## Лекция 18.
## Неявная функция.

Довольно часто при решении задач зависимость переменной $y$ от $n$ переменных $(x_1,...,x_n)$ бывает задана в виде уравнения:

$$F(x_1,...,x_n,y)=0, \qquad (1)$$

где $F$ - некоторая функция $(n+1)$ переменной.

**Определение 1.** Функция $y=f(x_1,...,x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой уравнением* (1) *в области* $G$, если при подстановке её в уравнение (1) оно обращается в области $G$ в тождество: $F(x_1,...,x_n,\ y(x_1,...,x_n))\equiv 0$.

**Пример.** Рассмотрим уравнение $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Легко видеть, что две непрерывные функции, задаваемые формулой: $y_{1,2}=\pm\sqrt{1-x^2}$, являются неявными функциями, определяемыми этим уравнением на отрезке $[-1,1]$. Однако, кроме них, есть бесконечное множество других неявных функций, не являющихся непрерывными, которые можно задавать так:

$$y_A(x)=\begin{cases} +\sqrt{1-x^2}, & x\in A,\\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1]\setminus A,\end{cases}$$

где $A$ – произвольное собственное подмножество отрезке $[-1,1]$.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях в окрестности данной точки гарантировано существование единственной непрерывной (и дифференцируемой) неявной функции, определяемой данным функциональным уравнением типа (1).

**Теорема 1.** *(О существовании и дифференцируемости неявной функции).* Пусть функция $F(x,y)=F(x_1,...,x_n,y)$:

1) определена и дифференцируема в некоторой окрестности $V$ точки $M_0=(x_1^0,...,x_n^0,y^0)$;
2) $F(M_0)=0$;
3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)\neq 0$;
4) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $M_0$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $x$ из $B_\delta(x^0)$, $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$, определена единственным образом функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$, для которой $F(x,\ f(x))=0$, и $\left|f(x)-y^0\right|<\varepsilon$ для любого $x\in B_\delta(x^0)$.

При этом функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в $B_\delta(x^0)$, и её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=-\frac{F'_{x_j}}{F'_y},\ j=1,...,n. \qquad (2)$$

**Доказательство.** Сначала докажем существование требуемой функции и её единственность. Предположим для определённости, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)>0$. В силу непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в точке $M_0$ существует окрестность $U(M_0)$, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ также является положительной (можно считать, что $U\subseteq V$, то есть всюду в $U$ функция $F$ дифференцируема). Следовательно, функция $F$, как функция одной переменной $y$, монотонно возрастает на пересечении окрестности $U$ с прямой $x = x^0$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать точки $M_1(x^0, y^0 - h)$, $M_2(x^0, y^0 + h)$ такие, что $F(M_1) < 0$, а $F(M_2) > 0$, где $h = \varepsilon/2$.

Далее, в плоскостях $y = y^0 - h$ и $y = y^0 + h$ можно выбрать окрестности точек $M_1$ и $M_2$ такие, что $F < 0$ в окрестности точки $M_1$ и $F > 0$ в окрестности точки $M_2$. Можно считать, что эти окрестности одного и того же радиуса $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Таким образом мы получили цилиндр $C: \begin{cases} y^0 - h \le y \le y^0 + h \\ \left\| x - x^0 \right\|^2 \le \delta \end{cases}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) функция $F(x, y)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) в $C$;
2) $F(x, y)$ монотонно возрастает в цилиндре $C$ по переменной $y$;
3) $F(x, y)$ отрицательна на нижнем основании цилиндра $C$, и положительна на его верхнем основании.

Из условий 1), 2), 3) следует, что для любой точки $x = B_\delta(x^0)$ на интервале $((x, y^0 - h); (x, y^0 + h)))$ в цилиндре $C$ существует единственная точка $M$, в которой $F(M) = 0$. Геометрическое место таких точек представляет собой график искомой неявной функции, которую мы обозначим $y = f(x)$. Единственность этой функции очевидна из её построения, неравенство $\left| f(x) - y^0 \right| < \varepsilon$ - также.

Покажем теперь, что построенная выше неявная функция непрерывна в $B_\delta(x^0)$. При построении функции $y = f(x)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ мы подобрали такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только выполнено неравенство $\left\| x - x^0 \right\| < \delta$, для функции $y = f(x)$ немедленно выполняется неравенство: $\left| f(x) - y^0 \right| < \varepsilon$. Это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x^0$. Непрерывность её в любой другой точке $x^1 \in B_\delta(x^0)$ доказывается совершенно аналогично: достаточно вместо $\delta$ взять число $\delta_1 > 0$ такое, что $B_{\delta_1}(x_1) \subset B_\delta(x^0)$.

