Математическое ожидание и умножение

На последних шагах первой части этого урока мы поняли, что математическое ожидание хорошо себя ведёт со сложением и умножением на константу. То есть $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$.

Оказывается, математическое ожидание плохо ведёт себя с умножением. В частности, почти никогда не выполняется $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$. Приведём пример, когда это равенство не выполняется.

Пример

Мы бросаем честную монетку. Соответственно, наше вероятностное пространство состоит из двух исходов – орёл и решка.

Обозначим за X случайную величину, которая равна 1 если выпал орёл, и 0 если выпала решка. Ясно, что $E[X] = 0.5$

Обозначим за Y случайную величину, которая равна 0 если выпал орёл, и 1 если выпала решка. Ясно, что $E[Y] = 0.5$

Посмотрим на случайную величину $X \cdot Y$. Она равна нулю, потому что:

- $X \cdot Y(\text{орёл}) = X(\text{орёл}) \cdot Y(\text{орёл}) = 1 \cdot 0 = 0$
- $X \cdot Y(\text{решка}) = X(\text{решка}) \cdot Y(\text{решка}) = 0 \ \cdot 1 \ = 0$

Тем самым $X \cdot Y = 0$, а значит и $E[X \cdot Y] = 0$.

Мы получили, что

$$E[X \cdot Y] = 0 \neq 0.5 \cdot 0.5 = E[X] \cdot E[Y]$$

Задача. Случайная величина и математическое ожидание 4

1. Приведите пример случайных величин X и Y, таких что $E[X] = E[Y] = 1$ и $E[X \cdot Y] = 1$.
2. Приведите пример случайных величин X и Y, таких что $E[X] = E[Y] = 1$ и $E[X \cdot Y] = 0$.
3. Приведите пример случайных величин X и Y, таких что $E[X] = E[Y] = 1$ и $E[X \cdot Y] = 1000$.

Задача. Случайная величина и математическое ожидание 5

Приведите пример случайной величины X, для которой не выполнено $E[X^2] = E[X] \cdot E[X]$.

Как мы увидели в предыдущей задачах, математическое ожидание НЕ перестановочно с умножением, то есть не всегда выполнено $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.

На следующих двух шагах мы проверим наши знания относительно того, как математическое ожидание ведёт себя с

- умножением случайной величины на число,
- сложением случайных величин,
- произведением случайных величин.

Выберите утверждения, верные для любых случайных величин X, Y и Z:

Выберите все подходящие ответы из списка

$E[X-3] = E[X] - 3$
$E[X^5] = (E[X])^5$
$E[5X-4Y] = 5E[X] - 4E[Y]$
$E[X \cdot Y \cdot Z] = E[X] \cdot E[Y] \cdot E[Z]$

Выберите утверждения, верные для любых случайных величин X, Y и Z:

Выберите все подходящие ответы из списка

$E[2X + 3Y - 5Z] = 2E[X] + 3E[Y] - 5E[Z]$
$E[5XY] = 5E[XY]$
$E[5XY] = 5E[X]E[Y]$
$E[X^3 + Y] = (E[X])^3 + E[Y]$

Что мы прошли на этом уроке

- Для случая конечного Ω мы определили случайную величину как функцию $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Обсудили, что случайные величины можно складывать и умножать, поэтому можно определить случайную величину, равную многочлену от случайных величин.
- Ввели понятие математического ожидания случайной величины:

$$E[X] := \sum_{i=1}^{n} x_i P_i.$$

- Доказали свойства математического ожидания, в частности, его линейность:

$$E[cX] = c \cdot E[X], \text{ где } c \in \mathbb{R},$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$

- При этом в общем случае $E[X \cdot Y] \neq E[X] \cdot E[Y]$.

Следующие два урока этой недели – дополнительные. За задачи из этих уроков не даются баллы.

- Первый дополнительный урок рассказывает про треугольник Паскаля. Это красивая структура, которую образуют биномиальные коэффициенты.
- Второй дополнительный урок состоит из задач на нахождение вероятности. В нём можно закрепить материал, пройденный на первых двух неделях.

Что нас ждёт на следующей неделе

На следующей неделе мы

- познакомимся с *функцией вероятности* случайной величины и с *независимыми случайными величинами*
- узнаем, что такое *дисперсия* и *стандартное отклонение*
- пройдём *ряды*, которые нам понадобятся для случая *счётного* пространства исходов