Математика для Data Science. Теория вероятностей. Решения задач

Содержание

Замечание. Таким цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

Вероятностное пространство

Задача 1

В этой задаче нет единственного правильного решения. Придумайте какое-нибудь :)

В каждой из этих ситуаций придумайте множество элементарных исходов и их вероятности. Придумайте какое-нибудь событие и найдите его вероятность.

1. У вас дома есть ёлка, украшенная двумя шариками, и кот. Вы выходите из дома и возвращаетесь через полчаса.

2. Вы играете в рулетку. Шарик будет катиться по колесу, пока не остановится в одном из 37-ми секторов: $0, 1, \ldots, 36$.

3. Вы играете в рулетку. Шарик будет катиться по колесу, пока не остановится в одном из 37-ми секторов: $0, 1, \ldots, 36$. За вашим столом также играет племянник владелицы казино, и он сделал ставку на сектор 25.

Подсказка-напоминание. Вероятность должна выдавать числа из отрезка $[0, 1]$. Сумма вероятностей всех элементарных исходов должна быть равна 1.

Решение.

1. Приведём такой пример: $\Omega = \{$"кот не спит и попросит у вас корм", "кот не спит и не попросит у вас корм", "кот спит"$\}$. Допустим, вероятности при этом такие:

   $P($"кот не спит и попросит у вас корм"$) = 0.65$

   $P($"кот не спит и не попросит у вас корм"$) = 0.02$

   $P($"кот спит"$) = 0.33$

   Рассмотрим событие "кот не спит". Его вероятность будет равна $P($"кот не спит"$) = P($"кот не спит и попросит у вас корм"$) + P($"кот не спит и не попросит у вас корм"$) = 0.65 + 0.02 = 0.67$.

   Эту же вероятность можно посчитать так: $P($"кот не спит"$) = 1 -$ $P($"кот спит"$) = 1 - 0.33 = 0.67$.

2. Допустим, Ω состоит из таких элементарных исходов: выпадение $0, 1, \ldots, 36$. Будем считать, что вероятности каждого из этих исходов равны. Поскольку в сумме они должны давать 1, а всего исходов 37, то вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{37}$. В качестве события A рассмотрим выпадение числа, которое нацело делится на 5. Поскольку из чисел от 0 до 37 только 7 делятся на 5, то искомая вероятность равна $P(A) = \frac{5}{37}$.

3. Будем верить в лучшее, так что будем считать, что этот пункт такой же, как и предыдущий :)

Задача 2

Определение. Пусть дано событие A. Тогда событием $\bar{A}$ называется событие, состоящие из всех элементарных исходов, которые не входят в A. Можно произносить $\bar{A}$ как "не A."

Докажите, что $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Подсказка. Вспомните, что по определению сумма вероятностей всех элементарных исходов должна быть равна 1.

Решение. Перепишем равенство $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ так: $P(\bar{A}) + P(A) = 1$. Вспомним, что вероятность каждого события равна сумме вероятностей элементарных исходов, из которых состоит это событие. Тогда в левой стороне равенства мы складываем вероятности элементарных исходов, которые входят в A, с вероятностями элементарных исходов, которые не входят в A. А значит, мы суммируем вероятности всех элементарных исходов вероятностного пространства, и по определению мы должны получить 1.

Равновероятные исходы

Задача 1

Пусть нам известно, что все исходы равновероятны. Докажите, что для любого события A выполнено $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Можно переформулировать утверждение этой задачи так. Если все исходы равновероятны, то чтобы найти вероятность события A нужно

1. найти количество всех элементарных исходов,
2. найти количество элементарных исходов, принадлежащих A,
3. поделить результат второго пункта на результат первого пункта.

Подсказка. Мы уже доказали, что в случае равновероятных исходов вероятность каждого из них равна $\dfrac{1}{|\Omega|}$.

Решение. По определению функции P сумма вероятностей всех элементарных исходов равна 1. Следовательно, если все вероятности всех элементарные исходов равны, то вероятность каждого из них равна $\dfrac{1}{|\Omega|}$.

Событие A состоит из $|A|$ элементарных исходов, а поскольку вероятность события равна сумме вероятностей элементарных исходов, которые в него входят, то $P(A) = \underbrace{\dfrac{1}{|\Omega|} + \cdots + \dfrac{1}{|\Omega|}}_{|\text{A}| \text{ раз}} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Задача 2

Мы бросаем честный шестигранный кубик два раза подряд и записываем результаты первого и второго броска. Тем самым, элементарным исходом будет пара цифр, где первая цифра – результат первого броска, а вторая – результат второго броска. Например, вот элементарный исход: $4, 3$ (на первом броске выпало 4, на втором 3). Можно считать, что вероятности всех элементарных исходов равны (мы докажем равновероятность исходов позже, когда будем обсуждать независимые события).

В этой задаче вероятностное пространство полезно представлять себе в виде таблицы. В таблице номер строки отвечает результату первого броска, номер столбца отвечает результату второго броска. Каждая клетка таблицы отвечает ровно одному исходу. Можно закрашивать исходы, которые относятся к вашему событию, и оставлять незакрашенными исходы, которые не относятся.

$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$
$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$	$2,6$
$3,1$	$3,2$	$3,3$	$3,4$	$3,5$	$3,6$
$4,1$	$4,2$	$4,3$	$4,4$	$4,5$	$4,6$
$5,1$	$5,2$	$5,3$	$5,4$	$5,5$	$5,6$
$6,1$	$6,2$	$6,3$	$6,4$	$6,5$	$6,6$

Опишите вероятностное пространство – множество Ω, алгебру событий F, и функцию P

Решение.

