Л.Шварц

АНАЛИЗ

ТОМ 2

Имя Лорана Шварца — одного из крупнейших математиков современности — хорошо известно советским специалистам.

Его двухтомный курс существенно отличается от всех имеющихся книг по анализу. Изложение характеризуется глубоким взаимопроникновением методов классического и функционального анализа, современной алгебры и топологии. Следует отметить также блестящий стиль курса, умение автора выделить основное, объяснить значение тех или иных идей.

Второй том посвящен дифференциальным уравнениям, внешним дифференциальным формам и функциям комплексного переменного.

Книга Л. Шварца, несомненно, заинтересует преподавателей математики, научных работников в области математики, физики и механики, а также инженеров и будет весьма полезна студентам университетов, педагогических институтов и высших технических учебных заведений с углубленным изучением математики.

Содержание

Предметный указатель

ГЛАВА V

Дифференциальные уравнения

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Какие вопросы можно изучить, рассматривая дифференциальное уравнение вида

$$\vec{y}' = \vec{L}(x, y)? \qquad \text{(V, 1; 1)}$$

Пусть заданы открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал $|a, b|$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ [1]), открытое множество Ω аффинного нормированного пространства F [2]) и *непрерывное* отображение $\vec{L}$ множества $|a, b| \times \Omega$ в $\vec{F}$. Выясним, существует ли на $|a, b|$ такая дифференцируемая функция f: $y = f(x)$ со значениями в Ω, чтобы для нее и ее производной функции имело место тождество

$$\vec{f}'(x) \equiv \vec{L}(x, f(x)). \qquad \text{(V, 1; 2)}$$

Согласно теореме о сложной функции, при такой постановке вопроса функция $\vec{f}'$ всегда будет непрерывной, а, значит, функция f будет не только дифференцируемой, но и непрерывно дифференцируемой.

Функция, обладающая этими свойствами, называется *решением* или *интегралом* дифференциального уравнения.

В частном случае, когда F есть пространство $\mathbb{R}^n$, задание функции f равносильно заданию системы n скалярных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Отображение $\vec{L}$ эквивалентно системе n

---

[1]) Значениями a и b могут быть $-\infty$ и $+\infty$, но тогда $|a, b|$ их не содержит и, следовательно, $|a, b| \subset \mathbb{R}$, а не $\overline{\mathbb{R}}$.

[2]) Пространство F — аффинное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, но $|a, b|$ — это всегда интервал в $\mathbb{R}$; $\vec{f}'(x)$ есть производный вектор, т.е., согласно определению (III, 3; 1), это элемент из $\vec{F}$. Если заменить $\mathbb{R}$ аффинным нормированным пространством E, то мы получим *уравнение в полных дифференциалах*, обладающее существенно иными свойствами. Случай, когда E является полем комплексных чисел, будет изучен позже.

непрерывных скалярных функций $L_1, L_2, \ldots, L_n$, зависящих от $n+1$ переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, а дифференциальное уравнение эквивалентно «дифференциальной системе»:

$$\begin{aligned} y_1' &= L_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= L_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= L_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 1; 3)$$

Интеграл или решение такой дифференциальной системы представляет собой систему n скалярных функций $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n$, удовлетворяющих следующим тождествам:

$$f_i'(x) \equiv L_i(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\mathrm{V}, 1; 4)$$

Выписанные дифференциальные уравнения являются уравнениями первого порядка в том смысле, что в них входит производная только первого порядка. Естественно, что можно рассматривать уравнения и высших порядков, но они сводятся к уравнениям первого порядка.

Рассмотрим, например, следующее дифференциальное уравнение:

$$\vec{y}^{(p)} = L(x, y, \vec{y}', \vec{y}'', \ldots, \vec{y}^{(p-1)}). \qquad (\mathrm{V}, 1; 4_2)$$

Будем считать, что $|a, b|$ — это интервал вещественной прямой, F — аффинное нормированное пространство, $\mathcal{U}$ — открытое множество пространства $F \times \vec{F}^{(p-1)}$ и $\vec{L}$ — непрерывное отображение $|a, b| \times \mathcal{U}$ в $\vec{F}$. Мы отыскиваем функцию f, определенную на $|a, b|$, принимающую значения в F, p раз дифференцируемую и такую, что для каждого x из $|a, b|$ точка $(f(x), \vec{f}'(x), \ldots, \vec{f}^{(p-1)}(x))$ лежит в $\mathcal{U}$ и имеет место тождество

$$\vec{f}^{(p)}(x) \equiv L(x, f(x), \vec{f}'(x), \ldots, \vec{f}^{(p-1)}(x)). \qquad (\mathrm{V}, 1; 5)$$

Положим

$$f = g_0, \quad \vec{f}' = \vec{g}_1, \ldots, \vec{f}^{(p-1)} = \vec{g}_{p-1}. \qquad (\mathrm{V}, 1; 6)$$

Очевидно, отыскание функции f равносильно нахождению системы функций $g_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{p-1}$, удовлетворяющих дифференциальной системе:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_0' &= \vec{g}_1, \\
\vec{g}_1' &= \vec{g}_2, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\vec{g}_{p-2}' &= \vec{g}_{p-1}, \\
\vec{g}_{p-1}' &= L(x, g_0, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{p-1}).
\end{aligned} \tag{V, 1; 7}$$

Эта система представляет собой дифференциальное уравнение, аналогичное рассматривавшемуся ранее уравнению, в котором пространство F заменено произведением $F \times \vec{F}^{p-1}$, а открытое множество Ω — множеством $\mathcal{U}$. Полагая $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}) = z$, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\vec{z}' = \mathscr{L}(x, z), \tag{V, 1; 8}$$

где $z = g(x) = (g_0(x), \vec{g}_1(x), \ldots, \vec{g}_{p-1}(x))$, а $\vec{\mathscr{L}}$ есть отображение $(x, (y_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{p-1})) \to (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{p-1}, L(x, y_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{p-1}))$ множества $|a, b| \times \mathcal{U}$ в $\vec{F}^p$.

Мы предполагали, что рассматриваемое дифференциальное уравнение *регулярно*, т. е. разрешимо относительно производной высшего порядка. На практике это часто не так, что приводит к многочисленным трудностям, и в частности к отсутствию решения или к существованию нескольких решений, соответствующих заданным начальным условиям. В теоремах, которые мы приведем в дальнейшем, *всегда* будет предполагаться, что уравнение разрешено относительно производной наивысшего порядка, т. е. всегда представлено в виде (V, 1; 1).

Для такого уравнения задание значения y_0 решения f в точке x_0 интервала $|a, b|$ называется *условием Коши*. Коротко говорят так: «условие Коши x_0, y_0». Если задано дифференциальное уравнение порядка p вида (V, 1; 4), то, учитывая, что оно может быть приведено к виду (V, 1; 1), можно условие Коши записать в виде значения $z_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{p-1})$ функции $z = g(x)$ для $x = x_0$, т. е. значения функции f и ее производных порядков $1, 2, \ldots, p-1$ в точке x_0 интервала $|a, b|$.

Пользуясь некоторыми условиями, относящимися к функции $\vec{L}$, докажем, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение, соответствующее заданному условию Коши.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Дадим прежде всего следующее определение.

Говорят, что ограниченный интервал $J = |x_0 - \alpha, x_0 + \beta|$, $\alpha, \beta > 0$, содержащийся в $|a, b|$, и замкнутый шар B с центром y_0 радиуса $R > 0$ (конечного или бесконечного), содержащийся в Ω, *образуют интервал и шар безопасности для* $\vec{L}$ *относительно* $x_0 \in |a, b|$, $y_0 \in \Omega$, если существует такое число $M \geqslant 0$ (конечное или бесконечное), что, с одной стороны, норма $\|\vec{L}(x, y)\|$ будет мажорироваться числом M на произведении $J \times B$, а с другой стороны, имеют место неравенства $\alpha \leqslant R/M$, $\beta \leqslant R/M$ [1]). Система интервала и шара безопасности *всегда существует*. В самом деле, так как функция $\vec{L}$ предполагалась непрерывной, то можно выбрать интервал $J_1 = | x_0 - \alpha_1, x_0 + \beta_1 |$ и шар B с центром y_0 радиуса R, такие, чтобы отображение $\vec{L}$ было ограниченным на $J_1 \times B$. Пусть M — граница $\|\vec{L}(x, y)\|$ в $J_1 \times B$. Выберем интервал $J = | x_0 - \alpha, x_0 + \beta |$, где α и β определены соотношениями $\alpha = \inf(\alpha_1, R/M)$, $\beta = \inf(\beta_1, R/M)$. Тогда J и B будут удовлетворять требуемым условиям.

Конечно, можно, если это потребуется по тем или иным причинам, заменить число R меньшим числом R'. Но тогда при выбранном R' *будут снова определяться числа* α' и β'. Таким образом, если J, B составляют систему безопасности и если $J' \subset J$ и $B' \subset B$, то J', B' не обязательно образуют систему безопасности, однако J', B такую систему образуют.

Мы будем говорить, что отображение $\vec{L}$ *локально обладает свойством Липшица по y в* $| a, b | \times \Omega$, если, каковы бы ни были точки x_0 из $| a, b |$ и y_0 из Ω, существуют такие окрестности $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ этих точек и такое число $k \geqslant 0$, что для $x \in \mathscr{A}$, $y_1 \in \mathscr{B}$, $y_2 \in \mathscr{B}$ имеет место неравенство

$$\|\vec{L}(x, y_1) - \vec{L}(x, y_2)\| \leqslant k \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \qquad (V, 2; 1)$$

В этом случае при заданных x_0 и y_0 можно, как и ранее, определить интервал безопасности J и шар безопасности

[1]) Только в этой главе мы позволяем себе полагать $R = +\infty$, чтобы при $B = F$ продолжать говорить о B как о шаре с центром y_0. В этом случае можно положить $M = +\infty$. Числа α и β тогда могут быть произвольными, но конечными (интервал J должен быть ограниченным). В особом случае, когда точка x_0 совпадает с левым концом a (соответственно с правым концом b) интервала $|a, b|$, интервал безопасности будет иметь вид $[a, a + \beta|$, $\beta > 0$ (соответственно $|b - \alpha, b]$, $\alpha > 0$). *Существенным является тот факт, что такой интервал безопасности является некоторой окрестностью точки* x_0 *в* $|a, b|$. Мы больше не будем говорить об этих особых случаях. Если это потребуется, читатель сам внесет необходимые изменения.

B так, чтобы отображение $\vec{L}$ обладало свойством Липшица по y в $J \times B$, т. е. удовлетворяло неравенству (V, 2; 1) для $x \in J$, $y_1 \in B$ и $y_2 \in B$.

Существование и единственность локальных решений

Теорема 1 (Коши). *Пусть задано дифференциальное уравнение* (V, 1; 1), *в котором $\vec{L}$ является непрерывным отображением $]a, b[\times\Omega$ в полное пространство $\vec{F}$, локально обладающим свойством Липшица по y. Тогда при заданном условии Коши x_0, y_0 и такой системе интервала безопасности J и шара безопасности B относительно x_0, y_0, что функция $\vec{L}$ обладает в $J \times B$ свойством Липшица по y, рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение f, удовлетворяющее заданному условию Коши $f(x_0)=y_0$, определенное в J и такое, что $f(J) \subset B$.*

Доказательство. Мы можем заменить дифференциальное уравнение с начальным условием на эквивалентное ему интегральное уравнение. В самом деле, если дифференцируемая функция f является решением дифференциального уравнения и удовлетворяет начальному условию $f(x_0)=y_0$, то в силу непрерывности f и $\vec{L}$ функция $x \to \vec{L}(x, f(x))$ по теореме о сложной функции непрерывна, а из следствия 1 теоремы 89 гл. II вытекает, что f как первообразная этой функции есть неопределенный интеграл. Таким образом, f — непрерывная функция, являющаяся решением интегрального уравнения

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad (V, 2; 2)$$

Обратно, если непрерывная функция f является решением этого интегрального уравнения, то та же самая теорема 89 гл. II утверждает, что правая часть равенства (V, 2; 2) дифференцируема и ее производная функция равна $x \to \vec{L}(x, f(x))$. Следовательно, f — решение дифференциального уравнения. Кроме того, очевидно, что $f(x_0)=y_0$.

Обозначим через E метрическое пространство $(B^J)_{cb}$ непрерывных ограниченных отображений J в B. Пусть f — некоторый элемент E. Исходя из функции f, построим функцию g, определенную на J со значениями в F, по формуле

$$g(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad (V, 2; 3)$$

В силу выбора интервала и шара безопасности эта функция принимает в действительности свои значения не в F, а в шаре безопасности B. Это видно из следующих неравенств:

$$\|\overrightarrow{g(x)-y_0}\| \leqslant |x-x_0| \sup_{\xi \in J} \|\vec{L}(\xi, f(\xi))\| \leqslant$$
$$\leqslant |x-x_0| \sup_{\substack{\xi \in J \\ \eta \in B}} \|\vec{L}(\xi, \eta)\| \leqslant \frac{R}{M} M = R. \qquad (\mathrm{V}, 2; 4)$$

Итак, каждому элементу f из E мы поставили в соответствие другой элемент g из E и, следовательно, определили некоторое отображение Φ пространства E в E: $g=\Phi(f)$. Рассматриваемое интегральное уравнение эквивалентно уравнению

$$f=\Phi(f). \qquad (\mathrm{V}, 2; 5)$$

Для того чтобы доказать, что это уравнение имеет решение, и притом единственное, нам достаточно будет показать, что мы находимся в условиях применимости теоремы о неподвижной точке (теорема 46 гл. II).

Множество E — это полное метрическое пространство. В самом деле, шар B замкнут в полном по предположению пространстве F; следовательно, по теореме 43 гл. II он полон, а тогда в силу следствия 2 теоремы 65 гл. II множество $(B^J)_{cb}$ полно. Проверим теперь, является ли отображение Φ сжатием пространства E. Для $u \in E$ и $v \in E$ в силу (V, 2; 1)

$$\|\vec{L}(\xi, u(\xi)) - \vec{L}(\xi, v(\xi))\| \leqslant$$
$$\leqslant k\|\overrightarrow{u(\xi)-v(\xi)}\| \leqslant kd(u, v) \quad \text{для} \quad \xi \in J, \qquad (\mathrm{V}, 2; 6)$$
$$d(\Phi(u), \Phi(v)) \leqslant \sup(\alpha, \beta)\, kd(u, v), \qquad (\mathrm{V}, 2; 7)$$

поскольку $|x-x_0| \leqslant \sup(\alpha, \beta)$. Мы получили соотношение Липшица, в котором коэффициент Липшица не обязательно <1, а значит, Φ не обязательно является сжатием. Однако при выбранном шаре B всегда можно, заменяя α или β на меньшие числа α_0, β_0, такие, что $\max(\alpha_0, \beta_0) < 1/k$, заменить интервал J меньшим интервалом J_0 так, чтобы отображение Φ было сжатием[1]). Однако это не обязательно, так как мы сейчас уви-

[1]) Можно было бы довольствоваться и этим, слегка изменив условие: вместо того, чтобы говорить: «*какова бы ни была* система безопасности J, B, такая, что $\vec{L}$ обладает свойством Липшица в $J \times B$, существует решение, и притом единственное», достаточно было бы сказать: «*существует* такая система безопасности $J_0 \times B$, при которой существует, и притом единственное, решение ...».

Если речь идет лишь о теории дифференциальных уравнений, то такое дим, что при любом выборе J и B *всегда существует некоторая итерация отображения* Φ, *являющаяся сжатием.* В самом деле, отправляясь от двух произвольных элементов u и v пространства E, построим их образы с помощью последовательных итераций функции Φ. Имеем $u_0 = u$, $u_1 = \Phi(u_0)$, ..., $u_n = \Phi(u_{n-1})$, ... и $v_0 = v$, $v_1 = \Phi(v_0)$, ..., $v_n = \Phi(v_{n-1})$, ... Для этих итераций справедливы оценки

$$\|\overrightarrow{u_1(x) - v_1(x)}\| \leqslant |x - x_0| kd(u_0, v_0). \tag{V, 2; 8}$$

Так как

$$\overrightarrow{u_2(x) - v_2(x)} = \int_{x_0}^{x} (\vec{L}(\xi, u_1(\xi)) - \vec{L}(\xi, v_1(\xi)))\, d\xi, \tag{V, 2; 8$_2$}$$

то

$$\|\overrightarrow{u_2(x) - v_2(x)}\| \leqslant \int_{|x_0, x|} k \|\overrightarrow{u_1(\xi) - v_1(\xi)}\| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant k^2 d(u_0, v_0) \int_{|x_0, x|} |\xi - x_0|\, d\xi = \frac{(x - x_0)^2}{2} k^2 d(u_0, v_0). \tag{V, 2; 9}$$

Легко получить общую формулу. Предположим, что нами уже доказано неравенство

$$\|\overrightarrow{u_{n-1}(x) - v_{n-1}(x)}\| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} k^{n-1} d(u_0, v_0), \tag{V, 2; 10}$$

и покажем, что такое же неравенство имеет место для $u_n - v_n$. В самом деле,

$$\overrightarrow{u_n(x) - v_n(x)} = \int_{x_0}^{x} (\vec{L}(\xi, u_{n-1}(\xi)) - \vec{L}(\xi, v_{n-1}(\xi)))\, d\xi, \tag{V, 2; 11}$$

откуда

$$\|\overrightarrow{u_n(x) - v_n(x)}\| \leqslant \int_{|x_0, x|} k \|\overrightarrow{u_{n-1}(\xi) - v_{n-1}(\xi)}\| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant k^n d(u_0, v_0) \int_{|x_0, x|} \frac{|\xi - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} d\xi = \frac{|x - x_0|^n}{n!} k^n d(u_0, v_0).$$

изменение условия не отражается на существе дела, ибо в любом случае теорема 2 позволит обнаружить решение во всей области существования.

Однако в разделах, близких к теории дифференциальных уравнений (интегральные уравнения), в которых необходимо иметь все решение целиком, а не кусок этого решения, сужать так условия нельзя. Кроме того, часто полезно иметь в своем распоряжении *как можно больший* интервал J, в котором процесс последовательных приближений дает искомое решение.

Таким образом, итерация Φ^n отображения Φ удовлетворяет неравенству

$$d(\Phi^n(u),\ \Phi^n(v)) \leqslant \frac{(\sup(\alpha,\ \beta))^n}{n!} k^n d(u,\ v). \qquad (V, 2; 12)$$

Для достаточно больших значений n имеем

$$\frac{(\sup(\alpha,\ \beta))^n}{n!} k^n < 1,$$

а это означает, что соответствующая итерация Φ^n является сжатием на E. Из замечания, следующего после теоремы 46 гл. II, вытекает, что в этом случае применим метод последовательных приближений и что существует, и притом единственная, неподвижная точка преобразования Φ. Тем самым доказаны существование и единственность решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Только что полученные оценки показывают, кроме того, что если это решение f искать методом последовательных приближений, то можно получить его представление в виде ряда

$$\begin{aligned} &f = f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_n - f_{n-1}) + \ldots, \\ &f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi,\ f_{n-1}(\xi))\, d\xi, \end{aligned} \qquad (V, 2; 13)$$

при этом будет выполняться неравенство

$$|||\overrightarrow{f_n - f_{n-1}}||| \leqslant \frac{(\sup(\alpha,\ \beta))^{n-1}}{(n-1)!} k^{n-1} |||\overrightarrow{f_1 - f_0}|||. \qquad (V, 2; 14)$$

Общий член ряда очень быстро убывает, как убывают члены ряда, представляющего экспоненциальную функцию.

