Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 9. Лямбда-куб Барендрегта

Денис Москвин

15.05.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Лямбда-куб Барендрегта

$$\begin{tikzcd}
 & \lambda\omega \arrow[rr] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P2 \arrow[ur] & \\
 & \lambda\underline{\omega} \arrow[uu] \arrow[rr] & & \lambda P\underline{\omega} \arrow[uu] \\
\lambda_{\to} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Стрелки задают отношение включения ($\subseteq$).

Зависимости

- Терм от терма $P\,Q$ (система $\lambda\!\to$ или STT)

$\lambda x{:}\sigma.\,F[x] : \sigma\to\tau$ — функция, отображающая терм $M{:}\sigma$ в терм $F[x := M] : \tau$.

- Терм от типа $P\,\rho$ (система $\lambda 2$ или System F)

$\Lambda\alpha{:}{*}.\,F[\alpha] : \forall\alpha.\,\sigma[\alpha]$ — функция, отображающая тип $\tau{:}{*}$ в терм $F[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$.

Возможны и зависимости со значениями в «царстве типов»:

- Тип от типа $\varphi\,\rho$ ($\lambda\underline{\omega}$ — *операторы над типами*)

$\lambda\alpha{:}{*}.\,\sigma[\alpha] : {*}\to{*}$ — функция, отображающая тип $\tau : *$ в тип $\sigma[\alpha := \tau] : *$.

- Тип от терма $\varphi\,Q$ (λP — *зависимые типы, семейства типов*)

$\lambda x{:}\sigma.\,\tau[x] : \sigma\to{*}$ — функция, отображающая терм $M : \sigma$ в тип $\tau[x := M] : *$.

Система $\lambda\omega$: предварительные замечания (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\texttt{Pair}\ \sigma\ \tau & \equiv & \forall\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha \\
\sigma{:}*,\tau{:}*\ \vdash\ \texttt{PAIR} & : & \sigma\to\tau\to\texttt{Pair}\ \sigma\ \tau \\
\texttt{PAIR} & \equiv & \lambda a^{\sigma}\, b^{\tau}.\, \Lambda\,\alpha.\, \lambda\, f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\, f\, a\, b
\end{array}
$$

Полиморфизм по α позволяет итерировать универсально:

$$
\begin{array}{rcl}
\texttt{UNCURRY} & : & (\sigma\to\tau\to\rho)\to\texttt{Pair}\ \sigma\,\tau\to\rho \\
\texttt{UNCURRY} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\, p^{\texttt{Pair}\ \sigma\,\tau}.\, p\,\rho\, f
\end{array}
$$

$\forall$ для σ и τ даст лишь лишнюю упаковку/распаковку терма:

$$
\begin{array}{rcl}
\texttt{Pair2} & \equiv & \forall\sigma\,\tau\,\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha \\
\texttt{PAIR2 Nat Bool}\ 3\ \texttt{TRUE} & : & \texttt{Pair2}[\sigma:=\texttt{Nat}][\tau:=\texttt{Bool}] \\
\texttt{PAIR2 Nat Bool}\ \overline{3}\ \texttt{TRUE} & \equiv & (\Lambda\sigma\,\tau.\,\lambda a^{\sigma}\, b^{\tau}.\,\Lambda\alpha.\,\lambda\, f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\, f\, a\, b) \\
& & \quad \texttt{Nat Bool}\ 3\ \texttt{TRUE}
\end{array}
$$

Система $\lambda\omega$: предварительные замечания (2)

Идея: разрешить абстракцию на уровне типов

$$\texttt{Pair} \;\equiv\; \lambda\sigma{:}*.\,\lambda\tau{:}*.\,\forall\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha$$

аппликацию типа к типу и редукцию над типами

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{Pair Nat} & \equiv & (\lambda\sigma{:}*.\,\lambda\tau{:}*.\,\forall\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha)\ \texttt{Nat} \\
 & \to_\beta & \lambda\tau{:}*.\,\forall\alpha.\,(\texttt{Nat}\to\tau\to\alpha)\to\alpha \\
(\texttt{Pair Nat})\ \texttt{Bool} & \equiv & (\lambda\tau{:}*.\,\forall\alpha.\,(\texttt{Nat}\to\tau\to\alpha)\to\alpha)\ \texttt{Bool} \\
 & \to_\beta & \forall\alpha.\,(\texttt{Nat}\to\texttt{Bool}\to\alpha)\to\alpha
\end{array}$$

Но при этом могут возникнуть бессмысленные конструкции:

$$\texttt{Nat Bool},\quad \texttt{Pair Pair},\quad \texttt{Pair}\ (\texttt{Pair Nat Bool})\ \texttt{Nat}$$

Система $\lambda\omega$: предварительные замечания (3)

Идея: ввести систему типов над системой типов — ***кайнды*** (***виды***).

