Мотивировка

Напомним общий план нашего курса:

- изучить *пределы последовательностей* (2-ая неделя),
- изучить *пределы функций* (3-я неделя),
- при помощи пределов функций понять *производную* (3-я неделя),
- при помощи производной построить *градиентный спуск* (4-ая неделя). Градиентный спуск позволяет находить минимум функции, а минимум функции потерь соответсвует наилучшему алгоритму.

На понятии *предела последовательности* держатся все важнейшие понятия математического анализа: *предел функции, производная, интеграл, непрерывная функция, градиент, дифференциал*.

Поэтому на этой неделе мы будем изучать последовательности и их пределы. Эта тема может показаться полностью оторванной от Data Science. Мы знаем, что именно на второй и третьей неделях у студентов возникают вопросы "зачем вообще это изучать?" Просим пока поверить нам, что материалы второй и третьей недели действительно необходимы для Data Science. Убедиться в этом вы сможете на четвёртой и пятой неделях.

Учиться две недели по 15 часов исключительно "на доверии" довольно сложно. Надеемся, у вас получится.

Комментарий. Не только авторы курса зациклены на пределах последовательностей и функций. Например, на вступительных экзаменах в Школу Анализа Данных Яндекса почему-то тоже дают задачи на предел функций:

Задача 1. Предел отношения

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Известно, что $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} = 2$. Чему равен предел $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

Ответ. $\frac{3}{2}$

План второй недели

- Урок 2.1. Определение *последовательности*. *Ограниченные* последовательности. *Предел* последовательности.
- Урок 2.2. Единственность предела. Предел суммы двух последовательностей.
- Урок 2.3. *Бесконечно малые* последовательности. Предел произведения двух последовательностей.
- Урок 2.4. Предел частного двух последовательностей.

Конечная цель уроков, посвящённых пределам последовательностей — понять, что происходит с пределом, когда мы складываем две последовательности, перемножаем их или рассматриваем их частное. Этим мы и будем заниматься на второй неделе. Почти все задачи в этом уроке — промежуточные шаги на пути к этой конечной цели.

Про задачи

- Не сидите долго над одной задачей. Возможно, после того, как вы прочитаете следующие шаги, какие-то из предыдущих задач станут понятнее. **Если задача не решилась за 10-20 минут, то стоит переходить к другой задаче.** Ещё можно написать вопрос в общий чат или в комментариях к задаче. Или не вопрос, а просто "не решается, дайте подсказку". Это лучше, чем мучиться два часа над одной задачей.
- Задачи не обязательно идут в порядке возрастания сложности.
- Во многих задачах вам будут полезны утверждения, доказанные в предыдущих шагах. Если непонятно, как подступиться к задаче – посмотрите несколько шагов перед ней.
- Если вы хотите использовать в задаче факт, доказанный в одной из предыдущих задач — делайте это независимо от того, решили вы предыдущую задачу или нет.
- Если что-то непонятно – задайте вопрос в комментариях к задаче или в общем чате.

Трудоемкость второй недели

Середина недели (по количеству усилий) расположена примерно в начале урока 2.3. Вторая неделя более объемная, чем первая. В ней много зелёных задач. Рекомендуем сразу заглянуть в материалы этой недели, чтобы понять, как они распределены по урокам.

Иногда после второй недели у студентов возникает подозрение, что третья неделя будет ещё сложнее. Это не так. Недели $2-5$ имеют примерно одинаковую сложность.

Задание. Ниже выберите все правильные варианты ответов.

Выберите все подходящие ответы из списка

Задавать вопросы в комментариях или в общем чате в телеграме это отличная идея

Чем раньше встретилась задача, тем она проще

Нельзя переходить к следующим шагам, не решив текущую задачу

При решении задач можно пользоваться утверждениями, которые ранее встречались в теории или в задачах

Последовательности – неформально

В конце прошлой недели мы дали неформальное определение последовательности:

Неформальное определение. *Последовательность* элементов множества X – это бесконечный набор элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ где $x_i \in X$ для любого номера i.

Пример 1. Если $X = \mathbb{N}$, то $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ это последовательность элементов X.

Пример 2. Если $X = \mathbb{N}$, то $3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$ это последовательность элементов X.

Пример 3. Если $X = \{a, b, c, d\}$, то $a, a, c, a, a, c, a, a, c, \ldots$ это последовательность элементов X.