Замечания. 1°) В случае конечномерного F можно показать, что одной только непрерывности $\vec{L}$ *без условия Липшица* достаточно для того, чтобы дифференциальное уравнение имело *по крайней мере* одно локальное решение, удовлетворяющее заданному условию Коши. Другими словами, существование решения всегда обеспечено и *может быть только нарушено условие единственности*. Если же F бесконечномерно, а $\vec{L}$ только непрерывно, то, возможно, мы не получим ни существования, ни единственности.

Очень простой пример показывает, что если $\vec{L}$ не удовлетворяет условию Липшица, то при одном и том же условии Коши дифференциальное уравнение может иметь несколько решений. Рассмотрим, например, скалярное дифференциальное уравнение ($F = \mathbb{R}$):

$$y' = 3y^{2/3}. \qquad (V, 2; 15)$$

Так как отношение $\frac{|y^{2/3}-0|}{|y-0|}=\frac{1}{|y|^{1/3}}$ не ограничено при $y\neq 0$, стремящемся к 0, то в окрестности точки $y=0$ условие Липшица не выполняется.

Общее решение этого уравнения таково:

$$y=(x-c)^3,\ \text{где } c \text{ — постоянная и } y=0. \qquad (\mathrm{V}, 2;\ 16)$$

Если мы будем искать решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию $y=0$ при $x=0$, то увидим, что таких решений имеется бесчисленное множество, и в частности четыре следующих решения:

$$\begin{aligned} &\text{a) } y=0; && \text{b) } y=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0,\\ x^3 & \text{для } x>0;\end{cases}\\ &\text{c) } y=\begin{cases} x^3 & \text{для } x<0,\\ 0 & \text{для } x\geqslant 0;\end{cases} && \text{d) } y=x^3. \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 2;\ 16_2)$$

2°) Легко видеть, что ограничение интервалом безопасности J и шаром безопасности B необходимо. Эта система безопасности играет тройную роль:

a) Для того чтобы имело место неравенство (V, 2; 12), интервал J должен быть ограниченным (интервал $|a, b|$ не обязательно ограничен и может совпадать со всей прямой $\mathbb{R}$).

b) Для того чтобы можно было применить теорему о неподвижной точке, пространство E должно быть таким, чтобы отображение Φ не выводило бы за его пределы. Однако если окажется, что L определено на $|a, b|\times F$ (другими словами, если $\Omega=F$), то можно, с этой точки зрения, положить $R=M=+\infty$, $E=(F^J)_{cb}$, где J — произвольный ограниченный интервал из $|a, b|$.

c) Условие Липшица предполагается выполненным только локально, и надо выбирать J и B так, чтобы оно выполнялось в $J\times B$. Эта необходимость, очевидно, исчезает, если предполагать, что $\vec{L}$ удовлетворяет глобальному условию Липшица, т. е. имеет место соотношение (V, 2; 1) при любом $x\in|a, b|$ и любых y_1, y_2 в Ω.

Отсюда следует, что *если $\vec{L}$ непрерывно на $|a, b|\times F$ и удовлетворяет условию Липшица* (V, 2; 1) *в множестве $|a, b|\times F$, то в системе безопасности необходимости нет и решение дифференциального уравнения существует, и притом оно единственно на всем $|a, b|$. Последовательные приближения сходятся всюду и притом равномерно на каждой ограниченной части интервала $|a, b|$.*

Мы сейчас приведем пример, в котором $\vec{L}$ определено на $\mathbb{R}\times F$, *всюду принадлежит классу* C^∞, но решение дифференциального уравнения, однако, существует только в малом интервале с центром в начальной точке x_0. Конечно, условие Липщица здесь будет выполнено только локально.

В самом деле, рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$y' = -y^2. \tag{V, 2; 17}$$

Регулярность правой части позволяет заранее надеяться, что решение будет определено на всей вещественной прямой. Решая это уравнение, находим

$$y = \frac{1}{x-c}, \quad \text{где} \quad c \text{ — постоянная и } y = 0. \tag{V, 2; 18}$$

Мы видим, что при заданной постоянной c решение имеет *непредвиденную особенность* $x = c$. Если мы выберем начальное условие в виде $f(0) = y_0 = -1/c$, $c > 0$, то можем быть уверенными в том, что интервал безопасности не дойдет до точки c. Выясним здесь, что представляют собой J и B.

Возьмем, например, в качестве B шар с центром y_0 и радиусом R. Тогда $M = (1/c + R)^2$, откуда $\beta = R/(1/c + R)^2$. Нам хотелось бы выбрать R так, чтобы β было как можно большим. Однако величина, стоящая в правой части предыдущего равенства, меньше c, поскольку $R < c(1/c + R)^2$ — неравенство, эквивалентное неравенству $R < 1/c + 2R + cR^2$, которое всегда справедливо, так как $R < 2R$.

Распространение метода на решение некоторых интегральных уравнений

Пусть теперь F — *полное* аффинное нормированное пространство, Ω — открытое множество пространства F, $|a, b|$ — интервал прямой $\mathbb{R}$ и $\vec{L}$ — непрерывное отображение $(x, \xi, y) \to \vec{L}(x, \xi, y)$ множества $|a, b| \times |a, b| \times \Omega$ в пространство $\vec{F}$. Пусть, кроме того, $x \to h(x)$ — непрерывная функция на $|a, b|$ со значениями в F и x_0 — некоторая точка $|a, b|$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x) = h(x) + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(x, \xi, f(\xi))\, d\xi, \tag{V, 2; 19}$$

где f — искомая функция, непрерывная на $|a, b|$ со значениями в Ω. Так как искомая функция f находится под знаком интеграла, то написанное уравнение называется *интегральным*.

Это уравнение является обобщением уравнения (V, 2; 2), эквивалентного некоторому дифференциальному уравнению с начальными условиями. Здесь вместо y_0 написано $h(x)$, а $\vec{L}$ зависит от x и ξ, т. е. x также находится под знаком интеграла. Это уравнение не сводится к дифференциальному уравнению. *В данном случае ищется, вообще говоря, решение f, определенное на всем интервале* $|a, b|$.

Теорема 1_2. *Пусть заданы точка $y_0 \in F$, число $R \geqslant 0$ (конечное или бесконечное), число $M \geqslant 0$ (конечное или бесконечное) и число $k \geqslant 0$, такие, чтобы шар $B = B(y_0; R)$ с центром y_0 радиуса R лежал в Ω и чтобы выполнялись следующие условия:*

1°) *для $x \in |a, b|$, $\xi \in |a, b|$, $y \in B$ имеет место неравенство*

$$\|\vec{L}(x, \xi, y)\| \leqslant M; \qquad (V, 2; 20)$$

2°) *для $x \in |a, b|$, $\xi \in |a, b|$ и y_1, y_2, принадлежащих тому же шару B, имеет место неравенство Липшица*

$$\|\vec{L}(x, \xi, y_1) - \vec{L}(x, \xi, y_2)\| \leqslant k \|\overrightarrow{y_1 - y_2}\|; \qquad (V, 2; 20_2)$$

3°) *для всех x из $|a, b|$ имеет место неравенство*

$$\|\overrightarrow{h(x) - y_0}\| + |x - x_0| M \leqslant R. \qquad (V, 2; 20_3)$$

Тогда интегральное уравнение (V, 2; 19) *имеет, и притом единственное, решение, принимающее значения в B и определяемое методом последовательных приближений, равномерно сходящихся на любом ограниченном интервале $|a', b'|$ интервала $|a, b|$.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1, где $E = (B^{|a', b'|})_{cb}$, а отображение Φ: $f \to g = \Phi(f)$ из E в E определяется по формуле

$$g(x) = h(x) + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(x, \xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad (V, 2; 20_4)$$

Замечание. Предположим, что мы можем взять $R = +\infty$, $M = +\infty$ и что для каждого ограниченного интервала $|a', b'|$ из $|a, b|$ существует число $k = k(a', b')$ (но не для самого интервала $|a, b|$). Тогда заключение теоремы сохраняет свою силу.

Продолжение локальных решений дифференциального уравнения

Интервал J, выбранный с помощью предыдущего метода, является таким интервалом, в котором имеет место теорема о неподвижной точке и применим метод последовательных приближений. *Этот интервал не обязательно совпадает с наибольшим интервалом, в котором существует решение дифференциального уравнения.*

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы 1 на некотором подинтервале* $|a_1, b_1|$ *интервала* $|a, b|$ *два решения дифференциального уравнения принимают одно и то же значение в точке* c, *то эти решения совпадают во всем интервале* $|a_1, b_1|$.

Доказательство. Пусть J, B есть система безопасности относительно точки c. Поскольку решения f_1 и f_2 непрерывны, то можно найти такой меньший интервал $J' \subset J$, что $f_1(J') \subset B$ и $f_2(J') \subset B$. Тогда J', B также будет системой безопасности. Поскольку в J' существует единственное решение, принимающее заданное значение в точке c, значения которого лежат в B (теорема 1), то f_1 и f_2 совпадают в J'. Следовательно, если решения f_1 и f_2 совпадают в некоторой точке интервале $|a_1, b_1|$, то они необходимо совпадают в некоторой окрестности этой точки. Таким образом, множество $\mathscr{E}$ тех точек x, в которых $f_1(x) = f_2(x)$, есть непустое открытое множество из $|a_1, b_1|$. Это множество также и замкнуто, поскольку оно является прообразом множества $\{\vec{0}\} \in \vec{F}$ при непрерывном отображении $\overrightarrow{f_1 - f_2}$ отрезка $|a_1, b_1|$ в $\vec{F}$. Поскольку отрезок $|a_1, b_1|$ связен, мы получаем, что $\mathscr{E} = |a_1, b_1|$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Для дифференциального уравнения* (V, 1; 1), *удовлетворяющего условиям теоремы* 1 *и условию Коши* x_0, y_0, *существует максимальный интервал* $|a_0, b_0|$, $a \leqslant a_0 \leqslant x_0 \leqslant \leqslant b_0 \leqslant b$, *в котором существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию Коши* x_0, y_0. *Это решение единственно в этом интервале. Его нельзя продолжить до точки* a_0, *кроме, возможно, того случая, когда* $a_0 = a$, *и продолжить до точки* b_0, *кроме, быть может, того случая, когда* $b_0 = b$ [1]).

Доказательство. В самом деле, рассмотрим все такие точки γ, при которых существует решение дифференциального уравнения, соответствующее условию Коши x_0, y_0 в интервале $[x_0, \gamma]$. Согласно теореме, если γ_1 и γ_2 — две такие точки, $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$, то решение, определенное в $[x_0, \gamma_1]$, является продолжением решения, определенного в $[x_0, \gamma_2]$. Множество всех таких чисел γ имеет точную верхнюю грань b_0 в $\overline{\mathbb{R}}$. Решение тогда, очевидно, существует в интервале $[x_0, b_0[$.

[1]) Иначе говоря, $]a_0, b_0[$ является открытым интервалом $\overline{\mathbb{R}}$, кроме, быть может, того случая, когда $a_0 = a$ или $b_0 = b$.

Покажем, что если $b_0 < b$, то это решение не может быть продолжено до точки b_0, т. е. $f(x)$ *не имеет предела, когда* $x < b_0$ *стремится к* b_0. В самом деле, предположим, что такой предел существует, и обозначим его через $f(b_0)$. Тогда $\vec{f}'(x)$ имеет предел $\vec{L}(b_0, f(b_0))$. Из теоремы 14 гл. III следует, что функция f имеет в точке b_0 производную слева, равную $\vec{L}(b_0, f(b_0))$. Но тогда в окрестности точки b_0 существует решение уравнения, соответствующее условию Коши $b_0, f(b_0)$. Поскольку f удовлетворяет уравнению слева от точки b_0, то в силу единственности это решение совпадает с f слева от точки b_0. Таким образом, f оказалась продолженной до некоторого решения *справа* от точки b_0, что противоречит тому, что точка b_0 является точной верхней гранью множества точек γ.

Точно такие же рассуждения приводят к существованию наибольшего интервала $]a_0, x_0]$ и доказательству того, что при $a_0 \neq a$ функция f не может быть продолжена до точки a_0.

Если мы вернемся к примеру, приведенному выше в формуле (V, 2; 17), то увидим, что, отправляясь от начальных значений $x_0 = 0$, $y_0 = -1/c$, можно получить максимальный интервал существования решения в виде $]-\infty, c[$. Это решение не может быть продолжено до самой точки c.

Для получения глобальных решений, определенных на самом интервале $|a, b|$, надо наложить на $\vec{L}$ более ограничительные условия. Это как раз то, что мы видели в замечании 2°) на стр. 13 ($\vec{L}$ определена на $|a, b| \times F$ и удовлетворяет тому же глобальному условию Липшица по y на $|a, b| \times F$). Позже, пользуясь априорной оценкой решений (теорема 3), мы придем к более общей теореме 4.

Априорная оценка решений дифференциального уравнения

Теорема 3. *Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение*

$$z' = M(x, z), \tag{V, 2; 21}$$

где M — вещественная функция $\geqslant 0$, определенная и непрерывная на множестве $[x_0, b_0] \times \mathbb{R}_+$ [1]*.*

Пусть f — дифференцируемая на $[x_0, b_0]$ функция со значениями в аффинном нормированном пространстве F, удовлетворяющая строгим дифференциальным неравенствам

$$\|\vec{f}'(x)\| < M(x, \|\overrightarrow{f(x) - 0}\|), \quad \text{или} \quad \|\vec{y}'\| < M(x, \|\overrightarrow{y - 0}\|), \tag{V, 2; 22}$$

[1]) $\mathbb{R}_+$, как всегда, является множеством вещественных чисел $\geqslant 0$.

где 0 — *выбранное начало координат пространства* F. *Если* $f(x_0)=y_0$ *и если* g — *неотрицательное решение уравнения* (V, 2; 21), *соответствующее начальным значениям* x_0, $\|\overrightarrow{y_0-0}\|$ *и определенное в* $[x_0, b_0]$, *то для каждого* x *из* $[x_0, b_0]$ *имеет место оценка*

$$\|\overrightarrow{f(x)-0}\| \leqslant g(x), \qquad (\text{V}, 2; 23)$$

где для $x > x_0$ *имеет место знак* $<$.

Если интервал $[x_0, b_0]$ *заменен интервалом* $[a_0, x_0]$, *то одновременно следует заменить* g *решением* $h \geqslant 0$ *уравнения* $Z' = -M(x, z)$, *соответствующим тем же самым начальным значениям* x_0, $\|\overrightarrow{y_0-0}\|$.

Прежде чем приступить к доказательству, объясним, почему эта теорема называется «априорной оценкой решений дифференциальных уравнений». Пусть задано дифференциальное уравнение (V, 1; 1), где $\Omega = F$, и предположим, что $\vec{L}$ допускает оценку

$$\|\vec{L}(x, y)\| < M(x, \|\overrightarrow{y-0}\|). \qquad (\text{V}, 2; 23_2)$$

Тогда если существует решение f уравнения (V, 1; 1), определенное в $[x_0, b_0]$ и соответствующее начальным значениям x_0, y_0 (мы не утверждаем, что такое решение существует, мы говорим: «если оно существует»), то оно a priori допускает оценку (V, 2; 23). *Мажорируя правую часть* $\vec{L}$ *дифференциального уравнения, мы мажорируем и его решения.*

Доказательство. Доказательство очень близко к доказательству леммы для формулы конечных приращений (теорема 13 гл. III).

Пусть $x > x_0$. Функция g, очевидно, является возрастающей. Обозначим через A множество таких точек ξ интервала $[x_0, x]$, для которых имеет место неравенство (V, 2; 23) (где вместо x надо подставить ξ). Так как $x_0 \in A$, то это множество непусто. Пусть c — его точная верхняя грань. Так как предел точек ξ, удовлетворяющих неравенству (V, 2; 23), удовлетворяет этому же неравенству, то множество A замкнуто. Следовательно, множество A содержит точку c.

Докажем, что предположение $c < x$ противоречиво. В самом деле, если бы оно было верным, то для $\xi > c$ должно было бы быть справедливым неравенство $\|\overrightarrow{f(\xi)-0}\| > g(\xi)$. Устремляя $\xi > c$ к c, получаем отсюда $\|\overrightarrow{f(c)-0}\| \geqslant g(c)$, а так как в силу

$\|\overrightarrow{f(c)-0}\| \leqslant g(c)$, то

$$\|\overrightarrow{f(c)-0}\| = g(c). \qquad (V, 2; 24)$$

В этом случае

$$\|\vec{f}'(c)\| < M(c, \|\overrightarrow{f(c)-0}\|) = M(c, g(c)) = g'(c). \qquad (V, 2; 25)$$

Поэтому $\|\vec{f}'(c)\| < g'(c)$. Если λ является числом, заключенным строго между этими двумя числами, а γ — достаточно малое по модулю вещественное число, то

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| &< \lambda\gamma, \\ |g(c+\gamma)-g(c)| &> \lambda\gamma, \end{aligned} \qquad (V, 2; 26)$$

а следовательно,

$$\|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| < |g(c+\gamma)-g(c)|. \qquad (V, 2; 27)$$

Комбинируя (V, 2; 24) и (V, 2; 27), для $\gamma > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f(c+\gamma)-0}\| \leqslant \|\overrightarrow{f(c)-0}\| + \|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| < \\ < g(c) + (g(c+\gamma)-g(c)) = g(c+\gamma), \end{aligned} \qquad (V, 2; 28)\,[1]$$

что противоречит свойству точной верхней грани c. Поэтому $c = x$, чем доказывается соотношение (V, 2; 23) с неравенством $\leqslant$.

Остается доказать строгое неравенство для $x > x_0$. Предположим, что в некоторой точке $c > x_0$ имеет место равенство, т. е. (V, 2; 24). Мы возьмем на этот раз в (V, 2; 27) $-\gamma$ вместо $\gamma > 0$.

Снова комбинируя (V, 2; 24) и (V, 2; 27), получаем

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f(c-\gamma)-0}\| \geqslant \|\overrightarrow{f(c)-0}\| - \|\overrightarrow{f(c-\gamma)-f(c)}\| > \\ > g(c) - (g(c)-g(c-\gamma)) = g(c-\gamma). \end{aligned} \qquad (V, 2; 31)$$

Неравенство $\|\overrightarrow{f(c-\gamma)-0}\| > g(c-\gamma)$ при $\gamma > 0$ противоречит уже имеющемуся неравенству (V, 2; 23). Следовательно, (V, 2; 23) для $x > x_0$ действительно является строгим неравенством. Таким образом, для интервала $[x_0, b_0]$, $b_0 > x_0$, теорема доказана.

Аналогичным методом она доказывается и для отрезка $[a_0, x_0]$.

Замечания. 1°) Если иметь в виду неравенство (V, 2; 22) со знаком $\leqslant$, то без дополнительных предположений получить

[1]) Нумерация формул здесь и далее соответствует оригиналу. — *Прим. ред.*

(V, 2; 24) со знаком $\leqslant$, вообще говоря, нельзя. Возьмем, например, правую часть уравнения (V, 2; 15) в качестве M, $F=\mathbb{R}$ и в качестве точки 0 число нуль. Если f и g — два решения этого уравнения, соответствующие одним и тем же начальным значениям 0, 0, то для $x \geqslant 0$ имеет место неравенство $f \leqslant g$, а следовательно, также $g \leqslant f$, т. е. окончательно $f=g$. Другими словами, в этом случае для уравнения (V, 2; 15) решение единственно, что, как мы видели ранее, не имеет места.

2°) Эта теорема возвращает нас к теореме о конечных приращениях (теорема 13 гл. III) и лемме, служившей для ее доказательства. Рассмотрим, например, эту лемму, более общую, чем сама теорема.

Функция $x \to g(x) - g(0) + \varepsilon x + \varepsilon$ из этой леммы является решением дифференциального уравнения $z' = g'(x) + \varepsilon$, и имеет место неравенство $\|\overrightarrow{f'(x)}\| < g'(x) + \varepsilon$. Неравенство (V, 2; 23) теперь дает неравенство $\|\overrightarrow{f(1) - f(0)}\| < g(1) - g(0) + 2\varepsilon$, откуда, поскольку ε произвольно, следует (III, 5; 3).

