Математика для Data Science. Математический анализ. Шпаргалка

Содержание

Третья неделя. Пределы, производные и исследование функций **2**
Пределы функций и непрерывные функции 2
Производные: интуиция без доказательств 2
Производные: формально с доказательствами 2
Производная: вычисления без доказательств. 3
Исследование функций при помощи производных. 3

Третья неделя. Пределы, производные и исследование функций

Пределы функций и непрерывные функции

Пусть f — функция с областью определения $D \subset \mathbb{R}$ и значениями в $\mathbb{R}$. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* f в точке x_0, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ и $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ для всех n (мы предполагаем, что хотя бы одна такая последовательность существует). Предел функции f в точке x_0 обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Свойства предела функции

1. Если у функции есть предел в точке, то он единственен.
2. Пусть даны две функции f и g с совпадающими областями определения, такие что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда
   - $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$, где $c \in \mathbb{R}$,
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = a + b$,
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$,
   - если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если f определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Функция f называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках своей области определения.

Точки области определения f, в которых f не является непрерывной, называются *точками разрыва*.

Есть и эквивалентное первому определение непрерывности: функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если $x_0 \in D$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in D$, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$.

Свойства непрерывных функций Пусть f и g — непрерывные функции с совпадающими областями определения, тогда

- функция $c \cdot f$, где $c \in \mathbb{R}$, непрерывна,
- функция $f + g$ непрерывна,
- функция $f \cdot g$ непрерывна.

Производные: интуиция без доказательств

Мгновенной скоростью в момент времени t_0 называется предел $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$, где $S(t)$ — расстояние, пройденное к моменту времени t.

Обозначив в этом определении $t - t_0$ за Δt, получим, что $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$.

Производные: формально с доказательствами

Пусть функция f определена на некотором интервале, и точка x_0 принадлежит этому интервалу. Тогда *производной* функции f в точке x_0 называется число $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ или, эквивалентно, число $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$. Производная обозначается $f'(x_0)$.

Если производная в точке x_0 существует, то функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0.

Функция f называется *дифференцируемой* на некотором интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Тогда производной функции f называется функция f', которая отображает x в $f'(x)$.

Производная: вычисления без доказательств.

Производные часто встречающихся функций

- $c' = 0$, где $c \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, где n — произвольное действительное число, например: $x^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Свойства производных

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b), тогда

1. функция cf тоже дифференцируема на (a, b) и $(cf)' = cf'$, где c — произвольное действительное число,
2. функция $f + g$ тоже дифференцируема на (a, b) и $(f + g)' = f' + g'$,
3. функция fg тоже дифференцируема на (a, b) и $(fg)' = f'g + fg'$,
4. если g не обращается в ноль на этом интервале, то функция $\frac{f}{g}$ тоже дифференцируема на (a, b) и $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Пусть теперь функция f непрерывна и дифференцируема в точке x_0, а g непрерывна и дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда

5. функция $g(f(x))$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0 и её производная в точке x_0 равна $g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

   Функция $g(f(x))$ называется *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Исследование функций при помощи производных.

Пусть дана функция f с областью определения D. Точка $x_0 \in D$ называется *точкой локального минимума*, если существует такой $\varepsilon > 0$, что $f(x) \geq f(x_0)$ для всех $x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. При этом $f(x_0)$ называется *локальным минимумом*.

Точка x_0 называется *точкой минимума* (иногда говорят *точкой глобального минимума*) функции f, если $f(x_0) \leq f(x)$ для всех x из области определения f. Число $f(x_0)$ называют *минимумом функции* или *глобальным минимумом функции* или *минимальным значением функции*.

x_0 называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$, но функция не достигает в x_0 ни локального минимума, ни локального максимума.