Последовательности – формально

Для формального определения последовательности нам потребуется определение функции. Напомним его:

Определение. *Функция* – это соответствие между элементами двух множеств, такое что каждому элементу первого множества соответствует ровно один элемент второго множества.

Как мы уже говорили, математика минималистична: мы дали формальное определение функции, давайте этим воспользуемся, чтобы дать формальное определение последовательности.

Определение. *Последовательность* элементов множества X – это функция $f : \mathbb{N} \to X$.

Действительно, если нам дана такая функция f, то мы можем обозначить $x_1 := f(1), x_2 := f(2), x_3 := f(3), \ldots$ Элемент x_i называют i-ым *членом* последовательности, а число i называют его *индексом*. Подумайте, почему наше формальное определение отвечает интуиции из предыдущего параграфа с неформальным определением.

Пример 1 из предыдущего параграфа задаётся функцией $f(n) = 2n$.

Пример 2 из предыдущего параграфа задаётся функцией $f(n) = 3$.

Пример 3 из предыдущего параграфа задаётся функцией f, такой что $f(n) = a$ если n не делится на 3, и $f(n) =$ c если n делится на 3.

Обозначение. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ принято компактно записывать при помощи фигурных скобок: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

Обозначение. *Числовая последовательность* – это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$.

Примеры числовых последовательностей:

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, краткая запись этой последовательности: $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
- $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \ldots$

Нас будут интересовать только числовые последовательности, и весь оставшийся урок мы будем заниматься только ими. Слово "числовая" мы будем опускать.

Выберите все подходящие ответы из списка

0 – это последовательность

$\mathbb{N}$ – это последовательность

$\mathbb{R}$ – это последовательность

$\{1, 2, 3\}$ – это последовательность

$0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ – это последовательность

$-1, -2, -4, -8, -16, \ldots$ – это последовательность

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ – это последовательность

Последовательности и не-последовательности

Предыдущая задача демонстрирует возможную неверную интерпретацию понятия последовательность. $\{1,2,3\}, \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ – это множества. Ни одно множество само по себе не является последовательностью. Чтобы задать последовательность, необходимо для каждого натурального номера $n \in \mathbb{N}$ сказать, чему будет равен n-ый элемент последовательности.

А можно ли как-то от этих множеств перейти к последовательностям? Попробуем составить последовательности из чисел, принадлежащих нашим множествам. Оказывается, что для каждого из множеств $\{1,2,3\}, \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ существует бесконечно много последовательностей состоящих из элементов этого множества. Давайте посмотрим на примеры

Примеры последовательностей элементов множества $\{1,2,3\}$

- $1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots$, то есть n-ый элемент последовательности равен 1, если n дает в остатке 1 при делении на 3, 2 – если остаток при делении n на 3 равен 2 и 3, если n делится на 3

- $1,1,2,2,3,3,1,1,2,2,3,3,1,1,2,2,3,3,1,1,2,2,3,3,\ldots$

- $1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots$, то есть для всех $n \in \mathbb{N}$ n-ый элемент последовательности равен 1. (В определении последовательности элементов множества X нет требования, чтобы в последовательности присутствовали все элементы множества X).

- $2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\ldots$

Комментарий. Как мы уже отметили ранее, $\{1,2,3\}$ – это просто множество, состоящее из чисел 1, 2 и 3, поэтому последовательностью оно не является. Ещё один простой способ понять, что $\{1,2,3\}$ не является последовательностью такой: в $\{1,2,3\}$ лежит лишь конечное количество элементов, чего не может быть в последовательности.

Примеры последовательностей элементов множества $\mathbb{N}$

- Все последовательности элементов множества $\{1,2,3\}$ являются также и последовательностями элементов $\mathbb{N}$, поскольку $\{1,2,3\} \subset \mathbb{N}$. Поэтому все примеры выше для $\mathbb{N}$ также подходят.

- $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,\ldots$, то есть для всех $n \in \mathbb{N}$ n-ый элемент последовательности равен n.

- $2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32\ldots$, то есть для всех $n \in \mathbb{N}$ элемент последовательности номер n равен $2n$.

Примеры последовательностей элементов множества $\mathbb{R}$

- Аналогично, так как $\{1,2,3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, все примеры выше подходят для $\mathbb{R}$.