Однако лемма и теорема 13 гл. III доказаны без предположения о существовании производной функции f на концах интервала. Здесь мы должны предполагать не только то, что производная $\vec{f}'(x_0)$ существует, но и то, что она удовлетворяет строгому неравенству $\|\vec{f}'(x_0)\| < M(x_0, \|\overrightarrow{y_0 - 0}\|)$. Если же это не так, то тот же самый пример (V, 2; 15) показывает, что заключение теоремы будет неверным.

Условие существования глобальных решений на $|a, b|$

Теорема 4. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (V, 1; 1) *и предположим, что $\vec{L}$ обладает следующими свойствами:*

1°) *$\vec{L}$ определено на $|a, b| \times F$ (т. е. $\Omega = F$), и имеет место оценка*

$$\|\vec{L}(x, y)\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{y - 0}\| + \nu, \tag{V, 2; 32}$$

где μ и ν — неотрицательные постоянные, а 0 — выбранное начало в F[1]*);*

2°) *каково бы ни было число $\rho > 0$, существует такое число $k = k(\rho)$, что при x, изменяющемся в $|a, b|$, и при y_1, y_2, из-*

[1]) Это начало особой роли не играет. Если его заменить другим началом $0'$, то мы получим то же самое неравенство с другими постоянными $\mu' = \mu$ и $\nu' = \mu \|\overrightarrow{0' - 0}\| + \nu$. Можно по желанию взять $0 = y_0$.

меняющихся в шаре $B(0, \rho)$, *имеет место условие Липшица* (V, 2; 1) *с постоянной* $k(\rho)$.

Тогда, если F *полно, для каждых начальных значений* x_0, y_0 *дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение на всем интервале* $| a, b |$.

Доказательство. В самом деле, определим возможный интервал безопасности около точки x_0. Зададим произвольно некоторое конечное число $R > 0$ и возьмем в качестве B шар с центром y_0 радиуса R. В этом шаре величина $\| \vec{L}(x, y) \|$ мажорируется числом $M = \mu(\| \overrightarrow{y_0 - 0} \| + R) + \nu$.

Следовательно, интервал безопасности определяется так: $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \beta]$, где

$$\sup(\alpha, \beta) \leqslant \frac{R}{\mu(\| \overrightarrow{y_0 - 0} \| + R) + \nu}. \qquad (V, 2; 32_2)$$

Из предположений относительно условия Липшица следует, что в множестве безопасности $J \times B$ отображение $\vec{L}$ обладает свойством Липшица по y (постоянная k соответствует радиусу $\rho = \| \overrightarrow{y_0 - 0} \| + R$).

Из всего сказанного мы получаем следующий фундаментальный результат: *для всех начальных значений* y_0, *при которых норма* $\| \overrightarrow{y_0 - 0} \|$ *ограничена фиксированным числом, длина интервала безопасности ограничена снизу некоторым фиксированным числом* > 0. Отправляясь от точки x_0, по интервалу безопасности пройдем вправо до точки $x_1 = x_0 + R/[\mu(\| \overrightarrow{y_0 - 0} \| + R) + \nu]$. Исходя из этой точки и начального значения $f(x_1)$, можно построить новый интервал безопасности, который позволит нам дойти до точки x_2. Исходя из нее и нового начального значения $f(x_2)$, можно по новому интервалу безопасности пройти до точки x_3 и т. д. Таким путем мы получим последовательность интервалов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, ... Каждый раз, найдя интервал $[x_{n-1}, x_n]$, мы тем самым определяем решение дифференциального уравнения в интервале $[x_0, x_n]$. Нам надо доказать, что в действительности после конечного числа шагов построения интервалов безопасности мы обязательно достигнем любой наперед заданной точки b' из интервала $| a, b |$.

Для этого достаточно показать, что длины интервалов $[x_{n-1}, x_n]$ ограничены снизу некоторым числом > 0. Согласно изложенному выше, это условие будет выполнено, если заранее известно, что последовательные начальные значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, ... при $x < b'$ находятся в некотором ограниченном множестве. По условию имеет место оценка (V, 2; 32). Значит, выполнены условия теоремы 3 с уравнением

$$z' = M_\varepsilon(x, z) = \mu z + \nu + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \qquad (V, 2; 33)$$

Решение этого уравнения, соответствующее начальным значениям x_0, $\|\overrightarrow{y_0 - 0}\|$, получается элементарно. Им будет функция

$$g_\varepsilon(x) = \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu + \varepsilon}{\mu}\right) e^{\mu(x - x_0)} - \frac{\nu + \varepsilon}{\mu}. \qquad (V, 2; 34)$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ в каждом интервале с началом x_0, в котором существует решение рассматриваемого уравнения, имеет место априорное неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x) - 0}\| \leqslant g_\varepsilon(x). \qquad (V, 2; 35)$$

Оно справедливо для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому имеет место также неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x) - 0}\| \leqslant \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu}{\mu}\right) e^{\mu(x - x_0)} - \frac{\nu}{\mu}. \qquad (V, 2; 36)$$

В частности, для каждого $x_n < b'$

$$\|\overrightarrow{f(x_n) - 0}\| \leqslant \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu}{\mu}\right) e^{\mu(b' - x_0)} - \frac{\nu}{\mu}. \qquad (V, 2; 37)$$

Отсюда следует, что значения $\vec{f}(x_n)$ находятся в некоторой ограниченной части пространства F, а это означает, что для $x_n < b'$ интервалы $[x_n, x_{n+1}]$ имеют длины, ограниченные снизу некоторым фиксированным числом > 0, т. е. что b' достигается при конечном числе n. Отсюда следует, что решение существует в $[x_0, b']$ для каждого конечного $b' \leqslant b$ и, значит, в $[x_0, b\,|$.

Точно так же доказывается существование решения в $|\,a, x_0]$ и, следовательно, в $|\,a, b\,|$.

Замечания. 1°) Если неравенство (V, 2; 32) заменить более слабым требованием вида

$$\|\vec{L}(x, y)\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{y - 0}\|^{1+\alpha} + \nu, \quad \alpha > 0, \qquad (V, 2; 38)$$

то заключение теоремы 4 будет неверным. Так, например, скалярное уравнение

$$y' = -\beta y^{(\beta+1)/\beta}, \quad \beta > 0, \qquad (V, 2; 39)$$

удовлетворяет этому условию в интервале $[0, +\infty[$ прямой $\mathbb{R}$ с $\alpha = 1/\beta$. Однако при начальных значениях 0, $1/c^\beta$ $(c > 0)$ его решение имеет вид

$$f(x) = \left(\frac{1}{c - x}\right)^\beta \qquad (V, 2; 40)$$

и определено в $[0, c[$, но не может быть продолжено до самой точки c.

2°) Теорема 4 имеет место при несколько более общих условиях. Предположим, например, что $b = +\infty$. Тогда для того, чтобы решение существовало в $|a, b'|$ при любом конечном b', т. е. в $|a, +\infty[$, достаточно, чтобы условия теоремы 4 выполнялись в каждом интервале $|a, b'|$.

Точно так же в случае конечных a и b, если функция $\vec{L}$ определена только на произведении $|a, b| \times \Omega$, где Ω — шар с центром 0 радиуса R_0, и если выполнены остальные условия теоремы 4, то можно утверждать, что решение в интервале $|a, b|$ существует, если только априорная оценка (V, 2; 36) удерживает $f(x)$ на расстоянии $\leqslant R_0' < R_0$ от 0, т. е. если при $l = \sup((b - x_0), (x_0 - a))$ имеет место неравенство

$$\left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu}{\mu}\right)e^{\mu l} - \frac{\nu}{\mu} < R_0. \qquad (V, 2; 41)$$

Применение к механике

Рассмотрим в качестве типичного примера основную задачу динамики материальной точки.

Материальная точка в трехмерном пространстве подвергается действию силы $\vec{F}$, зависящей от положения материальной точки, ее скорости и времени, а именно: $\vec{F} = \vec{F}(t, M, \vec{V})$. Основное уравнение динамики $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ запишется тогда в виде следующего дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$m\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, M, \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right). \qquad (V, 2; 42)$$

Заменяя здесь M на f или y и полагая $\vec{f}' = \vec{g}$ или $\vec{y}' = \vec{z}$, перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка[1])

$$\vec{y}' = \vec{z},$$
$$\vec{z}' = \vec{F}(t, y, \vec{z}).$$

Пусть теперь сила $\vec{F}$ является непрерывной функцией, локально удовлетворяющей условию Липшица по $(M, \vec{v})$, а также следующей оценке:

$$\|\vec{F}(t, M, \vec{v})\| \leqslant \alpha\|\overrightarrow{M - 0}\| + \beta\|\vec{v}\| + \gamma. \qquad (V, 2; 43)$$

[1]) Где переменная x обозначена через t.

(В качестве нормы можно взять, например, естественную норму трехмерного евклидова пространства.) Тогда, применяя предыдущую теорему, можно убедиться, что траектория точки, соответствующая начальному условию $M = M_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ для $t = t_0$, может быть продолжена до $t = +\infty$. Если же сила не удовлетворяет оценке (V, 2; 43), то этого, вообще говоря, утверждать нельзя. Может случиться, что существует некоторое предельное время t_1, такое, что траектория будет определена в открытом интервале $[t_0, t_1[$ и не может быть продолжена до точки t_1. В этом случае ситуация аналогична той, которая имела место для дифференциального уравнения (V, 2; 17).

Непрерывность решения как функции параметра

Предположим, что дифференциальное уравнение зависит от некоторого параметра λ, пробегающего топологическое пространство Λ. Пусть функция $\vec{L}$ непрерывна на $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$. Будем предполагать, кроме того, что эта функция *локально удовлетворяет условию Липшица* по y, т. е. для любой точки x_0, y_0, λ из $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ найдутся такая окрестность $J \times B \times \mathscr{V}$ этой точки и такая постоянная k, что для каждого $x \in J$, любых y_1 и y_2 из B и любого $\lambda \in \mathscr{V}$ выполняется условие Липшица

$$\|\vec{L}(x, y_1, \lambda) - \vec{L}(x, y_2, \lambda)\| \leqslant k \, \|\overrightarrow{y_1 - y_2}\|. \qquad \text{(V, 2; 44)}$$

Предлагается выяснить, будет ли решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию $y = y_0(\lambda)$ при $x = x_0(\lambda)$, *непрерывно зависящему от* λ, являться непрерывной функцией параметра λ. Через f_λ мы будем обозначать решение дифференциального уравнения, соответствующее данному начальному условию при заданном значении параметра λ. В действительности f является функцией x и λ, а величина f_λ есть соответствующая частная функция при фиксированном значении параметра λ.

Дифференциальное уравнение и начальное условие запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\vec{f}_\lambda)'(x) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x, \lambda) = \vec{L}(x, f(x, \lambda), \lambda), \\ f(x_0(\lambda), \lambda) &= y_0(\lambda). \end{aligned} \qquad \text{(V, 2; 45)}$$

Теорема 5. *Пусть $\vec{L}$ — непрерывная функция на $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$, локально удовлетворяющая условию Липшица по y. Если $\lambda \to x_0(\lambda)$ и $\lambda \to y_0(\lambda)$ суть непрерывные функции на Λ со значениями в $|a, b|$ и Ω соответственно и пространство F*

полно, то, каково бы ни было значение параметра λ_0, *можно найти некоторый интервал* $J =]\, x_0(\lambda_0) - \alpha,\ x_0(\lambda_0) + \beta\, [$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *шар* B *с центром* $y_0(\lambda_0)$ *радиуса* R *и окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* λ_0 *в* Λ, *такие, что для каждого* $\lambda \in \mathscr{V}$ *существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$, *определенное в* J *и принимающее значения в* B. *Кроме того, это решение является непрерывной функцией параметра; точнее, функция* $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ *является непрерывным отображением* $J \times \mathscr{V}$ *в* B *и частное отображение* $\lambda \to f_\lambda$ *окрестности* $\mathscr{V}$ *в метрическое пространство* $(B^J)_{cb}$ *непрерывно.*

Доказательство. Обратимся к теореме 46_2 гл. II, обосновывающей непрерывность относительно параметра неподвижной точки сжатия. Будем исходить сначала из интервала $J_1 =]\, x_0(\lambda_0) - \alpha_1,\ x_0(\lambda_0) + \beta_1\, [$, сферы $B = B(y_0(\lambda_0);\ R)$ и окрестности $\mathscr{V}_1$ точки λ_0, таких, что

a) в множестве $J_1 \times B \times \mathscr{V}_1$ функция $\vec{L}$ удовлетворяет условию Липшица (V, 2; 44) с некоторым коэффициентом k;

b) $\|\vec{L}(x, y, \lambda)\|$ имеет в $J_1 \times B \times \mathscr{V}_1$ конечную точную верхнюю грань M.

Такой выбор величин возможен, поскольку функция $\vec{L}$ непрерывна и локально удовлетворяет условию Липшица по y.

Определим теперь интервал $J =]\, x_0(\lambda_0) - \alpha,\ x_0(\lambda_0) + \beta\, [$ так, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta \leqslant \beta_1$ и

$$\alpha + \beta \leqslant \frac{R}{2M} \quad \text{и} \quad < \frac{1}{k}. \qquad (\text{V}, 2; 45_2)$$

Определим, наконец, окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0, $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_1$, так, чтобы для $\lambda \in \mathscr{V}$ имели место неравенства

$$\begin{gathered} x_0(\lambda_0) - \alpha \leqslant x_0(\lambda) \leqslant x_0(\lambda_0) + \beta, \\ \|\overrightarrow{y_0(\lambda) - y_0(\lambda_0)}\| \leqslant \frac{R}{2}. \end{gathered} \qquad (\text{V}, 2; 46)$$

Это возможно в силу предположений о непрерывности начальных значений по параметру.

Возьмем теперь полное пространство $E = (B^J)_{cb}$. Через Φ_λ обозначим отображение E в $(F^J)_{cb}$, определяемое равенствами

$$\Phi_\lambda(f) = g, \qquad g(x) = y_0(\lambda) + \int\limits_{x_0(\lambda)}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\, d\xi. \qquad (\text{V}, 2; 47)$$

Докажем прежде всего, что g принимает значения в B. Интервал J и шар B образуют систему безопасности, пригодную для всех значений λ из $\mathscr{V}$, а Φ_λ для всех $\lambda \in \mathscr{V}$ будет отображением пространства E в себя. В самом деле, согласно V, 2; 45_2) и (V, 2; 46), имеем

$$\|\overrightarrow{g(x)-y_0(\lambda_0)}\| \leqslant \|\overrightarrow{y_0(\lambda)-y_0(\lambda_0)}\| + |x-x_0(\lambda)|M \leqslant$$
$$\leqslant \frac{R}{2} + (\alpha+\beta)M \leqslant \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R. \quad \text{(V, 2; 48)}$$

Следовательно, g принимает значения в B, а Φ_λ является отображением E в E.

Так как, согласно (V, 2; 45_2), $(\alpha+\beta)k < 1$ и

$$d(\Phi_\lambda(u), \Phi_\lambda(v)) = \sup_{x\in J}\left\| \int_{x_0(\lambda)}^{x} (\vec{L}(\xi, u(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, v(\xi), \lambda))\, d\xi \right\| \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha+\beta)kd(u, v), \quad \text{(V, 2; 49)}$$

то отображение Φ_λ является сжатием с коэффициентом Липшица < 1, не зависящим от λ.

Наконец, для каждого фиксированного f из E частное отображение $\lambda \to \Phi_\lambda(f)$ непрерывно на $\mathscr{V}$. В самом деле, если λ стремится к λ_1, то

$$d(\Phi_\lambda(f), \Phi_{\lambda_1}(f)) \leqslant \|\overrightarrow{y_0(\lambda)-y_0(\lambda_1)}\| +$$
$$+ \sup_{x\in J}\left\| \int_{x_0(\lambda)}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\, d\xi - \int_{x_0(\lambda_1)}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\, d\xi \right\|. \quad \text{(V, 2; 50)}$$

В силу того что начальное значение $y_0(\lambda)$ непрерывно по λ, первый член правой части стремится к 0, когда λ стремится к λ_1. Второй член мажорируется величиной

$$\left\| \int_{x_0(\lambda)}^{x_0(\lambda_1)} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\, d\xi \right\| +$$
$$+ \sup_{x\in J}\left\| \int_{x_0(\lambda_1)}^{x} (\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1))\, d\xi \right\|. \quad \text{(V, 2; 51)}$$

Первое слагаемое в (V, 2; 51) стремится к 0, когда λ стремится к λ_1, так как оно не превосходит $|x_0(\lambda_1) - x_0(\lambda)|M$, а по предположению $x_0(\lambda)$ непрерывно по λ. Второе слагаемое мажорируется интегралом

$$\int_J \|\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\|\, d\xi. \quad \text{(V, 2; 52)}$$

Поскольку при ξ, изменяющемся в компакте J, точка $(\xi, f(\xi))$ пробегает некоторый компакт K из $J \times \Omega$, из теоремы 66 гл. IV вытекает, что, когда λ стремится к λ_1, норма $\|\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\|$ стремится к 0 равномерно относительно $(\xi, f(\xi)) \in K$, т. е. относительно $\xi \in J$, а это означает, что (V, 2; 52) стремится к 0.

Мы находимся, таким образом, в условиях применимости теоремы 46_2 гл. II. Неподвижная точка отображения Φ_λ является решением f_λ дифференциального уравнения, определенным в J со значениями в B и соответствующим начальным значениям $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$. Из теоремы 46_2 следует, что $\lambda \to f_\lambda$ является непрерывным отображением $\mathscr{V}$ в $E = (B^J)_{cb}$. Это утверждение, впрочем, эквивалентно непрерывности отображения $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ множества $J \times \mathscr{V}$ в B. В самом деле,

$$\|\overrightarrow{f(x, \lambda) - f(x_1, \lambda_1)}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\overrightarrow{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_1)}\| + \|\overrightarrow{f(x, \lambda_1) - f(x_1, \lambda_1)}\| \leqslant$$

$$\leqslant d(f_\lambda, f_{\lambda_1}) + \|\overrightarrow{f_{\lambda_1}(x) - f_{\lambda_1}(x_1)}\|. \quad (V, 2; 53)$$

Здесь первый член стремится к 0, поскольку нами доказана непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$, а второй член стремится к нулю, поскольку f_{λ_1} непрерывно в точке x_1. Значит, функция $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ непрерывна на $J \times \mathscr{V}$. (Обратно, так как J компактно, то в силу теоремы 66 гл. IV из непрерывности отображения $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ следует непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$.) Теорема 5 доказана.

Следствие. *Пусть $\vec{L}_n$ — последовательность непрерывных функций, определенных на $|a, b| \times \Omega$ со значениями в $\vec{F}$ и локально равномерно сходящихся к некоторому пределу $\vec{L}$ при n, стремящемся к бесконечности. Пусть $(x_0)_n$ — последовательность точек из $|a, b|$, сходящихся к точке x_0 интервала $|a, b|$, а $(y_0)_n$ — последовательность точек из Ω, сходящихся к точке $y_0 \in \Omega$.*

Пусть, кроме того, каждая точка множества $|a, b| \times \Omega$ имеет окрестность, в которой функции $\vec{L}_n$ удовлетворяют условию Липшица по y с постоянной Липшица, не зависящей от n.

