# Математика для Data Science. Линейная алгебра.
# Условия задач

## Содержание



**Замечание.** Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

## Комплексные числа

### Задача 1

**Неформально.** Рассмотрим конкретное комплексное число $z_1$. Мы смотрим на все комплексные числа как на векторы из $\mathbb{R}^2$. Будем доказывать, что умножение на $z_1$ делает следующее:

- растягивает все векторы в $|z_1|$ раз
- и поворачивает все векторы на угол $\arg(z)$ против часовой стрелки.

Ясно, что утверждение выше это то же самое, что теорема с предыдущего шага (только по-другому сформулированная).

А теперь формально.

1. Дано фиксированное комплексное число $z_1 = a + bi$. Мы рассматриваем отображение $m_{z_1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которое отправляет каждое число $z$ в произведение $z_1 \cdot z$. Вспомним, что $\mathbb{C}$ можно воспринимать как $\mathbb{R}^2$. Поэтому и наше отображение можно воспринимать как $m_{z_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Вычислите, куда это отображение отправляет произвольное комплексное число $z = c + di = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что отображение $m_{z_1}$ из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ является линейным и выпишите его матрицу в терминах $a$ и $b$.
2. Выразите $a$ и $b$ через $r := |z|$ и $\alpha := \arg(z)$. Выпишите матрицу отображения $m_{z_1}$ в терминах $r$ и $\alpha$.
3. Докажите теорему с предыдущего шага.

### Задача 2

1. Найдите число $z^k$, зная модуль и аргумент $z$.
2. Найдите какое-нибудь число $z$, такое что $z^6 = -100$.
3. Докажите, что у любого ненулевого комплексного числа есть обратное. То есть для любого ненулевого $z \in \mathbb{C}$ найдётся число $z^{-1}$, такое что $z \cdot z^{-1} = 1$.

В целом, мы доказали, что $\mathbb{C}$ это *поле*. То есть, в $\mathbb{C}$ есть 0 и 1, а также в $\mathbb{C}$ можно складывать, вычитать, умножать и делить.

## Собственные векторы

### Задача 1

Докажите, что если $\vec{v}$ это собственный вектор $A$, то и $c\vec{v}$ это собственный вектор $A$, где $c$ – любое ненулевое число.

### Задача 2

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

### Задача 3

1. Докажите, что у матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ нет собственных чисел и собственных векторов (над $\mathbb{R}$)
2. Докажите, что при $0 < \alpha < \pi$ у матрицы $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ нет собственных чисел и собственных векторов (над $\mathbb{R}$). Что это значит геометрически?

### Задача 4

Докажите, что каждому собственному числу соответствует хотя бы один собственный вектор. То есть если для числа $\lambda$ выполнено $\det(A - \lambda E) = 0$, то найдётся $\vec{v}$, такой что $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

### Задача 5 (дополнительная)

Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ это собственные векторы с различными собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Докажите, что $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ линейно независимы.

## Низкоранговое приближение матрицы

### Задача 3

Давайте поймём, как взаимодействует ранг и операция умножения матриц. Во всех задачах ниже размеры матриц считайте любыми (но такими, что умножение определено).

1. Докажите, что ранг произведения двух матриц меньше или равен ранга каждой из них: $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.
2. Докажите, что ранг произведения любого числа матриц меньше или равен ранга каждой из них: $\text{rank}(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_r) \leq \min(\text{rank}(A_1), \text{rank}(A_2), \dots, \text{rank}(A_r))$.
3. Приведите пример матриц $A$ и $B$, для которых ранг произведения меньше ранга каждого из сомножителей: $\text{rank}(AB) < \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

### Задача 4

Пусть дана матрица $W$ размера $n$ на $m$ и ранга не больше 1. Тогда можно найти такие матрицы $U$ и $M$, что $W = U^T M$. При этом $U$ это матрица размера 1 на $n$, и $M$ это матрица размера 1 на $m$. То есть $U^T$ это столбец, а $M$ это строка.

Рассмотрим два случая:

1. $\text{rank} W = 0$. Тогда $W$ это нулевая матрица и $U^T$ это нулевой столбец высоты $n$ и $M$ это нулевая строка длины $m$.
2. $\text{rank} W = 1$. Тогда стобцы матрицы $W$ попарно линейно зависимы, а значит, матрица имеет вид $(\vec{u}, \lambda_2 \vec{u}_1, \dots, \lambda_n \vec{u}_1)$. То есть $W = \vec{u}_1(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — искомое представление в виде произведения столбца на строку.

### Задача 5

Пусть дана матрица $W$ размера $n$ на $m$ и ранга не больше $k$. Тогда можно найти такие матрицы $U$ и $M$, что $W = U^T M$. При этом $U$ это матрица размера $k$ на $n$, и $M$ это матрица размера $k$ на $m$.

## Сингулярное разложение – SVD

### Задача 1

Пусть $A_1$ и $A_2$ – обратимые матрицы.

1. Докажите, что $\text{rank}(A_1 B) = \text{rank}(B)$ для любой $B$, если произведение $A_1 B$ определено.
2. Докажите, что $\text{rank}(B A_2) = \text{rank}(B)$ для любой $B$, если произведение $B A_2$ определено.

Как мы знаем, все ортогональные матрицы обратимы. В SVD нас будет интересовать случай, когда $A_1$ и $A_2$ это ортогональные матрицы.

### Задача 2

Давайте докажем, что умножение матрицы на ортогональную матрицу не меняет её норму Фробениуса.

Пусть $X$ – произвольная матрица размера $m$ на $n$. Пусть $L$ и $R$ – ортогональные матрицы размера $m$ на $m$ и $n$ на $n$ соответственно.

1. Докажите, что $||LX||_F^2 = ||X||_F^2$

2. Докажите, что $||XR||_F^2 = ||X||_F^2$

Эта задача позволит нам исключить из вычислений ортогональные матрицы $U$ и $V^T$, сконцентрировавшись на понятной матрице $\Sigma$.

## Задача 3

Дана диагональная матрица $\Sigma$ с $\sigma_1 \geq \ \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq 0$ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Мы ищем $P$ такую что $||\Sigma - P||_F^2$ минимально, при ограничении $\mathrm{rank}(P) \leq k$. Докажите, что минимальное значение достигается при $P = \Sigma_k$ (матрицу $\Sigma_k$ мы определили ранее на Степике).

Тем самым лучшее приближение матрицы $A = U\Sigma V^T$ это матрица $B = UPV^T = U\Sigma_k V^T =: A_k$.

Это завершает доказательство теоремы.

## Задача 4

Давайте подумаем, какую часть информации мы потеряли, заменив $A$ на $A_k$.

Наблюдения, которые понадобятся для решения этой задачи:

- $||A||_F^2 = ||U\Sigma V^T||_F^2 = ||\Sigma||_F^2$, так как умножение на ортогональные матрицы сохраняет норму (пятая устная задача).
- $||\Sigma||_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots$. Всего элементов на диагонали $\min(n, m)$, обозначим $l := \min(n, m)$. Тогда $||\Sigma||_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{l} \sigma_i^2$.
- Тем самым $||A||_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{l} \sigma_i^2$.

1) Докажите, что $||A_k||_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i^2$.

2) Докажите, что $||A - A_k||_F^2 = \sum\limits_{i=k+1}^{l} \sigma_i^2$. То есть $||A||_F^2 = ||A - A_k||_F^2 + ||A_k||_F^2$.