исходя из этого докажем формулу для производной x^{n+1}:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Ура, мы получили формулу, которая как раз соответствует нашему предположению! Таким образом, поскольку мы научились переходить от меньшей степени к большей, то мы доказали формулу и для $n = 6, 7, 8, \ldots$.

Подход, которым мы здесь воспользовались, называется *математическая индукция*. Мы доказали утверждение для маленьких n (это называется *базой индукции*), а затем доказали, что если утверждение верно для n, то оно верно и для $n+1$ (это называется *шагом индукции*). Таким образом, мы доказали утверждение для произвольного n.

Второй способ. Можно было доказать формулу $f'(x_0) = (x_0^n)' = nx_0^{n-1}$ и по-другому, с использованием формулы разности степеней.

Итак, по определению:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x_0 + \Delta x) - x_0)((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \cdots + (x_0 + \Delta x)x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\Delta x}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой разности степеней:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ для } \ a = x_0 + \Delta x \ \text{ и } \ b = x_0$$

Продолжаем цепочку равенств выше:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \cdots + (x_0 + \Delta x)x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \cdots + (x_0 + \Delta x)x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) =$$
$$= (x_0 + 0)^{n-1} + (x_0 + 0)^{n-2}x_0 + \cdots + (x_0 + 0)x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

Задача 6

Одни из самых часто встречающихся функций это *многочлены*, то есть функции вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Пример. Вот примеры многочленов:

- $x^2 - 8x + 2$
- $3x^4 - 7.5x^2 + x - \frac{1}{12}$
- $-x^5$
- 11

На этом шаге мы научимся считать производные многочленов.

Задача. Найдите производную функции $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Подсказка. Найдите производную функции $a_k x^k$, и воспользуйтесь тем, что $(f+g)' = f' + g'$ (см задачу 2)

Решение. Воспользуемся свойствами производной, доказанными в задаче 2, а также предыдущей задачей про производную x^n. Для всех k выполнено $(a_k x^k)' = a_k (x^k)' = a_k (k x^{k-1}) = k a_k x^{k-1}$. Так как производная суммы равна сумме производных (см пункт 2 задачи 2), выполнено

$$\begin{aligned}
&(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = \\
&= (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \cdots + (a_2 x^2)' + (a_1 x)' + (a_0)' = \\
&\qquad\qquad = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x^1 + a_1.
\end{aligned}$$

Задача 7

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что

1. Если g не принимает значение 0, то функция $\frac{1}{g}$ тоже дифференцируема на этом интервале и

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

   Другими словами, для любого x_0 из этого интервала выполнено

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

2. Из предыдущего пункта и формулы для производной произведения выведите, что если g не принимает значение 0, то функция $\frac{f}{g}$ тоже дифференцируема на этом интервале и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Подсказка. Возьмите какую-нибудь точку, в которой определены функции f и g и напишите определение производной функций из условия в этой точке.

Решение.

1. Посчитаем по определению производную функции $\frac{1}{g(x)}$ в точке x_0:

$$\left(\frac{1}{g}(x_0)\right)' = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\frac{1}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x_0)g(x_0+\Delta x)} = -g'(x_0)\cdot\frac{1}{g^2(x_0)}$$

   Здесь мы воспользовались задачей о пределе произведения функций, а также тем, что дифференцируемая функция непрерывна, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$

2. Теперь посчитаем производную функции $\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

   Тут мы использовали результат предыдущего пункта и задачи о производной произведения функций.

3.5 Исследование функций при помощи производных

Задача 1

1. Убедитесь, что все точки минимума также являются точками локального минимума.
2. Убедитесь, что НЕ все точки локального минимума являются точками минимума.
3. В контексте поиска лучших параметров для нашей модели машинного обучения – какой минимум функции потерь мы бы хотели найти, локальный или глобальный?

Подсказка. Пункт 1. Поймите, применимо ли утверждение из определения точки минимума к точке локального минимума? Чем эти определения отличаются?

Подсказка. Пункт 2. Посмотрите на графики, приведённые в курсе ранее, есть ли там точки локального минимума, но не минимума?

