Лекция 11.
Дифференциалы высших порядков.

Ранее мы рассматривали инвариантную форму записи (первого) дифференциала функции $f(x)=f(x_1,...,x_n)$. При этом сам оператор дифференцирования имеет, очевидно, вид:

$$d=(\nabla,dx)=\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n.$$

Предположим, что после применения к функции $f(x)$ оператора дифференцирования d получается снова дифференцируемая функция $df(x)$ (в данной точке или на данном множестве). Для этого достаточно предположить, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема (в точке или на множестве), а переменные $x_1,...,x_n$ либо независимы, либо тоже представляют собой дважды дифференцируемые функции (в соответствующей точке или на соответствующем множестве). Тогда к функции $df(x)$ можно снова применить оператор дифференцирования, который (в аналогичной инвариантной форме записи) можно обозначить для удобства другой буквой, например, так: $\delta=(\nabla,\delta x)=\frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}\delta x_n$. Композиция этих двух операторов имеет вид:

$$\delta(df)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot\delta x_k. \tag{1}$$

Определение 1. *Вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x^0 называется величина $d^2f(x^0)=\delta(df)(x^0)$ - значение композиции (1), взятое при равенстве: $\delta x=\{\delta x_1,...\delta x_n\}=\{dx_1,...,dx_n\}=dx$, где все частные производные вычислены в точке x^0, то есть выражение:

$$d^2f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_k. \tag{2}$$

По индукции, если определён (и дифференцируем) дифференциал $d^{n-1}f(x)$, то *n-ым дифференциалом (дифференциалом n-го порядка)* функции $f(x)$ в точке x^0 называется величина $d^nf(x^0)=\delta(d^{n-1}f)(x^0)$ - значение композиции $\delta(d^{n-1}f)$, взятое при равенстве: $\delta x=\{\delta x_1,...\delta x_n\}=\{dx_1,...,dx_n\}=dx$, где все частные производные вычислены в точке x^0.

Замечание. Пусть переменные $x_1,...,x_n$ независимы или являются линейными функциями. (*Под линейной функцией n независимых переменных понимают функцию вида* $x_i(t_1,...,t_k)=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}t_j$, где коэффициенты $a_{ij}\in\mathbb{R}$). Тогда все их дифференциалы, кроме первого, равны нулю, поскольку равны нулю все частные производные второго и более высоких порядков. В этих случаях форма записи для дифференциалов высших порядков существенно упрощается.

Более конкретно, отметим по этому поводу следующее:

1) $d^2f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0)dx_idx_j$ - квадратичная форма от переменных $dx_1,...,dx_n$. Эта квадратичная форма симметрична, если участвующие в ней частные производные не зависят от порядка последовательного дифференцирования.

Например, если $f(x,y)$ - функция двух переменных, дважды дифференцируемая в точке (x_0,y_0), то выражение для ее второго дифференциала имеет вид

$$d^2f(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)dx^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)dxdy+f''_{yy}(x_0,y_0)dy^2.$$

Для функции трех переменных справедлива аналогичная формула:

$$d^2f|_{M_0}=f''_{xx}(M_0)dx^2+f''_{yy}(M_0)dy^2+f''_{zz}(M_0)dz^2+2(f''_{xy}(M_0)dxdy+f''_{xz}(M_0)dxdz+f''_{yz}(M_0)dydz),$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$, функция $f(x,y,z)$ дважды дифференцируема в точке M_0.

2) Если переменные $x_1,...,x_n$ независимы или являются линейными функциями, а функция $f(x)$ m раз дифференцируема в точке x^0, то для дифференциалов высших порядков верно равенство:

$$d^m f = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m f = (\nabla, dx)^m f,\ m \ge 1. \qquad (3)$$

Формула Тейлора для функции многих переменных.

Для функций многих переменных, аналогично случаю одной переменной, имеет место формула Тейлора. В этом разделе мы будем рассматривать функции *n* независимых переменных.

