Математика для Data Science. Математический анализ. Решения устных задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

2.1 Знакомство с последовательностями и пределом

Задача 1

Приведите пример:

- ограниченной последовательности,
- последовательности не ограниченной сверху,
- последовательности ограниченной сверху, но не являющейся ограниченной,
- последовательности не ограниченной ни сверху, ни снизу.

Контрольный вопрос. Если последовательность не является ограниченной, значит ли это, что она не ограничена ни сверху, ни снизу?

Напоминание. Последовательность можно задать, явно указав, чему равен x_n для всех натуральных n, а можно просто перечислить первые несколько членов, поставив многоточие, когда логика построения последовательности становится ясна.

Подсказка. При ответе на контрольный вопрос надо вспомнить, как строятся отрицания от выражений вида «выполнено A» и «выполнено B».

Решение.

- Ограниченные последовательности: $\{0, 0, 0, 0, \dots\}$, $\{(-1)^n\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, ... Для всех этих последовательностей верно, что $-2 < x_n < 2$ для всех натуральных n.

- Последовательность, не ограниченная сверху: $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. То есть $x_n = n$.

  Докажем от противного, что последовательность не ограничена сверху. А именно, предположим, что $\{x_n\}$ ограничена сверху. Тогда существует C такое, что для всех n выполнено $x_n < C$. Возьмём в качестве n любое натуральное число, которое больше, чем C. Тогда $x_n = n > C$. Мы получили противоречие.

- Последовательность, ограниченная сверху, но не являющаяся ограниченной: $\{x_n\} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$. То есть $x_n = -n$. Для всех n выполнено $x_n < 0$, то есть $\{x_n\}$ ограничена сверху.

  Докажем от противного, что последовательность не ограничена снизу. То есть, пусть существует C такое, что для всех n выполнено $x_n > C$. Возьмём в качестве n любое натуральное число, которое больше, чем $-C$. Тогда $x_n = -n < C$. Мы получили противоречие. Последовательность не ограничена снизу, а значит и не ограничена.

- Последовательность, не ограниченная ни сверху, ни снизу: $\{x_n\} = \{1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, \dots\}$. То есть $x_{2k-1} = k$, $x_{2k} = -k$.

  Последовательность не ограничена сверху, так как иначе существовало бы число C_1 такое, что $x_n < C_1$ для всех n. Но если взять $n = 2k$, где $k > C_1$ — натуральное число, то $x_n = x_{2k} = k > C_1$. Противоречие.

  Последовательность не ограничена снизу, так как иначе существовало бы число C_2 такое, что $x_n > C_2$ для всех n. Но если взять $n = 2k - 1$, где $k > -C_2$ — натуральное число, то $x_n = x_{2k-1} = -k < C_2$. Противоречие.

Ответ на контрольный вопрос. Если последовательность не является ограниченной, это не значит, что она не ограничена ни сверху, ни снизу. Как мы помним из правил построения отрицаний, $\neg$($\{x_n\}$ ограничена) = $\neg$($\{x_n\}$ ограничена сверху и $\{x_n\}$ ограничена снизу) = $\neg$($\{x_n\}$ ограничена сверху) или $\neg$($\{x_n\}$ ограничена снизу) = $\{x_n\}$ не ограничена сверху **или** $\{x_n\}$ не ограничена снизу.

Задача 2

Определение. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ считаются различными, если у них различается хотя бы один элемент, то есть существует $n \in \mathbb{N}$ такое что $x_n \neq y_n$.

На прошлом шаге мы привели пример последовательности $2, 2, 2, 2, \dots$, которая сходится к числу 2.

1. Приведите ещё 3 различных последовательности, которые сходятся к числу 2. Для каждой из них докажите, что последовательность действительно сходятся к числу 2.

2. Приведите пример последовательности, которая не будет сходиться, и покажите это по определению.

Постарайтесь привести примеры, не совпадающие с примерами, которые мы выписали на прошлом шаге.

Если какие-то примеры с прошлого шага оказались непонятными – обязательно обсудите их с преподавателем.

А в качестве контрпримера можно привести последовательность из второго или третьего пункта. Обе не являются ограниченными, но при этом про них нельзя сказать, то они не ограничены ни сверху, ни снизу.

Подсказка. Последовательность не сходится, если никакое число не является её пределом.

Решение.

1. Другие примеры последовательностей, которые сходятся к 2:

   - $1, 2, 2, 2, 2, \ldots$
   - $1, 3, 2, 2, 2, \ldots$
   - $\{2 + \frac{1}{n}\}$
   - $\left\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$

2. Теперь поймём, что значит, что последовательность не сходится. Какое бы число a мы ни взяли в качестве кандидата на роль предела, мы сможем найти такую маленькую ε-окрестность точки a, что неверно, что начиная с некоторого момента все члены последовательности лежат в нашей окрестности.