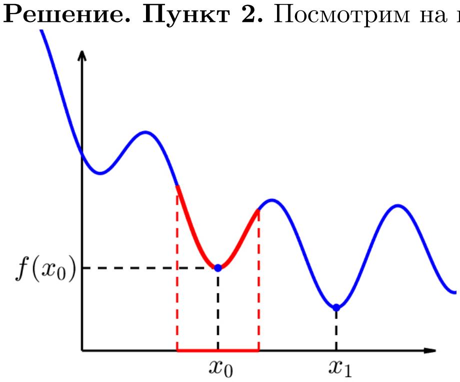
Подсказка. Пункт 3. Вспомните, что такое функция потерь.

Решение. Пункт 1. Пусть x_0 — точка минимума некоторой функции f с областью определения D. Тогда по определению для всех точек $x \in D$ выполнено $f(x_0) \le f(x)$.

Но тогда и для $\varepsilon > 0$ и всех $x \in D \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ будет выполнено $f(x_0) \le f(x_0)$. А это и есть определение точки локального минимума.

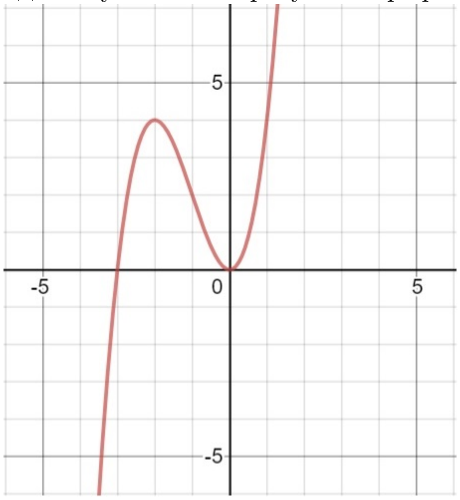
Проще говоря, если $f(x_0) \le f(x)$ для всех x, то и для тех x, которые лежат в некоторой окрестности точки x_0.

Решение. Пункт 2. Посмотрим на пример такой функции f:



Точка x_0 является точкой локального минимума, но не является точкой минимума, потому что есть такая точка x_1, что $f(x_0) > f(x_1)$.

При желании можно привести и пример конкретной функции: например, рассмотрим $g(x) = x^3 + 3x^2$, определённую на $\mathbb{R}$. Нарисуем её график:



Видим, что точка $x_0 = 0$ является точкой локального минимума, но не точкой минимума, ведь для $x < -3$ выполнено $g(x) < 0$, а значит $g(x) < g(x_0)$.

Решение. Пункт 3. Функция потерь показывает, насколько предсказанный нами ответ далёк от реального. То есть чем функция потерь меньше, тем лучше наши подобранные параметры. Как мы уже поняли, локальный минимум может быть значительно больше, чем глобальный минимум. А в идеале нам всё же хотелось бы научиться предсказывать ответы наиболее точно, поэтому мы бы хотели найти именно глобальный минимум функции потерь.

Замечание. К сожалению, в реальных задачах мы очень редко можем гарантированно найти глобальный минимум, так что мы ограничиваемся поиском локального минимума или приближённого локального минимума. Об этом вы ещё узнаете подробнее в уроке про одномерный градиентный спуск.

Задача 2

1. Бывают ли функции, у которых нет точек глобального минимума?
2. Бывают ли функции, у которых нет точек локального минимума?
3. Может ли у функции быть несколько точек локального минимума?
4. А может ли у функции быть несколько точек глобального минимума?

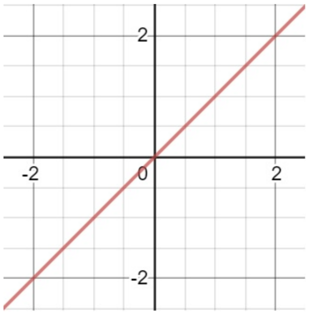
Для решения этой задачи мы советуем порисовать разные графики функций и поспрашивать себя, где у этих функций точки локальных и глобальных минимумов. Например, можете нарисовать графики функций $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$. Или придумать и нарисовать какие-то свои графики функций.

Комментарий 1. При сдаче этой задачи мы советуем заранее нарисовать нужные графики на бумаге и сфотографировать, чтобы их можно было сразу отправить преподавателю.

Комментарий 2. Для экспериментов с графиками функций вам могут быть полезны онлайн-сервисы для рисования графиков, такие как Desmos или Wolfram Alpha. Они бесплатны, и у них очень простой интерфейс: вводите функцию (например, $y = \sin(x)$), получаете график.

