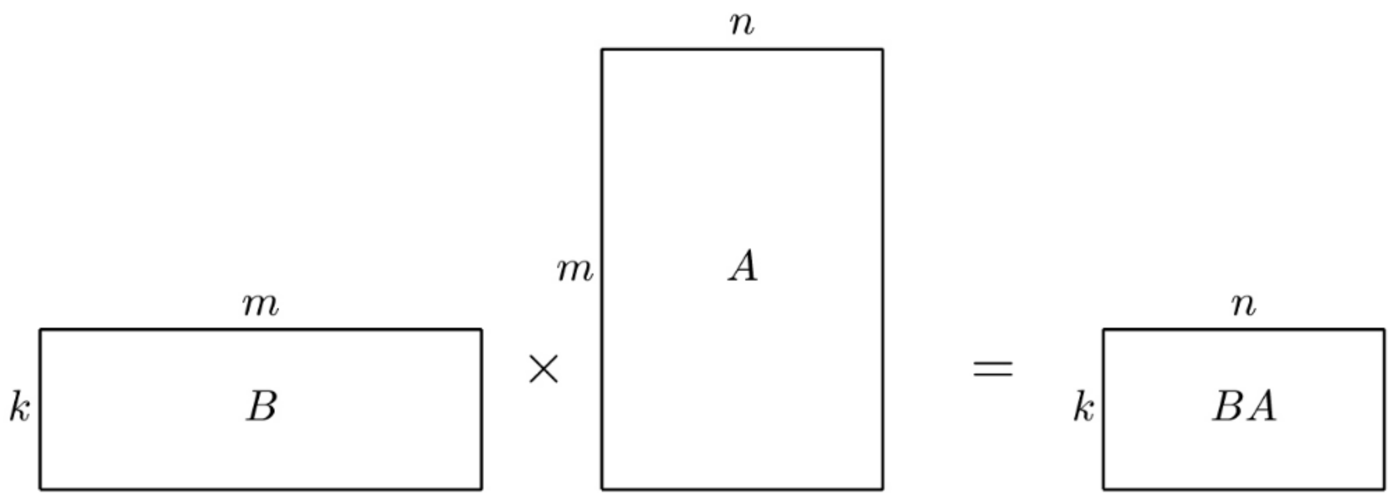
Давайте изучим некоторые свойства умножения матриц.

Размеры матриц и умножение

Пусть матрица A имеет размер m_1 на n, то есть задаёт отображение : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$. А матрица B имеет размер k на m_2, то есть задаёт отображение $\mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^k$. Если $m_1 \neq m_2$, то умножение матрицы B на матрицу A не определено. Вот почему:

1. Нельзя взять композицию отображений, задаваемых матрицами B и A. В самом деле, матрица A на выходе даёт вектор из пространства $\mathbb{R}^{m_1}$, а матрица B принимает на вход вектор из пространства $\mathbb{R}^{m_2}$. Так как $m_1 \neq m_2$, пространство $\mathbb{R}^{m_1}$ не совпадает с $\mathbb{R}^{m_2}$.
2. Умножение нельзя определить даже формально (воспользовавшись нашими правилом умножения матриц).
   Правило умножения матриц требует умножать строки матрицы B на столбцы матрицы A. Это можно сделать только если строки B имеют ту же длину, что и столбцы A. То есть только если $m_1 = m_2$.

То есть произведение BA определено, только если число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A



Выберите верные утверждения:

Выберите все подходящие ответы из списка

Матрица A имеет размер 5 на 3, матрица B имеет размер 4 на 5, тогда определено произведение BA.
Матрица A имеет размер 10 на 7, матрица B имеет размер 7 на 10, тогда определено произведение BA.
Матрица A имеет размер 4 на 3, матрица B имеет размер 6 на 4, тогда определено произведение AB.
Матрица A имеет размер 4 на 5, матрица B имеет размер 5 на 8, тогда определено произведение AB.

Задача с проверкой. Умножение матриц 4

Единичная матрица

Посмотрим на такую квадратную матрицу размера n на n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У неё стоят единицы на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (эта диагональ называется *главной*). А на всех остальных местах стоят нули. Такая матрица называется *единичной*. Чаще всего её обозначают буквами E или I. Размер матрицы E часто не указывают, когда считают его понятным из контекста. Если важно подчеркнуть, что матрица именно размера n на n, то добавляют нижний индекс: E_n, I_n.

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $E\,\vec{x} = \vec{x}$.
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $EA = AE = A$. Из этого и предыдущего пункта ясно, почему E называется единичной матрицей.
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $E_n A = A E_m = A$

Найдите, чему будет равно $\begin{pmatrix} 123 & 500 & 444 \\ 719 & 43 & 11 \end{pmatrix} E_3$.

