План четвёртой недели

В конце прошлой недели мы познакомились с вероятностными пространствами, где множество элементарных исходов счётно.

На этой неделе мы определим вероятностные пространства с более чем счётным пространством исходов – *непрерывные вероятностные пространства*. Они нам нужны, чтобы перейти к случайным величинам с более чем счётным числом исходов – *непрерывным случайным величинам*.

Функция распределения полностью описывает случайную величину, если рассматривать её в отрыве от других событий и случайных величин. Поэтому на этой неделе при работе со случайными величинами мы по большей части будем начинать сразу с функции распределения (или *плотности* — с ней познакомимся чуть дальше), пропуская шаг с описанием вероятностного пространства. Однако, важно помнить, что ни распределения, ни *плотности* случайных величин не несут информации об их взаимосвязи. То есть, например, делать вывод о независимости случайных величин можно только проанализировав вероятностное пространство, на котором они определены.

Чтобы понять непрерывные вероятностные пространства и непрерывные случайные величины, нам потребуется понятие *интеграла*.

Итак, наш план на неделю такой:

1. Сначала мы поймём интегралы: определённые и неопределённые.
2. Затем определим вероятностные пространства с более чем счётным пространством исходов.
3. После этого определим непрерывные случайные величины через их функции распределения.
4. Узнаем, что такое плотность распределения
5. С помощью плотности распределения научимся считать математическое ожидание и дисперсию у непрерывных случайных величин.

Определённый интеграл

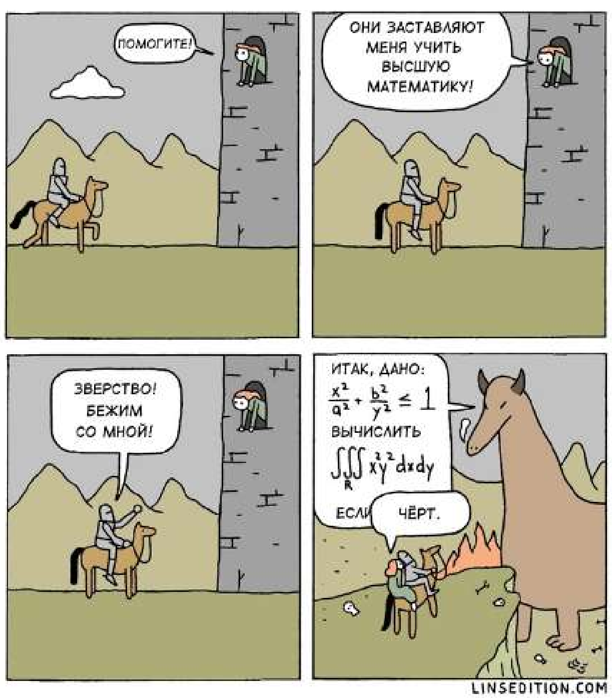
В начале курса матана мы писали, что математический анализ можно разделить на два направления: дифференциальное исчисление и интегральное исчисление. Первое занимается производными, второе – *интегралами*. Интегральное исчисление мы в курсе матана не проходили, но понимание интегралов нужно нам для непрерывных случайных величин. Поэтому с интегральным исчислением мы будем знакомиться сейчас. К счастью, мы уже знакомы с понятиями предела последовательности и производной, что очень поможет нам в изучении интегралов.

Неформально говоря, интеграл функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ это площадь, заключённая между графиком функции и осью OX. Поэтому начнём мы этот урок с определения *площади*.

Что пройдём на этом уроке

- Мы поймём, что такое площадь.
- Затем изучим *определённый интеграл* непрерывной функции на отрезке $[a, b]$.

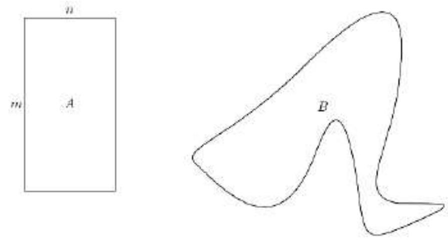
Дополнительный материал. Видео с канала 3Blue1Brown [Integration and the fundamental theorem of calculus] (20 минут). В нём подробно разбирается интуиция, стоящая за *интегралами*. Это видео частично покрывает материал, который мы пройдём на этом и следующем уроках. *The fundamental theorem of calculus* это другое название формулы Ньютона-Лейбница, которую мы пройдём на следующем уроке.



