

# TP1 Métodos Computacionales - Informe

*Alarcón Luciana, Arslanian Juana, Slavkin Uriel*

Universidad Torcuato Di Tella

Segundo semestre 2025

# Introducción

En este informe se estudian dos ecuaciones en derivadas parciales (EDP) fundamentales en la modelización de fenómenos físicos: la ecuación del calor y la ecuación de transporte. La ecuación del calor describe cómo un perfil, como la temperatura en una barra, se suaviza con el tiempo debido a la difusión, mientras que la ecuación de transporte modela el desplazamiento de una cantidad a velocidad constante.

Dado que la solución analítica de estas ecuaciones no siempre es accesible, se recurre a métodos numéricos basados en diferencias finitas, que aproximan las derivadas mediante cocientes incrementales y permiten avanzar la solución en el tiempo. Para este estudio, se trabaja en una dimensión espacial en el intervalo  $[0, 1]$  y un intervalo temporal  $t \in [0, T]$ , con condiciones de frontera e iniciales adecuadas. La malla espacial uniforme se define como  $x_j = j\Delta x$ ,  $j = 0, \dots, N$ , y la temporal como  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, \dots, N_t$ , denotando la aproximación numérica de la solución en el punto  $(x_j, t_n)$  como  $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ .

## 1. Parte 1 — Ecuación del calor

### 1.1. Planteo del problema

En base a la ecuación del calor, que modela la difusión de temperatura en un medio, por ejemplo en una barra de metal, se define  $u(x, t)$  como la cantidad de calor en un punto del espacio  $x \in \mathbb{R}$  en un instante de tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$ . Se observa en experimentos físicos que  $u$  satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de difusión, pues cuanto mayor sea, más rápido se suaviza la curvatura de la temperatura, es decir, se propaga por la barra. Por eso, al inicio observamos un pico y luego de transcurrido un segundo se alisa, ya que el calor fluye desde caliente hacia frío.

La ecuación del calor en una dimensión describe la difusión de temperatura:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]$$

con condiciones de frontera de Dirichlet  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  y condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = 1 - |2x - 1|, \quad x \in (0, 1).$$

### 1.2. Discretización del dominio

Como hallar una fórmula cerrada para  $u(x, t)$  es muy complejo, discretizamos el dominio partiéndolo entre 0 y 1 cada  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . Como sabemos que:

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta t = t_1 - t_0$$

Entonces podemos reescribirlo de esta forma:

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j, \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Planteamos una malla o rejilla de  $N$  nodos y una barra de metal de tamaño  $M$  donde los puntos hacen referencia a  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \Delta x$ ,  $x_2 = 2\Delta x$ ,  $\dots$ ,  $x_{M-1} = 1$ . Aquí  $j$  es el índice espacial, por lo que dice en qué posición de la rejilla está. Luego, partimos el tiempo en pasos de  $\Delta t$ , donde los instantes son  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \Delta t$ ,  $t_2 = 2\Delta t$ ,  $\dots$ ,  $t_N = T$  con  $n$  como índice temporal, ya que dice en qué instante de tiempo se encuentra. Esto hace que todos nodos estén uniformemente espaciados.

Con esto, la solución numérica en el punto  $x_j$  y en el instante  $t_n$  la guardamos como

$$u_j^n \approx u(x_j, t_n).$$

Como vimos, el superíndice  $n$  indica tiempo y el subíndice  $j$  indica espacio. Entonces:

- $u_j^n$  = valor actual en el tiempo  $t_n$ .
- $u_j^{n+1}$  = valor en el próximo paso de tiempo por lo que es en  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .
- $u_{j+1}^n$  y  $u_{j-1}^n$  = vecinos espaciales, a derecha e izquierda, en el mismo instante  $t_n$ .

### 1.3. Métodos numéricos para la ecuación del calor

Para resolver este problema, en base a la rejilla de puntos  $(x_j, t_n)$  construimos una matriz  $U[n, j]$  donde se aproxima  $u(x, t)$ , es decir, la temperatura aproximada en cada posición  $x_j$  y tiempo  $t_n$ , que llamamos  $u_j^n$ . Existen dos métodos, explícito e implícito, que pueden formularse mediante diferencias finitas.

