Математика для Data Science. Теория вероятностей. Шпаргалка

Содержание

Вторая неделя. Случайные величины

Теорема Байеса

Теорема Байеса. Для любых событий A и B, таких что $P(B) \neq 0$ выполнено

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Формула полной вероятности.

Даны события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, такие что каждый элементарный исход из Ω лежит ровно в одном из этих событий. Другими словами,

- эти события не пересекаются друг с другом, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$
- и их объединение равно Ω, то есть $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Тогда выполнено:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Комбинаторика в тервере, перестановки

События $A, B \in F$ называются *несовместными*, если $A \cap B = \emptyset$.
Правило суммы. Если события A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Утверждение. Пусть $A, B \in F$ — события. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Перестановка чисел от 1 до n — это некоторая упорядоченная последовательность чисел от 1 до n, где каждое число встречается ровно один раз.

Ещё одно определение перестановки — функция из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, такая, что значение функции для двух различных чисел не может совпадать.

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$. Читается "$n$ факториал". При этом $0! := 1$. При этом $0! := 1$.

Различных перестановок чисел от 1 до n всего $n!$

Биномиальные коэффициенты

Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначается $\binom{n}{k}$ и читается "n по k". Определено для целых неотрицательных n и k таких, что $n \geqslant k$. Все числа такого вида называются *биномиальными коэффициентами*. В русскоязычной литературе также используется обозначение C_n^k (цэ из n по k).

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ равно числу подмножеств размера k у n-элементного множества S.

Поскольку $0! := 1$, то $\binom{n}{k} = 1$.

Бином Ньютона. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Свойства биномиальных коэффициентов

1. Для любых n и k таких, что $k \leqslant n$ выполнено соотношение $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Для всех n выполнено

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{0} = 2^n$$

3. Для всех n и k таких, что $k \leqslant n$ выполнено $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Биномиальные коэффициенты можно визуализировать с помощью *треугольника Паскаля*, который получается так

- Первая строка состоит из одной 1
- Каждая следующая получается из предыдущей строки сложением её с самой собой со сдвигом 1

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	

Случайная величина и математическое ожидание

Как и раньше, рассматриваем случай, когда пространство исходов Ω конечно, и алгебра событий F состоит из всевозможных подмножеств Ω.

Случайная величина это функция из пространства исходов Ω в $\mathbb{R}$.

Пусть дано вероятностное пространство Ω, состоящее из n элементарных исходов, и случайная величина X. Обозначим через P_i вероятность i-ого исхода, и через x_i значение случайной величины X на i-ом исходе. Тогда *математическим ожиданием* случайной величины X называется число $E[X] := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P_i$.

Более коротко определение математического ожидания можно записать так: $E[X] := \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$.

Операции со случайными величинами

Случайные величины, определённые на одном вероятностном пространстве, можно складывать друг с другом, умножать друг на друга, как и любые функции. Например, сумма случайных величин X и Y обозначается $X+Y$ и определяется так: для любого исхода $\omega \in \Omega$ мы говорим $(X+Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega)$.

Пусть дано число $c \in \mathbb{R}$ и пространство исходов Ω. Будем считать, что случайная величина, которая любому элементарному исходу сопоставляет число c, обозначается так же, как и число c. Тогда мы можем определить случайную величину, равную многочлену от случайных величин.

В дальнейшем, когда мы будем складывать или перемножать случайные величины, мы всегда будем предполагать, что они определены на одном и том же вероятностном пространстве.

Свойства математического ожидания

Пусть X и Y — случайные величины. Тогда

1. если $c \in \mathbb{R}$, то $E[cX] = c \cdot E[X]$;
2. $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$;
3. $E[X \cdot Y]$ не всегда равно $E[X] \cdot E[Y]$