Подсказка. Уже есть в тексте задачи :)

Решение. 1. Да, бывают функции, у которых нет точек глобального минимума. Например, функция $f(x) = x$, определённая на $\mathbb{R}$:

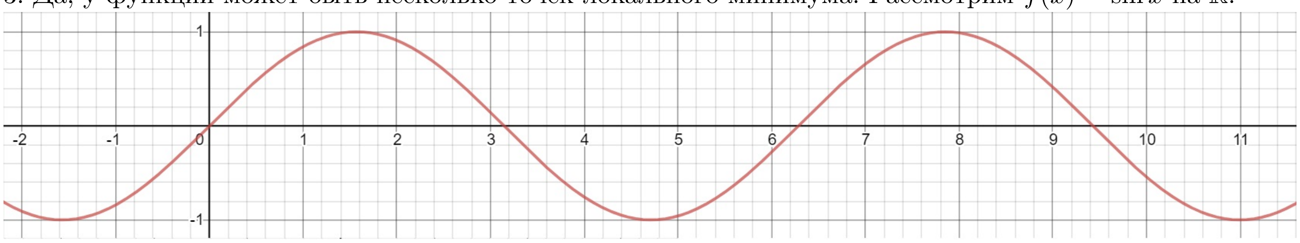


Предположим, что у f всё же есть точка глобального минимума x_0. Но тогда, если мы возьмём точку x_1 такую, что $x_1 < x_0$, то $f(x_1) < f(x_0)$, что противоречит определению точки глобального минимума.

Можно привести и примеры других функций: например, подойдёт $f(x) = x^3+3x^2$, которую мы нарисовали в прошлой задаче. Заметим, что, хотя у $f(x)$ нет точек глобального минимума, точка локального минимума всё же есть.

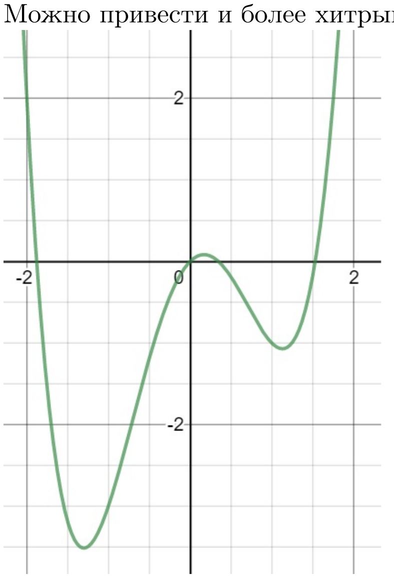
2. Да, бывают функции, у которых нет точек локального минимума. Как пример подойдёт та же функция $f(x) = x$. У неё не может быть локального минимума по тем же соображениям, что и в прошлом пункте. В рассуждение только нужно будет добавить, что мы берём точку x_1, лежащую в достаточно маленькой окрестности точки x_0.

3. Да, у функции может быть несколько точек локального минимума. Рассмотрим $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R}$:



Каждая точка вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число, будет являться точкой локального минимума.

Можно привести и более хитрый пример:



Здесь мы нарисовали график функции $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$. По нему видно, что у функции две точки локального минимума: одна находится где-то около $x = 1$, другая — около $x = -1$, их точные значения вычислять мы не будем. Отметим также, что у такой функции точка глобального минимума только одна.

Более того, дальше в этом уроке мы обсудим, что точки локального минимума могут быть на границе области определения функции, такие примеры здесь тоже подойдут. Например, можно рассмотреть функцию $f(x) = -x^2$, определённую на отрезке $[-1, 1]$, у неё будут две точки локального минимума: -1 и 1.

4. Да, у функции может быть несколько точек глобального минимума. В качестве примера подойдёт рассмотренная в третьем пункте функция $f(x) = \sin x$. Действительно, упомянутые нами точки $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ будут точками глобального минимума, ведь в них синус достигает своего наименьшего возможного значения -1.

Также подойдёт и другой пример из прошлого пункта: $f(x) = -x^2$ на отрезке $[-1, 1]$. У этой функции две точки глобального минимума: -1 и 1.

