В первой половине этого урока мы узнали, что функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi(c) := P(\xi \le c)$. А затем мы рассмотрели два примера распределений: равномерное и экспоненциальное.

Теперь во второй половине урока мы познакомимся со свойствами функций распределения и обсудим, как функция распределения устроена в дискретном и непрерывном случаях.

Функция распределения первична, случайная величина вторична

Комментарий. Этот и следующий шаг – некоторые математические формальности. Мы прибегаем к ним, чтобы не потерять математическую строгость;)

В дискретном случае мы строили вероятностные пространства, на них определяли случайные величины, а потом у случайных величин брали распределение (функцию вероятности). В первой половине этого урока мы научились описывать распределение при помощи функции распределения. Поэтому путь нашей мысли можно описать так:

$$\text{вероятностное пространство} \to \text{случайная величина} \to \text{распределение} \leftrightarrow \text{функция распределения}$$

В принципе, можно повторить этот путь и для непрерывных случайных величин. Например, на предыдущем уроке мы построили непрерывные вероятностные пространства, и на них могли бы определить непрерывные случайные величины. Но на практике почти всегда нам интересны распределения непрерывных случайных величин. А не сами случайные величины или вероятностные пространства, на которых эти величины определены. Например, нам не очень интересно пространство всех голубей. Нам интересно отвечать на вопросы вида "каков шанс, что у голубя размах крыльев больше 35 сантиметров".

Поэтому мы НЕ будем определять непрерывные случайные величины. Вместо этого мы определим только функции распределения. То есть мы будем заходить с другого конца – начинать с функции распределения:

$$??? \to ??? \to \text{распределение} \leftrightarrow \text{функция распределения.}$$

При этом с формальной точки зрения саму случайную величину мы полностью не определяем (потому что мы не определяем вероятностное пространство, на котором она определена).

В дальнейшем мы будем работать только с функциями распределения, и не будем говорить, на каком именно вероятностном пространстве задана случайная величина.

А зачем мы тогда вообще проходили вероятностные пространства? Оттуда переносится вся интуиция и почти все формулы. Когда мы будем думать про непрерывные случайные величины, полезно представлять, что они определены на каком-то вероятностном пространстве (которое мы строго не определяем)

Определение функции распределения

Определение. Функция F_ξ называется функцией распределения, если выполнены такие свойства:

- F_ξ не убывает, то есть для любых $a_1 < a_2$ выполнено $F_\xi(a_1) \le F_\xi(a_2)$
- $\lim\limits_{a \to +\infty} F_\xi(a) = 1$
- $\lim\limits_{a \to -\infty} F_\xi(a) = 0$

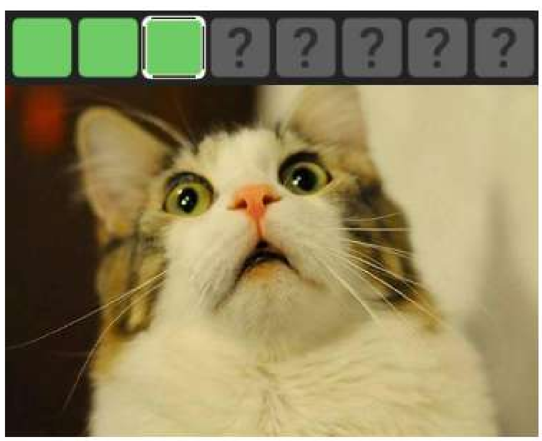
Опираясь на опыт предыдущего урока, подумайте, почему мы используем именно эти условия.

Заметьте, что в этом определении мы НЕ использовали определение случайной величины.

Наоборот, уже определив F_ξ, мы говорим, что функция распределения F_ξ задаёт случайную величину ξ. И после этого мы можем говорить, например, что $P(\xi \le a)$ по определению равно $F_\xi(a)$.

Задачи

Дальше идут задачи, которые помогут нам лучше понять функции распределения.



