Независимые случайные величины

На первой неделе мы уже видели, как независимость событий помогает в решении задач. В этом уроке мы введём похожее понятие – *независимость случайных величин* – которое тоже часто будет нами использоваться в дальнейшем.

В конце урока мы посмотрим на *независимые и одинаково распределённые* случайные величины, а заодно узнаем определение *произведения* вероятностных пространств.

Независимые случайные величины

Для начала вспомним, что мы говорили про независимые события:

- По определению, события A и B независимы, если и только если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- При $P(B) \neq 0$ события A и B независимы, если и только если $P(A|B) = P(A)$.
- При $P(A) \neq 0$ события A и B независимы, если и только если $P(B|A) = P(B)$.
- Другими словами, знание о том, что событие B произошло, не меняет вероятность, которую мы приписываем A.

Теперь определим независимые случайные величины.

Определение. Случайные величины X и Y *независимы*, если для любых $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ события $X = a$ и $Y = b$ независимы. То есть:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : P(X = a \ \cap Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b).$$

Попробуем понять, почему определение именно такое. Что значит независимость событий $X = a$ и $Y = b$? Допустим, мы узнали, что $Y = b$. Эта информация должна никак не поменять вероятность, которую мы приписываем событию $X = a$. И такое условие должно быть выполнено для всех a и b: что бы мы ни узнали про значение Y, это не влияет на вероятность любого из результатов X.

Другими словами, знание о том, чему оказалось равно Y, никак не помогает нам понять, чему равно X.

- При $P(Y = b) \neq 0$ записать независимость событий $X = a$ и $Y = b$ можно так: $P(X = a|Y = b) = P(X = a)$.
- Как мы помним, независимость это симметричное условие, поэтому при $P(X = a) \neq 0$ можно использовать и такую запись: $P(Y = b|X = a) = P(Y = b)$.

Пример 1

Мы бросаем две честные монетки. Случайная величина X равна 1, если на первой монетке выпал орёл, и ноль в противном случае. Случайная величина Y равна 1, если на второй монетке выпал орёл, и ноль в противном случае. Докажем, что эти случайные величины независимы.

Неформально. Ясно, что знание результата первого броска никак не помогает нам предсказать результат второго броска.

Доказательство. Во-первых, достаточно проверять только такие a и b, что $P(X = a) \neq 0$ и $P(Y = b) \neq 0$. Действительно, если $P(X = a) = 0$ или $P(Y = b) = 0$, то равенство $P(X = a \cap Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$ автоматически выполняется – в обеих частях равенства стоит ноль.

Значит, нам нужно проверить четыре случая, вот они:

- если $a = 0, b = 0$, то $P(X = 0 \cap Y = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$.
- если $a = 0, b = 1$, то $P(X = 0 \cap Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 0) \cdot P(Y = 1)$.
- если $a = 1, b = 0$, то $P(X = 1 \cap Y = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$.
- если $a = 1, b = 1$, то $P(X = 1 \ \cap Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$.

Мы доказали, что для любых a и b равенство $P(X = a \cap Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$ выполнено. Значит, X и Y независимы.

Пример 2

Мы бросаем две честные монетки. Случайная величина X равна 1, если на первой монетке выпал орёл, и ноль в противном случае. Случайная величина Z равна суммарному количеству орлов на всех монетках. Докажем, что эти случайные величины зависимы.

Неформально. Действительно, пусть мы узнали, что $X = 0$, то есть что на первой монетке выпала решка. Даёт ли это нам какую-то информацию о суммарном числе орлов? Даёт – например, теперь мы знаем, что Z точно не может равняться двум. При этом до того, как мы узнали, что $X = 0$, мы считали, что $P(Z = 2) = 0.25 \neq 0$. Строго это записывается так.

Доказательство. Рассмотрим $a = 0, b = 2$. Ясно, что $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ и $P(Z = 2) = \frac{1}{4}$. При этом $P(X = 0 \ \cap Z = 2) = 0$. Значит:

$$P(X = 0 \ \cap Z = 2) = 0 \ \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ = P(X = 0) \cdot P(Z = 2).$$

Следовательно, X и Z не независимы.

Обозначение. Часто в обозначениях событий вида $X = a \ \cap Z = b$ знак пересечения заменяют запятой. Например, $P(X = a \ \cap Z = b)$ можно записывать как $P(X = a, \ Z = b)$.

Выберите все пары независимых случайных величин.

Выберите все подходящие ответы из списка

Номинал первой и второй вытянутой карты (без возвращения)
Выпадение решки и прилёт инопланетян
Количество осадков, выпавших в вашем городе с 14:00 до 15:00, и количество вызовов такси с 14:00 до 15:00
Первый и второй бросок кубика

Выберите все пары независимых случайных величин.

