Математика для Data Science. Теория вероятностей.
Условия задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

Определённый интеграл

Задача 1

Дана постоянная функция $f(x) = 3$, определённая на отрезке $[0, 100]$. Найдите $\int\limits_0^{100} f(x)\,dx$.

Задача 2

Дана функция $f(x) = x$, определённая на отрезке $[0, 1]$. Построим последовательность разбиений. Разбиение номер k будет состоять из точек $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$. В качестве c_i на каждом из отрезков мы выбираем самую правую точку отрезка.

1. Докажите, что ранг этих разбиений стремится к нулю.
2. Найдите предел соответствующих интегральных сумм.

Заметьте, что мы нашли предел только одной последовательности разбиений. Чтобы доказать, что найденное число действительно является интегралом функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$, нам бы пришлось рассмотреть всевозможные другие последовательности разбиений.

Неопределённый интеграл

Дополнительная задача

Задача. Формализуйте доказательство с предыдущего шага.
Вам понадобятся определения непрерывности из курса матана, вот они.
Определение [по Коши]. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

- $x_0 \in D$ (где D это область определения f),
- для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in D$, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$.

Определение [по Гейне]. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

- $x_0 \in D$,
- предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Определения непрерывности в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.
Определение. Функция f называется непрерывной если она непрерывна в каждой точке D.

Задача 1

1. Найдите неопределённый интеграл функции x^n.
2. Найдите определённый интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$.

Каждый раз, когда мы пишем "найдите неопределённый интеграл" мы имеем в виду "найдите какой-нибудь неопределённый интеграл".

Задача 2

1. Найдите неопределённый интеграл функции $\cos(x)$.
2. Найдите определённый интеграл $\int\limits_a^b \cos(x)\,dx$.

Задача 3

Пусть f и g – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

1. Докажите, что $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

2. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x) + g(x)\,dx$.

Тем самым операция взятия определённого интеграла линейна на множестве всех непрерывных функций.

Задача 4

Найдите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x\,dx$ или докажите, что он расходится

Задача 5

Найдите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ или докажите, что он расходится

Задача 4

Найдите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ или докажите, что он расходится

Непрерывные вероятностные пространства

Задача 1

Докажите, что вероятность прихода Светы в течение вечеринки действительно равна 1. То есть, что $P([0, 3]) = \int\limits_0^3 g(t)\,dt = 1$.

Можете строго найти интеграл, используя первообразную. А можете считать, что мы уже убедились, что интеграл это площадь, и просто найти площадь нужных частей подграфика (используя формулы площади прямоугольника и площади прямоугольного треугольника).

Задача 2

Оказывается, что и Костя, и Лена приходят на вечеринку ровно на час. То есть каждый из них приходит на вечеринку, проводит на ней час времени и уходит. Если вечеринка закончилась раньше, чем пройдёт этот час, то человек просто уходит вместе с остальными гостями в конце вечеринки. Найдите вероятность того, что вы сможете представить друг другу Костю и Лену.

Другими словами, найдите вероятность того, что в какой-то момент на вечеринке одновременно будут и Костя, и Лена.

Плотность вероятности

Задача 1

Чему будет равняться сумма площадей всех столбиков псевдо-гистограммы для экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 1$?

Задача 3

Нарисуйте график плотности вероятности для равномерного распределения

1. на отрезке $[0, 1]$
2. на отрезке $[3, 5]$
3. на отрезке $[1, x]$, где $x > 1$