Доказательства

Неотъемлемая часть математики — это доказательства, то есть формальные обоснования истинности утверждений. Впервые знакомство с доказательствами обычно происходит на уроках геометрии в школе. Геометрия в целом идейно близка к "настоящей" математике: там есть формальные определения различных объектов, для них выводятся общие свойства и про них доказываются теоремы. В геометрии можно пронаблюдать, как по кирпичикам выстраивается теория: как правило, доказывая новые теоремы, используется несколько уже доказанных. Таким же образом мы будем строить теорию в этом курсе.

Про строгость и формализм в рассуждениях

В этом уроке мы научимся структурировать рассуждения и превращать их в **формальные доказательства**. Нередко путь к интуитивному пониманию математики лежит именно через дебри формализма.

Если задача не получается

Это нормально :) В математике редко решение приходит сразу, попробуйте посидеть с задачей 10-15 минут. Если решение не приходит, задачу можно отложить и вернуться к ней потом. Даже в то время, пока вы не будете активно думать над решением, ваш мозг будет фоново переваривать новый материал. И, вернувшись к задаче позже, вы можете взглянуть на нее уже иначе.

Общепринятые сокращения

Если вы сталкивались с техническими текстами, то, скорее всего, замечали, что в них много однообразных конструкций. Математики для часто встречающихся фраз даже придумали специальные символы.

Следствие и равносильность

Обозначение. $\implies$ – *следствие*. Запись $A \implies B$ означает следующее: если выполнено утверждение A, то выполнено утверждение B. Например:

- $x > 1 \implies x > 0$,
- $x \in (0, 1) \implies x \in (0, 10)$.

Обозначение. $\iff$ – *равносильность* (читается «тогда и только тогда»). Выражение $A \iff B$ означает, что $A \implies B$ и $B \implies A$. То есть: если выполнено утверждение A, то выполнено утверждение B, и наоборот – если верно утверждение B, то верно утверждение A. Например:

- $x \in \mathbb{N} \iff (x \in \mathbb{Z} \text{ и } x > 0)$

Кванторы

Обозначение. $\exists$ – *квантор существования*. Квантор всегда идёт вместе с переменной или набором переменных, после чего идёт утверждение, в котором эти переменные фигурируют. В общем случае запись $\exists x$: $A(x)$ означает, что существует значение x, при подстановке которого утверждение $A(x)$ становится истинным. Например:

- $\exists x$: $x + 0.5 = 10$. Действительно, при $x = 9.5$ утверждение станет верным.
- $\exists x, y$: $x + y = 10$. Чтобы утверждение стало верным, можно взять $x = 0, y = 10$ или $x = 5, y = 5$.
- А вот $\exists x: \ x - \ x \ = 2$ неверно.

Обозначение – отраженная "E", от английского "Exist", "существовать".

Обозначение. $\forall$ – *квантор всеобщности*. $\forall x$: $A(x)$ означает, что для любого значения x утверждение $A(x)$ истинно. Обозначение – перевернутая "A", от английского "for All", "для всех". Например:

- $\forall x$: $x < x + 1$. Действительно, для любого числа x выполнено $x < x + 1$.
- а вот $\forall x$: $-x < x$ неверно, так как при $x = -1$ утверждение ложно.

Комментарий. Вообще говоря, утверждение, которое идёт после квантора, может и не зависеть от переменной под квантором. Например, утверждения $\exists x$: $0 < 1$ и $\forall x$: $0 < 1$ будут корректными с математической точки зрения. Правда, если утверждение не зависит от переменной x, то добавление кванторов существования или всеобщности по x ничего не изменит.

Запишите с помощью изученных ранее обозначений следующие утверждения и убедитесь в том, что они действительно верны:

1. Если x принадлежит пересечению множеств A и B, то он принадлежит множеству A.
2. Существует такое множество S, что S объединённое с $\{1, 3\}$ равняется $\{1, 2, 3\}$.
3. Для всех множеств S верно, что S объединённое с $\{1, 3\}$ содержит 1.
4. Пересечение S и множества $\{1, 3\}$ содержит 1 тогда и только тогда, когда S содержит 1.

