Лекция 20.
Зависимость и независимость функций.

В курсе линейной алгебры рассматривается понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Например, в линейном пространстве функций n переменных, определённых на области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $m\ (m > 1)$ функций называются *линейно зависимыми*, если хотя бы одна из этих функций представляется в виде линейной комбинации (то есть линейной функции) остальных, и это равенство тождественно на области G.

Сейчас мы рассмотрим более общее понятие зависимости функций, чем линейная зависимость. Пусть в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, определены и дифференцируемы $m\ (m > 1)$ функций:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

Определение 1. Функция $y_k = f_k(x)$ называется *(гладко) зависящей* от остальных функций в области G, если для любого $x \in G$ верно равенство:

$$f_k(x) = F(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x)),$$

где $F(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции набора $f_1, \dots, f_m$ будем называть *зависимыми в области* G, если хотя бы одна из них зависит от остальных в области G. В противном случае функции называются *независимыми в области* G.

Рассмотрим простые примеры зависимых и независимых функций.

Примеры. 1) Рассмотрим функции двух переменных

$$f_1 = x + y, f_2 = xy, f_3 = x^2 + y^2.$$

Функции f_1, f_2, f_3 *зависимы во всём пространстве* $\mathbb{R}^2$, поскольку для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имеет место равенство:

$$f_3(x, y) = f_1^2(x, y) - 2f_2(x, y).$$

2) Функции $f_1 = x + y$, $f_2 = x - y$ являются *независимыми* в любой области $D \subset \mathbb{R}^2$, такой, что $(0, 0) \in D$. В самом деле, если взять $x = y$, то $f_1(x, x) = 2x$, $f_2(x, x) \equiv 0$. В этом случае, то есть на пересечении области D с прямой $L_1 : x = y$, функция f_1 не выражается через f_2. Аналогично, на пересечении области D с прямой $L_2 : x = -y$, функция f_2 не выражается через f_1, так как в этом случае $f_1(x, -x) \equiv 0$, $f_2(x, -x) = 2x$. (Если область D содержит точку $(0;0)$, то она заведомо содержит некоторую шаровую окрестность этой точки, а значит, точки вида $(x;x), (x;-x)$, где $x \neq 0$).

Рассмотрим теперь достаточное условие независимости функций.

Теорема 1. Пусть задана система функций: $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$, $\dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq m > 1$. Пусть все функции этого набора определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда, если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0, то функции данной системы независимы в некоторой окрестности точки M_0.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля якобиан

$$\Delta = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}.$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что функции $f_1, \dots, f_m$ зависимы в некоторой окрестности точки M_0, т.е. одна из этих функций, например f_k, для всех точек этой окрестности выражается в виде $f_k(x) = F(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x))$, где $F(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в рассматриваемой окрестности. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислим производную функции F по любой из переменных x_l, $l = 1, \dots, m$. Получаем следующие равенства:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}}\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_l} + \frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_l},$$

$l = 1, \dots, m$. Эти соотношения, рассматриваемые в точке M_0, показывают, что k −я строка якобиана $\Delta(M_0)$ представляет собой линейную комбинацию остальных строк с коэффициентами, соответственно равными $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_m}$ (все производные вычислены в точке M_0). Но в этом случае якобиан $\Delta(M_0)$ равен нулю, что противоречит условию теоремы. Доказательство закончено.

Пример. 3) Выше в примере 2) рассматривались две функции $f_1 = x + y$, $f_2 = x - y$, и с помощью определения 1 была показана их независимость в окрестности точки $(0;0)$. Применяя к этим функциям теорему 1, получаем, что они независимы в окрестности любой точки пространства $\mathbb{R}^2$, поскольку всюду в $\mathbb{R}^2$ якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,\ y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Функциональные матрицы и их приложения.

Пусть снова задана система m функций от n переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Будем предполагать, что функции $f_1, \dots, f_m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем все частные производные первого порядка этих функций непрерывны в самой точке M_0. Рассмотрим вопрос о том, какие из функций данной системы являются независимыми. С этой целью составим из частных производных всех функций по всем переменным следующую функциональную матрицу:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

содержащую m строк и n столбцов. Справедливо следующее замечательное утверждение.

Теорема 2. Пусть функциональная матрица Ф обладает свойствами:

1) некоторый минор r −го порядка отличен от нуля в точке $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ $(r \le \min\{m, n\})$;
2) все миноры $r + 1$ −го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки M_0 (если $r < \min\{m, n\}$).

