Комбинаторика

В этом уроке будет мало теории и много задач. А уже на следующем уроке мы свяжем с вероятностью то, чем будем заниматься сейчас.

Заниматься мы будем *комбинаторикой*. Но определим мы, что такое *комбинаторика,* только в середине урока.

Комментарий. В этом уроке нужно будет использовать калькулятор. Например, в задаче может получиться ответ

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Билеты в театр

Это простой пример, но мы разберём его очень подробно, чтобы нам было легче понять более сложные ситуации.

Вы идете с друзьями в кино компанией из 3 человек, покупаете 3 билета на одном ряду, после чего второпях перед сеансом случайно распределяете билеты между собой (каждому достаётся ровно один билет). Сколько есть способов распределить билеты?

Для определённости давайте считать, что ваша компания это Даша, Катя и Миша. А билеты у вас на первое, второе и третье место в ряду. Будем считать, что билеты это бумажки с номерами $1, 2, 3$.

Решение. Сначала выдадим любой из трёх билетов Даше. Получается, что есть ровно три варианта развития событий:

1. Даше достался билет номер 1,
2. Даше достался билет номер 2,
3. Даше достался билет номер 3.

После того, как мы выдали билет Даше, у нас останется два билета. Выдадим любой из этих двух билетов Кате – здесь будет ровно два варианта развития событий. Какие будут эти два возможных билета для Кати?

- Если Даше дали билет номер 1, то Кате можно дать билет номер 2 или билет номер 3
- Если Даше дали билет номер 2, то Кате можно дать билет номер 1 или билет номер 3
- Если Даше дали билет номер 3, то Кате можно дать билет номер 1 или билет номер 2

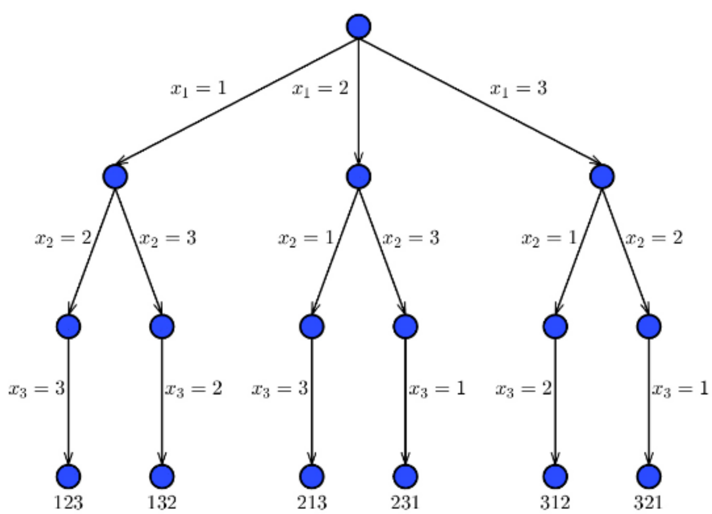
Тем самым варианты билета Кати зависят от того, какой билет мы дали Даше. Но при любом билете Даши, у Кати будет ровно два варианта билета.

Оставшийся один билет мы отдаём Мише. Как и в случае с Катей, билет Миши будет зависеть от билетов Даши и Кати. Но в любом случае у Миши будет ровно один вариант – единственный оставшийся билет.

Тем самым, когда мы выдавали билет Даше, у нас было 3 варианта, потом при выдаче билета Кате 2 варианта, и потом при выдаче билета Мише был 1 вариант. Ясно, что при такой процедуре мы получим всевозможные варианты раздачи билетов. При этом каждая раздача будет получена ровно для одной последовательности выборов.

Сколько есть способов провести описанную процедуру? Ровно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Тем самым есть ровно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов раздать три билета трём людям.

Геометрическая интерпретация – дерево



Давайте сопоставим каждой раздаче билетов путь в этом графе. Мы начинаем в вершине наверху картинки. Билету Даши соответствует переменная x_1. Тем самым, если в нашей раздаче мы выдаём Даше билет номер 2, то мы перемещаемся по ребру $x_1 = 2$, и оказываемся в вершине на один уровень ниже. Билету Кати соответствует переменная x_2. Соответственно, если в нашей раздаче у Кати билет номер 3, то мы перемещаемся по ребру $x_2 = 3$ и оказываемся на предпоследнем уровне. Билету Миши соответствует переменная x_3, и для неё есть ровно один вариант $x_3 = 1$. Мы перемещаемся по соответствующему ребру и оказываемся на нижнем уровне.

Легко видеть, что всего есть ровно 6 различных путей, которые идут сверху вниз из самой верхней вершины в какую-либо из самых нижних вершин.