Ω — это все возможные результаты бросания двух кубиков: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$ (все комбинации из таблички выше). Алгебра событий F — это все подмножества Ω. Как было сказано в условии, мы можем считать вероятности всех элементарных исходов равными. Поскольку исходов всего $6 \cdot 6 = 36$, то вероятность каждого из них равна $\dfrac{1}{36}$.

Задача 3

Как и в задаче с предыдущего шага, мы бросаем честный шестигранный кубик два раза подряд и записываем результаты первого и второго броска. Можно считать, что вероятности всех элементарных исходов равны.

1. Какова вероятность, что сумма результатов бросков будет равна 5?
2. Какова вероятность, что сумма результатов бросков будет больше или равна 7?
3. Какова вероятность, что сумма результатов бросков будет чётной?

Решение.

1. Найдём вероятность того, что сумма результатов бросков будет равна 5. Как и написано в подсказке, нарисуем таблицу, в каждой клетке которой исход заменён на сумму двух бросков, и закрасим в ней подходящие нам исходы:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

2. Так же, как и в предудыщем пункте, найдём вероятность того, что сумма результатов бросков будет больше или равна 7:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Получаем, что искомая вероятность равна $\dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$.

3. Снова проделаем то же самое, что и в предыдущих пунктах, чтобы найти вероятность того, что сумма результатов бросков будет чётной:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Мы закрасили ровно половину таблички, поэтому искомая вероятность равна 0.5.

Задача 4

Пусть есть список из k объектов, и дано свойство, которым объект может обладать или не обладать. Например, объекты – батарейки, а свойство – наличие брака. Или объекты – клиенты, а свойство – совершил ли клиент хотя бы одну покупку в нашем приложении за последний месяц. Каждую из таких ситуаций можно описать строкой длины k из нулей и единиц. Место номер i в этой строке будет соответствовать i-ому объекту. На i-ом месте будет стоять единица, если i-ый объект обладает нужным свойством, и ноль в противном случае. Такая интерпретация очень пригодится нам, когда мы будем работать с повторяющимися испытаниями дальше в курсе.

Из-за этого (и по многим другим причинам) полезно рассматривать строки из нулей и единиц фиксированной длины. Более того, полезно рассматривать множество всех строк длины k и строить на нём вероятностное пространство. Это мы сделаем на следующем шаге. Для этого нам пригодится такая задача:

1. Докажите, что есть ровно 2^k разных строк длины k из нулей единиц.

2. Полезное следствие пункта 1. Докажите, что если в множестве X ровно k элементов, то множество всех подмножеств X состоит из 2^k элементов (это долг с конца шага предыдущего урока).

Подсказка. Перед тем, как решать задачу для произвольного k, решите эту задачу для $k = 1$, $k = 2$, и $k = 3$.

Подсказка к пункту 1. Пусть мы доказали, что разных строк длины $(k-1)$ ровно 2^{k-1}. Докажите, что разных строк длины k ровно 2^k.

Решение.

1. Докажем, что есть ровно 2^k разных строк длины k из нулей единиц. Начнём со случая $k = 1$. В таком случае строка будет либо состоять из одной единицы, либо из одного нуля. И действительно таких строк всего $2^1 = 2$.

   Предположим теперь, что мы уже доказали, что разных строк длины $(k-1)$ ровно 2^{k-1}. Докажем теперь, что разных строк длины k ровно 2^k.

   Как можно получить строку длины k? Взять строку длины $(k-1)$ и приписать к ней 0 или 1. Строк длины $(k-1)$ ровно 2^{k-1}. Способов приписать ещё одну цифру всего 2: мы либо приписываем 0, либо 1. Поскольку приписывание этой цифры никак не зависит от вида строки длины $(k-1)$, то всего способов получить строку длины k будет $2^{k-1} \cdot 2 = 2^k$.

   Итак, мы сначала доказали требуемое для $k = 1$, затем, пользуясь доказанным только что утверждением, мы последовательно всё докажем также для случая $k = 2, 3, 4, \ldots$. То есть мы доказали, что для любого натурального k есть ровно 2^k разных строк длины k из нулей единиц.

2. Пусть в множестве X ровно k элементов. Упорядочим эти элементы произвольным образом. Тогда любое подмножество множества X можно задать так: сопоставить 0 тем элементам, которые в подмножество не входят, и 1 — тем элементам, которые в подмножество входят. Тогда различных подмножеств множества X всего столько же, сколько строк длины k, составленных из нулей и единиц. А в первом пункте этой задачи мы как раз доказали, что их 2^k.

Задача 5

Давайте строить вероятностное пространство на множестве всех строк длины k, составленных из нулей и единиц.

Зафиксируем натуральное число k. Перед нами стоит шляпа с бумажками, на каждой бумажке написана строка длины k, составленная из нулей и единиц. Каждая возможная строка длины k встречается в шляпе ровно один раз. Например, если $k = 5$, то бумажка с надписью 10011 будет присутствовать в шляпе ровно в одном экземпляре.

1. Мы вслепую вытаскиваем из шляпы одну бумажку. Какова вероятность, что на вытянутой бумажке не будет ни одной единицы?

2. Какова вероятность, что на вытянутой бумажке будет ровно одна единица?

3. Какова вероятность, что на вытянутой бумажке будет хотя бы одна единица?

Решение.

1. Посчитаем вероятность того, что на вытянутой бумажке не будет ни одной единицы. Такое событие возможно, только если на бумажке написаны все нули. А вероятность этого равна $\frac{1}{2^k}$.

2. Исходов, в которых на вытянутой бумажке будет ровно одна единица, всего k — столько же, сколько существует способов поставить одну единицу в строку длины k (все остальные места будут заполнены нулями). Действительно, единица может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем и так далее до k-ого. Значит, вероятность того, что на вытянутой бумажке будет ровно одна единица, равна $\frac{k}{2^k}$.