И ещё немного про кванторы

В утверждениях с кванторами можно уточнить, какому множеству принадлежит переменная, какой у переменной знак и т.п. Примеры:

- $\exists x \in \mathbb{Q} : x + 0.5 = 10$ – верное утверждение. Читается как "существует рациональное число x, такое что $x + 0.5 = 10$." Действительно, рациональное число 9.5 подойдёт.

- $\exists x \in \mathbb{N} : \ \ x + 0.5 \ = 10$ – неверное утверждение. Читается как "существует натуральное число x, такое что $x + 0.5 = 10$." Но единственное число, такое что $x + 0.5 = 10$, это 9.5. Число 9.5 не натуральное, поэтому утверждение неверное.

- $\forall x > 0 : -x < x$ – верное утверждение. Читается как "для любого x, большего нуля, выполнено $(-x) < x$." Действительно, если $x > 0$, то $(-x) < 0$, следовательно $(-x) < x$.

- $\forall x \geq \ 0 : -x < x$ – неверное утверждение. Читается как "для любого x, большего или равного нуля, выполнено $-x < x$." Но при $x = 0$ условие $-x < x$ не выполнено, поэтому утверждение неверное.

Также можно писать утверждения с несколькими кванторами:

- $\forall x \exists y$: $x + y = 0$. Читается как "для любого x найдётся такой y, что выполнено равенство $x + y = 0$". Попробуем понять, почему это утверждение верно. Пусть x – произвольное число. Чтобы было выполнено равенство $x + y = 0$, необходимо, чтобы $y = -x$. Поскольку около переменной y стоит квантор существования, такое значение $y = -x$ и возьмём.

- $\exists x \forall y$: $\ y + x \ = y$. Читается как "существует x такой, что для всех y выполнено равенство $y + x = y$". Если перенести в равенстве y в одну часть, то мы получим, что $x = 0$. И действительно, если взять $x = 0$, то утверждение превратится в $\forall y$: $\ y + 0 \ = y$ – верное утверждение.

Эти два примера демонстрируют важную мысль: если начало утверждения имеет вид $\forall x \exists y$, то y будет зависеть от x. Эту зависимость часто подчёркивают так: $\forall x \exists y = y(x)$. Если же начало утверждения имеет вид $\exists x \forall y$, то x – это уже конкретный объект (в нашем случае — число), никак не зависящий от y.

Другими словами, кванторы читаются и применяются слева направо.

Комментарий. Строго говоря, всегда лучше писать, какому множеству принадлежат переменные под квантором. Но часто это понятно из контекста, поэтому множество не упоминают. Так, всюду ранее, если мы не указывали, какому множеству принадлежат переменные, предполагалось, что рассматриваются действительные числа.

Выберите все верные утверждения

Комментарий. В одном из пунктов утверждение начинается так: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}$. Часто, когда подряд идут несколько переменных с одинаковым квантором и из одного и того же множества, пишут сначала квантор, потом перечисляют переменные и затем пишут множество, которому все эти переменные принадлежат. То есть, более коротко можно писать так: $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$.

Выберите все подходящие ответы из списка

$\forall x\ \exists y:\ xy = 1$

$\exists x\ \forall y:\ xy = y$

$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ xy = 1$

$\exists x \in \mathbb{Z}:\ 0 < x < 1$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}:\ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

Задача. How-to по доказательствам 1.

В одном из предыдущих шагов мы выяснили, что:

- $\forall x \exists y\colon\ x + y = 0$,
- $\exists x \forall y\colon\ y + x\ = y$.

Убедитесь, что порядок кванторов в утверждениях важен. Поменяйте их местами (вместе с переменными) в утверждениях выше и заметьте, что получите другие по смыслу утверждения. Останутся ли они истинными после перестановки кванторов?

