План третьей недели

В первой половине недели мы продолжим изучать случайные величины: узнаем, что называется их *распределением* и *дисперсией*. Кроме того, мы обсудим, когда случайные величины называются независимыми.

Во второй половине недели мы пройдём вероятностные пространства со *счётным* пространством исходов и случайные величины на этих пространствах. Чтобы понять вероятностные пространства со счётным пространством исходов, нам нужно научиться работать с *рядами*. Суммирование рядов тесно связано с пределами последовательностей, поэтому после курса матана понять суммирование рядов будет несложно. Вероятностные пространства со счётным пространством исходов очень похожи на вероятностные пространства с конечным пространством исходов, поэтому мы будем проходить их всего один урок.

Итак, наш план на неделю такой:

1. Сначала мы поймём распределение случайной величины и независимость случайных величин
2. Затем изучим дисперсию и посмотрим на биномиальное распределение
3. Далее пройдём ряды
4. И наконец разберёмся со случаем счётного пространства исходов
5. Последний урок — дополнительный. На нём мы поговорим про теорию множеств и то, как работать с бесконечными множествами

Распределения случайных величин

На этом уроке мы обсудим полезный инструмент для описания случайной величины — её *распределение*. Распределение можно записать при помощи *функцией вероятности случайной величины*. Затем мы поговорим о том, насколько много информации о случайной величине несёт в себе распределение этой случайной величины.

Распределение случайной величины

Пусть дана случайная величина X. Неформально говоря, *распределение* случайной величины X – это информация о том, какие значения X принимает и насколько часто. При этом игнорируется вопрос о том, на каких исходах эти значения принимаются, и на каком вероятностном пространстве определена случайная величина X.

Пример 1. Случайная величина Y равна количеству орлов, выпавших при броске двух честных монеток. Тогда распределение случайной величины Y это следующая информация:

- $Y = 0$ с вероятностью 0.25
- $Y = 1$ с вероятностью 0.5
- $Y = 2$ с вероятностью 0.25

Давайте определим это строго. Для начала, давайте придадим строгий смысл фразам вида "$X = 1$ с вероятностью 0.5".

Обозначение. Дана случайная величина X, определённая на пространстве исходов Ω. Рассмотрим любое число $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество всех таких исходов $\omega \in \Omega$, что $X(\omega) = a$. Другими словами, это ровно те исходы, на которых случайная величина X принимает значение a. Эти исходы образуют подмножество в пространстве исходов Ω. Как мы знаем, подмножества пространства исходов называются событиями. Обозначим наше событие так: $X = a$. Это несколько непривычное нам обозначение события, ведь до этого мы обозначали события одиночными латинскими буквами, а не целыми выражениями. Теперь мы можем написать выражение $P(X = a)$ – это вероятность события $X = a$. То есть $P(X = a)$ это суммарная вероятность всех исходов, на которых X принимает значение a. Тогда фраза "$X = 1$ с вероятностью 0.5" строго записывается так: $P(X = 1) = 0.5$.

Пример 2. Обозначим за S случайную величину, равную сумме бросков двух кубиков. Тогда

- $P(S = 2) = \frac{1}{36}$
- $P(S = 10) = \frac{3}{36}$
- $P(S = -8.14) = 0$
- $P(S = 12\sqrt{3}) = 0$

Мы бросаем кубик два раза подряд. Обозначим за L случайную величину, равную разности результатов первого и второго броска. Например,

- $L(2,5) = 2 - 5 = -3,$
- $L(6,2) = 6 - 2 = 4.$

Выберите все подходящие ответы из списка

$P(L = 3) = \frac{5}{36}$
$P(L = -2) = \frac{1}{9}$
$P(L = 0.5) = \frac{1}{9}$
$P(L = 0) = \frac{1}{6}$

Функция вероятности случайной величины

Заметим, что выражение $P(X = a)$ можно рассматривать как функцию от числа $a \in \mathbb{R}$. Эта функция на вход принимает a, а на выход даёт вероятность события $X = a$, то есть число $P(X = a)$. В явном виде записать эту функцию можно так.

Определение. Функция $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная условием $p_X(a) := P(X = a)$ для любого $a \in R$, называется *функцией вероятности случайной величины* X.