Выберите все подходящие ответы из списка

Функция $F_\xi(x) = \sin(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины

Если $F_\xi(a) = 1$, то $F_\xi(b) = 1$ для любого $b > a$, потому что F_ξ не убывает

Функция $F_\xi(x) = 0.3 + x^2$ является функцией распределения некоторой случайной величины

Если $F_\xi(a) = 0$, то $F_\xi(b) = 0$ для любого $b > a$, потому что F_ξ не убывает

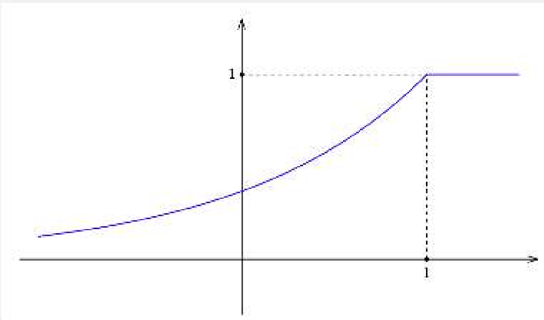


График 1

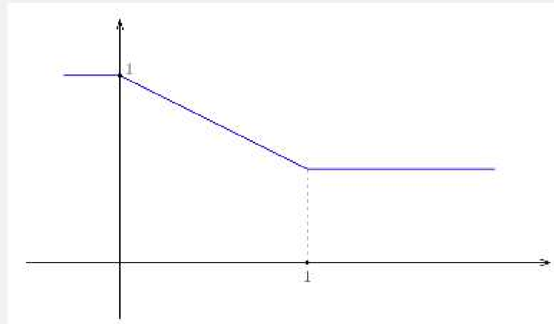


График 2

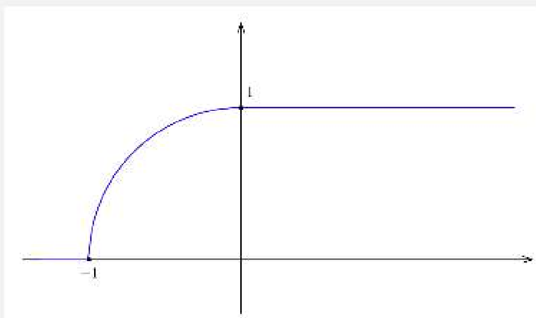
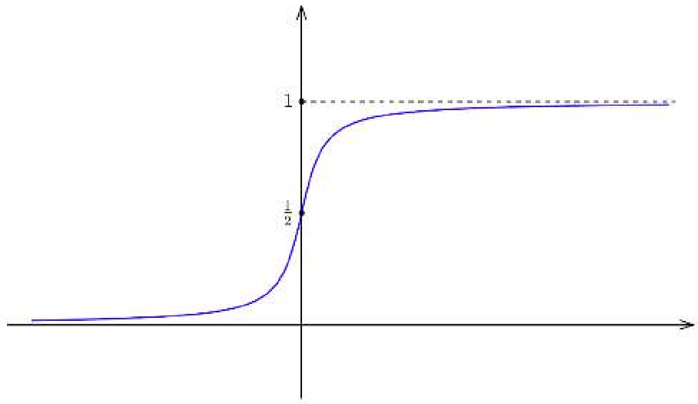


График 3

Сопоставьте значения из двух списков

График 1	Неформально говоря, у случайной величины с такой функцией распределения бо́льшие значения менее вероятны
График 2	Это не функция распределения
График 3	Неформально говоря, у случайной величины с такой функцией распределения бо́льшие значения более вероятны

Отметьте все верные утверждения.



