Биномиальные коэффициенты: мотивация

Допустим, вы хотите провести A/B тест и понять, увеличивает ли вашу прибыль некоторая фича в приложении. Первый шаг — из всех пользователей сформировать две случайные непересекающиеся выборки фиксированного размера.

Пусть у вашего приложения миллион пользователей по всей России. Вы хотите сформировать две выборки размером 1000, выбирая равномерно среди всех пользователей. То есть у всех пользователей вероятность попасть в каждую из двух выборок одинаковая. После этого можно задаваться следующими вопросами:

1. Сколько существует способов это сделать?

2. Допустим, 20000 пользователей вашего приложения живут в Калуге. Какова вероятность, что хотя бы в одной из ваших выборок окажется пользователь из Калуги?

3. Допустим, 1000 ваших пользователей старше 90 лет. Какова вероятность, что в каждой из ваших выборок окажется пользователь старше 90 лет? и т.д

Заметим, что все эти вопросы крутятся вокруг числа способов выбрать некоторое подмножество из другого большего множества (возможно, с некоторыми ограничениями на выбираемое множество). Биномиальные коэффициенты помогут нам решить эти задачи. Их мы и будем изучать в этом уроке.

Пример 1

Итак, нас интересует число способов выбрать подмножество фиксированного размера из другого большего множества. Давайте посмотрим на следующую задачу.

Сколько есть способов выбрать 2 котов из множества, состоящего из 3 котов?

Пусть рассматриваемые три кота это белый, серый и рыжий.

Решение 1. Ясно, что есть ровно 3 способа выбрать двух котов из этих трёх котов. Вот эти способы:

1. Выбрать белого и серого
2. Выбрать белого и рыжего
3. Выбрать серого и рыжего

То есть ответ – есть три способа. К сожалению, такое решение сложно обобщить. Давайте попробуем решить по-другому.

Решение 2. Попробуем решить задачу комбинаторными методами, которые мы прошли на предыдущих уроках. Нам нужно выбрать пару котов. Выберем первого кота – есть 3 варианта для этого выбора. Затем выберем второго кота – есть 2 варианта для второго выбора. Итого есть $3 \cdot 2 = 6$ возможных вариантов.

Будет ли это число ответом в нашей задаче? Нет, и вот почему. Посмотрим на те шесть пар, которые мы получили (сначала мы пишем цвет первого кота, потом цвет второго кота):

1. Белый, серый
2. Белый, рыжий
3. Серый, белый
4. Серый, рыжий,
5. Рыжий, белый
6. Рыжий, серый

Почему этих пар получилось шесть, а не три (как в Решении 1)? Потому что эти пары упорядоченные. В частности, есть пара "Белый, серый" и есть пара "Серый, белый". Мы посчитали их как разные пары. Но в задаче нас спрашивали про неупорядоченные пары (в задаче ничего не говорилось о порядке среди двух выбранных котов). Поэтому пары "Белый, серый" и "Серый, белый" нужно засчитать как один способ выбрать двух котов (а не как два). Видно, что каждой неупорядоченной паре соответствуют две упорядоченные пары. Поэтому ответ в задаче это $6/2 = 3$.

Пример 2

Усложним задачу.

Сколько есть способов выбрать 3 котов из множества, состоящего из 10 котов?

Построить аналог Решения 1 из предыдущего шага будет уже сложно (нужно выписать все варианты, а их много). Поэтому будем сразу строить аналог Решения 2.

Решение. Как и раньше, попробуем решить задачу комбинаторными методами. Нам нужно выбрать трёх котов. Выберем первого кота – есть 10 вариантов для этого выбора. Затем выберем второго кота – есть 9 вариантов для второго выбора. Выберем третьего кота – есть 8 вариантов. Итого мы получили $10 \cdot 9 \cdot 8$ возможных вариантов.

Как и раньше, у нас возникла проблема – мы нашли число упорядоченных троек, а нас спрашивали про неупорядоченные тройки. Найдём, сколько упорядоченных троек соответствует одной неупорядоченной тройке.

(В прошлом примере одной неупорядоченной паре соответствовало две упорядоченные пары)

Начнём с неупорядоченной тройки. Пусть она состоит из чёрного, пятнистого и бежевого кота (мы их выписали в каком-то порядке, но считаем, что на них никакого порядка нет). Сколько можно сделать упорядоченных троек из этих котов? Другими словами, сколько есть способов раздать этим котам билеты с номерами $1, 2, 3$? Мы умеем отвечать на такие вопросы – ответ $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Вот эти шесть упорядоченных троек:

1. Чёрный, пятнистый, бежевый
2. Чёрный, бежевый, пятнистый,
3. Пятнистый, чёрный, бежевый
4. Пятнистый, бежевый, чёрный
5. Бежевый, чёрный, пятнистый,
6. Бежевый, пятнистый, чёрный.