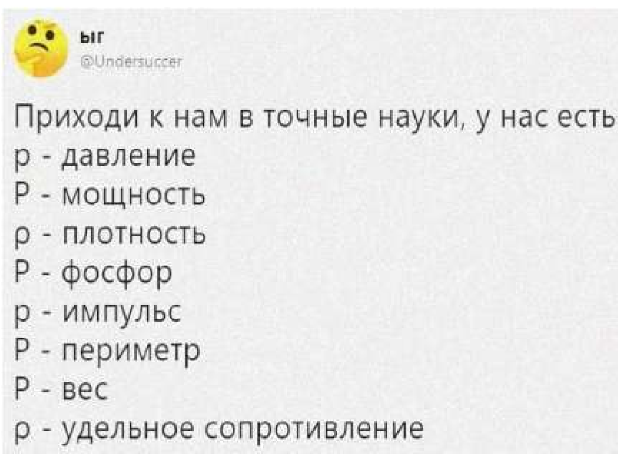
Пример. Обозначим за S случайную величину, равную сумме бросков двух кубиков. Тогда

- $p_S(2) = \frac{1}{36}$,
- $p_S(10) = \frac{3}{36}$,
- $p_S(14.5) = 0$.

Названия. Заметьте, что мы называем функцию P, которая по событию даёт его вероятность, функцией вероятности. А функцию p_X мы называем функцией вероятности случайной величины X (или функцией вероятности X). При этом P и p_X это разные понятия, несмотря на их названия. Названия общепринятые, так что придётся работать с ними, хотя по началу схожесть и может приводить к путанице.

Обозначение. Мы говорим, что функция вероятности случайной величины X задаёт *распределение* X.

Зачем вводить понятие распределения, если у нас уже есть понятие функция вероятности случайной величины? Распределение – более общее понятие. Мы вернёмся к этому, когда будем обсуждать непрерывные случайные величины. Пока что для нас фразы "задать распределение случайной величины" это синоним фразы "задать функцию вероятности случайной величины".



Мы подбрасываем честную монету три раза подряд, и один раз бросаем честный кубик

- Случайная величина X – число, выпавшее на честном кубике
- Случайная величина Y – суммарное число решек, выпавшее за эти 3 подбрасывания честной монеты
- Случайная величина Z – суммарное число орлов, выпавшее за эти 3 подбрасывания честной монеты

Комментарий. По определению, $p_{(2X)}(12)$ это вероятность того, что случайная величина $2X$ примет значение 12.

Выберите все подходящие ответы из списка

$p_{(2X)}(12) = \frac{1}{6}$
$p_Y(3) = \frac{1}{8}$
$p_Z(0) = 0$
$p_X(2) = \frac{1}{6}$

Мы подбрасываем честную монету три раза подряд, и один раз бросаем честный кубик

- Случайная величина X – число, выпавшее на честном кубике
- Случайная величина Y – суммарное число решек, выпавшее за эти 3 подбрасывания честной монеты
- Случайная величина Z – суммарное число орлов, выпавшее за эти 3 подбрасывания честной монеты

Комментарий. По определению, $p_{Y+Z}(3)$ это вероятность того, что случайная величина $(Y+Z)$ примет значение $3.$

Выберите все подходящие ответы из списка

$p_{X-Y}(0) = \frac{7}{48}$
$p_{13}(5) = 1$ (здесь 13 – постоянная случайная величина)
$p_{Y-Z}(1) = \frac{3}{8}$
$p_{Y+Z}(3) = 1$

Задача с проверкой. Распределения случайных величин 1

Мы три раза подряд подбрасываем честную монету.

- Случайная величина Y – суммарное число выпавших решек
- Случайная величина Z – суммарное число выпавших орлов

Докажите, что $p_Y(a) = p_Z(a)$ для любого числа $a \in \mathbb{R}$. Тем самым, у Y и Z одинаковые функции вероятности. Можно записать это так: $p_Y = p_Z$.

Определение. Две случайные величины с совпадающими функциями вероятности называются *одинаково распределёнными*.

Заполните пропуски

1. Верно ли, что $Y = Z$? Выбрать:

2. $P_Y(0) = P_Z(0) =$ ______ ,

$P_Y(1) = P_Z(1) =$ ______ ,

$P_Y(2) = P_Z(2) =$ ______ ,

$P_Y(3) = P_Z(3) =$ ______ .

Задача. Распределения случайных величин 2

Дана случайная величина X. Пусть она принимает ровно n различных значений: $x_1, \ldots, x_n$.

1. Докажите, что $\forall i : p_X(x_i) \geq 0$
2. Докажите, что $p_X(a) = 0$ для всех a не равных одному из $x_1, \ldots, x_n$.
3. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$. Или в другой записи: $p_X(x_1) + p_X(x_2) + \cdots + p_X(x_n) = 1$.

То есть про функцию вероятности можно думать, как про суммарную массу 1, как-то раскиданную по n точкам на числовой прямой (эти точки мы обозначили $x_1, \ldots, x_n$).

