Математика для Data Science. Линейная алгебра.
Решения задач

Содержание

Замечание. Таким цветом отмечены ссылки на сайт Stepik, а вот этим цветом — ссылки на страницы внутри этого файла.

Векторное пространство

Задача 1

1. Докажите, что существует и единственен вектор $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, такой что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} = \vec{x} + \vec{y}$. Такой вектор $\vec{y}$ называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Каковы координаты вектора $\vec{0}$?

2. Докажите, что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $0\vec{x} = \vec{0}$ (заметьте, что в левой части равенства ноль это число, а в правой части ноль это вектор).

Подсказка. Запишите векторы по координатам.

Решение.

1. Пусть $\vec{y} = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда действительно для любого вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\vec{y} + \vec{x} = (0 + x_1, 0 + x_2, \dots, 0 + x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x} = \vec{x} + \vec{y}$.

   Предположим, что описанный в условии вектор не единственен: пусть существует вектор $\vec{y_1} \neq \vec{y}$, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\vec{y_1} + \vec{x} = \vec{x} = \vec{x} + \vec{y_1}$. Тогда $\vec{y_1} + \vec{y} = \vec{y}$ по свойству $\vec{y_1}$. Но $\vec{y_1} + \vec{y} = \vec{y_1}$ по свойству $\vec{y}$. А значит $\vec{y_1} = \vec{y}$ — противоречие.

2. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда $0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, \dots, 0 \cdot x_n) = (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}$.

Задача 2

1. Докажите, что для каждого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ найдётся вектор $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, такой что $\vec{x} + \vec{z} = \vec{0}$. Такой вектор $\vec{z}$ называется противоположным вектору $\vec{x}$ и обозначается $-\vec{x}$. Если $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то каковы координаты вектора $-\vec{x}$? Например, каковы координаты вектора, противоположного вектору $(3, -5)$?

2. Докажите, что для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$ (заметьте, что в левой части равенства мы умножаем вектор на число, а в правой части рассматриваем противоположный вектор).

Подсказка. Запишите векторы по координатам.

Решение.

1. Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — произвольный вектор. Положим $\vec{z} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Тогда $\vec{x} + \vec{z} = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0) = \vec{0}$.

   Если $\vec{x} = (3, -5)$, то $-\vec{x} = (-3, 5)$.

2. $(-1) \cdot \vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n) = -\vec{x}$

Линейные отображения

Задача 1

Какие из этих отображений линейны, а какие нет?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x_1) = x_1^2$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Если отображение линейное, то докажите, что первое и второе условие выполнены. Если отображение не линейное, то приведите пример, на котором одно из условий не выполняется.

Подсказка. Задача делается аналогично предыдущему шагу.

Решение.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1$, является линейным. Проверим выполение двух условий

   Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Для них выполнено: $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = x_1 + y_1 = f(\vec{x} + \vec{y})$.

   Второе условие. $f(c\vec{x}) = f(cx_1, cx_2) = cx_1 = cf(\vec{x})$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, является линейным. Проверяем условия:

   Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Для них выполнено: $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (x_2, x_1) + (y_2, y_1) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1) = f(\vec{x} + \vec{y})$.

   Второе условие. $f(c\vec{x}) = f(cx_1, cx_2) = (cx_2, cx_1) = cf(\vec{x})$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x_1) = x_1^2$, не является линейным. Приведём контрпример: подставим во второе условие $c = 2$ и $x_1 = 1$. Если отображение было линейным, то $2 \cdot f(1)$ должно было равняться $f(2)$. Но $2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1^2 = 2$, а $f(2) = 2^2 = 4$. Мы получили противоречие.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, не является линейным. Так, второе условие не выполняется при $c = 2$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. А именно $2 \cdot f(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2$, но $f(2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = 2 \cdot 2 = 4$.

Задача 2

Эта задача по формату аналогична предыдущей задаче. Мы разделили их на две, потому что нам так удобнее давать баллы за задачи.

Какие из этих отображений линейны, а какие нет?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = |x|$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_2)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 5x_2$
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2, x_3) = 0$

Если отображение линейное, то докажите, что первое и второе условие выполнены. Если отображение не линейное, то приведите пример, на котором одно из условий не выполняется.

Подсказка. Задача решается так же, как предыдущая.

Решение.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = |x|$, не является линейным. Первое условие не выполняется: $f(1 + (-1)) = f(0) = 0$, но $f(1) + f(-1) = 1 + 1 = 2$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_2)$, является линейным. Проверяем условия:

   Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Для них выполнено: $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (x_2, x_2, x_2, x_2) + (y_2, y_2, y_2, y_2) = (x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2) = f(\vec{x} + \vec{y})$.

