Лекция 14.

Дифференцирование функции многих переменных.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ - внутренняя точка множества X; $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$, где $\Delta x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,...,n$ – приращения аргументов, такие, что точка $x = x^0 + \Delta x \in X$.

Определение 1. *Частной производной функции* $f(x)$ *по переменной* x_k *в точке* x^0 называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_n^0)}{\Delta x_k}.$$

Часто вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(x^0)$.

Заметим, что частная производная – это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(x)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k. А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует, что если существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0 по переменной x_k.

Пример. Для функции $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ частные производные в точке (x,y,z) (при $x > 0,\ z \neq 0$) следующие:

$$f'_x = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}, \quad f'_y = \frac{1}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x, \quad f'_z = yx^{\frac{y}{z}}(-\frac{1}{z^2})\ln x.$$

Определение 2. Говорят, что *функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0, если существует такая окрестность $B_\delta(x^0)$ точки x^0, что для любого $x \in B_\delta(x^0)$ приращение $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ имеет вид:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{1}$$

где $A_1, ..., A_n$ - фиксированные числа, не зависящие от x, $\rho = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$.

Заметим, что $\bar{o}(\rho) = \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}{\rho} = \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + ... + \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_n}{\rho} \cdot \Delta x_n$.

Поскольку $\left|\dfrac{\Delta x_k}{\rho}\right| \le 1$, а величина $\dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho}$ - бесконечно мала при $\rho \to 0$, то, обозначив $\alpha_k = \dfrac{\bar{o}(\rho) \cdot \Delta x_k}{\rho^2}$, $k = 1,2,...,n$, получаем: $\bar{o}(\rho) = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n$, где $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - бесконечно малы при $\rho \to 0$, или, равносильно, при $\Delta x_1 \to 0, ...\ \Delta x_n \to 0$.

Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_n \Delta x_n = (A, \Delta x) + (\alpha, \Delta x). \tag{2}$$

Здесь в скалярных произведениях участвуют векторы

$$A = (A_1, ..., A_n),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n).$$

Наоборот, $\alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n = \rho \cdot \left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}\right) = \bar{o}(\rho),\ \rho \to 0.$

При этом выражение $A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n = (A, \Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf.

Определение 3. *Дифференциалом (первым дифференциалом) функции* $f(x)$ *в точке* x^0 *(соответствующим вектору* Δx *приращений переменных)* называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции:

$$df(x^0;\Delta x) = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n,$$

где константы $A_1,\ldots,A_n$ определены из равенства (1).

Что же представляют собой эти константы $A_1,\ldots,A_n$? Ответ на этот вопрос мы получим из следующей теоремы.

Теорема 1. (*Необходимое условие дифференцируемости функции*) . Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то в этой точке существуют её частные производные f'_{x_k} по всем переменным x_k, $k = 1,\ldots,n.$

Кроме того, $f'_{x_k}(x^0) = A_k$, $k = 1,\ldots,n$, где A_k - постоянные из формулы (1).

Доказательство. Возьмём вектор приращений $\Delta x = \Delta_k x = (0,\ldots,0,\Delta x_k,0,\ldots,0)$, то есть переместимся от точки x^0 в некоторую точку x вдоль координатной оси x_k. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в x^0, то её приращение (согласно (1)) в данном случае имеет вид: $\Delta f = A_k\Delta x_k + \bar{o}(\rho),\ \rho = |\Delta x_k|.$ Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0}\dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что теорема 1 также показывает, что константы $A_1,\ldots,A_n$ в определении 2 являются однозначно определёнными.

Следствие. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то при достаточно малом ρ приращение функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho), \tag{3}$$

где все частные производные вычислены в точке x^0.

Из теоремы 1 вытекает также, что для дифференцируемой функции можно определять дифференциал как главную, линейную относительно приращений переменных, часть приращения функции, задаваемую равенством:

$$df(x^0;\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\cdot\Delta x_n. \tag{4}$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Используя представление (3) и неравенства: $|\Delta x_k| \le \rho, k = 1,\ldots,n,$ получаем:

$$|\Delta f| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho)\right| \le$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n\right| + |\bar{o}(\rho)| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\right)\cdot\rho + |\bar{o}(\rho)|$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f = 0$. Это и означает непрерывность функции $f(x)$ в данной точке. Теорема доказана.

Геометрический смысл дифференцируемости функции
двух переменных. Касательная плоскость к поверхности.

Известно, что дифференцируемость функции одной переменной равносильна существованию (в соответствующей точке) касательной у графика этой функции. Оказывается, понятие дифференцируемости функции двух переменных имеет, как мы увидим ниже, аналогичный геометрический смысл.

