Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 11. Чистые системы типов

Денис Москвин

22.05.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Чистые системы типов (PTS): введение (1)

Чистые системы типов (Pure Type Systems) задают абстрактную инфраструктуру, позволяющую унифицированно описывать конкретные системы типов:

- интерпретация «высказывания-как-типы» приобретает простую форму

- легко сравнивать свойства разных систем

- многие свойства доказываются для целых групп систем

Берарди [1989] и Терлов [1989]

Чистые системы типов (PTS): введение (2)

Обобщения систем λ-куба, формирующие системы PTS:

- количество сортов становится произвольным (на кубе их два $*$ и $\Box$);

- набор аксиом тоже может быть расширен (на кубе аксиома одна $*:\Box$);

- сорт Π-типа может отличаться от сорта возвращаемого значения

Определение PTS (1)

Множество ***(пред)выражений***

$$\Lambda \ := \ V \mid C \mid \Lambda\,\Lambda \mid \lambda V{:}\Lambda.\,\Lambda \mid \Pi V{:}\Lambda.\,\Lambda$$

где V — множество переменных, а C — констант.

Высказывания $M : A$, объявления $x : A$, (пред)контексты Γ — как на λ-кубе.

Определение PTS (2)

Спецификация конкретной PTS задаётся тройкой $S = (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$

- $\mathcal{S}$ — подмножество C, его элементы называют ***сортами***

- $\mathcal{A}$ — множество ***аксиом*** вида $c : s$, причём $c \in C$ и $s \in \mathcal{S}$

- $\mathcal{R}$ — множество ***правил*** вида (s_1, s_2, s_3), причём $s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$

V — объединение *непересекающихся* подмножеств

$$V = \cup_{s \in \mathcal{S}} V_s, \qquad V_{s_1} \cap V_{s_2} = \varnothing, \qquad V_s = \{{}^s x, {}^s y, {}^s z, \ldots\}$$

«Греко-латинская» система: ${}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^\Box\alpha, {}^\Box\beta, {}^\Box\gamma$.

Аксиомы и правила для $\Gamma \vdash_{\lambda S} M : A$ (1)

Нотация присваивания типов $\Gamma \vdash_{\lambda S} M : A$ задаётся так

Аксиомы	$\dfrac{}{\vdash c : s}$, если $(c{:}s) \in \mathcal{A}$
Начальное правило	$\dfrac{\Gamma \vdash A{:}s}{\Gamma, x{:}A \vdash x{:}A}$, если $x \equiv {}^s x \notin \Gamma$
Правило ослабления	$\dfrac{\Gamma \vdash M{:}A \quad \Gamma \vdash B{:}s}{\Gamma,\ x{:}B \vdash M{:}A}$, если $x \equiv {}^s x \notin \Gamma$

Здесь $s \in \mathcal{S}$, $c \in \mathcal{C}$, $x \in V$ и $A, B, M \in \Lambda$.

(продолжение далее...)

Аксиомы и правила для $\Gamma \vdash_{\lambda S} M : A$ (2)

Правило произведения	$\dfrac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s_3}, \quad (s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{R}$
Правило применения	$\dfrac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : A.\, B) \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\, N : B[x := N]}$
Правило абстракции	$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.\, M) : (\Pi x : A.\, B)}$

Здесь $s, s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$, $x \in V$ и $A, B, M, N \in \Lambda$.

(продолжение далее...)

Аксиомы и правила для $\Gamma \vdash_{\lambda S} M : A$ (3)

Правило преобразования $\dfrac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s \quad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$

Здесь $s \in \mathcal{S}$ и $A, B, B' \in \Lambda$.