Пример. Если поменять кванторы местами в первом утверждении, получится $\exists y \forall x\colon\ x + y = 0$. Это утверждение читается как "существует y, такой что для всех x выполнено $x + y = 0$".

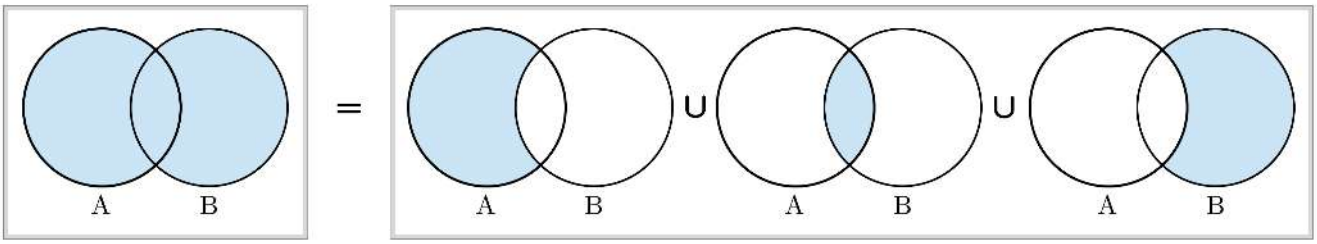
Как доказывать утверждения

Универсального рецепта нет. Вот что может помочь:

1. Развернуть определения.
2. Разбить утверждение на несколько более простых утверждений.
3. Разобрать случаи
4. Подумать, из чего можно было бы вывести нужное утверждение, то есть угадать какое-то промежуточное утверждение, которое может быть полезно.
5. Часто бывает полезно рисовать картинки!
6. Всегда полезно рассмотреть конкретные примеры.
7. Если просят доказать какое-то утверждение "для любого n," то сначала попробуйте доказать для $n = 1, n = 2$ и $n = 3$.

Пример

В предыдущем уроке упоминалось тождество $A \cup B \ = \ ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, его можно проверить с помощью кругов Эйлера-Венна



Теперь давайте попробуем доказать это утверждение строго и формально. Для начала развернём определения.

На одном из шагов урока 1.6 мы выяснили, что $S_1 = S_2 \iff (S_1 \subset S_2$ и $S_2 \subset S_1)$. Таким образом, доказательство равенства двух множеств будет состоять из доказательства двух независимых фактов: $S_1 \ \subset S_2$ и $S_2 \ \subset S_1$.

Первая часть. Докажем, что $A \cup B \ \subset \ ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

Развернем определение: $S_1 \subset S_2 \iff (x \in S_1 \implies x \in S_2)$, то есть нам достаточно доказать, что если $x \in A \cup B$, то $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

Пусть $x \in A \cup B$, тогда по определению $x \in A$ или $x \in B$, разберем случаи:

1. $x \in A$, тут два подслучая:
   - $x \in B$
     - по определению пересечения множеств из того, что $x \in A$ и $x \in B$ следует, что $x \in A \cap B$
     - по определению объединения множеств из предыдущего пункта следует, что $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$
   - $x \notin B$
     - по определению разности множеств из того, что $x \in A$ и $x \notin B$ следует, что $x \in A \setminus \ B$
     - по определению объединения множеств из предыдущего пункта следует, что $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$
2. $x \in B$ – абсолютно аналогично разбору случая $x \in A$. В каждом из двух подслучаев мы получим, что $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

Таким образом, мы показали, что если $x \in A \cup B$, то $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$. Что и требовалось доказать.

Вторую часть, то есть доказательство того, что $((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) \ \subset A \cup B$ мы разберём через несколько шагов.

Задача. How-to по доказательствам 2.

Докажите, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Рекомендуем первым делом нарисовать диаграмму Эйлера-Венна, а потом приступать к строгому доказательству. В доказательстве можете ограничиться первой частью, то есть доказательством того, что $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Вторую часть мы попросим вас доказать чуть дальше, когда разберём метод от противного.