Тогда существуют такой интервал J, являющийся окрестностью точки x_0 в $|a, b|$, такой шар B с центром в y_0 и такое целое число p, что при $n \geqslant p$ последовательность $(x_0)_n \in J$, последовательность $(y_0)_n \in B$, а уравнение $\vec{y}' = \vec{L}_n(x, y)$ имеет, и притом единственное, решение в J со значениями в B, соответствующее начальным значениям $(x_0)_n$, $(y_0)_n$, и при n, стремящемся к бесконечности, f_n сходится равномерно в J

к некоторому пределу $\vec{f}$, *являющемуся единственным решением дифференциального уравнения* $\vec{y}' = \vec{L}(x, y)$, *соответствующим начальным значениям* x_0, y_0.

Доказательство. Обозначим через Λ топологическое подпространство $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots; +\infty\}$ из $\overline{\mathbb{R}}$. Положим $\vec{L}_\infty = \vec{L}$, $(x_0)_\infty = x_0$, $(y_0)_\infty = y_0$. Тогда мы придем к теореме 5. (Локально равномерная сходимость $\vec{L}_n$ к $\vec{L}$ означает, что функция $(x, y, \lambda) \to \vec{L}_\lambda(x, y)$ является непрерывным отображением $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ в $\vec{F}$, ибо, когда x_ν сходится к x, y_ν сходится к y и λ_ν сходится к λ, имеет место неравенство $\|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu) - \vec{L}(x, y, \lambda)\| \leqslant \|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu) - \vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda)\| + \|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda) - \vec{L}(x, y, \lambda)\|$, члены которого стремятся к 0 при ν, стремящемся к бесконечности, из которого следуют все необходимые выводы.)

Предыдущая теорема, естественно, неполноценна, как и сама теорема 1, в том смысле, что она обеспечивает непрерывность решения дифференциального уравнения только в очень малом интервале J. Поэтому имеет смысл улучшить результаты в следующем направлении:

Теорема 6. *Пусть* $\vec{L}$ — *непрерывное отображение* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ *в* $\vec{F}$. *Предположим, кроме того, что для каждого значения параметра* λ *выполняются условия теоремы* 3, *где постоянные* μ, ν *и* $k(\rho)$ *не зависят от* λ. *Тогда при любом значении параметра* λ *существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию* $y = y_0(\lambda)$ *при* $x = x_0(\lambda)$ *и определенное во всем интервале* $|a, b|$. *Кроме того, если* $\lambda \to x_0(\lambda)$ *и* $\lambda \to y_0(\lambda)$ *являются непрерывными отображениями* Λ *в* $|a, b|$ *и* F *соответственно, то решение непрерывно зависит от параметра* λ *на каждом компактном интервале* $[a', b']$, *содержащемся в* $|a, b|$, *т. е. отображение* $\lambda \to f_\lambda$ *пространства* Λ *в* $E = \left(F^{[a', b']}\right)_{cb}$ *непрерывно.*

Доказательство. Прежде всего существование решения при любом λ в каждом интервале $|a, b|$ обеспечивается теоремой 3. Зададим теперь $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности начальных значений для точки λ_0 из Λ найдется такая ее окрестность $\mathscr{V}_1$, что для всех λ из $\mathscr{V}_1$ величины $\|\overrightarrow{y(\lambda) - 0}\|$ и $x_0(\lambda)$ ограничены. При этих условиях *оценка* (V, 2; 36) *решения показывает, что это решение остается ограниченным в любом* *интервале* $[a', b']$ *независимо от параметра* λ, *пробегающего окрестность* $\mathscr{V}_1$.

Функция $\vec{L}$ теперь удовлетворяет условию Липшица (V, 2; 1) в ограниченном множестве значений решения. Пусть k — соответствующая постоянная Липшица.

Имеем

$$\overrightarrow{f'_\lambda(x) - f'_{\lambda_0}(x)} = \vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) =$$
$$= [\vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda)] +$$
$$+ [\vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0)]. \quad (V, 2; 54)$$

При λ, стремящемся к λ_0, правая часть стремится к $\vec{0}$ равномерно относительно x в компактном интервале $[a', b']$ интервала $|a, b|$ (теорема 66 гл. IV; см. часть доказательства теоремы 5, относящуюся к (V, 2; 52)). Значит, можно определить некоторую окрестность $\mathscr{V}'$ точки λ_0, $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}_1$, таким образом, чтобы этот член можно было оценить по норме для $\lambda \in \mathscr{V}'$ заранее заданным числом $\delta > 0$. По причинам, которые будут ясны позже, мы возьмем

$$\delta = \varepsilon / [(1 + 1/k) e^{k(b'-a')}].$$

В силу условия Липшица (V, 2; 1) имеет место неравенство

$$\| \vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda) \| \leqslant k \| \overrightarrow{f_\lambda(x) - f_{\lambda_0}(x)} \|. \quad (V, 2; 55)$$

Следовательно, функция $\vec{Y} = \overrightarrow{f_\lambda - f_{\lambda_0}}$ удовлетворяет дифференциальному *неравенству*

$$\| \vec{Y}' \| \leqslant k \| \vec{Y} \| + \delta. \quad (V, 2; 56)$$

Функция Y в точке $x_0(\lambda)$ принимает значение

$$\overrightarrow{f_\lambda(x_0(\lambda)) - f_{\lambda_0}(x_0(\lambda))} = \overrightarrow{(y_0(\lambda) - y_0(\lambda_0))} + \overrightarrow{(f_{\lambda_0}(x(\lambda_0)) - f_{\lambda_0}(x_0(\lambda)))}. \quad (V, 2; 57)$$

Выражение в первой скобке стремится к 0 при λ, стремящемся к λ_0 (в силу непрерывности начального значения $y_0(\lambda)$ по параметру λ). Выражение во второй скобке стремится к 0, поскольку $x_0(\lambda)$ стремится к $x_0(\lambda_0)$ (в силу непрерывности $x_0(\lambda)$ по λ), а f_{λ_0} непрерывна в точке $x_0(\lambda_0)$. Следовательно, правая часть соотношения (V, 2; 57) стремится к нулю и, значит, можно найти такую окрестность $\mathscr{V}''$ точки λ_0, $\mathscr{V}'' \subset \mathscr{V}_1$, что правая часть при $\lambda \in \mathscr{V}''$ по норме не будет превосходить числа δ.

Тогда для $\lambda \in \mathscr{V} = \mathscr{V}' \cap \mathscr{V}''$ к функции $\vec{Y}$ можно применить оценку (V, 2; 36), поскольку она удовлетворяет соотношению

(V, 2; 56) с начальным значением, мажорируемым при $x = x_0(\lambda)$ по норме числом δ.

Таким образом, для $\lambda \in \mathscr{V}$ и $x \in [a', b']$ имеем

$$\|\overrightarrow{f_\lambda(x) - f_{\lambda_0}(x)}\| = \|\overrightarrow{Y(x)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\delta + \frac{\delta}{k}\right) e^{k\,|x - x_0(\lambda)|} - \frac{\delta}{k} \leqslant \delta\left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{k\,(b'-a')} = \varepsilon, \quad \text{(V, 2; 58)}$$

и теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем (теорема 15_2) мы получим другую глобальную теорему вместе с теоремой о дифференцируемости по параметру.

Производные высших порядков решения дифференциального уравнения

Теорема 8. *Если $\vec{L}$ — отображение класса C^m множества $]a, b[\times \Omega$ в F, то каждое решение дифференциального уравнения* (V, 1; 1) *принадлежит классу* C^{m+1}.

Доказательство. Как мы говорили в самом начале, если $\vec{L}$ непрерывно, то f обязательно принадлежит классу C^1. Проведем теперь индукцию по m. Предположим, что принадлежность f классу C^m в случае, когда $\vec{L}$ принадлежит классу C^{m-1}, доказана, и допустим, что $\vec{L}$ принадлежит классу C^m. Тогда $\vec{L}$ тем более принадлежит классу C^{m-1} и, значит, по предположению индукции f принадлежит классу C^m. Но тогда, согласно теореме о сложных функциях (теорема 19 гл. III), функция $\vec{f'}\colon x \to \vec{L}(x, f(x))$ принадлежит классу C^m, а это означает, что f принадлежит классу C^{m+1}, и теорема доказана.

Конечно, при вычислении последовательных производных применяется теорема о сложных функциях. Например,

$$\overrightarrow{f''(x)} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \overrightarrow{f'(x)} =$$
$$= \frac{\partial \vec{L}}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \vec{L}(x, f(x)). \quad \text{(V, 2; 70)}$$

Замечательным фактом является то, что для вычисления последовательных производных решения в точке x_0 нет необходимости решать дифференциальное уравнение, так как достаточно знать только лишь начальное значение y_0 этого решения в точке x_0.

Так можно получить

$$\begin{aligned} &f(x_0)=y_0,\\ &\vec{f}'(x_0)=\vec{L}(x_0, y_0),\\ &\vec{f}''(x_0)=\frac{\overrightarrow{\partial L}}{\partial x}(x_0, y_0)+\frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\vec{L}(x_0, y_0), \ \ldots . \end{aligned} \qquad (V, 2; 71)$$

Это замечание является источником многочисленных методов решения, *применимых в том случае, когда можно заранее быть уверенным в том, что решение не только имеет производные всех порядков, но также и в том, что в некоторой окрестности точки x_0 оно представимо разложением Тейлора* (метод мажорант Коши, с которым мы познакомимся позже).

Следствие. *Если $\vec{L}$ принадлежит классу C^{∞}, то каждое решение дифференциального уравнения* (V, 1; 1) *принадлежит классу C^{∞}.*

Первые интегралы дифференциального уравнения

Первым интегралом дифференциального уравнения (V, 1; 1) называется непостоянная скалярная функция H, определенная на $|a, b|\times\Omega$: $x, y\to H(x, y)$, которая становится постоянной, если y заменить произвольным решением дифференциального уравнения, т. е. при любом решении f величина $H(x, f(x))$ постоянна.

Предположим для определенности, что пространство F имеет размерность n и в нем введена некоторая система координат. Пусть f — решение, соответствующее начальным значениям x_0, y_0. Зафиксируем x_0, но будем изменять y_0. Тогда f будет функцией x и y_0. Уравнение $y=f(x, y_0)$ может, вообще говоря, быть разрешено относительно y_0 в виде $y_0=h(x, y)$, по крайней мере локально. В самом деле, $h(x, y)$ является значением в точке x_0 решения дифференциального уравнения, принимающего в точке x значение y. Поэтому каждая из компонент $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таким образом найденной функции h является, очевидно, некоторым первым интегралом.

Действительно, если f — некоторое решение дифференциального уравнения, то значение y_0, которое оно принимает в точке x_0, очевидно, постоянно, а именно $f(x_0)$ ($h(x, f(x))=f(x_0)$), и, следовательно, постоянна каждая составляющая этого вектора. Эти первые интегралы являются n независимыми скалярными функциями переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. В самом деле, так как в точке x_0 можно произвольно зафиксировать начальное значение y_0, то они могут принимать произвольные заранее заданные значения. Других первых интегралов, не зависящих от этих, не существует, поскольку, задав значения H_i, мы тем самым определяем y_0, а значит, определяем решение уравнения.

Предыдущий метод применим только локально. Он позволяет доказать существование n первых независимых интегралов только *в окрестности некоторой точки* (c, γ) *множества* $|a, b| \times \Omega$. С его помощью *глобальное* существование первых интегралов не доказывается, т. е. он не позволяет найти функцию H, определенную на всем множестве $|a, b| \times \Omega$. Вопрос о глобальном существовании носит совсем другой характер, чем предыдущий вопрос, *и даже в случае очень простых дифференциальных уравнений не существует, вообще говоря, первых интегралов, определенных во всей области существования функции* $\vec{L}$. *Именно в этом состоит основная трудность изучения дифференциальных уравнений.*

Приведем наиболее важное применение полученных результатов в механике. Дифференциальное уравнение основной задачи механики имеет такой вид:

$$\vec{q}'' = \vec{F}(t, q, \vec{q}'), \tag{V, 2; 72}$$

где q представляет собой точку пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. конечное число скаляров $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Если положить $\vec{q}' = \vec{r}$, то эта система станет системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \vec{q}' &= \vec{r}, \\ \vec{r}' &= \vec{F}(t, q, \vec{r}). \end{aligned} \tag{V, 2; 73}$$

Первый интеграл предсгавляет собой в этом случае некоторую функцию H переменных t, q и $\vec{r} = \vec{q}'$, сохраняющую постоянное значение вдоль траектории рассматриваемой задачи.

В некоторых случаях, как мы это видели ранее, этот первый интеграл выражает *энергию* как сумму потенциальной и кинетической энергий.

Простейшие теоремы механики, такие, как теорема о центре тяжести, теорема о кинетической энергии и др., часто позволяют получить другие независимые первые интегралы энергии.

Изучение первых интегралов играет важную роль, потому что знание первого интеграла позволяет легко найти общее решение дифференциального уравнения.

Предположим, например, что нам надо решить некоторое дифференциальное уравнение порядка p относительно вещественной функции, записанной в виде

$$y^{(p)} = L(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}), \tag{V, 2; 74}$$

и предположим, что мы уже нашли его первый интеграл $H(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$. Это означает, что для каждого решения дифференциального уравнения имеет место равенство

$$H(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}) = c, \qquad (\mathrm{V}, 2; 75)$$

где c — некоторая постоянная. Если теперь это уравнение может быть разрешено относительно $y^{(p-1)}$ в виде

$$y^{(p-1)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(p-2)}, c), \qquad (\mathrm{V}, 2; 76)$$

то уравнение (V, 2; 74) заменится уравнением (V, 2; 76), являющимся некоторым дифференциальным уравнением порядка $p-1$, а не порядка p, но зависящим от произвольной постоянной. Если будет известен новый первый интеграл, не зависящий от предыдущего, то это позволит свести заданное уравнение к дифференциальному уравнению порядка $p-2$ и т. д.[1])

Дифференциальное уравнение, определенное векторным полем

Пусть V — многообразие размерности n в аффинном пространстве E размерности N над полем вещественных чисел, принадлежащее классу C^m. *Векторным полем на* V называется такое отображение $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$ многообразия V в векторное пространство $\vec{E}$, что для каждого $x \in V$ вектор $\vec{X}(x)$ лежит в векторном пространстве $\vec{T}(x; V)$, касательном в точке x к многообразию V. Говорят, что векторное поле принадлежит классу C^p ($p \leqslant m$), если отображение $\vec{X}$ многообразия V в $\vec{E}$ принадлежит классу C^p (см. определение, т. I, стр. 336). Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}(x(t)), \quad \text{или} \quad \vec{x}' = \vec{X}(x). \qquad (\mathrm{V}, 2; 77)$$

Решением этого уравнения является функция f: $t \to f(t)$, определенная на некотором интервале временно́й оси $\mathbb{R}$ со значениями в V, такая, что для каждого t скорость $\vec{f}'(t)$ представляет собой вектор $\vec{X}(f(t))$ касательной к V в точке $f(t)$. Это уравнение даже в случае непрерывного поля не является уравнением вида (V, 1; 1), ибо функция $\vec{X}$ определена только на V, а не на E или на некотором открытом множестве E. С другой стороны, $\vec{X}$ зависит от x, а не от t. Это такие урав-

[1]) Такой случай встречается редко! Первый интеграл H часто является локальным, и его невозможно разрешить относительно $y^{(p-1)}$. Уравнение (V, 2; 75) далеко не всегда *эквивалентно* уравнению (V, 2; 74) и т. д.

нения, с которыми имеют дело при отыскании асимптотических линий, линий кривизны и даже некоторой поверхности аффинного евклидова трехмерного пространства.

Говорят, что *поле локально удовлетворяет условию Липшица*, если, какова бы ни была точка a из V, существуют такая окрестность $\mathscr{V}$ этой точки в E и такое число $k \geqslant 0$, что при любых x_1 и x_2 из $\mathscr{V} \cap V$ имеет место неравенство

$$\| \vec{X}(x_1) - \vec{X}(x_2) \| \leqslant k \| \overrightarrow{x_1 - x_2} \|^{1)}. \qquad (\text{V}, 2; 78)$$

Теорема 8_2. *Пусть дифференциальное уравнение* (V, 2; 77) *определено полем $\vec{X}$, локально удовлетворяющим условию Липшица на многообразии V класса C^m пространства E при $m \geqslant 2$. Если $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in V$ определяют условие Коши, то найдется открытый интервал прямой $\mathbb{R}$: $]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, в котором существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее этому условию Коши, которое нельзя продолжить ни до точки $t_0 - \alpha$, ни до точки $t_0 + \beta$. В интервале, содержащем t_0, не может существовать более одного решения, принимающего заданное значение в t_0. Если многообразие V компактно или если оно замкнуто и имеет место оценка*

$$\| X(x) \| \leqslant \mu \| x - O \| + \nu, \qquad (\text{V}, 2; 78_2)$$

где μ и ν — постоянные $\geqslant 0$, а O — фиксированная точка E, то $\alpha = \beta = +\infty$. Если поле $\vec{X}$ принадлежит классу C^p ($p \leqslant m$), то решение является функцией класса C^{p+1}.

Доказательство. Пусть Φ: $\mathscr{O} \to \Phi(\mathscr{O})$ — некоторая карта окрестности точки x_0 на V. Здесь $\mathscr{O}$ — некоторое открытое множество $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \Phi(\mathscr{O})$. Множество $\mathscr{O}$ можно считать достаточно малым для того, чтобы существовало продолжение Θ отображения Φ^{-1} класса C^m, определенное в некотором открытом множестве Ω пространства E (теорема 33 гл. III).

Теперь векторное поле $\vec{X}$ можно перенести в векторное поле на $\mathscr{O}$. Каждой точке $u \in \mathscr{O}$ поставим в соответствие вектор $\vec{U}(u)$, образ которого при отображении $\Phi'(u)$ будет вектором $\vec{X}(\Phi(u))$.

---

1) Это условие означает, что пространство E заведомо предполагается нормированным. Однако поскольку все нормы в пространстве E эквивалентны (теорема 13 гл. II), то поле, локально обладающее свойством Липшица относительно одной нормы, будет обладать этим свойством и относительно всякой другой эквивалентной нормы (с другой постоянной k). Тот факт, что некоторое поле локально обладает свойством Липшица, не зависит от выбора нормы.

Это возможно, поскольку $\Phi'(u)$ является биекцией $\mathbb{R}^n$ на векторное пространство, касательное к V в точке $\Phi(u)$ (следствие 1 теоремы 33_4 гл. III). Кроме того, согласно следствию 2 этой же теоремы, можно записать, что

$$\vec{U}(u)=\Theta'(\Phi(u))\cdot\vec{X}(\Phi(u)), \quad \text{или} \quad \vec{U}(\Theta(x))=\Theta'(x)\cdot\vec{X}(x), \tag{V, 2; 79}$$
$$\vec{X}(\Phi(u))=\Phi'(u)\cdot\vec{U}(u).$$

Покажем, что определенное нами на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$ поле $\vec{U}$ удовлетворяет локально условию Липшица. Пусть $u_0\in\mathcal{O}$ и $\Phi(u_0)=x_0\in V$. Поскольку $m\geqslant 2$, можно найти окрестность $\mathcal{O}_0$ точки u_0 в $\mathcal{O}$ и окрестность Ω_0 точки x_0 в Ω, где $\Phi(\mathcal{O}_0)\subset\Omega_0$, такие, что отображения Φ, Φ' ограничены в $\mathcal{O}_0$, а отображения Θ, Θ', Θ'' ограничены в Ω_0 и таковы, что отображение $\vec{X}$ обладает свойством Липшица и ограничено в $\Omega_0\cap V$. Пусть k — постоянная Липшица, а M — граница норм всех этих функций.