Выберите все подходящие ответы из списка

Размер ноги и длина волос человека

Уровень IQ и рост человека

Число преступников и число театров в городе

Пример 1

Пусть случайная величина X задана функцией $p_X(1) = 0.4$, $p_X(3) = 0.1$, $p_X(5) = 0.5$, а случайная величина Y задана функцией $p_Y(0) = 0.2$, $p_Y(2) = 0.7$, $p_Y(6) = 0.1$, X и Y независимы. Давайте найдём $p_{X \cdot Y}(30) = P(X \cdot Y = 30)$.

Из задания ясно, что $X \cdot Y = 30$ тогда и только тогда, когда $X = 5$, а $Y = 6$. Тогда $P(X \cdot Y = 30) = P(X = 5 \cap Y = 6) = P(X = 5) \cdot P(Y = 6) = 0.05$.

Пример 2

Пусть случайная величина X задана функцией $p_X(2) = 0.45$, $p_X(4) = 0.4$, $p_X(7) = 0.15$, а случайная величина Y задана функцией $p_Y(1) = 0.2$, $p_Y(4) = 0.7$, $p_Y(8) = 0.1$, X и Y независимы. Давайте найдем $p_{X+Y}(8) = P(X + Y = 8)$.

Заметим, что сумма случайных величин равна 8 либо когда $X = 4$ и $Y = 4$, либо когда $X = 7$ и $Y = 1$. Следовательно, $P(X + Y = 8) = P((X = 4 \cap Y = 4) \cup (X = 7 \cap Y = 1)) = P(X = 4) \cdot P(Y = 4) + P(X = 7) \cdot P(Y = 1) = 0.31$.

Заполните пропуски

1. Случайные величины X и Y независимы. Пусть $p_X(10) = 0.5$, $p_X(11) = 0.2$, $p_X(15) = 0.3$, а $p_Y(-3) = 0.25$, $p_Y(2) = 0.625$, $p_Y(5) = 0.125$. Чему равно $p_{X+Y}(20)$? ______

2. Случайные величины X и Y независимы. Пусть $p_X(-2) = 0.16$, $p_X(3) = 0.44$, $p_X(5) = 0.4$, а $p_Y(-4) = 0.7$, $p_Y(5) = 0.05$, $p_Y(10) = 0.25$. Чему равно $p_{X \cdot Y}(-20)$? ______

Задача с проверкой. Независимые случайные величины 1

В конце прошлой недели мы поняли, что вычисление математического ожидания НЕ перестановочно с умножением. То есть не всегда выполнено $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.

Задача. Докажите, что если X и Y независимы, то $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.

Задача для проверки. Пусть даны две независимые случайные величины X и Y, для которых $p_X(3) = 0.2$, $p_X(7) = 0.8$, а $p_Y(2) = 0.6$, $p_Y(5) = 0.4$. Найдите $E[X \cdot Y]$.

Введите численный ответ

Введите число

Дополнительная задача. Независимые случайные величины

(понять утверждение этой задачи необходимо, а доказывать необязательно)

Обозначение. Аналогично обозначению события $X = a$ введём следующее обозначение. Событие "случайная величина X приняла значение в отрезке $[a, b]$" будем обозначать так: $X \in [a, b]$.

Задача. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ события $X \in [a, b]$ и $Y \in [c, d]$ независимы.

Неформально. Другими словами, если нам стало известно, что величина X приняла значение в интервале $[a, b]$, это никак не помогает нам понять, попала ли величина Y в интервал $[c, d]$.

Независимые случайные величины заданные распределениями

Пример 1. Пусть нам дали распределения двух независимых случайных величин X и Y:

- $X(0) = p, X(1) = 1 - p,$
- $Y(0) = q, Y(1) = 1 - q.$

Каково распределение случайной величины $X + Y$?

Как мы знаем из этого шага предыдущего урока, если бы X и Y не были независимыми, решить эту задачу нам бы не удалось. Но для независимых случайных величин решение есть.

Решение. Случайная величина $X + Y$ может принимать только значения $0, 1, 2.$

- $p_{X+Y}(0) = P(X = 0, Y = 0) = pq$, так как $X + Y = 0$ только если $X = 0$ и $Y = 0$
- $p_{X+Y}(1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = p(1 - q) + q(1 - p)$, так как $X + Y = 1$ только если произошло одно из двух непересекающися событий: $X = 0, Y = 1$ или $X = 1, Y = 0.$
- $p_{X+Y}(2) = P(X = 1, Y = 1) = (1 - p)(1 - q)$, так как $X + Y = 2$ только если $X = 1$ и $Y = 1$

Заметьте, что во всех пунктах выше второе равенство имеет место только из-за независимости величин X и Y.

Обобщим эту задачу.

Пример 2. Пусть даны распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. При этом $X_1, \ldots, X_n$ *совместно независимы*. Дано *выражение* $R(X_1, \ldots, X_n)$. Можно ли найти распределение случайной величины $R(X_1, \ldots, X_n)$?

Здесь мы использовали термины "совместная независимость случайных величин" и "выражение":

- *Совместная независимость* случайных величин определяется аналогично совместной независимости событий, и на следующем шаге мы попросим вас её определить.
- Мы не будем определять слово *выражение*, ограничимся примером. Например, это мы бы называли выражением:

$$R(X_1, \ldots, X_{10}) = 2X_1 + \cos(X_1 \cdot X_3) - 12^{X_5}.$$

Как мы уже видели раньше, случайные величины можно складывать друг с другом и умножать друг на друга. Аналогично, с ними можно делать все остальные операции, которые можно делать с числами – например, брать от них косинус.

Решение. Да, можно найти распределение случайной величины $R(X_1, \ldots, X_n)$. Решение аналогично решению Примера 1. Мы не будем строго записывать решение, ограничимся наброском:

- выпишем всевозможные наборы значений для $X_1, \ldots X_n$, то есть всевозможные события вида $X_1 = a_1, \ \ldots, X_n = a_n,$
- для каждого из таких наборов значений мы можем вычислить $R(X_1, \ldots, X_n)$ – оно будет равно $R(a_1, \ldots, a_n),$
- для каждого из этих событий мы можем найти вероятность, так как величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы,
- исходя из этих данных мы можем найти $P(R(X_1, \ldots, X_n) = c)$ для любого числа c, а это и значит, что мы нашли распределение случайной величины $R(X_1, \ldots, X_n)$

Задача. Дайте определение совместной независимости случайных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Обозначение. Если случайные величины совместно независимы и одинаково распределены, то слово "совместно" часто опускают, и говорят просто "независимые и одинаково распределённые". В английском это звучит как "independent and identically distributed", что сокращают до i.i.d. Ради краткости мы тоже будем пользоваться этим сокращением. Ситуация с i.i.d величинами будет много раз появляться в уроках про ЦПТ и про статистику.

Задача с проверкой. Распределения и независимые случайные величины 2

Задача. Даны k совместно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Все эти величины имеют одинаковое распределение:

- $P(X_i = 0) = q,$
- $P(X_i = 1) = 1 - q.$

Найдите распределение случайной величины $X_1 \cdot\ X_2 \cdot \ldots \cdot\ X_n$.

Задача для проверки. Даны 5 совместно независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3,\ X_4, X_5$. Все они имеют одинаковое распределение:

- $P(X_i = 0) = 0.25,$
- $P(X_i = 1) = 0.75.$

Найдите распределение случайной величины $X_1 \cdot\ X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$ и заполните пропуски.

Заполните пропуски

Округлите ответы до третьего знака после запятой.

1. $p_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_5}(0) =$
2. $p_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_5}(-1) =$
3. $p_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_5}(1) =$
4. $p_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_5}(0.25) =$
5. $p_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_5}(0.5) =$

Распределение $\to$ вероятностное пространство

На последних шагах мы много работали с распределениями и почти не касались вероятностных пространств. Но важно помнить, что само понятие случайной величины держится на определении вероятностного пространства. Сейчас мы постараемся немного вернуться с уровня распределений на уровень вероятностных пространств. А заодно узнаем определение *произведения* вероятностных пространств.

Пусть нам дали только распределения независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ (распределения не обязательно одинаковые). Можно ли предъявить хотя бы один пример вероятностного пространства, на котором эти случайные величины могли бы быть определены и имели бы такие распределения? В частности, если нам дали выражение $R(X_1, \ldots, X_k)$, то на каком пространстве мы можем определить случайную величину $R(X_1, \ldots, X_k)$?

Вероятностное пространство, построенное по распределению

Как мы знаем, если нам дано только распределение случайной величины, то по нему нельзя однозначно восстановить вероятностное пространство, на котором эта величина определена.

Тем не менее, иногда нам нужно построить хоть какое-то вероятностное пространство, на котором эта случайная величина определена.