- $\sqrt{2},1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,\ldots$, то есть первый элемент последовательности равен $\sqrt{2}$, а для всех $n>1$ n-ый элемент последовательности равен $n-1$.
- $\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{9},\sqrt{10},\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\ldots$, то есть для всех $n \in \mathbb{N}$ n-ый элемент последовательности равен $\sqrt{n}$.

Комментарий. В отличие от двух предыдущих множеств составить последовательность, в которую войдут все элементы $\mathbb{R}$, не получится. В курсе нам этот факт не понадобится, и строго доказывать его мы не будем. Мы более подробно коснёмся этого вопроса в курсе теории вероятностей (допматериал про *мощность множества*).

Примеры последовательностей элементов множества $\{0\}$

На прошлом шаге был ещё один неверный вариант ответа – число 0. Последовательностью его называть некорректно. Даже несмотря на то, что существует ровно одна последовательность элементов множества $\{0\}$ – это $0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots$. Заметим также, что выражение "последовательность элементов множества 0" некорректно, поскольку формально 0 не является множеством (множество, состоящее из одного элемента 0 обозначается $\{0\}$).

Обозначение

Вы могли заметить, что, чтобы задать последовательность, иногда достаточно записать несколько её первых членов и поставить многоточие, когда становится понятна логика, по которой вычисляются следующие члены последовательности. Такую неформальную форму записи бывает удобнее использовать, чем явное описание, чему равен x_n. В частности, можете так делать при решении зелёных задач.

Сопоставьте первые несколько членов последовательностей с их формальным определением.

Сопоставьте значения из двух списков

$4, 4, 5, 4, 4, 5, 4, 4, 5, 4, 4, 5, 4, 4, 5, \ldots$	$x_n = n + (-1)^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$
$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512, 1024, \ldots$	$x_n = (-2)^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$
$0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, 11, 10, 13, 12, 15, 14, \ldots$	Если n делится на 3, то n-ый член последовательности равен 5, в противном случае 4

Ограниченность

На этом шаге мы начинаем знакомиться со свойствами последовательностей. А именно, мы узнаем, какие последовательности называются *ограниченными сверху*, какие – *ограниченными снизу*, а какие – просто *ограниченными*.

Ограниченность снизу

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число $C_1 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n > C_1$.

То есть последовательность ограничена снизу, если все члены последовательности больше некоторой константы $C_1 \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что последовательность ограничена снизу числом C_1.

Пример 1. Последовательность $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ ограничена снизу числом $C_1 = 2$. Действительно, все числа этой последовательности больше, чем 2.

Пример 2. Последовательность $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ не ограничена снизу. Действительно, для любого числа C_1 найдётся элемент последовательности, который меньше C_1.

Ограниченность сверху

Аналогично ограниченности снизу определяется ограниченность сверху:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число $C_2 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n < C_2$.

Пример 1. Последовательность $4, 4, 4, 4, 4, \ldots$ ограничена сверху числом $C_2 = 4.7$.

Пример 2. Последовательность $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ не ограничена сверху. Действительно, для любого числа C_2 найдётся элемент последовательности, который больше C_2.

Ограниченность

Как можно было бы определить *ограниченную* последовательность? Как мы любим, через предыдущие определения:

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и ограничена снизу.

То есть, если существуют такие числа $C_1 \in \mathbb{R}$ и $C_2 \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $C_1 < x_n < C_2$.

Пример 1. Последовательность $1, 1, 1, 1, \ldots$ ограничена снизу числом $C_1 = 0$ и ограничена сверху числом $C_2 = 5$. Значит, эта последовательность ограничена.

Пример 2. Последовательность $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ ограничена снизу числом 2, но не ограничена сверху. Значит, эта последовательность не ограничена.

Пример 3. Последовательность $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Значит, она не ограничена.

Пример 4. Последовательность $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ограничена снизу числом 0, и сверху числом 1.1. Значит, она ограничена.

Ограниченность – улучшенное определение

Сейчас мы приведём более удобное определение ограниченности. Им мы обычно и будем пользоваться.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху константой C и ограничена снизу константой $(-C)$ для какого-то $C \in \mathbb{R}$.

Это определение эквивалентно определению ограниченности из предыдущего параграфа. Под "эквивалентно" мы имеем в виду следующее: последовательность является ограниченной по первому определению тогда и только тогда, когда она является ограниченной по второму определению.