Отрицания

Чуть дальше мы разберём метод доказательства *от противного.* В таких доказательствах предполагается, что утверждение, которое нужно доказать, неверно, и из этого выводится противоречие. Поэтому, первый шаг к тому, чтобы научиться этому методу — научиться строить отрицания утверждений.

Отрицания и логические связки

Простое отрицание

1. Утверждение: "за окном идёт дождь". Отрицание: "за окном не идёт дождь."
2. Утверждение: $y \in B$. Отрицание: $y \notin B$.
3. Утверждение: $x \notin A$. Отрицание: $x \in A$.

Логическая связка "или"

Отрицанием к утверждению вида "A или B" будет утверждение: "(A неверно) и (B неверно)". Примеры:

1. Утверждение: "этот слон розовый или я сошёл с ума". Отрицание: "этот слон не розовый и я в здравом уме".

2. Утверждение: $x \in A \cup B$. Сначала раскроем определение: $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ или } x \in B)$. Тогда отрицание: $x \notin A \text{ и } x \notin B$.

Логическая связка "и"

Отрицанием к утверждению вида "A и B" будет утверждение: "(A неверно) или (B неверно)". Построим отрицания к следующим утверждениям:

1. "Математика — красивая наука, и она полезна для Data Science."

   Если предположить, что это утверждение ложно, какое утверждение мы получим? **Неверный** способ построить отрицание к этому утверждению: "Математика не является красивой наукой и она бесполезна для Data Science". Похожая логическая ошибка, кстати, не так уж редко встречается в быту :) Правильным отрицанием будет утверждение "Математика не является красивой наукой или она бесполезна для Data Science".

2. $x \in A \cap B$. Раскроем определение: $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ и } x \in B)$. По нашему правилу получаем, что отрицанием будет $x \notin A \text{ или } x \notin B$.

Для отрицания тоже есть специальный значок $\neg$. Тогда наши правила можно записать совсем компактно:

- $\neg(A \text{ или B}) = \neg A \;\text{ и }\; \neg\text{B}$
- $\neg(A \text{ и B}) = \neg A \;\text{ или }\; \neg\text{B}$

Пример

Построим отрицание к утверждению $x \in (A \cup (B \setminus C))$. Раскроем определения:

$x \in (A \cup (B \setminus C)) \iff ((x \in A) \text{ или } (x \in B \setminus C)) \iff ((x \in A) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin C))$.

Теперь строим отрицания по нашим правилам:

$\neg((x \in A) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin C)) \iff \neg(x \in A) \text{ и } \neg(x \in B \text{ и } x \notin C)$.

Вносим отрицание глубже, получаем: $(x \notin A) \text{ и } (x \notin B \text{ или } x \in C)$.

Отрицания и кванторы

Квантор всеобщности

Отрицанием к утверждению вида "для всех x верно $A(x)$" будет утверждение вида "существует x такой, что неверно $A(x)$".
Примеры:

1. Утверждение: "у всех людей голубые глаза". Его отрицание: "существует человек, чьи глаза не голубые".
2. Утверждение: "все натуральные числа положительны". Отрицание: "существует неположительное натуральное число".
   То же самое в кванторах. Утверждение: $\forall x \in \mathbb{N}: \ x > 0$. Отрицание к нему $\exists x \in \mathbb{N}: \ x \leq 0$.
3. Утверждение "$\forall y : y^2 > 0$". Отрицание: "не для всех y выполнено $y^2 > 0$." Другими словами, существует y, для которого не выполнено $y^2 > 0$, то есть выполнено $y^2 \leq 0$. Поэтому можно и так записать отрицание: $\exists y : y^2 \leq 0$.