   Как пример рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Если предположить, что у неё есть предел a, где $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то в качестве ε мы можем взять число $\min(|a-1|, |a+1|)$, то есть наименьшее из расстояний от a до 1 и до -1. Тогда в ε-окрестность точки a не будут попадать точки -1 и 1, и значит в такой окрестности вообще не будет лежать ни одного члена последовательности. Далее, предположим, что 1 — предел последовательности $\{x_n\}$. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда все члены последовательности с чётными индексами попадают в ε-окрестность точки 1, а все члены с нечётными индексами — не попадают. Значит, 1 не может быть пределом последовательности $\{x_n\}$. Аналогично доказывается, что -1 не является пределом последовательности $\{x_n\}$. Итого, у последовательности $\{x_n\}$ нет предела.

   Кванторами то, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится, запишется так: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ |x_n - a| \geq \varepsilon$.

2.2 Единственность предела и предел суммы

Задача 1

Для каждой из следующих последовательностей найдите предел, либо покажите, что его не существует:

1. $\{\frac{1000}{n}\}$,
2. $\{\frac{1}{2^n}\}$,
3. $\{0.9^n\}$,
4. $\{1.2^n\}$

Пункты 1 и 2. В конце двенадцатого шага прошлого урока мы научились строго доказывать, что предел последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ равен нулю. Это доказательство может помочь вам решить пункты 1 и 2

Пункты 3 и 4. Для решения последних двух пунктов этой задачи будут полезны свойства логарифма. По определению, $\log_c\ y$ — это степень, в которую нужно возвести c, чтобы получить y. То есть $\log_c\ y$ это такое число, что $c^{\log_c\ y} = y$.

Про логарифм $\log_c$ можно думать, как про функцию, обратную к показательной функции, то есть к функции вида $f(x) = c^x$, где c — некоторая константа (её еще называют основанием степени). Под словом "обратная функция"мы понимаем следующее: $\log_c(c^x) := x$. То есть показательная функция f отправляет x в c^x, а логарифм $\log_c$ отправляет c^x в x.

Вам могут пригодиться следующие свойства логарифма:

- $x \leq y \iff \log_c\ x \leq \log_c\ y$ для $c\ > 1$
- $x \leq y \iff \log_c\ x \geq \log_c\ y$ для $0 < c\ <\ 1$

Их можно использовать без доказательства.

Пример 1. $\log_2\ 8 = \log_2 2^3 = 3$

Пример 2. $\log_{0.9}\ (0.9^n)\ = n$

Пример 3. $0.9^n < \varepsilon \iff log_{0.9}(0.9^n) >\ \log_{0.9}(\varepsilon) \iff n >\ \log_{0.9}(\varepsilon)$

Подсказка для $\{\mathbf{\frac{1000}{n}}\}$. Предел последовательности $\{\frac{1000}{n}\}$ считается аналогично пределу последовательности $\{\frac{1}{n}\}$.

Подсказка для $\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}\right\}$ и $\{\mathbf{0.9^n}\}$. Пусть все члены последовательности больше ε. Оцените разницу между соседними членами последовательности.

Подсказка для $\{\mathbf{1.2^n}\}$. Оцените разницу между соседними членами последовательности.

Решение для $\left\{\frac{\mathbf{1000}}{\mathbf{n}}\right\}$. Предел $\left\{\frac{1000}{n}\right\}$ равен 0. Действительно, рассмотрим любой $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти номер N, такой что $-\varepsilon < \frac{1000}{n} < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Заметим, что при $n \geq N$ выполнено $0 < \frac{1000}{n} \leq \frac{1000}{N}$. Значит, если $\frac{1000}{N} < \varepsilon$, то нужное нам неравенство $-\varepsilon < \frac{1000}{n} < \varepsilon$ будет выполнено при всех $n \geq N$. А такой номер N мы действительно можем найти: например, можно взять в качестве N любое натуральное число, большее $\frac{1000}{\varepsilon}$.

Решение для $\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}\right\}$ и $\{\mathbf{0.9^n}\}$.

Первый способ. Предел последовательности $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \{0.5^n\}$ равен 0. Возьмём любой $\varepsilon > 0$. Последовательность $\{0.5^n\}$ убывающая, и все её члены больше нуля. Значит, достаточно найти N, такой что $0.5^N < \varepsilon$ (аналогично решению части 1 этой же задачи). Пусть такого N нет, то есть для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $0.5^n \geq \varepsilon$. Нужно прийти к противоречию. Посмотрим на разность между соседними членами последовательности:

$$0.5^n - 0.5^{n+1} = 0.5^n(1 - 0.5) = 0.5^{n+1} \geq \varepsilon \cdot 0.5.$$

Значит, каждый следующий член последовательности меньше предыдущего хотя бы на 0.5ε. Но тогда любой член последовательности с номером больше $\frac{1}{0.5\varepsilon}$ будет меньше нуля, что невозможно.