Задача 3

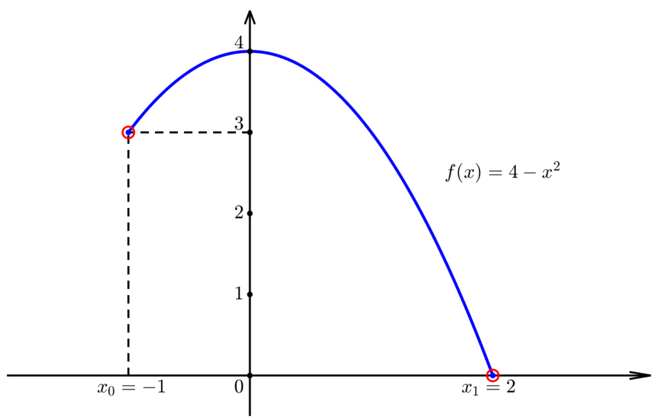
Аналогично предыдущему шагу покажите, что если $f'(x_0) > 0$, то x_0 не может быть точкой локального минимума.

Подсказка. Проведите то же рассуждение, но где-то надо будет поменять знаки в неравенствах.

Решение. Пусть $f'(x_0) = a$ для некоторого числа $a > 0$. По нашему неформальному определению производной, для небольших Δx выполнено $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + a\Delta x$. Если $\Delta x < 0$, то, так как $a > 0$, выполнено $a\Delta x < 0$. А значит, $f(x_0) > f(x_0) + a\Delta x \approx f(x_0 + \Delta x)$. То есть значение функции f в точке x_0 больше, чем значение f в точке $x_0 + \Delta x$. Значит, точка x_0 не может быть точкой локального минимума.

Задача 4

Давайте посмотрим на функцию $f(x) = 4 - x^2$, определённую на отрезке $[-1, 2]$. Вот график этой функции:



Из него видно, что у функции f две точки локального минимума: $x_0 = -1$ и $x_1 = 2$. Кроме того, функция f достигает глобальный минимум в одной точке $x_1 = 2$. Проверьте, что $f'(x_0) \neq 0$ и $f'(x_1) \neq 0$. Как же так? Мы же вроде бы доказали, что в точках минимума производная должна быть равна 0.

Найдите, в каком месте наши рассуждения из предыдущих трёх шагов дают сбой.

Обсудите с преподавателем, что функция может достигать локального минимума либо в точках с нулевой производной, либо в точках на границе области определения функции.

Подсказка. Какой Δx мы берём на шестом шаге, а какой мы брали в предыдущей задаче? Можем ли мы так сделать в нашем случае?

Решение. Для начала найдём производную нашей функции: $f'(x) = (4 - x^2)' = 0 - (x^2)' = -2x$ (здесь мы воспользовались тем, что производная разности равна разности производных, производная постоянной величины равна нулю, а производная x^2 равна $2x$). Функция $2x$ действительно не равна нулю ни в точке $x_0 = -1$, ни в точке $x_1 = 2$.

Наше соображение про нулевую производную здесь не работает, поскольку в том рассуждении функция была определена в некоторой окрестности точки x_0. Действительно, доказывая, что в точке локального минимума производная не может быть отрицательной, мы рассматривали точку справа от x_0, а доказывая, что производная не может быть положительной — рассматривали точку слева от x_0. Сейчас же мы не можем рассматривать точки левее x_0 и правее x_1, потому что в них функция не определена.

Задача 5

Нарисуйте график функции $f(x) = -x^2$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, но функция достигает не минимума, а максимума.

Нарисуйте график функции $f(x) = x^3$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, но функция не достигает ни минимума, ни максимума. В таком случае точка x_0 называется *точкой перегиба.*

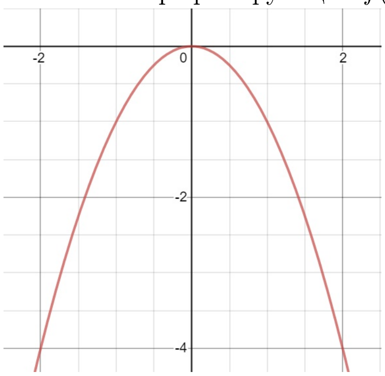
Нарисуйте график функции $f(x) = |x|$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ функция достигает минимума, но производная функции f в точке 0 не определена.

Приняв во внимание эти три примера и пример из предыдущей задачи, сформулируйте, как связаны утверждения «f достигает в x_0 локального минимума» и «производная f равна нулю в точке x_0». Обсудите это с преподавателем.