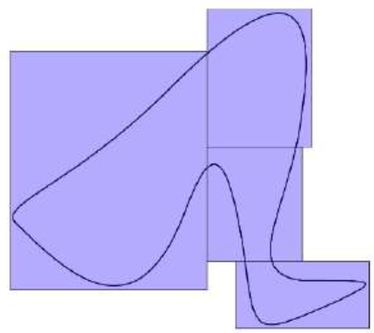
Площадь – идея

Давайте порассуждаем о том, что такое площадь.

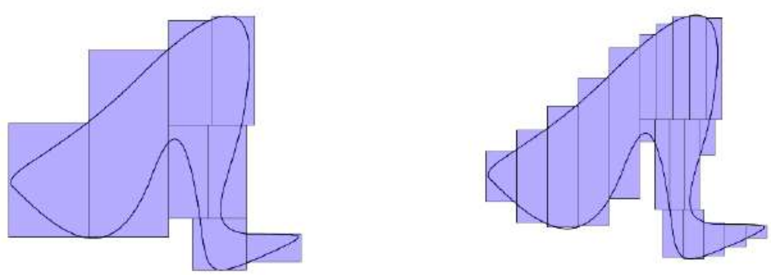
Что мы точно знаем про площадь, так это то, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Можно считать, что это определение *площади прямоугольника*. Поэтому площадь фигуры A слева равна $m \cdot n$, а вот чему равна площадь фигуры B справа – непонятно:



Напрашивающийся способ посчитать площадь фигуры справа такой. Нарисуем несколько непересекающихся прямоугольников, которые вместе образуют фигуру, похожую на B. Найдём суммарную площадь этих прямоугольников. Пусть она равна b_1. Неформально, b_1 это некоторое приближение "площади" фигуры B (мы написали "площадь" в кавычках, потому что на самом деле площадь фигуры B мы пока не определили):



Продолжим эту мысль. Будем приближать B прямоугольниками всё точнее и точнее, получая приближенные площади b_2, b_3 и так далее:



Тогда *площадью* фигуры B мы будем называть $\lim\limits_{j \to \infty} b_j$. Такое определение площади мотивирует наш способ определения площади подграфика, с которым мы познакомимся на следующем шаге.

Чего в приведенном определении площади не хватает?

- Мы не сказали, что значит "приближать всё точнее и точнее". Об этом мы говорим в следующем шаге.
- Мы не доказываем, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ существует. На самом деле, для некоторых не встречающихся на практике фигур этот предел не существует.
- Мы не доказываем, что если вы возьмёте последовательность из других приближений прямоугольниками, то предел получится таким же.

Кроме того, мы не доказываем свойства площади. А трудности со свойствами начинаются даже до пределов и приближений. Это видно на таком примере:

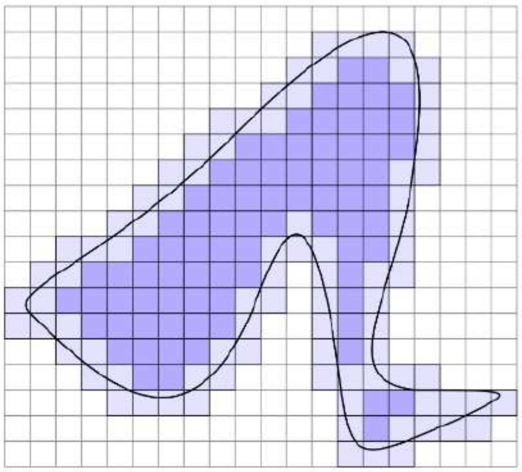
Пример. Пусть вы разбили прямоугольник со сторонами m и n на 20 разных прямоугольников поменьше. Нашли их площади как произведения соответствующих сторон и сложили получившиеся числа: $m_1 n_1 + \cdots + m_{20} n_{20}$. Вопрос, почему эта сумма равна mn? Строго доказать это не так-то просто.

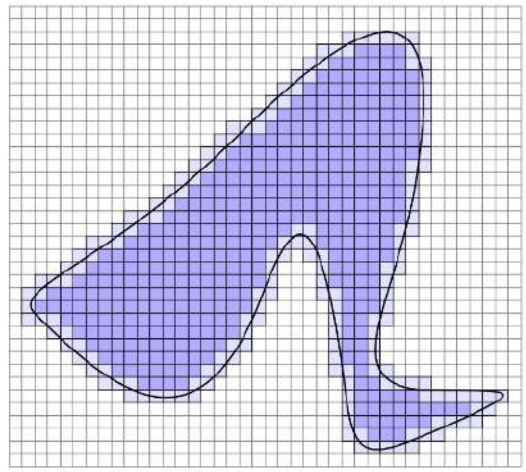
Всё точнее и точнее

Мы не определили, что на языке математики значит "приближать всё точнее и точнее". Давайте наметим путь формализации этого утверждения.

Будем рассматривать только приближения, построенные следующим образом.

Ограничим фигуру B большим прямоугольником с целыми сторонами. Нарисуем на этом прямоугольнике сетку, состоящую из маленьких равных квадратов.





Видно, что каждый маленький квадрат будет одного из трёх типов:

1. квадрат, все точки которого принадлежат фигуре B (на картинке такие квадраты фиолетовые)
2. квадрат, некоторые точки которого принадлежат фигуре B, а некоторые не принадлежат (на картинке такие квадраты светло-фиолетовые)
3. квадрат, все точки которого не принадлежат фигуре B (на картинке такие квадраты белые)

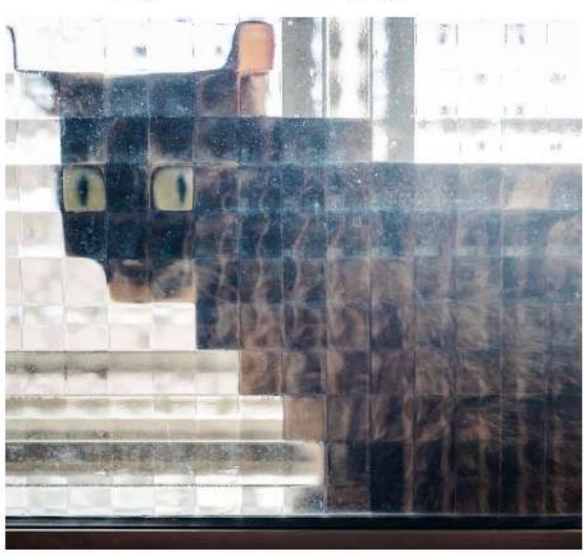
Обозначим суммарную площадь квадратов типа 1 за i_1 ("inside"), суммарную площадь квадратов типа 2 за u_1 ("unclear"), суммарную площадь квадратов типа 3 за o_1 ("outside"). Индекс у всех трёх букв означает, что они относятся к первому построенному разбиению. Квадраты типа 1 образуют приближение фигуры B, площадь этого приближения равна i_1. Неформально: из этого разбиения ясно, что "площадь" фигуры B это какое-то число из отрезка $[i_1, i_1 + u_1]$.

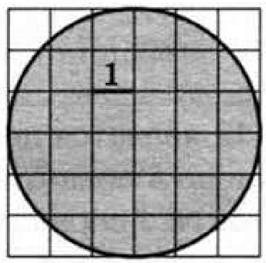
Сохраняя внешний большой прямоугольник, нарисуем сетку в два раза меньше – то есть разделим каждый из маленьких квадратов на четыре равных. Полученные новые квадраты тоже бывают трёх типов, так что мы можем определить i_2, u_2, o_2. Снова квадраты типа 1 образуют приближение фигуры B. Неформально: из этого разбиения ясно, что "площадь" фигуры B это какое-то число из отрезка $[i_2, i_2 + u_2]$.

Продолжим эту процедуру, и получим i_3, u_3, o_3 и так далее.

Видно, что за "неточность" отвечает последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Поэтому фраза "приближения всё более и более точные" формализуется в утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Значит, *площадью* фигуры B будет называться $\lim\limits_{n\to\infty} i_n$, при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ существует и равен 0.





На клетчатой бумаге нарисован круг радиуса 3 с центром в нуле.

Заполните пропуски

Обозначим за i_1 суммарную площадь клеток, целиком попавших внутрь круга. Тогда $i_1 =$ ______ .

