Неопределённый интеграл

В конце предыдущего урока мы поняли, что чтобы вычислить определённый интеграл от непрерывной функции, достаточно рассмотреть только одну последовательность разбиений. Но всё равно такой метод нахождения интеграла работает достаточно редко: нужно и чтобы функция f попалась несложная, и разбиения самостоятельно подобрать, и только тогда (возможно) получится нормально записанная последовательность, у которой мы (возможно) сможем найти предел.

Для вычисления определённых интегралов непрерывных функций есть гораздо более удобный инструмент, который называется *неопределённым интегралом*. Сначала мы его определим, а потом увидим, почему всё работает.

Определение. *Неопределённым интегралом* функции $f(x)$ называется любая функция $F(x)$, такая что производная $F(x)$ равна $f(x)$. То есть $F'(x) = f(x)$.

Эта функция $F(x)$ ещё называется *первообразной* функции $f(x)$. Обозначение: $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Пример 1. Если $f(x) = 3x^2$, то функция x^3 будет первообразной функции $f(x)$. Действительно, $(x^3)' = 3x^2$. Функция $x^3 + 10$ тоже будет первообразной $f(x)$, потому что $(x^3 + 10)' = 3x^2$. Аналогично, для любого числа $c \in \mathbb{R}$ функция $x^3 + c$ будет первообразной функции $f(x)$.

Несмотря на то, что в качестве первообразной можно брать несколько разных функций, когда мы пишем $F(x)$ мы имеем в виду какую-то одну из этих функций (а не, например, множество всех первообразных).

Неопределённый интеграл тесно связан с определённым интегралом. Если вы нашли неопределённый интеграл функции, то вы легко найдёте определённый интеграл функции. За это отвечает следующая теорема.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Пусть f – непрерывная функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Пусть F – какая-то первообразная функции f. Тогда выполнено:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Оцените, насколько такой способ нахождения определённого интеграла удобнее и проще, чем способ через последовательность интегральных сумм. Давайте посмотрим на пример, а потом докажем эту теорему.

Пример 2. Если $f(x) = 3x^2$, то можно взять $F(x) = x^3$. Тогда, например, для $[a, b] = [-1, 5]$ мы получим

$$\int_{-1}^{5} 3x^2\,dx = F(5) - F(-1) = 125 - (-1) = 126.$$

Нестрогое доказательство

Давайте нестрого докажем теорему с предыдущего шага.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Пусть f – непрерывная функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Пусть F – какая-то первообразная функции f. Тогда выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Напомним, числа a и b зафикисированы – мы считаем их константами. Введём параметр l, который будет меняться от a до b. Будем доказывать, что для любого $l \in [a, b]$ выполнено

$$\int\limits_a^l f(x)\, dx = F(l) - F(a).$$

Для удобства, обозначим это равенство символом $\diamondsuit$. Ясно, что если мы докажем $\diamondsuit$ для всех $l \in [a, b]$, то мы докажем теорему: при подстановке b на место l мы получаем в точности утверждение теоремы.

Посмотрим на то, как меняются левая и правая часть равенства $\diamondsuit$ при изменении l на маленькое число Δl.

- Если заменить l на $l + \Delta l$, то правая часть $\diamondsuit$ заменится с $(F(l) - F(a))$ на $(F(l + \Delta l) - F(a))$. То есть она изменится на

  $$(F(l + \Delta l) - F(a)) - (F(l) - F(a)) = F(l + \Delta l) - F(l).$$

  По определению производной это примерно равно $F'(l) \cdot \Delta l = f(l)\Delta l$
- Если заменить l на $l + \Delta l$, то левая часть $\diamondsuit$ заменится с $\int\limits_a^l f(x)\, dx$ на $\int\limits_a^{l+\Delta l} f(x)\, dx$. То есть она изменится на

  $$\int\limits_a^{l+\Delta l} f(x)\, dx - \int\limits_a^l f(x)\, dx = \int\limits_l^{l+\Delta l} f(x)\, dx$$

  (мы не доказывали такое равенство, но оно верно). Из-за непрерывности функции f мы можем считать, что на отрезке $[l, l + \Delta l]$ все значения функции f близки к $f(l)$. Тем самым

  $$\int\limits_l^{l+\Delta l} f(x)\, dx \approx \int\limits_l^{l+\Delta l} f(l)\, dx = f(l)\Delta l.$$

То есть при замене l на $l + \Delta l$ и левая, и правая часть $\diamondsuit$ изменится на $f(l)\Delta l$. Другими словами, производная обеих частей $\diamondsuit$ равна $f(l)$.