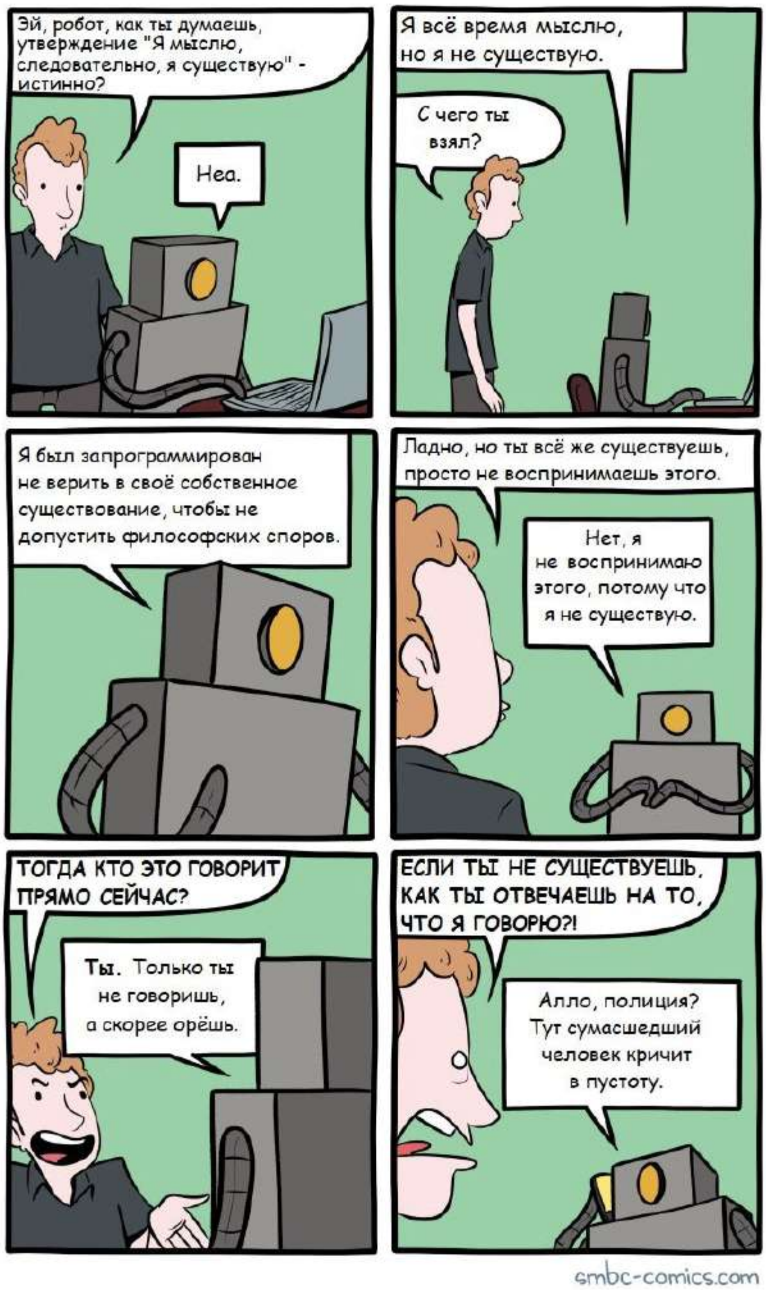
Кратко то же самое можно записать так: $\neg\ (\ \forall x: \ A(x)) \iff \exists x: \ \neg A(x)$.

Квантор существования

Отрицанием к утверждению вида "существует x такой, что верно $A(x)$" будет утверждение вида "для всех x неверно $A(x)$".
Примеры:

1. Утверждение: "существует человек с голубыми глазами". Его отрицание: "у всех людей глаза не голубого цвета".
2. Утверждение: "существует отрицательное целое число". Отрицание: "все целые числа неотрицательны".
   То же самое в кванторах. Утверждение: $\exists x \ \in \mathbb{Z}: \ x < 0$. Отрицание к нему $\forall x \in \mathbb{Z}: \ \ x \geq 0$.
3. Утверждение: "$\exists x : x^2 = x$". Отрицание: "не существует x, такого что $x^2 = x$." Другими словами, для всех x не выполнено $x^2 = x$. Поэтому можно и так записать отрицание: $\forall x : x^2 \neq x$.

Если кратко, то $\neg(\exists x: \ A(x)) \iff \forall x: \ \neg A(x)$.