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r −го порядка, независимы в окрестности точки M_0, а каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы Ф, т.е. определитель $\Delta_r(M_0) \neq 0$, где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}.$$

Тогда из теоремы 1 сразу вытекает независимость функций $f_1, \dots, f_r$ в окрестности точки M_0. Если $r = m,$ то доказательство завершено.
Пусть $r < m$. Нужно доказать, что любая из остальных функций $f_{r+1}, \dots, f_m$ зависит в окрестности M_0 от $f_1, \dots, f_r$. Зафиксируем произвольное j от $r+1$ до m и докажем, что функция f_j зависит в окрестности M_0 от $f_1, \dots, f_r$.

Рассмотрим систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r) \equiv f_1(x_1, \dots, x_n) - g_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ F_r(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r) \equiv f_r(x_1, \dots, x_n) - g_r = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что эта система разрешима относительно переменных $x_1, \dots, x_r$ в некоторой окрестности точки $N_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, g_1^0, \dots, g_r^0)$, где $g_k^0 = f_k(M_0)$, $k = 1, \dots, r$.
Действительно, якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_r)}{D(x_1,\dots,x_r)}$, совпадает с минором Δ_r, следовательно, он отличен от нуля в точке N_0. Значит, выполняются все условия теоремы о системе функциональных уравнений, и всюду в достаточно малой окрестности точки N_0 система имеет единственное и дифференцируемое решение

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_r = \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r). \end{cases}$$

Подставим это решение в функцию f_j:

$$y_j = f_j(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), \dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), x_{r+1}, \dots, x_n) = \tag{2}$$
$$= \varphi(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r).$$

Мы хотим теперь показать, что на самом деле функция φ не зависит от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$, а только от $g_1, \dots, g_r$. Если $r = n$, то все уже доказано. Пусть $r < n$.

Зафиксируем число l от $r+1$ до n и вычислим частную производную $\frac{\partial \varphi}{\partial x_l}$. Мы хотим показать, что она равна нулю в некоторой окрестности точки N_0 (тем самым покажем, что функция φ не зависит от переменных x_l в этой окрестности). Для этого подставим функции $\psi_1, \dots, \psi_r$ в систему (1) и продифференцируем полученные соотношения по x_l. Кроме этого, продифференцируем по x_l равенство (2). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial f_1}{\partial x_l} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial f_r}{\partial x_l} = 0, \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial f_j}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь следующий минор $r+1$ –го порядка матрицы Ф:

$$\Delta^j = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \frac{\partial f_r}{\partial x_l} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial x_r} & \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \end{vmatrix}$$

По условию теоремы этот минор равен нулю всюду в окрестности точки M_0.

Обозначим через $\Delta_1^j, \dots, \Delta_{r+1}^j$ алгебраические дополнения элементов последнего столбца определителя Δ^j (заметим, что тогда $\Delta_{r+1}^j = \Delta_r$).

Умножим равенства системы (3) на $\Delta_1^j, \dots, \Delta_{r+1}^j$ соответственно и сложим все полученные соотношения. В силу теоремы о том, что сумма произведений элементов данного столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), получим

$$\Delta^j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \Delta_r.$$

Отсюда $\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \frac{\Delta^j}{\Delta_r}$ в окрестности точки M_0. Заметим, что по условию теоремы определитель $\Delta_r \neq 0$ в точке M_0, а значит, в силу непрерывности и в некоторой окрестности, и наше деление законно. С другой стороны, определитель Δ^j равен нулю в окрестности точки M_0. Следовательно, производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x_l}$ равна нулю в окрестности точки M_0, значит, функция φ не зависит в этой окрестности от переменной x_l. Это справедливо для любого l от $r+1$ до n, таким образом всюду в окрестности точки M_0:

$$y_j = \varphi(g_1, \dots, g_r) = \varphi(y_1, \dots, y_r),$$

где $\varphi -$ дифференцируемая функция. Значит, действительно функция f_j зависит в указанной окрестности от функций $f_1, \dots, f_r$, где j – произвольное число от $r+1$ до m.

Теорема доказана.

Пример. Исследуем зависимость функций

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ f_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ f_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases}$$

Функциональная матрица имеет в данном случае вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что все определители третьего порядка тождественно равны нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(x_2(x_1 + x_2 + x_4) - x_3(x_1 + x_3 + x_4) - x_1(x_1 + x_2 + x_4) + x_3(x_2 + x_3 + x_4) +$$
$$+ x_1(x_1 + x_3 + x_4) - x_2(x_2 + x_3 + x_4)) = 4(x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_4 - x_1x_3 - x_3^2 - x_3x_4 -$$
$$- x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_1^2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_2^2 - x_2x_4 + x_1x_4) = 0.$$

При этом в любой точке пространства (x_1, x_2, x_3, x_4), у которой не все четыре координаты совпадают, хотя бы один из определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Значит, в окрестности любой указанной точки функции f_1 и f_2 независимы, а функция f_3 зависит от f_1 и f_2.