Матрицы

На этом уроке мы покажем, как по *матрице* размера m на n построить линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. То есть линейное отображение, которое на вход принимает вектор из n чисел, а на выход выдаёт вектор из m чисел.

Начнём мы со следующего примера, который будем разбирать первые несколько шагов этого урока.

Линейное отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Построим пример линейного отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Будем строить f из двух более простых линейных отображений f_1 и f_2, которые мы сейчас определим.

Пусть f_1 это линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. Как мы узнали из последних шагов прошлого урока, любое отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$ задаётся строкой из 3 чисел. Давайте зададим f_1 строкой $(3, 5, 7)$. То есть для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ имеем $f_1(\vec{x}) := 3x_1 + 5x_2 + 7x_3$.

Аналогично, f_2 это линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$, задаваемое строкой $(4, 4, 4)$. То есть $f_2(\vec{x}) := 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$.

Теперь определим $f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Так как f отображает $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$, вектор $f(\vec{x})$ должен лежать в $\mathbb{R}^2$. Значит, $f(\vec{x})$ должен быть столбцом из двух чисел. Определим этот столбец так:

$$f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

Например,

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 7 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Найдите $f(9, 1, -7)$. Напоминаем, что

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Проверка линейности f

Мы определили отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Но мы не доказали, что это отображение является линейным – то есть, что для f выполняются первое и второе условие линейности.

Проверку первого условия мы дадим как задачу на следующем шаге. А пока проверим, что для f выполняется второе условие линейности.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ и число $c \in \mathbb{R}$, и докажем что $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$. По построению отображения f выполнено:

$$f(c\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(c\vec{x}) \\ f_2(c\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Так как f_1 и f_2 – линейные отображения, для них выполнено второе условие линейности. То есть $f_1(c\vec{x}) = cf_1(\vec{x})$ и $f_2(c\vec{x}) = cf_2(\vec{x})$. Значит,

$$\begin{pmatrix} f_1(c\vec{x}) \\ f_2(c\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cf_1(\ \vec{x}) \\ cf_2(\ \vec{x}) \end{pmatrix}.$$

По определению операции умножения вектора на число выполнено:

$$\begin{pmatrix} cf_1(\ \vec{x}) \\ cf_2(\ \vec{x}) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} f_1(\ \vec{x}) \\ f_2(\ \vec{x}) \end{pmatrix} = cf(\vec{x}).$$

Мы доказали, что для f выполнено второе условие линейности.

Повторим наше доказательство в сжатом виде:

$$f(c\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(c\vec{x}) \\ f_2(c\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cf_1(\ \vec{x}) \\ cf_2(\ \vec{x}) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} f_1(\ \vec{x}) \\ f_2(\ \vec{x}) \end{pmatrix} = cf(\vec{x}).$$

Задача с проверкой. Матрицы 1.

Докажите, что для f выполняется первое условие линейности. То есть $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Напоминаем, что f задаётся так:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Заполните пропуски

Пусть $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Тогда $f(\overrightarrow{x}) = ($ ______ , ______ $)$.

2. И $f(\overrightarrow{y}) = ($ ______ , ______ $)$.

3. А $f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = ($ ______ , ______ $)$.

4. При этом $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

5. Следовательно, $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = ($ ______ , ______ $)$.

Тем самым $f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$.

Матрица размера 2 на 3.

Напомним, мы определили f так:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

То есть $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задаётся строкой $(3, 5, 7)$ и $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задаётся строкой $(4, 4, 4)$.

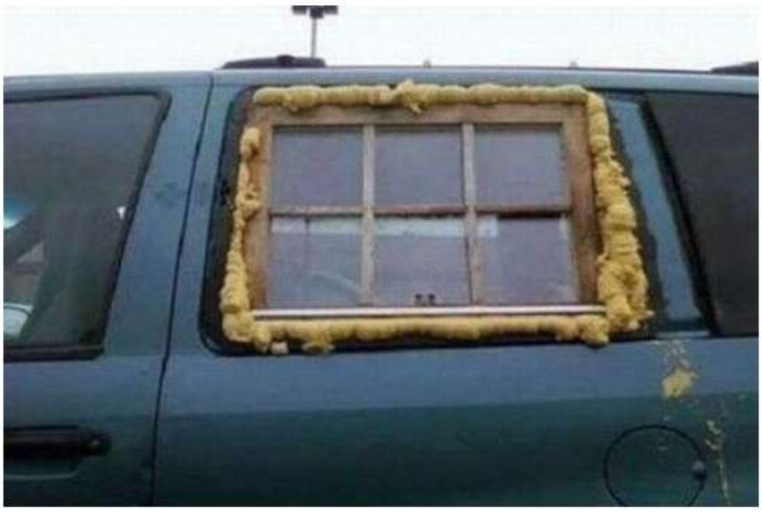
Тогда отображение f можно записать в виде таблицы из двух строк, где первая строка соответствует f_1, а вторая строка соответствует f_2. Вот так:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

- Чему равна первая координата вектора $f(\vec{x})$? Результату действия первой строки таблицы на вектор $\vec{x}$.
- Что нужно сделать, чтобы получить вторую координату вектора $f(\vec{x})$? Подействовать второй строкой таблицы на вектор $\vec{x}$.