3. Вспомним задачу с первой недели: P(на бумажке хотя бы одна единица)$= 1 - P$(на бумажке ни одной единицы). Итого, пользуясь пунктом 2 этой задачи, получаем искомую вероятность $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Условная вероятность

Задача 1

Это несложная задача. Мы добавили её затем, чтобы вы обсудили с преподавателем условную вероятность. И убедились, что вы поняли условную вероятность на нужном уровне строгости.

Мы подбросили монетку два раза. Тем самым, возможные исходы это: оо, ор, ро, рр (орёл это "о", решка это "р"). Будем считать все исходы равновероятными.

1. Известно, что выпал хотя бы один орёл. Какова вероятность того, что выпало два орла?
2. Известно, что выпал хотя бы один орёл. Какова вероятность того, что выпал сначала орёл, а затем решка?
3. Известно, что выпали два разных значения. Какова вероятность того, что выпал сначала орёл, а затем решка?
4. Известно, что выпало два орла. Какова вероятность того, что выпал хотя бы один орёл?

Подсказка. В каждом из пунктов выясните:

- Какое событие мы обозначим за A – из каких исходов оно состоит?
- Какое событие мы обозначим за B – из каких исходов оно состоит?
- Чему равно $P(B)$?
- Чему равно $P(A \cap B)$?
- Чему равно $P(A|B)$?

Решение. Во всех пунктах обозначим известное нам событие за B. А искать будем вероятность $P(A|B)$. Для удобства в начале каждого из пунктов повторим вопрос.

1. Известно, что выпал хотя бы один орёл. Какова вероятность того, что выпало два орла?

   $A =$ "выпало два орла" $= \{$оо$\}$, $B =$ "выпал хотя бы один орёл" $= \{$оо, ор, ро$\}$.

   $P(B) = P(\{\text{оо, ор, ро}\}) = \frac{3}{4}$. Поскольку все элементарные исходы равновероятны, то мы количество элементарных исходов, принадлежащих событию B, разделили на общее количество элементарных исходов. Далее в этой задаче вероятности считаются по тому же принципу.

   $P(A \cap B) = P(\{\text{оо}\} \cap \{\text{оо, ор, ро}\}) = P(\{\text{оо}\}) = \frac{1}{4}$

   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

2. Известно, что выпал хотя бы один орёл. Какова вероятность того, что выпал сначала орёл, а затем решка?

   $A =$ "выпал сначала орёл, затем решка" $= \{$ор$\}$, $B =$ "выпал хотя бы один орёл" $= \{$оо, ор, ро$\}$.

   $P(B) = P(\{\text{оо, ор, ро}\}) = \frac{3}{4}$.

   $P(A \cap B) = P(\{\text{ор}\} \cap \{\text{оо, ор, ро}\}) = P(\{\text{ор}\}) = \frac{1}{4}$

   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

3. Известно, что выпали два разных значения. Какова вероятность того, что выпал сначала орёл, а затем решка?

   $A =$ "выпал выпал сначала орёл, затем решка" $= \{$ор$\}$, $B =$ "выпали два разных значения" $= \{$ор, ро$\}$.

   $P(B) = P(\{\text{ор, ро}\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

   $P(A \cap B) = P(\{\text{ор}\} \cap \{\text{ор, ро}\}) = P(\{\text{ор}\}) = \frac{1}{4}$

   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4. Известно, что выпало два орла. Какова вероятность того, что выпал хотя бы один орёл?

   $A =$ "выпал хотя бы один орёл" $= \{$оо, ор, ро$\}$, $B =$ "выпало два орла" $= \{$оо$\}$.

   $P(B) = P(\{\text{оо}\}) = \frac{1}{4}$.

   $P(A \cap B) = P(\{\text{оо, ор, ро}\} \cap \{\text{оо}\}) = P(\{\text{оо}\}) = \frac{1}{4}$

   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$.

Задача 2

Мы сделали медицинский тест на наличие некоторой болезни тысяче человек. У 900 из них результат теста оказался отрицательным (тест говорит "здоров"), у 100 — положительным (тест говорит "болен").

Впоследствии выяснилось, что среди 900 людей с отрицательным результатом было 60 заболевших, а среди 100 людей с положительным результатом было 50 заболевших.

	Болен	**Здоров**
Отрицательный тест	60	$900 - 60 = 840$
Положительный тест	50	$100 - 50 = 50$

(здесь мы вписали в каждую клетку таблицы не вероятность, а соответствующее число людей)

1. Ещё один человек сдал тест и получил положительный результат. Какова вероятность того, что он болен?

2. Ещё один человек сдал тест и получил отрицательный результат. Какова вероятность того, что он болен?

3. Человек здоров, но пока не знает об этом. Он сдаёт тест. Какова вероятность, что тест по ошибке определит его как больного, то есть даст положительный результат? (такой результат называют ложноположительным)

4. Человек болен, но пока не знает об этом. Он сдаёт тест. Какова вероятность, что тест по ошибке определит его как здорового, то есть даст отрицательный результат? (такой результат называют ложноотрицательным)

Давайте считать, что все тестируемые люди живут в одном и том же городе примерно в одинаковых условиях, имеют схожее состояние здоровья, возраст и т.д (можете обсудить с преподавателем, почему это замечание стоило написать)

Подсказка. Задача решается аналогично задаче с арбузами. Первый шаг — перейти к табличке с вероятностями.

Решение. Построим вероятностное пространство, в котором ровно 4 элементарных исхода с такими вероятностями:

	Болен, B	**Здоров,** $\bar{B}$
Отрицательный тест, A	0.06	0.84
Положительный тест, $\bar{A}$	0.05	0.05

Эту табличку мы получили, разделив числа из таблички из условия на общее количество человек (на 1000). Кроме того, событием A мы назвали множество, состоящее из исходов "тест отрицателен", а событие B — множество, состоящее из исходов "человек болен".