Заменив в предыдущем рассуждении 0.5 на 0.9 аналогично получим, что предел последовательности $\{0.9^n\}$ равен нулю.

Второй способ. Решим теперь с использованием логарифма. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Нам нужно найти такой N, что $|0.5^n| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Поскольку при $n \geq N$ выполнено $0 < 0.5^n \leq 0.5^N$, то достаточно найти N, такой что $0.5^N < \varepsilon$. А это можно сделать с помощью логарифма: достаточно взять $N > \log_{0.5} \varepsilon$.

Такое же рассуждение можно провести для последовательности $\{0.9^n\}$.

Решение для $\{\mathbf{1.2^n}\}$.

Первый способ. Докажем, что предела у последовательности $\{1.2^n\}$ нет. Каждый следующий член последовательности будет больше предыдущего хотя бы на 0.2:

$$1.2^{n+1} - 1.2^n = 1.2^n(1.2 - 1) = 1.2^n \cdot 0.2 \geq 1 \cdot 0.2 = 0.2.$$

Пусть $a > 0$ - предел последовательности (очевидно, все неположительные числа не могут быть пределами этой последовательности). Но все члены последовательности с номерами больше $\frac{a}{0.2}$ больше a хотя бы на 0.2. Противоречие.

Второй способ. Докажем, что для любого a найдётся $\varepsilon > 0$, такое что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся $n \geq N$, что выполнено $1.2^n - a \geq \varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство: $1.2^n \geq a + \varepsilon$, а это равносильно $n > \log_{1.2}(a + \varepsilon)$. Значит, мы можем взять ε таким, что $\varepsilon > -a$ (тогда логарифм будет определён), а n можем взять больше, чем $\log_{1.2}(a + \varepsilon)$.

Забегая вперёд, можно доказать, что последовательность $\{1.2^n\}$ стремится к $+\infty$. Действительно, пусть C — произвольное число. Тогда при $n \geq N > \log_{1.2} C$ выполнено $1.2^n \geq 1.2^N > C$.

Задача 2

В предыдущих задачах мы неявно пользовались тем, что если у последовательности есть предел, то он единственен. Докажите это.

Другими словами, докажите, что не может возникнуть такой ситуации:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = b$,
- $a \neq b$.

Пример. Пусть у последовательности x_n два предела – число 3 и число 10.

- Число 3 это предел. Поэтому, начиная с некоторого номера N_1 все элементы последовательности лежат в 1-окрестности числа 3, то есть в интервале $(2, 4)$. Будем считать, что $N_1 = 500$.
- Число 10 это предел. Поэтому, начиная с некоторого номера N_2 все элементы последовательности лежат в 1-окрестности числа 10, то есть в интервале $(9, 11)$. Будем считать, что $N_2 = 800$.

Тогда x_{900} лежит и в $(2, 4)$, и в $(9, 11)$ (так как $900 \geq 500$ и $900 \geq 800$). Но это невозможно, так как интервалы $(2, 4)$ и $(9, 11)$ не пересекаются. Противоречие.

Для решения этой задачи вам потребуется обобщить это рассуждение на случай произвольных a, b, N_1, N_2.

Подсказка 1. Рассмотрите $\frac{|a-b|}{2}$-окрестности точек a и b.

Подсказка 2. Вспоминаем определение предела: если мы возьмём какую угодно окрестность предела, то начиная с некоторого номера все члены последовательности будут лежать в этой окрестности. А как будут выглядеть $\frac{|a-b|}{2}$-окрестности точки a и точки b? Попробуйте найти противоречие в нашем случае, когда $a \neq b$.

Решение. Допустим, и a, и b являются пределом последовательности. Пусть N_a – номер, начиная с которого последовательность не покидает $\frac{|a-b|}{2}$-окрестность точки a. Пусть N_b – номер, начиная с которого последовательность не покидает $\frac{|a-b|}{2}$-окрестность точки b. Тогда начиная с номера $\max(N_a, N_b)$ элементы последовательности лежат в пересечении $\frac{|a-b|}{2}$-окрестностей точек a и b. Но эти окрестности не пересекаются. Противоречие.

Задача 3

На прошлом уроке мы определили, что такое ограниченная последовательность. В этой задаче мы попробуем связать понятия сходимости и ограниченности.

1. Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.
2. Верно ли обратное? То есть верно ли, что если последовательность ограничена, то она сходится?

Пример. Сходящаяся последовательность $\left\{\frac{10}{n}\right\} = \frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \frac{10}{3}, \ldots$ ограничена снизу числом -1 и сверху числом 11.

Подсказка. Пункт 1. Конечное множество точек всегда ограничено. Множество точек, которые попадают в некоторую окрестность числа, тоже ограничено.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = 1$. Тогда начиная с некоторого номера N все члены последовательности попадают в 1-окрестность точки a. Вне этой окрестности лежит конечное число членов последовательности: $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$.