Для простых типов вид один — $*$. Только такие типы используются для типизации термов.

$$\top : *, \quad \mathtt{Nat} : *, \quad \mathtt{Bool} : *, \quad \mathtt{ListNat} : *$$

Для операторов над типами имеется «стрелочный» кайнд

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{List} & : & * \to * \\
\mathtt{List} & \equiv & \lambda\sigma{:}*.\, \forall\alpha.\, \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \\
\mathtt{List\ Nat} & : & * \\
\mathtt{List\ Nat} & \to_\beta & \forall\alpha.\, \alpha \to (\mathtt{Nat} \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \\
\mathtt{Pair} & : & * \to * \to *
\end{array}$$

Система $\lambda\underline{\omega}$: кайнды

Категория ***кайндов*** (***видов***) $\mathbb{K}$ задаётся как

$$\mathbb{K} = * \mid \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

То есть $\mathbb{K} = \{*, * \to *, * \to * \to *, (* \to *) \to *, \ldots\}$.

$\sigma \in \mathbb{T}$ введением константы $*$ формализовывалось так $\sigma{:}*$.
$\kappa \in \mathbb{K}$ формализуется новой константой $\square$ так $\kappa{:}\square$.

$$\begin{array}{rl} \vdash & * : \square \\ \vdash & * \to * : \square \\ \alpha{:}* \vdash & \alpha \to \alpha : * : \square \\ \vdash & \lambda\alpha{:}*.\,\alpha \to \alpha : * \to * : \square \end{array}$$

Система λP: предварительные замечания (1)

Вектор — список, *в типе* которого есть информация о его длине:

$$
\begin{aligned}
[\,] &: \texttt{Vector}\ 0 \\
[\texttt{FALSE}] &: \texttt{Vector}\ 1 \\
[\texttt{TRUE}, \texttt{FALSE}] &: \texttt{Vector}\ 2 \\
[\texttt{FALSE}, \texttt{TRUE}, \texttt{FALSE}] &: \texttt{Vector}\ 3 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Это приводит нас к идее ***семейства типов*** — «типа», индексированного значениями другого типа.

`Vector` — оператор, принимающий значение и возвращающий тип.

Система λP: предварительные замечания (2)

При этом могут возникнуть бессмысленные конструкции:

$$\texttt{Vector TRUE}, \quad \texttt{Vector}\ (\texttt{PAIR}\ 3\ 5)$$

Для контроля за ними расширим понятие кайнда

$$\texttt{Vector} : \texttt{Nat} \rightarrow *$$

Правило «типизации»

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi : (\sigma \rightarrow \kappa) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \varphi\, N : \kappa}$$

позволяет осуществлять контроль соответствия:

$$\texttt{Vector}\ 3 \ : \ *$$

$$\texttt{Vector TRUE} \ : \ \text{ошибка}$$

Система λP: предварительные замечания (3)

Стандартные конструкторы вектора — их бесконечно много?

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{VNIL} & : & \mathtt{Vector}\ 0 \\
\mathtt{VCONS0} & : & \sigma \to \mathtt{Vector}\ 0 \to \mathtt{Vector}\ 1 \\
\mathtt{VCONS1} & : & \sigma \to \mathtt{Vector}\ 1 \to \mathtt{Vector}\ 2 \\
\mathtt{VCONS2} & : & \sigma \to \mathtt{Vector}\ 2 \to \mathtt{Vector}\ 3 \\
[\ ] & \equiv & \mathtt{VNIL} \\
[\mathtt{FALSE}] & \equiv & \mathtt{VCONS0}\ \mathtt{FALSE}\ \mathtt{VNIL} \\
[\mathtt{TRUE}, \mathtt{FALSE}] & \equiv & \mathtt{VCONS1}\ \mathtt{TRUE}\ (\mathtt{VCONS0}\ \mathtt{FALSE}\ \mathtt{VNIL}) \\
[\mathtt{FALSE}, \mathtt{TRUE}, \mathtt{FALSE}] & \equiv & \mathtt{VCONS2}\ \mathtt{FALSE}\ (\mathtt{VCONS1}\ \mathtt{TRUE}\ (\mathtt{VCONS0}\ \mathtt{FALSE}\ \mathtt{VNIL}))
\end{array}$$