Для u_1 и u_2 в $\mathcal{O}_0$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned}\|\vec{U}(u_1)-\vec{U}(u_2)\|&=\|\Theta'(\Phi(u_1))\cdot\vec{X}(\Phi(u_1))-\Theta'(\Phi(u_2))\cdot\vec{X}(\Phi(u_2))\|\leqslant\\&\leqslant\|\Theta'(\Phi(u_1))\cdot(\vec{X}(\Phi(u_1))-\vec{X}(\Phi(u_2)))\|+\\&\quad+\|(\Theta'(\Phi(u_1))-\Theta'(\Phi(u_2)))\cdot\vec{X}(\Phi(u_2))\|\leqslant\\&\leqslant Mk\|\overrightarrow{\Phi(u_1)-\Phi(u_2)}\|+\|\Theta'(\Phi(u_1))-\Theta'(\Phi(u_2))\|M.\end{aligned} \tag{V, 2; 80}$$

Из формулы конечных приращений следует, что это выражение не превосходит

$$M^2k\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|+M^2\|\overrightarrow{\Phi(u_1)-\Phi(u_2)}\|^{1)}\leqslant(M^2k+M^3)\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|, \tag{V, 2; 81}$$

а следовательно, $\vec{U}$ локально удовлетворяет свойству Липшица. Так как $\mathcal{O}$ представляет собой *открытое* множество в $\mathbb{R}^n$, то дифференциальное уравнение $\overrightarrow{du/dt}=\vec{U}(u)$ полностью удовлетворяет условиям теоремы 1. Значит, при заданных начальных значениях t_0, $u_0=\Theta(x_0)$ имеется интервал $]t_0-\alpha_0, t_0+\beta_0[$, в котором существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее этому

---

[1]) Здесь записано, что $\|\Theta'(a)-\Theta'(b)\|\leqslant\|\overrightarrow{a-b}\|\sup\limits_{\xi\in[a,b]}\|\Theta''(\xi)\|$. В этом месте использовано условие $m\geqslant 2$. Многообразие $V\in[a, b]$ должно принадлежать по меньшей мере классу C^2.

начальному условию. Если такое решение мы обозначим через φ: $t \to \varphi(t)$, то функция $\Phi \circ \varphi$: $t \to \Phi(\varphi(t))$ будет решением уравнения (V, 2; 77), ибо, согласно (V, 2; 79),

$$\frac{\vec{d}}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \overrightarrow{\varphi'(t)} = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \vec{U}(\varphi(t)) = \vec{X}(\Phi(\varphi(t))). \tag{V, 2; 82}$$

Обратно,

$$\frac{\vec{d}}{dt}(\Theta(f(t))) = \Theta'(f(t)) \cdot \overrightarrow{f'(t)} = \Theta'(f(t)) \cdot \vec{X}(f(t)) = \vec{U}(\Theta(f(t))) \tag{V, 2; 82$_2$}$$

или

$$\varphi'(t) = \vec{U}(\varphi(t)), \text{ и если положить } \varphi(t) = \Theta(f(t)),$$

то решение $x = f(t)$ уравнения (V, 2; 77) обязательно получится из такого решения по крайней мере для значений t, достаточно близких к t_0, для которых $f(t) \in \Phi(\mathcal{O}_0)$.

Этим доказывается существование локальных решений уравнения (V, 2; 77). Кроме того, два решения уравнения (V, 2; 77), принимающие в точке t_0 одно и то же значение x_0, совпадают в каждой окрестности точки x_0, и потому методы теоремы 2 и ее следствия дают одни и те же результаты как для уравнения (V, 2; 77), так и для уравнения (V, 1; 1).

Предположим, что многообразие V компактно. Пусть $]t_0-\alpha, t_0+\beta[$ — максимальный интервал определения решения f. Будем считать β конечным. Известно, что если $t < t_0+\beta$ стремится к $t_0+\beta$, то функция $f(t)$ имеет предел лишь в том случае, когда имеет предел $\vec{X}(f(t))$, и тогда решение может быть продолжено до самой точки $t_0+\beta$. Однако мы видели, что это невозможно. Но, поскольку V компактно, можно найти такую последовательность $t_1, t_2, t_3, \ldots$, стремящуюся к $t_0+\beta$, при n, стремящемся к бесконечности, что $f(t_n)$ имеет предел в V. То же самое имеет место, если многообразие V предполагается только замкнутым и если имеет место оценка (V, 2; 78$_2$). В самом деле, в этом случае имеет место дифференциальное неравенство $\|\vec{d}f/dt\| = \|\vec{X}(f(t))\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{f(t)-O}\| + \nu$, а следовательно, функция f удовлетворяет неравенству (V, 2; 36) (где x следует заменить на t). Отсюда следует, что функция $f(t)$ ограничена, т. е. для $t < t_0+\beta$ содержится в некотором замкнутом шаре. Следовательно, она принадлежит пересечению этого замкнутого шара и замкнутого многообразия V, т. е. некоторому компакту многообразия V. Но тогда снова можно найти последовательность t_n, стремящуюся к $t_0+\beta$, на которой $f(t_n)$ имеет предел в V. Из следствия теоремы 5 (где $\vec{L}_n = \vec{L}$) вытекает, что можно найти такой интервал $[t_0+\beta-\varepsilon,\ t_0+\beta+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, что все решения уравнения (V, 2; 77), соответствующие начальным значениям t_n, $\vec{f}(t_n)$, будут определены в этом интервале при достаточно большом n. Это говорит о том, что решение $\vec{f}$ можно продолжить до точки $t_0+\beta+\varepsilon>t_0+\beta$, и мы получили противоречие. Значит, $\beta=+\infty$ и аналогично $\alpha=+\infty$.

Наконец, если $\vec{X}$ принадлежит классу C^p, $p\leqslant m$, то доказательство, проведенное в теореме 8 индукцией по m, показывает, что решения принадлежат классу C^{p+1}.

Следствие. *Пусть $\vec{X}$ — векторное поле, локально обладающее свойством Липшица в открытом множестве Ω аффинного пространства E. Пусть V — замкнутое многообразие класса C^m, $m\geqslant 2$* [1]*), в множестве Ω. Предположим, что в каждой точке x многообразия V вектор $\vec{X}(x)$ является касательным в точке x к V. Если функция f: $t\to f(t)$ есть такое решение дифференциального уравнения $\vec{dx}/dt=\vec{X}(x(t))$ со значениями в E, определенное на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, что $f(t_0)$ лежит в V, то $f(t)$ для каждого t лежит в V (каждая интегральная кривая, имеющая одну точку в V, целиком лежит в V).*

Доказательство. Согласно теореме, в некоторой окрестности точки t_0 существует решение дифференциального уравнения со значениями в V. В силу теоремы 1 в E существует лишь единственное решение. Следовательно, единственное в E решение для всех t, достаточно близких к t_0, лежит в V. Если через $\mathscr{E}$ обозначить множество тех t из $\mathbb{R}_1$, для которых $f(t)\in V$, то это множество будет открытым, поскольку каждая его точка входит в него с некоторой своей окрестностью. Так как это множество является прообразом замкнутого множества V при непрерывном отображении f, то оно замкнуто. Поскольку $\mathbb{R}_1$ связно, то это означает, что $\mathscr{E}$ совпадает с $\mathbb{R}_1$.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $|a, b|$ — вещественный интервал, а $\vec{F}$ — *векторное* нормированное пространство. *Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$\vec{y}'=A(x)\cdot\vec{y}, \tag{V, 3; 1}$$

где для любого x из $|a, b|$ отображение $A(x)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$, т. е. некоторым эле-

---

[1]) Для этого следствия достаточно взять $m\geqslant 1$.

ментом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Таким образом, A: $x \to A(x)$ есть непрерывное отображение $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Предположим, например, что $\vec{F}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $\vec{f}$, определенная на $|a, b|$ со значениями в $\vec{F}$, эквивалентна системе n скалярных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Отображение $A(x)$ определяется матрицей с n строками и n столбцами. Обозначим через $A_{ij}(x)$ коэффициенты этой матрицы. Тогда дифференциальное уравнение может быть записано в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \ldots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \ldots & A_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(x) & A_{n2}(x) & \ldots & A_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix} \qquad (\mathrm{V}, 3; 2)$$

или же в виде

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\mathrm{V}, 3; 3)$$

Пусть теперь нам нужно решить дифференциальное уравнение порядка p, записанное в виде

$$\vec{y}^{(p)} = A_0(x) \cdot \vec{y} + A_1(x) \cdot \vec{y}' + \ldots + A_{p-1}(x) \cdot \vec{y}^{(p+1)}, \qquad (\mathrm{V}, 3; 4)$$

где A_i — непрерывные функции, определенные на $|a, b|$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Полагая $\vec{y} = \vec{z}_0$, $\vec{y}' = \vec{z}_1, \ldots, \vec{y}^{(p-1)} = \vec{z}_{p-1}$, мы сведем это уравнение к линейной системе

$$\begin{aligned} \vec{z}_0' &= \vec{z}_1, \\ \vec{z}_1' &= \vec{z}_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2}' &= \vec{z}_{p-1}, \\ \vec{z}_{p-1}' &= A_0(x)\vec{z}_0 + A_1(x)\vec{z}_1 + \ldots + A_{p-1}(x)\vec{z}_{p-1}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 3; 5)$$

Эта система n дифференциальных уравнений 1-го порядка, аналогичная системе (V, 3; 2), также может быть записана в матричной форме (элементы этой матрицы принадлежат пространству $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$; обычная матрица получится, когда $\vec{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} \vec{z}_0' \\ \vec{z}_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2}' \\ \vec{z}_{p-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & A_{p-2}(x) & A_{p-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2} \\ \vec{z}_{p-1} \end{pmatrix} \qquad (V, 3; 6)$$

(I — тождественное отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$, $I \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$).

Теорема 9. *Если пространство $\vec{F}$ полно, то линейное дифференциальное уравнение вида* (V, 3; 1) *имеет, и притом единственное, решение, определенное во всем интервале $|a, b|$, соответствующее заданному условию Коши x_0, y_0. Кроме того, если A является функцией на $|a, b|$ класса C^m со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то решение будет функцией на $|a, b|$ класса C^m со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Поскольку A является непрерывным отображением $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то оно ограничено на каждом компактном интервале $[a', b']$ интервала $|a, b|$. Пусть M—точная верхняя грань его нормы. Тогда функция $\vec{L}$, определенная здесь равенством $\vec{L}(x, \vec{y}) = A(x)\cdot\vec{y}$, удовлетворяет, с одной стороны, неравенству

$$\|\vec{L}(x, \vec{y})\| \leqslant M\|\vec{y}\| \qquad (V, 3; 7)$$

и, с другой стороны, условию Липшица по $\vec{y}$:

$$\|\vec{L}(x, \vec{y}_1) - \vec{L}(x, \vec{y}_2)\| \leqslant M\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \qquad (V, 3; 8)$$

Отсюда следует, что в интервале $[a', b']$ можно применить теорему 4, в силу которой решение существует и единственно. (Из замечания 2°) на стр. 13 непосредственно следует, что здесь в системе безопасности необходимости нет и что метод последовательных приближений равномерно сходится на $[a', b']$.) Поскольку это утверждение верно для любого отрезка $[a', b']$, то оно справедливо и для самого интервала $|a, b|$. Принадлежность решения классу C^{m+1} вытекает теперь из теоремы 8.

Теорема 10. *Множество $\mathscr{E}$ решений уравнения* (V, 3; 1) *является некоторым векторным подпространством пространства $\vec{F}^{|a, b|}$. Отображение, ставящее в соответствие каждому решению $\vec{f}$ его значение $\vec{y}_0$ в точке x_0, является линейной биекцией $\mathscr{E}$ на $\vec{F}$.*

Доказательство. Так как уравнение линейно, то сумма двух решений и произведение решения на произвольное число также являются решениями. Следовательно, множество $\mathscr{E}$ — это векторное пространство.

Отображение, ставящее каждому $\vec{f} \in \mathscr{E}$ в соответствие элемент $\vec{f}(x_0) = \vec{y}_0$, линейно. Из теоремы 9 существования и единственности следует, что это отображение является биекцией.

Следствие 1. *Для того чтобы k решений были линейно независимыми элементами в векторном пространстве $\mathscr{E}$, необходимо и достаточно, чтобы значения этих решений в точке x_0 интервала $|a, b|$ были k линейно независимыми векторами пространства $\vec{F}$. Решение, обращающееся в нуль в точке x_0, тождественно равно нулю.*

Это утверждение вытекает из свойства инъективности отображения $\vec{f} \to \vec{f}(x_0)$ пространства $\mathscr{E}$ в пространство $\vec{F}$.

Следствие 2. *Если $\vec{F}$ — пространство размерности n, то множество $\mathscr{E}$ решений также имеет размерность n.*

Это следствие, очевидно, вытекает из теоремы.

Если в этом случае мы выберем в $\vec{F}$ некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (это делается автоматически, если в качестве $\vec{F}$ взять пространство $\mathbb{R}^n$), то каждому из векторов $\vec{e}_i$, рассматриваемому как начальное значение в точке x_0 интервала $|a, b|$, соответствует некоторое решение.

Таким образом, имеется n независимых решений $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$, образующих некоторый базис в векторном пространстве решений $\mathscr{E}$. Каждому начальному значению $\vec{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$ соответствует единственное решение $\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{\eta}_i$.

Функция $\vec{\eta}_i$ в базисе пространства $\vec{F}$ записывается в виде

$$\vec{\eta}_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}(x) \vec{e}_k, \tag{V, 3; 9}$$

где η_{ik} — скалярные функции, а решение, соответствующее начальному условию, имеет вид

$$\vec{f}(x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} u_i \eta_{ik}(x)\,\vec{e}_k. \tag{V, 3; 10}$$

Только что определенные функции $\eta_i(x)$ и $\eta_{ij}(x)$ связаны с выбором начальной точки x_0. Их иногда полезно обозначать через $\eta_i(x, x_0)$ и $\eta_{ik}(x, x_0)$.

Если через f_k обозначить составляющую функции $\vec{f}$ по вектору $\vec{e}_k$, то функции f_k удовлетворяют дифференциальной системе (V, 3; 2) или (V, 3; 3), а (V, 3; 10) можно записать в виде

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ik}(x, x_0)\, f_i(x_0). \tag{V, 3; 10$_2$}$$

Рассмотрим частный случай *скалярного*[1]) дифференциального уравнения порядка p вида (V, 3; 4). Производя уже указанную ранее замену функций, можно прийти к одному дифференциальному уравнению, рассматриваемому в пространстве $\vec{F} = \mathbb{R}^p$. Новая неизвестная функция $\vec{g} = (f, f', f'', \ldots, f^{(p-1)})$ является функцией, определенной на $|a, b|$ со значениями в $\mathbb{R}^p$.

Начальное условие эквивалентно заданию в точке x_0 вектора $\vec{z}_0$ из $\mathbb{R}^p$, т. е. заданию скаляров $y_0^{(q)}$, $q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$,— значений функции и ее производных порядка $1, 2, \ldots, p-1$. Когда мы говорим о независимости системы k начальных значений, мы имеем в виду независимость соответствующих векторов пространства $\mathbb{R}^p$.

Если рассматриваются k решений уравнения, то слова «зависимые» или «независимые» a priori двусмысленны. Не ясно, говорится ли о независимости функций $\vec{g}$ или о независимости функций f?

Легко видеть, что оба эти утверждения о независимости, точно так же, как и оба утверждения о зависимости, эквивалентны. В самом деле, если между k решениями $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ имеется линейное соотношение с коэффициентами, не равными одновременно нулю, то то же самое соотношение будет, очевидно, иметь место между функциями f_i. Обратно, если такого рода соотношение имеет место между функциями $f_1, f_2, \ldots, f_k$, то оно сохраняется для первых производных, вторых производ-

[1]) Коэффициенты $A_q(x)$, $q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, являются здесь непрерывными скалярными функциями. Полем скаляров обычно будет поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ных и т. д., включая производные порядка $p-1$, т. е. это соотношение имеет место между соответствующими функциями $\vec{g}_i$.

Множество решений f уравнения (V, 3; 4) является также и векторным подпространством размерности n пространства $\mathscr{C}(|a, b|)$. В связи с предыдущим мы должны через η_i, $i=0, 1, 2, \ldots, p-1$ [1]), обозначить решение уравнения (V, 3; 4), соответствующее начальному условию

$$\eta_i^{(q)}(x_0)=0 \quad \text{для} \quad q \neq i, \ \eta_i^{(i)}(x_0)=1, \tag{V, 3; 11}$$

или

$$\eta_i^{(q)}(x_0)=\delta_i^q, \tag{V, 3; 12}$$

где δ_i^q — символ Кронекера. Если теперь некоторое решение определено начальными условиями

$$u^{(q)}=y_0^{(q)}=f^{(q)}(x_0), \tag{V, 3; 13}$$

то оно задается формулой

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p-1} y_0^{(i)}\eta_i(x) \quad \text{или} \quad f(x)=\sum_{i=0}^{p-1} \eta_i(x, x_0) f^{(i)}(x_0). \tag{V, 3; 14}$$

По поводу этих дифференциальных скалярных уравнений порядка p напомним некоторые результаты, которые излагаются в специальных курсах.

При $p=1$ уравнение решается непосредственно в квадратурах. В самом деле, в этом случае оно имеет вид

$$\frac{y'}{y}=A(x), \tag{V, 3; 15}$$

а его решение находится по формулам

$$y=Ce^{\int A(x)\,dx}, \quad f(x)=y_0 e^{\int_{x_0}^{x} A(\xi)\,d\xi}. \tag{V, 3; 16}$$

Однако в том случае, когда порядок дифференциального уравнения $\geqslant 2$, его решение в общем виде через интегралы не выражается.

Обычно, опираясь на известные частные решения, стараются понизить порядок уравнения. Если уравнение (V, 3; 4) имеет частное решение Y, то, используя замену функций $y=Yu$, непосредственно проверяют, что u является решением дифференциального уравнения, в котором коэффициент при u равен 0.

[1]) Здесь индексы 0, 1, 2, ..., $p-1$ используются для нумерации элементов базиса пространства $\mathbb{R}^p$.

Другими словами, если положить $u' = v$, то мы получим относительно v дифференциальное уравнение порядка $p-1$. Решив его, можно затем найти u квадратурой.

Когда речь идет о системе дифференциальных уравнений или о дифференциальном уравнении, соответствующем пространству $\vec{F}$ размерности $\geqslant 2$, то, даже если это уравнение имеет первый порядок, явное решение его в квадратурах, вообще говоря, не известно.

Разрешающий оператор (резольвента) линейного дифференциального уравнения

Пусть пространство $\vec{F}$ полно, и пусть x_1, x_2 — две точки интервала $|a, b|$. Согласно теореме 9, существует единственное решение уравнения (V, 3; 1), принимающее заданное значение $\vec{y}_1$ в точке x_1. В точке x_2 это решение принимает определенное значение $\vec{y}_2$. Тем самым определяется некоторое отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$, которое каждому значению решения в точке x_1 ставит в соответствие его значение в точке x_2. Это отображение, очевидно, линейно, поскольку сумме двух начальных значений в точке x_1 соответствует решение, равное сумме двух соответствующих решений, и, следовательно, его значение в точке x_2 равно сумме двух соответствующих значений. Аналогичное утверждение имеет место относительно умножения на скаляр. Если через π_x мы обозначим биекцию пространства решений $\mathscr{E}$ на $\vec{F}$, которая каждому решению $\vec{f}$ ставит в соответствие его значение в точке x: $\pi_x \vec{f} = \vec{f}(x)$ (теорема 10), то рассматриваемое отображение будет иметь вид $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$.

Это линейное отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$ непрерывно. В самом деле, если рассмотреть последовательность начальных значений $(\vec{y}_1)_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующих одной и той же точке x_1 и сходящихся при ν, стремящемся к бесконечности, к некоторому пределу $\vec{y}_1$ в $\vec{F}$, то из теоремы 6 о непрерывности решения относительно начальных значений следует, что последовательность решений $\vec{f}_\nu$, соответствующих начальным значениям $(\vec{y}_1)_\nu$, сходится к решению $\vec{f}$, соответствующему начальному значению $\vec{y}_1$, равномерно на каждом компакте интервала $|a, b|$. В частности, сходимость имеет место в точке x_2, чем и доказывается непрерывность отображения $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$.

