Prüfung 2009 I
Datenstrukturen & Algorithmen

Universität Bern

Frühling 2018

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 11

Prüfung 2009

> Aufgabe 1

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrer asymptotischen Wachstumsrate:

(a) 2^n → $\Theta(2^n)$

(b) n^3 → $\Theta(n^3)$

(c) $2^{\log_2 n}$ → $\Theta(n)$

(d) $12n + 10\log n$ → $\Theta(n)$

(e) $5n$ → $\Theta(n)$

(f) $n^2 + 100n$ → $\Theta(n^2)$

(g) $n \log n$ → $\Theta(n \log n)$

(h) $7n \log n + 2$ → $\Theta(n \log n)$

(i) 2^{16} → $\Theta(1)$

3 Punkte

1. (i)
2. (c), (d), (e)
3. (g), (h)
4. (f)
5. (b)
6. (a)

Prüfung 2009

b UNIVERSITÄT BERN

> ## Aufgabe 2

Vergleichen Sie je die beiden Zeitkomplexitäten:

(a) $f(n) = \sqrt{n}, g(n) = n \log n$

(b) $f(n) = n^4, g(n) = n^4 + 3n^2$

(c) $f(n) = n^{1/3}, g(n) = \log n$

Welche der folgenden Gleichungen gilt je: $f = O(g), f = \Omega(g), f = \Theta(g)$? **3 Punkte**

- **(a)** $f = O(g)$, d.h. $f(n) \leq c\, g(n),\ n \geq n_0$
- **(b)** $f = \Theta(g)$, d.h. $f(n) = \Omega(g(n))$ und $f(n) = O(g(n))$
- **(c)** $f = \Omega(g)$, d.h. $f(n) \geq c\, g(n),\ n \geq n_0$

Prüfung 2009

> Aufgabe 3

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das asymptotische Wachstum von $T(n)$ mit dem Mastertheorem. **1 Punkt**

b) Skizzieren Sie einen Rekursionsbaum für $T(n)$. Nehmen Sie an, dass n eine Zweierpotenz ist und geben Sie die Höhe des Baumes an. **3 Punkte**

c) Leiten Sie eine explizite Formel für $T(n)$ her, indem Sie die Kosten des Rekursionsbaumes aufsummieren. Benutzen Sie dann die Tatsache, dass

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1},$$

um die Summen aufzulösen und eine direkte Gleichung für $T(n)$ zu erhalten. **3 Punkte**

d) Beweisen Sie Ihre Gleichung für $T(n)$ durch Induktion. **1 Punkt**

Prüfung 2009

> ## Mastertheorem

Theorem 4.1: *(Mastertheorem)*

Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine Funktion und sei $T(n)$ über den nichtnegativen ganzen Zahlen durch die Rekursionsgleichung

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

definiert, wobei wir n/b so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$ gemeint ist. Dann besitzt $T(n)$ die folgenden asymptotischen Schranken:

1. Gilt $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Gilt $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Gilt $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ und $a\,f(n/b) \leq c\,f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend großen n, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$.

Prüfung 2009

Aufgabe 3a)

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das asymptotische Wachstum von $T(n)$ mit dem Mastertheorem.
1 Punkt

- Identifiziere `a = 4, b = 2, f(n) = n/4 + 2`
- → $log_b(a) = log_2(4) = 2 \Rightarrow n^{log_b(a)} = n^2$
- D.h. $f(n) = O(n^{log_b(a)-\epsilon})$ (z.B. für `ε = 0.5`)
- Schlussfolgerung: Fall 1 erfüllt, → `T(n) = Θ(n²)`