Пусть задана некоторая поверхность $S: F(x,y,z) = 0.$

Определение 4. Плоскость P называется *касательной* к поверхности $S: F(x,y,z)=0$ в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$, если угол между плоскостью P и всякой секущей L, проходящей через точку M_0 и (любую) другую точку $M = M(x;y;z)$ поверхности S, стремится к нулю при $M \to M_0$.

Заметим, что, согласно этому определению, для любой кривой $l, l \subset S,$ проходящей через точку M_0, касательная к ней (если она существует) в точке M_0 обязательно лежит в плоскости P.

Лемма 1. Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, и $z_0 = f(x_0;y_0)$. Тогда у поверхности $\Gamma: f(x,y)-z=0$ (представляющей собой график данной функции) в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеется касательная плоскость, задаваемая следующим образом:

$$P = P_{M_0}^{\Gamma} : f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Доказательство. Покажем, что P удовлетворяет определению касательной плоскости. Как известно из курса аналитической геометрии, вектор $\overline{n}_P = \{f'_x(x_0;y_0); f'_y(x_0;y_0);-1\}$ является нормальным к P в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0) \in P$. Пусть $M = M(x;y;z)$ - некоторая другая точка графика Γ. Тогда

$$|\cos(\overline{M_0M},^{\wedge} \overline{n}_P)| = \frac{|(\overline{M_0M}, \overline{n}_P)|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} = \frac{|\, f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)-(z-z_0)\,|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|}.$$

Далее, воспользовавшись тем, что в силу дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$, выражение под знаком модуля в числителе есть $\overline{o}(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, а $\left\|\overline{M_0M}\right\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \geq \rho$, получаем:

$|\cos(\overline{M_0M},^{\wedge} \overline{n}_P)| = \dfrac{|\overline{o}(\rho)|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} \leq \dfrac{|\overline{o}(\rho)|}{\rho \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} \xrightarrow[M \to M_0]{} 0$. Лемма доказана.

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять функция для того, чтобы она была дифференцируемой. Оказывается, что наличие частных производных у функции в данной точке не является достаточным условием для её дифференцируемости.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$. Её обе частные производные в точке $(0;0)$ равны нулю, поскольку $f(0,y) \equiv f(x,0) \equiv 0$. При этом функция не дифференцируема в этой точке, поскольку $\Delta f = f(x,y) - f(0;0) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ - не имеет предела при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ (Убедитесь в этом самостоятельно!).

Теорема 3. (*Достаточное условие дифференцируемости функции*). Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, и все они непрерывны в самой точке x^0, то $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $f(x)$ в точке x^0:

$$\Delta f = f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) =$$

$$= [f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0)] +$$

$$+[f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0+\Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0+\Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)] +$$

$$+ \dots + [f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0, \dots x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)] =$$

(применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем)

$$= f'_{x_n}(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1},x_n^0+\theta_n\Delta x_n)\Delta x_n + f'_{x_{n-1}}(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_{n-1}^0+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1},x_n^0)\Delta x_{n-1} +$$

$$+\dots+ f'_{x_1}(x_1^0+\theta_1\Delta x_1,x_2^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0)\Delta x_1 =$$

(в силу непрерывности частных производных в точке x^0)

$$= \left(f'_{x_n}(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0)+\alpha_n\right)\Delta x_n + \left(f'_{x_{n-1}}(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0)+\alpha_{n-1}\right)\Delta x_{n-1}+\cdots$$

$$\dots + (f'_{x_1}(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0)+\alpha_1)\Delta x_1 =$$

$$= f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1+\dots+f'_{x_n}(x^0)\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+\dots+\alpha_n\Delta x_n,$$

где $\alpha_k\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,\dots\,\Delta x_n\to 0,\ k=1,\dots,n$. Это и означает дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x^0. Теорема доказана.

Пример. Функция $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ дифференцируема в точке $(0,0)$: $f(x,0)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$, следовательно, $f'_x(0,0)=0$; аналогично $f'_y(0,0)=0$. Далее,

$$\Delta f(0,0)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)+\bar{o}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\qquad \sqrt{x^2+y^2}\to 0.$$

При этом частные производные функции $f(x,y)$ разрывны в точке $(0,0)$ (проверьте!)

Дифференцируемость сложной функции.

Пусть $g(t)=f(\varphi(t))$ сложная функция, где $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$, и $x_i(t)=\varphi_i(t_1,\dots,t_k), i=1,\dots,n.$

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,\dots,t_k), i=1,\dots,n,$ дифференцируемы в точке $t^0=(t_1^0,\dots,t_k^0)$, и функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ дифференцируема в точке $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, где $x_i^0=\varphi_i(t^0), i=1,\dots,n.$ Тогда сложная функция $g(t)=f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t^0=(t_1^0,\dots,t_k^0)$.

