Проблемы населенности типов и их разрешимость: система $\lambda \rightarrow$

Денис Николаевич Москвин

25.11.2017

План лекции

План лекции

1. Просто типизированное λ-исчисление
2. Вычислительный аспект
3. Обитаемость типов
4. Обитаемость типов: сходимость алгоритма

Типы просто типизированной системы

Определение

Множество ***типов*** $\mathbb{T}$ системы $\lambda_{\to}$ строится из типовых переменных переменных из $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$:

$$\alpha \in \mathbb{V} \Rightarrow \quad \alpha \in \mathbb{T} \qquad \text{(переменные типа)}$$

$$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \;\; \Rightarrow \;\; (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T} \quad \text{(типы пространства функций)}$$

- В абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \;\; ::= \;\; \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

- Соглашения: α, β, γ используем для типовых переменных, а σ, τ, ρ — для произвольных типов. Скобки ассоциативны вправо.

Предтермы системы $\lambda_{\to}$ а ля Карри

Определение

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) Λ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \quad ::= \quad V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$$

- Имеются стандартные соглашения о скобках, ассоциативности и регистре.

Предтермы просто типизированной системы а ля Чёрч

Определение

Множество ***предтермов*** $\Lambda_{\mathbb{T}}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x^{\sigma}.\, M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \quad ::= \quad V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\,\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V^{\mathbb{T}}.\, \Lambda_{\mathbb{T}})$$

- Те же стандартные соглашения о скобках, ассоциативности и регистре.

Утверждение о типизации

Определение

Утверждение (о типизации) в $\lambda_{\to}$ «а ля Карри» имеет вид

$$M : \tau$$

где $M \in \Lambda$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Тип τ иногда называют ***предикатом***, а терм M — ***субъектом*** утверждения.

Для $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить Λ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$.

Примеры утверждений о типизации

Система в стиле Карри	Система в стиле Чёрча
$(\lambda x.\, x) : \alpha \to \alpha$	$(\lambda x^{\alpha}.\, x) : \alpha \to \alpha$
$(\lambda x.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$(\lambda x^{\alpha \to \beta}.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$
$(\lambda x\, y.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$	$(\lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$

Контексты

Определение

Объявление — это утверждение (о типизации) с термовой переменной в качестве субъекта.

Определение

Контекст — это множество объявлений с *различными* переменными в качестве субъекта:

$$\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n\}$$

- Контексты можно ***расширять***, добавляя объявление *новой* переменной:

$$\Gamma = x : \alpha, y : \beta, f : \alpha \to \beta, g : (\alpha \to \beta) \to \gamma$$

$$\Delta = \Gamma, z : \alpha \to \gamma = x : \alpha, y : \beta, f : \alpha \to \beta, g : (\alpha \to \beta) \to \gamma, z : \alpha \to \gamma$$

Типизация в $\lambda_{\to}$

Определение

Утверждение типизации $M : \sigma$ называют ***выводимым*** в контексте Γ (нотация $\Gamma \vdash M : \sigma$), если его вывод может быть осуществлен по следующим правилам:

(аксиома)	$\Gamma \vdash x : \sigma,$	если $x : \sigma \in \Gamma$
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$	
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma} . M : \sigma \to \tau}$	

Правила даны для системы Черча, для Карри достаточно убрать атрибуцию переменной в лямбда-абстракции.

Типизация в $\lambda_{\to}$: пример

Вывод типа для $\lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x$

$$\dfrac{\dfrac{x\!:\!\alpha, y\!:\!\beta \vdash x\!:\!\alpha}{x\!:\!\alpha \vdash \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \alpha}}{\vdash \lambda x^{\alpha}.\, \lambda y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}$$

Если α и β рассматривать как метапеременные, то можно говорить о *схеме вывода*.

Лемма подстановки типа

$\Gamma \vdash M\!:\!\sigma \;\Rightarrow\; [\alpha := \tau]\Gamma \vdash M\!:\![\alpha := \tau]\sigma$. ($\lambda_{\to}$ а ля Карри)

$\Gamma \vdash M\!:\!\sigma \;\Rightarrow\; [\alpha := \tau]\Gamma \vdash [\alpha := \tau]M\!:\![\alpha := \tau]\sigma$. ($\lambda_{\to}$ а ля Чёрч)

Проблемы разрешимости

- Есть ли алгоритм, который позволяют решить задачу?