Подсказка. Пункт 2. Вспомните последовательности из десятого шага прошлого урока.

Решение. Пункт 1. По определению, начиная с некоторого номера N все члены последовательности попадают в 1-окрестность точки a (предела последовательности). Тогда для всех $n \geq N$ выполнено $-1 < x_n - a < 1$, или, эквивалентно, $-1 + a < x_n < 1 + a$. Тогда, положив $C_1 = \max(|a+1|, |a-1|)$, получим, что $|x_n| < C_1$ для всех $n \geq N$. Теперь пусть $C_2 = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|)+1$. Тогда для $C = \max(C_1, C_2)$ и всех натуральных n мы доказали требуемое: $|x_n| < C$.

Решение. Пункт 2. Если последовательность ограничена, то она не обязательно сходится. Пример ограниченной последовательности, которая не сходится, подойдёт последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Она ограничена, ведь $-2 < x_n < 2$ для всех n. То, почему $\{x_n\}$ не сходится, подробно объяснено во второй задаче прошлого урока.

Задача 4

Допустим, про последовательность $\{x_n\}$ известно, что она сходится и её предел равен a. Докажите, что тогда последовательность $\{42 + x_n\}$ тоже сходится. Чему будет равен её предел?

Что можно сказать про сходимость последовательности $\{x_n - 33\}$? Тот же вопрос для последовательности $\{33 - x_n\}$.

Возможно, вы заметили, что эти последовательности чем-то похожи. Попробуйте сформулировать более общие утверждения вида: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, то <какая-то другая последовательность> сходится к <чему-то>.

Подсказка. Запишите определение предела, которое мы знаем (то есть предела последовательности $\{x_n\}$), и которое хотим доказать (то есть предела последовательностей $\{42 + x_n\}$, $\{x_n - 33\}$ и $\{33 - x_n\}$).

Решение. Допустим, последовательность $\{x_n\}$ сходится к a. Тогда для любого числа $c \in \mathbb{R}$:

- последовательность $\{c + x_n\}$ сходится к $c + a$,
- последовательность $\{c - x_n\}$ сходится к $c - a$

В примерах из нашей задачи:

- последовательность $\{42 + x_n\}$ — это $\{c + x_n\}$, где $c = 42$,
- последовательность $\{x_n - 33\}$ — это $\{c + x_n\}$, где $c = -33$,
- последовательность $\{33 - x_n\}$ — это $\{c - x_n\}$, где $c = 33$.

Докажем сразу утверждение общего вида. Итак, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1 такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N_1$. Мы же хотим доказать, что

- для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_2 такой, что $|c + x_n - (c + a)| < \varepsilon$ для всех $n \geq N_2$. Видим, что $c + x_n - (c + a) = x_n - a$ и, значит, мы получили то же самое утверждение и можно взять $N_2 = N_1$.
- для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_3 такой, что $|c - x_n - (c - a)| < \varepsilon$ для всех $n \geq N_3$. Видим, что $c - x_n - (c - a) = x_n - a$, то есть мы опять получили то же самое утверждение и можно взять $N_3 = N_1$.

Задача 5

Допустим, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к a и b соответственно. Докажите, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится к $a + b$.

Сокращённая формулировка: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a, \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = b \implies \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

И ещё одна. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$

Комментарий. Может показаться, что альтернативные формулировки — это переливание из пустого в порожнее. Однако, если вы попробуете сказать то же самое утверждение другими словами, оно может стать понятнее.

Подсказка. Если x_n лежит в ε-окрестности точки a, а y_n в ε-окрестности точки b, то $x_n + y_n$ лежит в 2ε-окрестности точки $a + b$.

Какие окрестности точек a и b нужно взять, чтобы $x_n + y_n$ лежало в ε-окрестности точки $a + b$?

Решение. Пусть N_a – номер, начиная с которого последовательность $\{x_n\}$ не покидает $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность точки a. Пусть N_b – номер, начиная с которого последовательность $\{y_n\}$ не покидает $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность точки b. Тогда начиная с номера $\max(N_a, N_b)$ элементы последовательности $\{x_n + y_n\}$ не покидают ε-окрестности точки $a + b$.

Задача 6

Допустим, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к a, b и c соответственно. Сходится ли последовательность $\{x_n + y_n + z_n\}$? Чему равен её предел?

Попробуйте решить эту задачу двумя способами: по определению и через предыдущую задачу.

Подсказка.
Первый способ. Посмотрите на $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестности точек a, b и c.
Второй способ. Представьте последовательность из условия как сумму двух последовательностей.

Решение.
Первый способ. Пусть N_a – номер, начиная с которого последовательность $\{x_n\}$ не покидает $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестность точки a. Пусть N_b – номер, начиная с которого последовательность $\{y_n\}$ не покидает $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестность точки b. Пусть N_c – номер, начиная с которого последовательность $\{z_n\}$ не покидает $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестность точки c. Тогда начиная с номера $\max(N_a, N_b, N_c)$ элементы последовательности $\{x_n + y_n + z_n\}$ не покидают ε-окрестности точки $a + b + c$.