Мы советуем заранее сформулировать и записать ваше утверждение.

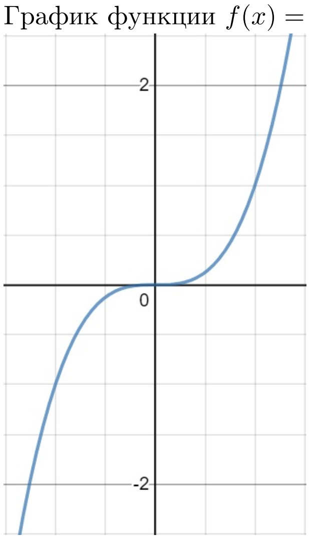
Подсказка. Производные первых двух функций считаются с использованием стандартных формул. То, что производная третьей функции не существует, доказывается от противного, то есть надо предположить, что она существует, и найти противоречие.

Решение. График функции $f(x) = -x^2$:



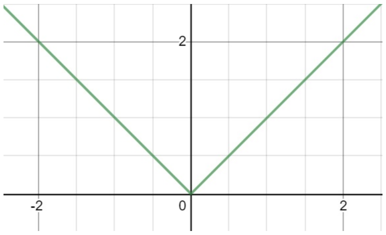
Производная функции равна $f'(x) = (-x^2)' = -2x$ и действительно $f'(x_0) = f'(0) = -2 \cdot 0 = 0$. Функция достигает максимума в точке $x_0 = 0$, поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) \leq f(x_0)$, ведь $-x^2 \leq 0$.

График функции $f(x) = x^3$:



Производная функции равна $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ и $f'(x_0) = f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Объясним, почему в нуле функция не достигает ни минимума, ни максимума. Если мы рассмотрим точку $x_1 \geq x_0 = 0$, то $f(x_1) \geq f(x_0)$, ведь для неотрицательных чисел x_1 верно $x_1^3 \geq 0$. Теперь рассмотрим точку $x_2 \leq x_0 = 0$, тогда $f(x_2) \leq f(x_0)$, ведь для неположительных чисел x_2 верно $x_2^3 \leq 0$. Итак, мы получили неравенства $f(x_1) \geq f(x_0)$ и $f(x_2) \leq f(x_0)$, но они не могут выполняться одновременно, если x_0 — точка минимума или максимума.

График функции $f(x) = |x|$:



Функция достигает минимума в точке $x_0 = 0$, потому что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) \geq f(x_0)$, ведь $|x| \geq 0$.

Проверим, что производная функции f в точке $x_0 = 0$ не определена. Предположим, что производная $f'(x_0)$ всё же существует и попробуем прийти к противоречию. Вспомним определение производной: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. В нашем случае $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Отношение $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ равно 1, если $\Delta x > 0$, и равно -1, если $\Delta x < 0$, такую функцию часто обозначают $\operatorname{sgn}(\Delta x)$ — знак Δx. Итак, мы получили, что должен существовать предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sgn}(\Delta x)$. По определению предела функции для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq 0$ для любого n и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, должен существовать предел $\lim\limits_{n \to \infty} sgn(x_n)$. Рассмотрим в качестве $\{x_n\}$ такую последовательность: $\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\}$. Тогда последовательность $\{\operatorname{sgn}(x_n)\}$ имеет вид $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$. Но у такой последовательности нет предела. Мы получили противоречие, значит, наше предположение о том, что производная $f'(x_0)$ существует, было неверным.

Решим теперь вопрос, как же связаны утверждения «f достигает в x_0 локального минимума» и «производная f равна нулю в точке x_0». Как мы поняли по примерам из этой и предыдущей задач, мы не можем сказать, что из одного из этих утверждений будет следовать другое.

А вот если выполнены <u>все</u> три условия:

$$\begin{cases} \text{1. } f \text{ достигает в } x_0 \text{ локального минимума,} \\ \text{2. } f \text{ определена в некоторой окрестности точки } x_0 \text{ (другими словами, } x_0 \text{ не лежит} \\ \text{на границе области определения функции } f\text{),} \\ \text{3. производная } f \text{ в точке } x_0 \text{ существует,} \end{cases}$$

то производная f равна нулю в точке x_0.

