Математика для Data Science. Линейная алгебра.
Решения задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

Определитель

Задача 1

Докажите, что если в матрице есть нулевой столбец, то определитель матрицы равен 0.

Подсказка. Обозначьте определитель за d. Домножьте нулевой столбец на 2 — какое равенство на d можно тогда записать?

Решение. Пусть в матрице A есть нулевой столбец, то есть её столбцы имеют вид $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{0}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$. Пусть $d = \det A$. Тогда по свойству определителя $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, 2 \cdot \vec{0}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) = 2 \det A$. С другой стороны, $2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, поэтому $2 \det A = \det A$, или, равносильно $2d = d$, то есть $d = 0$. То есть $\det A = 0$.

Задача 2

Свойства 2 и 4 обычно объединяют в одно свойство: линейность по столбцам. То есть для всех $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{c}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n)$$

Докажите, что это действительно следует из свойств с предыдущих шагов.

Подсказка. Свойства 2 и 4 показывают, что происходит с определителем, если столбец получен сложением двух столбцов или умножением одного столбца на число соответственно.

Решение. Напомним свойства:

2. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \lambda\vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$

4. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, тогда для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{c}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$

Из свойства 4 следует, что

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \lambda\vec{b}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \mu\vec{c}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n)$$

Далее, по свойству 2

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \lambda\vec{b}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \mu\vec{c}, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) =$$

$$= \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{c}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$

Задача 3

В конце предыдущей недели вы изучили метод Гаусса. С его помощью можно искать и определитель матриц! В этой задаче мы разберемся, как будет меняться определитель при элементарных преобразованиях столбцов матрицы:

1. Перестановка местами любых двух столбцов матрицы.
2. Прибавление к любому столбцу матрицы другого столбца, умноженного на некоторую константу.

Как мы знаем из определения, при первом преобразовании определитель поменяет знак. Докажите, что второе преобразование не меняет определитель.

Подсказка. Докажите, что определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен 0.
Как изменится определитель, если поменять одинаковые столбцы местами?

Решение. Пусть мы к i-ому столбцу матрицы A прибавляем j-ый столбец, умноженный на λ. Тогда по линейности определителя

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i + \lambda\vec{a}_j, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n) + \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{i+1} \ldots, \vec{a}_n)$$

Здесь первое слагаемое равно $\det A$, а во втором слагаемом считается определитель матрицы, у которой совпадают i-ый и j-ый столбцы. Остаётся доказать, что определитель такой матрицы равен нулю. А это следует из свойства определителя: поменяем местами i-ый и j-ый столбцы, знак определителя при этом должен поменяться, но так как матрица останется той же самой, то определитель может быть только нулём.

Задача 4

Докажите, что если столбцы матрицы линейно зависимы (то есть матрица имеет не полный ранг), то её определитель равен 0.

Подсказка. К какой матрице приведёт метод Гаусса, применённый к матрице неполного ранга?

Решение. В предыдущей задаче мы доказали, что при элементарных преобразованиях столбцов определитель может только поменять знак. Как мы доказывали на прошлой неделе, если векторы-столбцы матрицы линейно зависимы, то метод Гаусса приведёт к матрице с хотя бы одним нулевым столбцом. В первой задаче этой недели мы доказали, что у такой матрицы определитель равняется нулю. Значит, у изначальной матрицы он тоже будет нулём.

Переход в другой базис и обратная матрица

Задача 1

Рассмотрим базис g в $\mathbb{R}^n$ из векторов $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ \vdots \\ g_{1n} \end{pmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2n} \end{pmatrix}, \ldots \vec{g}_n = \begin{pmatrix} g_{n1} \\ g_{n2} \\ \vdots \\ g_{nn} \end{pmatrix}$.

Покажите, что G — матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса g, является матрицей перехода от базиса g к стандартному.

То есть, если $(v_1^g, v_2^g, \ldots, v_n^g)$ — координаты вектора $\vec{v}$ в базисе g, то его координаты в стандартном базисе — это $G \begin{pmatrix} v_1^g \\ v_2^g \\ \vdots \\ v_n^g \end{pmatrix}$.