Второй способ. Рассмотрим последовательность $w_n = y_n + z_n$. По предыдущей задаче w_n стремится к $b+c$. Последовательность $\{x_n+y_n+z_n\}$ совпадает с последовательностью $\{x_n+w_n\}$. По предыдущей задаче предел последовательности $\{x_n + w_n\}$ равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{w_n\}$, то есть равен $a + (b + c) = a + b + c$.

2.3 Предел произведения и бесконечно малые последовательности

Задача 1

Бесконечно малой последовательностью называют последовательность, которая сходится к нулю.

Пример 1. Последовательность $\{\frac{-1}{n^2}\}$ сходится к 0, поэтому она бесконечно малая.

Пример 2. Последовательность $\{(-1)^n\}$ не сходится, поэтому не является бесконечно малой.

Пример 3. Последовательность $\{\frac{n+1}{n}\}$ сходится к 1, поэтому не является бесконечно малой.

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n\} := \{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

Другими словами, если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то её можно представить в виде $\{a + \alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Бесконечно малые последовательности помогут проще доказать утверждения про предел произведения последовательностей. Факты про предел частного тоже можно доказывать с их помощью, а можно без них — на ваш вкус.

Подсказка. Запишите определение, которое у нас есть, и которое мы хотим доказать.

Решение. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ определена так: $\{\alpha_n\} = \{x_n-a\}$. По определению сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_n-a| < \varepsilon$ при $n \geq N_1$. А мы хотим доказать, что любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ при $n \geq N_2$. Заметим, что $|\alpha_n - 0| = |x_n - a|$. То есть мы получили два одинаковых утверждения и можем взять $N_1 = N_2$.

Задача 2

Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Докажите, что

1. $\{c \cdot \alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность для любого $c \in \mathbb{R}$,
2. если последовательность $\{\beta_n\}$ бесконечно малая, то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность,
3. если последовательность $\{\beta_n\}$ ограниченная, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Напомним удобное определение ограниченной последовательности:

Определение. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху константой C и ограничена снизу константой $(-C)$ для какого-то $C \in \mathbb{R}$.

Мы уже доказывали, что любая сходящая последовательность ограничена. Любая бесконечно малая последовательность сходится, следовательно, она ограничена. Пользуясь этими двумя наблюдениями и Пунктом 3 мы приходим к таким утверждениями:

- если $\{\beta_n\}$ сходящаяся, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность,
- если $\{\beta_n\}$ бесконечно малая, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Подсказка. Пункт 1. Доказывается по определению предела, нужно только в уже известное определение подставить вместо ε немного другое выражение.

Подсказка. Пункт 2. Вспомните задачу 5 из урока 2.2.

Подсказка. Пункт 3. Воспользуйтесь удобным определением ограниченности.

Решение. Итак, нам известно, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдётся номер $N_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon_1$ при $n \geq N_1$. А также что для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдётся номер $N_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $|\beta_n| < \varepsilon_2$ при $n \geq N_2$. Докажем каждый из пунктов:

1. Мы хотим доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N_3 \in \mathbb{N}$ такой, что $|c \cdot \alpha_n| < \varepsilon$ при $n \geq N_3$. Рассмотрим случаи
   (a) $c = 0$. Тогда $\{c \cdot \alpha_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$, а такая последовательность очевидно стремится к нулю.
   (b) $c \neq 0$. Тогда, так как $|c \cdot \alpha_n| = |c| \cdot |\alpha_n|$, то неравенство $|c \cdot \alpha_n| < \varepsilon$ равносильно $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда, если в определении сходимости последовательности $\{\alpha_n\}$ мы возьмём $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$, то мы сможем взять $N_3 = N_1$.
2. Непосредственно следует из задачи 5 из урока 2.2. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n + \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0 + 0 = 0$.
3. Мы хотим доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N_4 \in \mathbb{N}$ такой, что $|\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon$ при $n \geq N_4$. При этом мы знаем, что последовательность $\{\beta_n\}$ ограничена, а значит найдётся $M > 0$ такое, что $|\beta_n| < M$ для всех натуральных n.

   А тогда если в определении сходимости последовательности $\{\alpha_n\}$ мы возьмём $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$, то для $n \geq N_1$ будет выполнено $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, что равносильно $|\alpha_n| \cdot M < \varepsilon$. Но тогда при $n \geq N_1$ верна такая цепочка:

   $$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < |\alpha_n| \cdot M < \varepsilon.$$

   Таким образом, мы нашли нужное нам число N_1.

Задача 3

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a. Докажите, что для любого действительного числа $c \in \mathbb{R}$ последовательность $\{c \cdot x_n\}$ тоже сходится и её предел равен ca.