Отображение $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$, т. е. элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, который обозначается через $R(x_2;\ x_1)$ [1]). *Этот оператор полностью характеризуется тем фактом, что для каждого решения $\vec{f}$ дифференциального уравнения имеет место формула*

$$\vec{f}(x_2)=R(x_2,\ x_1)\cdot\vec{f}(x_1),\quad \text{где}\quad R(x_2,\ x_1)=\pi_{x_2}\circ\pi_{x_1}^{-1}. \qquad (V,3;\ 17)$$

Оператор $R(x_2,\ x_1)$ называется *разрешающим оператором* (или *резольвентой*) дифференциального уравнения относительно точек x_1 и x_2 интервала $|a,\ b|$. То, что обычно называют разрешающим оператором дифференциального уравнения, является функцией R: $(x_2,\ x_1)\to R(x_2,\ x_1)$. Это некоторое отображение $|a,\ b|\times\times|a,\ b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. Если в $\vec{F}$ выбран базис с обозначениями, принятыми на стр. 40, то разрешающий оператор представляется с помощью матрицы, транспонированной к матрице η_{ij}: $R_{jl}(x_2,\ x_1)=\eta_{lj}(x_2,\ x_1)$.

Теорема 11. *Разрешающий оператор обладает следующими основными свойствами:*

$$\begin{aligned} R(x_3,\ x_2)\circ R(x_2,\ x_1)&=R(x_3,\ x_1),\\ R(x_1,\ x_2)&=(R(x_2,\ x_1))^{-1}, \qquad (V,3;\ 18)\\ R(x,\ x)&=I. \end{aligned}$$

Доказательство. Эти соотношения вытекают непосредственно из определения $R(x_2,\ x_1)=\pi_{x_2}\circ\pi_{x_1}^{-1}$ [или, еще лучше, из первой формулы (V, 3; 17), выражающей тот факт, что $R(x_2,\ x_1)\cdot\vec{y}_1$ дает значение в точке x_2 решения, принимающего значение $\vec{y}_1$ в точке x_1].

Теорема 12. *Отображение R множества $|a,\ b|\times|a,\ b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$ является единственным отображением, имеющим частную производную по первой переменной и удовлетворяющим, с одной стороны, дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x,\ \xi)=A(x)\circ R(x,\ \xi), \qquad (V,3;\ 19)$$

а с другой — начальному условию

$$R(x,\ x)=I. \qquad (V,3;\ 20)$$

---

[1]) Для удобства записи дальнейших формул, в особенности формулы (V, 3; 18), вместо $R(x_1,\ x_2)$ пишут $R(x_2,\ x_1)$.

Доказательство. В самом деле, если мы зафиксируем ξ в интервале $|a, b|$ и рассмотрим R как функцию одной переменной x, то получим некоторую функцию со значениями не в векторном нормированном пространстве $\vec{F}$, а в векторном нормированном пространстве $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Так как пространство $\vec{F}$ полно, то $\vec{G}$ также полно (теорема 50 гл. II).

Рассмотрим теперь для некоторой функции, определенной на $|a, b|$ со значениями в $\vec{G}$, дифференциальное уравнение

$$\vec{Y}' = A(x) \circ \vec{Y}. \qquad (\mathrm{V}, 3; 20_2)$$

Сначала убедимся, что уравнение является линейным дифференциальным уравнением в смысле определения (V, 3; 1).

Для фиксированного x отображение $A(x)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Но тогда $\vec{Y} \to A(x) \circ \vec{Y}$ представляет собой некоторое линейное непрерывное отображение $B(x)$ пространства $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ в себя, т. е. $B(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$. Соотношение (V, 3; 20) можно записать в виде $\vec{Y}' = B(x) \cdot \vec{Y}$. Кроме того, в силу теоремы 54 гл. II норма $\| B(x) \|$ отображения $B(x)$ в пространстве $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$, определяемая формулой

$$\sup_{\substack{u \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F}) \\ \| u \| \leqslant 1}} \| A(x) \circ u \|,$$

не превосходит $\| A(x) \|$ — нормы $A(x)$ в пространстве $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Для того чтобы доказать, что мы имеем дело с дифференциальным уравнением вида (V, 3; 1), мы должны доказать, что $B\colon x \to B(x)$ является непрерывным отображением $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$; иначе говоря, мы должны доказать, что при x, стремящемся к x_0, норма $\| B(x) - B(x_0) \|$ стремится к 0. Эта величина, согласно определению нормы, не превосходит $\| A(x) - A(x_0) \|$ — нормы в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Следовательно, она стремится к 0 в силу предположения о непрерывности отображения A по x в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Значит, мы можем применить теорему 9 и утверждать, что существует, и притом единственное, решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $Y(\xi) = I$, где I — тождественный оператор $\vec{F}$ в $\vec{F}$, являющийся элементом пространства $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Обозначим через $S(x, \xi)$ решение этого дифференциального уравнения. Рассмотрим теперь при заданном векторе $\vec{y}_1$ из $\vec{F}$

функцию $\vec{f}$, определенную на $|a, b|$ со значениями в $\vec{F}$ по формуле

$$\vec{f}(x) = S(x, \xi) \cdot \vec{y}_1 \text{ [1]}. \qquad (V, 3; 21)$$

Эта функция дифференцируема, а ее производная в силу следствия 1 теоремы 11 гл. III (о перестановочности производной и линейного непрерывного отображения) имеет вид

$$\vec{f}'(x) = \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi) \cdot \vec{y}_1. \qquad (V, 3; 22)$$

Так как $\vec{Y}$ является решением дифференциального уравнения (V, 3; 20), то, кроме того,

$$\vec{f}'(x) = (A(x) \circ S(x, \xi)) \cdot \vec{y}_1 = A(x) \cdot \vec{f}(x). \qquad (V, 3; 23)$$

Это говорит о том, что $\vec{f}$ есть решение дифференциального уравнения (V, 3; 1). Так как начальным условием является $\vec{f}(\xi) = S(\xi, \xi) \cdot \vec{y}_1 = \vec{y}_1$, то $\vec{f}$ — единственное решение дифференциального уравнения (V, 3; 1), соответствующее начальному условию $\vec{f}(\xi) = \vec{y}_1$. Поскольку значение этого решения в точке x задается формулой (V, 3; 21) и это справедливо для любого начального вектора $\vec{y}_1$, то $S(x, \xi) = R(x, \xi)$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Теорема 13. *Если в уравнении* (V, 3; 1) *функция A принадлежит классу C^m, то резольвента R является функцией переменных x и ξ класса C^{m+1}, т. е. является отображением $|a, b| \times |a, b|$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ класса C^{m+1}.*

Доказательство. Тот факт, что резольвента R имеет все последовательные производные до порядка $m+1$ по x, вытекает из того, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению (V, 3; 19) с коэффициентами класса C^m и из следствия теоремы 8.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция R, не зависит от параметра ξ. От параметра ξ зависит начальное условие в смысле, указанном в теореме 6. Из этой теоремы вытекает, что резольвента R является непрерывным отображением множества $|a, b| \times |a, b|$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Ее первая производная по x, определяемая по фор-

[1]) Функция $\vec{f}$ зависит от выбора $\vec{y}_1$. Следовало бы писать $\vec{f}_{\vec{y}_1}(x)$.

муле (V, 3; 19), также является непрерывным отображением $|a, b| \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Для того чтобы показать, что R имеет частную производную по ξ, надо было бы воспользоваться теоремой о дифференцируемости по параметру ξ. Но мы дадим прямое доказательство. С этой целью воспользуемся вторым равенством (V, 3; 18), т. е. равенством $R(x, \xi) = (R(\xi, x))^{-1}$. Отсюда видно, что частная производная по ξ, т. е. частная производная по второй переменной функции R, является частной производной по первой переменной функции R^{-1}. Кроме того, мы знаем, что отображение $R \to R^{-1}$ дифференцируемо, и нам известна формула (III, 8; 32) дифференцирования обратного оператора. Мы видим, следовательно, что R дифференцируема по ξ и

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}(R(\xi, x))^{-1} = -(R(\xi, x))^{-1} \circ \frac{\partial R}{\partial \xi}(\xi, x) \circ (R(\xi, x))^{-1}. \tag{V, 3; 24}$$

Заменяя здесь средний член с помощью дифференциального уравнения (V, 3; 19), получаем замечательную формулу:

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = -R(x, \xi) \circ (A(\xi) \circ R(\xi, x)) \circ (R(\xi, x))^{-1}, \tag{V, 3; 24$_2$}$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = -R(x, \xi) \circ A(\xi). \tag{V, 3; 25}$$

Эта формула аналогична формуле (V, 3; 19). Она отличается от нее только знаком и порядком композиции оператора A: справа, а не слева. Отсюда следует, что резольвента R имеет непрерывную относительно совокупности переменных x, ξ частную производную по ξ и, следовательно, в силу теоремы 15 гл. III является отображением класса C^1 множества $|a, b| \times \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Теперь достаточно провести индукцию по m. Предположим, что если A принадлежит классу C^{m-1} отображений $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то R является отображением $|a, b| \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ класса C^m. Пусть теперь A принадлежит классу C^m при $m \geqslant 1$. Тогда эта функция в любом случае принадлежит классу C^{m-1}, а следовательно, R принадлежит по крайней мере классу C^m. В этом случае функции $\partial R/\partial x$ и $\partial R/\partial \xi$, определяемые формулами (V, 3; 19) и (V, 3; 25), в силу теоремы 18 гл. III принадлежат классу C^m. Это означает, что резольвента R принадлежит классу C^{m+1}, и теорема доказана.

Линейное уравнение со свободным членом

Считая $\vec{F}$ нормированным векторным пространством, будем называть линейным уравнением со свободным членом уравнение вида

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{B}(x), \qquad (V, 3; 26)$$

где A — непрерывное отображение $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, а $\vec{B}$ — непрерывное отображение $|a, b|$ в $\vec{F}$. Выражение «линейное со свободным членом» не совсем удачно. Лучше было бы сказать: «аффинное дифференциальное уравнение», поскольку для каждого x отображение $\vec{y} \to A(x) \cdot \vec{y} + \vec{B}(x)$ является аффинным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$. Функция $\vec{B}$ называется свободным членом дифференциального уравнения. Уравнение (V, 3; 1) с той же самой функцией A называется соответствующим линейным уравнением или соответствующим однородным уравнением[1]).

Теорема 14. *Общее решение линейного уравнения со свободным членом* (V, 3; 26) *получается добавлением к какому-либо его частному решению общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Доказательство очевидно.

Конечно, эта теорема *не доказывает* существования решения, поскольку в ней необходимо предполагать существование частного решения. Однако в случае полноты $\vec{F}$ существование частного решения непосредственно следует из теоремы 4: для любых начальных значений x_0, $\vec{y}_0$ существует, и притом единственное, решение, определенное во всем интервале $|a, b|$.

Теорема 15. *Для заданных начальных значений x_0, $\vec{y}_0$ единственное решение уравнения* (V, 3; 26) (*если пространство $\vec{F}$ полно*) *задается формулой*

$$\vec{f}(x) = R(x, x_0) \cdot \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} R(x, \xi) \cdot \vec{B}(\xi)\, d\xi, \qquad (V, 3; 27)$$

где R — резольвента соответствующего однородного уравнения.

Эта формула показывает, что если можно решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то можно решить уравнение с любым свободным членом в квадратурах.

---

1) Изучение аффинных дифференциальных уравнений должно было бы проводиться в аффинных пространствах. Однако *практически* $\vec{F}$ всегда является векторным, а не только аффинным пространством.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом, который называется методом *вариации произвольных постоянных*. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\vec{f}(x) = R(x, x_0) \cdot \vec{C}, \tag{V, 3; 28}$$

где $\vec{C}$ — некоторая постоянная, а именно начальное значение $\vec{y}_0$. Теперь мы будем поступать так, как будто эта постоянная является переменной величиной. Другими словами, мы произведем замену функций:

$$\vec{f}(x) = R(x, x_0) \cdot \vec{C}(x). \tag{V, 3; 29}$$

Такая замена всегда возможна. Каждая функция $\vec{f}$ может быть представлена, и притом единственным образом, в виде (V, 3; 29), поскольку для этого достаточно положить

$$\vec{C}(x) = (R(x, x_0))^{-1} \cdot \vec{f}(x) = R(x_0, x) \cdot \vec{f}(x). \tag{V, 3; 30}$$

Функция $\vec{C}$ дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируема функция $\vec{f}$. Согласно теореме 12 гл. III, учитывая тот факт, что билинейное каноническое отображение $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F}) \times \vec{F}$ непрерывно, формулу дифференцирования можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{f}'(x) &= \frac{\partial R}{\partial x}(x, x_0) \cdot \vec{C}(x) + R(x, x_0) \cdot \vec{C}'(x) = \\ &= (A(x) \circ R(x, x_0)) \cdot \vec{C}(x) + R(x, x_0) \cdot \vec{C}'(x) = \\ &= A(x) \cdot \vec{f}(x) + R(x, x_0) \cdot \vec{C}'(x_0). \end{aligned} \tag{V, 3; 31}$$

Если это выражение подставить в уравнение (V, 3; 26) и учесть исчезновение члена, содержащего $\vec{C}$, то мы получим

$$R(x, x_0) \cdot \vec{C}'(x) = \vec{B}(x) \tag{V, 3; 32}$$

или

$$\vec{C}'(x) = R(x_0, x) \cdot \vec{B}(x). \tag{V, 3; 33}$$

Общее решение будет получено, если в качестве $\vec{C}$ взять произвольную первообразную функции $x \to R(x_0, x) \cdot \vec{B}(x)$.

Если учесть начальное условие, то функция $\vec{C}$ должна принимать начальное значение

$$\vec{C}(x_0) = R(x_0, x_0) \cdot \vec{f}(x_0) = \vec{y}_0, \tag{V, 3; 34}$$

и, следовательно, единственное возможное решение будет определяться по формуле

$$\vec{C}(x)=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x} R(x_0, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi, \qquad (V, 3; 35)$$

которая для функции $\vec{f}$ дает выражение

$$\vec{f}(x)=R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0+R(x, x_0)\cdot\int_{x_0}^{x} R(x_0, \xi)\vec{B}(\xi)\,d\xi. \qquad (V, 3; 36)$$

Для заданных x и x_0 оператор $R(x, x_0)$ есть линейный оператор, действующий из $\vec{F}$ в $\vec{F}$. Поэтому его можно ввести под знак интеграла (теорема 6 гл. IV) и окончательно получить такую формулу:

$$\vec{f}(x)=R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x}(R(x, x_0)\circ R(x_0, \xi))\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi, \quad (V, 3; 37)$$

совпадающую, с учетом соотношения (V, 3; 18), с формулой (V, 3; 27).

Замечание. Оба члена формулы (V, 3; 27) имеют важное значение. Первый является решением однородного уравнения, соответствующего заданному начальному значению $\vec{y}_0$. Второй является решением данного уравнения со свободным членом, соответствующим начальному значению $\vec{0}$.

В том, что (V, 3; 27) является искомым решением данного дифференциального уравнения, можно убедиться прямой проверкой. В самом деле, мы уже знаем, что $R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0$ является решением однородного уравнения с начальным значением $\vec{y}_0$. Рассмотрим интегральный член. Он, очевидно, обращается в нуль при $x=x_0$. Кроме того, он дифференцируем по x и его производная по x получается так же, как производная функция (IV, 9; 41), по методу, указанному на стр. 798 т. I;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} R(x, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=R(x, x)\cdot\vec{B}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R}{\partial x}(x, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi=$$

$$= \vec{B}(x) + \int_{x_0}^{x} A(x) \cdot (R(x, \xi) \cdot \vec{B}(\xi))\, d\xi =$$

$$= \vec{B}(x) + A(x) \cdot \int_{x_0}^{x} R(x, \xi) \cdot \vec{B}(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 37_2)$$

Это означает, что интегральный член действительно является решением дифференциального уравнения (V, 3; 26) с начальным значением $\vec{0}$. Следовательно, правая часть соотношения (V, 3; 27) является решением уравнения (V, 3; 26) с начальным значением $\vec{y}_0$. Так как решение может быть только одно, то мы тем самым получили новое доказательство теоремы 15.

Случай скалярного дифференциального уравнения порядка p со свободным членом

Речь идет об уравнении, представимом в виде

$$y^{(p)} = A_0(x)\, y + A_1(x)\, y' + \ldots + A_{p-1}(x)\, y^{(p-1)} + B(x). \qquad (V, 3; 38)$$

Переходя, как обычно, к новой функции $z = (z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}) = (y, y', y'', \ldots, y^{(p-1)})$, данное уравнение можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} z'_0 \\ z'_1 \\ \vdots \\ z'_{p-2} \\ z'_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & \ldots & A_{p-2}(x) & A_{p-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix}$$

$$(V, 3; 39)$$

Учитывая значение резольвенты, определенное на стр. 44 в обозначениях, принятых на стр. 42, можно убедиться, что решение этого уравнения, соответствующее начальному значению $(y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(p-1)})$, задается по некоторой формуле, из которой мы оставим лишь то, что дает $z_0 = y$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \eta_i(x, x_0) f^{(i)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 40)$$

В частности, если отыскивается решение уравнения со свободным членом B, соответствующее начальным условиям $y_0 = 0$,

$y'_0=0, \ldots, y_0^{(p-1)}=0$, то оно определяется по формуле

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi. \qquad (V, 3; 41)$$

Здесь снова можно произвести непосредственную проверку, аналогичную той, какая была сделана для формулы (V, 3; 37_2).

Имеем

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi = \eta_{p-1}(x, x) B(x) + \\ + \int_{x_0}^{x} \eta'_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi. \qquad (V, 3; 41_2)$$

Здесь первое слагаемое равно нулю по определению функции η_{p-1}. Последовательно дифференцируя, получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi = \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(k)}(x, \xi) B(\xi) d\xi \quad \text{для} \quad k \leqslant p-1 \qquad (V, 3; 41_3)$$

и

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^p \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi = \\ = \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(p)}(x, \xi) B(\xi) d\xi + \eta_{p-1}^{(p-1)}(x, x) B(x) = \\ = \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(p)}(x, \xi) B(\xi) d\xi + B(x). \qquad (V, 3; 41_4)$$

Отсюда находим, что

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^p - \sum_{i=0}^{p-1} A_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i\right) \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi) B(\xi) d\xi = \\ = \int_{x_0}^{x} \left[\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^p - \sum_{i=0}^{p-1} A_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i\right) \eta_{p-1}(x, \xi)\right] B(\xi) d\xi + B(x) = B(x), \qquad (V, 3; 41_5)$$

поскольку η_{p-1} есть решение соответствующего однородного уравнения.

Написанный интеграл является, следовательно, решением уравнения со свободным членом, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке x_0.

При решении линейного уравнения со свободным членом *всегда можно путем изменения правой части свести это уравнение к случаю, когда все начальные значения равны нулю*[1]). *Мы видим, что решение дифференциального уравнения со свободным членом полностью определяется, если известна одна лишь функция* $\eta_{p-1}(x, \xi)$, *соответствующая начальным условиям* $y_0(\xi)=0$, $y_0'(\xi)=0$, $\ldots$, $y_0^{(p-2)}(\xi)=0$, $y_0^{(p-1)}(\xi)=1$. *Конечно, эта функция должна быть известна для каждой точки* ξ *интервала* $|a, b|$[2]).