Докажем теперь дифференцируемость построенной неявной функции. Возьмем произвольную точку $x^1 \in B_\delta(x^0)$. Поскольку функция $y = f(x)$ является решением уравнения $F(x, f(x)) = 0$ всюду в окрестности, то для любой точки $x \in B_\delta(x^0)$ выполнено: $F(x, f(x)) = F(x^1, f(x^1)) = 0$. Обозначим для краткости $y = f\left(x\right)$, $y^1 = f\left(x^1\right)$ и выразим приращение функции $F(x, y)$ в точке $x^1$ по определению дифференцируемости:

$$0 = \Delta F = F(x, y) - F(x^1, y^1) = F(x_1^1 + \Delta x_1, \dots, x_n^1 + \Delta x_n, y^1 + \Delta y) - F(x_1^1, \dots, x_n^1, y^1) =$$
$$= F'_{x_1}\Delta x_1 + \dots + F'_{x_n}\Delta x_n + F'_y \Delta y + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + \beta \Delta y ,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ - бесконечно малые функции при $\Delta x_1 \to 0, \dots,$ $\Delta x_n \to 0$, $\Delta y \to 0$, и все частные производные вычислены в точке $(x^1, y^1)$.

Заметим, что из непрерывности функции $y = f(x)$ следует, что $\Delta y \to 0$ автоматически при $\Delta x_1 \to 0, \dots,$ $\Delta x_n \to 0$. Значит, функции $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1 \to 0, \dots,$ $\Delta x_n \to 0$.

Выразим из последнего соотношения приращение $\Delta y$:

$$0=(F'_{x_1}+\alpha_1)\Delta x_1+...+(F'_{x_n}+\alpha_n)\Delta x_n+(F'_y+\beta)\Delta y.$$

Следовательно, $\Delta y=-\dfrac{(F'_{x_1}+\alpha_1)}{(F'_y+\beta)}\Delta x_1-...-\dfrac{(F'_{x_n}+\alpha_n)}{(F'_y+\beta)}\Delta x_n$,

поскольку по условию теоремы $F'_y\neq 0$, следовательно, при достаточно малом $\beta$ будет также $(F'_y+\beta)\neq 0$. Далее, для всех $j=1,\dots,n$ имеем:

$$\frac{F'_{x_j}+\alpha_j}{F'_y+\beta}=\frac{F'_{x_j}+\alpha_j}{F'_y}\left(1+\frac{\beta}{F'_y}\right)^{-1}=\frac{F'_{x_j}+\alpha_j}{F'_y}\left(1+\tilde{\beta}\right)=\frac{F'_{x_j}}{F'_y}+\tilde{\alpha}_j,$$

где $\tilde{\beta},\tilde{\alpha}_j$ - бесконечно малые при $\Delta x_1\to 0,\dots,\ \Delta x_n\to 0$. Окончательно получаем, что

$$\Delta y=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y}\Delta x_1-...-\frac{F'_{x_n}}{F'_y}\Delta x_n+\tilde{\alpha}_1\Delta x_1+...+\tilde{\alpha}_n\Delta x_n,\ \text{где}\ \tilde{\alpha}_j\to 0\ \text{при}\ \Delta x_1\to 0,\dots,\ \Delta x_n\to 0.$$

Это означает по определению, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $(x^1,y^1)$, и ее частные производные в этой точке вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=-\frac{F'_{x_j}}{F'_y},\ \ j=1,...,n.$$

Теорема полностью доказана.

В качестве следствия из теоремы о существовании неявной функции можно сформулировать следующее утверждение о существовании и дифференцируемости обратной функции.

**Следствие.** Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, и производная $f'(x)$ отлична от нуля в точке $x_0$ и непрерывна в этой точке. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая $\delta$-окрестность точки $y_0$ $(y_0=f(x_0))$, в которой единственным образом определена дифференцируемая обратная функция $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(y_0)=f^{-1}(y_0)=x_0$,

2) $|\varphi(y)-x_0|<\varepsilon$,

3) $\varphi'(y)=(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию $x=\varphi(y)$ как неявную функцию, определяемую функциональным уравнением: $F(x,y)=f(x)-y=0$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Из условий следствия ясно, что функция $F(x,y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, $F(M_0)=F(x_0,y_0)=0$. Кроме того, её частная производная $F'_x(M_0)=f'(x_0)\neq 0$, и $F'_x(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая $\delta$-окрестность $B_\delta(y_0)$ точки $y_0$, в которой единственным образом определена неявная функция $x=\varphi(y)$, обращающая равенство $F(x,y)=f(x)-y=0$ в тождество: $f(\varphi(y))\equiv y$, и удовлетворяющая условию: $\left|\varphi(y)-x_0\right|<\varepsilon$ всюду в окрестности $B_\delta(y_0)$.

Это означает, что $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ - обратная функция к $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Кроме того, из теоремы 1 следует, что эта функция дифференцируема в той же окрестности, и её производная (в данном случае не частная, а полная, так как это функция одной переменной) вычисляется по формуле:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d(f^{-1})}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{(-1)}{df/dx} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}$$

(Эта формула для производной обратной функции была получена в первом семестре другим способом). Следствие доказано.