Para el espacio, utilizamos la **segunda derivada de la diferencia centrada** donde  $h = \Delta x$ .

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Debemos considerar a los vecinos ya que comparamos  $u$  con el promedio de sus dos vecinos: si  $u$  está muy por encima o por debajo, hay curvatura. De este modo, la ecuación en base a la segunda derivada de la diferencia finita central, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Para el tiempo, usamos una **diferencia finita hacia adelante (forward)** cuando queremos cambiar de  $t$  a  $t + \Delta t$  y, en base a ella, obtenemos el **método explícito**. El  $h$  de las fórmulas de diferencias finitas es el paso entre puntos, por lo que podemos reemplazarla por  $\Delta t$  y como dijimos arriba, evaluar la función en el tiempo actual  $t_n$  más un corrimiento  $\Delta t$  es  $u_j^{n+1}$ .

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Juntando ambas se arma el esquema numérico que actualiza la temperatura paso a paso. Se emplean diferencias finitas para reemplazar derivadas por aproximaciones discretas, es decir, intentar hallar una resolución numérica. Para la variación según el tiempo, como miramos al instante siguiente en función al instante anterior, a través de la diferencia hacia adelante planteamos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

Esto refiere a cuánto cambia la temperatura de este paso de tiempo al siguiente.

Como la ecuación del calor cumple que  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  colocamos ambas aproximaciones evaluadas en el tiempo actual  $t_n$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \approx \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Despejamos  $u_j^{n+1}$ :

$$\boxed{u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}, \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

De este modo, obtuvimos el método explícito que para ir al tiempo siguiente, en cada punto espacial, toma el valor actual y se le suma una corrección que lo acerca al promedio de sus vecinos, lo que es en sí la difusión.

Asimismo, podemos encontrar el **método implícito**, el cual se logra en base a la **diferencia finita hacia atrás (backward)** donde se evalúa la función en el tiempo nuevo  $t_{n+1}$  y se resta la función menos un corrimiento  $\Delta t$  que es  $u_j^n$ , ya que se avanza cada  $\Delta t$ .

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Lo evaluó en el tiempo nuevo  $t_{n+1}$  :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \approx \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Despejamos  $u_j^n$ :

$$\boxed{u_j^{n+1} - r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n}, \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Para obtener el valor del tiempo siguiente en la posición  $j$  ( $u_j^{n+1}$ ), debemos considerar la curvatura espacial, es decir, la segunda derivada en el espacio.

Esa curvatura mide cómo se compara  $u_j^{n+1}$  con el promedio de sus vecinos  $u_{j-1}^{n+1}$  y  $u_{j+1}^{n+1}$ . Por ende, si  $u_j^n$  está más alto que el promedio de sus vecinos, baja; si está más bajo, sube. Eso alisa.

Ahora la curvatura se evalúa también en el tiempo nuevo, por eso para calcular todos los  $u_j^{n+1}$  a la vez, quedan acoplados entre sí (cada uno depende de sus vecinos también nuevos). Por eso, no se puede calcular  $u_j^{n+1}$  de manera directa punto por punto, sino que hay que resolver un sistema lineal en cada paso de tiempo.

#### 1.4. Forma matricial

Como la condición de Dirichlet implica que los bordes valen siempre 0, puesto que  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ , consideramos los puntos interiores de la rejilla. Así definimos,  $j = 1, 2, 3, \dots, N-1$ .

##### Método explícito

A partir de la ecuación del método explícito, distribuimos el  $r$ :

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1 - 2r) u_j^n + r u_{j+1}^n$$

Por lo tanto, se puede plantear este problema como un sistema de ecuaciones lineales:

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} (1 - 2r)u_1^n + ru_2^n \\ ru_1^n + (1 - 2r)u_2^n + ru_3^n \\ ru_2^n + (1 - 2r)u_3^n + ru_4^n \\ \vdots \\ ru_{N-2}^n + (1 - 2r)u_{N-1}^n \end{cases}$$

Por lo que, podemos escribir la función del método explícito como una matriz con los siguientes vectores  $\mathbf{u}^n$  y  $\mathbf{u}^{n+1}$ :

$$\mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Para todos los puntos interiores, podemos escribir en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1 - 2r & r & \cdots & 0 \\ 0 & r & 1 - 2r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & r \\ 0 & \cdots & 0 & r & 1 - 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}$$

Esto es exactamente la multiplicación de matriz-vector, por lo que no habría que resolver el sistema lineal para este método:

$$\mathbf{u}_{\text{interior}}^{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_{\text{interior}}^n$$

En resumen, cualquiera sea la notación, respecto al tiempo actual hallamos el tiempo siguiente.