Находить условные вероятности теперь мы будем так же, как обычно, по формуле.

Для удобства в начале каждого из пунктов повторим вопрос.

1. Ещё один человек сдал тест и получил положительный результат. Какова вероятность того, что он болен?

   Итак, нам известно, что произошло событие $\bar{A}$. А надо найти вероятность события B при условии $\bar{A}$: $P\left(B|\bar{A}\right) = \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{0.05}{0.05 + 0.05} = 0.5.$

2. Ещё один человек сдал тест и получил отрицательный результат. Какова вероятность того, что он болен?

   $P\left(B|A\right) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.06}{0.06 + 0.84} \approx 0.0666.$

3. Человек здоров, но пока не знает об этом. Он сдаёт тест. Какова вероятность, что тест даст положительный результат?

   $P(\bar{A}|\bar{B}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0.05}{0.84 + 0.05} \approx 0.0562.$

4. Человек болен, но пока не знает об этом. Он сдаёт тест. Какова вероятность, что тест даст отрицательный результат?

   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.06}{0.06 + 0.05} \approx 0.5455.$

Независимые события

Задача 1

1. Докажите, что при $P(B) \neq 0$ эти утверждения эквивалентны: $P(A) = P(A|B)$ и $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Заметьте, что первая формула выглядит несимметричной по A и B, а во второй формуле роли A и B одинаковы.

2. Докажите, что при при $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ эти утверждения эквивалентны: $P(A) = P(A|B)$ и $P(B) = P(B|A)$

Давайте словами опишем, что мы доказываем в каждом из пунктов.

В пункте 1 мы доказываем, что независимость A и B равносильна условию $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

В пункте 2 мы доказываем, что A независимо от B, если и только если B независимо от A. Поэтому в дальнейшем мы не будем писать, кто от кого независим, а просто будем говорить, что A и B независимы.

Обычно последнюю формулу из пункта 1 используют в определении независимости.
Определение. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Как видите, в таком определении уже не нужно требовать $P(A) \neq 0$ или $P(B) \neq 0$.

Решение.

1. $P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

2. $P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B) = P(B|A)$.

Задача 2

Докажите, что при $P(B) \notin \{0, 1\}$ эти утверждения эквивалентны: $P(A) = P(A|B)$ и $P(A) = P(A|\bar{B})$ (напоминание: символ $\bar{B}$ обозначает событие "не B")

Другими словами, мы доказываем, что независимость A и B равносильна независимости A и $\bar{B}$. На примере это можно понять так. Если событие "чёрная кошка перебежала вам дорогу" не меняет вероятность добраться до работы без происшествий, то и событие "чёрная кошка НЕ перебегала вам дорогу" не меняет вероятность добраться до работы без происшествий.

Решение. По первому пункту предыдущей задачки утверждения из условия эквивалентны таким: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ и $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$.

Выведем из первого утверждения второе (в противоположную сторону вывод аналогичен).

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

В первом равенстве мы использовали формулу полной вероятности: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$. Во втором равенстве мы использовали утверждение $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. В последнем равенстве мы воспользовались утверждением $1 - P(B) = P(\bar{B})$.

Задача 3

Мы бросаем честный кубик два раза подряд. Докажите, что вероятности всех возможных исходов равны. Это утверждение – наш долг с позапрошлого урока.

Подсказка. Вопользуйтесь независимостью первого и второго броска.

Решение. Мы бросаем честный кубик два раза подряд. Выберем любой исход ij из пространства $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$. Вероятность того, что на первом броске выпадет число i равна $\frac{1}{6}$, так как кубик честный. Вероятность того, что на втором кубике выпадет j тоже равна $\frac{1}{6}$. Так как эти два события независимы, вероятность их пересечения равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. А пересечение этих двух событий это как раз исход ij. Значит, вероятность исхода ij равна $\frac{1}{36}$. Так как это верно для любого исхода $ij \in \Omega$, все исходы равновероятны.

Задача 4

В колоде 52 карты. Есть 4 масти: пики, крести, бубны, черви. В каждой масти 13 различных номинаций: $2, 3, \dots, 10$, валет, дама, король, туз.

1. Из колоды случайным образом вытягивается одна карта. Независимы ли события ”вытянули валета” и ”вытянули пику”?

2. Из колоды случайным образом вытягивается одна карта. Независимы ли события ”вытянули валета” и ”вытянули туз”?

Подсказка. Независимость событий можно проверять по любому из эквивалентных определений.

Решение.

1. Пусть событие A — ”вытянули валета” и событие B — ”вытянули пику”. Проверим, выполнено ли равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

   Событие $A \cap B$ — ”вытянули валета пик”. Тогда $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$, поскольку все исходы равновероятны.

   $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$, так как валетов всего 4 .

   $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, ведь пик всего 13.

   Итак, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$, а $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{4}$. Значит, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ и эти события независимы.

2. Пусть событие A — ”вытянули валета”, а событие B — ”вытянули туз”. Тогда $P(A \cap B) = 0$, ведь одна карта не может быть и тузом, и валетом одновременно. Но ни $P(A)$, ни $P(B)$ не равны нулю. Значит, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ и события зависимы.

Задача 5

В колоде 52 карты. Есть 4 масти: пики, крести, бубны, черви. В каждой масти 13 различных номинаций: $2, 3, \dots, 10$, валет, дама, король, туз.

1. Из колоды случайным образом вытягивается одна карта, а затем ещё одна. Независимы ли события ”первая карта это король” и ”вторая карта это крести”?

2. Из колоды случайным образом вытягивается одна карта, а затем ещё одна. Независимы ли события ”первая карта это король” и ”вторая карта это десятка”?

Решение.

1. Пусть событие A — ”первая карта это король” и событие B — ”вторая карта это крести”.