В вашей компании 5 человек. Вы купили 5 билетов в театр. Сколько есть способов раздать эти билеты внутри вашей компании (так чтобы каждому достался ровно один билет)?

Введите численный ответ

Введите число

Факториал

Пусть в ситуации с билетами у нас 7 человек и 7 билетов. Тогда сколько есть способов раздать билеты?

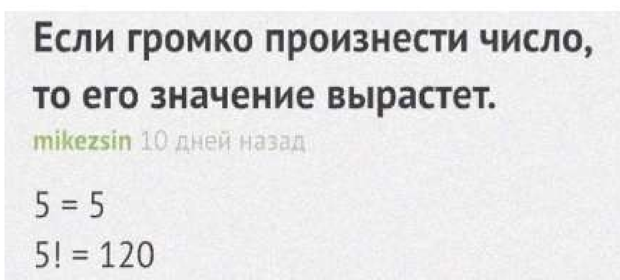
Пусть имена людей это A, B, C, D, E, F, G. Тогда сначала мы выдаём билет человеку по имени A – есть 7 способов это сделать. Затем выдаём один из оставшихся билетов человеку по имени B – есть 6 способов это сделать. И так далее. Таким образом, количество способов раздать семь билетов семи людям равняется $7 \cdot 6 \cdot 5 \ \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Произведения такого вида встречаются довольно часто, поэтому для них придумали специальное название.

Определение. $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$. Читается "$n$ факториал".

Тем самым есть $7!$ способов раздать семь билетов семи людям. Если произвести все операции умножения, то мы получим, что $7! = 5040$.

Пример.

- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$



Комментарий. С ростом n факториал n растёт очень быстро. Например, $100! > 10^{90}$. То есть число $100!$ больше, чем число атомов в обозримой вселенной (по текущим оценкам их $\sim 10^{81}$)

Билетов меньше чем людей

Теперь давайте по-разному менять формулировку задачи про билеты. Главный принцип решения будет оставаться тем же – мы смотрим, сколько вариантов есть для каждого выбора, и перемножаем полученные числа.

В нашем клубе бегунов 15 человек. Мы выставляем команду на эстафету. В эстафете участвуют команды из 3 человек. Поэтому нам нужно выбрать

- человека, который побежит первым,
- человека, который побежит вторым,
- и человека, который побежит третьим.

В эстафете важно, кто бежит под каким номером, поэтому мы считаем, что такие команды разные:

- "1. Витя, 2. Максим, 3. Илья"
- "1. Максим, 2. Витя, 3. Илья"

Сколько есть способов выбрать команду на эстафету?

Решение.

- Есть 15 способов выбрать человека, который побежит первым.
- Есть $15 - 1 = 14$ способов выбрать человека, который побежит вторым (это может быть любой человек, кроме того, которого мы уже выбрали как первого).
- Есть $15 - 2 = 13$ способов выбрать человека, который побежит третьим (это может быть любой человек, кроме тех двух, которых мы уже выбрали как первого и второго).

Итого есть $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ способов составить команду.

Причём тут билеты? Можно считать, что вы купили билеты с номерами $1, 2, 3$ и раздаёте их в группе из 15 человек (то есть двенадцати людям билеты не достанутся).

Вы организуете день рождения для одного из своих друзей. В вашей компании 12 человек. Есть следующие четыре роли:

- кто-то должен организовать закупку еды
- кто-то должен скоординировать покупку подарков (чтобы случайно не подарить два раза одно и то же)
- кто-то должен купить воздушные шарики
- кто-то должен купить билеты в лазер-таг

Вы решили, что за каждую из этих активностей будет отвечать отдельный человек – то есть вам нужно назначить по одному человеку на каждую из этих ролей. Сколько есть способов это сделать?

Введите численный ответ

Введите число

Билетов больше чем людей

Ваша компания из 6 человек пришла в маленький кино-театр на показ артхаусного кино. Оказалось, что кроме вашей компании никто не пришёл на просмотр. Поэтому администратор разрешил вам занимать любые места. Всего в зале 20 мест. Сколько есть способов рассадки у вашей компании?

Решение. Пусть имена людей из вашей компании это A, B, C, D, E, F.

- Сначала A садится на любое место – есть 20 способов это сделать,
- Потом B садится на любое незанятое место – есть $20-1=19$ способов это сделать (одно из мест уже занято A)
- $\ldots$
- Потом F садится на любое незанятое место – есть $20-5=15$ способов это сделать (пять мест уже заняты A, B, C, D и E)

Тем самым есть $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ способов рассадки (обратите внимание, что в произведении ровно 6 множителей – по одному для каждого человека).

