Лекция 13.
Непрерывность функции многих переменных.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$, a является предельной точкой множества X.

Определение 1 (формальное). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2 (Коши). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, для которой $\rho(x, a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение 3 (Гейне). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(a)$.

Эквивалентность определений 1, 2 и 3 сразу следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне.

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что любая его точка является для него предельной.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - a_n$ - *приращения аргументов*. Тогда $\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - *приращение функции* $f(x)$ *в точке* a.

Отметим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} \Delta f(x) = 0$, что равносильно: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(x) = 0$.

Определение 5. Пусть $\Delta_k f(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - *частное приращение* функции $f(x)$ в точке a, соответствующее ли приращению Δx_k. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a *по переменной* x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k f(x) = 0$.

Замечание. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры. 1) Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = $ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} - 1 \right) = 0$. Значит, функция $f(x, y)$ непрерывна по x в точке $(0,0)$.

Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$. Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m = \frac{1}{m}$, $y_m = -\frac{1}{m}$, тогда $f(x_m, y_m) \equiv 0$. Мы получили, что последовательность $\{(x_m, y_m)\} \xrightarrow[m\to\infty]{} (0,0)$, но $\{f(x_m, y_m)\}$ не стремится при $m \to \infty$ к $f(0,0) = 1$, то есть функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

2) Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

На любой прямой $y = kx,\ k \neq 0$, имеем:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0 = f(0,0)$$

При этом на кривой $y = x^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

то есть функция разрывна в точке $(0,0)$

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in X$, то функции $(f(x) \pm g(x))$, $(f(x)\cdot g(x))$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.

Доказательство теоремы 1 следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Определение 6. Пусть $x_1 = \varphi_1(t_1,\ldots,t_k)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1,\ldots,t_k)$ - функции, заданные на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Тогда любой точке $t \in T$ можно поставить в соответствие точку $x = (x_1,\ldots,x_n) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ - множество всех таких точек x. Если на множестве X задана функция $f(x): X \to \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве T задана *сложная функция* $f(x_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_k)) = f(x(t)): T \to \mathbb{R}$.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1,\ldots,t_k)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывны в точке $a = (a_1,\ldots,a_k) \in T$, а функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна в точке $b = (b_1,\ldots,b_n)$, где $b_j = \varphi_j(a_1,\ldots,a_k)$, $j = 1,\ldots,n$. Тогда сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть последовательность $\{t^m\} = \{(t_1^m,\ldots,t_k^m)\}$ точек множества T сходится к точке $a = (a_1,\ldots,a_k) \in T$. Обозначим $x_j^m = \varphi_j(t_1^m,\ldots,t_k^m)$, $j = 1,\ldots,n$; $\{x^m\} = \{(x_1^m,\ldots,x_n^m)\}$. Так как все функции $\varphi_j(t)$ непрерывны в точке a, то последовательность $\{x^m\}$ сходится к $b = (\varphi_1(a),\ldots,\varphi_n(a))$ (здесь мы пользуемся определением непрерывности функции по Гейне, а также тем фактом, что последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно). Поскольку функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, в свою очередь, непрерывна в точке $b = (b_1,\ldots,b_n)$, $b_j = \varphi_j(a_1,\ldots,a_k)$, то числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ сходится к $f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности аргументов $\{t^m\} = \{(t_1^m,\ldots,t_k^m)\}$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x(t^m))\}$ сходится к $f(x(a))$. Это означает, что сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a. Теорема доказана.

Теорема 3 (сохранение знака). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ (< 0) то существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) > 0$ (< 0) для любой точки $x \in B_\delta(a)$.

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$ (случай противоположного знака рассматривается аналогично). Обозначим $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для любого x, $\rho(a, x) < \delta$ (определение Коши непрерывности функции в точке). Раскрывая модуль, получим: $0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}$ для любого $x \in B_\delta(a)$. Теорема доказана.

Теорема 4 (прохождение через промежуточные значения). Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно, и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X. Если точки $a, b \in X$, а число γ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то на любой непрерывной кривой, соединяющей точки a и b и принадлежащей множеству X, найдется точка c такая, что $f(c) = \gamma$.

Доказательство. Пусть кривая L задается уравнениями $x_1 = \varphi_1(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем L целиком принадлежит множеству X. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана функция $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, которая является непрерывной на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Поскольку $f(x(t))$ является числовой функцией аргумента t, то (по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение) для любого числа γ, лежащего между $f(x(\alpha))$ и $f(x(\beta))$, найдется точка $\xi \in [\alpha, \beta]$ такая, что $f(x(\xi)) = \gamma$. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ - точка с координатами $(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi))$. Тогда $c \in L$, $f(c) = \gamma$. Теорема доказана.

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на этом множестве.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда для любого натурального числа m найдется точка $x^m \in X$ такая, что $|f(x^m)| > m$. Последовательность $\{x^m\}$ ограничена (поскольку ограничено множество X), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_m}\}$ (теорема Больцано-Вейерштрасса). Пусть $x^{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки. Следовательно, $x_0 \in X$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ должна сходиться при $m \to \infty$ к числу $f(x_0)$. Но последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ - бесконечно большая (так как $|f(x^{k_m})| > k_m$ для любого m). Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ ограничена на множестве X. Теорема доказана.

Определение 7. *Точной верхней (нижней) гранью функции* $f(x)$ *на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$ называется действительное число M (m) такое, что

1) $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ для любого $x \in X$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x' \in X$ такая, что $f(x') > M - \varepsilon$ $(f(x') < m + \varepsilon)$.

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_X f(x)$. Если $f(x) < M$ для любого $x \in X$, то функция $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на множестве X и $F(x) > 0$ для любого $x \in X$. Значит, согласно первой теореме Вейерштрасса, существует число $A > 0$ такое, что $F(x) \le A$ при всех $x \in X$. Тогда $f(x) \le M - \dfrac{1}{A} < M$ для любого $x \in X$. Мы пришли к противоречию с определением точной верхней грани. Значит, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$. Случай точной нижней грани рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Определение 8. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что любая его точка является предельной. Функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta$, выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 7 (теорема Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на X. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального числа m найдутся точки $x'_m, x''_m \in X$, для которых $\rho(x'_m, x''_m) < \dfrac{1}{m}$, но

(1) $$|f(x'_m) - f(x''_m)| \ge \varepsilon.$$

Последовательность $\{x'_m\}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_m}\}$. Пусть $x'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, $f(x'_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$.

С другой стороны, так как $\rho(x'_{k_m}, x''_{k_m}) < \dfrac{1}{k_m}$, то последовательность $\{x''_{k_m}\}$ также сходится к точке x_0 при $m \to \infty$. Значит, $f(x''_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$. Тогда получаем, что $|f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Это противоречит неравенству (1). Следовательно, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X. Теорема доказана.