Обобщим понятие типа, введя *тип, зависящий от терма*:

$$\mathtt{VCONS} \ : \ \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \sigma \to \mathtt{Vector}\ n \to \mathtt{Vector}\ (\mathtt{SUCC}\ n)$$

Система λP: тип зависимого произведения

Конструкция

$$\Pi x{:}\sigma.\, \tau[x]$$

называется ***типом зависимого произведения*** или Π-типом.

Можно сравнить с $\forall \alpha{:}{*}.\, \tau[\alpha]$ из системы $\lambda 2$.

Интуитивно $\Pi x{:}\sigma.\, \tau[x]$ — тип функции, отображающей терм N типа σ в терм типа $\tau[x := N]$.

Полное определение вектора в $\lambda P2$

Возможная реализация:

$$
\begin{array}{rcl}
\texttt{Vector} & : & \texttt{Nat} \to * \\
\texttt{Vector} & \equiv & \lambda m^{\texttt{Nat}}.\, \Pi \varphi^{\texttt{Nat}\to *}.\, \varphi\, 0 \to (\Pi n^{\texttt{Nat}}.\, \sigma \to \varphi\, n \to \varphi\, (\texttt{SUCC}\ n)) \to \varphi\, m \\
\texttt{List} & \equiv & \Pi \alpha^{*}.\, \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \\
 & & \\
\texttt{VNIL} & : & \texttt{Vector}\ 0 \\
\texttt{VNIL} & \equiv & \lambda \varphi^{\texttt{Nat}\to *}\, z^{\varphi\, 0}\, c^{\Pi n^{\texttt{Nat}}.\, \sigma \to \varphi\, n \to \varphi\, (\texttt{SUCC}\ n)}.\, z \\
\texttt{NIL} & \equiv & \lambda \alpha^{*}\, z^{\alpha}\, c^{\sigma \to \alpha \to \alpha}.\, z \\
\texttt{VCONS} & : & \Pi n^{\texttt{Nat}}.\, \sigma \to \texttt{Vector}\ n \to \texttt{Vector}\ (\texttt{SUCC}\ n) \\
\texttt{VCONS} & \equiv & \lambda n^{\texttt{Nat}}\, x^{\sigma}\, v^{\texttt{Vector}\ n}\, \varphi^{\texttt{Nat}\to *}\, z^{\varphi\, 0}\, c^{\Pi n^{\texttt{Nat}}.\, \sigma \to \varphi\, n \to \varphi\, (\texttt{SUCC}\ n)}.\, c\, n\, x\, (v\, \varphi\, z\, c) \\
\texttt{CONS} & \equiv & \lambda\, x^{\sigma}\, v^{\texttt{List}}\, \alpha^{*}\, z^{\alpha}\, c^{\sigma \to \alpha \to \alpha}.\, c\ x\, (v\, \alpha\, z\, c)
\end{array}
$$

Здесь много избыточности!

Вектор в $\lambda P\omega$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{Vec} & : & \mathtt{Nat} \to * \to * \\
\mathtt{Vec} & \equiv & \lambda m^{\mathtt{Nat}}.\, \lambda\sigma^{*}.\, \Pi\varphi^{\mathtt{Nat}\to *}.\, \varphi\, 0 \to (\Pi n^{\mathtt{Nat}}.\, \sigma \to \varphi\, n \to \varphi\, (\mathtt{SUCC}\ n)) \to \varphi\, m \\
\mathtt{VNIL}' & : & \mathtt{Vec}\ 0\ \sigma \\
\mathtt{VCONS}' & : & \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \sigma \to \mathtt{Vec}\ n\ \sigma \to \mathtt{Vec}\ (\mathtt{SUCC}\ n)\ \sigma
\end{array}
$$