Теорема 1. (*Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(x^0)$ точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда для всякого $x \in B_\delta(x^0)$, приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ представимо в виде:

$$\Delta f = f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + R_m, \qquad (4)$$

где остаточный член имеет вид (называемый *остаточным членом в форме Лагранжа*):

$$R_m = \frac{d^{m+1} f(x^0 + \theta\Delta x)}{(m+1)!},\ \theta \in (0;1),\ \Delta x = x - x^0. \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим сложную функцию

$$F(t) = f(x^0 + t\Delta x) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, ..., x_n^0 + t\Delta x_n).$$

Эта функция, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления её по формуле Маклорена при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что поскольку внутренние функции $x_k(t) = x_k^0 + t\Delta x_k$ являются линейными, то производные сложной функции $F(t)$ в точке $t_0 = 0$ легко вычисляются и имеют вид:

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i = df(x^0),$$

$$F''(0) = \sum_{j-1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)\Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0),$$

$$...$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x^0),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(x^0 + \theta\Delta x).$$

Подставляя эти равенства в представление для функции F, получаем и искомую формулу (4), и формулу для остаточного члена (5), что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие. (*Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*).
Пусть выполнены все условия теоремы 1, и пусть, сверх того, все частные производные $(m+1)$-го порядка функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ непрерывны в некоторой шаровой окрестности точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда остаточный член R_m в формуле (4) может быть представлен в виде:

$$R_m = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m d^{m+1} f(x^0 + t\Delta x)dt.$$

Доказательство. Покажем сначала справедливость соотношения:

$$R_m = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} = \frac{1}{m!}\int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt.$$

С этой целью применим к очевидному равенству: $F(1)=F(0)+\int\limits_0^1 F'(t)dt$ формулу интегрирования по частям, учитывая, что $dt=d(-(1-t))$. Получим:

$$\Delta F=F(1)-F(0)=\int\limits_0^1 F'(t)dt=F'(t)[-(1-t)]\Big|_0^1+\int\limits_0^1 F''(t)(1-t)dt=F'(0)+\int\limits_0^1 F''(t)(1-t)dt.$$

К последнему интегралу $\int\limits_0^1 F''(t)(1-t)dt$ снова применим формулу интегрирования по частям, имея в виду равенство: $(1-t)dt=d(-\frac{1}{2}(1-t)^2)$. Тогда получим:

$$\Delta F=F'(0)+F''(t)[-\frac{1}{2}(1-t)^2]\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 F'''(t)(1-t)^2dt=F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 F'''(t)(1-t)^2dt.$$

И так далее, применяя снова и снова формулу интегрирования по частям к получающемуся интегралу, в итоге придём к формуле:

$$\Delta F=F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\ldots+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}+\frac{1}{m!}\int\limits_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt,$$

Теперь, подставляя вместо производных функции F соответствующие дифференциалы функции f, получаем искомую формулу с остаточным членом в интегральной форме. Следствие доказано.

Теперь рассмотрим разложение функции по формуле Тейлора при более слабых условиях, и ещё одну форму остаточного члена - форму Пеано.

Теорема 2. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).* Пусть m - целое число, $m\ge 1$. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ $m-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(x^0)$ точки $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, и m раз дифференцируема в самой точке $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Тогда для любой точки $x,\ x\in B_\delta(x^0)$, верна формула:

$$\Delta f=f(x)-f(x^0)=df(x^0)+\frac{d^2f(x^0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(x^0)}{m!}+R_m,$$

где остаточный член имеет вид (называемый *остаточным членом в форме Пеано*):

$$R_m=\bar{o}(\rho^m),\qquad \rho\to 0,\qquad \rho=\|\Delta x\|.$$

Замечание. Обозначим через $g_m(x)$ функцию:

$$g_m(x)=f(x)-f(x^0)\ -\left(df(x^0)+\frac{d^2f(x^0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(x^0)}{m!}\right).$$

Для доказательства теоремы 2 теперь достаточно установить, что при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство: $g_m(x)=\bar{o}(\rho^m)$.

Сначала сформулируем и докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Если функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ m раз дифференцируема в точке $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, то как сама функция $g_m(x)$, так и все ее частные производные по любым переменным $x_1,\ldots,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0.

Доказательство леммы 1. При $m=1$ функция $g_m(x)$ принимает вид:

$$g_1(x)=f(x)-f(x^0)-(x_1-x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)-\ldots-(x_n-x_n^0)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0),$$

и равенства: $g_1(x^0)=0,\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x^0)=0$ при всех $i=1,2,\ldots,n$ проверяются элементарно.

Для проведения индукции предположим, что лемма справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ $m+1$ раз дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, и

$$g_{m+1}(x) = f(x) - f(x^0) \ - \left(df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{m+1} f(x^0)}{(m+1)!} \right) =$$

$$= f(x) - f(x^0) \ - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_j=1}^{n} \frac{\partial^j}{\partial x_{k_j} \ldots \partial x_{k_1}} f(x) \Big|_{x=x^0} \left(x_{k_1} - x_{k_1}^0 \right) \ldots \left(x_{k_j} - x_{k_j}^0 \right).$$

Легко видеть, что $g_{m+1}(x) = 0$ (достаточно учесть, что каждая круглая скобка $(x_i - x_i^0)$ в обращается в нуль в точке x^0).

