Математика для Data Science. Математический анализ. Шпаргалка

Содержание

Вторая неделя. Последовательности и пределы

Знакомство с последовательностями и пределом

Последовательность элементов множества X — это функция $f : \mathbb{N} \to X$. Действительно, обозначив $x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \ldots$, мы получим последовательность.

Элемент x_i называют i-ым *членом* последовательности, а число i называют его *индексом*.

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ принято компактно записывать при помощи фигурных скобок: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

Числовая последовательность — это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$. Далее слово «числовая» будет опускаться.

Виды ограниченных последовательностей

1. Последовательность *ограничена снизу*, если существует такое число $C_1 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n > C_1$.

2. Последовательность *ограничена сверху*, если существует такое число $C_2 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n < C_2$.

3. Последовательность *ограничена*, если она ограничена и сверху, и снизу. То есть, если существуют такие числа $C_1 \in \mathbb{R}$ и $C_2 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $C_1 < x_n < C_2$.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N, такое что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

Другими словами, a — предел $\{x_n\} \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Предел последовательности x_n обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Способы записать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{a}$

- x_n стремится к a,
- последовательность $\{x_n\}$ сходится к a,
- $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ или, короче, $x_n \to a$.

Если у последовательности есть предел, то мы будем говорить, что последовательность является *сходящейся* или же просто *сходится*.

Арифметика пределов

Свойства предела последовательности

1. Если у последовательности есть предел, то он единственен.

2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

3. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, тогда
   - $\lim\limits_{n \to \infty} c \cdot x_n = c \cdot a$, где c — некоторое число ($c \in \mathbb{R}$);
   - $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = a + b$;
   - $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
   - если $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для всех n, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Последовательности, стремящиеся к $+\infty$ и $-\infty$

1. Последовательность $\{x_n\}$ *стремится к плюс бесконечности*, если для любого $C \in \mathbb{R}$ начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ все члены последовательности больше C.

   Обозначение: $x_n \to +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

   Другими словами, $x_n \to +\infty \iff \forall C \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n > C$.

2. Последовательность $\{x_n\}$ *стремится к минус бесконечности*, если для любого $C \in \mathbb{R}$ начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ все члены последовательности меньше C.

   Обозначение: $x_n \to -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

   Другими словами, $x_n \to -\infty \iff \forall C \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n < C$.

Завершаем арифметику пределов

Бесконечно малой последовательностью называют последовательность, которая сходится к нулю.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то её можно представить в виде $\{a + \alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

2. Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, $c \in \mathbb{R}$, тогда бесконечно малыми будут также последовательности $\{c \cdot \alpha_n\}$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$.