Постройте отрицания к следующим утверждениям:

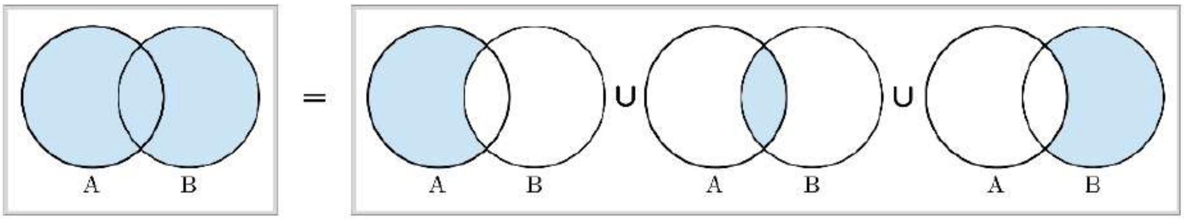
1. $x \in A \setminus B$
2. $x \in A \cup (B \cap C)$
3. $\forall A: \ A \cap \emptyset \ = \emptyset$
4. $\exists \ A \ \forall B: \ A \cup B = B$

Доказательство от противного

При доказательстве некоторого утверждения от противного предполагается, что это утверждение неверно, после чего выводится противоречие. Давайте посмотрим, как это работает, на примере.

Пример

Вернёмся к доказательству равенства $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Вот оно на диаграммах Эйлера-Венна ещё раз:



В одном из предыдущих шагов мы показали, что $A \cup B \subset ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$. Теперь займёмся второй частью доказательства и покажем, что $((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) \subset A \cup B$.

По определению, $S_1 \subset S_2 \iff (x \in S_1 \implies x \in S_2)$. Пусть $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

Предположим, что следствие не выполнено, то есть неверно, что $x \in A \cup B$.

Мы уже научились строить такие отрицания: $\neg(x \in A \cup B) \iff (x \notin A$ и $x \notin B)$. Но заметим, что тогда по определению

- из того, что $x \notin A$, следует, что $x \notin (A \setminus B)$
- из того, что $x \notin A$ также следует, что $x \notin A \cap B$
- из того, что $x \notin B$ следует, что $x \notin (B \setminus A)$

Следовательно, x не лежит в объединении этих трёх множеств $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Противоречие. Значит, изначальное предположение было неверным. Следовательно, $x \in A \cup B$.

(учитель математики Кати любил шутить, что математика — вредная наука, тут все доказательства от противного, нет бы хоть раз от приятного :)

Закон контрапозиции

Закон контрапозиции говорит, что следующие два утверждения *эквивалентны*:

- если X, то Y
- если неверно Y, то X тоже неверно

То есть либо оба утверждения верны, либо оба ложны. Примеры:

1. Утверждение: "ты не завтракал, значит ты голоден". Эквивалентная переформулировка: "ты не голоден, значит ты завтракал".

   Закон контрапозиции часто применяют неправильно и делают вывод: "ты завтракал, значит ты не голоден". И с логической точки зрения, и с точки зрения здравого смысла это **неверно**. Даже если человек позавтракал, он может проголодаться к обеду.

2. Утверждение: если $x \in \mathbb{N}$, то $x \in \mathbb{Z}$. Эквивалентная переформулировка: если $x \notin \mathbb{Z}$, то $x \notin \mathbb{N}$.

Или более компактно: $(X \implies Y) \iff (\neg Y \implies \neg X)$. Фактически, когда мы доказываем методом "от противного" мы пользуемся законом контрапозиции. Действительно, рассмотрим пример выше.

Пусть X – это утверждение $x \in ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$. Y – утверждение $x \in A \cup B$.

Мы сказали: пусть X верно, а Y неверно. Из $\neg Y$ мы вывели $\neg X$, получив тем самым противоречие. То есть вместо того, чтобы доказать, что $X \implies Y$, мы показали, что $\neg Y \implies \neg X$.