## Método implícito

Como en el método anterior, distribuimos el  $r$  y partimos de la siguiente ecuación:

$$-r u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2r) u_j^{n+1} - r u_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

Podemos escribirlo como un sistema de ecuaciones lineales, :

$$u_j^n = \begin{cases} 0 + (1 + 2r)u_1^n - ru_2^n \\ -ru_1^{n+1} + (1 + 2r)u_2^{n+1} - ru_3^{n+1} \\ -ru_2^{n+1} + (1 + 2r)u_3^{n+1} - ru_4^{n+1} \\ \vdots \\ -ru_{N-2}^{n+1} + (1 + 2r)u_{N-1}^{n+1} + 0 \end{cases}$$

Podemos escribir la función del método implícito como una matriz. Definimos los vectores  $\mathbf{u}^n$  y  $\mathbf{u}^{n+1}$ :

$$\mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Para todos los puntos interiores, podemos escribir en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 + 2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1 + 2r & -r & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1 + 2r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -r \\ 0 & \cdots & 0 & -r & 1 + 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}$$

Esto es exactamente como resolver el siguiente sistema lineal :

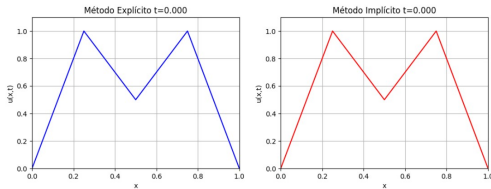
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_{\text{interior}}^{n+1} = \mathbf{u}_{\text{interior}}^n$$

## 1.5. Implementación y resultados

Con  $\alpha = 1$ ,  $\Delta x = 0,05$ ,  $\Delta t = 0,001$ ,  $T = 0,1$ :

$$r = \frac{1 \cdot 0,001}{0,05^2} = \frac{0,001}{0,0025} = 0,4,$$

por lo que el esquema explícito es estable. La malla resultante es  $N = 20$  y  $N_t = 100$ . A partir de la condición inicial:



$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -2x + \frac{3}{2} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -4x + 4 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Implementamos las funciones `e_c_metodoexplicito` y `e_c_metodoimplicito` que reciben el coeficiente de difusión  $\alpha$ , la función  $f(x)$  de condición inicial, el paso en el espacio  $\Delta x$ , el paso en el tiempo  $\Delta t$  y el tiempo final de simulación  $T$ . Con ella generamos un GIF adjunto bajo el nombre `Implicito_Explicito_calor.gif` donde se puede observar la diferencia entre ambos métodos.

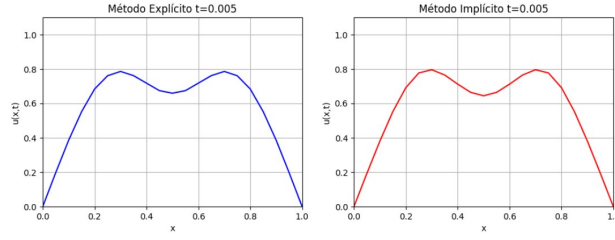


Figura 1: Método Explicito e Implícito con  $t = 0,005$

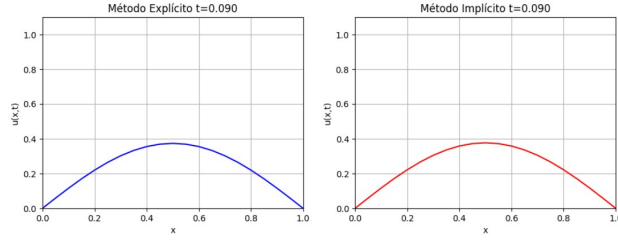


Figura 2: Método Explicito e Implícito con  $t = 0,090$

Vemos que a medida que avanza el tiempo la función se alisa y se encoge hacia adentro, suavizando los picos de la condición inicial. No se observan grandes diferencias entre ambos métodos, por lo que aproximan a la función de manera consistente.