Пример. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена по первому определению. Например, она ограничена снизу числом 3 и сверху числом 10. Тогда последовательность $\{x_n\}$ так же ограничена по второму определению: снизу числом -10 и сверху числом 10.

Доказательство эквивалентности определений.

- Докажем, что если последовательность ограничена по второму определению, то она ограничена по первому определению. То есть у нас есть C, нужно указать C_1 и C_2. Действительно, можно взять $C_1 := -C$ и $C_2 := C$.
- Докажем, что если последовательность ограничена по первому определению, то она ограничена по второму определению. То есть у нас есть C_1 и C_2, нужно указать C. Действительно, в качестве C можно взять максимум из чисел $|C_1|$ и $|C_2|$.

Выберите все подходящие ответы из списка

Если составленная из натуральных чисел последовательность ограничена снизу, то верно, что она ограничена

Последовательность элементов $\mathbb{R}$ не может быть ограниченной

Любая последовательность элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ограничена

Если последовательность ограничена, то верно, что она ограничена сверху

Если составленная из натуральных чисел последовательность ограничена сверху, то верно, что она ограничена

Задача. Знакомство с последовательностями и пределом 1.

Приведите пример:

1. ограниченной последовательности,
2. последовательности не ограниченной сверху,
3. последовательности ограниченной сверху, но не являющейся ограниченной,
4. последовательности не ограниченной ни сверху, ни снизу.

Постарайтесь привести примеры, не совпадающие с примерами, которые мы выписали два шага назад.

Контрольный вопрос. Если последовательность не является ограниченной, значит ли это, что она не ограничена ни сверху, ни снизу?

Напоминание. Последовательность можно задать, явно указав, чему равен x_n для всех натуральных n, а можно просто перечислить первые несколько членов, поставив многоточие, когда логика построения последовательности становится ясна.

Предел – догадка

На следующем шаге мы познакомимся с определением *предела* последовательности. Перед этим мы предлагаем вам самим подумать, каким могло бы быть это определение.

Для этого посмотрите на следующие утверждения:

- предел последовательности $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ это 0,
- предел последовательности $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ это 1,
- последовательность $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ не имеет предела,
- последовательность $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела.

Попробуйте самостоятельно (возможно, нестрого) сформулировать, что значат утверждения «предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ это a» и «у последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нет предела».

Не тратьте на этот шаг больше 5 минут.

Предел последовательности

На этом шаге мы с разных сторон посмотрим на определение предела, а на следующем шаге разберём примеры.

Предел – неформально

Неформально говоря, мы хотим называть число a пределом последовательности $\{x_n\}$, если при увеличении номера n элементы последовательности располагаются всё ближе и ближе к a. Можно думать, что начиная с некоторого n, последовательность близка к a на ε, если последовательность не покидает ε-окрестность точки a при бо́льших n. Напомним, ε-окрестностью точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Мы хотим, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была близка к a для любого $\varepsilon > 0$ – тогда мы будем называть a пределом. Вот формальное определение.

Предел – формальное определение

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N, такое что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

Вот ещё одна формулировка этого же определения. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N, такое что все члены последовательности, начиная с N-ого, попадают в ε-окрестность точки a. То есть если мы возьмём сколь угодно маленькую окрестность точки a, мы всегда сможем найти номер, начиная с которого все члены последовательности попадают в выбранную нами окрестность.

И то же самое в сокращённой форме: a — предел последовательности $\{x_n\} \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N: \; |x_n - a| < \varepsilon.$

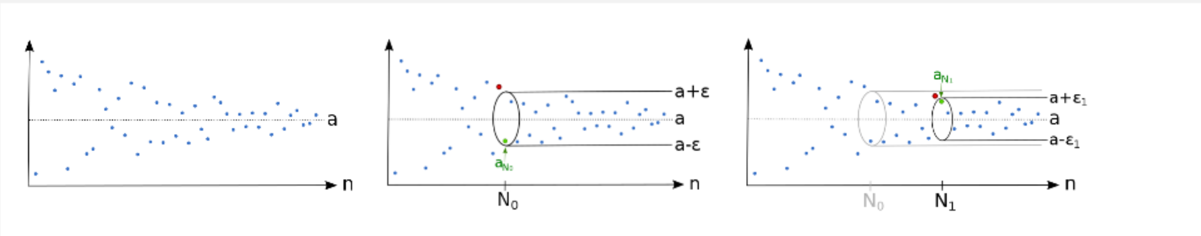
Комментарий. Вспоминая то, что мы поняли на одном из шагов урока 1.7 про порядок кванторов, заметим, что в нашей формуле N будет зависеть от ε. То есть для разных выборов числа ε мы будем получать разные номера N.

