Лекция 12.
Предел функции многих переменных.

Определение 1. Если каждой точке x из множества $X \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие по известному закону действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве X задана *функция n переменных* $f(x)$ (или $f(x_1,\ldots,x_n)$). Множество X называется *областью определения* функции $f(x)$ и обозначается D_f.

Определение 2 (предел функции по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $0 < \rho(x,a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1,\ldots,x_n) = b$.

Определение 3 (предел функции по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a \in \mathbb{R}^n$, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} b$.

Доказательство эквивалентности определении по Коши и по Гейне проводится точно так же, как в одномерном случае.

Определение 4. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, $\|x\| > \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Тогда $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (если $c \neq 0$).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x^m\}$ точек множества X такую, что $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \neq a$. Тогда $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} b$, $g(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} c$ (определение предела по Гейне). В силу свойств числовых последовательностей получаем: $(f(x^m) \pm g(x^m)) \xrightarrow[m \to \infty]{} b \pm c$, $(f(x^m) \cdot g(x^m)) \xrightarrow[m \to \infty]{} b \cdot c$, $\dfrac{f(x^m)}{g(x^m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} \dfrac{b}{c}$ (если $c \neq 0$). Отсюда и из определения предела функции по Гейне сразу следует утверждение теоремы.

Определение 5. Функция $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши в точке* $a \in \mathbb{R}^n$ *(при* $x \to \infty$*)*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in D_f$ таких, что $0 < \rho(x',a) < \delta$, $0 < \rho(x'',a) < \delta$ ($\|x'\| > \delta, \|x''\| > \delta$), выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2 (критерий Коши существования предела функции многих переменных). Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in \mathbb{R}^n$ (при $x \to \infty$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши в точке a (при $x \to \infty$).

Доказательство. Будем проводить доказательство для случая, когда $a \in \mathbb{R}^n$ (случай $a = \infty$ рассматривается аналогично).

Докажем сначала необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выполнено: $\left| f(x') - b \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\left| f(x'') - b \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (определение предела функции по Коши). Значит, $\left| f(x') - f(x'') \right| \le \left| f(x') - b \right| + \left| f(x'') - b \right| <$ $< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть в точке a выполнено условие Коши.

Теперь докажем достаточность. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Выберем последовательность аргументов $\{x^m\}$ такую, что $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \ne a$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Согласно критерию Коши, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выполнено: $\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$. Так как $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, то существует натуральный номер N такой, что $0 < \rho(x^m, a) < \delta$ для любого $m \ge N$. Тем более, $0 < \rho(x^{m+p}, a) < \delta$ для любого натурального числа p и любого $m \ge N$. Значит, $\left| f(x^{m+p}) - f(x^m) \right| < \varepsilon$.

Мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $m \ge N$, для любого натурального p выполнено: $\left| f(x^{m+p}) - f(x^m) \right| < \varepsilon$. Это означает в точности, что числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ фундаментальна. Значит, она сходится (критерий Коши сходимости числовых последовательностей).

Осталось показать, что для любого выбора последовательности аргументов $\{x^m\}$ все последовательности значений функции $\{f(x^m)\}$ будут сходиться к одному и тому же числу. Пусть $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \ne a$, $y^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $y^m \ne a$; $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} b$, $f(y^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} c$. Рассмотрим последовательность аргументов $\{z^m\} = \{x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^m, y^m, \ldots\}$. Тогда очевидно, что $z^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $z^m \ne a$. Значит, по уже доказанному нами, существует число d такое, что $f(z^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} d$. Но последовательности $\{f(x^m)\}$ и $\{f(y^m)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(z^m)\}$ и должны сходиться к тому же пределу. Отсюда $b = c = d$. Теорема полностью доказана.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Обозначение: $f(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$.

Определение 7. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $y \in \overset{0}{B_\varepsilon}(y_0)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и существует $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = b$, то говорят, что существует *повторный предел* $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = b$.

Аналогично можно определить повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

Заметим, что существование повторных пределов функции в точке и существования ее предела как функции двух переменных (такой предел называют также *двойным*) не эквивалентны. Приведем соответствующие примеры.

Примеры. 1) Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. Если $y\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0\cdot y}{0+y^2}=0$, значит, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$. Покажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$. Рассмотрим две последовательности: $\{(x_m,y_m)\}=\left\{\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m}\right\}$ и $\{(x'_m,y'_m)\}=\left\{\dfrac{1}{m},-\dfrac{1}{m}\right\}$. Тогда $\{(x_m,y_m)\}\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0)$, $\{(x'_m,y'_m)\}\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0)$, но $\{f(x_m,y_m)\}=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $\{f(x'_m,y'_m)\}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, то есть для различных последовательностей аргументов, стремящихся к точке $(0,0)$, соответствующие последовательности значений функции могут сходиться к разным числам. Это означает, что функция $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$. Значит, из существования обоих повторных пределов не следует существования двойного.

Покажем, что и из существования двойного предела не следует существование повторных.

2) Рассмотрим функцию $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$. Если $x^2+y^2\to 0$, то $f(x,y)\to 0$ (как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$ (определение предела функции по Коши).

Покажем, что не существует ни один из повторных пределов (поскольку переменные входят в нашу функцию симметричным образом, то достаточно рассмотреть один из таких пределов). Пусть, например, $y\neq 0$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$, а $\lim\limits_{x\to 0}y^2\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ не существует. Значит, не существует предел $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ при любом фиксированном $y\neq 0$, и тем более, не существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

Легко показать также, что у функции могут существовать двойной и один из повторных пределов, но не быть второго повторного предела. Для этого немного изменим функцию из примера 2:

3) Пусть $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ не существует (проверьте это самостоятельно!)

И наконец, рассмотрим пример того, что оба повторных предела могут существовать, но не быть равными.

4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. Тогда ясно, что $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$. Покажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ в этом случае не существует.

Упражнение. Покажите, что если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=c$, то $b=c$.