Подсказка. Распишите по определению, что значит "$(v_1^g, v_2^g, \ldots, v_n^g)$ — координаты вектора $\vec{v}$ в базисе g"

Решение. Если $(v_1^g, v_2^g, \ldots, v_n^g)$ — координаты вектора $\vec{v}$ в базисе g, то

$$\vec{v} = v_1^g\vec{g}_1 + v_2^g\vec{g}_2 + \cdots + v_n^g\vec{g}_n = v_1^g \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ \vdots \\ g_{1n} \end{pmatrix} + v_2^g \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2n} \end{pmatrix} + \cdots + v_n^g \begin{pmatrix} g_{n1} \\ g_{n2} \\ \vdots \\ g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^g \\ v_2^g \\ \vdots \\ v_n^g \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1^g \\ v_2^g \\ \vdots \\ v_n^g \end{pmatrix}$$

Задача 2

Докажите, что матрица перехода обязательно имеет полный ранг. Тут пригодится метод от противного.

Подсказка. Покажите, что если матрица A имеет неполный ранг, то найдётся вектор, который в одном базисе не равен $\vec{0}$, а в другом базисе равен $\vec{0}$.

Решение. Будем доказывать от противного. А именно, пусть у матрицы перехода A неполный ранг. Тогда её столбцы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. То есть найдутся такие числа $v_1, \dots, v_n$, что $v_1\vec{a}_1 + \dots + v_n\vec{a}_n = \vec{0}$ и хотя бы один $v_i \neq 0$. То есть если рассмотреть вектор $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n)$ (координаты в изначальном базисе), то $A\vec{v} = \vec{0}$. Но $A\vec{0}$ тоже равно $\vec{0}$, значит, в новом базисе разные векторы ($\vec{v}$ и $\vec{0}$) имеют одни и те же координаты, что невозможно. Итак, наше предположение было неверно и, значит, у матрицы перехода должен быть полный ранг.

Задача 3

Докажем, что элементарному преобразованию "поменять местами строки i и j" соответствует умножение слева на некоторую матрицу.

Задача. Даны натуральные числа i и j (не большие n). Докажите, что существует матрица M размера $n \times n$ со следующим свойством. У любой матрицы A размера $n \times n$ в результате домножения слева на M меняются местами i-ая и j-ая строки. То есть MA это матрица, полученная из A перестановкой i-ой и j-ой строк

Решение. Матрица M — это единичная матрица, у которой единицы с мест (i, i) и (j, j) перешли на места (i, j) и (j, i).

Например, умножение слева на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ поменяет местами первую и третью строку у любой матрицы 5 на 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Задача 4

Докажем, что элементарному преобразованию "прибавить к одной строке другую строку, умноженную на число" соответствует умножение слева на некоторую матрицу.

Задача. Даны натуральные числа i и j (не большие n), и действительное число $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что существует матрица M размера $n \times n$ со следующим свойством. У любой матрицы A размера $n \times n$ в результате домножения слева на M к i-ой строке прибавляется j-ая строка, умноженная на c. То есть MA это матрица, полученная из A прибавлением к i-ой строке j-ой строки, умноженной на c.

Решение. Заметим, что умножение матрицы A слева на матрицу E_{ij}, где на месте (i, j) стоит единица, а на всех остальных — нули, даёт матрицу, на i-ой строке которой стоит j-ая строка матрицы A, а на всех остальных местах — нули.

Например: $E_{23}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Итак, $E_{ij}A$ — это матрица из почти всех нулей, кроме i-ой строки, которая равна j-ой строке матрицы A. cE_{ij} ещё и домножит эту строку на c. Поэтому в нашей задаче $M = E + cE_{ij}$. То есть это матрица, на диагонали которой стоят единицы, на месте (i, j) — число c, а на всех остальных местах нули.

Задача 5

Докажем, что элементарному преобразованию "умножить строку на ненулевое число" соответствует умножение слева на некоторую матрицу.

Задача. Даны натуральное число i (не большее n) и действительное число $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Докажите, что существует матрица M размера $n \times n$ со следующим свойством. У любой матрицы A размера $n \times n$ в результате домножения слева на M строка номер i умножается на c. То есть MA это матрица, полученная из A умножением i-ой строки на c.

Решение. M — это диагональная матрица, у которой все элементы на диагонали равны единицы, кроме i-ого, который равен c.

Рассмотрим на примере матрицы 3 на 3:
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ca_{31}&ca_{32}&ca_{33}\end{pmatrix}$$

Длина, углы и скалярное произведение

Задача 1

Является ли длина линейной функцией? Другими словами, является ли функция длины линейным отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$?

