Б-26 Условие сущ-я собств. вект. лин. опер-ра. Собственные в-ра лин оператора в компл. пр-ве.

Т 86.5. V – лин. пр-во над Р. Λ ∈ Р – собств. знач. оп-ра А ∈ L(V, V) ⇔ Λ - корень характ. многочлена.

Док-во:

Λ - собств. знач. ⇔ система из

А х = Λ х равносильно (А – ΙΛ )х = 0

х ≠ 0

Λ ∈ Р

=> (А – ΙΛ ) – вырожденная => det(А – ΙΛ ) = 0, ч.т.д.

1. det(А – ΙΛ ) = 0 – характеристическое ур-е для оп-ра А

Λi – характеристические числа оп-ра

1. ∃ собств. вект. сводится к ∃ корней характ. многочлена

В алг. замкнутом поле 𝕔 комп. чисел ∀ мн-члена n≥ 1 имеется n корней =>

=> Т 86.6 Произв лин. оп-р в n-мерном компл. пр-ве имеет:

* n собств. знач. (считая кратность их как корней мн-члена)
* хотя бы 1 собств. вект.
* ∀ инвар. подпр. имеется на нём хотя бы 1 собств. вект.

1. Нахождение собств. вект.:
2. Строим хар. многочлен оп-ра А
3. Ищем его корни, те что ∍ Р – собств. знач.
4. В-ры ядра (А – ΙΛi) - собств. вект. для Λi

(Если e1…en – базис V => ФСР для (А – ΙΛi )x = 0 и есть полный набор лин. нез. собств. вект. для ΛI в коорд. е.

Б-27 Собств. п/п. Алг. и геом. кр-ти собств. знач.

1. WΛi = {x ∍ V | Ах = Λi x} – собств. п/п оп-ра А для собств. знач. Λi

WΛi = ker(A – ΙΛi ) => соб. п/п – лин. п/п пр-ва V

WΛi сост. из 0 и всех собств. вект. для Λi; инвар. относ. А

dim WΛi = геометрич. кр-ть Λi

Т 87.1. Геометрическая кр-ть ≤ алгебраической кр-ти

Док-во:

Пусть m – алг. кр., s – геом. кр. для Λi оп-ра А ∍ L(V, V)

WΛo - инвар. => есть индуцир. оп-р A|WΛo

Пусть е1…еs – базис WΛo => м-ца индуц. опер: diag(Λo… Λo) s-ого порядка => f1(Λ) = (Λo – Λ)^s => (Λo – Λ)^s – делитель хар. многочлена f(Λ) изнач. оп-ра А, но Λo имеет кр-ть m, как корня f(Λ) => s ≤ m, ч.т.д.

Т 87.2. Сумма собств. п/п оп-ра, отвеч. различным собств. знач. - прямая сумма.

Док-во:

Пусть Λ1…Λp – попарно различные собств. знач. => для пр-в WΛ1… WΛp выполняется критерий пр. суммы (система векторов из каждого п/п по одному из каждого п/п образует лин. независ. систему), ч.т.д.

Б – 28 Опер-ры простой стр-ры. Критерии пр. стр.

1. Критерии пр. стр-ры.

А ∈ L(V, V) - опер. простой стр-ры, если ∃ базис в V из собств. вект. А.

Т 88.1. А ∈ L(V, V) – пр. стр. ⇔ ∃ базис в V , в котором А = diag(….)

Док-во:

Пусть dim V = n. A – пр. стр ⇔ ∃ n лин. нез. собств. вект. e1…en ⇔ ∃ базис e1…en, в кот. :

Аe = diag(Λ1 … Λn), ч.т.д.

Следствие из 88.1. В V размерности n, если А имеет n различных ΛI => А – пр. стр.

Т 88.2. А ∈ L(V, V) – пр. стр. ⇔ WΛ1 ⊕ … ⊕WΛp = V (dim WΛ1+…+dim WΛp = dim V)

Док-во:

Необх.)

А - пр. стр. => ∃ базис e1...еn из собств. вект. А

WΛ1 + … +WΛp ∈ V, очевидно

Каждый еi ∈ WΛi => V ∈ WΛ1 + … +WΛp

=> WΛ1 + … +WΛp = V, что так же и прямая сумма (сумма п/п, отвеч. различ. Λi), ч.т.д.

Достат.)

WΛ1 ⊕ … ⊕WΛp = V => по критерию прямой суммы :

совокупность базисов WΛI – базис V => V имеет базис из собств. вект., ч.т.д.

Т 88.3. А ∈ L(V, V) в 𝕔^n – пр. стр. ⇔ ∀ Λi: m (алг.кр.) = s (геом. кр.)

Док-во:

Пусть Λ1… Λp – различ. собств. знач. А ∈  L(V, V), mk – алг. кр., sk – геом. кр. для Λk

V – компл. пр-во => dim V = m1 + … mp

0 < dimWΛi = sk ≤ mk

=>

dimWΛ1 + ….dimWΛp = dim V (что означ., что А – пр. стр.) ⇔ sk = mk ∀ k = 1,p

1. Матричные формулировки.

x ∈ P^n\*1 – вектор-стлб, явл. собств. вект. м-цы А ∈ P^n\*n, если ∃ Λ ∈ P:

A x = Λ x (Λ - собств. знач. матрицы)

Если базис e1...еn => Ax = Λx ⇔ Ae\*xe = Λ\*xe

А ∈ P^n\*n – м-ца пр. стр, если имеет n лин. нез. собств. вект.

Т 88.4. А ∈ P^n\*n – пр. стр ⇔ подобна диагональной

Док-во:

По опред. м-цы пр. стр – если S = (s1…sn), где si – собств. вект., а Λ = diag(Λ1…Λn), то:

система из:

A\*s1 = Λ1\*s1

….

