Nachbesprechung Serie 8

3.5.2018

Aufgabe 1

Wenn in einem relaxierten Rot-Schwarz-Baum nur die Wurzel schwarz gefärbt wird, sonst aber keine Änderungen gemacht werden, ist der resultierende Baum ein Rot-Schwarz- Baum. Auch die Schwarz-Höhen ändern sich nicht.

Aufgabe 2

Im längsten Pfad ist mindestens jeder zweite Knoten schwarz. Im kürzesten Pfad ist höchstens jeder Knoten schwarz. Da beide Pfade dieselbe Menge an schwarzen Knoten enthalten müssen (Eigenschaft 5), ist der längste Pfad höchstens doppelt so lang wie der kürzeste Pfad.

Präziser: Da jeder Pfad vom Knoten x aus bh(x) schwarze Knoten enthält, hat der kürzeste Pfad von x zu einem Blatt die Länge bh(x). Der längste Pfad von x zu einem Blatt hat die Länge h(x). Zudem muss der längste Pfad bh(x) schwarze Knoten enthalten und mindestens die Hälfte der Knoten muss schwarz sein (Eigenschaft 4).

Deshalb gilt $bh(x) \geq h(x)/2$ d.h. die Länge des längsten Pfades ist $h(x) \leq 2 \cdot bh(x)$

Aufgabe 3

Wie auf Seite 277 bewiesen hat jeder Teilbaum zu einem beliebigen Knoten x mindestens $2^{bh(x)} - 1$ innere Knoten.

Die minimale Anzahl Knoten in einem Rot-Schwarz-Baum mit der Schwarz-Höhe h ist also $2^h - 1$.

Ein Pfad von der Wurzel in einem Baum mit der minimalen Anzahl Knoten hat die Länge $bh(x) = h$.

Wie in Aufgabe 2 gezeigt, hat der längste mögliche Pfad im Baum die Länge $2 \cdot bh(x) = 2 \cdot h$.

Die maximale Anzahl Knoten wird erreicht, wenn alle Pfade die maximale Länge haben. Die Höhe des Baumes ist dann 2h und die Anzahl innerer Knoten deshalb $2^{2h} - 1$.

Aufgabe 4

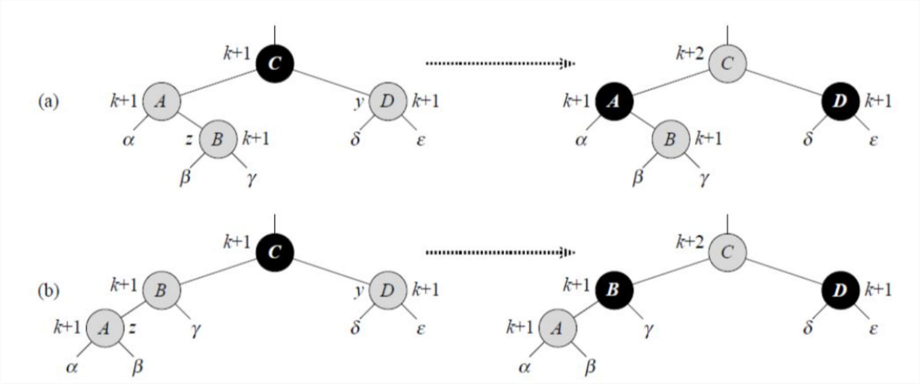
```
Right-Rotate(T, x)
y = x.links
x.links = y.rechts

if y.rechts != T.nil
        y.rechts.vater = x.vater
y.vater = x.vater
if x.vater == T.nil
        T.wurzel = y
else if x == x.vater.rechts
        x.vater.rechts = y
else
        x.vater.rechts = y
y.rechts = x
x.vater = y
```

Aufgabe 7

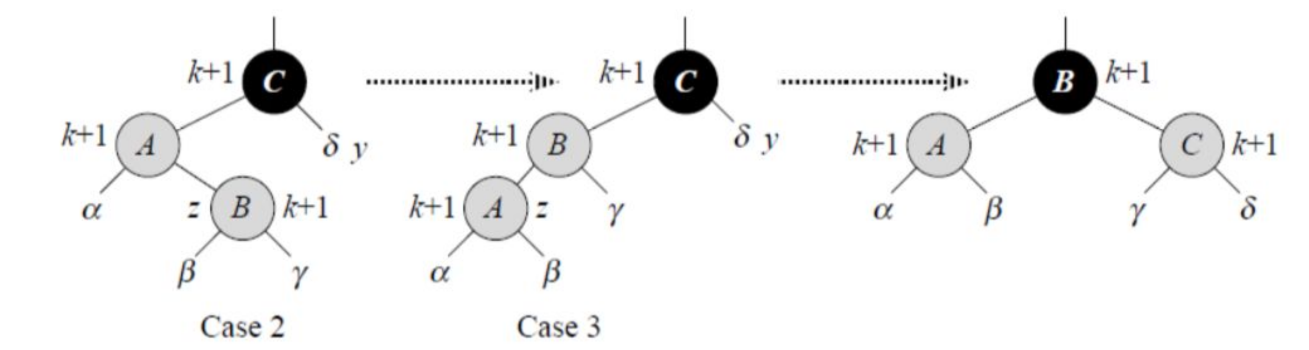
Knoten A, B, D haben Schwarz-Höhe von k+1, da ihre Teilbäume die Schwarz-Höhe k und eine schwarze Wurzel haben

- Links: C hat auch k+1, da alle roten Kinder Schwarz-Höhe k+1 haben
- Rechts: C hat Schwarz-Höhe k+2, da schwarze Kinder Schwarz-Höhe k+1 haben



Aufgabe 7

Die Knoten A, B und C haben immer die Schwarz-Höhe k + 1. Links und in der Mitte haben A und B einen Teilbaum mit der Schwarz-Höhe k und einer schwarzen Wurzel und C hat einen solchen Teilbaum und ein rotes Kind mit der Schwarz-Höhe k + 1. Rechts haben A und C Teilbäume mit der Schwarz-Höhe k und einer schwarzen Wurzel und B hat zwei rote Kinder mit der Schwarz-Höhe k + 1.



Aufgabe 8

Nein, dies gilt nicht wie folgendes Beispiel zeigt: