Serie 2, Substitutionsmethode, Beweis

Zu zeigen ist dass folgende rekursive Funktion O(n) ist.

$$T(n) = 2T(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 12) + 3n$$

Es folgen zwei Varianten:

Variante 1

Angelehnt an Kapitel 4, s 85-89, vorallem s. 87 Feinheiten zeigen wir, dass es ein c und d gibt, sodass

$$T(n) \leq cn - d$$

für alle n genug gross. Die einführung eines ds kann die Abschätzung einfacher machen und schadet im Allgemeinen nicht. Formell:

$$\exists c, d, n_0 : T(n) \leq cn - d \quad \forall\ n > n_0$$

Wie bei der Substitutionsmethode üblich beginnen wir mit dem Induktionsschritt und wählen die Konstanten c, d, n_0 so, dass der Induktionsschritt funktioniert.

Induktionsschritt: Induktionsannahme: $T(n') \leq cn' - d$ für alle $n' < n$. Zu zeigen: $T(n) \leq cn + d$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 12) + 3n && \textit{Definition} && (1)\\
&\leq 2(c(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 12) - d) + 3n && \textit{Induktionsannahme}^1 && (2)\\
&\leq 2c(\frac{n}{4} + 13) - 2d + 3n && \textit{Ausklammern, Aufrunden} && (3)\\
&= c\frac{n}{2} + 26c - 2d + 3n && \textit{klammern} && (4)\\
&= \underbrace{cn - d}_{zuzeigen} + \underbrace{(3 - \frac{c}{2})n + 26c - d}_{rest} && \textit{Ziel ausklammern} && (5)\\
&\leq cn - d && c \geq 6,\ d \geq 26c && (6)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt sehen wir, dass der Rest ≤ 0 ist, wenn zum Beispiel $d \geq 26c$ und $c \geq 6$ ist. Die wahl passender Konstanten ist recht einfach, weil man das d und das c getrennt wählen kann.

Verankerung: Wir müssen zeigen $T(n_0) < 6n_0 - 156$, dürfen aber annehmen, dass $T(n) = 1$ für alle $n < n_0$

$$T(n_0) < 2 \cdot 1 + 3n_0 < 6n_0 - 156$$

Dies gilt für $n_0 > 158/3$, also zum Beispiel $n_0 = 33$.

[1] Randbemerkung: es ist $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 12$ nicht unbedingt $< n$ sein muss, sondern nur wenn $n > 17$, aber da der Induktionsschritt nur für n gross genug gelten muss ist das egal.

Variante 2

Man kann das ganze auch ohne d machen. Wir wollen zeigen:

$$\exists c, n_0 : T(n) \leq cn \quad \forall\, n > n_0$$

Wieder, wie in der Substitutionsmethode üblich beginnen wir mit dem Induktionsschritt:
Induktionsschritt Annahme: $T(n') < cn'$ für alle $n' < n$. Zu zeigen: $T(n) < cn$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 12) + 3n && \textit{Definition} && (7)\\
&\leq 2c(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 12) + 3n && \textit{Induktionsannahme}^2 && (8)\\
&\leq 2c(\frac{n}{4} + 13) + 3n && \textit{Ausklammern, Aufrunden} && (9)\\
&= 26c + (\frac{1}{2}c + 3)n && \textit{Umklammern} && (10)\\
&= \underbrace{cn}_{zuzeigen} + \underbrace{26c - (\frac{1}{2}c - 3)n}_{rest} && \textit{Ziel ausklammern} && (11)\\
&\leq cn && c > 6 \;\; n > \frac{26c}{0.5c - 3} && (12)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wählen wir c erst so, dass der Restterm, der von n abhängig ist auf jeden Fall negativ ist. Da der Restterm für solche c immer kleiner wird, je grösser n gewählt wird, ist es ein leichtes, ein n zu wählen dass der ganze Rest negativ ist.

Im Grunde sieht man schon in (10), dass der Induktionsschritt klappt, da auf der rechten Seite im Grunde $0.5cn + zeug$ steht, und das für passende c kleiner cn ist.

Induktionsverankerung: Wir wählen $c = 8$ und $n_0 = 26c/(0.5c - 3) = 208$, und nehmen an $T(n) = 1$ für alle $n < 208$.

$$T(208) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 208 < 8 \cdot 208.$$