Выберите все подходящие ответы из списка

Множество значений случайной величины с такой функцией распределения — все действительные числа

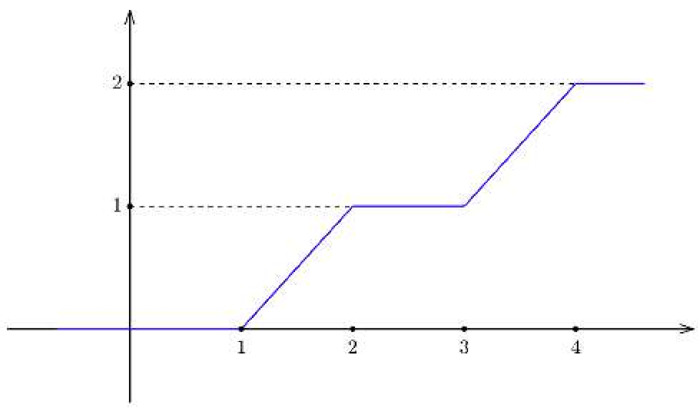
Множество значений случайной величины с такой функцией распределения — интервал $(0, 1)$

Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(\xi \leqslant 0) \quad < \quad P(\xi \geqslant 0)$

Это не функция распределения

Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(\xi \leqslant 0) \quad = \quad P(\xi \geqslant 0)$

Отметьте все верные утверждения.



Выберите все подходящие ответы из списка

Множество значений случайной величины с такой функцией распределения – отрезок $[1, 4]$

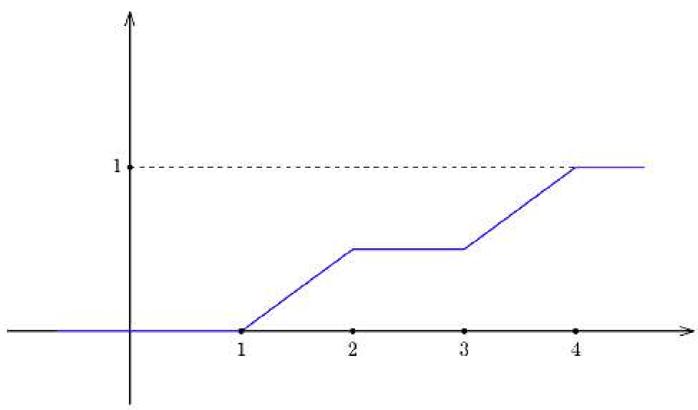
Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(2 < \xi < 3) = 0$

Это не функция распределения

Это равномерное распределение на некотором множестве

Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(2 < \xi < 3) = 0.5$

Отметьте все верные утверждения.



Выберите все подходящие ответы из списка

Это не функция распределения

Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(2 < \xi < 3) = 0$

Для случайной величины ξ с такой функцией распределения $P(2 < \xi < 3) = 0.5$

Множество значений случайной величины с такой функцией распределения – отрезок $[1, 4]$

Непрерывные случайные величины

Итак, давайте определим непрерывные случайные величины (при условии, что мы договорились определять случайные величины не полностью, а давать только их распределения)

Определение. Если F_ξ это непрерывная функция распределения, то случайная величина ξ называется *непрерывной*.

Легко убедиться, что во всех примерах, уже разобранных в этом уроке, функция распределения была непрерывной. А значит, соответствующие случайные величины были непрерывными.

Соответственно, если F_ξ разрывна, то случайная величина ξ не называется непрерывной. В частности, для всех дискретных случайных величин функция распределения должна быть разрывна.

Давайте лучше поймём эту связь между непрерывностью/разрывностью функции распределения и нашим пониманием непрерывных/дискретных случайных величин.

Функция распределения дискретной случайной величины

Функция распределения – это довольно универсальный инструмент, его можно применять и для описания дискретных случайных величин.

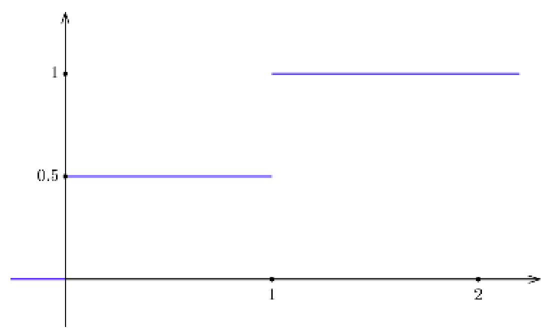
Определение функции распределения будет абсолютно таким же, как и в первой половине урока:

Определение. Для дискретной случайной величины ξ функция $F_\xi(x) := P(\xi \leqslant x)$ называется *функцией распределения*.

