Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 7. Полиморфные системы типов

Денис Москвин

27.03.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Предварительные замечания (1)

В $\lambda\!\to$ невозможно повторное использование:

$$\begin{array}{l} \lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha \\ \lambda x^{\beta}.\, x : \beta \to \beta \\ \lambda x^{\gamma\to\delta}.\, x : (\gamma \to \delta) \to \gamma \to \delta \end{array}$$

— три разные функции.

Даже в версии Карри, типизируя терм

$$(\lambda y.\, y)(\lambda x.\, x)$$

имеем $x{:}\sigma$, $y{:}\sigma \to \sigma$, $\lambda x.\, x : \sigma \to \sigma$, $\lambda y.\, y : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$.

Делая одну экспансию, получим нетипизируемое

$$(\lambda f.\, f\, f)(\lambda x.\, x)$$

Предварительные замечания (2)

Идея: добавить нотацию полиморфизма

$$\begin{aligned} (\lambda x.\, x) &: \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha \\ (\lambda x\, y.\, x) &: \forall\alpha.\forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{aligned}$$

Вместо типовой переменной под квантором всеобщности можно подставить любой тип:

$$\begin{aligned} (\alpha \to \alpha)[\alpha := \gamma] &\Rightarrow (\lambda x.\, x) : \gamma \to \gamma \\ (\alpha \to \alpha)[\alpha := \gamma \to \gamma] &\Rightarrow (\lambda x.\, x) : (\gamma \to \gamma) \to \gamma \to \gamma \\ (\alpha \to \alpha)[\alpha := \gamma \to \delta \to \gamma] &\Rightarrow (\lambda x.\, x) : (\gamma \to \delta \to \gamma) \to \gamma \to \delta \to \gamma \end{aligned}$$

Это даёт нам $\lambda 2$ — ***лямбда-исчисление второго порядка***.
System F (Жан-Ив Жирар, 1972)
Полиморфное лямбда-исчисление (Джон Рейнольдс, 1974)

Типы для $\lambda 2$

$\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.
Сильный полиморфизм (System F)

$$\mathbb{T} := \mathbb{V} \mid \mathbb{T} \to \mathbb{T} \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}$$

Слабый полиморфизм (в стиле ML)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\to} &::= \mathbb{V} \mid \mathbb{T}_{\to} \to \mathbb{T}_{\to} \\ \mathbb{T}_{w} &::= \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}_{w} \mid \mathbb{T}_{\to} \end{aligned}$$

Квантор $\forall$ можно ставить только на верхнем уровне:

$$\forall \alpha_1 .\, \forall \alpha_2 .\, \cdots \forall \alpha_n .\, \sigma \;\equiv\; \forall \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n .\, \sigma$$

где σ тип из $\lambda\!\to$ (***монотип***).
Но нельзя так $\forall \alpha.\, \alpha \to (\forall \beta.\, \alpha \to \beta) \to \alpha$.

Контексты для $\lambda 2$

Типовые переменные теперь тоже делятся на связанные (квантором $\forall$) и свободные.
Свободные должны быть описаны в контексте.

Нотация ***объявления*** типовой переменной: $\alpha : *$
(что эквивалентно $\alpha \in \mathbb{V}$).
Контекст теперь — *упорядоченное* множество объявлений

$$\Gamma = \langle \alpha : *, x : \alpha \to \alpha \rangle \quad (\text{но не наоборот!})$$

$$\begin{aligned}
\alpha : *, \beta : *, f : \alpha \to \beta &\vdash f : \alpha \to \beta \\
\alpha : *, \beta : *, f : \alpha \to \beta, x : \alpha &\vdash f\, x : \beta \\
\alpha : *, \beta : *, x : \alpha &\vdash \lambda f.\, f\, x : (\alpha \to \beta) \to \beta \\
\alpha : *, x : \alpha &\vdash \lambda f.\, f\, x : \forall \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta
\end{aligned}$$

Для последнего утверждения требуется правило.

Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Карри (универсальная абстракция)

$$\boxed{\dfrac{\Gamma,\ \alpha{:}* \vdash M{:}\sigma}{\Gamma \vdash M{:}\forall\alpha.\,\sigma}}$$

Переменная α на последнем месте в контексте.
То есть она не присутствует в Γ.

$$\alpha{:}*,\ \beta{:}*,\ x{:}\alpha \ \vdash\ \lambda f.\,f\,x{:}(\alpha\to\beta)\to\beta$$

По β абстрагировать можно, а по α — нельзя!

$$\alpha{:}*,\ x{:}\alpha,\ \beta{:}* \ \vdash\ \lambda f.\,f\,x{:}(\alpha\to\beta)\to\beta$$
$$\alpha{:}*,\ x{:}\alpha \ \vdash\ \lambda f.\,f\,x{:}\forall\beta.\,(\alpha\to\beta)\to\beta$$

Выводимость типа из контекста

Расширим понятие выводимости из контекста на типы.

Тип ***выводи́м из контекста***, нотация

$$\Gamma \vdash \sigma{:}*$$

если все свободные переменные σ принадлежат Γ.

Например,

$$\begin{aligned}
\alpha{:}*, \beta{:}* &\vdash (\alpha \to \beta) \to \beta{:}* \\
\alpha{:}* &\vdash \forall\beta.\,(\alpha \to \beta) \to \beta{:}* \\
&\vdash \forall\alpha\,\beta.\,(\alpha \to \beta) \to \beta{:}*
\end{aligned}$$

$$\beta{:}* \vdash (\forall\alpha.\,\alpha \to \beta) \to \beta{:}*$$

Последнее верно только для $\lambda2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda2(\mathbb{T}_w)$.

Правило удаления $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Карри

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}}$$

$\tau \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ и $\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$.

Пример.

$$\begin{array}{lcl}
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : \forall \alpha.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : (\beta \to \gamma) \to \beta \to \beta \to \gamma \\
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : (\forall \delta.\, \delta \to \gamma) \to \beta \to (\forall \delta.\, \delta \to \gamma)
\end{array}$$

Последнее только для $\lambda 2(\mathbb{T})$.

В $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ в подстановке может участвовать лишь монотип.

Формальности $\lambda 2$: правила для контекстов

Контекст называют ***допустимым***, обозначение

$$\Gamma \vdash$$

если он построен по следующим правилам:

(начальное)	$\langle\,\rangle \vdash$	
(расширение1)	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha{:}* \vdash}$	$\alpha \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$
(расширение2)	$\dfrac{\Gamma \vdash \sigma{:}*}{\Gamma, x{:}\sigma \vdash}$	$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$

Формальности $\lambda 2$: образование типов

(начальное)	$\dfrac{\alpha{:}{*} \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha : *}$
(образование $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \sigma{:}{*} \qquad \Gamma \vdash \tau{:}{*}}{\Gamma \vdash \sigma{\to}\tau : *}$
(образование $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha{:}{*} \vdash \sigma{:}{*}}{\Gamma \vdash \forall\alpha.\, \sigma : *}$

Эти правила описывают $\lambda 2(\mathbb{T})$, для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ напишите самостоятельно (совет: введите $*_w$ и $*_\to$).

Формальности $\lambda 2$ а ля Карри: правила типизации

(начальное) $$\frac{x{:}\sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x{:}\sigma}$$

(удаление $\to$) $$\frac{\Gamma \vdash M{:}\sigma{\to}\tau \qquad \Gamma \vdash N{:}\sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$$

(введение $\to$) $$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma{\to}\tau}$$

$\sigma \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$

$\sigma \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$

(удаление $\forall$) $$\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\,\sigma \qquad \Gamma \vdash \tau{:}*}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$\tau \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$

$\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$

(введение $\forall$) $$\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M{:}\sigma}{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\,\sigma}$$

Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ подстановка типа и абстракция монотипны.