A\*sn = Λn\*sn

⇔

A(s1…sn) = (s1…sn)Λ

⇔

A\*S = S\*Λ ⇔ A = S\*Λ\*(S^-1), ч.т.д.

1. Жорданова клетка

Б-29 Треугольная форма матрицы линейного оп-ра в компл. пр-ве

Т 89.1. В т-мерном компл. пр-ве V ∀ A ∈ L(V, V) ∃ сист. из инвар. п/п L1…Ln:

L1 ∈ L2…. ∈ Ln = V, где dim Li = i

Док-во:

По индукции: верно для n = 1 (очев) и для n – 1 пусть верно.

Лемма: Лин. опер-р в 𝕔^n облад. инвар. п/п размерности n - 1

Док-во Леммы:

А в 𝕔 ^n имеет собств. знач. Λ => det(A – ΛΙ) = 0 и rg(A – ΛΙ) ≤ n – 1 => dim(im(A – ΛΙ)) ≤ n – 1 => ∃ п/п L с dim = n – 1, содерж. im(A – ΛΙ)

x ∈ L => (A – ΛΙ)x = y ∈ L => Ax = (Λx + y) ∈ L => L – инвар. относительно А, ч.т.д.

Продолжение док-ва Т 89.1.:

По Лемме A ∈ L(V, V) в 𝕔^n имеет Ln-1 – инвар. п/п с dim = n – 1 => индуц. A|Ln-1 в 𝕔^(n-1) (оно же Ln-1) и по индукции: L1 ∈ …. ∈ Ln-1, dim Li = i.

Действие индуцированного и начального оп-ра совпадает => п/п L1…Ln-1 инвар относительно и A, а Ln-1 ∈ Ln = V, ч.т.д.

Т 89.2. ∀ А ∈ L(V, V) в компл. пр-ве ∃ базис, в котором А(м-ца) имеет треуг. форму

Док-во:

По Т 89.1. => ∃ L1…Ln: L1∈…∈Ln-1∈Ln =V, dim Li = i

Построим базис e1...еn : е1 – любой базис (тут просто 1 вектор, т.к. dim = 1) L1, ek, где k > 1 – вектор, дополн. базис Lk-1 до базиса Lk.

Т.к. Li – инвар. п/п => Аe – треуг. форма, ч.т.д.

(так же заметим, на глав. диаг-ли Ae расположены собств. знач. оператора А)

Т 89.3. ∀. квадр. комплексная м-ца подобна треугольной матрице

Б-30 Нильпотентные оп-ры. Свойства, примеры.

1. A ∈ L(V, V) – нильпотентный, если ∃ q ∈ 𝕟: A^q = 0.

Наименьшее q – индекс нильп-ти (высота) оп-ра.

Для ненулевого А: q ≥ 2

Примеры:

1.В M^n (пр-во многочленов) оператор дифференц. D – нильпотентный, высоты n + 1

2.Jk(0) (жорданова клетка с Λi = 0) – нильпотентная, индекса k

Т 90.1. А ∈ L(V, V) – нильп. индекса q и x0 ∈ V: (A^q-1)x0 ≠ 0

=> x0, Ax0, … (A^q-1)x0 - лин. независимые векторы

Док-во:

α0x0 +α1Ax0 + … αq-1(A^q-1)x0 = 0

Применим к равенству последовательно A^q-1, …. A => αi = 0, i = 0,q-1 => векторы линейно независимы (тривиальная лин. комб. равна 0), ч.т.д.

Т 90.2. В комплекс. пр-ве линейный оп-р – нильпотентен ⇔ ∀ Λi = 0

Док-во:

Необх.) Λ - собств. знач. нильп. A ∈ L(V, V) индекса q и x – соотв. собств. знач., тогда:

Ax = Λx => (A^2)x = (Λ^2)x => …… => (A^q)x = (Λ^q)x => (Λ^q)x = 0, т.к. x ≠ 0 => Λ = 0, ч.т.д.

Достат.) е – базис компл. пр-ва с Ае – треуг. м-ца, где на глав. диаг. нули (то есть ∀ Λi = 0)

Тогда (Ae)^n = 0 => A^n = 0

Замечание: в вещ-вом пр-ве выполняется только необходимость.

1. Прямая сумма оп-ров:

Если V = L1⊕…⊕Lp, ∀ Li – инвар. относ. A ∈ L(V, V), то A – прямая сумма индуцированных опер-ов A|L1….A|Lp

( следует из: x ∈ V, x = x1+…..xp, xi∈ Li => Ax = Ax1 +….+ Axp = (A|L1)x1 +…. (A|Lp)xp )

Т 90.3. Вырожд. и не нильпотен. лин. оп-р A ∈ L(V, V) - прямая сумма нильп. и обратимого оп-раторов и разложение по ним – единственно

( A = !(Np ⊕ Tp) )

Док-во: см. стр. 268 Кимы

Следствие 1:

A на п/п Nq имеет ТОЛЬКО Λi = 0,

на п/п Tq НЕ имеет Λi = 0.

Следствие 2:

Для А в компл. пр-ве V с характ. многочленом f(Λ) = det(A – ΛΙ) = (-Λ)^m1 \* (Λ2 - Λ)^m2 \*….\*(Λp - Λ)^mp выполянется:

а) для A|Nq: f1(Λ) = (-Λ)^m1

для A|Tq: f2(Λ) = (Λ2 - Λ)^m2 \*…\*(Λp - Λ)^mp

и при этом б) dim Nq = m1, dim Tq = m2 +… + mp