Подсказка. Представьте $\{x_n\}$ в виде $\{a + \alpha_n\}$, где a — предел $\{x_n\}$, $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая

Решение. По задаче 1 мы знаем, что можно представить $\{x_n\}$ в виде $\{a + \alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая. Тогда $c \cdot x_n = c \cdot (a + \alpha_n) = ca + c\alpha_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(ca + c\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(ca) + \lim\limits_{n\to\infty}(c\alpha_n)$. Здесь мы воспользовались задачей 5 из урока 2.2 о пределе суммы последовательностей. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}(ca) = ca$ как предел постоянной последовательности, а $\lim\limits_{n\to\infty}(c\alpha_n) = 0$ по пункту 1 задачи 2. Итого $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot x_n = ca$.

Задача 4

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к a и b соответственно. Докажите, что тогда последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится к ab.

Другими словами, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = b \implies \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

И ещё одна формулировка: если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$

Подсказка. Представьте $\{x_n\}$ в виде $\{a + \alpha_n\}$, где a — предел $\{x_n\}$, $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{y_n\}$ — в виде $\{b + \beta_n\}$, где b — предел $\{y_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая.

Решение. По задаче 1 мы знаем, что можно представить $\{x_n\}$ в виде $\{a + \alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{y_n\}$ — в виде $\{b + \beta_n\}$, где $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая. Тогда $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = ab + a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n \beta_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(ab + a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(ab) + \lim\limits_{n\to\infty}(a\beta_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n b) + \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \beta_n)$. Здесь мы воспользовались задачей о пределе суммы последовательностей. Разберёмся отдельно с каждым из слагаемых:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(ab) = ab$ как предел постоянной последовательности,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a\beta_n) = 0$ по пункту 1 задачи 2 ,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n b) = 0$ тоже по пункту 1 задачи 2,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \beta_n) = 0$ по пункту 3 задачи 2.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, что и требовалось доказать.

Задача 5

1. Приведите пример последовательности, стремящейся к $+\infty$,
2. Приведите пример неограниченной последовательности, которая не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.
3. Существует ли последовательность, которая стремится одновременно и к $+\infty$, и к $-\infty$? Если да – приведите пример. Если нет – докажите, что не существует.
4. Обязательно ли последовательность, стремящаяся к $-\infty$, ограничена сверху? Если да – докажите. Если нет – приведите пример последовательности, стремящаяся к $-\infty$, и не ограниченной сверху.

Постарайтесь привести примеры, не совпадающие с примерами, которые мы выписали два шага назад.

Подсказка. Вспомните примеры из первой задачи урока 2.1.

Решение.

1. Пример последовательности, стремящейся к $+\infty$: $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. То есть $x_n = n$. Пусть $C \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Нам надо найти номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ будут больше C. Действительно, в качестве N мы можем взять любое натуральное число, которое больше, чем C. Тогда при $n \geq N$ будет выполнено $x_n = n \geq N > C$.
2. Пример неограниченной последовательности, которая не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

   $\{x_n\} = \{1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, \dots\}$. То есть $x_{2k-1} = k$, $x_{2k} = -k$. То, что она не ограничена, мы объясняли в первой задаче урока 2.1. Предположим, что она стремится к $+\infty$. Тогда для любого $C \in \mathbb{R}$ начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ все члены последовательности больше C. Возьмём, допустим, $C = 0$. Тогда начиная с некоторого номера N будет выполнено $x_n > 0$. Но все члены последовательности с чётными индексами отрицательны, значит, наше предположение было не верно и $x_n \not\to +\infty$. Точно так же доказывается, что $x_n \not\to -\infty$.

3. Последовательность, которая стремится одновременно и к $+\infty$, и к $-\infty$, не существует. Ведь иначе для любого $C \in \mathbb{R}$ начиная с некоторого номера $N_1 \in \mathbb{N}$ все члены последовательности больше C. И при этом начиная с некоторого номера $N_2 \in \mathbb{N}$ все члены последовательности меньше C. Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ должно выполняться и $x_n > C$, и $x_n < C$, что невозможно.

4. Последовательность, стремящаяся к $-\infty$, обязательно ограничена сверху. Действительно, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ все члены последовательности меньше 0. Пусть $C_1 = \max(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})+1$. Тогда для всех n выполнено $x_n < C$, где $C = \max(C, 0)$.

Задача 6

Для каждой из следующих последовательностей
а) найдите предел или покажите, что последовательность не сходится,
б) выясните, будет ли последовательность стремиться к $+\infty$ или $-\infty$:

1. $\left\{\frac{100n^2+1000n+10000}{n^3}\right\}$,

2. $\left\{\frac{5n^3-16n}{n^3} - \frac{80n^4+256n^2}{n^4} + 0.99^n\right\}$,

3. $\left\{\frac{0.001n^5-200n^4}{n^4}\right\}$.