$\Gamma \vdash M : \sigma ?$	Задача проверки типа Type Checking Problem	ЗПТ TCP
$? \vdash M : ?$	Задача синтеза типа Type Synthesis (or Assgnment) Problem	ЗСТ TSP, TAP
$\Gamma \vdash ? : \sigma$	Задача обитаемости типа Type Inhabitation Problem	ЗОТ TIP

- Для $\lambda_{\to}$ (и в стиле Чёрча, и в стиле Карри) все эти задачи разрешимы.
- ЗОТ может быть обобщена до задачи перечисления всех (нормальных) обитателей данного типа.

План лекции

Определение

Терм вида $(\lambda x.\, M)\, N$ называется β-***редексом***.

Определение

Терм $M[x := N]$ называется ***сокращением*** редекса $(\lambda x.\, M)\, N$.

Пример

Терм $\mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I})$ содержит два редекса

$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p))$$
$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p))$$

Может ли сокращение увеличить число редексов?

Редукция за один шаг $\to_\beta$

Определение

Бинарное отношение β-***редукции за один шаг*** $\to_\beta$ над Λ:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\, M)\, N & \to_\beta & M[x := N] \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & Z\, M \to_\beta Z\, N \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & M\, Z \to_\beta N\, Z \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & \lambda x.\, M \to_\beta \lambda x.\, N
\end{array}
$$

Пример: редуцируем терм $\mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I})$

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p)) & \to_\beta & (\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p) \ \to_\beta \ \lambda z\, p.\, p \\
(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p)) & \to_\beta & (\lambda x.\, x)\, (\lambda z\, p.\, p) \ \to_\beta \ \lambda z\, p.\, p
\end{array}
$$

Многошаговая редукция $\twoheadrightarrow_\beta$

Определение

Бинарное отношение β-***редукции*** $\twoheadrightarrow_\beta$ над Λ (индуктивно):

$$
\begin{array}{ll}
(a) & M \twoheadrightarrow_\beta M \\
(b) & M \to_\beta N \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta N \\
(c) & M \twoheadrightarrow_\beta N, N \twoheadrightarrow_\beta L \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta L
\end{array}
$$

Отношение $\twoheadrightarrow_\beta$ является транзитивным рефлексивным замыканием $\to_\beta$.

Примеры

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) \\
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p) \\
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & \lambda z\, p.\, p
\end{array}
$$

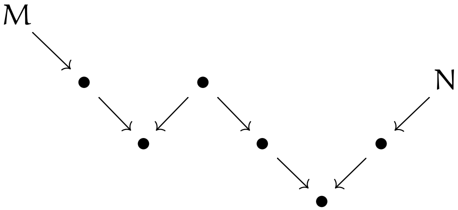
Отношение конвертируемости $=_\beta$

Определение

Бинарное отношение $=_\beta$ над Λ (индуктивно):

$$
\begin{array}{ll}
(a) & M \twoheadrightarrow_\beta N \;\Rightarrow\; M =_\beta N \\
(b) & M =_\beta N \;\Rightarrow\; N =_\beta M \\
(c) & M =_\beta N, N =_\beta L \;\Rightarrow\; M =_\beta L
\end{array}
$$

Интуитивно: два терма M и N связаны отношением $=_\beta$, если есть связывающая их цепочка $\rightarrow_\beta$-стрелок:



β-нормальная форма

Определение

λ-терм M находится в β-***нормальной форме*** (β-NF), если в нем нет подтермов, являющихся β-редексами.

Определение

λ-терм M имеет β-нормальную форму, если для некоторого N выполняется $M =_\beta N$ и N находится в β-NF.

Примеры

- Терм $\lambda x\, y.\, x\, (\lambda z.\, z\, x)\, y$ находится в β-нормальной форме.
- Терм $(\lambda x.\, x\, x)\, y$ не находится в β-нормальной форме, но имеет в качестве β-nf терм $y\, y$.

η-редукция и βη-нормальная форма

Определение

Бинарное отношение η-***редукции за один шаг*** $\to_\eta$ над Λ строится на основе правила

$$\lambda x.\, M\, x \quad \to_\eta \quad M$$

аналогично β-редукции. Предполагается, что $x \notin FV(M)$.

Определение

λ-терм M находится в η-***нормальной форме*** (η-NF), если в нем нет подтермов, являющихся η-редексами.