Посылка $B =_\beta B'$ может быть неразрешима; её можно заменить на

$$B \to_\beta B' \ \vee \ B' \to_\beta B$$

Примеры PTS (1)

Принято обозначение $(s_1, s_2) \equiv (s_1, s_2, s_2)$.

$$\lambda{\to}\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box \\ \mathcal{A} & * : \Box \\ \mathcal{R} & (*, *) \end{array}} \qquad \lambda 2\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box \\ \mathcal{A} & * : \Box \\ \mathcal{R} & (*, *), (\Box, *) \end{array}}$$

$$\lambda\omega\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box \\ \mathcal{A} & * : \Box \\ \mathcal{R} & (*, *), (\Box, *), (\Box, \Box) \end{array}} \qquad \lambda P\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box \\ \mathcal{A} & * : \Box \\ \mathcal{R} & (*, *), (*, \Box) \end{array}}$$

Примеры PTS (2)

$$\lambda C = \lambda P\omega \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box \\ \mathcal{A} & * : \Box \\ \mathcal{R} & (*, *), (*, \Box), (\Box, *), (\Box, \Box) \end{array}}$$

$$\lambda C' \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *^t, *^p, \Box \\ \mathcal{A} & *^t : \Box, *^p : \Box \\ \mathcal{R} & \mathcal{S}^2 \end{array}}$$

$$\lambda C^\infty \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *,\ \{\Box_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\ \mathcal{A} & * : \Box_0,\ \Box_i : \Box_{i+1} \\ \mathcal{R} & (*, *),\ (*, \Box),\ (\Box, *),\ (\Box_i, \Box_j, \Box_{\mathsf{max}(i,j)}) \end{array}}$$

Примеры PTS (3)

$$
\lambda{*}\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & * \\ \mathcal{A} & *:* \\ \mathcal{R} & (*,*) \end{array}}
\qquad
\lambda\mathrm{U}\ \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \Box, \Delta \\ \mathcal{A} & *:\Box, \Box:\Delta \\ \mathcal{R} & (*,*), (\Box,*), (\Box,\Box), (\Delta,*), (\Delta,\Box) \end{array}}
$$

Две последние системы «неконсистентны» в том смысле, что в них все типы являются обитаемыми (парадокс Жирара).

Свойства PTS (1)

Пусть Γ — предконтекст, а A — предвыражение.

- Γ называется ***(допустимым) контекстом***, если $\exists A, B \in \Lambda\ \Gamma \vdash A : B$.

- $A \in \Lambda$ называется ***(допустимым) выражением***, если $\exists \Gamma, B \in \Lambda\ \left[\Gamma \vdash A : B\ \vee\ \Gamma \vdash B : A\right]$.

Свойства PTS (2)

Пусть Γ — предконтекст, а A — предвыражение.

- A называется Γ-***термом***, если $\exists B \in \Lambda \left[\Gamma \vdash A : B \;\vee\; \Gamma \vdash B : A\right]$.

- A называется Γ-***типом*** (сорта s), если $\exists s \in \mathcal{S}\ \Gamma \vdash A : s$.

- A называется Γ-***элементом*** (типа B сорта s), если $\exists B \in \Lambda\ \exists s \in \mathcal{S}\ \Gamma \vdash A : B : s$.

Свойства PTS (3)

Лемма подстановки для PTS
Пусть

$$\Gamma, x{:}A, \Delta \vdash M : B$$

и

$$\Gamma \vdash N : A$$

тогда

$$\Gamma, \Delta[x := N] \vdash M[x := N] : B[x := N]$$

Лемма thinning для PTS
Пусть Γ и Δ — допустимые контексты, причём $\Gamma \subseteq \Delta$, тогда

$$\Gamma \vdash M : A \ \Rightarrow\ \Delta \vdash M : A$$

Свойства PTS: Лемма генерации (1)

Для $\Gamma \vdash P : Q$ по известной структуре выражения P

$$\Lambda \;:=\; C \mid V \mid \Lambda\,\Lambda \mid \lambda V{:}\Lambda.\,\Lambda \mid \Pi V{:}\Lambda.\,\Lambda$$

представляет свойства Γ и Q.