Далее, из того, что производная f равна нулю в точке x_0 могут следовать следующие утверждения:

$$\left[\begin{array}{l} \text{1. } f \text{ достигает в } x_0 \text{ локального минимума,} \\ \text{2. } f \text{ достигает в } x_0 \text{ локального максимума,} \\ \text{3. } f \text{ является точкой перегиба.} \end{array}\right.$$

Квадратная скобочка здесь означает, что будет выполнено хотя бы одно из трёх утверждений. По определению точка перегиба не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума, так что если выполнено утверждение 3, то ни 1, ни 2 неверны. А вот 1 и 2 могут выполняться одновременно, например, если функция постоянна: $f(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$. Тогда любая точка $x_0 \in \mathbb{R}$ будет являться и точкой локального минимума, и точкой локального максимума f.

Задача 6

Найдите нули производных следующих функций:

1. $x^2 - 6x + 10$ на $\mathbb{R}$,
2. $x^4 - 2x^2 + 8$ на $\mathbb{R}$,
3. $x \ln(x)$ на луче $[\frac{1}{1024}, +\infty)$.

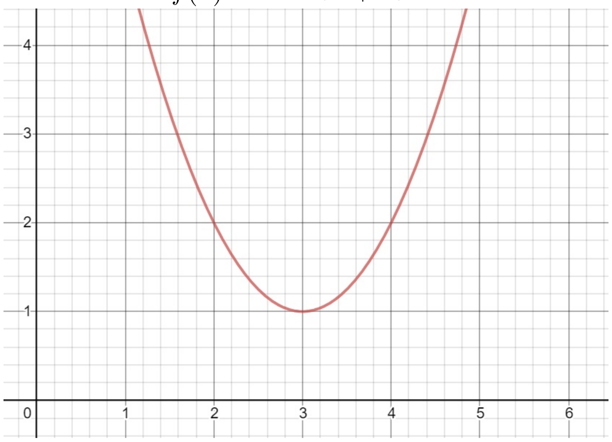
Как мы уже знаем, если в точке производная обращается в ноль, то это ещё не значит, что это точка локального минимума. Например, это может быть точка локального максимума. Мы не научили вас методам, которые позволяют во всех случаях отличать локальные минимумы от локальных максимумов и других случаев. Тем не менее, иногда по поведению функции можно понять, что найденная точка – локальный минимум (например, так мы сделали для $f(x) = x^2$).

Попробуйте найти все локальные и глобальные минимумы этих функций, при условии, что мы гарантируем вам, что у каждой из этих функций есть хотя бы один глобальный минимум.

Для решения этой задачи будет полезно попробовать порисовать графики и найти производные соответствующих функций.

Подсказка. Есть в тексте вопроса.

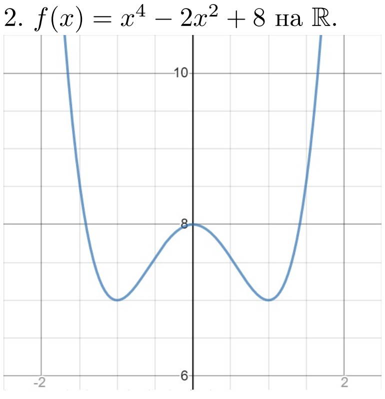
Решение. 1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$ на $\mathbb{R}$.



Вычисляем производную: $f'(x) = (x^2 - 6x + 10)' = (x^2)' - (6x)' + (10)' = 2x - 6 + 0 = 2x - 6$. Заметим, что и функция, и производная определены на всём $\mathbb{R}$. $f'(x)$ обращается в ноль в точке $x_0 = 3$. Во всех остальных точках производная не равна нулю, так что эти точки не могут быть точками локального минимума. Проверим, что $x_0 = 3$ — точка локального минимума. А именно, попробуем представить нашу функцию при помощи квадрата некоторого выражения: $f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x-3)^2 + 1 \geq 1 = f(3) = f(x_0)$. Итого мы получили, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) \geq f(x_0)$, следовательно, $x_0 = 3$ — точка глобального минимума функции $f(x)$, а значит, и точка локального минимума.

Можно было решать задачу и с использованием дополнительного материала: а именно, на $(-\infty, 3)$ производная будет отрицательна, значит, функция будет убывать; на $(3, +\infty)$ производная будет положительна, и значит, функция будет возрастать. Тогда точка $x_0 = 3$ будет точкой минимума.