То есть каждой неупорядоченной тройке соответствует $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ упорядоченных троек. Мы уже посчитали, что упорядоченных троек ровно $10 \cdot 9 \cdot 8$. Значит, неупорядоченных троек ровно $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Биномиальные коэффициенты – общая формула

Пусть дано множество S размера n. Найдем число способов выбрать из него подмножество размера k (мы считаем что $0 \le k \le n$).

Как и раньше, сначала посмотрим на упорядоченные наборы из k элементов. Упорядоченных наборов длины k из различных элементов множества S ровно $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)$. Потому что есть n вариантов для первого элемента, $(n-1)$ вариант для второго, $\ldots$, $(n-k+1)$ вариантов для k-ого элемента.

Пусть A это любое подмножество S, такое что в A ровно k элементов. Сколько упорядоченных наборов соответствует A? Ясно, что ровно $k!$ наборов. Потому что есть ровно $k!$ способов упорядочить элементы A. Другими словами, есть ровно $k!$ способов раздать элементам A билеты с номерами от 1 до k (так чтобы каждому элементу A достался один билет).

Пример. На прошлом шаге мы показали, что есть $3! = 6$ способов упорядочить подмножество из трёх котов.

Тем самым, каждому подмножеству размера k соответствует $k!$ упорядоченных наборов. Упорядоченных наборов всего столько:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1).$$

Значит, подмножеств размера k в $k!$ раз меньше, то есть столько:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!}.$$

Это и есть искомый ответ.

Пример 1. Подставим в формулу $n = 3$ и $k = 2$, и получим результат из примера с предпоследнего шага: $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$

Пример 2. Подставим в формулу $n = 10$ и $k = 3$, и получим результат из примера с последнего шага: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Более красивая запись

В выражении $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!}$ домножим и числитель и знаменатель на $(n-k)!$ и получим более короткую запись того же выражения:

$$\frac{n \ \cdot \ldots (n-k+1)}{k!} = \frac{n \ \cdot \ldots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \ \cdot \ldots (n-k+1) \cdot ((n-k) \ \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1)}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Итак, число способов выбрать подмножество размера k из множества размера n равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Биномиальные коэффициенты – определение

Определение. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначается $\binom{n}{k}$ и читается "n по k". Определено для целых неотрицательных n и k таких, что $n \geqslant k$. Все числа такого вида называются *биномиальными коэффициентами*.

Почему это числа называются "биномиальные коэффициенты" мы объясним чуть позже в этом уроке.

Комментарий. В русскоязычной литературе также используется обозначение C_n^k (цэ из n по k), но оно постепенно выходит из употребления, поэтому мы будем использовать $\binom{n}{k}$.

Ясно, что мы хотим, чтобы выполнялось равенство $1 = \binom{n}{n}$ (есть ровно один способ выбрать подмножество размера n из множества размера n). Аналогично, мы хотим, чтобы выполнялось равенство $1 = \binom{n}{0}$ (есть ровно один способ выбрать пустое подмножество из множества размера n). Поэтому естественно договориться, что $0! := 1$ – тогда мы можем использовать наши формулы с факториалами:

- $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1,$
- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$

Выберите все подходящие ответы из списка

$\binom{178}{0} = 0$

$\binom{7}{4} = 35$

$\binom{30}{2} = 870$

$\binom{1000}{1000} = 1$

Пусть в коробке 25 разноцветных пуговиц. Сколько всего способов выбрать из этой коробки 2 пуговицы?

Введите численный ответ

Введите число

Перестановки

Давайте познакомимся с понятием *перестановок*. На самом деле, мы уже много раз пользовались этим понятием, просто не называли его так. Так что в этом шаге мы ничего концептуально нового не узнаем, а только научимся использовать название "перестановки".

Определение. *Перестановка* чисел от 1 до k – это некоторая упорядоченная последовательность чисел от 1 до k, где каждое число встречается ровно один раз.

Обозначение. Перестановки мы будем записывать так: внутри круглых скобок будем писать упорядоченную последовательность из предыдущего определения. Иногда можно встретить и другие способы записи перестановок, но мы будем использовать именно такой.

Пример 1. Существует всего две перестановки чисел $\{1, 2\}$ – это $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Пример 2. А вот для чисел $\{1, 2, 3\}$ перестановок уже шесть: $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$.

Ясно, что всего перестановок чисел от 1 до k ровно $k!$. Можно считать, что числа от 1 до k это зрители, которым мы раздаём билеты. А на билетах написаны номера $1, 2, \ldots, k$. Если числу достался билет с номером i, то число будет стоять на i-ом месте (надеемся, вас не запутало то, что у зрителей и у билетов одинаковые имена).