Pero si variamos  $\alpha$  observamos que grandes diferencias entre ambos metodos:

$\alpha$	$r$
1.0	0.40
1.1	0.44
1.2	0.48
1.3	0.52
1.4	0.56
1.5	0.60

Cuadro 1: Valores de  $r$  para los métodos explícito e implícito según  $\alpha$

A partir de  $\alpha = 1,3$ , podemos ver como el comportamiento del método explícito se vuelve inestable, creando picos, mientras que con el método implícito se suaviza incluso mas que con  $\alpha = 1,0$

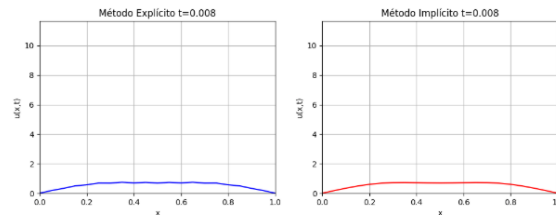


Figura 3: Método Explicito e Implícito con  $\alpha = 1,3, t = 0,008$

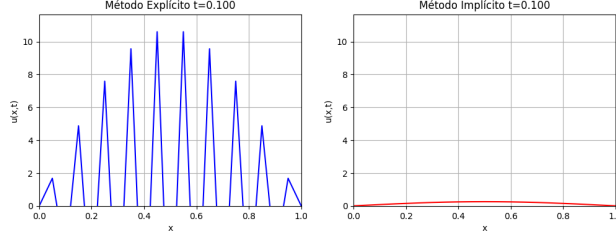


Figura 4: Método Explicito e Implícito con  $\alpha = 1,3, t = 0,100$

## 2. Parte 2: Ecuación de transporte

### 2.1. Planteo del problema

Estudiamos la ecuación de transporte, que describe el desplazamiento de una cantidad  $u(x, t)$  a lo largo del eje  $x$  con velocidad constante  $a$ , sin cambiar su forma. Cumple que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = f(x).$$

En este caso, la información inicial  $f(x_0)$  se propaga siguiendo las trayectorias rectas

$$x(t) = x_0 + at,$$

de modo que la solución es simplemente una traslación de la condición inicial:

$$u(x, t) \approx f(x - at).$$

Para este trabajo consideramos la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \text{si no} & 0 \end{cases}$$

Esta propiedad de traslación explica la elección de discretizaciones a favor del flujo en el esquema numérico y por qué miramos sólo la primera derivada.

### 2.2. Discretización del dominio

Sea  $\Delta x > 0$  y  $\Delta t > 0$ . Definimos la malla uniforme

$$x_j = j \Delta x, \quad j = 0, \dots, N, \quad t_n = n \Delta t, \quad n = 0, \dots, N_t,$$

donde  $N = \frac{1}{\Delta x}$  y  $N_t = \frac{T}{\Delta t}$ . Denotamos  $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ .

Definimos el número de Courant

$$r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

### 2.3. Métodos numéricos para la ecuación del transporte

Para la derivada temporal usamos la diferencia hacia adelante (forward) evaluada en  $t_n$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t},$$

y la diferencia hacia atrás (backward) evaluada en  $t_{n+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

Para la derivada espacial usaremos la *diferencia centrada* en  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}.$$

Combinando estas diferencias finitas, tomando una en tiempo y una en espacio según corresponda, deducimos los métodos que se emplean para hallar una resolución numérica aproximada.

Para el **método explícito** evaluamos un tiempo adelante  $t_n$ .

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \implies \boxed{u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}.$$

Todo el lado derecho está en  $t_n$  (conocido) y podemos actualizar  $u^{n+1}$  directamente.

Para el **método implícito** tomamos un tiempo atrás evaluado en  $t_{n+1}$ .