Примеры функций:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{REPLICATE} & : & \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \sigma \to \mathtt{Vec}\ n\ \sigma \\
\mathtt{HEAD} & : & \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \mathtt{Vec}\ (\mathtt{SUCC}\ n)\ \sigma \to \sigma \\
\mathtt{CONCAT} & : & \Pi m{:}\mathtt{Nat}.\, \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \mathtt{Vec}\ m\ \sigma \to \mathtt{Vec}\ n\ \sigma \to \mathtt{Vec}\ (m+n)\ \sigma \\
\mathtt{ZIP} & : & \Pi n{:}\mathtt{Nat}.\, \mathtt{Vec}\ n\ \sigma \to \mathtt{Vec}\ n\ \tau \to \mathtt{Vec}\ n\ \langle \sigma, \tau \rangle
\end{array}
$$

Проблема равенства типов

Рассмотрим допустимые векторы

$$\begin{aligned} \mathtt{V1} &: \mathtt{Vec}\ 3\ \sigma \\ \mathtt{V2} &: \mathtt{Vec}\ 4\ \sigma \\ \mathtt{V3} &: \mathtt{Vec}\ 7\ \tau \end{aligned}$$

Тогда для проверки утверждения типизации

$$\mathtt{ZIP}\ (\mathtt{CONCAT\ V1\ V2})\ \mathtt{V3} : \mathtt{Vec}\ 7\ \langle\sigma, \tau\rangle$$

система проверки типов должна вычислить терм $3+4$ (и проверить результат на равенство 7).

Все системы λ-куба сильно нормализуемы и обладают свойством сходимости (Чёрча-Россера)!

Системы λ-куба (1)

Мы больше формально не различаем ти́повые и термовые переменные: $V \;:=\; \{a, b, c, \ldots\} \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$.

Множество ***(пред)выражений*** Λ задаётся так

$$\Lambda \;:=\; V \mid C \mid \Lambda\,\Lambda \mid \lambda V{:}\Lambda.\,\Lambda \mid \Pi V{:}\Lambda.\,\Lambda$$

$C = \{*, \square\}$ — множество констант, называемых ***сортами***.

β-***редукция*** на множестве Λ задаётся правилом

$$(\lambda x{:}A.\,M)\,N \;\to_\beta\; M[x := N]$$

Системы λ-куба (2)

Высказывание имеет вид $M : A$, где $M, A \in \Lambda$.

(Пред)контекст — конечное, линейно упорядоченное множество высказываний, с различными переменными в качестве субъекта.

Правила присваивания типов аксиоматизируют нотацию

$$\Gamma \vdash M : A,$$

При этом M и A называются (допустимыми) выражениями, а Γ — (допустимым) контекстом.

λ-куб: аксиома

Аксиома $$\frac{}{\langle\rangle \vdash * : \Box}$$

В пустом контексте $*$ — это кайнд.

λ-куб: общие правила присваивания типов (1)

Начальное правило	$\dfrac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}, x \notin \Gamma$
Правило ослабления	$\dfrac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma, x : B \vdash M : A}, x \notin \Gamma$

$s \in \{*, \Box\}$, x — переменная, A, B, M и N — выражения.

Эти правила позволяют конструировать контексты.

λ-куб: общие правила присваивания типов (2)

Правило применения $$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x{:}A.\, B) \qquad \Gamma \vdash N{:}A}{\Gamma \vdash M\, N{:}B[x := N]}$$

Правило абстракции $$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B){:}s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

λ-куб: общие правила присваивания типов (3)

Правило преобразования $\dfrac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s \quad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$

λ-куб: специальные правила присваивания типов

Совокупность допустимых ***специальных правил*** определяет конкретную вершину куба:

$$\boxed{\text{Правило } (s_1, s_2) \quad \frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s_2}}$$

$s1, s2 \in \{*, \Box\}$, то есть правил 4: $\{(*, *), (\Box, *), (*, \Box), (\Box, \Box)\}$.