Подумайте, как можно обобщить наблюдаемые вами закономерности. Доказательство более общего факта не обязательно для сдачи этой задачи, но при желании вы можете обсудить его с преподавателем на устной встрече.

Подсказка 1. Мы уже доказали, что предел суммы последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей (задача 7 из урока 1.5).

Подсказка 2. Предел последовательности $\{\frac{a_i n^i}{n^l}\}$ равен нулю при $i < l$ и равен a_i при $i = l$.

Решение. Ответ для общего случая. Пусть дана последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{n^l}\right\}$, где $a_k \neq 0$. Тогда

- если $k < l$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$,
- если $k = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a_k$,
- если $k > l$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$ не существует.

Воспринимать это можно так:

- если $k < l$, то знаменатель растёт быстрее числителя, поэтому предел равен 0,
- если $k = l$, то знаменатель и числитель растут примерно с одинаковой скоростью; важен только старший коэффициент числителя (это a_k), а коэффициенты при младших степенях числителя не имеют значения,
- если $k > l$, то числитель растёт быстрее знаменателя, поэтому последовательность уходит на бесконечность и предела нет.

Докажем, что предел последовательности $\{\frac{a_i n^i}{n^l}\}$ равен нулю при $i < l$ и равен a_i при $i = l$.

Действительно, если $i = l$, то последовательность $\{\frac{a_i n^i}{n^l}\} = \{a_i\}$ постоянна, тогда её предел равен a_i.

Далее, если $i < l$, то $\{\frac{a_i n^i}{n^l}\} = \{\frac{a_i}{n^{l-i}}\}$, где $l - i \geq 1$. Нашу дробь можно представить в виде произведения $l-i$ множителей: $\frac{a_i}{n^{l-i}} = \frac{a_i}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}$. А поскольку каждый из этих множителей стремится к нулю, то и $\{\frac{a_i}{n^{l-i}}\}$ будет стремиться к нулю.

Также мы уже доказали, что предел суммы последовательностей равен сумме пределов последовательностей (если у двух последовательностей, которые мы суммируем, есть предел). Это утверждение очевидным образом обобщается на сумму любого числа последовательностей.

- При $k < l$ последовательность $\{x_n\}$ является суммой последовательностей вида $\{\frac{a_i n^i}{n^l}\}$, где все $i \le k < l$. У каждой из этих последовательностей предел равен 0, значит и у их суммы предел равен 0.

- При $k = l$ последовательность $\{x_n\}$ это сумма последовательности с пределом a_k и нескольких последовательностей с нулевыми пределами, поэтому предел равен a_k.

- При $k > l$ последовательность $\{x_n\}$ представляется в виде суммы последовательностей $\{f_n\} := \{a_k n^{k-l} + a_{k-1}n^{k-l-1} + \dots + a_l\}$ и $\{g_n\} := \left\{\frac{a_{l-1}n^{l-1} + \dots + a_0}{n^l}\right\}$ (в первую последовательность мы отправили все члены со степенями n большими или равными l, а во вторую все остальные члены). Предел последовательности $\{g_n\}$ равен нулю по доказанному (см первый случай из этой задачи). Значит, если у последовательности $\{x_n\}$ есть предел, то у последовательности $\{f_n\} = \{x_n - g_n\}$ тоже есть предел. Если у последовательности $\{f_n\}$ есть предел, то предел последовательности $\{\frac{f_n}{n^{k-l}}\}$ равен 0 (при $k > l$) по задаче о пределе произведения последовательностей. Но предел последовательности $\{\frac{f_n}{n^{k-l}}\}$ равен $a_k \neq 0$ (см второй случай этой задачи). Противоречие.

Ответы:

1. предел последовательности $\left\{\frac{100n^2+1000n+10000}{n^3}\right\}$ равен нулю,

2. предел последовательности $\left\{\frac{5n^3-16n}{n^3} - \frac{80n^4+256n^2}{n^4} + 0.99^n\right\}$ равен -75,

3. у последовательности $\left\{\frac{0.001n^5-200n^4}{n^4}\right\}$ нет предела (конечного). При этом последовательность можно записать в виде $\{0.001n - 200\}$. Такая последовательность стремится к $+\infty$.

2.4 Предел частного

Задача 1

Пусть последовательность $\{y_n\}$ сходится к $b \neq 0$. Также известно, что $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ сходится к $\frac{1}{b}$.

Подсказка. 1) Понадобится доказать, что найдётся такое число $C > 0$, что $\left|\frac{1}{y_n}\right| < C$ для всех натуральных n. Другими словами, нужно доказать, что если $\{y_n\}$ сходится к ненулевому числу, то последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена.

2) Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\} = \left\{\frac{b-y_n}{y_n b}\right\}$ является произведением ограниченной последовательности $\left\{\frac{1}{y_n b}\right\}$ и бесконечно малой последовательности $\{b - y_n\}$. Значит, по Пункту 3 этой задачи, последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\}$ бесконечно малая.

