Математика для Data Science. Теория вероятностей. Шпаргалка

Содержание

Третья неделя. Распределения, дисперсия и счётное пространство исходов

Распределения случайных величин

Функция $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, заданная условием $p_X(a) := P(X = a)$ для любого $a \in R$, называется *функцией вероятности случайной величины* X.

Мы говорим, что функция вероятности случайной величины X задаёт *распределение* X.

Две случайные величины с совпадающими функциями вероятности называются *одинаково распределёнными.*

Независимые случайные величины

Случайные величины X и Y *независимы*, если для любых $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ события $X = a$ и $Y = b$ независимы. То есть:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : P(X = a \cap Y = b) = P(X = a) \cdot P(X = b).$$

Если случайные величины X и Y независимы, то $E[X \cdot Y] = E[X]E[Y]$.

Если случайные величины совместно независимы и одинаково распределены, то слово "совместно" часто опускают, и говорят просто "независимые и одинаково распределённые". В английском это звучит как "independent and identically distributed", что сокращают до i.i.d.

Пусть даны два вероятностных пространства с пространствами исходов Ω_1 и Ω_2, и функциями вероятности P_1 и P_2 соответственно. Тогда их *произведение* это вероятностное пространство $\Omega_1 \times \Omega_2$, определённое так:

- исходы в этом вероятностном пространстве это всевозможные пары (ω_1, ω_2) с $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$,
- вероятности соответствующих исходов равны $P(\omega_1, \omega_2) := P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2)$

Аналогично можно построить произведение любого числа вероятностных пространств.

Дисперсия

Дисперсия случайной величины X это число $E[(X - E[X])^2]$, обозначаемое $Var[X]$.

Эквивалентная формула дисперсии такая: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

Свойства дисперсии

1. Для любой случайной величины X выполнено $Var[X] \geq 0$
2. $Var[X] = 0$ если и только если X это постоянная случайная величина
3. Если X и Y это <u>независимые</u> случайные величины, то $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.
4. Если $c \in \mathbb{R}$ и X — случайная величина, то $Var[cX] = c^2 Var[X]$.

Биномиальное распределение и стандартное отклонение

Стандартным отклонением случайной величины X называется $\sqrt{Var[X]}$.

Пусть $X = 1$ с вероятностью p и $X = 0$ с вероятностью $1 - p$. Такое распределение случайной величины называется *распределением Бернулли* с вероятностью успеха p.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда распределение случайной величины $S := X_1 + \cdots + X_n$ называется *биномиальным распределением с n степенями свободы.*

Биномиальное распределение обозначается $Bin(n, p)$. Фразу "S имеет биномиальное распределение с n степенями свободы" записывают так: $S \sim Bin(n, p)$.

Ряды

Рядом называется выражение вида $a_1+a_2+a_3+\dots$, где $\{a_n\}$ это последовательность вещественных чисел.

Также используется запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots$.

Числа a_n называются *членами* ряда.

Частичными суммами ряда называются такие выражения:

- $S_1 := a_1$
- $S_2 := a_1 + a_2$
- $S_3 := a_1 + a_2 + a_3$

  $\dots$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

  $\dots$

Суммой ряда называется предел частичных сумм, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ряд называется *сходящимся*, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует, и *расходящимся* в противном случае.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Этот ряд называют *гармоническим*.

Если ряд состоит из неотрицательных чисел и при этом все частичные суммы меньше некоторого числа B, то ряд сходится.

Свойства сходящихся рядов

1. **Необходимое условие сходимости ряда.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два сходящихся ряда. Тогда

   - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится
   - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ сходится
   - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ сходится для любого $c \in \mathbb{R}$

3. Если $0 \le a_n \le b_n$ для всех n, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *мажорирует* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если, кроме того

   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назвается *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема. Любой абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Ряд, который сходится, но не сходится абсолютно, называют *условно сходящимся*.

Теорема. Если ряд абсолютно сходится к сумме S, то любой ряд, полученный из него перестановкой слагаемых, тоже абсолютно сходится к той же сумме S.

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то его слагаемые можно переставить так, чтобы полученный ряд сходился к любому заранее заданному числу $c \in \mathbb{R}$.

Счётное пространство исходов

Множество A называется *счётным*, если существует функция $f : \mathbb{N} \to A$, такая что для любого $a \in A$ найдётся ровно одно $n \in N$, что $f(n) = a$.

Примеры счётных множеств: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Примеры несчётных множеств: $\mathbb{R}, [0, 1], \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$

Когда говорят "множество несчётно", имеют в виду, что множество не является счётным или конечным.

Пусть есть счётное пространство исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$. Как и в случае с конечным пространством исходов, будем называть событием любое подмножество Ω.

Пусть P_n — вероятность события, состоящего ровно из одного исхода ω_n. Потребуем, чтобы $P_n \geq 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ сходился к 1. Вероятность каждого события как сумму вероятностей исходов, из которых это событие состоит. Эта сумма может быть бесконечной, то есть суммой ряда. Как и в случае конечного числа исходов, *случайная величина* X это функция из пространства исходов в $\mathbb{R}$, то есть $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Пусть дано вероятностное пространство Ω, состоящее из счётного количества элементарных исходов, и случайная величина X. Обозначим через P_i вероятность i-ого исхода, и через x_i значение случайной величины X на i-ом исходе. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i P_i$ абсолютно сходится, его сумма называется *математическим ожиданием* случайной величины X и обозначается $E[X]$. Если ряд не сходится абсолютно, то математическое ожидание не определено.

Пусть дано вероятностное пространство Ω, состоящее из счётного количества элементарных исходов, и случайная величина X. Предположим, что $E[X]$ определено. Тогда *дисперсией* называется математическое ожидание случайной величины $(X - E[X])^2$, если это математическое ожидание определено. Если $E[X]$ или $E[(X - E[X])^2]$ не определено, то $Var(X)$ не определена.

Вероятностные пространства с конечным или счётным количеством исходов называются *дискретными*. Аналогично, случайная величина, которая принимает конечное или счётное количество разных значений, называется *дискретной*.