Математика для Data Science. Математический анализ. Условия задач

Содержание

Замечание. Вот этим цветом отмечены ссылки на страницы внутри этого файла.

3.1 Пределы функций и непрерывные функции

Задача 1

Может ли у функции быть два разных предела в одной точке?
Если да — приведите пример такой функции. Если нет —докажите.

Задача 2

Обозначим через $frac(x)$ разницу между x и наибольшим целым числом, меньшим или равным x.
Найдите предел $\lim\limits_{x\to 3} frac(x)$, если он существует.
Найдите предел $\lim\limits_{x\to -0.5} frac(x)$, если он существует.

Задача 3

Пусть даны две функции f и g с совпадающими областями определения, такие что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Определим функцию $(f+g)$ так: значение функции $(f+g)$ в точке x равно $f(x)+g(x)$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ существует и равен $a+b$.

Пример. Пусть $f(x) = 2x,\ g(x) = x^2,\ x_0 = 3$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 3$.

- Для нее верно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n + x_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2) = 6+9 = 15$.
- Верно и что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2x_n = 6$, а $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 9$.
- То есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 6+9 = 15 = \lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(x_n)$.

Так как это равенство выполнено для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 3$, мы заключаем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$.

Задача 4

Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные утверждению предыдущего шага для

- произведения функций fg,
- частного функций $\frac{f}{g}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Пример 1. Пусть $f(x) = 2x,\ g(x) = x^2,\ x_0 = 3.$ Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}(fg)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2x_n \cdot x_n^2$ равен $2\cdot 3\cdot 3^2 = 54$. А пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = x_n^2$ будут равны 6 и 9 соответственно. Отсюда получаем равенство предела произведения и произведения пределов для последовательностей. Так как оно выполнено для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, мы получаем равенство пределов и для функций.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2,\ g(x) = x+2,\ x_0 = 5$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, стремящуюся к x_0, никакой член которой не равен x_0 и -2 (второе – чтобы $g(x_n)$ не обращалось в 0). Вычислим для неё $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{x_n^2}{x_n+2} = \frac{25}{7}$. Заметим, что он будет равен частному пределов $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 25$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + 2 = 7$. Отсюда получаем равенство предела произведения и произведения пределов для последовательностей. Так как оно выполнено для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, мы получаем равенство пределов и для функций.

Задача 5

1. Докажите, что функция $g(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$, непрерывна.
2. Докажите, что функция f(x)=x непрерывна.
3. Рассмотрим встречавшуюся нам ранее в этом уроке функцию $frac$, где $frac(x)$ обозначает дробную часть числа x. В каких точках $frac$ непрерывна, а в каких разрывна?

Пример. Докажем, что функция $g(x) = 6$ непрерывна. Для этого требуется доказать, что $g(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения. Область определения g это вся прямая $\mathbb{R}$. Возьмём любую точку $x_0 \in \mathbb{R}$, и докажем, что g в непрерывна в этой точке. Ясно, что:

$g(x_0) = 6$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} 6 = 6$. Значит, $g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то есть g непрерывна в точке x_0. Что и требовалось доказать.

Задача 6

1. Пусть f и g — непрерывные функции с совпадающими областями определения. Обозначим эту область определения за D. Ясно, что у функции $f+g$ область определения это тоже D. Докажите, что функция $f+g$ непрерывна (то есть непрерывна в каждой точке D)

2. Пусть f и g — непрерывные функции с совпадающими областями определения. Обозначим эту область определения за D. Ясно, что у функции $f \cdot g$ область определения это тоже D. Докажите, что функция $f \cdot g$ непрерывна (то есть непрерывна в каждой точке D)

3. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Докажите, что f непрерывна.

Пример 1. Докажем, что $f(x) = x + 1$ — непрерывная функция. По пунктам предыдущей задачи x и 1 — непрерывные функции, следовательно, их сумма, согласно этой задаче, тоже непрерывна.

Пример 2. Докажем, что функция $f(x) = 5x$ непрерывна. Для этого вспомним, что 5 и x обе непрерывны, откуда по второму пункту этой задачи будет непрерывно и их произведение.

Пример 3. Докажем, что непрерывна функция $f(x) = 2x^2+3x+4$. Это верно, так как она раскладывается в сумму функций

- $2x^2$, равной произведению непрерывных функций 2, x и x и, следовательно, непрерывной
- $3x = 3 \cdot x$ — непрерывной
- 4, непрерывной напрямую из предыдущей задачи.