   Второе условие. $f(c\vec{x}) = f(cx_1, cx_2, cx_3, cx_4) = cx_2 = cf(\vec{x})$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 5x_2$, является линейным:

   Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Для них выполнено: $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = 3x_1 - 5x_2 + 3y_1 - 5y_2 = 3(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) = f(\vec{x} + \vec{y})$.

   Второе условие. $f(c\vec{x}) = f(cx_1, cx_2) = 3 \cdot cx_1 - 5 \cdot cx_2 = c(3x_1 - 5x_2) = cf(\vec{x})$.

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, является линейным:

   Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Для них выполнено: $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = 0 + 0 = 0 = f(\vec{x} + \vec{y})$.

   Второе условие. $f(c\vec{x}) = f(cx_1, cx_2, cx_3) = 0 = cf(\vec{x})$.

Задача 3

Докажите, что если $f : V \to W$ это линейное отображение, то

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. В левой части используется нулевой вектор из пространства V, а в правой нулевой вектор из пространства W. Мы добавили нижний индекс, чтобы как-то различать эти два нулевых вектора.

2. $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$. В левой части используется вектор, противоположный $\vec{x} \in V$, а в правой вектор, противоположный $f(\vec{x}) \in W$.

Попробуйте не пользоваться покоординатным представлением векторов в своём доказательстве. Например, использовать утверждение $(-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, но не использовать утверждение $(-\vec{x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Подсказка. Воспользуйтесь вторым условием из определения линейного отображения.

Решение.

1. Пусть $\vec{x} \in V$. Тогда $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{x})$, что в свою очередь по второму условию из определения линейного отображения равно $0 \cdot f(\vec{x}) = \vec{0}_W$.

2. $f(-\vec{x}) = f((-1) \cdot \vec{x}) = (-1) \cdot f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$

Задача 4

Обозначение. Когда мы будем оперировать векторами в вычислениях с матрицами, нам будет удобно представлять некоторые векторы не как строку $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, а как столбец. Вот так:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Докажите, что любое отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ задаётся столбцом высоты m.

Подсказка. Доказательство аналогично доказательству с предыдущего шага.
Как можно геометрически представить отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$?

Решение. Дано линейное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Пусть мы знаем, чему равно $f(1)$. Докажем, что тогда мы можем узнать, чему равно $f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Действительно, так как x это число, мы можем воспользоваться вторым условием линейности: $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)$.

Тем самым, по значению f в единице мы можем восстановить всё линейное отображение. То есть линейное отображение из $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ можно воспринимать как вектор $f(1)$, раз уж f им задаётся.

Геометрически можно представлять отображение f как отображение прямой $\mathbb{R}$ в прямую в $\mathbb{R}^m$. Эта прямая в $\mathbb{R}^m$ проходит через $\vec{0}$ и конец вектора $f(1)$.

Матрицы

Задача 1

Докажите, что для f выполняется первое условие линейности. То есть $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Напоминаем, что f задаётся так:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Подсказка. Задача решается аналогично предыдущему шагу.

Решение. Рассмотрим произвольные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ и докажем, что $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. По построению отображения f выполнено:
$f(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{y}) \\ f_2(\vec{x} + \vec{y}) \end{pmatrix}$
Так как f_1 и f_2 – линейные отображения, для них выполнено первое условие линейности.
То есть $f_1(\vec{x} + \vec{y}) = f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{y})$ и $f_2(\vec{x} + \vec{y}) = f_2(\vec{x}) + f_2(\vec{y})$. Значит,

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{y}) \\ f_2(\vec{x} + \vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{y}) \\ f_2(\vec{x}) + f_2(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

По определению операции сложения векторов выполнено:

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{y}) \\ f_2(\vec{x}) + f_2(\vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\vec{y}) \\ f_2(\vec{y}) \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Задача 2

На прошлых шагах мы показали, как по матрице A размера m на n построить отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Однако мы пока не доказывали, что получившееся отображение f является линейным.

Докажите, что отображение f линейно.

Комментарий. Мы уже решали эту задачу для случая матрицы размера $m = 2$ на $n = 3$.

Решение. Проверим оба условия линейности:
Первое условие. Рассмотрим произвольные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ и докажем, что $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{y}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x} + \vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) + f_m(\vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{y}) \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Второе условие. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и число $c \in \mathbb{R}$, и докажем что $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$.

$$f(c\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(c\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(c\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cf_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ cf_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = cf(\vec{x}).$$

Матрицы и линейные отображения

Задача 1

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (10x_1 - 4x_2, 2x_2 + x_1)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_1)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 10x_2)$
4. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_3 - x_4)$

Комментарий. Для сдачи этой задачи достаточно предъявить правильные матрицы. Все рассуждения про строки проговаривать не нужно (но можно продумать). На прошлом шаге мы разобрали такие же задачи очень подробно, чтобы было понятно, как их решать.