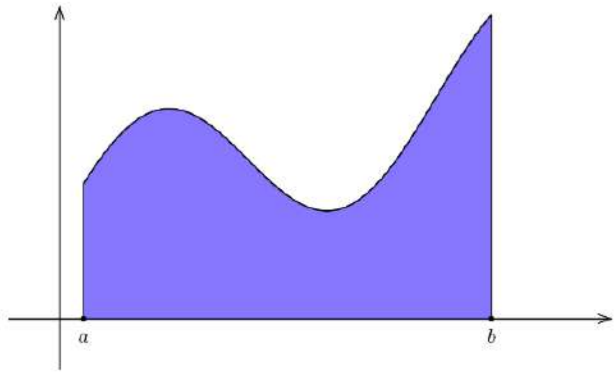
Обозначим за u_1 суммарную площадь клеток, некоторые точки которых лежат внутри круга, а некоторые снаружи. Число u_1 отвечает за неточность нашего приближения. Тогда $u_1 =$ ______ .

При этом реальная площадь круга равна $\pi \cdot 3^2 \approx 28.27$. Заметьте, что это число лежит между i_1 и $i_1 + u_1$.

Интеграл – обозначения

Пусть дана неотрицательная функция f со значениями в $\mathbb{R}$, определённая на отрезке $[a, b]$.

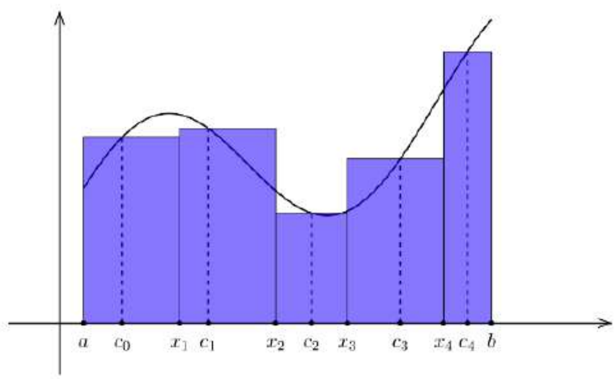
Давайте строго определим площадь фигуры, заключённой между графиком функции f, осью OX и вертикальными линиями $x = a, x = b$:



Как и раньше, мы будем приближать фигуру прямоугольниками, а потом будем делать приближения всё точнее и точнее. На этом шаге мы вводим необходимые обозначения для этих приближений.

Обозначение 1. Выберем на отрезке $[a, b]$ несколько точек: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. Будем называть это *разбиением* отрезка $[a, b]$.

Для каждого i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i.



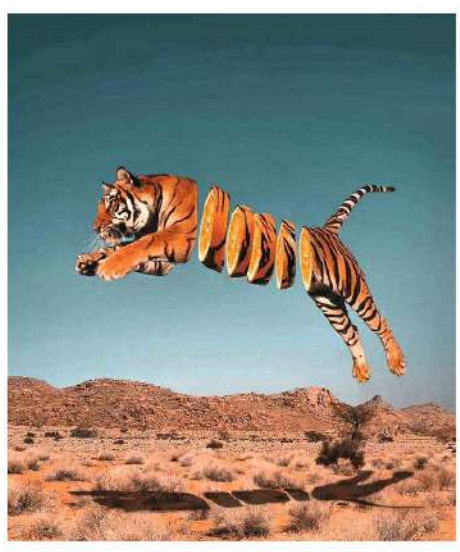
Обозначение 2. *Интегральной суммой* для такого разбиения и выбора точек c_i называется сумма $\sum\limits_{i=0}^{i=k-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Неформально. На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция f может принимать разные значения, но в нашем приближении мы заменили их все на $f(c_i)$. На картинке интегральная сумма равна площади закрашенной фигуры.

Обозначение 3. *Рангом* разбиения называется длина самого длинного из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, то есть $\max\limits_{0 \le i < k}(x_{i+1} - x_i)$.

Неформально. Чем меньше ранг, тем более мелкие отрезки используются в разбиении. Мы ожидаем, что чем меньше эти отрезки, тем точнее интегральная сумма приближает "площадь" фигуры из начала шага.

Следующий шаг – задача на понимание обозначений, а через шаг мы определим искомую площадь.



В обозначениях с предыдущего шага: пусть дана функция $f(x) = x^2$ и отрезок $[a, b] = [2, 8]$.

