Введение

На этом уроке мы познакомимся с очень важными понятиями: *случайной величиной* и *математическим ожиданием*.

Думать про случайные величины мы будем, как про функции на вероятностном пространстве.

Мы поймём, какие арифметические операции можно совершать со случайными величинами. А также обсудим свойства математического ожидания. И как всегда рассмотрим примеры и порешаем задачи на эти темы!

Как думать про случайные величины в контексте DS?

Объекты – это элементарные исходы. Все объекты вместе образуют вероятностное пространство. Случайные величины – это измерения, полученные на этих объектах. То есть это численные признаки объектов (или значения целевой функции на этих объектах). Например, может быть такая ситуация:

- Ваши объекты это пользователи. То есть каждый элементарный исход – это один конкретный пользователь. А вероятностное пространство это все пользователи вместе.
- Случайная величина "возраст" каждому пользователю ставит в соответствие его возраст. Случайная величина "вес" каждому пользователю ставит в соответствие его вес. Так же определяется случайная величина "доход". После этого можно смотреть на то, как эти случайные величины друг с другом взаимодействуют.

Случайная величина

Как и во всех предыдущих уроках мы рассматриваем случай, когда пространство исходов Ω конечно, и алгебра событий F состоит из всевозможных подмножеств Ω. В этом случае определить *случайную величину* просто.

Определение. *Случайная величина* это функция из пространства исходов Ω в $\mathbb{R}$.

Пример 1. Мы подбрасываем монетку, и если выпал орёл, то вы получаете 100 рублей, а если выпала решка – теряете 50 рублей. Тогда ваш выигрыш X будет случайной величиной, то есть функцией $\Omega \to \mathbb{R}$. Эта функция задана так: $X(\text{орёл}) = 100$, $X(\text{решка}) = -50$.

Пример 2. Мы выбираем случайного жителя Канады и измеряем его рост. Тогда Ω это множество всех жителей Канады, а рост это случайная величина $H : \Omega \to \mathbb{R}$.

Пример 3. В одной из задач первой недели мы говорили о сумме бросков двух кубиков. Это тоже случайная величина. Здесь $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$, и случайная величина S это функция из Ω в $\mathbb{R}$, заданная так: $S(ij) = i + j$.

Пример 4. Суммарная стоимость покупок, совершённых одним пользователем вашего сайта за прошедшую неделю это случайная величина. Здесь Ω это множество пользователей вашего сайта, а случайная величина G это функция из Ω в $\mathbb{R}$. Заметьте, что каждый пользователь потратил вполне конкретное (неслучайное и известное вам) число денег.

Обозначение. Мы будем обозначать случайные величины заглавными латинскими буквами.

Комментарий 1. Мы определили случайную величину, как функцию из Ω в $\mathbb{R}$. На самом деле, вместо $\mathbb{R}$ можно было бы взять любое другое множество. Например, в случае с жителями Канады можно было бы сопоставлять человеку город его проживания. Тогда случайная величина была бы отображением из множества жителей Канады Ω в множество городов Канады. В нашем курсе мы ограничимся случайными величинами со значениями в $\mathbb{R}$.

Комментарий 2. Если бы Ω или F были более сложными, случайными величинами бы называлась не любые функции из $\Omega \to \mathbb{R}$, а только *измеримые* функции. Понятие измеримой функции мы затронем позже, когда будем говорить про *непрерывные случайные величины*.

Дана случайная величина X, определённая на пространстве исходов Ω. Дан исход $\omega \in \Omega$.

Тогда $X(\omega)$ это

Выберите один вариант из списка

множество возможных значений случайной величины на этом исходе

отрезок возможных значений случайной величины на этом исходе

конкретное число

может быть не определено (зависит от случайной величины)

Математическое ожидание

Среднее значение случайной величины называется *математическим ожиданием*. Ясно, что для анализа любой ситуации со случайной величиной среднее значение может быть полезно: средняя зарплата, средняя продолжительность жизни, средняя стоимость привлечения пользователя.

Определение. Пусть дано вероятностное пространство Ω, состоящее из n элементарных исходов, и случайная величина X. Обозначим через P_i вероятность i-ого исхода, и через x_i значение случайной величины X на i-ом исходе. Тогда *математическим ожиданием* случайной величины X называется число $E[X] := \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$.

Математическое ожидание обозначают буквой E от английского "expected value" – "ожидаемое значение". Скобки в выражении $E[X]$ иногда пишут круглыми, но мы будем писать квадратными. В русскоязычной литературе также можно встретить обозначение $M[X]$.

Давайте посмотрим на математическое ожидание в следующих примерах.