Типизируем самоприменение $f\,f$

Пусть $\Gamma \equiv f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha,\ \beta{:}*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha \qquad \Gamma\vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma\vdash f{:}(\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}(\text{уд}\forall) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha \qquad \Gamma\vdash\beta:*}{\Gamma\vdash f{:}\beta\to\beta}(\text{уд}\forall)}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha,\ \beta:*\vdash (f\,f):\beta\to\beta}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha\vdash(f\,f):\forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash\lambda f.\,(f\,f):(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta\to\beta)}(\text{вв}\to)}(\text{вв}\forall)}(\text{уд}\to)$$

Последнее верно только для $\lambda2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda2(\mathbb{T}_w)$.

Распространено обозначение $\top\equiv\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда

- в $\lambda2(\mathbb{T}_w)$ имеем $f{:}\top\vdash(f\,f){:}\top$;
- в $\lambda2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash\lambda f.\,(f\,f){:}\top\to\top$.

Типизируем самоприменение $f\,f$ по-другому

Пусть $\Gamma \equiv f{:}\forall\alpha.\,\alpha, \beta{:}*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta\to\beta}(\text{уд}\forall) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta}(\text{уд}\forall)}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha, \beta : * \vdash (f\,f) : \beta}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha \vdash (f\,f) : \forall\beta.\,\beta}{\vdash \lambda f.\,(f\,f) : (\forall\alpha.\,\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta)}(\text{вв}\to)}(\text{вв}\forall)}(\text{уд}\to)$$

Последнее опять только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.

Распространено обозначение $\bot \equiv \forall\alpha.\,\alpha$, тогда

- в $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ имеем $f{:}\bot \vdash (f\,f){:}\bot$;
- в $\lambda 2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash \lambda f.\,(f\,f){:}\bot\to\bot$.

Проблемы разрешимости для $\lambda 2$ по Карри

Задача проверки типа (ЗПТ) $\vdash M : \sigma ?$;
Задача синтеза типа (ЗСТ) $\vdash M : ?$;
Задача обитаемости типа (ЗОТ) $\vdash ? : \sigma$.

Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и разрешимы: алгоритм РТ легко расширяется на *схемы типов*.
ЗОТ тоже разрешима.

Для сильной системы $\lambda 2(\mathbb{T})$ ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и неразрешимы. (Joe Wells, 1993)
ЗОТ тоже неразрешима.

Практический вопрос: насколько можно расширить слабую систему, чтобы сохранить возможность синтеза типа?

Let-полиморфизм

Можно расширить $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ правилом:

$$\text{(правило let)} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = M \text{ in } N) : \tau} \qquad \begin{array}{c} \tau \in \mathbb{T}_\to \\ \sigma \in \mathbb{T}_w \end{array}$$

Фактически это способ делать полиморфные (по σ) редексы:

$$(\lambda x.\, N)\, M$$

Но голые полиморфные (по σ) абстракции $(\lambda x.\, N) : \sigma \to \tau$ по-прежнему недопустимы!
Теперь можно типизировать let $f = \lambda x.\, x$ in $f\, f$. (д.з.)
ЗСТ по-прежнему разрешима: алгоритм PT требует лишь небольшой модификации.

Ранжирование типов

Определим множество типов $\mathbb{T}(k)$ ранга k индуктивно:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(0) &::= \mathbb{V} \mid \mathbb{T}(0) \to \mathbb{T}(0) \ (\equiv \ \mathbb{T}_{\to}) \\ \mathbb{T}(k+1) &::= \mathbb{T}(k) \mid \mathbb{T}(k) \to \mathbb{T}(k+1) \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}(k+1)\end{aligned}$$

Например, типы первого ранга

$$\begin{aligned}&\forall\alpha.\, \alpha \to \alpha \\ &\forall\alpha.\, \alpha \to (\forall\beta.\, \alpha \to \beta)\end{aligned}$$

Тип второго ранга $(\forall\alpha.\, \alpha \to \alpha) \to (\forall\beta.\, \beta)$

Тип третьего ранга $((\forall\alpha.\, \alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma$

Разрешимость для $\lambda 2(\mathbb{T}(\mathrm{k}))$ в стиле Карри

Система $\lambda 2(\mathbb{T}(1))$ это фактически $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$; ЗСТ для неё разрешима.