Поэтому можно задавать функцию вероятности случайной величины, просто перечислив значения в точках $x_1, \ldots, x_n$.

Пример. Такие условия: $p_Y(25) = 0.33, p_Y(38) = 0.67$ однозначно задают функцию вероятности случайной величины Y, которая принимает ровно два значения: 25 и 38.

Комментарий. Если эта задача вам кажется подозрительно простой, то да, подвоха нет, это действительно простая задача – фактически, мы просим вас развернуть определение функции вероятности случайной величины.

Задача с проверкой. Распределения случайных величин 3

Задача. Докажите, что если нам известна функция вероятности p_X, то мы можем найти $E[X]$.

(При этом нам не дали само вероятностное пространство Ω, не сказали, сколько в нём исходов и т.д. Дали только функцию p_X)

Проверка. Пусть $p_X(3) = 0.15, p_X(6) = 0.4, p_X(10) = 0.45$. Чему равно $E[X]$?

Введите численный ответ

Введите число

Случайная величина vs Распределение случайной величины

Как мы увидели в задаче с пред-предыдущего шага, случайные величины, которые не равны, могут иметь одинаковое распределение. Это проявление такого более общего факта:

функция p_X несёт в себе меньше информации, чем случайная величина X.

Если вы знаете случайную величину X (включая вероятностное пространство, на котором она определена), то вы можете построить функцию вероятности p_X. Но если вы знаете функцию вероятности p_X, то по ней вы не можете восстановить случайную величину X (включая вероятностное пространство, на котором определена X).

Пример 1. У нас есть 240 пользователей. Из них ровно 60 купили у нас что-то за последнюю неделю. Будем считать, что каждый пользователь является элементарным исходом, все исходы равновероятны. То есть у нас получилось вероятностное пространство, состоящее из 240 элементарных исходов. Обозначим за X случайную величину, равную 1, если пользователь совершил покупку за последнюю неделю, и 0 в противном случае. По этому описанию случайной величины X можно построить функцию вероятности p_X:

- $p_X(1) = 0.25$,
- $p_X(0) = 0.75$,
- p_X принимает значение 0 для всех остальных аргументов.

Теперь предположим, что мы знаем только p_X (и ничего не знаем про вероятностное пространство). Очевидно, из этого описания функции вероятности мы никак не можем понять, сколько у нас пользователей – то есть не можем понять, сколько элементарных исходов в нашем вероятностном пространстве.

Функции вероятности двух случайных величин

Теперь посмотрим на ситуацию, когда у нас не одна, а две случайные величины. Зная только функции вероятности случайных величин X и Y, нельзя понять, как эти величины взаимодействуют между собой. Давайте увидим это на таком примере.

Пример 2. Пусть даны функции вероятности p_X и p_Y, заданные так:

- $p_X(0) = 0.5, p_X(1) = 0.5$
- $p_Y(0) = 0.5, p_Y(1) = 0.5$

Какова функция вероятности у случайной величины $X + Y$?

Мы советуем остановиться здесь на минуту и попробовать ответить на последний вопрос самостоятельно. Ответ вы найдёте на следующем шаге.

Ответ

Ответить однозначно на последний вопрос нельзя. Чтобы убедиться в этом, посмотрим на такие варианты X и Y:

Вариант 1. Случайная величина X равна 1, если на честной монетке выпал орёл, и 0, если выпала решка. Случайная величина Y равна случайной величине X.

Ясно, что такие случайные величины действительно обладают функциями вероятности, указанными на предыдущем шаге. Найдем p_{X+Y}. Ясно, что $p_{X+Y}(0) = 0.5$ и $p_{X+Y}(2) = 0.5$. Потому что либо выпала решка – тогда $X + Y = 2$, либо выпал орёл – тогда $X + Y = 0$.

Вариант 2. Случайная величина X равна 1, если на честной монетке выпал орёл, и 0, если выпала решка. Случайная величина Y равна 0, если на честной монетке выпал орёл, и 1, если выпала решка. Другими словами, $Y = 1 - X$.

Ясно, что такие случайные величины действительно обладают функциями вероятности, указанным на предыдущем шаге. Найдем p_{X+Y}. Ясно, что $p_{X+Y}(1) = 1$. И конечно $p_{X+Y}(0) = 0, p_{X+Y}(2) = 0$. Потому что если выпала решка – тогда $X = 0, Y = 1$ и $X + Y = 1$, либо выпал орёл – тогда $X = 1, Y = 0$ и $X + Y = 1$. В любом случае получается $X + Y = 1$.