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \implies \boxed{u_j^{n+1} - \frac{r}{2} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n}.$$

Aquí  $u_j^{n+1}$  depende de  $u_{j-1}^{n+1}$  entonces en cada paso se resuelve sistemas lineales para los nodos interiores ( $j = 1, \dots, N-1$ ). Este esquema es incondicionalmente estable para  $a$  constante.

## 2.4. Forma matricial

Sea la malla uniforme  $x_j = j\Delta x$ ,  $j = 0, \dots, N$ , y  $t^n = n\Delta t$ . Definimos el vector de incógnitas para los nodos interiores ( $j = 1, \dots, N-1$ ):

$$\mathbf{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix}.$$

La condición inicial se incorpora directamente en el primer paso de tiempo:

$$\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

## Método Explícito

El método explícito se escribe para  $j = 1, \dots, N-1$  como:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

o de manera equivalente,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} u_{j+1}^n - \frac{r}{2} u_{j-1}^n.$$

Podemos escribir este esquema como un sistema lineal en forma matricial. Definiendo el vector de nodos interiores, tenemos:

$$\mathbf{u}^{n+1} = A \mathbf{u}^n,$$

Así, cada paso de tiempo consiste en multiplicar el vector  $\mathbf{u}^n$  por la matriz  $A$  para obtener  $\mathbf{u}^{n+1}$ .

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1 & \frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{r}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{r}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{r}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}.$$



## Método Implícito

El método implícito se escribe para  $j = 1, \dots, N - 1$  como::

$$u_j^{n+1} - \frac{r}{2} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

Distribuimos el  $\frac{r}{2}$ :

$$u_j^{n+1} - \frac{r}{2} (u_{j+1}^{n+1}) + \frac{r}{2} (u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

Podemos escribir el sistema lineal en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{r}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{r}{2} & 1 & -\frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{r}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{r}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{r}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}.$$

En forma compacta:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n,$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  es tridiagonal, con 1 en la diagonal principal,  $-r/2$  en la diagonal superior y  $+r/2$  en la diagonal inferior.

## 2.5. Implementación y resultados

Con  $\Delta x = 0,01$ ,  $\Delta t = 0,005$ ,  $a = 1,0$  el número de Courant es

$$r = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{0,005}{0,01} = 0,5$$

Como mencionamos, para la condición inicial usaremos  $f(x) = \sin(\pi x)$  en  $[0, 1]$ .

Luego, implementamos las funciones `e_t_metodo_explicito` y `e_t_metodo_implicito_btcs` que recibe la velocidad  $a$ , la función  $f(x)$  de condición inicial, el paso en el espacio  $\Delta x$ , el paso en el tiempo  $\Delta t$  y el tiempo final de simulación  $T$ . Con ella generamos un GIF adjunto bajo el nombre `Implicito_Explicito_transporte.gif` donde se puede observar la diferencia entre ambos métodos.

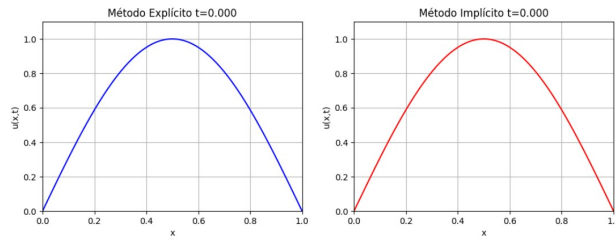


Figura 5: Método Explicito e Implícito con  $t = 0,000$

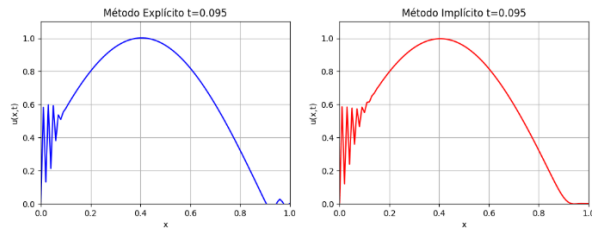


Figura 6: Método Explicito e Implícito con  $t = 0,095$

La Figura 5 corresponde a la condición inicial y a medida avanza el tiempo, se desplaza a izquierda levemente como se ve en la Figura 6. Así, se muestra que al pasar de  $t = 0$  a  $t = 0,1$ , los perfiles numéricos se desplazan hacia la derecha (para  $a > 0$ ) cambiando su forma y se puede ver como hay más ruido al incrementar el tiempo. Se puede observar que hay un poco mas de ruido con el metodo implícito que con el metodo explicito. Podemos observar esto mas claramente si variamos  $\alpha$  :