Лемма генерации для PTS

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash c : Q \;\;\Rightarrow\;\; & \exists s \in \mathcal{S} \\
& \Big[Q =_\beta s \;\wedge\; (c{:}s) \in \mathcal{A} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash x : Q \;\;\Rightarrow\;\; & \exists s \in \mathcal{S}\ \exists B =_\beta Q \\
& \Big[\Gamma \vdash B : s \;\wedge\; (x{:}B) \in \Gamma \;\wedge\; x \equiv {}^{s}x \Big]
\end{aligned}$$

(продолжение далее...)

Свойства PTS: Лемма генерации (2)

Лемма генерации для PTS (продолжение)

$$\Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\,B) : Q \;\Rightarrow\; \exists (s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{R} \left[\Gamma \vdash A{:}s_1 \;\wedge\; \Gamma, x{:}A \vdash B{:}s_2 \;\wedge\; Q =_\beta s_3\right]$$

$$\Gamma \vdash (\lambda x{:}A.\,M) : Q \;\Rightarrow\; \exists s \in \mathcal{S}\ \exists B \left[\Gamma \vdash (\Pi x{:}A.\,B) : s \;\wedge\; \Gamma, x{:}A \vdash M{:}B \;\wedge\; Q =_\beta \Pi x{:}A.\,B\right]$$

$$\Gamma \vdash (M\,N) : Q \;\Rightarrow\; \exists A, B \left[\Gamma \vdash M : (\Pi x{:}A.\,B) : s \;\wedge\; \Gamma \vdash N{:}A \;\wedge\; Q =_\beta B[x := N]\right]$$

Следствия леммы генерации (1)

- $$\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \exists s \in \mathcal{S}\;\Big[A \equiv s \;\vee\; \Gamma \vdash A : s\Big]$$

- $$\Gamma \vdash M : (\Pi x{:}B_1 .\, B_2) \;\Rightarrow\; \exists s_1, s_2 \in \mathcal{S}\;\Big[\Gamma \vdash B_1 : s_1 \;\wedge\; \Gamma, x{:}B_1 \vdash B_2{:}s_2\Big]$$

- Если A является Γ-термом, то A — это сорт, или Γ-тип или Γ-элемент.

- Если A допустим и B — его подтерм, то B допустим.

Следствия леммы генерации (2)

Классы сортов, Γ-типов и Γ-элементов могут пересекаться.

Например,

$$\alpha{:}* \;\vdash\; (\lambda x{:}\alpha.\, x) : (\alpha \to \alpha) : *$$

$$\alpha{:}* \;\vdash\; (\alpha \to \alpha) : * : \Box$$

Выражение $\alpha \to \alpha$ выступает в роли и Γ-типа или Γ-элемента.

Есть здесь ещё смешение ролей?

Свойства PTS: редукция субъекта

Теорема о редукции субъекта для PTS

$$\Gamma \vdash M : A \ \wedge \ M \twoheadrightarrow_\beta M' \ \Rightarrow \ \Delta \vdash M' : A$$

Следствия

- $$\left[\Gamma \vdash M : B \ \wedge \ B \twoheadrightarrow_\beta B'\right] \Rightarrow \ \Gamma \vdash M : B'$$

(в правиле преобразования ещё требуется $B' : s$!)

- Если A является Γ-термом и $A \twoheadrightarrow_\beta A'$, то A' тоже является Γ-термом.

Свойства PTS: Лемма конденсации

Лемма конденсации для PTS (Condensing, Strengthening)

$$\Gamma,\ x{:}A,\ \Delta\ \vdash\ M : B\ \wedge\ x \notin FV(\Delta) \cup FV(M) \cup FV(B)\ \Rightarrow\ \Gamma, \Delta\ \vdash\ M : B$$

Свойства PTS: Теорема единственности типа

Определение. PTS называется ***функциональной*** или ***единосортной*** (singly sorted), если

1. $(c:s_1), (c:s_2) \in \mathcal{A} \Rightarrow \; s_1 \equiv s_2$;

2. $(s_1, s_2, s_3), (s_1, s_2, s_4) \in \mathcal{R} \Rightarrow \; s_3 \equiv s_4$.

Все рассматриваемые нами ранее системы функциональны.