Подсказка. Проверьте условия линейности отображения.

Решение. Нет, длина не является линейныйм отображением. Докажем, что не выполняется первое условие линейности: то есть найдутся $\vec{x}, \vec{y}$, что $||\vec{x}+\vec{y}|| \neq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$. Например, можно взять $\vec{x} = (1, 0)$, $\vec{y} = (0, 1)$. Тогда $||\vec{x}+\vec{y}|| = \sqrt{2}$, но $||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| = 1 + 1 = 2$.

Задача 2

В этой задаче мы докажем несколько простых, но полезных свойств скалярного произведения. Для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$:

1. Докажите, что $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$. То есть скалярное произведение коммутативно.
2. Докажите, что $\langle c\vec{x}, \vec{y} \rangle = c\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ для любого $c \in \mathbb{R}$. То есть скалярное произведение хорошо себя ведёт с умножением на число.

Подсказка. В этой задаче нужно расписать скалярное произведение по определению (как сумму покоординатных произведений).

Решение. Пусть $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ — произвольные фиксированные векторы. Тогда

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.
2. $\langle c\vec{x}, \vec{y} \rangle = (cx_1)y_1 + (cx_2)y_2 + \dots + (cx_n)y_n = c(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = c\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Задача 3

1. Докажите, что для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T\vec{y}$. В левой части равенства стоит скалярное произведение. А в правой части равенства стоит произведение матриц размера 1 на n и n на 1, то есть произведение строки и столбца.
2. Докажите, что для любого линейного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно найти вектор $\vec{a}$, такой что $f(\vec{x}) = \langle \vec{a},\ \vec{x} \rangle$. То есть функция "возьмите скалярное произведение с вектором $\vec{a}$" является линейной, и любая линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ имеет такой вид.

Решение.

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T\vec{y}$.

2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольное линейное отображение. Тогда, как мы выяснили на первой неделе $f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $a_i = f(\vec{e}_i)$. Итак, $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$.

Задача 4

Для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$:

1. Докажите, что $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$. То есть скалярное произведение хорошо себя ведёт с суммой.
2. Используя предыдущий пункт, докажите, что $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = ||x||^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + ||y||^2$. Переформулировать это можно так:

$$2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ||\vec{x} + \vec{y}||^2 - ||x||^2 - ||y||^2,$$

или, что то же самое

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{||\vec{x} + \vec{y}||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}.$$

Это утверждение будет нам очень полезно на следующих шагах.

Решение.

1. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \cdots + (x_n + y_n)z_n = x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n + y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
2. $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = ||x||^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + ||y||^2$. Здесь мы несколько раз воспользовались тем, что для любого $\vec{z}$ выполнено $||\vec{z}||^2 = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle$, а также пунктом 1 этой задачи и пунктом 1 задачи 2.

Задача 5

На этом шаге мы докажем самые часто используемые свойства скалярного произведения.

1. Докажите, что $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ если и только если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны.
2. Докажите, что все $\vec{e}_i$ ортогональны друг другу.

Получается, что скалярное произведение даёт удобный способ проверять, перпендикулярны векторы или нет.

Подсказка. Воспользуйтесь теоремой Пифагора для векторов и пунктом 2 предыдущей задачи.

Решение.

1. По теореме Пифагора векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны если и только если $||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x} - \vec{y}||^2$. Это в свою очередь равносильно $||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + ||\vec{y}||^2 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.
2. Пусть $i \neq j$. Тогда $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$, следовательно, по предыдущему пункту они ортогональны.

Задача 6

Теорема Пифагора говорит о прямых углах. Обобщение (и в то же время следствие) теоремы Пифагора это теорема косинусов, которая говорит о произвольных углах. Мы обсудили, как скалярное произведение связано с прямыми углами. Давайте посмотрим, как скалярное произведение связано с произвольными углами.

1. Докажите, что $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \cos \alpha \cdot ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$, где α это угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.
2. Докажите, что скалярное произведение двух векторов единичной длины равно косинусу угла между ними.

