Математика для Data Science. Математический анализ. Решения задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

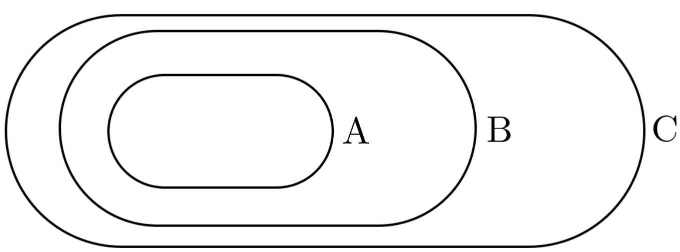
1.6 Множества

Задача 1

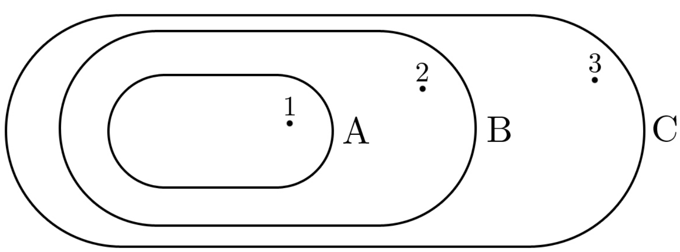
Нарисуйте диаграмму Эйлера для трёх множеств $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3\}$.

Подсказка. Множества образуют цепочку вложенных множеств (одно внутри другого).

Решение. Диаграмма Эйлера для множеств $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3\}$ будет выглядеть так:



Если заполнить её элементами, будет выглядеть вот так:



1.7 How-to по доказательствам и функции

Задача 1

В одном из предыдущих шагов мы выяснили, что:

- $\forall x \exists y$: $x + y = 0$,
- $\exists x \forall y$: $y + x = y$.

Убедитесь, что порядок кванторов в утверждении важен: поменяйте их местами в утверждениях выше и проверьте, останутся ли они истинными.

Подсказка. Доказать, что утверждение неверно, можно, предположив, что оно всё же верно и придя к противоречию.

Решение.

- Докажем, что поменять местами кванторы в первом утверждении нельзя. Допустим, утверждение $\exists y\ \forall x : x + y = 0$ верно. Тогда y — какое-то конкретное число, а в качестве x можно брать любые числа. Пусть $x_1 \neq x_2$ — два произвольных различных числа. Тогда должно быть выполнено, что $x_1 + y = 0$ и что $x_2 + y = 0$. Но тогда, вычитая из первого равенства второе, мы получаем, что $x_1 = x_2$, чего не может быть, ведь мы взяли разные x_1 и x_2.
- Теперь докажем, что во втором утверждении поменять местами кванторы можно. А именно, что $\forall y\ \exists x$: $y + x = y$ верно. Действительно, для всех y нам подойдёт всё то же значение $x = 0$. Обычно когда кванторы идут в порядке $\forall y\ \exists x$, то x зависит от y, а у нас получилось, что не зависит, потому что было выполнено более сильное утверждение $\exists x \forall y$: $y + x = y$.