Комментарий. Есть ещё одно определение перестановки – функция из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, такая, что значение функции для двух различных чисел не может совпадать. Действительно, перестановке $(3, 1, 2)$ естественным образом соответствует функция, которая ставит в соответствие порядковому номеру элемент: $1 \to 3,\ 2 \to 1,\ \ 3 \to 2$.

Где мы уже встречали перестановки

Иногда говорят о перестановках не множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, а элементов какого-то другого множества.

Например, вот всевозможные перестановки элементов множества $\{a, b, c\}$:

$$abc, acb, bac, bca, cba, cab,$$

их, конечно же, ровно $6 = 3!$.

Определение. Перестановка элементов некоторого множества это способ упорядочить элементы этого множества (так чтобы каждый элемент встретился ровно один раз).

Пример 1. На этом шаге про зрителей и билеты мы искали количество перестановок множества $\{$Даша, Катя, Миша$\}$.

Пример 2. На этом шаге про котов мы считали количество перестановок множества $\{$чёрный, пятнистый, бежевый$\}$.

Пример 3. На этом шаге про биномиальные коэффициенты мы считали количество упорядоченных наборов элементов множества A. Эти наборы и были перестановками элементов множества A. То есть мы считали количество перестановок множества A (их оказалось ровно $k!$).

Задачи

Сейчас мы начнём решать задачи на вероятность при помощи биномиальных коэффициентов. Принцип решения у нас будет такой же, как и в решении других комбинаторных задач на вероятность. Чтобы найти вероятность события A мы будем

- находить общее количество исходов $|\Omega|$,
- находить количество исходов в A, то есть $|A|$,
- делить второе на первое, получая $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Пример 1

В колоде 26 красных карт и 26 чёрных. Мы вытягиваем 3 карты. Какова вероятность, что все три карты будут красными?

Решение. Обозначим за A событие "все три вытащенные карты красные."

- Чему равно количество способов вынуть 3 любых карты из колоды, то есть чему равно $|\Omega|$? Оно равно $|\Omega| = \binom{52}{3}$
- Чему равно количество способов вынуть 3 красных карты, то есть чему равно $|A|$? Так как красных карт 26, получаем $|A| = \binom{26}{3}$.
- Значит, ответ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{26}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{26!}{3! \cdot 23!}}{\frac{52!}{3! \cdot 49!}}$$

Пример 2

У нас есть коробка, в которой лежат 5 красных и 6 чёрных носков. Мы вытаскиваем из неё 4 носка. Какова вероятность того, что два из них будут чёрными и два красными?

Решение. Обозначим за A событие "два вытащенных носка красные и два чёрные."

- Чему равно количество способов вынуть 4 любых носка из этой коробки, то есть чему равно $|\Omega|$? Оно равно $|\Omega| = \binom{5+6}{4} = \binom{11}{4}$
- Чему равно количество способов вынуть 2 красных носка и 2 чёрных носка, то есть чему равно $|A|$? Оно равно $|A| = \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2}$. Первый множитель отвечает за выбор двух красных, а второй за выбор двух чёрных носков.
- Значит, ответ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{11!}{4! 7!}} \approx 0.454545$$

Пример 3

У нас есть 10000 пользователей. Среди них 3000 живут в Калуге. Мы делаем выборку размера 200. Какова вероятность того, что в выборку попадёт хотя бы один житель Калуги?

Решение. Обозначим за A событие "в выборку попал хотя бы один житель Калуги." Сначала найдём $P(\bar{A})$, то есть вероятность того, что в выборку не попал ни один житель Калуги.

- Сколько у нас всего возможных выборок, то есть чему равно $|\Omega|$? По определению биномиальных коэффициентов, это число равно $\binom{10000}{200}$
- Сколько у нас выборок, в которых нет ни одного жителя Калуги, то есть чему равно $|\bar{A}|$? Нужно взять множество всех пользователей не из Калуги (их $10000 - 3000 = 7000$) и выбрать из них 200 человек. То есть $|\bar{A}| = \binom{7000}{200}$.
- Значит, $P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7000}{200}}{\binom{10000}{200}}$.
- Следовательно $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{7000}{200}}{\binom{10000}{200}}$ (это число окажется очень маленьким, поэтому вычислять его явно мы не будем)

В колоде 36 карт (18 красных и 18 чёрных), вам сдают 6 карт. Какова вероятность, что вам достанется 3 черных карты и 3 красных карты?

Ответ округлите до тысячных.