Пример 1. Мы бросаем честную монетку один раз. Наша случайная величина X это количество выпавших орлов. Ясно, что

- $X(\text{орёл}) = 1$ и $P(\text{орёл}) = 0.5$,
- $X(\text{решка}) = 0$ и $P(\text{решка}) = 0.5$,

поэтому $E[X] = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = \ 0.5.$

Пример 2. Мы бросаем честную монетку два раза подряд. Наша случайная величина Y это количество выпавших орлов.
Найдём математическое ожидание Y :

$$E[Y] = 2 \cdot \ P(\text{орёл, орёл}) + \ 1 \cdot P(\text{орёл, решка}) + \ 1 \cdot P(\text{решка , орёл}) + 0 \cdot P(\text{решка, решка}) \ = \\ = 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \ \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \ \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \ \cdot \tfrac{1}{4} = \ 1.$$

Пример 3. Мы бросаем честный кубик. Наша случайная величина Z это число, выпавшее на кубике. Например, Z от исхода "выпало 4 " равно 4. Вот математическое ожидание Z :

$$E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{6} \ + \ 2 \cdot \frac{1}{6} \ + \ 3 \cdot \frac{1}{6} \ + \ 4 \cdot \frac{1}{6} \ + \ 5 \cdot \frac{1}{6} \ + \ 6 \cdot \frac{1}{6} \ = \ \frac{21}{6} \ = 3.5.$$

В каждом слагаемом первый сомножитель отвечает за значение Z на этом исходе, а второй сомножитель – за вероятность этого исхода.

Более коротко, но менее понятно определение математического ожидания можно записать так: $E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$.

Мы подбрасываем честную монетку. Случайная величина Z определена так:

- $Z(\text{орёл}) = 30$
- $Z(\text{решка}) = -14$

Найдите $E[Z]$

Введите численный ответ

Введите число

Мы бросаем честный кубик. Наша случайная величина X это остаток от деления на 3 того числа, которое выпало на кубике. Найдите $E[X]$.

Пример. $X(5) = 2, X(1) = 1.$

Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Введите численный ответ

Введите число

Пусть $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ и вероятности элементарных исходов заданы в табличке:

ω_i	0	1	2	3
P_i	0.4	0.1	0.3	0.2

Пусть случайная величина X равна элементарному исходу (то есть $X(0) = 0, X(1) = 1, \ldots$).

Найдите $E[X]$.

Введите численный ответ

Введите число

Операции со случайными величинами

Сумма случайных величин

Заметьте, что на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P) мы можем определить несколько случайных величин. Например, если Ω это множество всех жителей Канады, то мы можем определить

- случайную величину H, сопоставляющую каждому жителю его рост,
- случайную величину I, сопоставляющую каждому жителю его доход,
- случайную величину A, сопоставляющую каждому жителю его возраст,
- случайную величину C, сопоставляющую жителю число 1, если у него есть кошка, и 0 в противном случае.

Ясно, что случайные величины, определённые на одном вероятностном пространстве, можно складывать друг с другом, умножать друг на друга, как и любые функции. Например, сумма случайных величин X и Y обозначается $X + Y$ и определяется так: для любого исхода $\omega \in \Omega$ мы говорим $(X + Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega)$ (заметьте, что в обоих частях равенства стоят просто числа из $\mathbb{R}$). Ещё раз обратим внимание на то, что сумма двух случайных величин это снова случайная величина на том же вероятностном пространстве. То есть это функция, которая на вход принимает элементарный исход, а на выход выдаёт число.

Пример. Пусть Ω это множество всех жителей Канады. Случайная величина M это расходы на медицину у этого жителя за последний месяц. Случайная величина F это расходы на еду у этого жителя за последний месяц. Тогда случайная величина $M + F$ это функция, которая на вход принимает имя жителя, а на выход выдаёт суммарное количество денег, которые этот житель потратил на еду и медицину за последний месяц.

Обозначение. Пусть дано число $c \in \mathbb{R}$ и пространство исходов Ω. Можно построить постоянную случайную величину, которая любому элементарному исходу сопоставляет число c. Такую случайную величину мы будем обозначать так же, как и число c. Например, выражение $X + 2$ будет обозначать сумму случайной величины X и случайной величины 2.

Заполните пропуски

Пусть даны две случайные величины X и Y, определённые на $\Omega = \{a, b, c\}$.

При этом $X(a) = 0.1$, $X(b) = 0.5$, $X(c) = 10$, а $Y(a) = 5$, $Y(b) = 2$, $Y(c) = 4$.

Тогда $(X + Y)(a) =$ ______,

$(X + Y)(b) =$ ______,

$(X + Y)(c) =$ ______.

Произведение случайных величин

Аналогично определению суммы двух величин, можно определить произведение двух случайных величин.

Пример. Пусть $\Omega = a, b, c$ и случайные величины X и Y определены так:

- $X(a) = 1, X(b) = 2, X(c) = 3$
- $Y(a) = 12, Y(b) = -5, Y(c) = 0$

Тогда случайная величина $X \cdot Y$ определена так

- $X \cdot Y(a) = X(a) \cdot Y(a) = 1 \cdot 12 = 12$
- $X \cdot Y(b) = X(b) \cdot Y(b) = 2 \ \cdot (-5) \ = -10$
- $X \cdot Y(c) = X(c) \cdot Y(c) = 3 \ \cdot 0 \ = 0$

Мы определили сумму и произведение случайных величин. Значит, можно определить такие выражения как $X \cdot Y$, $2X + 3Y$, $X^3 - 7Y$.