   Тогда $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$,

   $P(B) = P(\text{”первая карта — крести”} \cap B) + P(\text{”первая карта — не крести”} \cap B) = \dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{12}{51} + \dfrac{39}{52} \cdot \dfrac{13}{51} = \dfrac{1}{4}$.

   А ещё можно было рассуждать (не совсем строго) вот так: для второй карты все масти равновероятны. Всего мастей 4. Поэтому $P(B) = \frac{1}{4}$.

   $P(A \cap B) = P(\text{”первая карта — король крести”} \cap B) + P(\text{”первая карта — король, но не крести”} \cap B) = \dfrac{1}{52} \cdot \dfrac{12}{51} + \dfrac{3}{52} \cdot \dfrac{13}{51} = \dfrac{1}{52}$.

   Проверяем: $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{52} = P(A \cap B)$. Значит, эти события независимы.

2. Пусть событие A — ”первая карта это король” и событие B — ”вторая карта это десятка”.

   Тогда $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$,

   $P(B) = P(\text{”первая карта — десятка”} \cap B) + P(\text{”первая карта — не десятка”} \cap B) = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{3}{51} + \dfrac{48}{52} \cdot \dfrac{4}{51} = \dfrac{1}{13}$.

   Как и до этого, нестрого рассуждать можно было так: для второй карты все номинации равновероятны. Всего номинаций 13. Поэтому $P(B) = \frac{1}{13}$.

   $P(A \cap B) = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{4}{51} = \dfrac{4}{13 \cdot 51}$.

   Проверяем: $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{13} \neq \dfrac{4}{13 \cdot 51} = P(A \cap B)$. Значит, эти события зависимы.

Задача 6

Обозначение. Два события, которые не являются независимыми, называют зависимыми.

1. Вернёмся к задаче про арбузы. Являются ли зависимыми события ”арбуз вкусный” и ”у арбуза есть пятно”? Если вы покупаете арбуз и хотите, чтобы он был вкусным, стоит ли проверять наличие пятна?

2. Вернёмся к задаче про медицинский тест. Являются ли зависимыми события ”положительный результат” и ”человек болен”? Если эти события независимы, то стоит ли проводить такой тест?

Подсказка. Вам пригодятся таблички, которые мы писали в соответствующих задачах.

Решение.

1. Вспомним табличку в задаче про арбузы:

	С пятном, B	**Без пятна,** $\bar{B}$
Вкусный, A	0.4	0.2
Невкусный, $\bar{A}$	0.1	0.3

   Проверим, верно ли равенство $P(A|B) = P(A)$.

   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.4}{0.4 + 0.1} = 0.8$.

   При этом $P(A) = 0.4 + 0.2 = 0.6$. Итак, $P(A|B) \neq P(A)$, то есть события A и B зависимы.

   У нас получилось, что вероятность того, что арбуз вкусный, будет больше, если у него есть пятно. Значит, если мы хотим купить вкусный арбуз, то стоит проверять наличие пятна.

2. Вспомним табличку из задачи про медицинский тест:

	Болен, B	**Здоров,** $\bar{B}$
Отрицательный тест, A	0.06	0.84
Положительный тест, $\bar{A}$	0.05	0.05

   Мы хотим проверить, верно ли равенство $P(B|\bar{A}) = P(B)$. То есть, сравнить вероятность того, что человек болен, и вероятность того, что он болен при условии, что тест дал положительный результат.

   Итак, посчитаем: $P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{\bar{A}} = \dfrac{0.05}{0.05 + 0.05} = 0.5$, при этом $P(B) = 0.06 + 0.05 = 0.11$. Так как $P(B|\bar{A}) \neq P(B)$, то события $\bar{A}$ и B зависимы.

Заметим, что тест имеет смысл, если выполнено следующее: если результат теста положительный, то вероятность, что человек болен, больше. Так и происходит в нашей задаче ($0.5 > 0.11$). А вот если бы наши события получились независимыми, то тест был бы бессмысленен.

Совместная независимость

Задача 1

В нашей картине мира разные броски монетки или кубика никак не связаны между собой.

Обоснуйте все ваши ответы строго – какие исходы в вероятностном пространстве, какие события, как считать условную вероятность, где и как использована совместная независимость.

1. Мы бросаем честную монетку два раза подряд. Какова вероятность исхода "два орла"?
2. Мы бросаем честную монетку четыре раза подряд. Какова вероятность исхода "решка-решка-орёл-решка"?
3. Мы бросаем честную монетку k раз подряд. Каждый исход – фиксированная последовательность орлов и решек. Докажите, что вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{2^k}$

Подсказка. При подсчёте вероятности исхода воспользуйтесь совместной независимостью событий, связанных с разными бросками.

Решение.

1. Мы бросаем честную монетку два раза подряд. Обозначим за "о" выпадение орла, а за "р" — выпадение решки. Значит, $\Omega = \{$оо, ор, ро, рр$\}$. Все события вида "на i-ом броске выпал <орёл/решка>" совместно независимы. Значит, вероятность исхода "два орла" равна произведению вероятности того, что орёл выпал на первом броске, на вероятность того, что орёл выпал на втором броске. При этом вероятность выпадения орла на одном броске равна 0.5. Итак, вероятность исхода "два орла" равна $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.
2. Мы бросаем честную монетку четыре раза подряд. Значит, $\Omega = \{$оооо, ооор, ooро, ..., рррр$\}$, где написаны все возможные комбинации. Как и в предыдущей задаче все события вида "на i-ом броске выпал <орёл/решка>" совместно независимы. То есть вероятность исхода "решка-решка-орёл-решка" равна произведению вероятностей: $0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.0625$.
3. Мы бросаем честную монетку k раз подряд. Значит, $\Omega = \{\underbrace{\text{о}\ldots\text{о}}_{\text{k}}, \underbrace{\text{о}\ldots\text{р}}_{\text{k}}, \ldots, \underbrace{\text{р}\ldots\text{р}}_{\text{k}}\}$, где написаны все возможные комбинации. Как и в предыдущей задаче все события вида "на i-ом броске выпал <орёл/решка>" совместно независимы. Поскольку и вероятность выпадения орла на одном броске, и вероятность выпадения решки на одном броске равны 0.5, то, пользуясь совместной независимостью, получаем, что вероятность каждого исхода равна $\underbrace{0.5 \cdot \cdots \cdot 0.5}_{k} = 0.5^k$.