Таким образом, вся функция $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ непрерывна по первому пункту этой задачи.

3.3 Производные: формально с доказательствами

Задача 1

1. Найдите производную функции $f(x) = 7$ в точке $x_0 = 4$
2. Найдите производную функции $f(x) = 6x$ в точке $x_0 = 4$
3. Найдите производную функции $f(x) = 6x + 7$ в точке $x_0 = 4$
4. Найдите производную функции $f(x) = ax + b$ в точке x_0 (где $a, b \in \mathbb{R}$).

Пример. Найдём производную функции $f(x) = 3x - 5$ в точке $x_0 = 2$. Воспользуемся определением:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(x_0 + \Delta x) - 5) - (3x_0 - 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3.$$

Заметим также, что хотя в данном случае получилось, что производная не зависит от x_0, в общем случае это неверно. Выражение $\frac{3\Delta x}{\Delta x}$ определено при всех Δx кроме $\Delta x = 0$. Взятию предела при $\Delta x \to 0$ это не мешает.

Задача 2

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Докажите, что

1. функция cf тоже дифференцируема в точке x_0 и $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$, для любого числа $c \in \mathbb{R}$,
2. функция $f + g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $((f + g)(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Обозначение. Если мы считаем производную конкретной функции в конкретной точке, например, если $f(x) = 7x - 3$ и $x_0 = 5$, то можем записать $f'(x_0)$ так: $(7x - 3)'|_{x_0=5}$ (читается как "производная функции $7x - 3$ в точке $x_0 = 5$"). Аналогично через палочку будем обозначать значение функции в точке. Например, $(7x - 3)|_{x_0=5}$ будет читаться как "значение функции $7x - 3$ в точке $x_0 = 5$".

Пример 1. Пусть $f(x) = x, c = 13, x_0 = 2$. Тогда, так как по первому пункту $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$, то $(13x)'|_{x_0=2} = 13(x)'|_{x_0=2} = 13 \cdot 1 = 13$.

Пример 2. Пусть $f(x) = 13x, g(x) = 4, x_0 = 1$. Тогда, так как по второму пункту $((f + g)(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$, то $(13x + 4)'|_{x_0=1} = (13x)'|_{x_0=1} + (4)'|_{x_0=1} = 13 + 0 = 13$.

Пример 3. Пусть $f(x) = 13x, g(x) = 4, x_0 = 1$. Тогда, пользуясь первым и вторым пунктами, получаем $(2 \cdot 13x - 3 \cdot 4)'|_{x_0=1} = 2 \cdot (13x)'|_{x_0=1} - 3 \cdot (4)'|_{x_0=1} = 2 \cdot 13 - 3 \cdot 0 = 26$.

Задача 3

На этом шаге мы докажем, что дифференцируемость – более сильное свойство, чем непрерывность. Другими словами, все дифференцируемые функции непрерывны, но не все непрерывные функции дифференцируемы.

Это свойство понадобится нам на следующем шаге, когда мы будем находить производную произведения двух функций.

Задача. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Напоминание:

- По определению, f дифференцируема в точке x_0 если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- По определению, f непрерывна в точке x_0 если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Задача 4

На этом шаге мы научимся находить производную произведения двух функций.

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в точке x_0.

1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0)$
2. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0)$
3. Докажите, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Тем самым,

$$(fg(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Пример 1. $f(x) = x, g(x) = x, x_0 = 6$. Тогда $(x \cdot x)'|_{x_0=6} = (x)'|_{x_0=6} \cdot x + x \ \cdot (x)'|_{x_0=6} = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

Пример 2. $f(x) = 5x,\ g(x) = 2x + 9, x_0 = 4$. Тогда $(5x \cdot (2x + 9)\ )'|_{x_0=4} = (5x)'|_{x_0=4} \cdot (2x + 9)\ + 5x \cdot (2x + 9)'|_{x_0=4} = 5 \cdot (2x + 9)\ + 5x \cdot 2 = 10x + 45 + 10x = 20x + 45$.