Эта таблица называется *матрицей*. Заметьте, что матрица $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ полностью определяет отображение f. То есть зная эту матрицу, можно найти $f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

На следующем шаге с теорией мы зададим линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ матрицей размера m на n.



Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ задано не матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, а матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Матрица m на n.

Построим линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по матрице размера m на n. В примере, который мы использовали в первой половине урока, было $m = 2$ и $n = 3$. Если что-то в общей теории будет не ясно, то вернитесь к примеру, и посмотрите, как теория работала на нём.

Пусть дана такая матрица:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех i, j. Числа a_{ij} называют *элементами* матрицы. Заметьте, что первый индекс элемента матрицы равен номеру его строки, а второй индекс – номеру его столбца.

Мы хотим по матрице A построить линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Пусть $A := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 21 & -2 \\ 3 & 16 & 23 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 16 & 2 & -25 & 14 \end{pmatrix}$

Найдите a_{32}

Введите численный ответ

Введите число

Строим линейное отображение по матрице

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Посмотрим на первую строку матрицы – это строка $(a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1n})$. Ей, как и любой строке длины n, соответствует линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Обозначим это отображение за f_1. Отображение f_1 будет отвечать за первую координату отображения f. Вот формула для действия строки $(a_{11}, a_{12} \dots, a_{1n})$ на векторе $\vec{x}$:

$$f_1(\vec{x}) = (a_{11}, a_{12} \dots, a_{1n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \in \mathbb{R}.$$

Повторим это не для первой строки, а для строки номер i. Да, будет почти то же самое, но давайте всё-таки проговорим, чтобы не запутаться в индексах.

Строка номер i это $(a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{in})$. Ей, как и любой строке длины n, соответствует линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Обозначим это отображение за f_i. Отображение f_i будет отвечать за i-ую координату отображения f. Вот формула для действия строки $(a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{in})$ на векторе $\vec{x}$:

$$f_i(\vec{x}) = (a_{i1}, a_{i2} \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь отображениями $f_1, \dots, f_m$, мы так определяем действие отображения f на векторе $\vec{x}$:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Действие матрицы A на векторе $\vec{x}$

Обозначение. Полученный способом с предыдущего шага вектор $f(\vec{x})$ называется результатом *действия* матрицы A на векторе $\vec{x}$ и обозначается $A\vec{x}$.

Записывают действие матрицы A на векторе $\vec{x}$ так:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Также можно говорить, что мы умножили A на $\vec{x}$ и получили $A\vec{x}$.

Принцип "строка на столбец" в конце прошлого урока мы вводили именно для умножения A на $\vec{x}$.

Комментарий. Конечно, можно было не вводить отображения $f_1, \dots, f_m$, а сразу дать формулу для $A\vec{x}$. Но так было бы сложнее понять, что каждая строка матрицы отвечает за своё отдельное линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Отображение f задано матрицей $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 21 & -2 \\ 3 & 16 & 23 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Из какого пространства в какое бьёт отображение f?

Выберите один вариант из списка

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

Отображение f задано матрицей $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 21 & -2 \\ 3 & 16 & 23 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Найдите $f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Пример. Найдём $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. По определению это равняется

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 21 & -2 \\ 3 & 16 & 23 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot 1 & + & 2\cdot 0 & + & 21\cdot 1 & + & (-2)\cdot 0 \\ 3\cdot 1 & + & 16\cdot 0 & + & 23\cdot 1 & + & 5\cdot 0 \\ 3\cdot 1 & + & 4\cdot 0 & + & 6\cdot 1 & + & (-7)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Отображение f задано матрицей $\begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите $f\begin{pmatrix} -7 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Отображение f задано матрицей $\begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.6 \\ -2 & 0.875 & -1.5 \\ 0.7 & 0.3 & -1.2 \end{pmatrix}$.

Найдите $f\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Полученный вами вектор напишите в строчку: например, `(-20, 5)`. Число пробелов роли не играет.

Напишите текст

Напишите ваш ответ здесь...

Задача. Матрицы 2.

На прошлых шагах мы показали, как по матрице A размера m на n построить отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Однако мы пока не доказывали, что получившееся отображение f является линейным.

Докажите, что отображение f линейно. То есть проверьте, что для f выполняются первое и второе условия линейности.

Комментарий. Мы уже решали эту задачу для случая матрицы размера $m = 2$ на $n = 3$.

Что мы прошли на этом уроке

- Мы начали изучать матрицы — таблицы с m строками и n столбцами, состоящие из чисел.
- Вспомнив, как строкой из n чисел задать линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, мы научились по матрице размера m на n строить линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.
- В частности, из формулы для умножения строки на столбец мы вывели формулу для умножения матрицы на вектор.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- ближе познакомимся с матрицами, разобрав много примеров
- покажем, что матрицы и линейные отображения это одно и то же