Рассмотрим такое разбиение: $x_0 = 2, x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 8$. А в качестве выбранных на получившихся отрезках точек возьмём $c_0 = 2.3, c_1 = 5.5, c_2 = 7$. Посчитайте для этого случая интегральную сумму. Ответ округлите до сотых.

Введите численный ответ

Введите число

Определённый интеграл

Как мы увидели, каждому разбиению с выбранными точками c_i соответствуют два числа – интегральная сумма и ранг.

Возьмём какую-нибудь последовательность разбиений и выборов точек c_i, такую что последовательность рангов этих разбиений стремится к нулю. Другими словами, эти разбиения составлены из всё более и более мелких отрезков. Посмотрим на последовательность соответствующих интегральных сумм. Пусть у последовательности интегральных сумм существует предел, обозначим его за l.

Пусть для любой другой последовательности разбиений и выборов точек, такой что соответствующая последовательность рангов стремится к нулю, соответствующая последовательность интегральных сумм тоже имеет предел равный l.

Тогда l называется *определённым интегралом* функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Неформально. Мы берём всевозможные последовательности всё более и более мелких разбиений (и выборов точек c_i). Каждой такой последовательности соответствует последовательность интегральных сумм. Мы хотим, чтобы все последовательности интегральных сумм сходились к одному и тому же числу l. Представить себе все эти последовательности разбиений одновременно сложно, потому что их очень много.

Давайте посмотрим на обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Здесь знак интеграла $\int$ идёт неразрывно с символом dx, при этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вместе это просто одно число. Если бы мы обозначили аргумент функции не за x, а за z, то и после буквы d нужно было бы писать z. Например, наш интеграл можно записать так: $\int\limits_a^b f(z)\,dz$. Символ $\int$ ввёл Лейбниц, образовав его от буквы "длинная s." С неё начиналось слово summa – сумма.

Обозначение. Если определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то говорят, что f *интегрируема по Риману* на отрезке $[a, b]$.

Зачем брать всевозможные последовательности? Пусть есть две последовательности всё более и более мелких разбиений, таких что соответствующие последовательности интегральных сумм сходятся к двум разным числам. Какое из этих чисел нам считать определённым интегралом? Неясно. Поэтому мы и требуем, чтобы для всех последовательностей число получалось одним и тем же.

Задача с проверкой. Определённый интеграл 1

Задача. Дана постоянная функция $f(x) = 3$, определённая на отрезке $[0, 100]$. Найдите $\int\limits_0^{100} f(x)\, dx$.

Проверка. Введите ответ.

Введите численный ответ

Введите число

Задача с проверкой. Определённый интеграл 2

Задача. Дана функция $f(x) = x$, определённая на отрезке $[0, 1]$. Построим последовательность разбиений. Разбиение номер k будет состоять из точек $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$. В качестве c_i на каждом из отрезков мы выбираем самую правую точку отрезка.

1. Докажите, что ранг этих разбиений стремится к нулю.
2. Найдите предел соответствующих интегральных сумм.

Заметьте, что мы нашли предел только одной последовательности разбиений. Чтобы доказать, что найденное число действительно является интегралом функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$, нам бы пришлось рассмотреть всевозможные другие последовательности разбиений.

Проверка. Введите ответ к Пункту 2.

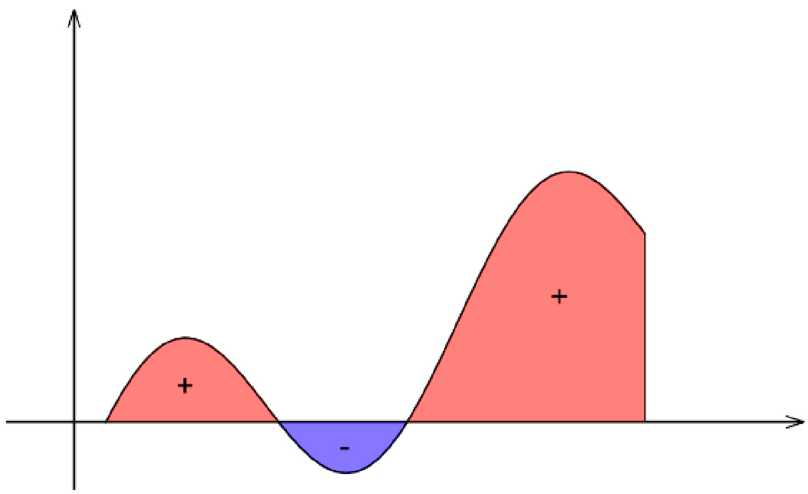
Введите численный ответ

Введите число

Отрицательные значения

Давайте вспомним, какие функции мы рассматривали. У нас была неотрицательная функция f со значениями в $\mathbb{R}$, определённая на отрезке $[a, b]$.