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8$ на $\mathbb{R}$.



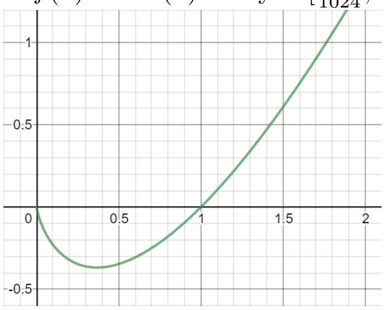
Вычисляем производную: $f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 8)' = (x^4)' - (2x^2)' + (8)' = 4x^3 - 2 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 4x$. Заметим, что и функция, и производная определены на всём $\mathbb{R}$. $f'(x)$ обращается в ноль в точках, где $4x^3 - 4x = 0$, или, равносильно, $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. Итого, производная равна нулю в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Во всех остальных точках производная не равна нулю, так что эти точки не могут быть точками локального минимума.

Преобразуем нашу функцию: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8 = (x^4 - 2x^2 + 1) + 7 = (x^2 - 1)^2 + 7 \geq 7$, причём равенство достигается при $x = x_1 = 1$ и $x = x_2 = -1$. Итого, для всех $x \in \mathbb{R}$ мы получили, что $f(x) \geq f(x_1)$ и $f(x) \geq f(x_2)$, значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ — две точки глобального минимума функции $f(x)$, а значит, и точки локального минимума.

Покажем, что $x_0 = 0$ не является точкой локального минимума. Заметим, что при $x^2 \leq 2$ будет выполнено: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8 = x^2(x^2-2) + 8 \leq 8 = f(0) = f(x_0)$. То есть для $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ будет выполнено $f(x) \leq f(x_0)$. Таким образом, мы нашли такую окрестность точки x_0, что в ней $f(x) \leq f(x_0)$, а значит, x_0 будет точкой локального максимума.

Аналогично первому пункту, задачу можно было делать и по-другому: производная функции имеет положительный знак на $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ и, следовательно, возрастает на этих участках; производная функции имеет отрицательный знак на $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ и, следовательно, убывает на этих участках. Посчитав, что $f(-1) = f(1)$, мы получаем, что обе эти точки являются точками глобального минимума.

3. $f(x) = x\ln(x)$ на луче $[\frac{1}{1024}, +\infty)$.



Вычисляем производную: $f'(x) = (x\ln(x))' = (x)' \cdot \ln(x) + x \cdot (\ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$. В отличие от предыдущих задач, функция и её производная определены на луче $[\frac{1}{1024}, +\infty)$, поэтому нужно не забыть, что точка на границе этого луча — $x_0 = \frac{1}{1024}$ — может являться точкой локального минимума или максимума.

Найдём, где $f'(x)$ обращается в ноль: $\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Итого, наши кандидаты на роль точки локального минимума — это точки $x_0 = \frac{1}{1024}$ и $x_1 = \frac{1}{e}$.

По графику мы видим, что $x_1 = \frac{1}{e}$ является точкой локального минимума. (Мы не стали так же как в прошлых пунктах подробно расписывать обоснование, потому что здесь оно сложнее.)

Как и ранее, можно было решать и другим способом: через знаки производной. В нашем случае на $(\frac{1}{1024}, \frac{1}{e})$ производная отрицательна и функция убывает; на $(\frac{1}{e}, +\infty)$ производная положительна и функция возрастает. Значит, $x_1 = \frac{1}{e}$ — точка глобального минимума. Точка $x_0 = \frac{1}{1024}$ же будет точкой локального максимума. Это можно объяснить так: рассмотрим функцию $g(x) = x\ln(x)$, определённую, например, на $(\frac{1}{2000}, +\infty)$. Тогда на $[\frac{1}{1024}, +\infty)$ функции $g(x)$ и $f(x)$ будут совпадать. Производная $g'(x)$ будет отрицательна на $(\frac{1}{2000}, \frac{1}{e})$, тогда и функция будет убывать на этом же интервале. Но тогда $g(x_0) = g(\frac{1}{1024}) \geq g(x)$ для всех $x \in [\frac{1}{1024}, \frac{1}{e})$. Но тогда и $f(x_0) \geq f(x)$ для x из того же интервала.