Вариант 3. На самом деле можно придумать подходящие X и Y для любой функции вероятности такого вида:

- $p_{X+Y}(0) \leq 0.5,$
- $p_{X+Y}(2) \leq 0.5,$
- $p_{X+Y}(1) = 1 - p_{X+Y}(0) - p_{X+Y}(2).$

Это простое утверждение, но доказывать мы его не будем.

После рассмотрения этих трёх вариантов очевидно, что зная только функции вероятности X и Y, мы не можем найти функцию вероятности случайной величины $X + Y$.

Заметьте, что если бы мы знали сами случайные величины X и Y, а не только их функции вероятности, то мы легко бы нашли и случайную величину $X + Y$, и функцию вероятности p_{X+Y}.

Пусть мы знаем, что есть какие-то случайные величины X и Y, определённые на одном и том же вероятностном пространстве. Сами случайные величины нам не дали, зато дали p_X и p_Y.

Тогда мы можем найти

Выберите все подходящие ответы из списка

$p_{X+Y}(12)$
$p_{X \cdot Y}(4)$
$E[X]$
$P(Y = 3)$

Вывод

Функции вероятностей случайных величин дают какую-то, но не всю информацию о случайных величинах. В частности, если вы знаете что-то только про функции вероятностей случайных величин $X_1, \ldots, X_k$, то вам будет сложно понять что-то про выражение, зависящее сразу от нескольких величин из $X_1, \ldots, X_k$.

Собственно, этим вероятностное пространство и ценно – на нем живут несколько случайных величин $X_1, \ldots, X_k$, и в каком-то смысле через вероятностное пространство эти величины между собой и взаимодействуют. Вот ещё один пример.

Игрушечный пример из DS

Вариант 1. Даны три лягушки:

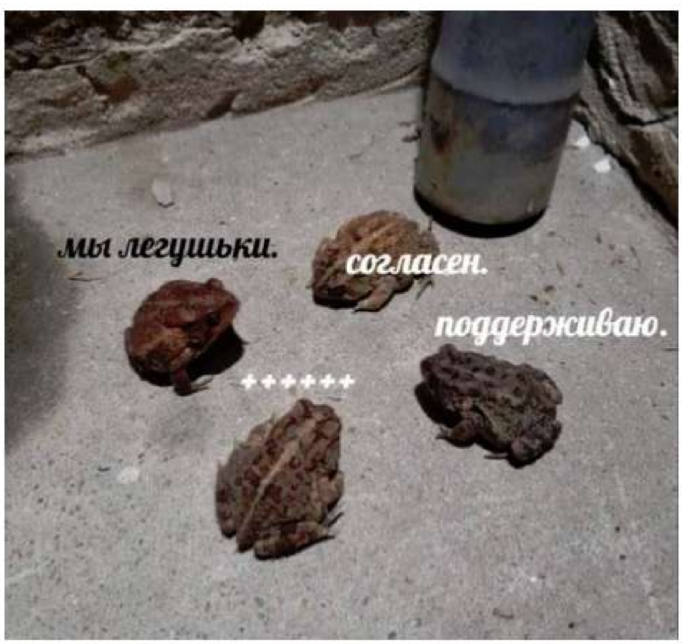
- Квакуша – вес 30 грамм, средняя длина прыжка 70 см,
- Тру-монстер – вес 50 грамм, средняя длина прыжка 55 см,
- Аркадий – вес 40 грамм, средняя длина прыжка 60 см.

Тогда вероятностное пространство имеет пространство исходов $\{$Квакуша, Тру-монстер, Аркадий$\}$. Вес и средняя длина прыжка – случайные величины на этом вероятностном пространстве. Рассмотрев разные исходы, можно что-то понять про связь веса и средней длина прыжка. Например, что чем больше вес, тем меньше средняя длина прыжка.

Вариант 2. Теперь пусть у нас есть информация только про распределения веса и средней длины прыжка:

- мы измерили вес трёх лягушек и получили веса $30, 40, 50$.
- мы измерили среднюю длину прыжка трёх лягушек и получили длины $55, 60, 70$.

Понять из этих данных что-то про связь веса и средней длинны прыжка сложно.



Что мы прошли на этом уроке

- Мы узнали, что функция $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, такая что $p_X(a) := P(X = a)$ для $\forall a \in R$ называется *функцией вероятности случайной величины* X.
- Обсудили, что функция вероятности случайной величины X задаёт *распределение* X, а ещё поняли, что функция p_X несёт в себе меньше информации, чем случайная величина X.
- Доказали несколько несложных свойств функции вероятности

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы познакомимся с такими понятиями как

- *независимые случайные величины*
- *совместно независимые случайные величины*
- *произведение вероятностных пространств*