Подсказка. Задача делается аналогично предыдущему шагу.

Решение.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (10x_1 - 4x_2, 2x_2 + x_1)$. Отображение f действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, поэтому наша матрица будет размера 2 на 2. Линейное отображение, соответствующее первой координате это $f_1(x_1, x_2) = 10x_1 - 4x_2$. Поэтому первая строка матрицы будет $(10, -4)$. А линейное отображение, соответствующее второй координате это $f_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Поэтому вторая строка матрицы будет $(1, 2)$.

   Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, где $f(x_1, x_2) = (x_2, x_2, x_2, x_1)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 10x_2)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_3 - x_4)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 2

Постройте матрицы, которые задают следующие отображения.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $f(\vec{x}) = \vec{x}$

Комментарий. Матрица из пункта 4 этой задачи называется единичной матрицей размера n (на английском – identity matrix of size n).

Комментарий. Для сдачи этой задачи достаточно предъявить правильные матрицы.

Подсказка. Задача решается аналогично предыдущей.

Решение.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, где $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, где $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $f(\vec{x}) = \vec{x}$, задаётся матрицей $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, то есть матрицей размера n на n, где на диагонали стоят единицы, а на всех остальных местах — нули.

Задача 3

Пусть отображение f задано матрицей A размера m на n:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Мы уже знаем, как интерпретировать i-ую строку матрицы A– как линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Это отображение по вектору $\vec{x}$ вычисляет i-ую координату вектора $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Давайте придумаем, как интерпретировать столбцы матрицы. Нам понадобится одно обозначение, которым мы уже пользовались.

Обозначение. Обозначим за $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ вектор, у которого j-ая координата равна единице, а все остальные координаты равны нулю.

1. Найдите $f(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1$, то есть результат действия матрицы A на вектор $\vec{e}_1$ (выпишите его, используя коэффициенты матрицы A)

2. Докажите, что для любого j вектор $f(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j$ совпадает с j-ым столбцом матрицы A.

Подсказка. Воспользуйтесь формулой умножения матрицы на вектор-столбец.

Решение.

1. Воспользуемся формулой умножения матрицы на вектор:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \dots + a_{1n} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + \dots + a_{2n} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot 1 + a_{m2} \cdot 0 + \dots + a_{mn} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

   Итак, $A\vec{e}_1$ совпадает с первым столбцом матрицы A. Другими словами, первый столбец матрицы — это тот вектор, куда f переводит $\vec{e}_1$.

2. Аналогично первому пункту этой задачи посчитаем $A\vec{e}_j$.

$$A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + \dots + a_{1j} \cdot 1 + \dots + a_{1n} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{j1} \cdot 0 + \dots + a_{jj} \cdot 1 + \dots + a_{jn} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot 0 + \dots + a_{mj} \cdot 1 + \dots + a_{mn} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

   Итак, вектор $f(\vec{e}_i) = A\vec{e}_i$ совпадает с первым столбцом матрицы A.

Задача 4

На прошлом уроке мы показали, как по матрице построить линейное отображение. Сейчас мы сделаем обратное – по отображению найдём матрицу, которая задаёт это отображение.

Пусть дано какое-то линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Мы хотим показать, что оно задаётся матрицей. Покажите, что

1. Для любого $\vec{x}$ выполнено $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$. Тем самым, линейное отображение f однозначно задаётся векторами $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$. Другими словами, зная $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, можно вычислить $f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Покажите, как, зная векторы $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$, построить матрицу, задающую отображение f. Другими словами, нужно построить матрицу A, такую что $A\vec{x} = f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Подсказка. Для решения второго пункта потребуется то свойство, которое мы доказали в предыдущей задаче.

Решение.