Выберем произвольное $l = 1,2,...,n$. Нам нужно показать, что функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x^0)$ и все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0. Проведем ряд преобразований:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_j=1}^{n} \frac{\partial^j}{\partial x_{k_j} \ldots \partial x_{k_1}} f(x) \Big|_{x=x^0} \left(x_{k_1} - x_{k_1}^0 \right) \ldots \left(x_{k_j} - x_{k_j}^0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} j \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{n} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}} \ldots \partial x_{k_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \right) \Big|_{x=x^0} \left(x_{k_1} - x_{k_1}^0 \right) \ldots \left(x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0 \right) \left(x_l - x_l^0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0) - \left(\sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{n} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}} \ldots \partial x_{k_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \right) \Big|_{x=x^0} \left(x_{k_1} - x_{k_1}^0 \right) \ldots \left(x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0) - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} d^j \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_l} \right) \right).$$

Значит, функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x)$ имеет вид:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x^0) - \left(d\tilde{f}(x^0) + \frac{d^2 \tilde{f}(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m \tilde{f}(x^0)}{m!} \right),$$

где функция $\tilde{f}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_l}$ m раз дифференцируема в точке x^0. Значит, согласно предположению индукции, она сама и все ее частные производные до порядка m включительно обращаются в ноль в данной точке. Поскольку число l было выбрано произвольным от 1 до n, то тем самым мы доказали, что у функции $g_{m+1}(x)$ все частные производные до порядка $m+1$ включительно обращаются в ноль в точке x^0. Индукция закончена. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $g(x) = g(x_1,...,x_n)$ – произвольная функция, удовлетворяющая двум требованиям:

1) $g(x)$ m раз дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$;

2) сама функция $g(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1,...,x_n$; до порядка m включительно обращаются в нуль в указанной точке x^0.

Тогда для функции $g(x)$ в достаточно малой окрестности точки x^0 справедлива оценка:

$$g(x) = \bar{o}(\rho^m), \text{ где } \rho = \|x - x_0\|.$$

Доказательство леммы 2. При $m = 1$ утверждение леммы вытекает из условия дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x^0, которое имеет вид:

$$g(x) - g(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) + \bar{o}(\rho).$$

В самом деле, так как $g(x^0) = 0$, и $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$ =0 для всех $i = 1,\ldots,n$, то получается, что $g(x) = \bar{o}(\rho)$.

Для проведения индукции предположим, что лемма 2 справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет двум требованиям леммы 2 для номера $m+1$. Тогда, очевидно, любая частная производная этой функции первого порядка $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, $i = 1,\ldots,n$, будет удовлетворять двум требованиям леммы 2 для номера m, а поэтому, по предположению индукции, будет справедлива оценка:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \bar{o}(\rho^m).$$

Заметим теперь, что поскольку $m \geq 1$, то $m+1 \geq 2$, и функция $g(x)$, удовлетворяющая двум требованиям леммы для номера $m+1$, во всяком случае, хотя бы один раз дифференцируема в окрестности точки x^0. Поэтому для $g(x)$ выполнены условия теоремы 1 для номера $m = 0$. По указанной теореме, для любой точки x из достаточно малой ε-окрестности точки x^0 найдется число $\theta \in (0, 1)$ такое, что справедлива формула:

$$g(x) = g(x^0) + dg(x^0 + \theta(x - x^0)) = g(x^0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0 + \theta(x - x^0))$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Заметим, что поскольку точка $\xi = x^0 + \theta(x - x^0)$ лежит между точками x^0 и x, то $\|\xi - x^0\| < \rho = \|x - x^0\|$, и поэтому $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi) = \bar{o}(\|\xi - x^0\|^m) \leq \bar{o}(\rho^m)$.

Подставляя последнюю оценку в правую часть тейлоровского разложения и учитывая, что $g(x^0) = 0$, мы получим $g(x) = \bar{o}(\rho^m)\sum_{i=1}^{n}|x_i - x_i^0|$. А так как $|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2} = \rho$, то окончательно получаем, что $g(x) = \bar{o}(\rho^{m+1})$. Индукция завершена. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы легко следует из доказанных лемм 1 и 2. Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при выполнении условий теоремы справедлива оценка $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$.

В силу леммы 1 сама функция $g_m(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1,\ldots,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0. Но тогда в силу леммы 2, справедлива искомая оценка: $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$. Теорема доказана.