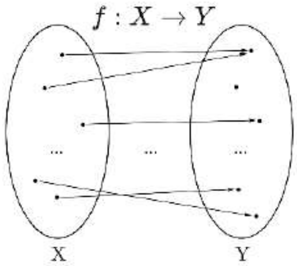
Задача. How-to по доказательствам 3.

Вернёмся к равенству $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. В одной из предыдущих задач мы попросили вас доказать, что $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. В этой задаче докажите методом от противного, что $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, завершая тем самым доказательство равенства.

Функции

Определение. *Функция* – это соответствие между элементами двух множеств, такое что каждому элементу первого множества соответствует ровно один элемент второго множества.

Пусть первое множество обозначено через X, второе через Y, а функция через f. Тогда мы будем говорить, что «функция f отображает X в Y», «функция f бьёт из X в Y», «функция f из X в Y» или «$f : X \to Y$».



Элемент $x \in X$, к которому мы применяем функцию f, называется *аргументом* функции, а элемент $f(x) \in Y$ называется *значением* функции.

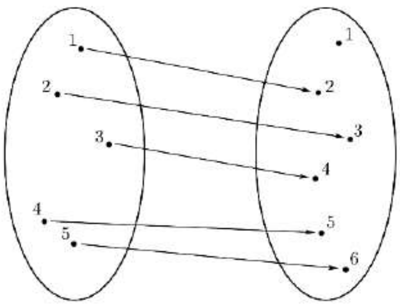
Определение. Если функция f отображает X в Y, то X называется *областью определения* функции f.

Множество всех значений, которые принимает функция f, называется *областью значений* функции f (или *образом* f).

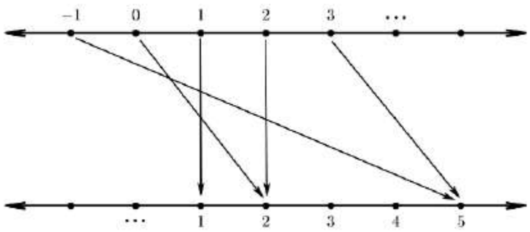
Область значений является подмножеством множества Y, но не обязана совпадать с Y. Это можно видеть на примерах ниже.

Примеры

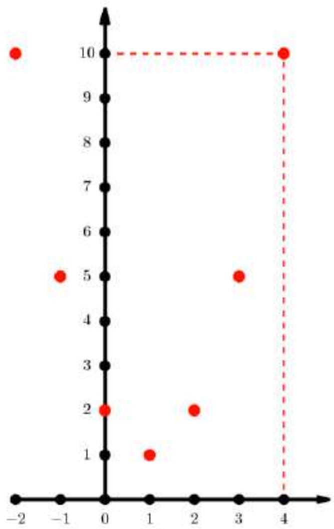
Функция f из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, которая отображает x в $x + 1$. Область определения f это $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Область значений f это $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (а не $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).



Функция g из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, которая отображает число $x \in \mathbb{Z}$ в $x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Z}$, для любого $x \in \mathbb{Z}$. Эту же функцию можно коротко записать как $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Эту функцию можно представить любой из двух картинок ниже. На первой картинке $\mathbb{Z}$, из которого отображает g, изображено как горизонтальная прямая сверху. А $\mathbb{Z}$, в которое отображает g, изображено как горизонтальная прямая снизу.



На второй картинке $\mathbb{Z}$, из которого отображает g, соответствует горизонтальная прямая. А $\mathbb{Z}$, в которое отображает g, соответствует вертикальная прямая.



Ещё про функции

Более жизненные примеры

На самом деле, в привычных нам зависимостях тоже можно увидеть функции:

- Функция f из T в $\mathbb{R}$, где T – множество дней в 2019 году. Функция f сопоставляет дню курс доллара к рублю в этот день.

- Функция f из L в $\{0, 1\}$, где L – множество из 1000 фотографий, которые лежат у меня на жёстком диске. Функция f сопоставляет фотографии единицу, если на фото есть кот, и ноль, если кота нет.