1. Рассмотрим любой вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. По определению векторного пространства $\mathbb{R}^n$, выполнено: $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$.
   Применив сначала первое, а затем второе условие линейности, получаем
   $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = f(x_1\vec{e}_1) + \dots + f(x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$.
2. В прошлой задаче мы доказали, что столбцы матрицы — это те векторы, куда f переводит $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.
   То есть $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$

Задача 5

Докажите, что разные матрицы задают разные линейные отображения.
То есть если

- отображение f задано матрицей A,
- отображение g задано матрицей B,
- и $A \neq B$,

то отображение f не совпадает с отображением g.
Подсказка. Чтобы доказать, что f не совпадает g, достаточно найти $\vec{x}$, такой что $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$.
Пример
Пусть даны две не совпадающие матрицы:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Покажем, что они задают разные отображения. Действительно, для $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

- $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- $g(\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

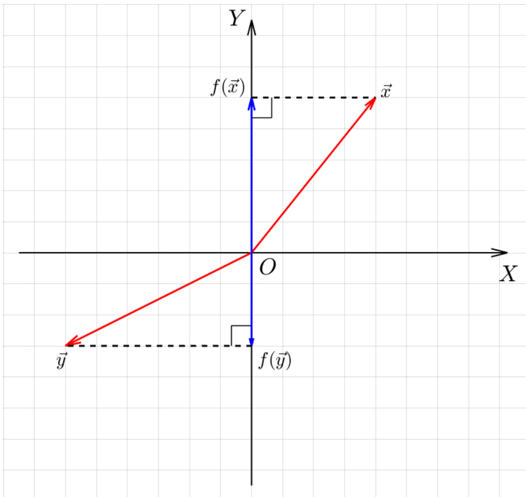
Тем самым $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$, то есть отображения f и g не сопадают.

Решение. Если матрицы A и B не равны, то найдутся такие i и j, что $a_{ij} \neq b_{ij}$. Положим тогда $\vec{x} = \vec{e}_j$. Как мы доказали в третьей задаче, $f(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j$ равно j-ому столбцу матрицы A, а $g(\vec{e}_j) = B\vec{e}_j$ равно j-ому столбцу матрицы B. Но, поскольку $a_{ij} \neq b_{ij}$, то j-ые столбцы матрицы A и матрицы B не равны. А тогда $f(\vec{e}_j) \neq g(\vec{e}_j)$ и отображения f и g не сопадают.

Линейные отображения на плоскости

Задача 1

Отображение f проецирует все векторы на ось OY. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Для решения этой и следующих задач будет полезно использовать клетчатую бумагу. Нарисуйте на ней координатные оси и несколько векторов, например, $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$, $(2,3)$, $(-1,5)$. Посмотрите, как f действует на эти векторы.

Комментарий. В этой и следующих задачах мы специально не определили строго проекцию, зеркальную и центральную симметрии, ограничившись картинками. Действительно, строгое определение потребовало бы либо формулу f, либо матрицу отображения f. А их-то мы и просим вас выписать. По сути, мы просим вас перевести концепты с наглядно-геометрического языка (картинки) на формальный алгебраический язык (формулы).

Подсказка. Как и ранее, эту задачу можно решать, пытаясь найти строки матрицы, а можно — столбцы. Далее мы приведём способ решения через столбцы.

Решение. Отображение f переводит горизонтальный вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в вектор $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. А вертикальный вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ отображение f переводит в $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (то есть оставляет этот вектор на месте). Как мы помним из задачи номер 3, матрица отображения f равна $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{pmatrix}$. Итого, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. А значит, для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ выполнено $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

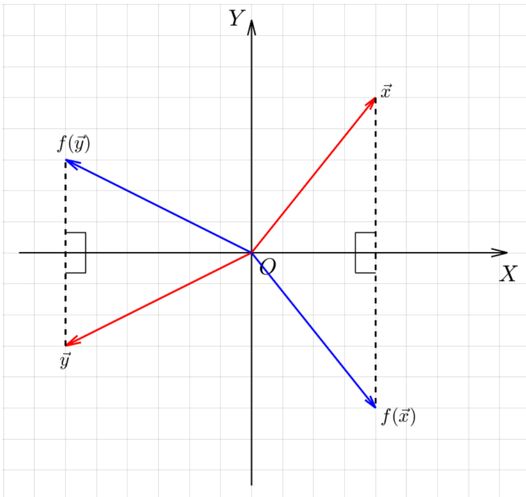
Задача 2

Отображение f переводит все векторы в вектор $\vec{0}$. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.