Заметьте, что из свойств дискретных случайных величин следует, что так определённая функция также удовлетворяет и определению из этого шага второй половины урока.

Пример 1

Нарисуем функцию распределения для количества орлов, выпавших при одном броске честной монетки (значения 0 и 1 с вероятностями 0.5). Она будет выглядеть так:



Давайте разберёмся, почему график получился именно такой. Пусть количество орлов это случайная величина ξ. Тогда

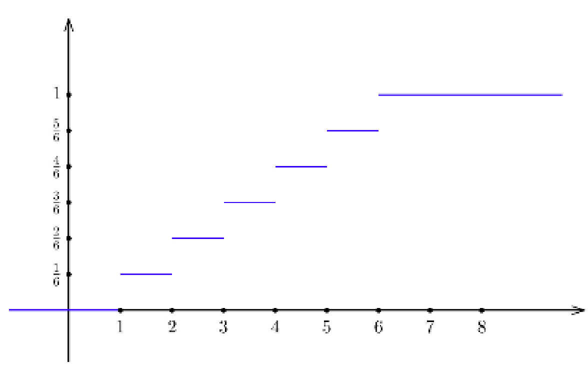
- При $x < 0$ имеем $P(\xi \leq x) = 0$, так как ξ принимает только значения 0 и 1, каждое из которых больше x.
- При $0 \leq x < 1$ имеем $P(\xi \leq x) = 0.5$, так как с вероятностью 0.5 случайная величина ξ принимает значение $1 > x$, и с вероятностью 0.5 значение $0 \leq x$.
- При $1 \leq x$ имеем $P(\xi \leq x) = 1$, так как ξ принимает только значения 0 и 1, каждое из которых меньше или равно x.

Определение. *Точка разрыва* функции это точка, в которой функция не непрерывна.

Как видите, функция получилась разрывной – у неё есть разрывы в точках 0 и 1.

Пример 2

Для честного кубика функция распределения выглядит так:



10 раз подбрасывается монетка. Случайная величина — суммарное количество орлов. Сколько *точек разрыва* будет у функции распределения такой случайной величины?

Определение. *Точка разрыва* функции это точка, в которой функция не непрерывна.

Введите численный ответ

Введите число

Точки разрыва и $P(\xi = a) = 0$

Пусть нам дана функция распределения F_ξ. Как только через F_ξ определить $P(\xi = a)$? То есть как определить вероятность того, что ξ приняла конкретное значение a? Разумно определить так

$$P(\xi = a) := \lim_{\delta \to 0} P(a - \delta < \xi \leq a) = \lim_{\delta \to 0} (F_\xi(a) - F_\xi(a - \delta)),$$

где предел берётся по положительным δ. Заметьте, что правая часть зависит только от F_ξ.

Пусть функция распределения F_ξ непрерывна в точке a. Из непрерывности F_ξ в точке a следует, что

$$P(\xi = a) = \lim_{\delta \to 0} ((F_\xi(a) - F_\xi(a - \delta)) = 0.$$

То есть если F_ξ непрерывна в a, то $P(\xi = a) = 0$.

Вывод. По определению непрерывности, непрерывные функции распределения непрерывны в каждой точке. Значит, если F_ξ непрерывна, то для любого a выполнено $P(\xi = a) = 0$.

Аналогично можно показать, что если F_ξ разрывна в точке a, то $P(\xi = a) > 0$. Мы этого делать не будем (примеры можно посмотреть на предыдущих двух шагах).

Что мы прошли на этом уроке

- Мы познакомились с функцией распределения случайной величины
- Прошли равномерное и экспоненциальное распределение
- Узнали свойства функций распределения

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- узнаем, что такое плотность вероятности
- обсудим, какая за ней стоит интуиция
- снова убедимся, что интегралы нам всё-таки были нужны: они помогают вычислять вероятности