Задача 2

Приведите пример событий A_1, A_2, A_3, которые попарно независимы, но не совместно независимы. Другими словами, покажите, что для ваших событий первые три условия из конца предыдущего шага выполнены, а последнее условие – не выполнено.

Для описания вашего примера достаточно указать вероятности всех участков диаграммы Венна с прошлого шага (то есть мы не требуем интерпретации событий как каких-то конкретных событий из реального мира).

Подсказка. Можете воспользоваться таким примером. Мы бросаем три честные монетки.

1. Событие A_1 – первые две монетки дали одинаковый результат (орёл-орёл или решка-решка)
2. Событие A_2 – последние две монетки дали одинаковый результат

3. Событие A_3 – первая и последняя монетки дали одинаковый результат

Решение. Посмотрим на пример из подсказки. Для него нам нужно проверить, что выполнены равенства

1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$,
2. $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$,
3. $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$.

и не выполнено равенство $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.

Для начала найдём вероятность $P(A_1)$. Событию A_1 принадлежат исходы вида оо* и рр*, где звёздочка — либо орёл, либо решка. Значит, всего исходов в событии A будет $2 + 2 = 4$. Всех возможных исходов же $2^3 = 8$. Значит, поскольку все исходы равновероятны, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Точно так же доказывается, что $P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$.

Теперь докажем, что выполнено равенство $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. Событию $A_1 \cap A_2$ принадлежат исходы, где все три монетки дали одинаковый результат. Таких исхода два: ооо и ррр. Значит, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. С другой стороны, $P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2)$. Доказательства для двух следующих пунктов аналогичны.

Наконец, разберёмся с тем, почему не выполнено равенство $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$. Событие $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — это выпадение трёх одинаковых сторон монетки. Вероятность этого мы только что посчитали: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. С другой стороны, $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Задача 3

Задача о легкомысленном члене жюри.

Жюри состоит из трёх человек. Им нужно принять верное решение по какому-то вопросу. Первые два члена жюри независимо друг от друга принимают верное решение с вероятностью p. Третий для вынесения решения бросает монету, то есть его вероятность принять верное решение равна $\frac{1}{2}$. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов.

С какой вероятностью это жюри выносит верное решение?

Подсказка. Все члены жюри принимают решения независимо.

Решение. Обозначим за 1 голос за верное решение, за 0 — голос против верного решения. Тогда $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, где i-ому числу одного исхода соответствует голос i-ого члена жюри. Жюри голосует независимо, поэтому все исходы вида "i-ый член жюри принял <верное/неверное> решение" совместно независимы.

Посмотрим, при каких исходах примется решение 1: когда хотя бы двое членов жюри проголосовало за него, то есть при исходах $110, 101, 011, 111$. Посчитаем вероятность $P(\text{верное решение примут}) = P(110) + P(101) + P(011) + P(111) = p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2} = p^2 + p \cdot (1-p) = p$.

Здесь при подсчёте вероятностей мы пользовались совместной независимостью: так, например $P(110)$ равна произведению вероятностей того, что первый член жюри примет верное решение, того, что второй член жюри примет верное решение, и того, что третий член жюри примет неверное решение.

Задача 4

Это модификация задачи о легкомысленном члене жюри. В жюри заседают председатель, эксперт и Петя. Председатель принимает верное решение с вероятностью 0.7. Эксперт принимает верное решение с вероятностью 0.9. Председатель и эксперт принимают верные решения независимо. Петя не разбирается в обсуждаемом жюри вопросе.

Для каждой из перечисленных ниже стратегий Пети определите, с какой вероятностью комиссия примет верное решение.

1. Петя всегда копирует решение председателя

2. Петя всегда выдаёт решение, противоположное решению председателя

3. Петя всегда копирует решение эксперта

4. Петя подбрасывает честную монетку. Если выпал орёл – голосует "за", если выпала решка – "против".

Источник: журнал "Квантик", 2018 год

Подсказка. В предыдущей задаче про жюри поменяется вероятностное пространство: Ω или вероятности некоторых исходов.

Решение. Будем придерживаться тех же обозначений, что и в прошлой задаче: за 1 обозначим голос за верное решение, за 0 — голос против верного решения.

1. Петя всегда копирует решение председателя. Тогда $\Omega = \{000, 010, 101, 111\}$. При этом верное решение примется в случае исходов 101 и 111. Значит, вероятность этого равна $P(101) + P(111) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.9 = 0.7$.

   Из-за чего получилась такая вероятность? Жюри принимает верное решение, если и только если председатель принял верное решение (так как к его голосу присоединяется голос Пети). Вероятность того, что председатель принял верное решение, и равна 0.7.

2. Петя всегда выдаёт решение, противоположное решению председателя. Тогда $\Omega = \{001, 011, 100, 110\}$. При этом верное решение примется в случае исходов 011 и 110. Значит, вероятность этого равна $P(011) + P(110) = 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.9 = 0.9$.

   Жюри принимает верное решение, если и только если эксперт примет верное решение (так как голоса председателя и Пети сокращаются). Вероятность того, что эксперт принял верное решение, и равна 0.9.