λ-куб: специальные правила присваивания типов

$$
\begin{tikzcd}
& \lambda\omega \arrow[rr] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P2 \arrow[ur] & \\
& \lambda\underline{\omega} \arrow[uu] \arrow[rr] & & \lambda P\underline{\omega} \arrow[uu] \\
\lambda_{\to} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Система	Специальные правила			
$\lambda{\to}$	$(*,*)$			
$\lambda 2$	$(*,*)$	$(\square,*)$		
λP	$(*,*)$		$(*,\square)$	
$\lambda P2$	$(*,*)$	$(\square,*)$	$(*,\square)$	
$\lambda\underline{\omega}$	$(*,*)$			$(\square,\square)$
$\lambda\omega$	$(*,*)$	$(\square,*)$		$(\square,\square)$
$\lambda P\underline{\omega}$	$(*,*)$		$(*,\square)$	$(\square,\square)$
$\lambda P\omega = \lambda C$	$(*,*)$	$(\square,*)$	$(*,\square)$	$(\square,\square)$

$\lambda{\to}$ на λ-кубе: зависимость терма от терма (1)

Специальное правило $(*,*)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma, x{:}\sigma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash \Pi x{:}\sigma.\,\tau : *}$$

Поскольку τ не зависит (в $\lambda{\to}$) от x, положим по определению

$$\sigma \to \tau \;\equiv\; \Pi \_{:}\sigma.\,\tau \;\equiv\; \Pi x{:}\sigma.\,\tau$$

Специальное правило $(*,*)$ превращается в правило введения функционального типа:

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash \sigma \to \tau : *}$$

Если σ и τ — типы, то $\sigma \to \tau$ — тоже тип.

$\lambda{\to}$ на λ-кубе: зависимость терма от терма (2)

Правило абстракции

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

Единственная допустимая $(\Pi x{:}A.\, B) : s$ это $\sigma{\to}\tau : *$.
Получаем правило введения стрелочного типа

$$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash (\sigma{\to}\tau) : *}{\Gamma \vdash \lambda x{:}\sigma.\, M : \sigma{\to}\tau}$$

Правило применения

$$\frac{\Gamma \vdash M{:}(\Pi x{:}A.\, B) \qquad \Gamma \vdash N{:}A}{\Gamma \vdash M\,N : B[x := N]}$$

превращается в правило удаления стрелочного типа:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma{\to}\tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$$

$\lambda 2$ на λ-кубе: зависимость терма от типа (1)

Специальное правило $(\Box, *)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa : \Box \qquad \Gamma, \alpha : \kappa \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash (\Pi \alpha : \kappa.\, \sigma) : *}$$

В $\lambda 2$ допустим только кайнд $*$. То есть κ в $\Pi \alpha : \kappa.\, \sigma$ всегда $*$. Такой Π-тип записывают через квантор всеобщности

$$\forall \alpha.\, \sigma \;\equiv\; \Pi \alpha : *.\, \sigma$$

При этом $(\Box, *)$ принимает вид правила формирования универсальной абстракции

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \forall \alpha.\, \sigma : *}$$

Если α — переменная типа и σ — тип, то $\forall \alpha.\, \sigma$ — тоже тип.

$\lambda 2$ на λ-кубе: зависимость терма от типа (2)

Правило абстракции

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

При $s = *$ и $A : *$ порождает правило введения стрелочного типа (как в $\lambda\!\rightarrow$).

При $s = *$ и $A = *$ возникает правило введения универсальной абстракции

$$\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma \qquad (\forall \alpha.\, \sigma) : *}{\Gamma \vdash \lambda \alpha{:}*.\, M \; : \forall \alpha.\, \sigma}$$

Для универсальной абстракции часто используют нотацию $\Lambda \alpha.\, M \;\equiv\; \lambda \alpha{:}*.\, M$

$$\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha.\, M \; : \forall \alpha.\, \sigma}$$

$\lambda 2$ на λ-кубе: зависимость терма от типа (3)

Правило применения

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : A.\, B) \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\, N : B[x := N]}$$

При $A : *$ имеем правило удаления стрелочного типа (как в $\lambda\!\rightarrow$). При $A = *$ имеем удаление универсальной абстракции

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\, \tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

Пример — полиморфная тождественная функция **I**:

$$\begin{array}{rcl} & \vdash & \Lambda\alpha.\, \lambda x : \alpha.\, x : \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha \\ \gamma : * & \vdash & (\Lambda\alpha.\, \lambda x : \alpha.\, x)\, \gamma : (\alpha \to \alpha)[\alpha := \gamma] \\ \gamma : * & \vdash & \lambda x : \gamma\, .\, x : (\gamma \to \gamma) \end{array}$$