Решение. Отображение f переводит все векторы в вектор $\vec{0}$. Тогда $f(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. А формула для отображения f такова: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3

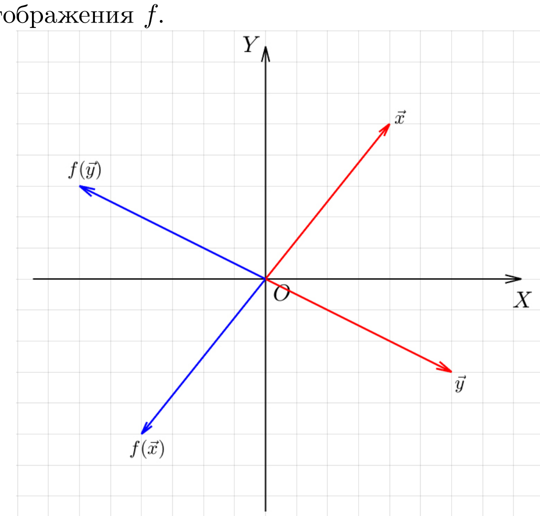
Отображение f переводит все векторы в зеркально симметричные относительно оси OX. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Решение. f переводит горизонтальный вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ в него же: $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. А вертикальный вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ отображение f переводит в зеркально симметричный ему: $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. Значит, матрица отображения f равна $A = \Bigg(f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2)\Bigg) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. Тогда для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ выполнено $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}$.

Задача 4

Пусть f – центральная симметрия с центром в $\vec{0}$. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Решение. f – осевая симметрия с центром в точке $(0, 0)$.

f переводит вектор в вектор, симметричный ему относительно начала координат. То есть $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ и $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. Матрица отображения f равна $A = \Bigg(f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2)\Bigg) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. Тогда для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ выполнено $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$.

Задача 5

Отображение f растягивает первую координату вектора в два раза и сохраняет вторую координату. То есть $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Выпишите соответствующую матрицу и нарисуйте картинку

В этой задаче тоже полезно нарисовать происходящее на клетчатой бумаге.

Подсказка. Задача решается аналогично предыдущим: можно решать через строки или через столбцы матрицы.

Решение. Поскольку $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$, то $f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Значит, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6

Можно ли задать матрицей отображение, которое сдвигает все векторы на вектор $\vec{e}_1$? То есть $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$.

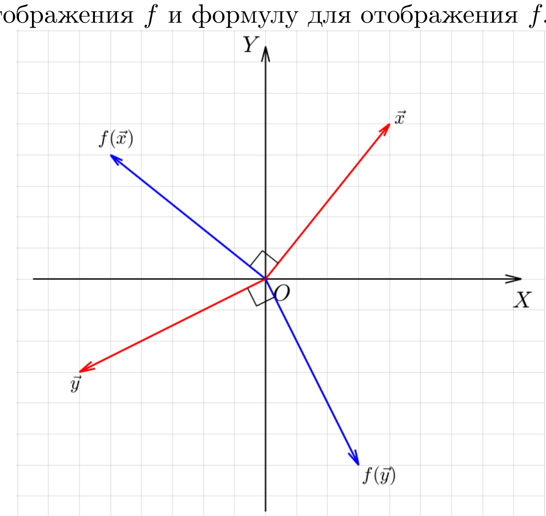
Подсказка. Подумайте, является ли отображение $f_1(x_1, x_2) = x_1 + 1$ линейным.

Решение. Докажем, что отображение $f_1(x_1, x_2) = x_1 + 1$ не является линейным. Проверим, что не выполняется второе свойство линейности ($f_1(cx_1) = cf_1(x_1)$). Действительно, для $c = 1$ и $x_1 = 01$: $f_1(cx_1) = f_1(1 \cdot 1) = f_1(1) = 2$, но $cf_1(x_1) = 1 \cdot f_1(1) = 1 \cdot 2 = 2$, то есть $f_1(cx_1) \neq cf_1(x_1)$.

А раз $f_1(x_1, x_2)$ не является линейным, то и $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ также не является линейным. Следовательно, f нельзя задать матрицей.

Задача 7

Отображение f поворачивает все векторы на 90 градусов против часовой стрелки. Выпишите матрицу отображения f и формулу для отображения f.



Решение. Отображение f поворачивает все векторы на 90 градусов против часовой стрелки.

f переводит горизонтальный вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в вертикальный: $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. А вертикальный вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ отображение f переводит в $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Значит, матрица отображения f равна $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ выполнено $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц

Задача 1

Пусть определены два линейных отображения: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Их *композицией* называется отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ и обозначается $g \circ f$. Действует $g \circ f$ на любом векторе $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ так:

1. применяя f, получаем вектор $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$
2. применяя к полученному вектору g, получаем вектор $g(f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^k$

Вектор $g(f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^k$ и называется результатом действия $g \circ f$ на $\vec{x}$.

Докажите, что композиция двух линейных преобразований линейна. Другими словами, докажите, что для преобразования $g \circ f$ выполнены два условия линейности.

Подсказка. Воспользуйтесь условиями линейности для f и g.

Комментарий. Мы пользуемся тем, что пространство, в которое бьёт f, совпадает с пространством, из которого бьёт g. Если бы это было не так, то композиция была бы не определена – мы бы просто не смогли применить g к вектору $f(\vec{x})$.