Пример

- $\lambda s\, z.\, s\, z \to_\eta \lambda s.\, s.$
- $\lambda f\, x\, y.\, f\, x\, y \to_\eta \ldots$

Аппликативная структура бестипового терма

Теорема

Лямбда-терм может иметь одну из двух форм:

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{x}.\, y\, \overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, y\, N_1 \ldots N_k \\ \lambda \overrightarrow{x}.\, (\lambda z.\, P)\, Q\, \overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, (\lambda z.\, P)\, Q\, N_1 \ldots N_k \end{aligned}$$

Здесь $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, а переменная y может совпадать с одной из x_i, и *обязана* совпадать, если терм замкнут.

Определение

Первая форма называется ***головной нормальной формой*** (HNF). Переменная y называется ***головной переменной***, а редекс $(\lambda z.\, P)\, Q$ — ***головным редексом***.

Слабая и сильная нормализация для терма

Определение

Терм называют ***слабо (weak) нормализуемым*** (WN), если существует последовательность редукций, приводящих его к нормальной форме.

Определение

Терм называют ***сильно (strong) нормализуемым*** (SN), если любая последовательность редукций, приводит его к нормальной форме.

Примеры

Терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{K}$ — сильно нормализуем,
терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$ — слабо нормализуем,
терм $\mathbf{\Omega}$ — не нормализуем.

Слабая и сильная нормализация для системы типов

Определение

Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы слабо нормализуемы.

Определение

Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы сильно нормализуемы.

Системы $\lambda_{\rightarrow}$ (карриевская и черчевская) являются сильно нормализуемыми.

Редукция субъекта в $\lambda_{\to}$

Теорема о редукции субъекта

Пусть $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$.

- Тип терма сохраняется при β-редукциях.
- Если обернуть стрелку в β-правиле, то получится обратная к редукции процедура, β-***экспансия***.
- В $\lambda_{\to}$ экспансия не всегда сохраняет тип.

Примеры

$\mathbf{K\,I\,\Omega} \twoheadrightarrow_{\beta} \mathbf{I}$,
$\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{I} \to_{\beta} \mathbf{I\,I}$.

Типизация нормальной формы

Структура типизированной β-NF

Если M находится в β-NF, и $\Gamma \vdash M : \sigma$, то он (с точностью до α-эквивалентности) имеет вид

$$\lambda x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} . y^{\tau_1 \to \dots \to \tau_k \to \rho} N_1^{\tau_1} \dots N_k^{\tau_k}$$

При этом $\sigma = \sigma_1 \to \dots \to \sigma_n \to \rho$.

- Здесь $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, а переменная y может совпадать с одной из x_i, и *обязана* совпадать, если терм замкнут.
- При этом каждый N_i находится в β-NF и

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash N_i : \tau_i$$

- Тип ρ не обязан быть переменной (то есть может быть стрелкой).

План лекции

Булева модель для типов

- Переменную типа проинтерпретируем как пробегающую значения из $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, а стрелку $x \to y$ как $1 - x + xy$.
- ***Булевой оценкой*** (valuation) назовем функцию $\rho : \mathbb{V} \to \mathbb{B}$.
- ***Интерпретация*** $[[\sigma]]_\rho$ типа σ на оценке ρ:

$$\begin{array}{lcl} [[\alpha]]_\rho & = & \rho(\alpha); \\ [[\sigma \to \tau]]_\rho & = & [[\sigma]]_\rho \to [[\tau]]_\rho. \end{array}$$

- Оценка ρ ***удовлетворяет*** типу σ ($\rho \models \sigma$), если $[[\sigma]]_\rho = 1$.
- Оценка ρ ***удовлетворяет*** контексту Γ ($\rho \models \Gamma$), если она удовлетворяет всем типам этого контекста.
- В частности, пустому контексту удовлетворяет любая оценка.

Булева модель и населенность

Утверждение

Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$. Тогда $\forall \rho.\ \rho \models \Gamma \Rightarrow \rho \models \sigma$.

Доказательство: индукция по дереву вывода типа. ■

Следствие 1

Если σ населен (то есть существует M, такой что $\vdash M : \sigma$), то σ — тавтология классической логики.

Обратное неверно (например, закон Пирса). Но, если ограничится системой только с одной переменной (α), то это утверждение станет верным. (Вывести из теоремы Статмана.)

Следствие 2

Никакой тип-переменная не населен.