Предел – графическая интерпретация 1

Поскольку элементы последовательности — это функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, мы можем рисовать их на графике так же, как и любую другую функцию.

Каждая синяя точка на рисунках ниже соответствует члену последовательности. На горизонтальной оси мы откладываем номер элемента последовательности. То есть, чем правее синяя точка, тем больше номер соответствующего члена последовательности. На вертикальной оси мы откладываем само значение члена последовательности (то есть для i-ого члена последовательности это число x_i).

Графически то, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, можно представить следующим образом: нарисуем вокруг a по оси ординат трубу с радиусом эпсилон. Какой бы узкой ни была эта труба, начиная с некоторого номера все элементы последовательности находятся внутри этой трубы.



Источник: Википедия

Предел – графическая интерпретация 2

Посмотрите на наглядную иллюстрацию предела последовательности в этом видео (оно идёт 2 минуты).

Предел – обозначения

Предел последовательности $\{x_n\}$ обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Другие способы говорить, что a является пределом последовательности $\{x_n\}$:

- x_n стремится к a,
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ или, короче, $x_n \to a$,
- последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к a.

Если у последовательности есть предел, то мы будем говорить, что последовательность является *сходящейся* или что последовательность *сходится*. Если предела нет – то будем говорить, что последовательность *не сходится*.

Пример 1

Предел последовательности $2, 2, 2, 2, 2, \ldots$ это число 2. Докажем это. Рассмотрим любой $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти номер N, начиная с которого элементы последовательности попадают в интервал $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Нам подойдёт $N = 1$. Действительно, все члены последовательности, начиная с первого, лежат в интервале $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. В этом простом примере мы можем выбрать один и тот же N для всех ε.

Пример 2

Предел последовательности $10, 2, 2, 2, 2, \ldots$ это число 2. Докажем это. Рассмотрим любой $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти номер N, начиная с которого элементы последовательности попадают в интервал $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

- Если $\varepsilon > 8$, то подойдёт $N = 1$ (или любое другое N).
- Если $\varepsilon \leq 8$, то подойдёт $N = 2$ (или любое большее N). Для $\varepsilon \leq 8$ выбор $N = 1$ не подойдёт, потому что при $\varepsilon \leq 8$ не выполнено $x_1 \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Действительно, мы имеем $x_1 = 10 = 2 + 8 \geq 2 + \varepsilon$

Мы нашли подходящий N для любого ε, поэтому 2 – это предел последовательности $10, 2, 2, 2, 2, \ldots$.

Пример 3

У последовательности $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ нет предела (другими словами, она не сходится). Докажем это методом от противного. Предположим, что предел этой последовательности это число a. Рассмотрим $\varepsilon = 0.25$. По определению предела, найдётся N, такой что для всех $n \geq N$ выполнено $x_n \in (a - 0.25, a + 0.25)$. В частности, x_N и x_{N+1} лежат в $(a - 0.25, a + 0.25)$. Из описания последовательности видно, что числа x_N и x_{N+1} это либо 1 и 0, либо 0 и 1. В любом из этих двух случаев, мы получаем, что $0 \in (a - 0.25, a + 0.25)$ и $1 \in (a - 0.25, a + 0.25)$.

В принципе, уже видно противоречие – не может быть, чтобы числа 0 и 1 одновременно лежали в интервале длины $0.25 + 0.25 = 0.5$. Давайте для надёжности строго это докажем.

- $0 \in (a - 0.25, a + 0.25) \implies 0 > a - 0.25 \implies 0.25 > a$
- $1 \in (a - 0.25, a + 0.25) \implies 1 < a + 0.25 \implies 0.75 < a \implies 0.25 < a$

Но число a не может одновременно быть меньше и больше числа 0.25. Противоречие.