Задача 5

Производная x^2, первый способ. На прошлом шаге в Примере 4 мы нашли производную функции x^2. Напомним, по формуле для производной произведения:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Заметьте, что

- при $x > 0$ величина $2x > 0$, то есть значение функции x^2 растёт при $x > 0$,
- при $x < 0$ величина $2x < 0$, то есть значение функции x^2 убывает при $x > 0$.

Нарисуйте график функции x^2 и убедитесь, что эта функция действительно так себя ведёт.

Производная x^2, второй способ. Кстати, эту же производную можно вычислить напрямую из определения производной, не пользуясь формулой для производной произведения. Найдем производную функции x^2 в точке x_0 :

$$\lim_{\Delta x\ \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\ \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\ \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\ \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Производная x^3. Найдём производную функции x^3:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x\ \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что мы раньше уже доказали $(x^2)' = 2x$.
Производная x^4. Найдём производную функции x^3:

$$(x^4)' = (x^3 \ \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \ \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \ \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что мы раньше уже доказали $(x^3)' = 3x^2$.
Задача. Найдите производную функции x^n для произвольного натурального n.

Задача 6

Одни из самых часто встречающихся функций это *многочлены*, то есть функции вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.
Пример. Вот примеры многочленов:

- $x^2 - 8x + 2$
- $3x^4 - 7.5x^2 + x - \frac{1}{12}$
- $-x^5$
- 11

На этом шаге мы научимся считать производные многочленов.
Задача. Найдите производную функции $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.
Пример 1. Найдём производную функции $x^2 - 8x + 2$.

- Производная x^2 равна $2x$.
- Производная $-8x$ равна -8.
- Производная 2 равна 0.

Поэтому, пользуясь формулой для производной суммы нескольких слагаемых, мы получаем

$$(x^2 - 8x + 2)' = (x^2)' + (-8x)' + (2)' = 2x - 8 + 0 = 2x - 8$$

В частности в точке $x_0 = 6$ имеем $\left(x^2 - 8x + 2\right)'\big|_{x_0=6} = (2x - 8)|_{x_0=6} = 2 \cdot 6 - 8 = 4$.
Пример 2. Найдём производную функции $5x^3 + 6x^2 + 5x$.

- Производная $5x^3$ равна $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2$
- Производная $6x^2$ равна $(6x^2)' = 6(x^2)' = 6 \cdot 2x$
- Производная $5x$ равна 5

Поэтому, пользуясь формулой для производной суммы нескольких слагаемых, мы получаем

$$(5x^3 + 6x^2 + 5x)' = (5x^3)' + (6x^2)' + (5x)' = 5 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x + 5 = 15x^2 + 12x + 5.$$

В частности в точке $x_0 = 1$ имеем $\left(5x^3 + 6x^2 + 5x\right)'\big|_{x_0=1} = \left(15x^2 + 12x + 5\right)\big|_{x_0=1} = 15 + 12 + 5 = 32$.

Задача 7

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что

1. Если g не принимает значение 0, то функция $\frac{1}{g}$ тоже дифференцируема на этом интервале и

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

   Другими словами, для любого x_0 из этого интервала выполнено

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

2. Из предыдущего пункта и формулы для производной произведения выведите, что если g не принимает значение 0, то функция $\frac{f}{g}$ тоже дифференцируема на этом интервале и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Пример 1. Найдём производную функции $\frac{1}{x^n}$. По Пункту 1 выполнено:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

для любого натурального n (при $x \neq 0$). Эту же формулу можно переписать так:

$$(x^{-n})' = (-n)x^{-n-1}.$$

Как видите, как и в случае с положительными степенями x, при взятии производной степень выносится как коэффициент, и уменьшается на один.

Пример 2. Найдем производную функции $\frac{2x+3}{x^2+1}$. По Пункту 2 выполнено:

$$\left(\frac{2x+3}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x+3)'(x^2+1)-(2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)-(2x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-6}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-4}{(x^2+1)^2}.$$

3.5 Исследование функций при помощи производных

Задача 1

1. Убедитесь, что все точки минимума также являются точками локального минимума.
2. Убедитесь, что НЕ все точки локального минимума являются точками минимума.
3. В контексте поиска лучших параметров для нашей модели машинного обучения – какой минимум функции потерь мы бы хотели найти, локальный или глобальный?

Задача 2

1. Бывают ли функции, у которых нет точек глобального минимума?
2. Бывают ли функции, у которых нет точек локального минимума?
3. Может ли у функции быть несколько точек локального минимума?
4. А может ли у функции быть несколько точек глобального минимума?