В дальнейшем, когда мы будем складывать или перемножать случайные величины, мы всегда будем предполагать, что они определены на одном и том же вероятностном пространстве.

Заполните пропуски

Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, X – случайная величина, равная нулю на нечётных числах, и числу на входе для чётных, а Y – случайная величина, равная нулю на числах, меньших четырёх, и 3 на больших или равных четырём.

Тогда

$(X \cdot Y)(1) =$ _____,

$(X \cdot Y)(2) =$ _____,

$(X \cdot Y)(3) =$ _____,

$(X \cdot Y)(4) =$ _____,

$(X \cdot Y)(5) =$ _____,

$(X \cdot Y)(6) =$ _____.

Равенство случайных величин

Как мы помним, функции f и g называются равными, если $f(x) = g(x)$ для всех x. Мы таким же образом определяем равенство случайных величин (потому что случайные величины это и есть функции).

Определение. Случайные величины X и Y называются *равными*, если $X(\omega) = Y(\omega)$ для каждого исхода ω.

Давайте потренируемся определять, какие случайные величины равны друг другу, а какие нет.

Примеры

Дано вероятностное пространство, соответствующее одному броску честной монеты.

- Случайная величина X определена так: $X(\text{орёл}) = 1$, $X(\text{решка}) = 0$.
- Случайная величина Y определена так: $Y(\text{орёл}) = 0$, $Y(\text{решка}) = 5$.

Пример 1. Выполнено равенство $5X + Y = 5$. Действительно,

- $(5X + Y)(\text{орёл}) = 5 \cdot 1 + 0 = 5 = (5)(\text{орёл})$ и
- $(5X + Y)(\text{решка}) = 5 \cdot 0 + 5 = 5 = (5)(\text{решка})$

Мы показали, что на каждом исходе случайные величины $5X + Y$ и 5 дают одинаковые значения.

Пример 2. Выполнено равенство $X^2 = X$. Действительно,

- $(X^2)(\text{орёл}) = 1^2 = 1 = (X)(\text{орёл})$ и
- $(X^2)(\text{решка}) = 0^2 = 0 = (X)(\text{решка})$.

Мы показали, что на каждом исходе случайные величины X и X^2 дают одинаковые значения.

Пример 3. Равенство $X = 1$ не выполнено, потому что $(X)(\text{решка}) = 0$, а $(1)(\text{решка}) = 1$.

То есть мы нашли исход, на котором случайные величины X и 1 принимают различные значения.

Задача с проверкой. Случайная величина и математическое ожидание 1

Дано вероятностное пространство, соответствующее одному броску честной монеты.

- Случайная величина X определена так: $X(\text{орёл}) = 1$, $X(\text{решка}) = 0$.
- Случайная величина Y определена так: $Y(\text{орёл}) = 0$, $Y(\text{решка}) = 5$.

Выберите все подходящие ответы из списка

$5(1 - X) = Y$
$Y = 5X$
$X \cdot Y = 0$
$X + \frac{1}{5}Y = 1$

Задача с проверкой. Случайная величина и математическое ожидание 2

1. Докажите, что для любой случайной величины X и числа $c \in \mathbb{R}$ выполнено $E[cX] = c \cdot E[X]$.
2. Докажите, что для любых случайных величин X и Y выполнено $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
3. Из предыдущих двух пунктов выведите, что $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$.

То есть в пунктах 1 и 2 мы доказали, что операция взятия математического ожидания перестановочна с операцией умножения на число и с операцией сложения. Эти операции можно менять местами, и от этого результат вычислений не изменится.

Другими словами, мы доказали линейность математического ожидания (сравните с определением линейной функции).

Задача для проверки.

Заполните пропуски

Пусть Ω состоит из трёх машин, в каждой из которых едут грузы.

В первой машине едет 4 холодильника и 5 духовок, во второй 7 холодильников и 2 духовки, в третьей 1 холодильник и 8 духовок.

Обозначим за X случайную величину, равную количеству холодильников в этой машине, за Y $-$ случайную величину, равную количеству духовок в этой машине.

Тогда среднее количество холодильников равно $E[X] =$ ______ , а среднее количество духовок равно $E[Y] =$ ______ .

Если вес холодильника — это 50 кг, а вес духовки — 30 кг, то средний вес груза машины равен $E[50X + 30Y] =$ ______ кг.

Мы бросаем честный кубик 10 раз подряд. Каково математическое ожидание суммы всех бросков? Постарайтесь строго определить вероятностное пространство и случайные величины, которые вы используете для ответа на вопрос.

Введите численный ответ

Введите число

Задача. Случайная величина и математическое ожидание 3

Пять лучников одновременно стреляют в одну мишень. Первый лучник попадает с вероятностью 0.9, второй попадает с вероятностью 0.7, третий попадает с вероятностью 0.3, четвёртый с вероятностью 0.5 и пятый с вероятностью 0.8.

Найдите $E[A]$, где A – число стрел, попавших в мишень.

Введите численный ответ

Введите число