Лекция 19.

Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений

Ранее мы рассматривали вопрос о существовании и дифференцировании неявной функции, определяемой одним функциональным уравнением. Теперь рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m (m – натуральное число, $m > 1$) неявных функций, определяемых системой m функциональных уравнений.

Пусть задана система функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

и требуется найти её решение в виде набора функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{2}$$

обращающих эту систему в систему тождеств в некоторой заданной области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$- пространство переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Изучим вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (1) относительно $y_1, y_2, \dots, y_m$. Решение (2) системы (1) мы будем называть *непрерывным и дифференцируемым* в некоторой области G изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если каждая из функций (2) непрерывна и дифференцируема в области G.

Рассмотрим m функций $F_1, F_2, \dots, F_m$, стоящих в левых частях системы (1), и составим из частных производных этих функций определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Будем называть определитель вида (3) *определителем Якоби (*или кратко *якобианом*) функций $F_1, F_2, \dots, F_m$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_m$ и кратко обозначать его символом

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}.$$

Теперь мы можем сформулировать важное обобщение теоремы о неявной функции.

Теорема 1. (*о существовании системы неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений).* Пусть

1) m функций

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \end{cases}$$

определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, $M_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$;

2) все частные производные этих функций по переменным $y_1, y_2, \dots, y_m$ непрерывны в точке M_0;

3) в точке M_0 все функции $F_1, F_2, \dots, F_m$ обращаются в нуль, то есть выполнена система (1);

4) якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$ отличен от нуля в M_0.

Тогда для любых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ найдется $\delta > 0$ такое, что в $B_\delta(x^0)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ существует единственный набор из m функций (2), удовлетворяющий условиям: $|f_1(x) - y_1^0| < \varepsilon_1, |f_2(x) - y_2^0| < \varepsilon_2, \dots, |f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$, $x \in B_\delta(x^0)$, и являющийся решением системы уравнений (1), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки x^0.

Замечание. При $m = 1$ теорема 1 совпадает с доказанной ранее теоремой о неявной функции, поскольку в этом случае якобиан (3) совпадает с частной производной $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$.

Доказательство. Проведём рассуждения методом математической индукции. При $m = 1$ теорема уже доказана. Поэтому для проведения индукции достаточно предположить, что теорема справедлива для системы, состоящей из $m-1$ функционального уравнения при некотором $m \geq 2$, и доказать её справедливость для системы, состоящей из m функциональных уравнений.

Итак, по условию теоремы, якобиан $\Delta(M_0) \neq 0$. Тогда хотя бы один из миноров $(m-1)$ –го порядка этого якобиана также отличен от нуля в точке M_0. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор, стоящий в левом верхнем углу, то есть $\Delta_m(M_0) \neq 0$, где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

Тогда, по предположению индукции, система, состоящая из первого $m-1$ уравнения системы (1), разрешима относительно переменных $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$.

Точнее, для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}$ найдется такая окрестность точки $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_m^0)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, в которой единственным образом определен набор из $m-1$ функции

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{m-1} = g_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m), \end{cases}$$

удовлетворяющих условиям $|g_1(\tilde{x}^0) - y_1^0| < \varepsilon_1, \dots, |g_{m-1}(\tilde{x}^0) - y_{m-1}^0| < \varepsilon_{m-1}$ и являющихся единственным и дифференцируемым решением системы, состоящей из первого $m-1$ уравнения системы (1).

Подставим найденные функции $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ в левую часть последнего из уравнений (1). При этом последняя из функций превращается в некоторую функцию ψ, зависящую только от переменных $x_1, \dots, x_n, y_m$:

$$F_m(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \dots, g_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m), y_m) = \psi(x_1, \dots, x_n, y_m). \qquad (4)$$

Таким образом, последнее из уравнений системы (1) превращается в уравнение:

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y_m) = 0. \qquad (5)$$

Заметим, что функция $\psi(x_1, \dots, x_n, y_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_m^0)$ как сложная функция. Из соотношения (4) следует, что

$$\psi(\tilde{x}^0) = \psi(x_1^0, \dots, x_n^0, y_m^0) = 0.$$

Покажем, что уравнение (5) разрешимо относительно переменной y_m. Для этого достаточно показать, что частная производная $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке $\tilde{x}^0$. С этой целью вычислим указанную частную производную.

Подставим в первые $m-1$ уравнений системы (1) функции $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}$, являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по y_m. Кроме этого, продифференцируем по y_m соотношение (4). Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} = 0, \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = \frac{\partial \psi}{\partial y_m}. \end{cases}$$

Умножим теперь полученные равенства на алгебраические дополнения $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана Δ соответственно, а затем сложим эти равенства. Получим:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial g_k}{\partial y_m} [\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_k} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial y_k}] + (\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_m} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m}) = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

Так как сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого столбца равна определителю, а сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю, то каждая квадратная скобка в последнем соотношении равна нулю, а круглая скобка равна якобиану Δ. Таким образом, мы получаем равенство (верное в некоторой окрестности точки M_0):

$$\Delta = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

По нашему предположению, $\Delta_m(M_0) \neq 0$. Значит,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Функции Δ и Δ_m состоят из частных производных функций $F_1, F_2, \dots, F_m$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_m$, непрерывных в точке M_0. Кроме того, поскольку якобиан Δ отличен от нуля в точке M_0, то и частная производная $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ в точке $\tilde{x}^0$ отлична от нуля. Итак, доказано, что к уравнению (5) можно применить теорему о неявной функции.

Согласно этой теореме, для любого положительного числа ε_m найдется такая δ −окрестность точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, что всюду в пределах этой окрестности определена функция

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

удовлетворяющая условию: $|f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$, $x \in B_\delta(x^0)$, и являющаяся единственным, непрерывным и дифференцируемым решением уравнения (5). Подставляя это решение в функции $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}$, мы получим функции $f_1, \dots, f_{m-1}$, зависящие только от переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$y_k = g_k[x_1, \dots, x_n, f_m(x_1, \dots, x_n)] = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, m-1.$$

По теореме о дифференцируемости сложной функции, каждая из функций $f_1, \dots, f_{m-1}$ дифференцируема в окрестности точки x^0. Таким образом, мы доказали, что m функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \quad \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

удовлетворяют в окрестности точки x^0 условиям: $|f_1(x) - y_1^0| < \varepsilon_1, \dots, |f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$ и являются непрерывным и дифференцируемым в этой окрестности решением системы (1). Единственность следует из построения.

Теорема полностью доказана.

В качестве следствия из теоремы 1 сформулируем утверждение о существовании и дифференцируемости обратного отображения.

Следствие. Пусть функции $f_1(x_1, \dots, x_n)$, ..., $f_n(x_1, \dots, x_n)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем все частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $1 \le k,\ j \le n$, непрерывны в точке x^0, а якобиан

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

в этой точке отличен от нуля.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки $y^0 = (f_1(x^0), \dots, f_n(x^0))$, в которой единственным образом определены и дифференцируемы функции

$$x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = g_n(y_1, \dots, y_n),$$

удовлетворяющая соотношениям:

$$f_k\big(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)\big) = y_k, \qquad k = 1, \dots, n,$$

всюду в указанной окрестности.

Доказательство. Нужно применить теорему 1 к системе функциональных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ \quad \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 \end{cases}$$

в окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, где $y_k^0 = f_k(x_1^0, \dots, x_n^0)$.