Решение.

Проверим два условия линейности для $g \circ f$: сохранение операции сложения и операции умножения на число.

Первое условие. Рассмотрим любые два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Поскольку f линейно, то выполнено: $g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y}))$. Далее, поскольку g линейно, то $g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y}))$. Итак, $g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y}))$, то есть первое условие линейности для $g \circ f$ выполнено.

Второе условие. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, $c \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Тогда, так как f линейно, то $g(f(c\vec{x})) = g(cf(\vec{x}))$. Теперь воспользуемся линейностью g: $g(cf(\vec{x})) = cg(f(\vec{x}))$. Значит, мы получили, что $g(f(c\vec{x})) = cg(f(\vec{x}))$, то есть мы проверили выполнение второго условия линейности для $g \circ f$.

Задача 2

На этом шаге мы просим вас аналогично предыдущему шагу провести рассуждения уже для произвольного j, а не для $j = 1$:

- Найдите j-ый столбец матрицы BA
- Покажите, что на i-ом месте в j-ом столбце матрицы BA стоит произведение i-ой строки B и j-ого столбца A.
- Запишите это произведение строки на столбец при помощи знака суммы $\sum$.

Подсказка. Аналогично предыдущему шагу посмотрите, куда BA отправляет вектор $\vec{e}_j$.

Комментарий. Да, это муторные вычисления с кучей индексов, но один раз их сделать стоит. После этого возникает понимание, почему матрицы умножают "строка на столбец". Это гораздо полезнее, чем просто заученная формула.

Решение.

Как мы помним, $(BA)\vec{e}_j = B(A(\vec{e}_j))$ — так мы определяли действие матрицы BA на векторе. Поэтому для начала мы найдём $A(\vec{e}_j)$. Вспомнив и применив правило "строка на столбец" вот что мы получим:

$$A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + \dots + a_{1j} \cdot 1 + \dots + a_{1n} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{j1} \cdot 0 + \dots + a_{jj} \cdot 1 + \dots + a_{jn} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot 0 + \dots + a_{mj} \cdot 1 + \dots + a_{mn} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём $(BA)(\vec{e}_j)$, опять же применив правило "строка на столбец":

$$(BA)(\vec{e}_j) := B(A(\vec{e}_j)) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{jj} & \dots & b_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{1j} + \dots + b_{1j}a_{jj} + \dots + b_{1m}a_{mj} \\ \vdots \\ b_{j1}a_{1j} + \dots + b_{jj}a_{jj} + \dots + b_{jm}a_{mj} \\ \vdots \\ b_{k1}a_{1j} + \dots + b_{kj}a_{jj} + \dots + b_{km}a_{mj} \end{pmatrix}$$

Как мы помним, полученный вектор $(BA)(\vec{e}_j)$ — это j-ый столбец матрицы BA. Тем самым

- на 1-ом месте в j-ом столбце матрицы BA стоит произведение 1-ой строки B и j-ого столбца A
- на 2-ом месте j-ого столбца матрицы BA стоит произведение 2-ой строки B и j-ого столбца A

$\vdots$

- на k-ом месте j-ого столбца матрицы BA стоит произведение k-ой строки B и j-ого столбца A

Итак, мы действительно получили, что на i-ом месте в j-ом столбце матрицы BA стоит произведение i-ой строки B и j-ого столбца A.

Записав произведения строк на столбцы в виде сумм, мы можем переформулировать наш ответ так:

$$(BA)(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{m} b_{1l}a_{lj} \\ \sum\limits_{l=1}^{m} b_{2l}a_{lj} \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} b_{kl}a_{lj} \end{pmatrix}$$

Задача 3

Вспомним примеры матриц с шага предыдущего урока. На этом шаге мы поняли, что матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ задаёт линейное отображение, которое растягивает все векторы в 3 раза, а матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ задаёт линейное отображение, которое проецирует все векторы на ось OX. Посчитайте, как будет выглядеть матрица BA, и подумайте, какому отображению она будет соответствовать.

Подсказка. Пример вычисления произведения матриц размера 2×2 есть на седьмом шаге этого урока. А в первом пункте задачи ещё можно вспомнить, что произведение матриц соответствует композиции двух линейных отображений.

Решение.