$\lambda\underline{\omega}$ на λ-кубе: зависимость типа от типа (1)

Специальное правило $(\Box, \Box)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa_1 : \Box \qquad \Gamma, \alpha : \kappa_1 \vdash \kappa_2 : \Box}{\Gamma \vdash (\Pi \alpha : \kappa_1 .\, \kappa_2) : \Box}$$

В $\lambda\underline{\omega}$ нет зависимости кайнда (здесь κ_2) от типа (здесь α). Поэтому этот Π-тип записывают в стрелочной нотации

$$\kappa_1 \to \kappa_2 \ \equiv\ \Pi \_ : \kappa_1 .\, \kappa_2 \ \equiv\ \Pi \alpha : \kappa_1 .\, \kappa_2$$

$$\frac{\color{green}{\Gamma} \vdash \kappa_1 : \Box \qquad \color{green}{\Gamma} \vdash \kappa_2 : \Box}{\color{green}{\Gamma} \vdash \kappa_1 \to \kappa_2 : \Box}$$

Например,

$$\vdash\ * \to * : \Box$$

То есть $* \to *$ — допустимый кайнд (оператора над типом).

$\lambda\underline{\omega}$ на λ-кубе: зависимость типа от типа (2)

Правило применения

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : A.\, B) \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\, N : B[x := N]}$$

При $A : *$ имеем правило удаления стрелочного типа (как в $\lambda{\to}$). При $A : \Box$ имеем правило удаления стрелочного кайнда

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : \kappa_1 \to \kappa_2 \qquad \Gamma \vdash \tau : \kappa_1}{\Gamma \vdash \sigma\, \tau : \kappa_2}$$

Например,

$$\frac{\dfrac{\vdash \mathtt{Pair} : * \to * \to * \qquad \vdash \mathtt{Nat} : *}{\vdash \mathtt{Pair\ Nat} : * \to *} \qquad \mathtt{Bool} : *}{\vdash \mathtt{Pair\ Nat\ Bool} : *}$$

$\lambda\underline{\omega}$ на λ-кубе: зависимость типа от типа (3)

Правило абстракции

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

При $s = *$ и, следовательно, $A{:}*$ порождает правило введения стрелочного типа (как в $\lambda\!\to$).

При $s = \Box$ и, следовательно, $A{:}\Box$ возникает правило введения стрелочного кайнда

$$\frac{\Gamma, \alpha{:}\kappa_1 \vdash \sigma : \kappa_2 \qquad \Gamma \vdash (\kappa_1 \to \kappa_2) : \Box}{\Gamma \vdash \lambda\alpha{:}\kappa_1.\, \sigma : \kappa_1 \to \kappa_2}$$

Например, в определении списка (в $\lambda\omega$)

$$\frac{\sigma{:}* \vdash \forall\alpha.\, \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha : *}{\vdash \lambda\sigma{:}*.\, \forall\alpha.\, \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha : * \to *}$$

$\lambda\underline{\omega}$ на λ-кубе: зависимость типа от типа (4)

Ещё примеры:

$$\vdash \lambda\alpha{:}{*}.\,\alpha\to\alpha : {*}\to{*}$$

Обозначим этот оператор $\psi \equiv \lambda\alpha{:}{*}.\,\alpha\to\alpha$. Тогда

$$\begin{array}{rcl} & \vdash & \psi : {*}\to{*} \\ \gamma{:}{*} & \vdash & \psi\,\gamma : {*} \\ \gamma{:}{*} & \vdash & \lambda x{:}(\psi\,\gamma).\,x : \psi\,\gamma\to\psi\,\gamma \\ \gamma{:}{*} & \vdash & \lambda x{:}(\psi\,\gamma).\,x : \psi\,(\psi\,\gamma) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}{*},\,\varphi{:}{*}\to{*} & \vdash & \varphi\,(\varphi\,\alpha) : {*} \\ \alpha{:}{*} & \vdash & \lambda\varphi{:}{*}\to{*}.\,\varphi\,(\varphi\,\alpha) : ({*}\to{*})\to{*} \end{array}$$

λP на λ-кубе: зависимость типа от терма (1)

Специальное правило $(*, \square)$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash \kappa : \square}{\Gamma \vdash (\Pi x : \sigma .\, \kappa) : \square}$$

Если кайнд κ не зависит от переменной x, то используется стрелочная нотация

$$\sigma \to \kappa \;\equiv\; \Pi \_ : \sigma .\, \kappa \;\equiv\; \Pi x : \sigma .\, \kappa$$

Например,

$$\alpha : * \;\vdash\; (\alpha \to *) : \square$$

То есть $\alpha \to *$ — допустимый кайнд семейства типов.