Доказательство. Рассмотрим приращение:

$$\Delta g=g(t)-g(t^0)=f(x(t))-f(x(t^0))=f'_{x_1}\cdot\Delta x_1+\dots+f'_{x_n}\cdot\Delta x_n+\bar{o}(\|\Delta x\|)$$

В силу дифференцируемости функций $x_i=\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,\dots,t_k), i=1,\dots,n,$ приращения Δx_i имеют вид:

$$\Delta x_i=\varphi_i(t)-\varphi_i(t^0)=(\varphi_i)'_{t_1}\cdot\Delta t_1+\dots+(\varphi_i)'_{t_k}\cdot\Delta t_k+\bar{o}_i(\|\Delta t\|),\ i=1,\dots,n.$$

Подставляя эти выражения в представление для приращения Δg, получаем:

$$\Delta g=(\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1})\cdot\Delta t_1+\dots+(\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k})\cdot\Delta t_k+\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|)+\bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Далее, поскольку $\bar{o}(\|\Delta x\|)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\Delta x_i$, то получаем:

t.

Последнее равенство следует из того, что $|\Delta t_j|\le\|\Delta t\|,\ j=1,\dots,k$, и кроме того, $\alpha_i\to 0$ при $\|\Delta t\|\to 0$. (Действительно, из условия $\|\Delta t\|\to 0$ в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности, функции $x_i=\varphi_i(t)$ следует, что $\|\Delta x\|\to 0$, а следовательно, и $\alpha_i\to 0$.)

Кроме того, $\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|)=\bar{o}(\|\Delta t\|)$.

Итак, получаем:

$$\Delta g=(\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1})\cdot\Delta t_1+\dots+(\sum_{i=1}^n f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k})\cdot\Delta t_k+\bar{o}(\|\Delta t\|),$$

что и означает дифференцируемость данной сложной функции $g(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t_0 = (t_1^0,...,t_k^0)$. (Напомним здесь ещё раз, что все частные производные вычислены в заданных точках t^0, x^0 соответственно). Теорема доказана.

Замечание:

Из доказательства теоремы 4 видно, что частные производные сложной функции вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial g}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad j = 1,...,k.$$

Инвариантность формы записи (первого) дифференциала.

Из теоремы 4 вытекает также следующее важное

Утверждение 1. Первый дифференциал функции многих переменных имеет инвариантную форму записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n .$$

независимо от того, является ли эта функция простой (то есть $x_1,...,x_n$ - независимые переменные) или сложной (то есть $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k),\ i = 1,...,n.$) При этом смысл выражений dx_i различен. В первом случае, когда x_i - независимые переменные, $dx_i = \Delta x_i$ - фиксированные приращения переменных; во втором случае $dx_i = d\varphi_i(t)$ – это дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k), i = 1,...,n.$)

Доказательство.

Пусть сначала $x_k, k = 1,...,n$ - независимые переменные. Тогда

$$dx_k = (x_k)'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + (x_k)'_{x_k}\Delta x_k + \cdots + (x_k)'_{x_n}\Delta x_n = \Delta x_k.$$

Значит, дифференциал функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ от n независимых переменных имеет вид:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n .$$

Если $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k), i = 1,...,n$, то из теоремы 4 перегруппировкой слагаемых получаем:

$$\Delta g = f'_{x_1} \cdot [\sum_{j=1}^{k} (x_1)'_{t_j}) \cdot \Delta t_j] + ... + f'_{x_n} \cdot [\sum_{j=1}^{k} (x_n)'_{t_j}) \cdot \Delta t_j] + \overline{o}(\|\Delta t\|),$$

где выражения в квадратных скобках представляют собой дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k),\ i = 1,...,n$. Отсюда сразу следует нужное равенство. Утверждение доказано.

Инвариантная форма первого дифференциала позволяет установить правила его вычисления:

1) $d(c \cdot f) = c \cdot df,\ c \in \mathbb{R}$ - константа;
2) $d(f \pm g) = df \pm dg;$
3) $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg;$
4) $d(\frac{f}{g}) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2},\quad g \neq 0.$

Докажем, например, равенство 3).

Обозначим $h = f \cdot g$, тогда (в силу инвариантности формы первого дифференциала)

$$dh = h'_f df + h'_g dg = (fg)'_f df + (fg)'_g dg = g df + f dg.$$

Упражнение. Докажите равенства 1), 2) и 4).