Система с одной типовой переменной

Теорема [Statman 1982]

Если $\mathbb{V} = \{\alpha\}$ и $\sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$ $(n \geqslant 1)$, то

$$\sigma \text{ населен} \quad \Leftrightarrow \quad \exists i.\, \sigma_i \text{ не населен.}$$

$(\Rightarrow)$. Если все аргументы населены, передадим в качестве аргументов их обитателей и тем самым населим α.

$(\Leftarrow)$. Индукция по структуре σ. Пусть σ_i не населен.

(1): $\sigma_i = \alpha$.

$$\begin{array}{l} x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \;\vdash\; x_i : \alpha \\ \vdash\; \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.\, x_i : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha \end{array}$$

(2): $\sigma_i = \tau_1 \to \ldots \to \tau_k \to \alpha$. По (контропозиции) IH для σ_i все τ_j населены: существуют N_j, такие что $\vdash N_j : \tau_j$.

$$\begin{array}{l} x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \;\vdash\; x_i : \tau_1 \to \ldots \to \tau_k \to \alpha \\ x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \;\vdash\; x_i\, N_1 \ldots N_k : \alpha \\ \vdash\; \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.\, x_i\, N_1 \ldots N_k : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha \end{array}$$

■

Система с одной типовой переменной: подсчет обитателей

Теорема [Ben-Yelles 1979]

Если $\mathbb{V} = \{\alpha\}$ и $\sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$ $(n \geqslant 1)$, то

- если все $\sigma_i = \alpha$, то число нормальных обитателей σ равно n;
- если хотя бы один σ_i стрелочный, число нормальных обитателей 0 или ∞.

Нормальные обитатели типов

- Какое количество разных нормальных обитателей есть у типа (с точностью до α-эквивалентности)?
- Для $\alpha \to \alpha$ такой обитатель один: $\lambda x^{\alpha}.\, x$.
- А для $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$?

Нормальные обитатели типов

- Какое количество разных нормальных обитателей есть у типа (с точностью до α-эквивалентности)?
- Для $\alpha \to \alpha$ такой обитатель один: $\lambda x^{\alpha}.\, x$.
- А для $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$? Два: $\lambda f^{\alpha\to\beta}.\, f$ и $\lambda f^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\, x$
- Они η-эквивалентны, второй получается из первого η-экспансией.

Определение

Замкнутый терм $M : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$ находится в ***длинной нормальной форме*** (LNF), если он имеет вид $\lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.\, x_i\, M_1 \ldots M_k$ и все M_j тоже находятся в LNF.

Здесь $M_j : \tau_j$ и $x_i :: \sigma_i$, причем $\sigma_i = \tau_1 \to \ldots \to \tau_k \to \alpha$ и $k \geqslant 0$.

- Можно расширить определение на незамкнутые термы.

LNF и $\beta\eta$-NF

- Какое количество разных нормальных обитателей есть у типа (с точностью до α-эквивалентности)?
- Для $\alpha \to \alpha$ такой обитатель один: $\lambda x^{\alpha}.\, x$.
- А для $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$?

LNF и $\beta\eta$-NF

- Какое количество разных нормальных обитателей есть у типа (с точностью до α-эквивалентности)?
- Для $\alpha \to \alpha$ такой обитатель один: $\lambda x^{\alpha}.\, x$.
- А для $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$? Два: $\lambda f^{\alpha\to\beta}.\, f$ и $\lambda f^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\, x$
- Они η-эквивалентны, второй получается из первого η-экспансией.

Определение

Замкнутый терм $M : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$ находится в ***длинной нормальной форме*** (LNF), если он имеет вид $\lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.\, x_i\, M_1 \ldots M_k$ и все M_j тоже находятся в LNF.

Здесь $M_j : \tau_j$ и $x_i :: \sigma_i$, причем $\sigma_i = \tau_1 \to \ldots \to \tau_k \to \alpha$ и $k \geqslant 0$.

- Можно расширить определение на незамкнутые термы.

Зададим порождающую двухуровневую грамматику со следующими правилами вывода:

$$
\begin{array}{lcl}
L(\alpha;\Gamma) & \Longrightarrow & x\,L(\sigma_1;\Gamma)\ \ldots\ L(\sigma_n;\Gamma), \\
 & & \quad \text{если } (x:\sigma_1\to\ldots\to\sigma_n\to\alpha)\in\Gamma; \\
L(\sigma\to\tau;\Gamma) & \Longrightarrow & \lambda y^{\sigma}.\,L(\tau;\Gamma,y:\sigma),
\end{array}
$$

где переменная y — свежая и $n \geqslant 0$.