Для системы $\lambda 2(\mathbb{T}(2))$ ЗСТ разрешима, алгоритм описан в 1999 году (Kfoury and Wells, 1999).

Для систем более высокого ранга ЗСТ неразрешима.

Однако при наличии некоторых «подсказок» (указаний типов в определенных видах термов) синтез типа оказывается возможным.

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: абстракция

В системах Чёрча терм содержит информацию о типах.

$$\begin{aligned} \alpha{:}*, \beta{:}*, x{:}\alpha, y{:}\beta &\vdash x{:}\alpha \\ \alpha{:}*, \beta{:}*, x{:}\alpha &\vdash (\lambda y{:}\beta.\, x) : \beta \to \alpha \\ \alpha{:}*, \beta{:}* &\vdash (\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha \end{aligned}$$

Хотим универсально абстрагироваться по β. Как это отразить в терме?

$$\begin{aligned} \alpha{:}* &\vdash (\lambda\beta{:}*.\, \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ &\vdash (\lambda\alpha{:}*.\, \lambda\beta{:}*.\, \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \forall\alpha.\, \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{aligned}$$

Часто вместо $\lambda\alpha{:}*$ пишут $\Lambda\alpha{:}*$ или просто $\Lambda\alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha{:}* &\vdash (\Lambda\beta.\, \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ &\vdash (\Lambda\alpha\,\beta.\, \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \forall\alpha\,\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{aligned}$$

Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча (универсальная абстракция)

$$\boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.\, M : \forall\alpha.\, \sigma}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda\alpha{:}*.\, M : \forall\alpha.\, \sigma}}$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\mathbf{K} \equiv \Lambda\alpha\,\beta.\, \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x, \qquad \vdash \mathbf{K} : \forall\alpha\,\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha$$

Аналогично для $\mathbf{I}$

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}* & \vdash & \lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha \\ & \vdash & \Lambda\alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x : \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha \end{array}$$

$$\mathbf{I} \equiv \Lambda\alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x, \quad \vdash \mathbf{I} : \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha$$

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: применение терма к типу

Удаление $\forall$ тоже должно отражаться на терме.

$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\alpha.\,\forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha$$
$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha[\alpha:=\gamma]}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,\gamma : \forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha[\alpha:=\gamma]$$

На уровне типов это делается через подстановку типа, а на уровне термов — через ***универсальное применение***.

Универсальное применение порождает новый способ редукции $(\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma \to_{\beta} M[\alpha:=\sigma]$

$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\beta.\,\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\beta.\,\gamma\to\beta\to\gamma$$
$$\gamma{:}*, \delta{:}* \;\vdash\; (\Lambda\beta.\,\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,(\delta\to\delta) : \gamma\to\beta\to\gamma[\beta:=\delta\to\delta]$$
$$\gamma{:}*, \delta{:}* \;\vdash\; (\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\delta\to\delta}.\,x) : \gamma\to(\delta\to\delta)\to\gamma$$

Правило удаления $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча (универсальная аппликация)

$$\boxed{\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\, \color{red}{\tau} : \sigma[\alpha := \tau]}}$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\vdash \mathbf{K} : \forall \alpha\, \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \qquad \gamma{:}*, \delta{:}* \vdash \mathbf{K}\, \gamma\, (\delta \to \delta) : \gamma \to (\delta \to \delta) \to \gamma$$

Аналогично для $\mathbf{I} \equiv \Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x$ имели $\vdash \mathbf{I} : \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$ и

$$\gamma{:}* \;\vdash\; \mathbf{I}\, \gamma : \gamma \to \gamma$$

$$\mathbf{I}\, \gamma \equiv (\Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x)\, \gamma \;\to_{\beta}\; \lambda x^{\gamma}.\, x$$