Причём тут билеты? Можно считать, что вы купили 20 билетов, и раздаёте их 6 людям, по одному на человека. При этом четырнадцать лишних билетов будут выкинуты.

У вас есть 10 различных футболок с принтами. Вы хотите надеть в понедельник одну футболку, во вторник другую, в среду третью, $\ldots$ в воскресенье седьмую футболку. То есть вы хотите надевать по одной футболке в каждый из дней недели, при этом футболки не должны повторяться.

Сколько есть способов это сделать?

Введите численный ответ

Введите число

С повторениями и без

Давайте посмотрим на такие две ситуации, которые полезно уметь отличать (чтобы не ошибиться в вычислениях).

Без повторений

Дети играют в прятки. Сейчас пятеро детей прячутся. Есть 13 мест, где они могут прятаться (за шкафом, под столом и т.д). В каждое место может спрятаться только один ребёнок (два ребёнка не помещаются за одним шкафом). Сколько у этих детей есть способов спрятаться?

Решение. Решим задачу так, как мы уже делали на предыдущих шагах. У первого ребёнка есть 13 вариантов. У второго ребёнка есть $13-1=12$ вариантов (он не может прятаться в месте, где уже прячется первый ребёнок). И так далее.

Ответ $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$.

С повторениями

Дети играют в прятки. Сейчас пятеро детей прячутся. Есть 13 мест, где они могут прятаться (за шкафом, под столом и т.д). Дети маленькие, поэтому в каждое место может спрятаться сколько угодно детей (пять детей помещаются под одним столом). Сколько у этих детей есть способов спрятаться?

Решение. У первого ребёнка есть 13 вариантов. У второго ребёнка тоже есть 13 вариантов (он может прятаться в любом месте; даже там же где уже спрятался первый ребёнок). У третьего ребёнка тоже есть 13 вариантов. И так далее.

Ответ $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 13^5$.

Заполните пропуски

1. Леша ведёт чайную церемонию. Планируется попробовать 6 пуэров из провинции Юньнань. У Лёши в коллекции есть 10 пуэров из этой провинции. Повторение чаёв на церемонии не входит в Лёшины традиции. Сколько у Лёши есть способов провести церемонию?

2. Леша пьёт чай, параллельно читая книгу по математике. Для этого он берёт случайный пакет из своего шкафа с чаями, заваривает оттуда немного чая, и ставит пакет обратно. При этом Лёша не очень разочаруется, если окажется, что он уже пил этот же чай сегодня. Лёша планирует проделать эту процедуру 3 раза, при этом в шкафу у Лёши 120 пакетов с чаями. Сколько у Лёши есть способов попить чай?

Комбинаторика

Строго и в достаточной полноте определить, чем занимается наука комбинаторика, сложно. В нашем курсе можно думать, что комбинаторика определяется так.

Неформальное определение. *Комбинаторика* занимается перечислением структур. Другими словами, вы как-то описываете свойства структуры, а потом комбинаторика отвечает на вопрос "сколько существует таких структур".

В предыдущих шагах этого урока нас спрашивали "сколько есть способов распределить билеты между людьми, так что выполнены такие-то условия" – и мы находили количество способов. Тем самым в предыдущих шагах этого урока мы занимались комбинаторикой.

Задачи

На следующих шагах будут задачи, которые решаются похоже на задачи из этого урока.

Как и раньше, главный принцип – разбить задачку на последовательность выборов, и перемножить количества вариантов для всех этих выборов.

Пассажиры ждут свой самолёт. Объявляется начало посадки. Все 350 пассажиров встают в очередь. Сколько у них есть способов встать в очередь?

Выберите все подходящие ответы из списка

350^{350}

350

1

$350!$

В колоде 52 карты. Мы достаём из колоды одну карту и кладём на стол. Затем достаём из колоды вторую карту, и кладём поверх первой карты. Затем достаём третью карту и кладём её поверх первых двух карт.

Сколько возможных раскладов карт на столе мы можем получить таким способом?

Введите численный ответ

Введите число

На столе лежат 60 экзаменационных билетов. В кабинет один за другим заходят 4 студентов. Каждый из них подходит к столу, тянет билет, и идёт к своей парте вместе с вытянутым билетом.

Сколько есть вариантов распределения билетов между студентами?

Введите численный ответ

Введите число

Компания из шести друзей зашла в бар, и каждый из них заказал себе воду, лимонад или пиво. Сколько есть вариантов заказов напитков?

Введите численный ответ

Введите число

Что мы прошли на этом уроке

На этом уроке мы

- узнали, как в задачах комбинаторики используется факториал
- научились отличать задачки с повторениями и без
- решали много задачек!

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- снова будем решать задачки, на этот раз такие, которые помогут связать тему этого урока с вероятностью