3) Из того, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\}$ бесконечно малая, следует, что $\frac{1}{b}$ это предел последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

Решение. По определению предела найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ при $n \ge N$. А тогда $|b| - |y_n| < |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ и $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ для всех $n \ge N$. Это равносильно тому, что

$$\text{при } n \ge N \text{ выполнено } \left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$$

А тогда, положив $C = \max\left(\left|\frac{1}{y_1}\right|, \dots, \left|\frac{1}{y_N}\right|, \frac{2}{|b|}\right) + 1$, получим, что

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < C \text{ для всех натуральных } n$$

Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{y_n b}\right\}$ ограничена: для всех n выполнено $\left|\frac{1}{y_n b}\right| < \frac{C}{|b|}$. Кроме того по третьей задаче этого урока последовательность $\{b - y_n\}$ бесконечно мала. А тогда последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\} = \left\{\frac{b-y_n}{y_n b}\right\}$ является произведением ограниченной последовательности $\left\{\frac{1}{y_n b}\right\}$ и бесконечно малой последовательности $\{b - y_n\}$.

Значит, по пункту 3 этой задачи, последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\}$ бесконечно малая.

Из того, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\}$ бесконечно малая, снова по третьей задаче этого урока следует, что $\frac{1}{b}$ это предел последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

Задача 2

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к a и b соответственно. Также известно, что $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится к $\frac{a}{b}$.

Другими словами, $\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a, \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = b, b \neq 0, \forall n : y_n \neq 0\right) \implies \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$

Заметим, что условия $b \neq 0$ и $\forall n : y_n \neq 0$ необходимы, чтобы избежать деления на ноль в выражении $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Подсказка. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Решение. В прошлой задаче уже доказывали, что предел произведения последовательностей равен произведению их пределов. Применив это утверждение к последовательностям $\{x_n\}$ и $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, получаем, что предел последовательности $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ равен $\frac{a}{b}$.

Задача 3

Для каждой из следующих последовательностей
а) найдите предел или покажите, что последовательность не сходится,
б) выясните, будет ли последовательность стремиться к $+\infty$ или $-\infty$:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{20n^3+80n+4}{-5n^3-33n^2}\right)$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11n^4-3n^3+77}{8n^5+14n^3-19}\right)$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^5-2n-1}{8n^3+14n^2-19}\right)$.

Попробуйте обобщить эти примеры.

Подсказка 1. Пусть $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ и $Q(n) = b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0$, где $a_k \neq 0$ и $b_l \neq 0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ будет равен

- 0, если $k < l$,
- $\frac{a_k}{b_l}$, если $k = l$,
- $+\infty$, если $k > l$ и $\frac{a_k}{b_l} > 0$,
- $-\infty$, если $k > l$ и $\frac{a_k}{b_l} < 0$.

Подсказка 2. Посмотрите на задачи 4, 6 и 7.
Посмотрите на последовательности $\left\{\frac{P(n)}{n^k}\right\}$ и $\left\{\frac{n^l}{Q(n)}\right\}$.

Решение. По задаче 5 предел последовательности $\left\{\frac{P(n)}{n^k}\right\}$ равен a_k и предел последовательности $\left\{\frac{Q(n)}{n^l}\right\}$ равен b_l. Так как $b_l \neq 0$, по задаче 7 предел последовательности $\left\{\frac{n^l}{Q(n)}\right\}$ равен $\frac{1}{b_l}$. Значит, по задаче 4 предел последовательности $\{f_n\} := \left\{\frac{P(n)}{n^k} \cdot \frac{n^l}{Q(n)}\right\}$ равен $\frac{a_k}{b_l}$. Очевидно, последовательность $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ равна $\{n^{k-l} f_n\}$.

- Пусть $k < l$. Тогда, так как $\{f_n\}$ имеет предел, предел последовательности $\{n^{k-l} f_n\}$ равен 0 как предел произведения последовательностей (ведь $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-l} = 0$ при $k < l$).
- Пусть $k = l$. Тогда, $\{n^{k-l} f_n\} = \{f_n\}$, поэтому предел $\{n^{k-l} f_n\}$ равен $\frac{a_k}{b_l}$.
- Пусть $k > l$. Тогда, так как $\{f_n\}$ имеет предел $\frac{a_k}{b_l}$, а предел предел последовательности $\{n^{k-l}\}$ равен $+\infty$ при $k > l$, то предел последовательности $\{n^{k-l} f_n\}$ равен $+\infty$ при $\frac{a_k}{b_l} > 0$ и $-\infty$ при $\frac{a_k}{b_l} < 0$.

Ответы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{20n^3+80n+4}{-5n^3-33n^2}\right) = -4,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{11n^4-3n^3+77}{8n^5+14n^3-19}\right) = 0,$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^5-2n-1}{8n^3+14n^2-19}\right) = +\infty.$