Заметим, что при $l = a$ и левая и правая часть $\diamondsuit$ обращается в ноль.

Неформально. Левая и правая часть $\diamondsuit$ совпадают при $l = a$, и их скорости роста во всех точках отрезка $[a, b]$ совпадают. Мы хотим сказать, что отсюда следует, что левая и правая часть это одна и та же функция от l. Формально это можно выразить такой леммой.

Лемма. Если у двух функций совпадают производные на отрезке $[a, b]$ и совпадает значение в точке a, то эти функции равны.

Доказательство. Посмотрим на разницу этих двух функций, обозначим её за h. Тогда h' будет равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$. Следовательно, h это константа. Ясно, что $h(a) = 0$. Значит, эта константа равна нулю. Следовательно, функции из леммы равны.

Тем самым, левая и правая части $\diamondsuit$ равны как функции от l. В частности, левая и правая части $\diamondsuit$ равны при $l = b$, что и требовалось доказать.

Дополнительная задача. Неопределённый интеграл

Задача. Формализуйте доказательство с предыдущего шага.

Вам понадобятся определения непрерывности из курса матана, вот они.

Определение [по Коши]. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

- $x_0 \in D$ (где D это область определения f),
- для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in D$, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$.

Определение [по Гейне]. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

- $x_0 \in D$,
- предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Определения непрерывности в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

Определение. Функция f называется непрерывной если она непрерывна в каждой точке D.

Подробнее про непрерывность можно почитать в уроке "Пределы функций и непрерывные функции" из курса матана.

Задача с проверкой. Неопределённый интеграл 1

Задача.

1. Найдите неопределённый интеграл функции x^n.
2. Найдите определённый интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$.

Каждый раз, когда мы пишем "найдите неопределённый интеграл" мы имеем в виду "найдите какой-нибудь неопределённый интеграл".

Обозначение и пример. Часто выражение $F(b) - F(a)$ обозначают так: $F(x)\Big|_a^b$. Например, $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, поэтому можно писать так:

$$\int\limits_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Проверка. Введите ответ к Пункту 2.

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Найдите определённый интеграл $\int\limits_0^2 x^5\,dx.$

Округлите ответ до 3 знаков после запятой.

Введите численный ответ

Введите число

Задача с проверкой. Неопределённый интеграл 2

1. Найдите неопределённый интеграл функции $\cos(x)$.
2. Найдите определённый интеграл $\int\limits_a^b \cos(x)\, dx$.

Проверка. Введите ответ к Пункту 2.

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Найдите определённый интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx.$

Введите численный ответ

Введите число

Интеграл vs Производная

Интеграл это антипроизводная. Из определения неопределённого интеграла следующие два условия эквивалентны:

- $f(x) = F'(x)$
- $F(x) = \int f(x)\, dx.$

Чтобы получить f из F, нужно взять производную, а чтобы получить F из f нужно взять интеграл. Тем самым операции "взять производную" и "взять интеграл" обратны друг другу.

Вычисления интегралов vs вычисления производной. Как мы помним, мы умеем находить производную любой функции, которую можно выразить через элементарные операции (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, взятие синуса/косинуса). С интегралами это не так. Нет единого способа находить интегралы. Есть только разные приёмы, которые в некоторых случаях работают. Например, попробуйте вычислить интеграл $(\cos x)^2$. Его можно найти или угадать, но это нетривиально. В то же время найти производную $(\cos x)^2$ – чисто механическая задача. Поэтому нахождение интеграла это более сложная задача, чем нахождение производной. Иногда интеграл функции не берётся, и никто не знает, какая первообразная у этой функции:)

На практике. К счастью, в жизни самостоятельно считать интегралы не придётся – за вас это сделает компьютер (при условии, что человечество уже умеет брать ваши интегралы, что вполне вероятно). Но разбираться в интегралах всё же полезно, чтобы понимать, что происходит. И замечать, что что-то пошло не так, если что-то в вычислениях пошло не так. Например, если получился отрицательный ответ, хотя интеграл был от положительной функции.