Получается, что скалярное произведение даёт удобный способ находить косинус угла между векторами. Это уже очень нетривиальное свойство. Действительно, пусть нам дали два вектора из $\mathbb{R}^{100}$. Как найти косинус угла между ними, не используя теорему косинусов и скалярное произведение? Как хотя бы подступиться к этой задаче? Это риторические вопросы, мы просто хотели обратить внимание, что задача нахождения косинуса между векторами в $\mathbb{R}^{100}$ выглядит не очень просто.

Подсказка. Воспользуйтесь теоремой косинусов для векторов и пунктом второй устной задачи этого урока.

Решение.

1. По теореме косинусов $||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha$. При этом из четвёртого пункта второй устной задачи следует, что $||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.

   Итак, $||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha$. Когда мы сократим $||\vec{x}||^2$ и $||\vec{y}||^2$ и поделим обе части равенства на -2, получим $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha$, что и требовалось.

2. В предыдущем пункте мы доказали, что скалярное произведение векторов равно произведению длин векторов на косинус угла между ними. Если векторы единичные, то у них единичные длины. Значит, их скалярное произведение равно косинусу угла между ними.

Ортогональные матрицы

Задача 1

Пример. Докажем, что преобразование E ортогонально. По определению E имеем $E\vec{x} = \vec{x}$. Отсюда следует, что $||E\vec{x}|| = ||\vec{x}||$. Значит, преобразование E ортогонально – оно сохраняет длину вектора.

Докажите, что преобразование, переводящее каждый вектор в противоположный, ортогонально. Найдите матрицу этого преобразования.

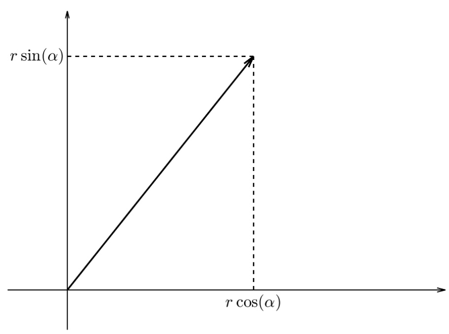
Подсказка. Проверьте, что это преобразование сохраняют длину.

Решение.Преобразование, переводящее каждый вектор в противоположный, это $-E$. Его матрица — диагональная с (-1) на диагонали. $||-E\vec{x}|| = ||-\vec{x}|| = |-1| \cdot ||\vec{x}|| = ||\vec{x}||$. Здесь мы воспользовались свойством длины: $||\alpha\vec{x}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{x}||$ для $\alpha = -1$. Итак, мы получили, что $||-E\vec{x}|| = ||\vec{x}||$, что и требовалось.

Задача 2

На этом шаге мы докажем, что поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ это ортогональное преобразование. Для этого сначала мы узнаем удобный способ интерпретировать координаты векторов из $\mathbb{R}^2$.

Задача. В $\mathbb{R}^2$ вектор длины r, направленный под углом α к оси OX, имеет координаты $\begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Докажите, что длина этого вектора действительно равна r.



В этой задаче вам поможет такая тригонометрическая формула: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
Доказывать эту формулу мы не будем.

Решение. Найдём квадрат длины вектора $\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$: $||(r\cos\alpha, r\sin\alpha)^T||^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2$, так как $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Извлекая корень, получаем, что $||(r\cos\alpha, r\sin\alpha)^T|| = r$.

Задача 3

1. Докажите, что поворот вокруг $\vec{0}$ на угол β задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Другими словами, если применить эту матрицу к вектору $\begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$, то он повернётся на угол β. То есть перейдёт в вектор $\begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что поворот вокруг $\vec{0}$ на угол β сохраняет длину вектора, то есть является ортогональным преобразованием (это очевидное следствие Пункта 1). Тем самым, матрица из Пункта 1 это ортогональная матрица.

В этой задаче вам помогут такие тригонометрические формулы:

- $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\breve{\ }\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Доказывать эти формулы мы не будем

Решение.

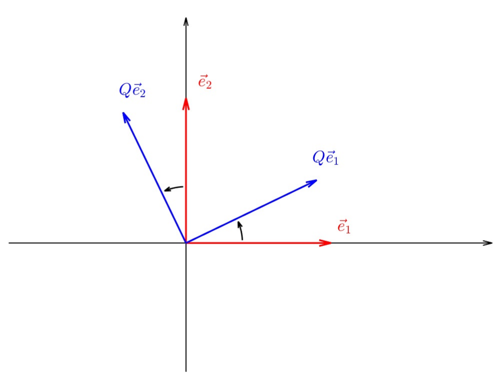
1. Перемножим матрицу и вектор: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ (что логично, ведь теперь угол между вектором и осью OX — это $\alpha+\beta$).

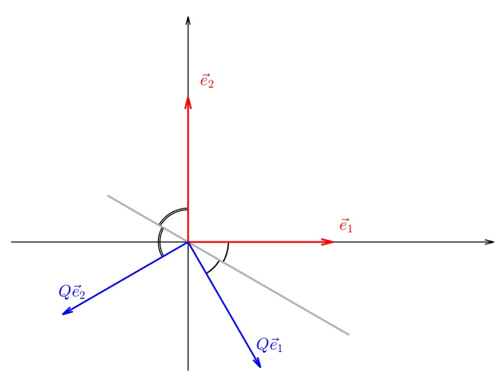
2. $||A\vec{x}||^2 = ||(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))^T||^2 = r^2\cos^2(\alpha+\beta) + r^2\sin^2(\alpha+\beta) = r^2$, то есть $||A\vec{x}|| = ||\vec{x}|| = r$. Значит, преобразование сохраняет длины.

Задача 4

1. Докажите, что в $\mathbb{R}^1$ есть ровно два ортогональных преобразования, найдите их.

2. Докажите, что ортогональное преобразование $\mathbb{R}^2$ это либо поворот, либо отражение относительно прямой, проходящей через $\vec{0}$.





В этой задаче мы не требуем от вас написания формул, здесь они не сильно добавляют понимания. Достаточно геометрической интерпретации длины, перпендикулярности, отражения относительно прямой и т.д. Вероятно, вам потребуется что-нибудь нарисовать на бумаге.

Подсказка. Пусть преобразование отображает $\vec{e}_1$ в некий вектор $\vec{x}$. В какие вектора Q может отображать вектор $\vec{e}_2$?

Решение.

1. В $\mathbb{R}^1$ один базисный вектор — e_1. Поскольку ортогональное преобразование сохраняет длины, e_1 может перейти либо в себя же, либо в $-e_1$. Первому случаю соответствует тождественное преобразование E (оно все векторы оставляет на месте), а второму — преобразование $(-E)$, которое все векторы переводит в противоположные.

2. Пусть преобразование Q отображает $\vec{e}_1$ в некий вектор $\vec{x} := Q\vec{e}_1$. Тогда, поскольку ортогональное преобразование сохраняет углы, угол между $\vec{x}$ и $Q\vec{e}_2$ должен остаться $\frac{\pi}{2}$. То есть вектор $Q\vec{e}_2$ — это единичный вектор, который получается из $\vec{x}$ поворотом на $\frac{\pi}{2}$ либо против часовой стрелки, либо по. Первый случай соответствует повороту, а второй — отражению.

Задача 5

Это самая важная задача этого урока. В ней мы докажем, что если Q – ортогональное преобразование, то выполнено

$$Q^T Q = E.$$

Посмотрим на векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$. Их длины равны 1, и любые два из них ортогональны друг другу. На языке формул это можно записать так:

- $||e_i|| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1$ для всех i
- $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ для любых $i \neq j$

Ортогональное преобразование сохраняет длину и скалярное произведение. В частности, оно переводит ортогональные векторы в ортогональные. Значит, ортогональное преобразование Q переводит $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $Q\vec{e}_1, \ldots, Q\vec{e}_n$, которые тоже имеют длину 1 и попарно ортогональны.

Докажите, что $Q^T Q = E$.

Подсказка.

1. Посмотрите, чему отвечает j-ый столбец Q.
2. Посмотрите, чему отвечает i-ая строка Q^T.
3. Придумайте, как интерпретировать коэффициент матрицы $Q^T Q$, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.

Решение. Чтобы доказать, что $Q^T Q = E$, мы покажем, что на месте (i, j) в матрице $Q^T Q$ будет стоять единица, если $i = j$, и ноль, если $i \neq j$.

Итак, по правилу умножения матриц на месте (i, j) в матрице $Q^T Q$ стоит произведение i-ой строки матрицы Q^T на j-ый столбец матрицы Q. Вспоминая определение транспонирования, понимаем, что i-ая строка матрицы Q^T — это то же самое, что i-ый столбец матрицы Q. Итак, мы рассматриваем скалярное произведение i-ого столбца матрицы Q на j-ый столбец матрицы Q.