Пример вывода

$$L((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\beta);\emptyset) \Longrightarrow \lambda f^{\alpha\to\beta}.\,L(\alpha\to\beta;\{f:\alpha\to\beta\})$$

$$\Longrightarrow \lambda f^{\alpha\to\beta}.\,\lambda x^{\alpha}.\,L(\beta;\{f:\alpha\to\beta,x:\alpha\})$$

$$\Longrightarrow \lambda f^{\alpha\to\beta}.\,\lambda x^{\alpha}.\,f\,L(\alpha;\{f:\alpha\to\beta,x:\alpha\}) \Longrightarrow \lambda f^{\alpha\to\beta}.\,\lambda x^{\alpha}.\,f\,x$$

Порождение обитателей типов

- Введем операцию $\twoheadrightarrow$ как рефлексивное транзитивное замыкание $\Longrightarrow$.
- Тогда продукцию с предыдущего слайда можно записать так
$$L((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta); \emptyset) \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \lambda f^{\alpha \to \beta}\, x^{\alpha}.\, f\, x$$

Утверждение

Для заданных σ, Γ и M

$$L(\sigma; \Gamma) \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow M \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash M : \sigma \wedge M \text{ в LNF}.$$

Доказательство: по построению.

Населяющие машины

Для каждого типа σ вывод терминалов можно описать с помощью ***населяющей машины (Inhabitation Machine)*** M_σ.

Пример: $\sigma = \alpha \to \alpha \to \alpha$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\alpha \to \alpha \to \alpha} \arrow[r, "\lambda x^\alpha.\,\lambda y^\alpha."] & \boxed{\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & x \\
 & y &
\end{tikzcd}$$

$\lambda x^\alpha.\,\lambda y^\alpha.x$
$\lambda x^\alpha.\,\lambda y^\alpha.y$

Пример: $\sigma = (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha} \arrow[r, "\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\,\lambda x^\alpha."] & \boxed{\alpha} \arrow[loop above, "f"] \arrow[r] & x
\end{tikzcd}$$

$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\,\lambda x^\alpha.\,x$
$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\,\lambda x^\alpha.\,f\,x$
$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\,\lambda x^\alpha.\,f(f\,x)$
$\ldots$

Постройте населяющие машины для типов:

$$\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \alpha) \to \beta \to \alpha$$

$$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

$$(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

$$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to \beta \to \alpha \to \gamma$$

$$(\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

$$((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$$

$$(((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

План лекции

Глубина β-NF

Определение

Определим ***глубину*** β-***NF*** так ($n \geqslant 0, k > 0$):

$$\mathrm{Depth}(\lambda x_1 \dots x_n .\, y) = 0$$
$$\mathrm{Depth}(\lambda x_1 \dots x_n .\, y\, N_1 \dots N_k) = 1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{Depth}(N_j)$$

Обозначения

Множество всех длинных нормальных обитателей типа σ обозначим $\mathrm{Long}(\sigma)$ и сконструируем семейство подмножеств:

$$\mathrm{Long}(\sigma, d) = \{M \mid M \in \mathrm{Long}(\sigma), \mathrm{Depth}(M) \leqslant d\}$$

Пример

$$\mathrm{Long}((\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha, 3) =$$
$$\{\lambda s\, z.\, z, \lambda s\, z.\, s\, z, \lambda s\, z.\, s(s\, z), \lambda s\, z.\, s(s(s\, z))\}$$

Метапеременные и NF-схемы

Введем множество ***метапеременных***, отличных от всех термовых переменных. Будем обозначать их символами в верхнем регистре.

Определение

NF-схема это терм в NF, который помимо обычных термовых переменных может содержать метапеременные, причем:

- метапеременные не связываются, то есть $\lambda V.\, x\, V$ запрещено.
- Метапеременные могут стоять только в правой части аппликации, то есть $\lambda x.\, V\, x$ запрещено.
- Каждая метапеременная входит в NF-схему не более одного раза, то есть $\lambda x.\, x\, V\, V$ запрещено.

Обычный терм в NF — тоже NF-схема, но ***несобственная***.