Конструкция определённого интеграла обобщается на произвольные функции $[a, b] \to \mathbb{R}$, не обязательно неотрицательные.



Разбиения, ранг разбиения, интегральные суммы будут определены точно так же. Отрицательные значения f приведут к тому, что в интегральных суммах появятся отрицательные слагаемые (потому что некоторые c_i будут отрицательными). Собственно, на этом отличие от случая неотрицательной f заканчивается. Мы так же смотрим на пределы последовательностей интегральных сумм, соответствующих последовательностям разбиений (и выборов c_i) с рангом, стремящимся к нулю. Если предел для каждой такой последовательности интегральных сумм один и тот же, то он обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Неформально. Можно считать, что площадь фигур, расположенных ниже оси OX, считается со знаком минус.

Определённый интеграл непрерывной функции

Как мы увидели на этом шаге, если пользоваться только определением интеграла, то непонятно, как найти интеграл даже у несложной функции $f(x) = x$. Трудность в том, что нам нужно искать пределы последовательностей интегральных сумм, соответствующих всевозможным последовательностям разбиений. Если бы нам нужно было найти предел всего у одной последовательности, то задача нахождения интеграла была бы гораздо проще. Оказывается, в этом курсе нам действительно будет достаточно находить предел только одной последовательности. Давайте посмотрим, почему.

В этом курсе нас в основном будут интересовать непрерывные функции (определение непрерывной функции было в курсе матана; на всякий случай на следующем шаге мы напомнили определение непрерывной функции). Для непрерывных функций выполнена следующая теорема.

Теорема. Для любой непрерывной функции f и любых $[a, b]$ определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует.

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем. Оно не сложное, все необходимые для него знания вы уже получили в нашем курсе математического анализа.

Следствие. Пусть у нас есть непрерывная функция f, определённая на отрезке $[a, b]$, и какая-то последовательность разбиений (и выборов c_i) с рангом, стремящемся к нулю. Тогда предел интегральных сумм этой последовательности существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Раз f непрерывна, то по теореме $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует. Раз $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то пределы всевозможных таких последовательностей интегральных сумм существуют и равны $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тем самым, предел и нашей последовательности интегральных сумм из условия тоже существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Вывод. Чтобы найти интеграл непрерывной функции на отрезке, достаточно рассмотреть какую-то одну последовательность разбиений (и выборов c_i). Тем самым, на этом шаге мы всё-таки нашли интеграл функции $f(x) = x$.

Напоминание определения непрерывной функции

Определение [по Коши]. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

- $x_0 \in D$ (где D это область определения f),
- для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in D$, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$.

Определение [по Гейне]. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

- $x_0 \in D$,
- предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Определения непрерывности в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

Определение. Функция f называется непрерывной если она непрерывна в каждой точке D.

Подробнее про непрерывность можно почитать в уроке "Пределы функций и непрерывные функции" из курса матана.

Что мы прошли на этом уроке

- Поняли, какая идея стоит за понятием площади.
- Ввели определённый интеграл, используя понятия разбиения, ранга разбиения и интегральной суммы.

Комментарий. На этом уроке мы прошли интеграл Римана. Есть ещё один распространённый способ определять интегралы – *интеграл Лебега*. За ним скрывается довольно интересная наука про *измеримые множества.* Проходить эту науку и интеграл Лебега мы не стали, потому что для приложений всем хватает интеграла Римана. Для всех непрерывных функций интеграл Римана и интеграл Лебега совпадают.

Что нас ждёт на следующем уроке

На следующем уроке мы

- познакомимся с *неопределённым интегралом*
- с его помощью научимся считать определённые интегралы
- узнаем, что такое несобственные интегралы