$\alpha$	$r$
-1.0	-0.50
-0.5	-0.25
-0.3	-0.15
-0.1	-0.05
0.0	0.00
0.1	0.05
0.3	0.15
0.5	0.25
1.0	0.50

Cuadro 2: Valores de  $\alpha$  y los correspondientes números de  $r$  para los métodos explícito e implícito.

Podríamos decir que partir de  $-0,3 \leq \alpha \leq 0,3$ , podemos ver como el comportamiento de los metodos, en la mayoría del tiempo, es estable. Además, observamos que con  $\alpha < 0$  la función se desplaza hacia la derecha y con  $\alpha > 0$  se desplaza a la izquierda.

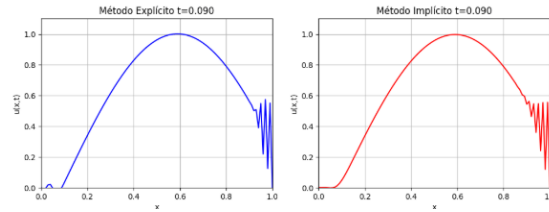


Figura 7: Método Explícito e Implícito con  $\alpha = -1,0, t = 0,09$

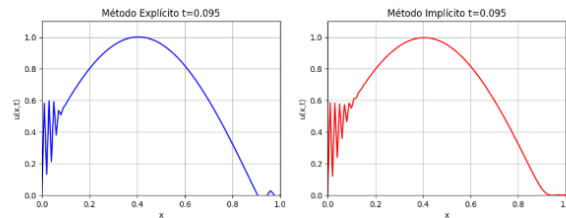


Figura 8: Método Explícito e Implícito con  $\alpha = 1,0, t = 0,095$

## Conclusión

En este trabajo, nos enfocamos en simular dos ecuaciones diferenciales parciales (EDP) clásicas: la ecuación del calor y la ecuación de transporte. Implementamos métodos numéricos de diferencias finitas, utilizando esquemas explícitos e implícitos, y analizamos qué tal se comportan al cambiar ciertos parámetros.

Para la ecuación del calor, ambos métodos mostraron resultados consistentes y estables para valores de  $\alpha$  moderados. El método explícito es simple de implementar y permite calcular el siguiente paso de tiempo directamente, pero su estabilidad está condicionada por la  $r = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$ . Por el contrario, el método implícito es incondicionalmente estable, resolviendo un sistema lineal en cada paso, y permite manejar valores

de  $\alpha$  mayores sin generar inestabilidades ni oscilaciones.

En la ecuación de transporte, los esquemas explícito e implícito reproducen correctamente el desplazamiento del perfil inicial según la velocidad  $a$ , trasladando la forma de la función sin modificar su amplitud. Se observó que dentro de un rango de  $\alpha$  moderado, ambos métodos son estables y consistentes, mientras que valores extremos pueden generar pequeñas oscilaciones numéricas. La formulación matricial de ambos métodos facilita su implementación y permite una comprensión clara de la actualización de los nodos interiores en cada paso temporal.

En general, los resultados muestran que los métodos implícito y explícito son herramientas efectivas para aproximar soluciones de EDP, siendo el implícito más robusto frente a condiciones de estabilidad restrictivas, mientras que el explícito es más eficiente computacionalmente para problemas con restricciones de paso temporal moderadas. La comparación entre ambos métodos evidencia que la elección del esquema numérico debe considerar la naturaleza de la ecuación, los parámetros del problema y el balance entre estabilidad y eficiencia.

Para futuras investigaciones, proponemos probar valores de  $r$  más grandes, aumentar el tiempo total y considerar otras condiciones iniciales.