3. Петя всегда копирует решение эксперта. Тогда $\Omega = \{000, 011, 100, 111\}$. При этом верное решение примется в случае исходов 011 и 111. Значит, вероятность этого равна $P(011) + P(111) = 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.9 = 0.9$.

   Аналогично первому пункту, жюри примет верное решение, если и только если эксперт примет верное решение.

4. Петя подбрасывает честную монетку. Тогда $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

   Тогда как и в задаче про жюри из прошлого урока вероятность принять верное решение равна $P(110) + P(101) + P(011) + P(111) = (0.7 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.9) \cdot 0.5 = (0.7 + 0.9) \cdot 0.5 = 0.8$.

Задача 5

Точно такая же задача, как предыдущая, но с одним изменением – теперь председатель и эксперт голосуют не независимо.

- С вероятностью 0.7 эксперт и председатель одновременно приняли верное решение.
- С вероятностью 0.2 председатель принял неверное решение, а эксперт верное.
- С вероятностью 0.1 и председатель, и эксперт ошиблись.

Другими словами, невозможна ситуация, когда председатель принял верное решение, в то время как эксперт принял неверное решение. Заметьте, что как и в прошлой задаче, председатель принимает верное решение с вероятностью 0.7, а эксперт принимает верное решение с вероятностью $0.7 + 0.2 = 0.9$.

Для каждой из перечисленных ниже стратегий Пети определите, с какой вероятностью комиссия примет верное решение.

1. Петя всегда копирует решение председателя

2. Петя всегда выдаёт решение, противоположное решению председателя

3. Петя всегда копирует решение эксперта

4. Петя подбрасывает честную монетку. Если выпал орёл – голосует ”за”, если выпала решка – ”против”.

Подсказка. Подумайте, что нужно будет изменить в решении предыдущей задачи (и нужно ли будет что-то менять).

Решение. В решении предыдущей задачи надо будет убрать исходы вида $10*$, где $*$ — либо 0, либо 1. Кроме того, посмотрим, как изменятся вероятности, связанные с председателем и экспертом (пока что не будем рассматривать Петю):

Председатель \ Эксперт	0	1
0	0.1	0.2
1	0	0.7

Действительно, вероятность исхода 10 равна нулю по условию. Тогда вероятность исхода 11 равна вероятности принятия правильного решения председателем, то есть 0.7.

Вероятность исхода 00 равна 0.1, так как эксперт ошибается с вероятностью 0.1. Наконец, вероятность исхода 01 равна 0.2.

1. Петя всегда копирует решение председателя. Тогда $\Omega = \{000, 010, 111\}$. При этом верное решение примется в случае исхода 111. Значит, вероятность этого равна $P(111) = 0.7$.

   Или можно было рассуждать так: жюри принимает верное решение, если и только если председатель принял верное решение (так как к его голосу присоединяется голос Пети). Вероятность того, что председатель принял верное решение, равна 0.7.

2. Петя всегда выдаёт решение, противоположное решению председателя. Тогда $\Omega = \{001, 011, 110\}$. При этом верное решение примется в случае исходов 011 и 110. Значит, вероятность этого равна $P(011) + P(110) = 0.2 + 0.7 = 0.9$.

   Другими словами, как и в предыдущей задаче жюри принимает верное решение, если и только если эксперт принимает верное решение. То есть с вероятностью 0.9.

3. Петя всегда копирует решение эксперта. Тогда $\Omega = \{000, 011, 111\}$. При этом верное решение примется в случае исходов 011 и 111. Значит, вероятность этого равна $P(011) + P(111) = 0.2 + 0.7 = 0.9$.

   Рассуждать можно было так: жюри примет верное решение, если и только если эксперт примет верное решение. А вероятность этого равна 0.9.

4. Петя подбрасывает честную монетку. Тогда $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 110, 111\}$.

   Тогда вероятность принять верное решение равна $P(110) + P(011) + P(111) = (0.7 + 0.2 + 0.7) \cdot 0.5 = 0.8$.

   То же самое рассуждение, но другими словами: жюри примет верное решение либо в том случае, когда председатель угадает верное решение; либо когда председатель не угадает, а эксперт и Петя угадают. Первое произойдёт с вероятностью 0.7. Второе — с вероятностью $0.2 \cdot 0.5 = 0.1$. Итого вероятность принятия верного решения равна $0.7 + 0.1 = 0.8$.

Задача 6

Ирине обещают приз, если она выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего тренера и клубного чемпиона. Всего играется три партии по одной из схем: тренер-чемпион-тренер или чемпион-тренер-чемпион. Чемпион играет лучше тренера. Какую схему лучше выбрать Ирине?

Подсказка. Введите обозначения для вероятности выиграть у тренера и вероятности выиграть у чемпиона в одной игре. Затем выразите искомые вероятности через введённые.

Решение. Обозначим за $p_{\text{ч}}$ вероятность, с которой Ирина выиграет у чемпиона в одной игре, а за $p_{\text{т}}$ — вероятность, с которой Ирина выиграет у тренера в одной игре. При этом по условию $p_{\text{т}} > p_{\text{ч}}$.

Обозначим за 1 победу Ирины в партии, а за 0 — её проигрыш в партии. Элементарным исходом будет строчка из трёх цифр, соответствующих каждой из игр. То есть, $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Мы хотим найти вероятность того, что Ирина выиграет. То есть $P(110) + P(011) + P(111)$.
Рассмотрим оба случая.