Аппроксимации

Теорема о поиске (Ben-Yelles 1979)

Алгоритм поиска принимает на вход тип σ и возвращает конечную или бесконечную последовательность множеств $\mathcal{A}(\sigma, d)$, при этом

- каждый элемент $\mathcal{A}(\sigma, d)$ — это замкнутая типизированная длинная NF-схема типа σ, причем это
  - либо собственная NF-схема глубины d;
  - либо терм глубины $d - 1$.
- Множество $\mathcal{A}(\sigma, d)$ конечно.
- $\mathrm{Long}(\sigma, d) \subset \mathcal{A}(\sigma, 0) \cup \ldots \cup \mathcal{A}(\sigma, d+1)$.
- Введем «термовое» подмножество $\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, d)$ множества $\mathcal{A}(\sigma, d)$. Тогда

$$\mathrm{Long}(\sigma) = \bigcup_{d \geqslant 0} \mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, d)$$

Примеры и обозначения

Пример для $\mathrm{Nat} = (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathrm{Nat}, 0) &= \{V\} \\
\mathcal{A}(\mathrm{Nat}, 1) &= \{\lambda s\, z.\, z, \lambda s\, z.\, s\, V\} \\
\mathcal{A}(\mathrm{Nat}, 2) &= \{\lambda s\, z.\, s\, z, \lambda s\, z.\, s(s\, V)\} \\
\mathcal{A}(\mathrm{Nat}, 3) &= \{\lambda s\, z.\, s(s\, z), \lambda s\, z.\, s(s\,(s\, V))\}
\end{aligned}$$

Обозначения

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\sigma, \leqslant \mathrm{d}) &= \mathcal{A}(\sigma, 0) \cup \ldots \cup \mathcal{A}(\sigma, \mathrm{d}) \\
\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathrm{d}) &= \mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, 0) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \mathrm{d})
\end{aligned}$$

Метрики для типа

Обозначим через $|\sigma|$ общее число атомов в типе σ.
Обозначим через $\|\sigma\|$ число различных атомов в типе σ.
Введем $\mathbb{D}(\sigma) = |\sigma| \cdot \|\sigma\|$.

Важные вспомогательные факты

Stretching Lemma

Если существует $M \in \mathrm{Long}(\sigma)$ с $\mathrm{Depth}(M) \geqslant \|\sigma\|$, то в $\mathrm{Long}(\sigma)$ есть элементы высоты, превосходящей любое число, а само $\mathrm{Long}(\sigma)$ — бесконечно.

Идея доказательства. Если посылка выполнена, то всегда есть два компонента M одного типа, причем один — подтерм другого. Подставляя больший вместо меньшего в большем можем организовать бесконечный генератор.
Например, для Nat: $\mathrm{Depth}(\lambda s\, z.\, s\, z) = 1 \geqslant \|\mathrm{Nat}\|$, $z{:}\alpha$, $s\, z{:}\alpha$.

Shrinking Lemma

Если существует $M \in \mathrm{Long}(\sigma)$ с $\mathrm{Depth}(M) \geqslant \mathbb{D}(\sigma)$, то существует $N \in \mathrm{Long}(\sigma)$, такой что

$$\mathbb{D}(\sigma) - \|\sigma\| \leqslant \mathrm{Depth}(N) < \mathbb{D}(\sigma)$$

Алгоритм подсчета числа элементов $\mathrm{Long}(\sigma)$

Описание

Вход: тип σ. Выход: число обитателей σ и перечисление $\mathrm{Long}(\sigma)$.

Реализация

- Запускаем алгоритм поиска, генерируя последовательно $\mathcal{A}(\sigma, 0)$, $\mathcal{A}(\sigma, 1)$, ...
- Останавливаемся, достигнув $\mathcal{A}(\sigma, \mathbb{D}(\sigma))$ и строим $\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathbb{D}(\sigma))$ (содержит всех обитателей σ длиной меньше $\mathbb{D}(\sigma)$).
- Анализируем:
  - $\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathbb{D}(\sigma)) = \varnothing$. Тогда $\mathrm{Long}(\sigma) = \varnothing$.
  - $\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathbb{D}(\sigma))$ не пусто, но все его элементы мельче $\|\sigma\|$. Тогда $\mathrm{Long}(\sigma) = \mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathbb{D}(\sigma))$.
  - $\mathcal{A}_{\mathrm{term}}(\sigma, \leqslant \mathbb{D}(\sigma))$ не пусто, и есть элементы не мельче $\|\sigma\|$. Число элементов бесконечно, можно продолжить перечисление.