Формальности $\lambda 2$ а ля Чёрч: предтермы и редукция

Предтермы:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} = V \mid \Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda_{\mathbb{T}} \mid \Lambda_{\mathbb{T}}\mathbb{T} \mid \lambda V^{\mathbb{T}}.\,\Lambda_{\mathbb{T}} \mid \Lambda\mathbb{V}.\,\Lambda_{\mathbb{T}}$$

Редукция:

$$\begin{aligned} (\lambda x^{\sigma}.\,M)\,N &\to_{\beta} M[x := N], \\ (\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma &\to_{\beta} M[\alpha := \sigma] \end{aligned}$$

Во втором виде редукций подстановка происходит в типы. «Базовая» структура терма не меняется.

Формальности $\lambda 2$ а ля Чёрч: правила типизации

(начальное)	$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$
(удаление $\to$)	$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$$
(введение $\to$)	$$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.\, M : \sigma \to \tau}$$
(удаление $\forall$)	$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\,\sigma \quad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\,\tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$
(введение $\forall$)	$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.\, M : \forall\alpha.\,\sigma}$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

Типизируем самоприменение $f\,f$ в $\lambda 2$ а ля Чёрч

Напомним, что $\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда для $\Gamma \equiv f{:}\top,\beta{:}*$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash f:\top \qquad \Gamma\vdash \beta\to\beta:*}{\Gamma\vdash f\,(\beta\to\beta) : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}(\text{уд}\forall) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash f:\top \qquad \Gamma\vdash\beta:*}{\Gamma\vdash f\,\beta:\beta\to\beta}(\text{уд}\forall)}{f{:}\top,\beta{:}*\vdash f\,(\beta\to\beta)\,(f\,\beta):\beta\to\beta}(\text{уд}\to)}{f{:}\top\vdash \Lambda\beta.\,f\,(\beta\to\beta)\,(f\,\beta):\forall\beta.\,\beta\to\beta}(\text{вв}\forall)}{\vdash \lambda f^{\top}.\,\Lambda\beta.\,f\,(\beta\to\beta)\,(f\,\beta):\top\to\top}(\text{вв}\to)$$

Типизируем самоприменение $f\,f$ в $\lambda 2$ а ля Чёрч по-другому

Совсем по-другому ($\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$):

$$\dfrac{\dfrac{f{:}\top \vdash f{:}\top \qquad \vdash \top{:}*}{f{:}\top \vdash \color{red}{f\,\top} : \top\to\top}(\text{уд}\forall) \qquad f{:}\top \vdash f{:}\top}{\dfrac{f{:}\top \vdash f\,\top\,f : \top}{\vdash \lambda f^{\top}.\,f\,\top\,f \;:\top\to\top}(\text{вв}\to)}(\text{уд}\to)$$

Красным выделено ***импредикативное*** применение:

$$f \;:\; \forall\alpha.\,\color{blue}{\alpha}\to\color{green}{\alpha}$$

$$f\,(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha) \;:\; \color{blue}{(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)}\to\color{green}{(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)}$$

Связь между системами $\lambda 2$ Карри и Чёрча

Можно задать стирающее отображение $|\cdot| : \Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$
\begin{aligned}
|x| &\equiv x \\
|M\,N| &\equiv |M|\,|N| \\
|M\,\sigma| &\equiv |M| \\
|\lambda x^{\sigma}.\,M| &\equiv \lambda x.\,|M| \\
|\Lambda \alpha.\,M| &\equiv |M|
\end{aligned}
$$

Все термы из версии Чёрча $\lambda 2$ «проектируются» в термы в версии Карри:

- $M \in \Lambda_{\mathbb{T}} \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{Ч}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\text{К}} |M| : \sigma$

Термы из версии Карри $\lambda 2$ могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

- $M \in \Lambda \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{К}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \exists N \in \Lambda_{\mathbb{T}} [\Gamma \vdash_{\text{Ч}} N : \sigma \;\wedge\; |N| \equiv M]$

Проблемы разрешимости для $\lambda 2$ а ля Чёрч

ЗПТ $\vdash M : \sigma ?$ **и ЗСТ** $\vdash M : ?$**.**
Для $\lambda 2$ а ля Чёрч — разрешимы, в отличие от $\lambda 2$ а ля Карри.