Теорема Для функциональной PTS

$$\Gamma \vdash M : A \;\wedge\; \Gamma \vdash M : A' \;\Rightarrow\; A \equiv_\beta A'$$

Степень терма на λ-кубе

Имеется полезная классификация предтермов, полезная для анализа допустимых термов в системах λ-куба. Задаётся отображение $\sharp : \Lambda \to \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{rcl} \sharp(\square) & = & 3 \\ \sharp(*) & = & 2 \\ \sharp({}^{\square}x) & = & 1 \\ \sharp({}^{*}x) & = & 0 \\ \sharp(\lambda x{:}A.\,B) \;=\; \sharp(\Pi x{:}A.\,B) & = & \sharp B \\ \sharp(M\,N) & = & \sharp M \end{array}$$

Для $M \in \Lambda$ значение $\sharp(M)$ называют ***степенью*** M.

Утверждение. Для всех систем λ-куба

$$\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \sharp(M) + 1 = \sharp(A)$$

Свойства PTS: нормализуемость.

Определение. PTS называется ***сильно нормализуемой***, если все её допустимые термы сильно нормализуемы, то есть

$$\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; SN(M) \;\wedge\; SN(A)$$

Утверждение. Все системы λ-куба сильно нормализуемы.

Теорема. Разрешимость TCP и TSP для нормализуемой PTS. Если PTS с конечным числом сортов сильно или слабо нормализуема, то TCP и TSP разрешимы.

Населённость $\bot$

Утверждение. Пусть λS — это PTS, расширяющая $\lambda 2$. Тогда

$$\vdash_{\lambda S} M : \bot \;\Rightarrow\; M \text{ не имеет NF}$$

То есть $\bot = \Pi\alpha{:}{*}.\,\alpha$ может быть населён только термами, не имеющими нормальной формы. Отсюда следует, что если система нормализуема, то $\bot$ не населён.

Проверка типов для λP

Одновременно задаются два алгоритма:

$$\begin{aligned} \texttt{OK} &: \texttt{PreContext} \to \texttt{Bool} \\ \texttt{TY} &: \texttt{PreContext} \to \texttt{PreTerm} \to \texttt{Term} \end{aligned}$$

$\texttt{OK}\ \Gamma$ проверяет допустимость контекста Γ
$\texttt{TY}\ \Gamma\ M$ возвращает тип M в контексте Γ
(и $\perp$, если M — нетипизируемое предвыражение)

Теорема. Алгоритм $\texttt{TY}$ *корректен* и *полон*:

$$\begin{array}{lll} \forall \Gamma, M \quad \texttt{TY}\ \Gamma\ M = A & \Rightarrow & \Gamma \vdash M : A \\ \forall \Gamma, M, A \quad \Gamma \vdash M : A & \Rightarrow & \texttt{TY}\ \Gamma\ M =_{\beta\eta} A \end{array}$$

(полнота осмысленна, если имеется единственность типа)
(из полноты следует, что алгоритм завершается на допустимых термах; хотим большего)