1. Схема тренер-чемпион-тренер. Тогда $P(110) + P(011) + P(111) = p_т \cdot p_ч \cdot (1 - p_т) + (1 - p_т) \cdot p_ч \cdot p_т + p_т \cdot p_ч \cdot p_т = p_т \cdot p_ч \cdot (2 - 2p_т + p_т) = p_т \cdot p_ч \cdot (2 - p_т)$

   Можно было посчитать немного по-другому:

   Вероятность выиграть равна $P(11*) + P(011)$, где $*$ — либо 0, либо 1. Действительно, Ирина выиграет, если либо выиграет два первых матча, либо если проиграет только первый. Считаем: $P(11*) = p_т \cdot p_ч$, $P(011) = (1 - p_т) \cdot p_ч \cdot p_т$.

   Суммируя, получаем, что вероятность выигрыша равна $p_т \cdot p_ч + (1 - p_т) \cdot p_ч \cdot p_т = p_т \cdot p_ч \cdot (2 - p_т)$.

2. Схема чемпион-тренер-чемпион. Тогда в прошлом рассуждении "т" и "ч" меняются местами и вероятность выигрыша получается равной $p_ч \cdot p_т \cdot (2 - p_ч)$.

Итак, в первом случае вероятность победы Ирины равна $p_т \cdot p_ч \cdot (2 - p_т)$, а во втором — $p_ч \cdot p_т \cdot (2 - p_ч)$. Множители перед скобкой одинаковы, поэтому нужно сравнить только выражения в скобках. А поскольку $p_т > p_ч$, то $2 - p_т < 2 - p_ч$. Значит, Ирина с большей вероятностью выиграет, если игра будет идти по второй схеме.

Задача 7

Нашим приложением пользуются 1000 человек. Будем считать, что каждый пользователь с вероятностью 0.25 уходит от вас в течение месяца. Люди прекращают пользоваться приложением независимо друг от друга.

1) Какова вероятность, что все 1000 прекратят им пользоваться в течение месяца?

2) В тех же условиях, что и в пункте 1. Какова вероятность, что никто не прекратит пользоваться в течение месяца?

Подсказка. Воспользуйтесь совместной независимостью уходов пользователей.

Решение.

1) Поскольку люди прекращают пользоваться приложением независимо друг от друга, то вероятность того, что все 1000 прекратят им пользоваться равна $\underbrace{0.25 \cdot \cdots \cdot 0.25}_{1000} = \left(2^{-2}\right)^{1000} = 2^{-2000} \approx 8.7 \cdot 10^{-603}$.

2) Вероятность того, что один человек не прекратит пользоваться приложением в течение месяца, равна 0.75. Пользуясь независимостью событий "i-ый пользователь не прекратил пользоваться приложением в течение месяца", получаем, что вероятность того, что никто не прекратит пользоваться, равна $\underbrace{0.75 \cdot \cdots \cdot 0.25}_{1000} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1000} \approx 1.2 \cdot 10^{-125}$.

Задача 8

Независимость ухода пользователей из условия предыдущей задачи выглядит странно. В реальной жизни, пусть вы знаете про всех пользователей, кроме пользователя по имени Саша, что большинство из них ушли. Интуиция подсказывает, что тогда и вероятность, что Саша уйдёт, велика. Аналогично, пусть вы знаете про всех пользователей, кроме Саши, что почти все из них не ушли. Тогда вероятность того, что Саша уйдет, низка.

Скорее всего, подсознательные цепочки рассуждений были следующими:

большинство пользователей уходит → приложение плохо работает → Саша тоже, вероятно, уйдёт;

большинство пользователей остаётся → приложение хорошо работает → Саша тоже, вероятно, останется.

Чтобы разобраться с этим затруднением, решите такую задачу.

К началу месяца вы закодили апдейт приложения, и первого числа месяца собираетесь выкатывать его на пользователей. Из прошлого опыта вы знаете, что половина ваших апдейтов удачные, а половина – неудачные. Известно, что если апдейт удачный, то пользователи будут уходить независимо друг от друга с вероятностью

0.1, а если неудачный – то с вероятностью 0.6. Являются ли уходы пользователей в текущем месяце независимыми событиями **до того**, как вы выкатили апдейт? Другими словами, если вы пока не знаете, удачен ли этот апдейт, то для вас уходы пользователей независимы?

Подсказка. Обозначим за S событие "апдейт успешен". По условию, $P(S) = 0.5$. Обозначим за U_1 событие "пользователь Саша ушла", и за U_2 событие "пользователь Дима ушёл". События U_1 и U_2 независимы если и только если $P(U_1) \cdot P(U_2) = P(U_1 \cap U_2)$. Осталось найти все вероятности из этой формулы.

Решение. Пусть событие S — "апдейт успешен". Событие U_1 — "пользователь Саша ушла", U_2 — "пользователь Дима ушёл".

По формуле полной вероятности посчитаем вероятность того, что Саша перестанет пользоваться приложением:

$$P(U_1) = P(U_1|S) \cdot P(S) + P(U_2|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.35.$$

По той же самой логике считается и вероятность того, что Дима уйдёт: $P(U_2) = 0.35$.

Теперь (снова по формуле полной вероятности) посчитаем вероятность того, что и Саша, и Дима уйдут:

$$P(U_1 \cap U_2) = P(U_1 \cap U_2|S) \cdot P(S) + P(U_1 \cap U_2|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = P(U_1|S) \cdot P(U_2|S) \cdot P(S) + P(U_1|\bar{S}) \cdot P(U_2|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что как при удачном, так и при неудачном апдейте пользователи уходят независимо друг от друга. Подставляя вероятности из условия в полученное равенство, мы получаем

$$P(U_1 \cap U_2) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.185.$$

Остаётся проверить, верно ли равенство $P(U_1 \cap U_2) = P(U_1) \cdot P(U_2)$. Считаем: $P(U_1) \cdot P(U_2) = 0.35 \cdot 0.35 = 0.1225 \neq 0.185 = P(U_1 \cap U_2)$. Значит, уходы пользователей в текущем месяце не являются независимыми событиями до того, как вы выкатили апдейт.