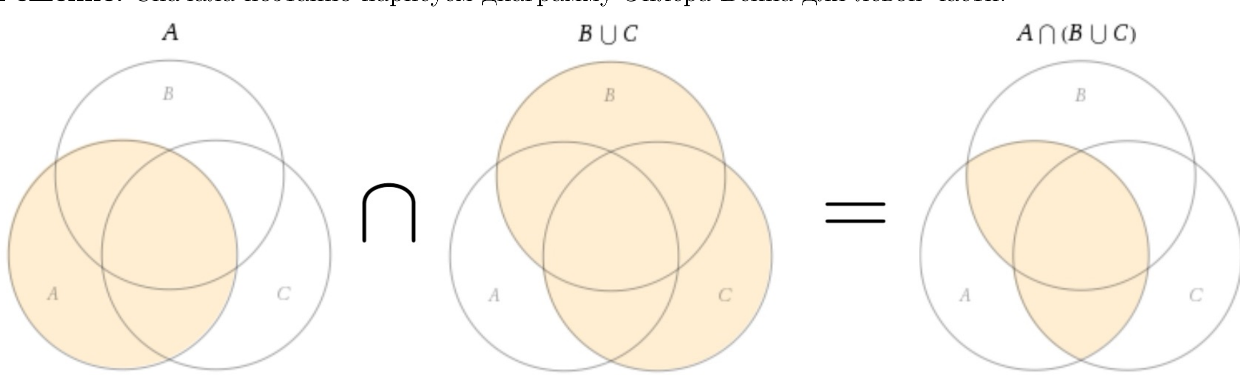
Задача 2

Докажите, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

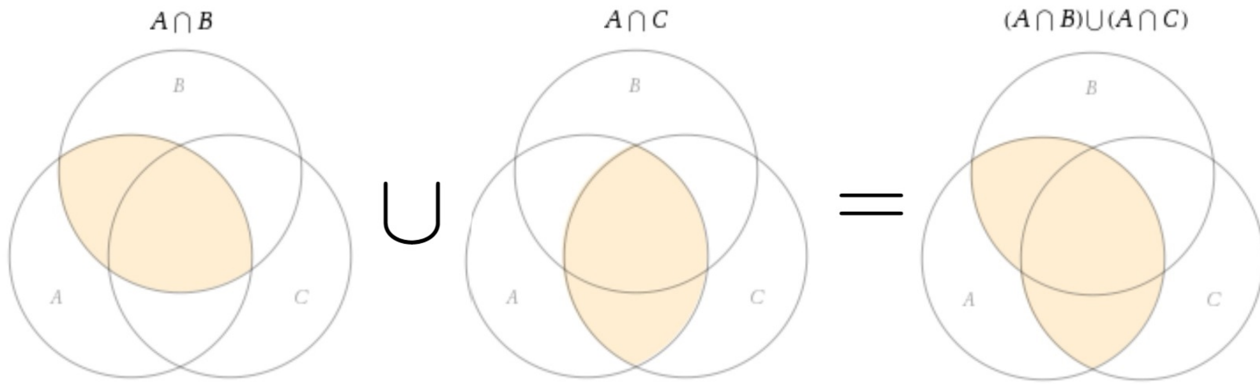
Рекомендуем первым делом нарисовать диаграмму Эйлера-Венна, а потом приступать к строгому доказательству. В доказательстве можете ограничиться первой частью, то есть доказательством того, что $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Вторую часть мы попросим вас доказать чуть дальше, когда разберём метод от противного.

Подсказка. Задача делается аналогично разобранной на 7 шаге этого урока.

Решение. Сначала поэтапно нарисуем диаграмму Эйлера-Венна для левой части:



И для правой части:



Видим, что множества действительно совпадают.

Докажем, что $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. То есть покажем, что если $x \in A \cap (B \cup C)$, то тогда и $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Итак, если $x \in A \cap (B \cup C)$, то $x \in A$ и ($x \in B$ или $x \in C$). Значит, возможны два случая:

1. $x \in A$ и $x \in B$. Тогда $x \in A \cap B$.

2. $x \in A$ и $x \in C$. Тогда $x \in A \cap C$.

Хотя бы одно из условий $x \in A \cap B$ и $x \in A \cap C$ обязательно будет выполнено, значит, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Задача 3

Вернёмся к равенству $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. В одной из предыдущих задач мы попросили вас доказать, что $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. В этой задаче докажите методом от противного, что $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, завершая тем самым доказательство равенства.

Подсказка. Задача делается аналогично разобранной на седьмом шаге этого урока.

Решение. Мы хотим доказать, что если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то $x \in A \cap (B \cup C)$. Предположим противное: то есть, пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и при этом $x \notin A \cap (B \cup C)$.

Построим отрицание: $\neg(x \in A \cap (B \cup C)) = \neg(x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C)) = \neg(x \in A)$ или $\neg(x \in\ B$ или $x \in\ C) =$ $x \notin A$ или ($x \notin B$ и $x \notin C$). Итак, у нас возможны два случая:

1. $x \notin A$. Но тогда x не принадлежит ни $A \cap B$, ни $A \cap C$, а значит, не принадлежит $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. $x \notin B$ и $x \notin C$. Но тогда x не может принадлежать ни $A \cap B$, ни $A \cap C$, тогда $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

В обоих случаях мы получили, что не выполнено $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. То есть наше изначальное предположение было неверно. Другими словами, мы получили противоречие.