Задача. Неопределённый интеграл 3

Пусть f и g – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

1. Докажите, что $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для любого $c \in \mathbb{R}$.
2. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x) + g(x)\,dx$.

Тем самым операция взятия определённого интеграла линейна на множестве всех непрерывных функций.

Несобственный интеграл

Иногда нам нужно брать определённый интеграл от функции не по отрезку, а по лучу или даже по всей прямой. Такой интеграл называется *несобственным* определённым интегралом, или просто *несобственным интегралом*.

Чтобы определить интеграл от f по лучу $[a, +\infty)$, мы будем брать интеграл от f по отрезку $[a, b]$ и устремлять b к бесконечности.

Определение 1. Если f это непрерывная функция на луче $[a, +\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Запись $\lim\limits_{b\to+\infty}$ в правой части означает, что мы берём пределы для всевозможных последовательностей $b_0, b_1, b_2 \ldots$, стремящихся к $+\infty$, и все эти пределы совпадают. Если пределы не совпадают или их нет, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не определён. В этом случае мы говорим, что интеграл расходится.

Пример. Найдём интеграл функции $\frac{1}{x^2}$ на луче $[1, \infty)$. Первообразная функции $\frac{1}{x^2}$ это $\frac{-1}{x}$, так как $\left(\frac{-1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$. Значит,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{b} - \frac{-1}{1}\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1\right).$$

Ясно, что для любой последовательности $\{b_n\}$ стремящейся к $+\infty$, соответствующая последовательность выражений $\{\frac{-1}{b_n} + 1\}$ стремится к 1. Тем самым $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Аналогично определяется интеграл по лучу $(-\infty, b]$:

Определение 2. Если f это непрерывная функция на луче $(-\infty, b]$, то $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Интеграл по прямой $(-\infty, +\infty)$ определяется как сумма двух интегралов по лучам.

Определение 3. Если f это непрерывная функция на прямой $(-\infty, +\infty)$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$, где c это любое число.

Комментарий. Вообще, несобственный интеграл, который мы определили выше, называется *несобственным интегралом первого рода*. Если начать рассматривать не только непрерывные функции, но и функции с разрывами, то можно определить *несобственный интеграл второго рода*. В нашем курсе это не понадобится.

Задача с проверкой. Неопределённый интеграл 4

Задача. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x\,dx$ или докажите, что он расходится

Проверка. Если интеграл сходится, введите ответ. Если расходится, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Неопределённый интеграл 5

Задача.

1. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ или докажите, что он расходится
2. Почему наше определение интеграла не позволяет сказать, что такое $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$?

Проверка. Если интеграл из Пункта 1 сходится, введите ответ к Пункту 1. Если расходится, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Задача с проверкой. Неопределённый интеграл 6

Задача. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$ или докажите, что он расходится

Проверка. Если интеграл сходится, введите ответ. Если расходится, введите `no`

Введите математическую формулу

Напишите ваш ответ здесь...

Что мы прошли на этом уроке

- Узнали, что называется неопределённым интегралом и первообразной функции
- Прошли формулу Ньютона-Лейбница, связывающую определённый и неопределённый интегралы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) - \text{первообразная функции } f,$$

$$\text{то есть } F'(x) = f(x) \text{ или, эквивалентно, } F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Научились считать несобственные интегралы:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Дополнительный материал. Видео с канала 3Blue1Brown [What does area have to do with slope?](#) (12 минут). В нём частично повторяется материал, который мы прошли на этом уроке, и даётся интуиция для связи между интегрированием и математическим ожиданием непрерывной случайной величины. А что такое непрерывная случайная величина мы пройдём на следующем уроке.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- разберём случай более чем счётного пространства исходов
- научимся смотреть на вероятность события как на интеграл