Делают это так. Пусть распределение случайной величины X таково: X принимает только значения $x_1, \ldots, x_n$, и вероятности, соответствующие этим значениями, равны $P_1, \ldots, P_n$. Тогда построим такое вероятностное пространство: $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ с вероятностями $P(x_i) = P_i$. Определим на этом вероятностном пространстве случайную величину X так: $X(\omega) = \omega$ для любого $\omega \in \Omega$. То есть, например, на исходе x_1 случайная величина X принимает значение x_1. Ясно, что построенная случайная величина X действительно имеет требуемое распределение.

Пример 1. Дано такое распределение случайной величины: $p_X(1) = 0.5, p_X(2) = 0.4, p_X(3) = 0.1$. Тогда мы построим $\Omega = \{1, 2, 3\}$ с $P(1) = 0.5, P(2) = 0.4, P(3) = 0.1$. И определим на нём X как $X(\omega) = \omega$ для любого $\omega \in \Omega$.

Комментарий. Можно думать про построенное вероятностное пространство так. Это минимальное вероятностное пространство, на котором можно определить случайную величину с требуемым распределением. Действительно, если все x_i различны и все P_i не равны 0, то в соответствующем вероятностном пространстве не может быть меньше n исходов. В нашем пространстве их ровно n.

Произведение вероятностных пространств

Определение. Пусть даны два вероятностных пространства с пространствами исходов Ω_1 и Ω_2, и функциями вероятности P_1 и P_2 соответственно. Тогда их *произведение* это вероятностное пространство $\Omega_1 \times \Omega_2$, определённое так:

- исходы в этом вероятностном пространстве это всевозможные пары (ω_1, ω_2) с $\omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2$,
- вероятности соответствующих исходов равны $P(\omega_1, \omega_2) := P_1(\omega_1) \cdot\ P_2(\omega_2)$

Пример 2. Мы бросаем честный кубик и честную монетку. Вероятностное пространство, соответствующее кубику, имеет пространство исходов $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вероятностное пространство, соответствующее монетке, имеет пространство исходов $\Omega_2 = \{\text{орёл, решка}\}$. По ним можно построить $\Omega_1 \times \Omega_2$. Вероятность каждого исхода в $\Omega_1 \times \Omega_2$ равна $\frac{1}{12}$, например

$$P(4, \text{решка}) := P_1(4) \cdot P_2(\text{решка}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Аналогично можно построить произведение любого числа вероятностных пространств, например $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$.

Пример 3. На самом деле, в предыдущих задачах мы уже много раз строили произведения вероятностных пространств, просто не назвали это так. Пользуясь обозначениями из предыдущего примера, $\Omega_1 \times\ \Omega_1$ это вероятностное пространство, соответствующее двум броскам кубика (оно нам встречалось на этом шаге). А произведение $\underbrace{\Omega_2\ \times\ \Omega_2\ \times \ldots\ \times \Omega_2}_{k}$ это вероятностное пространство, соответствующее k броскам монеты.

Итог

Вернёмся к вопросу из начала предыдущего шага.

> *Пусть нам дали только распределения независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ (распределения не обязательно одинаковые). Можно ли предъявить хотя бы один пример вероятностного пространства, на котором эти случайные величины могли бы быть определены и имели бы такие распределения? В частности, если нам дали выражение $R(X_1, \ldots, X_k)$, то на каком пространстве мы можем определить случайную величину $R(X_1, \ldots, X_k)$?*

Пусть даны распределения независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_k$. По каждому X_i построим вероятностное пространство с пространством исходов Ω_i, используя конструкцию из предыдущего шага. Затем возьмем произведение всех этих вероятностных пространств и получим $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k$. Теперь давайте определим на Ω случайные величины $X_1, \ldots, X_k$, так, что они будут независимы и иметь требуемые распределения.

Любой исход из пространства исходов Ω имеет вид $(a_1, \ldots, a_k)$. Определим значение случайной величины X_i на этом исходе: $X_i(a_1, \ldots, a_k) := a_i$. Мы не будем доказывать, что определённые так $X_1, \ldots, X_k$ независимы и имеют требуемые распределения, хотя это доказательство простое и прямолинейное. При желании вы можете доказать это самостоятельно.

На этом же вероятностном пространстве теперь можно определять $R(X_1, \ldots, X_k)$ для любого выражения R.

Что мы прошли на этом уроке

- Определили, что случайные величины X и Y называются *независимыми*, если

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : P(X = a \ \cap Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b).$$

- Посмотрели на i.i.d. величины.
- Аналогично первой неделе ввели понятие совместно независимости случайных величин.
- Узнали определение произведения вероятностных пространств.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- познакомимся с одной из главных характеристик случайной величины — *дисперсией*
- пройдём несколько её полезных свойств