Если рассмотреть частный случай, когда все A_i равны нулю, то мы получим уравнение

$$y^{(p)}=B(x). \tag{V, 3; 42}$$

Решением однородного уравнения $y^{(p)}=0$, соответствующим начальным значениям $0, 0, 0, \ldots, 1$ в точке ξ, является функция $\eta_{p-1}(x, \xi)=(x-\xi)^{m-1}/(m-1)!$.

Согласно (V, 3; 41), решением уравнения (V, 3; 42), соответствующим нулевым начальным условиям в точке $x_0=c$, является функция

$$f(x)=\int_c^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} B(\xi)\,d\xi. \tag{V, 3; 43}$$

Это дает (если скалярное дифференциальное уравнение (V, 3; 42) заменить дифференциальным уравнением относительно функций со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$) новое доказательство теоремы 91 гл. IV.

---

[1]) В самом деле, положим $g(x)=f(x)-\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^q}{q!}f^{(q)}(x_0)$. Эта функция обращается в точке x_0 в нуль вместе со всеми своими производными порядка $1, 2, \ldots, p-1$. Если к ней применить дифференциальный оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^p-\sum\limits_{i=0}^{p-1}A_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i$, то мы получим разность функции $B(x)$ и некоторой известной функции — результат применения дифференциального оператора к полиному $\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^q}{q!}f^{(q)}(x_0)$. Таким образом, g является решением дифференциального уравнения с известным свободным членом (отличным от B) и с нулевыми начальными значениями в x_0.

[2]) Начальные значения $0, 0, \ldots, 1$ играют, следовательно, особую роль. С ними мы будем в дальнейшем часто встречаться.

Применение теории линейных дифференциальных уравнений к вопросу о непрерывности и дифференцируемости решения дифференциального уравнения, зависящего от параметра

Теорема 15_2. *Пусть* $|a, b|$ — *интервал прямой* $\mathbb{R}$, F — *аффинное нормированное полное пространство,* Λ — *топологическое пространство,* $\vec{L}$: $(x, y, \lambda) \to \vec{L}(x, y, \lambda)$ — *непрерывное отображение* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ *в* $\vec{F}$ *и* $\lambda \to x_0(\lambda)$, $\lambda \to y_0(\lambda)$ — *непрерывные отображения* Λ *в* $|a, b|$ *и* Ω *соответственно.*

Предположим, что $\vec{L}$ *имеет частную производную* $\partial L/\partial y$, *являющуюся непрерывным отображением* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ *в* $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. *Если для значения* λ_0 *параметра* λ *дифференциальное уравнение* (V, 1; 1) *имеет решение* f_{λ_0}, *определенное в замкнутом интервале* $[a', b']$ *интервала* $|a, b|$, *соответствующее начальным значениям* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda_0)$, *то найдется такая окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* λ_0 *в* Λ, *что для каждого* $\lambda \in \mathscr{V}$ *дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение* f_λ *в* $[a', b']$, *соответствующее начальным значениям* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$. *Кроме того,* $\lambda \to f_\lambda$ *является непрерывной функцией на* $\mathscr{V}$ *со значениями в* $\left(\Omega^{[a', b']}\right)_{cb}$.

Если Λ — *открытое множество аффинного пространства* G *и* $\vec{L}$ *принадлежит классу* C^m $(m \geqslant 1)$ *на* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$, *то, когда* $\mathscr{V}$ *открыта, решение определяет функцию* f: $(x, \lambda) \to f_\lambda(x)$ *класса* C^m *на* $[a', b'] \times \mathscr{V}$ *со значениями в* F.

Производная $g(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ *есть функция на* $[a', b']$ *со значениями в* $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$, *являющаяся решением линейного дифференциального уравнения (называемого уравнением в вариациях)*

$$g'(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \circ g(x) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0), \qquad (V, 3;\ 44)$$

соответствующим начальному значению z_0 *при* $x = x_0(\lambda_0)$, *где*

$$z_0 = y_0'(\lambda_0) - \vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0)\, x_0'(\lambda_0). \qquad (V, 3;\ 45)$$

Перед доказательством поясним написанные выше формулы. 1°) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Так как $g(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ и $\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то $\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \circ g(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Следовательно, $g'(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$.

2°) $y_0'(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Так как $\vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0) \in \vec{F}$, а $x_0'(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \mathbb{R})$[1], то $\vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0)\, x'(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Отображение $\vec{\gamma} \to (x_0'(\lambda_0) \cdot \vec{\gamma})\, \vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0)$ пространства $\vec{G}$ в пространство $\vec{F}$ есть линейное непрерывное отображение.

Очевидно значение этой теоремы и уравнения в вариациях, *линейного относительно* $z = g$. Если мы можем решить дифференциальное уравнение для значения параметра λ_0, то решение *линейного* уравнения в вариациях (V, 3; 44), значительно более простого, чем произвольное уравнение, дает производную $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$, а значит, позволяет «приближенно» с помощью разложения Тейлора $f_\lambda(x) = f_{\lambda_0}(x) + g(x)\,(\overrightarrow{\lambda - \lambda_0}) + \ldots$ получить решение данного уравнения для значений параметра λ, близких к λ_0. Заметим, наконец, что из условий рассматриваемой теоремы вытекает выполнение условий теоремы существования (теорема 1): из формулы конечных приращений следует, что отображение $\vec{L}$, имеющее непрерывную производную $\partial\vec{L}/\partial y$, локально удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Рассматриваемое дифференциальное уравнение с начальными условиями и параметром λ эквивалентно уравнению

$$\vec{\Psi}(f, \lambda) = \vec{0}, \tag{V, 3; 46}$$

где $\vec{\Psi}$ — отображение $\mathscr{U} \times \Lambda = (\Omega^{[a', b']})_{cb;\,1} \times \Lambda$[2] в $(\vec{F}^{[a', b']})_{cb;\,1}$. Отображение $\vec{h} = \vec{\Psi}(f, \lambda)$ есть непрерывная ограниченная функция на $[a', b']$ со значениями в $\vec{F}$, определенная по формуле

$$\vec{h}(x) = f(x) - \Big(y_0(\lambda) + \int\limits_{x_0(\lambda)}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\, d\xi\Big). \tag{V, 3; 47}$$

---

[1] $x_0'(\lambda_0)$ является линейной формой на пространстве $\vec{F}$, рассматриваемом как векторное пространство над полем вещественных чисел. Другими словами, функцию $\lambda \to x_0(\lambda)$ можно дифференцировать только относительно поля вещественных чисел, и тогда сама функция f дифференцируема лишь относительно этого поля, а все пространства $\mathscr{L}$ являются линейными пространствами относительно поля вещественных чисел. Тем не менее если x_0 не зависит от λ, то $x_0'(\lambda) \equiv 0$, и можно будет всюду рассматривать дифференцируемость относительно поля комплексных чисел.

[2] Под $(\Omega^{[a', b']})_{cb;\,1}$ мы понимаем подпространство пространства $(F^{[a', b']})_{cb;\,1}$, образованное функциями f со значениями в $\Omega \subset F$ без ограничения на значения производной f'.

Мы постараемся свести доказательство к теореме о неявных функциях. Согласно теореме 37 гл. III, $\mathcal{U}$ является открытым множеством аффинного пространства $\left(F^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$. В свою очередь Λ есть открытое множество аффинного нормированного пространства G. Следовательно, $\mathcal{U}\times\Lambda$ является открытым множеством аффинного нормированного пространства $F\times G$. Отображение $\vec{\Psi}$ есть непрерывное отображение $\mathcal{U}\times\Lambda$ в нормированное векторное пространство $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$. Это видно из оценок, которые мы здесь не будем уточнять; они подобны тем, которые составляют сущность теоремы 5 или вариационного исчисления (теорема 38 гл. III). Теперь посмотрим, обладает ли функция $\vec{\Psi}$ частной производной по f. Обозначим через $\overrightarrow{\delta f}$ приращение f, как это делалось в вариационном исчислении (см. т. I, стр. 372). Тогда, пользуясь методом, примененным в теореме 38 гл. III, можно показать, что функция $\vec{\Psi}$ имеет частную производную $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f,\ \lambda)$, определяемую формулами

$$\overrightarrow{\delta\Psi}=\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f,\ \lambda)\cdot\overrightarrow{\delta f},$$

$$\overrightarrow{\delta\Psi}(x)=\overrightarrow{\delta f}(x)-\int\limits_{x_0(\lambda)}^{x}\frac{\partial L}{\partial y}(\xi,\ f(\xi),\ \lambda)\,\overrightarrow{\delta f}(\xi)\,d\xi, \qquad (V,3;\ 48)$$

и что частная производная $\frac{\partial\Psi}{\partial f}$ является непрерывным отображением $\mathcal{U}\times\Lambda$ в $\mathcal{L}\left(\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1};\ \left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}\right)$.

Так как пространство F полно, то полным будет и пространство $\left(F^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$ (теорема 113 гл. IV). Поэтому если мы докажем, что $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_{\lambda_0};\ \lambda_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathcal{L}\left(\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1};\ \left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}\right)$, то сможем применить теорему 25 гл. III о неявных функциях. Для доказательства обратимости достаточно будет показать, что формула (V, 3; 48) позволяет выразить $\overrightarrow{\delta f}$ как функцию от $\overrightarrow{\delta\Psi}$ и что $\overrightarrow{\delta\Psi}\to\overrightarrow{\delta f}$ является непрерывным линейным отображением. Итак, при заданной вариации $\overrightarrow{\delta\Psi}$ вариация $\overrightarrow{\delta f}$ является решением линейного дифференциального уравнения со свободным членом

$$\overrightarrow{\delta f'}(x)=\frac{\partial L}{\partial y}(x,\ f_{\lambda_0}(x),\ \lambda_0)\cdot\overrightarrow{\delta f}(x)+\overrightarrow{\delta\Psi'}(x), \qquad (V,3;\ 49)$$

соответствующим начальному условию $\overrightarrow{\delta f}(x_0(\lambda_0)) = \overrightarrow{\delta\Psi}(x_0(\lambda_0))$. Это дифференциальное уравнение вида (V, 3; 1), где $A(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0)$.

Пусть R — резольвента этого дифференциального уравнения. Тогда (V, 3; 48) в силу формулы (V, 3; 27) разрешается относительно $\overrightarrow{\delta f}$:

$$\overrightarrow{\delta f}(x) = R(x, x_0(\lambda_0)) \cdot \overrightarrow{\delta\Psi}(x_0(\lambda_0)) + \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} R(x, \xi) \cdot \overrightarrow{\delta\Psi'}(\xi)\, d\xi. \tag{V, 3; 50}$$

Это означает, что если вариация $\overrightarrow{\delta\Psi}$ берется в пространстве $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$, то она определяется некоторым, и притом единственным, элементом $\overrightarrow{\delta f}$ этого же пространства, и что отображение $\overrightarrow{\delta\Psi} \to \overrightarrow{\delta f}$ линейно и непрерывно. Следовательно, отображение $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_{\lambda_0}, \lambda_0)$ обратимо и применима теорема о неявных функциях. Из нее следует, что в Λ имеется окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0 и в $\left(\Omega^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$ имеется окрестность $\mathscr{F}$ точки f_{λ_0}, такие, что для каждого $\lambda \in \mathscr{V}$ уравнение (V, 3; 46) имеет, и притом единственное, решение в окрестности $\mathscr{F}$. Тогда для $\lambda \in \mathscr{V}$ данное дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение, определенное на $[a', b']$ со значениями в Ω, соответствующее начальным значениям $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ и такое, что $f_\lambda \in \mathscr{F}$.

[Фраза «такое, что $f_\lambda \in \mathscr{F}$» обогащает полученный перед ней результат в том, что касается *существования* (решение не только существует, но и принадлежит $\mathscr{F}$), но обедняет его в том, что касается *единственности* (единственное решение существует в окрестности $\mathscr{F}$ точки f_{λ_0}, но таких решений может быть несколько в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$). Однако теорема 2 обеспечивает единственность в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$.]

Из теоремы о неявных функциях, кроме того, следует непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$ окрестности $\mathscr{V}$ в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$.

Пусть Λ — открытое множество аффинного нормированного пространства $\vec{G}$. Аналогично можно установить, что если $\vec{L}$ принадлежит классу C^1 на $]a, b[\times\Omega\times\Lambda$, а x_0 и y_0 принадлежат классу C^1 на Λ, то Ψ принадлежит классу C^1 на $\mathscr{U}\times\Lambda$

со значениями в $\left(F^{[a',\, b']}\right)_{cb;\, 1}$. Из теоремы 28 гл. III следует, что отображение $\lambda \to f_\lambda$ открытого множества $\mathscr{V}$ в $\left(\Omega^{[a',\, b']}\right)_{cb;\, 1}$ принадлежит классу C^1. Кроме того, производная этой функции может быть получена по правилу (III, 8; 24). Продифференцировав $\Psi(f,\ \lambda) = 0$ в точке f_{λ_0}, λ_0, получим

$$\overrightarrow{\delta f}(x) - \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} \frac{\partial L}{\partial y}(\xi,\ f_{\lambda_0}(\xi),\ \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta f}(\xi)\, d\xi - y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} -$$
$$- \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\xi,\ f_{\lambda_0}(\xi),\ \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) d\xi + \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}\left(x_0(\lambda_0),\ y_0(\lambda),\ \lambda_0\right) = \vec{0}. \tag{V, 3; 51}$$

Значит, $\overrightarrow{\delta f}$ можно получить как функцию от $\overrightarrow{\delta\lambda}$ следующим образом: $\overrightarrow{\delta f}$ является решением дифференциального уравнения

$$\overrightarrow{\delta f'}(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x,\ f_{\lambda_0}(x),\ \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\ f_{\lambda_0}(x),\ \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}, \tag{V, 3; 52}$$

соответствующим начальному условию

$$\overrightarrow{\delta f}\left(x_0(\lambda_0)\right) = y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} - \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}\left(x_0(\lambda_0),\ y_0(\lambda_0),\ \lambda_0\right), \tag{V, 3; 53}$$

что возвращает нас к (V, 3; 44) и (V, 3; 45).

Наконец, если $\vec{L}$ принадлежит классу C^m, а x_0 и y_0 принадлежат классу C^m на Λ, то индукцией проверяется, что $\lambda \to f_\lambda$ принадлежит классу C^m.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Так называют дифференциальные уравнения вида

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}, \tag{V, 4; 1}$$

где A — фиксированное непрерывное линейное отображение пространства $\vec{F}$ в себя: $A \in \mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. Здесь $|a,\ b| = \mathbb{R}$. В качестве поля скаляров для векторного пространства $\vec{F}$ всегда берется поле комплексных чисел.

Решение этого уравнения получается с помощью понятия экспоненты оператора. Рассмотрим ряд

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}. \tag{V, 4; 2}$$

Этот ряд абсолютно сходится в пространстве $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. (Если $\vec{F}$ — пространство Банаха, то $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ есть пространство Банаха.)

В самом деле, так как $\| A^m \| \leqslant \| A \|^m$ (см. т. I, стр. 114), то

$$\| \exp A \| \leqslant e^{\|A\|}. \qquad (V, 4; 3)$$

Следовательно, сумма этого ряда является новым непрерывным линейным отображением $\vec{F}$ в себя. Это отображение обозначают через e^A или $\exp A$. Очевидно, $\exp(0) = I$ — тождественное отображение.

Экспонента оператора обладает следующими замечательными свойствами:

1°) Если A и B — *коммутирующие* операторы, т. е. операторы, для которых $AB = BA$, то справедлива формула

$$\exp(A + B) = (\exp A) \circ (\exp B)\,[1]. \qquad (V, 4; 4)$$

Действительно, если перемножить оба абсолютно сходящихся ряда, представляющих $\exp A$ и $\exp B$, то мы получим

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{p,\ q=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}, \qquad (V, 4; 5)$$

откуда после перегруппировки членов приходим к искомому выражению

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!\,q!} A^p B^q \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \exp(A + B)\,[2]. \qquad (V, 4; 6)$$

В частности, если A — некоторый оператор, а λ и μ — комплексные скаляры, то

$$\exp(\lambda A) \exp(\mu A) = \exp((\lambda + \mu) A). \qquad (V, 4; 7)$$

Полагая $\lambda = -\mu$, видим, что оператор $\exp A$ обратим, а его обратный оператор равен $\exp(-A)$.

---

[1]) В качестве символа композиции мы используем $\circ$. Однако напомним, что $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ рассматривается как некоторая алгебра и что в ней, вообще говоря, этот символ не вводится. Впрочем, определяя A^m, мы именно так и поступали.

[2]) При переходе от 2-го к 3-му члену равенств (формула бинома) существенно предположение о том, что операторы A и B коммутируют.

Заметим, что операторы A и $\exp A$ всегда коммутируют и при этом

$$A \exp A = (\exp A)\, A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{m+1}}{m!}. \qquad (V, 4; 8)$$

2°) Пусть A — некоторый оператор. Рассмотрим отображение $x \to \exp(xA)$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Докажем, что это отображение непрерывно и даже дифференцируемо. Для этого, согласно следствию теоремы 111 гл. IV, надо сначала формально почленно продифференцировать рассматриваемый ряд, т. е. написать

$$\frac{d}{dx}(\exp xA) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} A^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} A^{m+1} = A \exp(xA). \qquad (V, 4; 8_2)$$

После этого достаточно убедиться, что полученный ряд локально равномерно сходится на $\mathbb{R}$. Однако это очевидно, так как для $|x| \leqslant k$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{x^m}{m!} A^{m+1} \right\| \leqslant \frac{k^m}{m!} \| A \|^{m+1} \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \| A \|^{m+1} < +\infty. \qquad (V, 4; 9)$$

Очевидно далее, что предыдущая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(\exp(xA)) = A \exp(xA), \quad \text{или} \quad Y' = A \circ Y = Y \circ A. \qquad (V, 4; 10)$$

Поскольку для $x = 0$ имеет место равенство $\exp(0A) = I$, предыдущая функция является решением дифференциального уравнения для разрешающего оператора (V, 3; 19), соответствующим значению $\xi = 0$. Поэтому для этого разрешающего оператора, согласно теореме 12, имеет место формула

$$R(x, 0) = \exp(xA). \qquad (V, 4; 11)$$

Поскольку мы рассматриваем дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, оно инвариантно относительно сдвига по x, и, следовательно, разрешающий оператор относительно точки ξ выражается через разрешающий оператор относительно точки 0 формулой

$$R(x, \xi) = R(x - \xi, 0) = \exp((x - \xi) A). \qquad (V, 4; 12)$$

Отсюда следует, что единственное решение дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям x_0, $\vec{y}_0$, задается следующим образом:

$$\vec{f}(x) = \exp((x - x_0)A) \cdot \vec{f}(x_0) = \exp((x - x_0)A) \cdot \vec{y}_0. \quad (\mathrm{V}, 4; 13)$$

Решив однородное уравнение, можно решить дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и свободным членом:

$$y' = A \cdot \vec{y} + \vec{B}(x). \quad (\mathrm{V}, 4; 14)$$

Решение, соответствующее начальным значениям x_0, $\vec{y}_0$, будет иметь вид

$$\vec{f}(x) = \exp((x - x_0)A) \cdot \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \exp((x - \xi)A) \cdot \vec{B}(\xi)\, d\xi. \quad (\mathrm{V}, 4; 15)$$

Подводя итог предыдущим результатам, получаем следующую теорему:

Теорема 16. *Ряд* (V, 4; 2) *определяет элемент* $\exp A$ *пространства* $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. *Имеет место соотношение* (V ,4; 7), *а если* A *и* B *коммутируют, то и соотношение* (V, 4; 4). *Справедливо дифференциальное уравнение* (V, 4; 10). *Разрешающий оператор уравнения* (V, 4; 1) *задается формулой* (V, 4; 12). *Единственное решение дифференциального уравнения* (V, 4; 14), *соответствующее начальным значениям* x_0, $\vec{y}_0$, *определяется формулой* (V, 4; 15).