ЗОТ $\vdash ? : \sigma$**.**
Неразрешима, поскольку соответствует *доказуемости* в $\mathrm{PROP2}$, для которой факт неразрешимости известен.

Свойства $\lambda 2$

Лемма об инверсии (генерации) должна быть расширена

- $\Gamma \vdash (\Lambda\alpha.\, M) : \rho \;\Rightarrow\; \exists\sigma\; [\Gamma, \alpha{:}{*} \vdash M : \sigma \;\wedge\; \rho \equiv \forall\alpha.\, \sigma]$.

Лемма о типизируемости подтерма сохраняется.

В леммы о контекстах добавляются свободные типовые переменные.

Леммы подстановки типа и терма сохраняются.

Свойства $\lambda 2$ (2)

- Единственность типа (для $\lambda 2$ в стиле Чёрча):

Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$. Тогда $\sigma \equiv \tau$.

- Редукция субъекта

Пусть $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$.

- Сильная нормализуемость

Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$. Тогда любая последовательность β-редукций приводит к нормальной форме за конечное число шагов.

Интерпретация $\forall$

Доказательство SN для $\lambda\to$ базировалось на интерпретации

$$\begin{aligned} [\![\alpha]\!] &:= \mathsf{SN} \\ [\![\sigma\to\tau]\!] &:= \{M \mid \forall N \in [\![\sigma]\!]\ (M\,N) \in [\![\tau]\!]\} \end{aligned}$$

Как задать $[\![\forall\alpha.\,\sigma]\!]$?

$$[\![\forall\alpha.\,\sigma]\!] := \prod_{x\in\mathcal{U}} [\![\sigma]\!]_{\alpha:=x}??$$

- $\prod\limits_{x\in\mathcal{U}}$ — слишком большое; идея Жирара:

$$[\![\forall\alpha.\,\sigma]\!] := \bigcap_{x\in\mathcal{U}} [\![\sigma]\!]_{\alpha:=x}$$

- $\mathcal{U}$ — класс насыщенных множеств (SAT).

[LCWT 4.3, ITT 5.6]

Параметричность

Интерпретация $[[\forall\alpha.\,\sigma]] := \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{U}} [[\sigma]]_{\alpha:=x}$ соответствует той идее, что терм типа $\forall\alpha.\,\sigma$ *параметричен* по α.

Такой терм действует «не заглядывая в тип». Полиморфный терм ведёт себя единообразно (по типу).

Например, замкнутый терм с типом $\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$ единственен:

$$\mathbf{I} \equiv \Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x$$

Замкнутых термов с типом $\perp \equiv \forall\alpha.\,\alpha$ не существует.

Домашнее задание

Постройте для $\lambda 2(\mathbb{T})$ в стиле Карри дерево вывода для

- $\vdash \mathbf{K} : (\forall\alpha.\,\alpha) \to \sigma \to \tau$

Типизируйте $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ (с правилом let) в стиле Карри и постройте дерево вывода

- $\text{let } f = \lambda x.\, x \text{ in } f\, f$

Найдите тип в $\lambda 2(\mathbb{T})$ (в стиле Карри и Чёрча)

- $\lambda x.\, x\, x\, x$
- $\lambda x.\, (x\, x)\, (x\, x)$

«Поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча (двумя способами, импредикативным и нет), сохранив типизацию

- $\lambda f.\, f\, f : \bot \to \bot$

Литература (1)

TAPL гл. 23

Benjamin C. Pierce, Types and Programming Languages, MIT Press, 2002

`http://www.cis.upenn.edu/~bcpierce/tapl`

ITT гл. 5

Herman Geuvers, Introduction to Type Theory
Alfa Lernet Summer school 2008, Uruguay

`http://www.cs.ru.nl/H.Geuvers/Uruguay2008SummerSchool.html`

Литература (2)

LCWT гл. 4, 5
Henk Barendregt, Lambda calculi with types,
Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993