Prüfung 2009

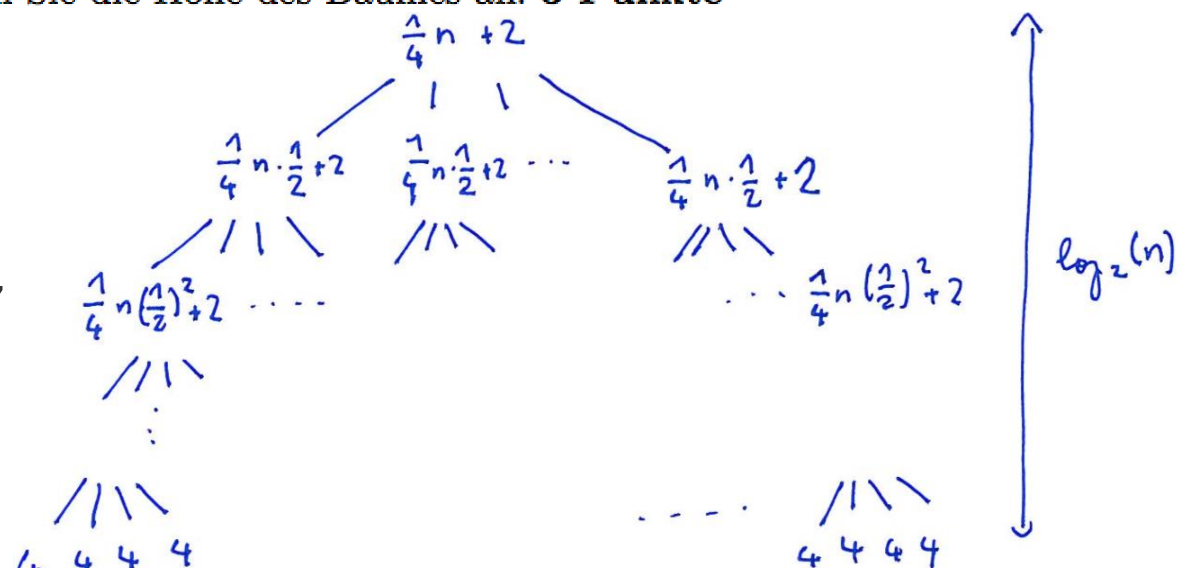
> Aufgabe 3b)

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

b) Skizzieren Sie einen Rekursionsbaum für $T(n)$. Nehmen Sie an, dass n eine Zweierpotenz ist und geben Sie die Höhe des Baumes an. **3 Punkte**

Vgl. Buch Abb 4.5/4.7



Prüfung 2009

> Aufgabe 3c)

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

c) Leiten Sie eine explizite Formel für $T(n)$ her, indem Sie die Kosten des Rekursionsbaumes aufsummieren. Benutzen Sie dann die Tatsache, dass

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1},$$

um die Summen aufzulösen und eine direkte Gleichung für $T(n)$ zu erhalten.
3 Punkte

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

> **Aufgabe 3c)**

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

> Betrachte Baum auf Höhe `i`: `4^i` Knoten mit Kosten $\frac{1}{4}n(\frac{1}{2})^i + 2$

> Betrachte Blätter: $4^{\log_2(n)}$ Stück mit Wert `4`

> Baum hat Höhe $\log_2(n)$, also ist die Summe aller Kosten:

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \underbrace{4^i(\frac{1}{4}n(\frac{2}{4})^i + 2)}_{(a)} + \underbrace{4^{log_2(n)} * 4}_{(4n^{log_2(4)} = 4n^2)}$$

Prüfung 2009

> ## Aufgabe 3c)

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \underbrace{4^i(\frac{1}{4}n(\frac{2}{4})^i + 2)}_{\text{(a)}} + \underbrace{4^{log_2(n)} * 4}_{(4n^{log_2(4)} = 4n^2)}$$

$$(a) \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i(\frac{1}{4}n(\frac{2}{4})^i + 2) = \underbrace{2\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{4}n\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \frac{4^i}{2^i}}_{(**)}$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT
BERN

> **Aufgabe 3c)**

$$(a) \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i\left(\frac{1}{4}n\left(\frac{2}{4}\right)^i + 2\right) = \underbrace{2\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{4}n\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \frac{4^i}{2^i}}_{(**)}$$

$$*)2\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i = 2 * \frac{4^{log_2(n)} - 1}{4-1} = 2 * \frac{n^2-1}{3} = \frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}$$

Prüfung 2009

> Aufgabe 3c)

$$(a)\ \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i(\frac{1}{4}n(\frac{2}{4})^i + 2) = 2\underbrace{\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 4^i}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{4}n\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \frac{4^i}{2^i}}_{(**)}$$

$$**)\frac{1}{4}n\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \frac{4^i}{2^i} = \frac{1}{4}n\frac{2^{log_2(n)}-1}{2-1} = \frac{1}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}n$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT
BERN

> ## Aufgabe 3c)

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \underbrace{4^i(\frac{1}{4}n(\frac{2}{4})^i + 2)}_{(a)} + \underbrace{4^{log_2(n)} * 4}_{(4n^{log_2(4)} = 4n^2)}$$

$$\Rightarrow T(n) = \frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}n + 4n^2$$

$$= (4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{2}{3}$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

> **Aufgabe 3d)**

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

d) Beweisen Sie Ihre Gleichung für $T(n)$ durch Induktion. **1 Punkt**

> Zu Zeigen (für 2er Potenzen von `n`):

$$4T(n/2) + n/4 + 2 \ = (4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{2}{3}$$