Как мы прошли в задаче первой недели, i-ый столбец матрицы Q — это $Q\vec{e}_i$. То есть наша цель — разобраться с $\langle Q\vec{e}_i, Q\vec{e}_j \rangle$. А, как поясняется в тексте задачи, $Q\vec{e}_i$ и $Q\vec{e}_j$ ортогональны ($\langle Q\vec{e}_i, Q\vec{e}_i \rangle = 0$), если $i \neq j$. Если же $i = j$, то $\langle Q\vec{e}_i, Q\vec{e}_i \rangle = ||Q\vec{e}_i||^2 = 1$. Ура, мы получили то, что хотели доказать!

Задача 6

Ранее мы определили ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, но не доказали, что он действительно является базисом. Докажем это сейчас.

1. Дан набор ненулевых векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$. Известно, что эти векторы попарно ортогональны. Докажите, что этот набор линейно независим.
2. Докажите, что ортонормированный базис действительно является базисом.

Ясно, что трудный пункт – пункт 1, а пункты 2 и 3 это несложные следствия пункта 1.

Заметим, что на уровне геометрической интуиции пункт 1 очевиден. Действительно, раз вектор $\vec{a}_i$ перпендикулярен остальным векторам набора, то его нельзя выразить через остальные вектора набора. Но мы всё же просим доказать это строго.

Подсказка. Вспомните, что, если векторы линейно зависимы, то хотя бы один из них выражается через остальные.

Решение.

1. Будем доказывать от противного. Пусть векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Тогда, как мы обсуждали на второй неделе, хотя бы один из векторов представляется в виде линейной комбинации оставшихся векторов. Будем считать, что $\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$. При этом, поскольку векторы ненулевые, хотя бы один из коэффициентов должен быть ненулевым. Будем считать, что $\lambda_2 \neq 0$. Далее, поскольку векторы попарно ортогональны, $0 = \langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle = \langle\lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n, \vec{a}_2\rangle$. Поскольку скалярное произведение линейно, цепочку можно продолжить так: $0 = \lambda_2\langle\vec{a}_2, \vec{a}_2\rangle + \lambda_3\langle\vec{a}_3, \vec{a}_2\rangle + \dots + \lambda_n\langle\vec{a}_n, \vec{a}_2\rangle$. Из-за ортогональности все слагаемые, кроме первого, равны нулю. Итак, $0 = \lambda_2\langle\vec{a}_2, \vec{a}_2\rangle$. Но $\lambda_2 \neq 0$, значит, $\langle\vec{a}_2, \vec{a}_2\rangle = 0$, то есть $\vec{a}_2 = \vec{0}$. Но все векторы ненулевые — противоречие. Итого, наше изначальное предположение было неверно, то есть векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы.

2. Пусть векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ образуют ортонормированнный базис. Поскольку они попарно ортогональны, то по предыдущему пункту они лийнейно независимы. Кроме того, их ровно n, значит, они образуют базис $\mathbb{R}^n$.

Задача 7

Докажите, что композиция двух ортогональных преобразований будет ортогональным преобразованием.

Другими словами, если Q и P – ортогональные преобразования $\mathbb{R}^n$, то PQ тоже будет ортогональным преобразованием $\mathbb{R}^n$.

На уровне геометрической интуиции это верно. Преобразование Q не смещает части пространства друг относительно друга, двигает пространство целиком. Про P верно то же самое. Тогда если мы применим Q, а потом P, то в результате пространство подвигается целиком, без смещения частей пространства друг относительно друга. То есть PQ будет ортогональным преобразованием.

Пример. В $\mathbb{R}^2$ композиция поворота на угол α и поворота на угол β будет поворотом на угол $\alpha + \beta$.

Подсказка. Вопользуйтесь самым первым определением ортогональной матрицы.

Решение. По определению преобразования P и Q сохраняют длины, то есть для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $||P\vec{x}|| = ||\vec{x}||$ и $||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}||$.

Мы же хотим доказать, что $||PQ(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$. Как мы помним, произведение матриц соответствует композиции преобразований, а значит $||PQ(\vec{x})|| = ||P(Q(\vec{x}))||$. При этом $||Q(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$, следовательно, $||P(Q(\vec{x}))|| = ||\vec{x}||$.