1. Обе матрицы имеют размер 2 на 2, поэтому и их произведение имеет размер 2 на 2. Обозначим их произведение за $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$:

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

   - На 1-ом месте в 1-ом столбце произведения стоит произведение 1-ой строки первой матрицы и 1-ого столбца второй матрицы, то есть $c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 3$.
   - На 2-ом месте в 1-ом столбце произведения стоит произведение 2-ой строки первой матрицы и 1-ого столбца второй матрицы, то есть $c_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$.
   - На 1-ом месте во 2-ом столбце произведения стоит произведение 1-ой строки первой матрицы и 2-ого столбца второй матрицы, то есть $c_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$.

- На 2-ом месте во 2-ом столбце произведения стоит произведение 2-ой строки первой матрицы и 2-ого столбца второй матрицы, то есть $c_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$.

Тем самым:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Переформулируем умножение матриц на языке отображений. Матрица A задаёт линейное отображение, которое растягивает все векторы в 3 раза, а матрица B задаёт линейное отображение, которое проецирует все векторы на ось OX. Тогда если $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ — произвольный вектор, то $(BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ — это то же самое, что $B(A(\vec{x}))$. Итак, $(BA)\vec{x} = B(A(\vec{x}))$ это композиция линейных отображений: сначала вектор $\vec{x}$ проецируется на ось OX, затем растягивается в 3 раза.

Задача 4

Посмотрим на такую матрицу размера n на n:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
У неё стоят единицы на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (эта диагональ называется главной). А на всех остальных местах стоят нули. Такая матрица называется *единичной*. Чаще всего её обозначают буквами E или I. Если важно подчеркнуть, что матрица именно размера n на n, то добавляют нижний индекс: E_n, I_n.

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $E\vec{x} = \vec{x}$.
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $EA = AE = A$. Из этого и предыдущего пункта ясно, почему E называется единичной матрицей.
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $E_n A = A E_m = A$

Подсказка. Воспользуйтесь формулами умножения матрицы на вектор и матрицы на матрицу.

Решение.

1. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Докажем, что $E\vec{x} = \vec{x}$. По формуле действия матрицы на вектор выполнено
$$E\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$$
2. Пусть A — матрица размера n на n. Докажем, что $EA = AE = A$:
$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$
$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$

3. Пусть A — матрица размера n на m. Докажем, что $E_nA = AE_m = A$:
$$E_nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A.$$
$$AE_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A.$$

Задача 5

Пусть A – любая матрица, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – любое число. Умножим все коэффициенты матрицы A на λ, и будем называть полученную матрицу (λA). Вот так:
$$2\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Докажите, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ верно $(\lambda E)\vec{x} = \lambda\vec{x}$. То есть λE растягивает все векторы в λ раз
2. Докажите, что если матрица A имеет размер n на n, то $(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A$
3. Докажите, что если матрица A имеет размер n на m, то $(\lambda E_n)A = A(\lambda E_m) = \lambda A$

Комментарий. Размерность матрицы E часто не указывают, когда считают её понятной из контекста. Так, во всех пунктах задачи, в которых написано просто E, имеется в виду E_n.

Подсказка. Воспользуйтесь формулами умножения матрицы на вектор и матрицы на матрицу.

Решение.

1. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Докажем, что $(\lambda E)\vec{x} = \lambda\vec{x}$. По определению умножения матрицы на число выполнено
$$(\lambda E)\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda\vec{x}$$
2. Пусть A — матрица размера n на n. Докажем, что тогда $(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A$:
$$(\lambda E)A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda A$$
$$A(\lambda E) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda A$$
3. Пусть A — матрица размера n на m, докажем, что $(\lambda E_n)A = A(\lambda E_m) = \lambda A$:
$$(\lambda E_n)A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} = \lambda A$$

$$A(\lambda E_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} = \lambda A$$

Задача 6

Иногда матрицы удобнее записывать в виде нескольких блоков, каждый из которых соответствует меньшей матрице. Например, пусть

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{12} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{12} \end{pmatrix}$.

Тогда мы можем так определить блочную матрицу $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{11} & y_{12} \\ 0 & 0 & y_{21} & y_{12} \end{pmatrix}$.

При этом два нуля в этой блочной матрице, конечно, обозначают заполненные нулями матрицы размера 2 на 2.

Комментарий. Блочные матрицы это не какой-то другой вид матриц, а просто другая запись обычных матриц.

Пусть X_1 и X_2 – матрицы размера k на k, а Y_1 и Y_2– матрицы размера $n-k$ на $n-k$. Докажите, что верно следующее выражение, составленное из матриц размера n на n:

$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1X_2 & 0 \\ 0 & Y_1Y_2 \end{pmatrix}$

При этом два нуля в этих матрицах, конечно, обозначают заполненные нулями матрицы размера $n-k$ на k или k на $n-k$.