> **Induktionsverankerung** (`n=2`)

$$4T(n/2) + n/4 + 2 = 4T(1) + \tfrac{2}{4} + 2 = 4 * 4 + 0.5 + 2 = 18.5$$

$$(4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{2}{3} = \ (4 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}) * 2^2 - \tfrac{1}{4} * 2 - \tfrac{2}{3} = 18.5$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

- **Aufgabe 3d)**

Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + n/4 + 2 & n > 1, \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

d) Beweisen Sie Ihre Gleichung für $T(n)$ durch Induktion. **1 Punkt**

- Zu Zeigen (für 2er Potenzen von `n`):

$$4T(n/2) + n/4 + 2 \ = (4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{2}{3}$$

- **Induktionsschritt** (`n/2` → `n`)

Ind. Annahme!

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2}) + \tfrac{n}{4} \ + 2 \ = 4 * (((4 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}) * (\tfrac{n}{2})^2 - \tfrac{1}{4} * \tfrac{n}{2} - \tfrac{2}{3}) + \tfrac{n}{4} + 2$$

Prüfung 2009

> **Aufgabe 4** Geben Sie für folgende Algorithmen die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von `n` an.

> **(a)**

```
i ← 1
while i < n/4
        do
            j ← 2i
            while j < n
                do
                    j ← j + 1
            i ← i + 1
```

Anzahl Durchgänge

- äussere Schleife: $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$
- innere Schleife: $(n - 2i)$

Prüfung 2009

- **Aufgabe 4** Geben Sie für folgende Algorithmen die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von `n` an.
- **(a)**

Anzahl Durchgänge

- äussere Schleife: $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$
- innere Schleife: $(n - 2i)$

- → $$T(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1} (n - 2i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1} (n) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1} (2i)$$

$$= n * \frac{n}{4} - 2(\frac{\frac{n}{4}(\frac{n}{4} - 1)}{2}) = \frac{n^2}{4} - (\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4})$$

$$= \Theta(n^2).$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

> **Aufgabe 4** Geben Sie für folgende Algorithmen die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von `n` an.

> (b)

```
i ← n
while i > 1
    do
        j ← i
        while j < n
            do
                j ← 2j
        i ← i − 1
```

Anzahl Durchgänge

- äussere Schleife: `n`
- innere Schleife wird:
  - n/2 Durchgänge 1 mal
  - n/4 Durchgänge 1 mal
  - ...

  etc. durchlaufen.

> → $T(n) = \Theta(n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + ...) = \Theta(n)$

Prüfung 2009

> **Aufgabe 4** Geben Sie für folgende Algorithmen die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von `n` an.

> **(c)**

```
i ← 1
while i < n
        do
            j ← 0
            while j ≤ i
                do
                    j ← j + 1
            i ← 2i
```

Anzahl Durchgänge

- äussere Schleife: $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
- innere Schleife: $i = 2^k$ im k. Durchlauf

Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$

Prüfung 2009

> **Aufgabe 4** Geben Sie für folgende Algorithmen die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von `n` an.

> **(c)**

Anzahl Durchgänge

- äussere Schleife: $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
- innere Schleife: $i = 2^k$ im k. Durchlauf

> → $$T(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} 2^k$$

$$= \frac{2^{\log_2(n)+1} - 1}{1}$$

$$= \frac{2 * 2^{\log_2(n)} - 1}{1}$$

$$= \frac{2n - 1}{1} = (2n - 1)$$

$$= \Theta(n).$$

Prüfung 2009

UNIVERSITÄT BERN

> Aufgabe 11)

Fügen Sie die Schlüssel 15, 19, 14, 7 in dieser Reihenfolge in die untenstehende Hashtabelle ein. Verwenden Sie doppeltes Hashing mit den Hilfshashfunktionen $h_1(k) = (k \bmod 11)$ und $h_2(k) = 1 + (k \bmod 9)$. **3 Punkte**

11	45	24	47	04	38					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- $h(k,i) = (h_1(k) + i*h_2(k)) \bmod m \ (m = 11)$

- Schlüssel 15: $h_1(15)=(15 \bmod 11)=4$, $h_2(15)=1+(15 \bmod 9)=7$
  - h(15,0)=(4+0*7) mod 11 = 4 -> Besetzt, d.h. i → i + 1
  - h(15,1)=(4+1*7) mod 11 = 0 -> Besetzt, d.h. i → i + 1
  - h(15,2)=(4+2*7) mod 11 = 7 -> Frei, d.h. h(15) = 7
- Restliche Schlüssel analog