Дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины

На этом уроке мы пройдём ещё одну важную характеристику случайной величины — *дисперсию*. Мы поймём, как она считается в случае абсолютно непрерывной случайной величины, а также разберёмся, когда она существует. И посчитаем дисперсию нескольких конкретных распределений.

Дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины

Когда мы определяли дисперсию дискретной случайной величины, мы получили две эквивалентные формулы:

1. $Var(\xi) = E[(\xi - E\xi)^2]$
2. $Var(\xi) = E[\xi^2] - (E[\xi])^2$

Эти же формулы мы будем использовать и для непрерывного случая. Нам будет удобнее использовать вторую формулу.

Можно сделать вывод, что для того, чтобы была определена дисперсия ξ, как минимум необходимо, чтобы было определено математическое ожидание ξ. Из второй формулы также можно сделать вывод, что необходимо, чтобы было определено $E[\xi^2]$. В свою очередь, если определены $E[\xi]$ и $E[\xi^2]$, то вторая формула позволяет нам записать ответ. На самом деле, если определять через первую формулу, то те же самые условия являются необходимыми и достаточными: это можно увидеть из доказательства эквивалентности формул в дискретном случае на этом шаге.

Как считать $E[\xi^2]$?

Если сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx$, то его значение равняется $E[\xi^2]$. Верен и более общий факт:

Утверждение. Если функция f непрерывна, и сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ p_\xi(x)dx$, то его значение равняется $E[f(\xi)]$.

Пример. Пусть случайная величина ξ имеет функцию плотности p_ξ. Тогда

$$E[\xi^3 - 5\xi^2 + 7] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^3 - 5x^2 + 7)p_\xi(x)dx.$$

Доказывать это утверждение мы не будем. Один из способов убедиться в его истинности — посмотреть на псевдо-мат.ожидания.

Формальное определение

После того как мы разобрались со всеми составными частями формул выше, можно сформулировать формальное определение дисперсии.

Определение. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью p_ξ. Если интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\ p_\xi(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\ p_\xi(x)dx$ сходятся, то дисперсия $Var(\xi)$ определена и равняется

$$Var(\xi) := E[\xi^2] - E[\xi]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\ p_\xi(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\ p_\xi(x)dx\right)^2.$$

Пример. Пусть ξ равномерно распределена на отрезке $[3, 7]$. То есть $p_\xi(x) = \frac{1}{4}$ если $x \in [3, 7]$, и $p_\xi(x) = 0$ если $x \notin [3, 7]$. Найдём $Var(\xi)$.

Решение. Мы уже узнали из этого шага, $E[\xi] = 5$. Так что осталось найти $E[\xi^2]$.

$$E[\xi^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x) dx = \int\limits_{3}^{7} x^2 \, p_\xi(x) dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что вне отрезка $[3, 7]$ функция p_ξ обращается в ноль.

$$\int\limits_{3}^{7} x^2 p_\xi(x) dx = \int\limits_{3}^{7} x^2 \cdot \frac{1}{4} \, dx$$

Первообразная функции $x^2 \cdot \frac{1}{4}$ это $(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{4})$, поэтому

$$\int\limits_{3}^{7} x \cdot \frac{1}{4} \, dx = \left(\frac{7^3}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3^3}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{343 - 27}{3 \cdot 4} = \frac{316}{12} = 26\frac{1}{3}.$$

Значит,

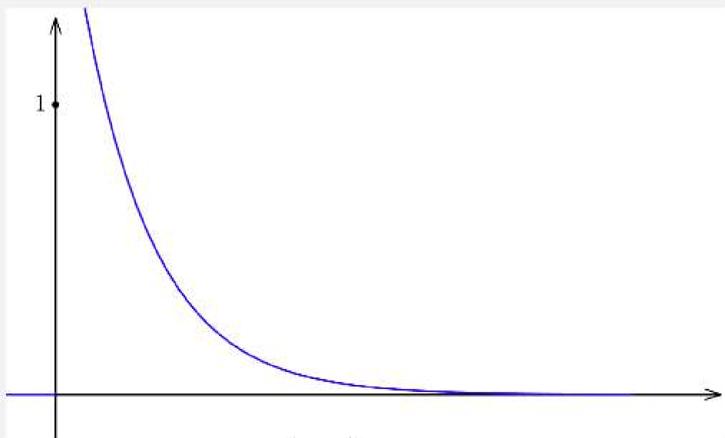
$$Var(\xi) = E[\xi^2] - E[\xi]^2 = 26\frac{1}{3} - 5^2 = \frac{4}{3}.$$

Задача. Пусть ξ равномерно распределена на отрезке $[2, 10]$. Если дисперсия ξ определена, то запишите в ответ её значение, округленное с точностью до 3 знаков после запятой. Если не определена, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Найдите дисперсию экспоненциального распределения с показателем $\lambda = 2$ или убедитесь, что она не определена.



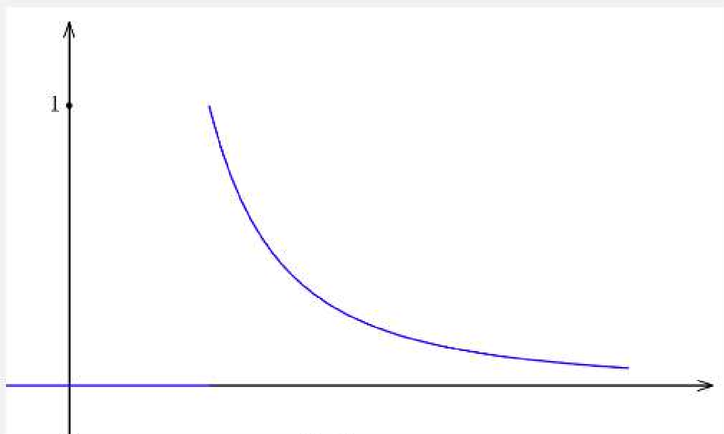
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если дисперсия ξ определена, то запишите в ответ её значение, округленное с точностью до 3 знаков после запятой. Если не определена, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Найдите дисперсию случайной величины, имеющей распределение Парето с параметрами $x_m = \alpha = 1$ или убедитесь, что она не определена.



$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если дисперсия ξ определена, то запишите в ответ её значение, округленное с точностью до 3 знаков после запятой. Если не определена, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Что мы прошли на этом уроке

- Мы узнали главный итог этого урока — с помощью плотности мы можем посчитать дисперсию случайной величины:

$$Var(\xi) := E[\xi^2] - E[\xi]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_\xi(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\xi(x)dx\right)^2.$$

  При условии, что все необходимые интегралы сходятся.
- Нашли дисперсию для нескольких классических распределений

Что нас ждёт на следующей неделе

Нам осталось

- познакомиться с Законом больших чисел
- изучить Центральную предельную теорему
- разобрать базовые принципы статистики