Комментарий. Выберем в качестве кандидата на роль предела число $a = 0.3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0.7$ мы сможем найти подходящий N. А уже для $\varepsilon = 0.7$ не сможем. Из этого примера видно, что, чтобы прийти к противоречию, нужно выбрать какой-то конкретный эпсилон, для которого N найти нельзя. Потому что для некоторых эпсилонов найти N можно, но этого недостаточно – нужно для всех. В нашем примере это был $\varepsilon = 0.25$.

Пример 4

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Чтобы угадать ответ, посмотрим на первые несколько элементов:

- $\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{1}{2} = 0.5$
- $\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots$
- $\frac{1}{4} = 0.25$
- $\frac{1}{5} = 0.2$
- $\frac{1}{6} = 0.16666666\ldots$
- $\frac{1}{7} = 0.1428571\ldots$
- $\frac{1}{8} = 0.125\ldots$
- $\frac{1}{9} = 0.1111111\ldots$
- $\ldots$

С одной стороны, мы видим, что элементы последовательности убывают. С другой стороны, из формулы $\frac{1}{n}$ видно, что все элементы последовательности неотрицательны. Выдвинем гипотезу: последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится к 0.

Заметим, что проделанной выше работы недостаточно, чтобы считать задачу решённой: теперь гипотезу нужно обосновать.

Строгое доказательство. Урок про доказательства учит нас, что первым делом стоит развернуть определения, сделаем это.

Рассмотрим любой $\varepsilon > 0$. Чтобы доказать, что 0 это предел, нам нужно найти номер N, такой что $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Полученное неравенство можно переписать так, раскрыв модуль: $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Покажем, что найдётся N, такой что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Действительно, при $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ неравенство $\frac{1}{N} < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $1 < N\varepsilon$, которое эквивалентно $\frac{1}{\varepsilon} < N$. Ясно, что можно найти N, для которого выполнено последнее неравенство. Тем самым, мы нашли N, такой что $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Заметим, что при $n \geq N$ выполнено $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Так как $\frac{1}{N} < \varepsilon$, выполнено

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Значит, нужное нам неравенство $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ выполнено при всех $n \geq N$. Что и требовалось доказать.

Мудрость от Катиного преподавателя. Заниматься математикой непросто: большую часть времени вы ничего не понимаете. А когда наконец понимаете что-то, это кажется очевидным ;)

Задача. Знакомство с последовательностями и пределом 2.

Определение. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ считаются различными, если у них различается хотя бы один элемент, то есть существует $n \in \mathbb{N}$ такое что $x_n \neq y_n$.

На прошлом шаге мы привели пример последовательности $2, 2, 2, 2, \ldots,$ которая сходится к числу 2.

1. Приведите ещё 3 различных последовательности, которые сходятся к числу 2. Для каждой из них докажите, что последовательность действительно сходятся к числу 2.

2. Приведите пример последовательности, которая не будет сходиться, и покажите это по определению.

Постарайтесь привести примеры, не совпадающие с примерами, которые мы выписали на прошлом шаге.

Если какие-то примеры с прошлого шага оказались непонятными – задайте вопрос в комментариях к задаче или в общем чате.

Мы выяснили, что $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится к нулю. А начиная с какого номера все элементы последовательности будут лежать в 0.01 -окрестности нуля?

Введите численный ответ

Введите число

Как искать пределы

Какого-то универсального алгоритма для поиска предела последовательности нет, но вот общие советы:

1. Попробуйте **угадать ответ**:
    - Выпишите первые 5-10 членов последовательности, посмотрите на их поведение.
        - Чтобы оценить значение, иногда лучше перевести всё в десятичные дроби, так как они интуитивнее, а вот при доказательствах легче иметь дело с обыкновенными дробями.
    - Сформулируйте **гипотезу**: сходится ли последовательность? Если да, то к какому значению?
2. Если у вас есть гипотеза, попробуйте её **обосновать**, тут есть два варианта:
    - все получилось (ура!),
    - если не доказывается, попробуйте сформулировать, что именно мешает? Это может подсказать, почему гипотеза неверна и даст ключ к новой.
3. Повспоминайте **похожие задачи**.
4. **Декомпозируйте** — то есть разбивайте задачу на подзадачи, для которых вы уже можете найти ответ. Этот пункт станет понятнее чуть позже.

Найдите предел последовательности $\left\{1 + \frac{1}{n+2}\right\}$.

Введите численный ответ

Введите число