- Функция f из множества непустых строк в $\mathbb{N}$, которая сопоставляет строке её длину.

- Функция f из множества корректных программ на языке Python в множество строк. f сопоставляет программе её вывод.

Функции от многих переменных

- Функция f из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$, которая отображает тройку (x_1, x_2, x_3) в $x_1^2 + x_2^2 + x_3 \in \mathbb{R}$. Эту же функцию можно коротко записать как $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3$

- Более жизненный пример: f из множества уже наступивших дат в $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество неотрицательных целых чисел. Функция f ставит в соответствие дате (то есть тройке чисел (d, m, y), где d, m, y – это день, месяц и год соответственно) число заболевших коронавирусом в мире.
  Заметим, что область определения (множество дат, для которых функция определена) зависит от момента прочтения этого текста. ¯_(ツ)_/¯
- Функция потерь на вход принимает параметры алгоритма, а на выход выдает число. Например, если алгоритмы из вашего класса задаются тремя параметрами, то функция потерь L бьёт из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. При этом про $\mathbb{R}^3$ стоит думать, как про пространство всевозможных алгоритмов из вашего класса. Действительно, каждая точка $\mathbb{R}^3$ соответствует конкретной тройке чисел, которая, в свою очередь, задаёт один конкретный алгоритм из вашего класса.

Точка минимума и план на следующие недели

Определение. *Точкой минимума* функции $f : X \to \mathbb{R}$ называется такой $x_{min} \in X$, что $f(x_{min}) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Как мы уже поняли из первых уроков этой недели, задача поиска точки минимума функции очень важна для машинного обучения. По сути, всё "обучение" является поиском точки минимума функции потерь L.

Всю вторую неделю мы будем выстраивать теорию пределов последовательностей. Эта теория позволит нам на третьей неделе определить и понять *производную*. А производная — ключ к *градиенту* и *градиентному спуску*, который как раз и решает задачу поиска точки минимума функции.

Наши следующие уроки будут посвящены последовательностям и их пределам.

Неформально говоря, *последовательность* элементов множества X – это бесконечный набор элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ где $x_i \in X$ для любого номера i.

Задача. Попробуйте придумать формальное определение последовательности на основе информации, изученной в этом уроке. В следующем уроке вы узнаете классическое определение. Ваше определение запишите в поле в конце шага.

Перед тем, как закончить урок про доказательства, давайте узнаем ещё несколько способов доказывать утверждения.

ТИПИЧНЫЕ МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство запугиванием

Как легко видеть, $\left|\bigoplus_{k\in S}\left(\mathfrak{K}^{\mathbb{F}^{\alpha}(i)}\right)_{i\in\mathfrak{U}_k}\right| \preccurlyeq \aleph_1$ при $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^{\alpha}(\mathbb{N}) \neq \varnothing$.

Доказательство запутыванием

Это утверждение представляет собой переформулировку предложения 5.3.18, которое вытекает из теоремы 7.1.24, основанной на лемме 2.4.14, являющейся следствием теоремы 7.1.24 и предложения 5.3.18.

Доказательство авторитетом

Очевидно.

Доказательство ссылкой на литературу

Непосредственно вытекает из результата, приведенного в [1].

[1] К. А. Който (ред.) Югославское математическое общество. Заседание II. 1925. Сборник рукописей внесекционных докладов. Стр. 17.

Доказательство ссылкой на страницу

Обоснование имеется на стр. 478 в [2].

[2] Аут Оф Пейпер. Теория нумераций. М.: Каунтер, 1990. 396 с.

Доказательство ссылкой на

Заинтересованный читатель может найти доказательство этого результата на домашней странице Л. Узера: Error 404 Page not found

Доказательство убаюкиванием

Подробное обосновние будет приведено в главе 7 после развития соответствующей теории... Глава 7: Ради простоты предположим, что $z = 0$. (Общий случай рассмотрен в Приложении 2.)... Приложение 2: Формальное доказательство выходит за рамки данной монографии.