Введите численный ответ

Введите число

Вы идете в поход компанией из 12 человек. На завтра вам нужно выбрать тройку дежурных, которые разведут утром костер и приготовят кашу. Крупа для каш распределена между 5 людьми из вашей компании. Какова вероятность, что хотя бы у одного из дежурных будет крупа в рюкзаке при условии, что тройка выбирается равновероятно по всем вариантам?

Ответ округлите до 3 знаков после запятой.

Введите численный ответ

Введите число

Задача с проверкой. Биномиальные коэффициенты 1

Докажите, что для любых n и k таких, что $1 \leq k \leq n$ выполнено соотношение $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Попробуйте доказать двумя способами: явно через формулу и через комбинаторный смысл.

Выберите все подходящие ответы из списка

$\binom{30}{0} = \binom{50}{0}$
$\binom{40}{27} = \binom{40}{13}$
$\binom{12}{2} = \binom{7}{3}$
$\binom{25}{8} = \binom{25}{17}$

Почему биномиальные коэффициенты так называются?

Со школы, возможно, вы помните, так называемые формулы сокращенного умножения. Например:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Оказывается, что биномиальные коэффициенты — это коэффициенты, которые получаются, если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в выражении $(a+b)^n$. Сама формула для $(a+b)^n$ называется *бином Ньютона*, отсюда и название — биномиальные коэффициенты.

Бином Ньютона

Для начала поймем, какие будут мономы в выражении $(a+b)^n$, если раскрыть скобки. Это будут выражения вида $a^k b^m$ с какими-то коэффициентами. Заметим также, что $k+m$ всегда равняется n. Действительно,

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots\ (a+b)}_{n}$$

Думать про это можно так: из каждой скобки мы берем либо сомножитель a, либо сомножитель b. Поскольку всего скобок n, то суммарная степень будет n. А значит, в результате получатся только мономы вида $a^k b^{n-k}$. Осталось для каждого k понять, какой коэффициент будет при мономе $a^k b^{n-k}$.

Например, если из каждой скобки взять a, то получится a^n. Причем это единственный способ получить a^n, а значит, после раскрытия скобок коэффициент перед a^n будет 1.

А вот $a^{n-1}b$ можно получить n способами:

- $\underbrace{aa\dots a}_{n-1}b$ — то есть из первых $n-1$ скобки взять a и из последней b
- $\underbrace{aa\dots a}_{n-2}ba$ — из предпоследней скобки берем b, из остальных a
- $\underbrace{aa\dots a}_{n-3}baa$ — из пред предпоследней скобки берем b, из остальных a

$\dots$

- $b\underbrace{aa\dots a}_{n-1}$ — из первой скобки берем b, из остальных a

Для произвольного k получится так. Коэффициент при $a^k b^{n-k}$ — это в точности число последовательностей букв a и b длиной n таких, что в них k букв a.

Пример

Раскроем скобки в выражении $(a+b)^3$, получим:

$$(a+b)^3 = \ (a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + abb + bbb.$$

Мономы aab, aba и baa превращаются в a^2b, мономы abb, bab, bba превратятся в ab^2.

Биномиальные коэффициенты в общем случае

Посчитаем число последовательностей букв a и b длиной n таких, что в них k букв a. Всего есть n букв, выберем позиции, на которых будут стоять буквы a. Заметим, что это то же самое, что выбрать подмножество размера k из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Следовательно, коэффициент при $a^k b^{n-k}$ равен числу способов выбрать подмножество размера k из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Как мы знаем, это число способов равняется $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Значит, формула бинома Ньютона в общем случае будет такой:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \ \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \ \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + \ \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \ \binom{n}{0}b^n.$$

Комментарий. Как мы помним, мы договаривались что $\binom{n}{n} = 1$ и $\binom{n}{0} = 1$.

Посмотрим на выражение $(c+d)^{14}$. Раскроем скобки и приведём подобные. Чему будет равен коэффициент перед мономом c^3d^{11}?

Введите численный ответ

Введите число

Задача. Биномиальные коэффициенты 2

Докажите, что для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 2^n$$

Это можно сделать двумя способами соответствующими двум интерпретациями биномиальных коэффициентов: коэффициенты в биноме Ньютона и число способов выбрать подмножество фиксированного размера. Попробуйте придумать оба.

Что мы прошли на этом уроке

- Мы познакомились с биномиальными коэффициентами: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – это число подмножеств размера k множества размера n.
- Доказали несколько полезных свойств и обсудили их комбинаторный смысл.
- Порешали задачи на связь биномиальных коэффициентов и теории вероятностей.
- Убедились, что биномиальные коэффициенты появляются в формуле бинома Ньютона.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- определим понятие *случайной величины*
- узнаем, что такое *математическое ожидание*
- докажем некоторые свойства *математического ожидания*