Проверка типов для λP: алгоритм

$$
\begin{array}{lcl}
\mathtt{OK}\ \langle\rangle & = & \mathtt{TRUE} \\
\mathtt{OK}\ (\Gamma, x{:}A) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ A\ \in \{*, \square\}\ \mathtt{then}\ \mathtt{OK}\ \Gamma\ \mathtt{else}\ \mathtt{FALSE} \\
\mathtt{TY}\ \Gamma\ x & = & \mathtt{if}\ \mathtt{OK}\ \Gamma\ \wedge\ x{:}A \in \Gamma\ \mathtt{then}\ A\ \mathtt{else}\ \bot \\
\mathtt{TY}\ \Gamma\ * & = & \mathtt{if}\ \mathtt{OK}\ \Gamma\ \mathtt{then}\ \square\ \mathtt{else}\ \bot \\
\mathtt{TY}\ \Gamma\ (M\,N) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ M = C \neq \bot\ \wedge\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ N = D \neq \bot \\
 & & \mathtt{then}\ \mathtt{if}\ C \twoheadrightarrow_\beta \Pi x{:}A.\,B\ \wedge\ A =_\beta D \\
 & & \qquad \mathtt{then}\ B[x := N]\ \mathtt{else}\ \bot \\
 & & \mathtt{else}\ \bot \\
\mathtt{TY}\ \Gamma\ (\lambda x{:}A.\,M) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ (\Gamma, x{:}A)\ M = B \neq \bot \\
 & & \mathtt{then}\ \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ (\Pi x{:}A.\,B) \in \{*, \square\} \\
 & & \qquad \mathtt{then}\ \Pi x{:}A.\,B\ \mathtt{else}\ \bot \\
 & & \mathtt{else}\ \bot \\
\mathtt{TY}\ \Gamma\ (\Pi x{:}A.\,B) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ A = *\ \wedge\ \mathtt{TY}\ (\Gamma, x{:}A)\ B = s \\
 & & \mathtt{then}\ s\ \mathtt{else}\ \bot
\end{array}
$$

Проверка типов для λP: завершимость (1)

Рекурсивный вызов без уменьшения меры:

$$\begin{array}{rcl}\mathtt{TY}\ \Gamma\ (\lambda x{:}A.\,M) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ (\Gamma, x{:}A)\ M = B \neq \bot \\ & & \mathtt{then}\ \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ (\Pi x{:}A.\,B) \in \{*, \Box\} \\ & & \qquad \mathtt{then}\ \Pi x{:}A.\,B\ \mathtt{else}\ \bot \\ & & \mathtt{else}\ \bot\end{array}$$

Но в λP можно заменить

$$\mathtt{TY}\ \Gamma\ (\Pi x{:}A.\,B) \in \{*, \Box\}$$

на

$$\mathtt{TY}\ \Gamma\ A = *$$

(проверьте это!)

Проверка типов для λP: завершимость (2)

β-редукция и β-эквивалентность неразрешимы для ***пред***термов!

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{TY}\ \Gamma\ (M\,N) & = & \mathtt{if}\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ M = C \neq \bot\ \wedge\ \mathtt{TY}\ \Gamma\ N = D \neq \bot \\
& & \mathtt{then\ if}\ C \twoheadrightarrow_\beta \Pi x{:}A.\,B\ \wedge\ A =_\beta D \\
& & \qquad \mathtt{then}\ B[x := N]\ \mathtt{else}\ \bot \\
& & \mathtt{else}\ \bot
\end{array}
$$

К счастью, они вызываются над гарантированно ***допустимыми*** термами, и известно, что λP является SN и CR.

Теорема. Алгоритмы $\mathtt{TY}\ \Gamma\ M$ и $\mathtt{OK}\ \Gamma$ завершаются для любого предтерма M и предконтекста Γ.

Экстенсиональность и интенсиональность

Правило преобразования интенсионально и разрешимо:

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s \quad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$$

Можно ввести в теорию экстенсиональность, добавив правила

$$\frac{\Gamma \vdash M, N : A \to B \quad \Gamma \vdash p : (\Pi x : A.\, M\, x = N\, x)}{\Gamma \vdash (M = N) : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Gamma \vdash (A = B) : s}{\Gamma \vdash P : B}$$

TCP станет неразрешимым, поскольку сведётся к TIP.

Литература (1)

ITT2007
Herman Geuvers, Introduction to Type Theory
Types Summer School, August 2007, Bertinoro, Italy

`http://typessummerschool07.cs.unibo.it/courses/geuvers-4.pdf`

LCWT гл. 5.2, 5.3, 5.5
Henk Barendregt, Lambda calculi with types,
Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993

Литература (2)

ATTAPL гл. 2
Benjamin C. Pierce, editor.
Advanced Topics in Types and Programming Languages, MIT, 2005

ITT гл. 6
Herman Geuvers, Introduction to Type Theory
Alfa Lernet Summer school 2008, Uruguay

`http://www.cs.ru.nl/H.Geuvers/Uruguay2008SummerSchool.html`