λP на λ-кубе: зависимость типа от терма (2)

В системе λP специальное правило $(*, *)$ не интерпретируется как введение стрелочного типа, а сохраняет общую Π-форму:

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash (\Pi x : \sigma.\, \tau) : *}$$

Если тип τ не зависит от переменной x, то стрелочную нотацию удобно восстановить

$$\sigma \to \tau \;\equiv\; \Pi \_ : \sigma.\, \tau \;\equiv\; \Pi x : \sigma.\, \tau$$

λP на λ-кубе: зависимость типа от терма (3)

Правило применения

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : A.\, B) \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\, N : B[x := N]}$$

При $(\Pi x : A.\, B) : *$ имеем удаление Π-типа:

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : \sigma.\, \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau[x := N]}$$

При $(\Pi x : A.\, B) : \Box$, имеем удаление Π-кайнда:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi : (\Pi x : \sigma.\, \kappa) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \varphi\, N : \kappa[x := N]}$$

Например,

$$\alpha : *,\ \ \varphi : \alpha \to *,\ \ a : \alpha\ \vdash\ \varphi\, a : *$$

λP на λ-кубе: зависимость типа от терма (4)

Правило абстракции

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

При $s = *$ и, следовательно, $B{:}*$ возникает правило введения Π-типа:

$$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \lambda x{:}\sigma.\, M : (\Pi x{:}\sigma.\, \tau)}$$

Например,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha{:}*,\ \varphi{:}\alpha\to *,\ a{:}\alpha,\ x{:}(\varphi\, a) & \vdash & x : \varphi\, a \\
\alpha{:}*,\ \varphi{:}\alpha\to *,\ a{:}\alpha & \vdash & \lambda x{:}(\varphi\, a).\, x : \varphi\, a \to \varphi\, a \\
\alpha{:}*,\ \varphi{:}\alpha\to * & \vdash & \lambda a{:}\alpha.\, \lambda x{:}(\varphi\, a).\, x : \Pi a{:}\alpha.\, \varphi\, a \to \varphi\, a
\end{array}$$

λP на λ-кубе: зависимость типа от терма (5)

Правило абстракции

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\, M) : (\Pi x{:}A.\, B)}$$

При $s = \Box$ и, следовательно, $B{:}\Box$ возникает правило введения Π-кайнда

$$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash \tau : \kappa \qquad \Gamma \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \lambda x{:}\sigma.\, \tau : (\Pi x{:}\sigma.\, \kappa)}$$

Если не включать подобное правило систему, то возможность объявления семейств типов остаётся только в контексте,

$$\alpha{:}*,\ \varphi{:}\alpha \to \alpha \to *,\ a{:}\alpha \ \vdash\ \varphi\, a : \alpha \to *$$
$$\alpha{:}*,\ \varphi{:}\alpha \to \alpha \to *,\ a{:}\alpha \ \vdash\ \varphi\, a\, a : *$$

Домашнее задание

Для семейства типов матриц с контролем размерности

$$\mathtt{Matrix} : \mathtt{Nat} \rightarrow \mathtt{Nat} \rightarrow *$$

задайте типы функций их транспонирования, сложения и умножения.

Литература (1)

TAPL гл. 29, 30

Benjamin C. Pierce, Types and Programming Languages, MIT Press, 2002

`http://www.cis.upenn.edu/~bcpierce/tapl`

LCWT гл. 5.1

Henk Barendregt, Lambda calculi with types,
Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993

Литература (2)

ATTAPL гл. 2
Benjamin C. Pierce, editor.
Advanced Topics in Types and Programming Languages, MIT, 2005

ITT гл. 6
Herman Geuvers, Introduction to Type Theory
Alfa Lernet Summer school 2008, Uruguay

`http://www.cs.ru.nl/H.Geuvers/Uruguay2008SummerSchool.html`