Для решения этой задачи мы советуем порисовать разные графики функций и поспрашивать себя, где у этих функций точки локальных и глобальных минимумов. Например, можете нарисовать графики функций $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$. Или придумать и нарисовать какие-то свои графики функций.

Комментарий 1. При сдаче этой задачи мы советуем заранее нарисовать нужные графики на бумаге и сфотографировать, чтобы их можно было сразу отправить преподавателю.

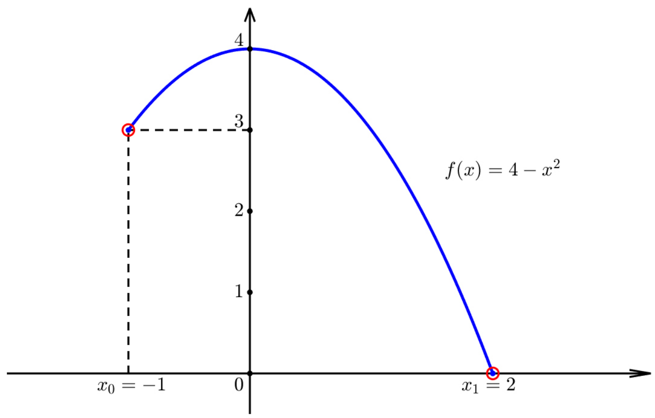
Комментарий 2. Для экспериментов с графиками функций вам могут быть полезны онлайн-сервисы для рисования графиков, такие как Desmos или Wolfram Alpha. Они бесплатны, и у них очень простой интерфейс: вводите функцию (например, $y = \sin(x)$), получаете график.

Задача 3

Аналогично предыдущему шагу покажите, что если $f'(x_0) > 0$, то x_0 не может быть точкой локального минимума.

Задача 4

Давайте посмотрим на функцию $f(x) = 4 - x^2$, определённую на отрезке $[-1, 2]$. Вот график этой функции:



Из него видно, что у функции f две точки локального минимума: $x_0 = -1$ и $x_1 = 2$. Кроме того, функция f достигает глобальный минимум в одной точке $x_1 = 2$. Проверьте, что $f'(x_0) \neq 0$ и $f'(x_1) \neq 0$. Как же так? Мы же вроде бы доказали, что в точках минимума производная должна быть равна 0.

Найдите, в каком месте наши рассуждения из предыдущих трёх шагов дают сбой.

Обсудите с преподавателем, что функция может достигать локального минимума либо в точках с нулевой производной, либо в точках на границе области определения функции.

Задача 5

Нарисуйте график функции $f(x) = -x^2$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, но функция достигает не минимума, а максимума.

Нарисуйте график функции $f(x) = x^3$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, но функция не достигает ни минимума, ни максимума. В таком случае точка x_0 называется *точкой перегиба.*

Нарисуйте график функции $f(x) = |x|$. Убедитесь, что в точке $x_0 = 0$ функция достигает минимума, но производная функции f в точке 0 не определена.

Приняв во внимание эти три примера и пример из предыдущей задачи, сформулируйте, как связаны утверждения «f достигает в x_0 локального минимума» и «производная f равна нулю в точке x_0». Обсудите это с преподавателем.

Мы советуем заранее сформулировать и записать ваше утверждение.

Задача 6

Найдите нули производных следующих функций:

1. $x^2 - 6x + 10$ на $\mathbb{R}$,

2. $x^4 - 2x^2 + 8$ на $\mathbb{R}$,

3. $x\ln(x)$ на луче $[\frac{1}{1024}, +\infty)$.

Как мы уже знаем, если в точке производная обращается в ноль, то это ещё не значит, что это точка локального минимума. Например, это может быть точка локального максимума. Мы не научили вас методам, которые позволяют во всех случаях отличать локальные минимумы от локальных максимумов и других случаев. Тем не менее, иногда по поведению функции можно понять, что найденная точка – локальный минимум (например, так мы сделали для $f(x) = x^2$).

Попробуйте найти все локальные и глобальные минимумы этих функций, при условии, что мы гарантируем вам, что у каждой из этих функций есть хотя бы один глобальный минимум.

Для решения этой задачи будет полезно попробовать порисовать графики и найти производные соответствующих функций.