Подсказка. Сначала можно проверить выполнение формулы для блоков размера 2 на 2 (как в примере в условии).

Решение. Обозначим за $A = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}$, за $B = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$.

Тогда $a_{ij} = \begin{cases} (X_1)_{ij}, \text{ если } i \le k \text{ и } j \le k \\ 0, \text{ если } i \le k \text{ и } j > k \\ 0, \text{ если } i > k \text{ и } j \le k \\ (Y_1)_{i-k,j-k}, \text{ если } i > k \text{ и } j > k \end{cases}$ и аналогично $b_{ij} = \begin{cases} (X_2)_{ij}, \text{ если } i \le k \text{ и } j \le k \\ 0, \text{ если } i \le k \text{ и } j > k \\ 0, \text{ если } i > k \text{ и } j \le k \\ (Y_2)_{i-k,j-k}, \text{ если } i > k \text{ и } j > k \end{cases}$

Здесь в формуле вида $(X_1)_{ij}$ имеется в виду элемент на пересечении i-ой строки и j-ого столбца матрицы X_1.

По формуле произведения матриц $(AB)_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{n} a_{im}b_{mj} = \sum\limits_{m=1}^{k} a_{im}b_{mj} + \sum\limits_{m=k+1}^{n} a_{im}b_{mj}$.

Тогда

- при $i \le k$ и $j \le k$ выполнено $(AB)_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{k} (X_1)_{im}(X_2)_{mj} + \sum\limits_{m=k+1}^{n} 0 = (X_1X_2)_{ij}$, то есть соответствующий блок равен X_1X_2
- при $i \le k$ и $j > k$ выполнено $(AB)_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{k} 0 + \sum\limits_{m=k+1}^{n} 0 = 0$, то есть соответствующий блок равен матрице размера k на $n-k$, заполненной нулями
- при $i > k$ и $j \le k$ выполнено $(AB)_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{k} 0 + \sum\limits_{m=k+1}^{n} 0 = 0$, то есть соответствующий блок равен матрице размера $n-k$ на k, заполненной нулями

- при $i > k$ и $j > k$ выполнено $(AB)_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{k} 0 + \sum\limits_{m=k+1}^{n} (Y_1)_{i-k,m-k}(Y_2)_{m-k,j-k} = (Y_1Y_2)_{i-k,j-k}$, то есть соответствующий блок равен Y_1Y_2

Задача 7

Вычислите произведение $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -67 & 94\\ 0 & 0 & 75 & 63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-39 & -62 & 0 & 0\\ 12 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. Согласно предыдущей задаче умножение происходит по блокам, поэтому найдём такие произведения:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-39 & -62\\ 12 & 15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-39 & -62\\ 12 & 15\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-67 & 94\\ 75 & 63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}67 & -94\\ -75 & -63\end{pmatrix}$$

А значит искомое произведение равно

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -67 & 94\\ 0 & 0 & 75 & 63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-39 & -62 & 0 & 0\\ 12 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-39 & -62 & 0 & 0\\ 12 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 67 & -94\\ 0 & 0 & -75 & -63\end{pmatrix}$$

Задача 8

Определение. Умножение называется *коммутативным*, если $B \cdot A = A \cdot B$ для любых A и B.

1. Пусть A и B – матрицы. Докажите, что AB и BA определены и имеют одинаковый размер, только если A и B это квадратные матрицы одинакового размера.

2. Приведите пример матриц A и B размера 2 на 2, таких что $AB \neq BA$.

3. Пусть $n > 2$. Приведите пример матриц A и B размера n на n, таких что $AB \neq BA$.

Подсказка к пункту 2. Например, рассмотрите такие два отображения: проекция на ось OX и поворот на 90 градусов.

Подсказка к пункту 3. Посмотрите на предыдущую задачу. Подставьте матрицы из пункта 2 в качестве X_1 и X_2, и возьмите заполненные нулями Y_1 и Y_2.

Решение.

1. Пусть A — матрица размера n на m, B — матрица размера k на l. Тогда произведение AB определено, только если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то есть $m = k$. При этом произведение BA определено, только если число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A, то есть $l = n$. Значит, матрица AB будет иметь размер n на n, а матрица BA будет иметь размер m на m. А так как размеры матриц AB и BA должны совпадать, получем $k = m = n = l$, то есть A и B это квадратные матрицы одинакового размера.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (соответствует проекции на ось OX) и пусть $B = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (соответствует повороту на 90 градусов против часовой стрелки). Тогда $AB = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. При этом $BA = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Итого, $AB \neq BA$.

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Тогда, согласно задаче про блочные матрицы, $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, но $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $AB \neq BA$.