Ответ запишите в виде `((1, 2), (3, 4))`, где `(1, 2)`— строка вашей матрицы. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Умножение матриц 5

Пусть A – любая матрица, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – любое число. Умножим все коэффициенты матрицы A на λ, и будем называть полученную матрицу (λA). Вот так:

$$2\begin{pmatrix}1 & -5\\ 3 & 0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}2 & -10\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $(\lambda E)\vec{x} = \lambda\vec{x}$. То есть λE растягивает все векторы в λ раз
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A$
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $(\lambda E_n)A = A(\lambda E_m) = \lambda A$

Выберите верные утверждения:

Выберите все подходящие ответы из списка

Для любой матрицы X верно, что $(-E)X = -X$.

$$(3E_3)\begin{pmatrix}0 & -4 & 3\\ 3 & -5 & -3\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4 & 3\\ 3 & -15 & -3\\ 3 & 4 & -15\end{pmatrix}$$

$$(4E_3)\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ -5 & -2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 16 & 0\\ -20 & -8 & 12\\ -4 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$(5E_5)\begin{pmatrix}-2\\ -9\\ -8\\ 6\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -4\\ -3\\ 11\\ 11\end{pmatrix}$$

Вычислите, чему равно $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Умножение матриц 6

Блочные матрицы

Иногда матрицы удобнее записывать в виде нескольких блоков, каждый из которых соответствует меньшей матрице. Например, пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда мы можем так определить *блочную* матрицу $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{11} & y_{12} \\ 0 & 0 & y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

При этом два нуля в этой блочной матрице, конечно, обозначают заполненные нулями матрицы размера 2 на 2.

Комментарий. Блочные матрицы это не какой-то другой вид матриц, а просто другая запись обычных матриц.

Задача. Пусть X_1 и X_2 – матрицы размера k на k, а Y_1 и Y_2 – матрицы размера $(n-k)$ на $(n-k)$. Докажите, что верно следующее выражение, составленное из матриц размера n на n:

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1X_2 & 0 \\ 0 & Y_1Y_2 \end{pmatrix}$$

При этом два нуля в этих матрицах обозначают заполненные нулями матрицы размера $(n-k)$ на k или k на $(n-k)$.

Пример. Пусть $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда верно

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} X_1X_2 & 0 \\ 0 & Y_1Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

то есть вторая матрица просто является блочным представлением первой.

Задача для проверки. Вычислите, чему равно $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Умножение матриц 7

Вычислите произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -67 & 94 \\ 0 & 0 & 75 & 63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -39 & -62 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Умножение матриц 8

Некоммутативность умножения матриц

Определение. Умножение называется *коммутативным*, если $B \cdot A = A \cdot B$ для любых A и B.

1. Пусть A и B – матрицы. Докажите, что матрицы AB и BA определены и имеют одинаковый размер, если и только если A и B это квадратные матрицы одинакового размера.
2. Приведите пример матриц A и B размера 2 на 2, таких что $AB \neq BA$.
3. Пусть $n > 2$. Приведите пример матриц A и B размера n на n, таких что $AB \neq BA$.

Выберите верные утверждения:

Выберите все подходящие ответы из списка

Поскольку умножение матриц некоммутативно, найдутся такие два числа a и b, что $(aE_{10})(bE_{10}) \neq (bE_{10})(aE_{10})$.

Поскольку умножение матриц некоммутативно, найдутся две матрицы A и B размера 1 на 1, что $AB \neq BA$.

Поскольку умножение матриц некоммутативно, найдется такая матрица A размера 3 на 3, что $E_3A \neq AE_3$.

Поскольку умножение матриц некоммутативно, найдутся такие матрицы A и B размера 3 на 3, что $AB \neq BA$.

Что мы прошли на этом уроке

- Мы поняли, что произведение матриц соответствует рассмотрению композиции линейных отображений.
- Вспомнив правило умножения строки на столбец, мы поняли, как умножать друг на друга матрицы.
- Мы доказали, что произведение двух матриц определено, только если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы.
- Мы рассмотрели единичные и блочные матрицы и изучили их свойства.
- А ещё мы заметили, что умножение матриц некоммутативно, то есть зависит от порядка множителей.

Что нас ждёт на следующей неделе

На первом уроке следующей недели мы применим знания о матрицах, чтобы определить *нейронную сеть*. После этого мы углубимся в структуру векторного пространства, изучив подпространства, линейную зависимость и базисы. Затем мы поймем, что такое ранг матрицы и чем он полезен.