Практически все затруднения при решении тех или иных задач сводятся к умению вычислять экспоненту оператора.

Частный случай, когда пространство $\vec{F}$ является n-мерным. Построение экспоненты оператора

Даже в этом случае построение экспоненты оператора не является столь уж простым делом. Предположим для определенности, что в $\vec{F}$ выбран некоторый базис. Тогда оператор A можно представить в виде некоторой матрицы M, и мы будем искать экспоненту этой матрицы, определенную рядом (V, 4; 2). Однако этот ряд не приспособлен для прямых вычислений, поскольку для его построения надо уметь вычислять последовательные степени матрицы M. Если нам не удается тем или иным способом узнать собственные значения этой матрицы, то практические вычисления экспоненты будут нелегкими. Если же собственные значения матрицы A — это различные числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то, *используя в качестве базиса набор соответ-*

ствующих собственных векторов, можно привести матрицу оператора A к диагональному виду

$$M=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}. \qquad (V, 4; 16)$$

Тогда для последовательных степеней матрицы имеем:

$$M^m=\begin{pmatrix} r_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n^m \end{pmatrix} \qquad (V, 4; 17)$$

и, следовательно, экспонента такой матрицы будет диагональной матрицей вида

$$\exp M=\begin{pmatrix} e^{r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{r_3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{r_n} \end{pmatrix}. \qquad (V, 4; 18)$$

В частности, если A — гомотетия с отношением λ, $A=\lambda I$, то $\exp A=e^{\lambda}I$. Рассмотрим теперь общий случай, когда характеристические корни оператора A не обязательно различны.

Обозначим корни характеристического уравнения через $r_1, r_2, \dots, r_l$, считая, что r_j — корень кратности p_j: $\sum\limits_{j=1}^{l} p_j=n$. Тогда, согласно теории жордановых представлений матрицы линейного отображения конечномерного векторного пространства в себя, каждому корню r_j соответствует однозначно определенное векторное подпространство $\vec{F}_j$ размерности p_j пространства $\vec{F}$, содержащее все собственные векторы, отвечающие собственному значению r_j[1]) оператора A, и такое, что опера-

[1]) Существует по крайней мере один такой собственный вектор. Собственные векторы, соответствующие собственному значению r_j, образуют некоторое подпространство пространства $\vec{F}_j$.

тор $(A - r_j I)^{p_j}$ равен нулю в этом подпространстве. Кроме того, пространство $\vec{F}$ является прямой суммой векторных подпространств $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_l$ [1]).

Зададим теперь для дифференциального уравнения начальное условие $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. Вектор $\vec{y}_0$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\vec{y}_0 = \sum_{j=1}^{l} \vec{u}_j$, где векторы $\vec{u}_j$ принадлежат $\vec{F}_j$. Решение, соответствующее этому начальному условию, теперь может быть записано в виде

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} \exp((x - x_0) A) \cdot \vec{u}_j. \qquad (V, 4; 19)$$

Дальнейшие рассуждения мы проведем следующим образом. Для простоты мы положим $x - x_0 = t$. Тогда

$$\exp(tA) \cdot \vec{u}_j = \exp(t(A - r_j I)) \cdot [\exp(t r_j I) \cdot \vec{u}_j]. \qquad (V, 4; 20)$$

Квадратную скобку можно записать в виде $e^{tr_j}\vec{u}_j$. С другой стороны, учитывая изложенное выше, заметим, что разложение $\exp t(A - r_j I)$ по последовательным степеням оператора $A - r_j I$ содержит лишь конечное число членов и может быть записано в виде

$$\exp t(A - r_j I) = \sum_{m=0}^{p_j - 1} \frac{t^m}{m!}(A - r_j I)^m. \qquad (V, 4; 21)$$

Поэтому окончательно решение $\vec{f}(x)$ записывается в виде

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{m=0}^{p_j - 1} \frac{t^m}{m!}(A - r_j I)^m e^{tr_j}\vec{u}_j \right), \quad t = x - x_0. \qquad (V, 4; 22)$$

Мы видим, что каждое решение дифференциального уравнения может быть записано в форме

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} e^{r_j x}\vec{P}_j(x), \qquad (V, 4; 23)$$

[1]) Иначе говоря, каждый вектор из $\vec{F}$ выражается, и притом единственным образом, в виде суммы некоторого вектора из $\vec{F}_1$, некоторого вектора из $\vec{F}_2$, ... и некоторого вектора из $\vec{F}_l$.

где каждый член $e^{r_j x}\vec{P}_j(x)$ представляет собой произведение экспоненты $e^{r_j x}$ на некоторый полином относительно x степени $<p_j$ с коэффициентами, принадлежащими векторному подпространству $\vec{F}_j$ пространства $\vec{F}$. Если все собственные значения различны, то размерность каждого из подпространств $\vec{F}_j$ равна 1 и мы возвращаемся к найденной ранее классической форме общего решения:

$$\vec{f}(x)=\sum_{j=0}^{n}\vec{c}_j e^{r_j x}. \qquad (V, 4; 24)$$

На практике решение уравнения начинается с отыскания характеристических корней оператора A. Для этого рассматривается уравнение

$$\det(A-rI)=0, \qquad (V, 4; 25)$$

которое легко записать после выбора некоторого базиса в $\vec{F}$. Затем определяется порядок кратности p_j каждого из характеристических корней r_j. После этого решение ищется в неопределенной форме (V, 4; 23), где коэффициенты $\vec{P}_j$ считаются принадлежащими пространству $\vec{F}_j$, и остается лишь определить каждый полином $\vec{P}_j$. Свободный член полинома $\vec{P}_j$ берется в $\vec{F}_j$ произвольно, а остальные его коэффициенты ищутся в подпространстве $\vec{F}_j$, исходя из данного уравнения. Если свободный член $\vec{P}_j$ обозначить через $\vec{c}_{j0}$, то решение, выраженное в виде (V, 4; 23), имеет в качестве начального значения, соответствующего $x=0$, вектор

$$\vec{f}(0)=\sum_{j=1}^{l}\vec{c}_{j0}. \qquad (V, 4; 26)$$

Этот начальный вектор можно выбирать произвольно; его составляющие $\vec{c}_{j0}$ являются произвольными векторами в различных подпространствах $\vec{F}_j$. Он определяет единственное решение рассматриваемого уравнения. Полиномы $\vec{P}_j$, очевидно, нельзя выбирать произвольно. Это полиномы степени $<p_j$ *с произвольным свободным членом*. Каждый свободный член пробегает некоторое векторное подпространство размерности p_j, т. е. полином $\vec{P}_j$ зависит в действительности от p_j произвольных скалярных постоянных. Поэтому, окончательно, решение диф-

ференциального уравнения зависит от $n=\sum_{j=1}^{l} p_j$ произвольных скалярных постоянных.

Замечание. Может оказаться, что характеристические корни кратны, но, несмотря на это, решение имеет вид (V, 4; 24), т. е. полиномы сводятся к их свободным членам. (Как мы увидим позже, согласно следствию теоремы 18, этого не случится, если речь идет о скалярном дифференциальном уравнении порядка p.) Такое обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда все подпространство $\vec{F}_j$ является собственным векторным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению r_j, т. е. для каждого вектора $\vec{c}_j \in \vec{F}_j$ имеет место соотношение $A \cdot \vec{c} = r_j \vec{c}$, ибо тогда для каждого $\vec{c} \in \vec{F}_j$ мы имеем $\frac{d}{dx}\left(\vec{c}e^{r_j x}\right)=\vec{c}r_j e^{r_j x}=(A \cdot \vec{c})\, e^{r_j x}$. В этом случае экспонента оператора A в $\vec{F}_j$ сводится к гомотетии с отношением e^{r_j}.

В случае когда $\vec{F}=\mathbb{R}^n$ и дифференциальное уравнение имеет вид

$$y_i'=ry_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{V, 4; 27}$$

существует единственный характеристический корень r кратности n. Решение тогда выражается в виде

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} e^{rx}. \tag{V, 4; 28}$$

Полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы:

Теорема 17. *Пусть задано дифференциальное уравнение* (V, 4; 1). *Тогда каждому собственному значению r_j кратности p_j матрицы A можно поставить в соответствие векторное подпространство $\vec{F}_j$ пространства $\vec{F}$ размерности p_j, содержащее все собственные векторы, соответствующие собственному значению r_j, в котором матрица $(A-r_jI)^{p_j}$ равна нулю. Пространство $\vec{F}$ является прямой суммой подпространств $\vec{F}_j$. Общее решение уравнения записывается в виде* (V, 4; 23), *где $\vec{P}_j$ — по-*

лином степени $< p_j$ с коэффициентами, лежащими в $\vec{F}_j$. В $\vec{F}_j$ можно произвольно выбирать свободный член этого полинома, и тогда $\vec{P}_j$ определен однозначно.

Случай скалярного дифференциального уравнения порядка p с постоянными коэффициентами

Запишем такое уравнение в виде

$$Dy = y^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} A_i y^{(i)} = 0\ [1], \qquad (V, 4; 29)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ — некоторые постоянные. Если произвести замену функций $z = (y, y', \ldots, y^{(p-1)})$, то мы получим функцию z со значениями в $\mathbb{R}^p$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (V, 4; 1), где A — матрица вида (V, 3; 39) с постоянными элементами A_i. Теперь можно было бы для решения полученного уравнения применить уже разработанную теорию, но в этом случае целесообразнее воспользоваться следующим независимым методом исследования.

Пусть P — некоторый полином с комплексными коэффициентами относительно произвольной переменной z:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{p} c_i z^i. \qquad (V, 4; 30)$$

Тогда через $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ мы будем обозначать дифференциальный оператор

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \sum_{i=0}^{p} c_i \left(\frac{d}{dx}\right)^i. \qquad (V, 4; 31)$$

Двум полиномам P и Q соответствуют два дифференциальных оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ и $Q\left(\frac{d}{dx}\right)$. Сумме полиномов $R = P + Q$ отвечает дифференциальный оператор $R\left(\frac{d}{dx}\right) = P\left(\frac{d}{dx}\right) + Q\left(\frac{d}{dx}\right)$, называемый суммой операторов, а произведению полиномов $S = PQ$ соответствует композиция дифференциальных операторов $S\left(\frac{d}{dx}\right) = P\left(\frac{d}{dx}\right) \circ Q\left(\frac{d}{dx}\right)$, также обозначаемая в виде произведения $P\left(\frac{d}{dx}\right) Q\left(\frac{d}{dx}\right)$.

---

[1]) Можно было бы при желании положить $-A_i = a_i$ и $a_p = 1$, и тогда $D = \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\frac{d}{dx}\right)^i$.

Дифференциальный оператор D, определяемый формулой (V, 4; 29), может быть записан в виде $L\left(\frac{d}{dx}\right)$, где L — полином:

$$L(z) = z^p - \sum_{i=0}^{p-1} A_i z^i = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i \text{ [1]}. \qquad (V, 4; 32)$$

По теореме Даламбера (теорема 30 гл. II) этот полином может быть представлен единственным образом в виде произведения степеней полиномов первой степени:

$$L(z) = \prod_{j=1}^{l} (z - r_j)^{p_j}. \qquad (V, 4; 33)$$

Характеристическими корнями дифференциального оператора являются по определению корни полинома L, т. е. корни уравнения

$$L(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad (V, 4; 34)$$

причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность[2].

Дифференциальный оператор D может быть записан в виде

$$D = L\left(\frac{d}{dx}\right) = \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{d}{dx} - r_j\right)^{p_j}. \qquad (V, 4; 35)$$

Найдем теперь, при каком условии экспонента e^{rx} является решением дифференциального уравнения (V, 4; 29). Имеем:

$$\frac{d}{dx} e^{rx} = re^{rx}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{rx} = r^k e^{rx}.$$

Значит,

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot e^{rx} = L(r) e^{rx}. \qquad (V, 4; 36)$$

Таким образом, e^{rx} является решением дифференциального уравнения (V, 4; 29) тогда и только тогда, когда r есть характеристический корень дифференциального оператора L.

---

[1]) См. примечание на стр. 66.

[2]) Мы даем здесь *определение* характеристических корней оператора D, которое достаточно для полного решения дифференциального уравнения. Надо было бы *доказать*, что это действительно характеристические корни r_j с порядком кратности p_j, соответствующие матрице A из (V, 4; 39), чтобы связать рассматриваемый здесь частный случай с общим случаем. Мы предлагаем читателю самому провести эти рассуждения. Прямой пользы от этого нет, поскольку в данном частном случае мы используем самостоятельный метод исследования. Необходимый результат вытекает прямо из следствия теоремы 18.

Если все характеристические корни различны, то дифференциальное уравнение имеет p решений, а именно $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_p x}$. Позже мы покажем (теорема 18), что эти решения линейно независимы, и тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j e^{r_j x}. \qquad (\mathrm{V}, 4; 37)$$

Если же имеются кратные характеристические корни, то знание экспоненциальных решений недостаточно для определения общего решения дифференциального уравнения. В этом случае следует ввести функцию

$$\frac{x^k}{k!} e^{rx} \qquad (\mathrm{V}, 4; 38)$$

и вычислить результат действия дифференциального оператора $\frac{d}{dx} - s$ на эту функцию:

$$\left(\frac{d}{dx} - s\right)\frac{x^k}{k!} e^{rx} = (r-s)\frac{x^k}{k!} e^{rx} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{rx}. \qquad (\mathrm{V}, 4; 39)$$

Отсюда при $r = s$ получаем формулу

$$\left(\frac{d}{dx} - r\right)\frac{x^k}{k!} e^{rx} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{rx} \qquad (\mathrm{V}, 4; 40)$$

и, более общо, формулу

$$\left(\frac{d}{dx} - r\right)^q \frac{x^k}{k!} e^{rx} = \begin{cases} 0, & \text{если } q \geqslant k+1, \\ \dfrac{x^{k-q}}{(k-q)!} e^{rx}, & \text{если } q \leqslant k. \end{cases} \qquad (\mathrm{V}, 4; 41)$$

Если же $s \neq r$, то $\left(\frac{d}{dx} - s\right)^q P(x) e^{rx}$ является произведением e^{rx} на некоторый полином степени p.

Предположим, что r_j — корень кратности p_j полинома L. Тогда дифференциальный оператор D может быть записан в виде

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dx}\right) &= L_j\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \left(\frac{d}{dx} - r_j\right)^{p_j}, \\ L_j(z) &= \prod_{\nu \neq j} (z - r_\nu)^{p_\nu}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 4; 42)$$

Легко видеть, что если этот оператор применить к произвольной функции $\frac{x^k}{k!} e^{r_j x}$ при $k \leqslant p_j - 1$, то мы получим 0. Другими словами, p_j таких функций являются решениями рассматриваемого дифференциального уравнения. Отсюда следует, что это уравнение имеет по крайней мере p следующих решений:

$$\frac{x^k}{k!}e^{r_j x}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p_j-1, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ l. \qquad (V, 4; 43)$$

Если теперь мы сумеем доказать, что эти решения линейно независимы, то, зная, что пространство решений p-мерно, получим общее решение уравнения (V, 4; 29) в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=0}^{p_j-1} c_{jk}\frac{x^k}{k!}e^{r_j x}\right). \qquad (V, 4; 44)$$

Теорема 18. *Совокупность p функций вида* (V, 4; 43) *линейно независима, т. е. функция вида* (V, 4; 44) *может тождественно равняться нулю только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю.*

Первое доказательство. Предположим, что выводы теоремы не верны, и покажем, что это приводит к противоречию. Если не все коэффициенты c_{jk} в соотношении (V, 4; 44) равны нулю, то найдется такой коэффициент $c_{jq_j}\neq 0$, что все коэффициенты c_{jk} при $k>q_j$ равны нулю (это коэффициент наивысшей степени полинома, соответствующего $e^{r_j x}$). Рассмотрим теперь следующий дифференциальный оператор:

$$M_j\left(\frac{d}{dx}\right), \quad \text{где} \quad M_j(z)=\frac{L(z)}{(z-r_j)^{p_j-q_j}}=\prod_{\nu\neq j}(z-r_\nu)^{p_\nu}(z-r_j)^{q_j}. \qquad (V, 4; 45)$$

Так как в $M_j(z)$ входит множитель $(z-r_\nu)^{p_\nu}$, то, действуя этим оператором на каждую из функций $\frac{x^k}{k!}e^{r_\nu x}$, где r_ν — характеристический корень $\neq r_j$ и $k\leqslant p_\nu-1$, мы получим нуль (уже встречавшееся рассуждение; см. (V, 4; 42)). Так как в $M_j(z)$ входит множитель $(z-r_j)^{q_j}$, то в результате действия оператора на $\frac{x^k}{k!}e^{r_j x}$ при $k\leqslant q_j-1$ мы также получим нуль. Применим этот оператор к функции $\frac{x^{q_j}}{(q_j)!}e^{r_j x}$. Множитель $\left(\frac{d}{dx}-r_j\right)^{q_j}$ преобразует ее в функцию $e^{r_j x}$, на которую будет действовать оператор $L_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, где

$$L_j(z)=\frac{L(z)}{(z-r_j)^{p_j}}=\prod_{\nu\neq j}(z-r_\nu)^{p_\nu} \quad \text{(формула (V, 4; 42)),} \qquad (V, 4; 45_2)$$

что даст $L(r_j)e^{r_jx} \neq 0$. Поэтому

$$M_j\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot f(x) = c_{jq_j}L_j(r_j)e^{r_jx}. \qquad (V, 4; 46)$$

Однако если линейная комбинация (V, 4; 44) равна нулю, то, действуя на нее произвольным дифференциальным оператором, мы можем получить только нуль. Отсюда вытекает, что все $c_{jq_j} = 0$, что невозможно.

Второе доказательство. Функция $\vec{f}$, определенная по формуле (V, 4; 44), может быть продолжена до некоторой функции класса C^∞ в комплексной плоскости, поскольку такое продолжение возможно как для экспоненциальных функций, так и для полиномов. Кроме того, так как экспоненты разложимы в ряд Тейлора по степеням z, то такое же разложение возможно и для рассматриваемой функции. Так как коэффициенты ряда Тейлора являются последовательными производными разлагаемой функции при $x = 0$, то разложение Тейлора по степеням z может быть равным 0 *для любого вещественного* $z = x$ только в том случае, когда все его коэффициенты равны нулю. Следовательно, эта функция, равная по предположению нулю для вещественных значений $z = x$, будет также равняться нулю и для всех *комплексных* значений z. Дальнейшие рассуждения будем проводить методом от противного.

Обозначим через r_j какой-либо максимальный по модулю характеристический корень, входящий эффективно в выражение для f, и пусть q_j — наибольшая степень члена $\frac{x^k}{k!}e^{r_jx}$ в f с не равным нулю коэффициентом. Обозначим через $|r_j|$ его модуль, а через θ_j его аргумент: $r_j = |r_j|e^{i\theta_j}$, и положим $z = \rho e^{-i\theta_j}$. Рассмотрим теперь поведение членов суммы (V, 4; 44) при z, стремящемся к бесконечности при фиксированном аргументе $-\theta_j$. Так как

$$\begin{aligned}
&\left|c_{jq_j}\frac{z^{q_j}}{(q_j)!}e^{r_jz}\right| = |c_{jq_j}|\frac{\rho^{q_j}}{(q_j)!}e^{|r_j|\rho},\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_jz}\right| = |c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_j|\rho},\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_\nu z}\right| \leqslant |c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_\nu|\rho} \quad \text{для} \quad |r_\nu| < |r_j|,\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_\nu z}\right| = |c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_j|\cos(\theta_\nu-\theta_j)\rho} \quad \text{для} \quad r_\nu = |r_j|e^{i\theta_\nu},
\end{aligned} \qquad (V, 4; 47)$$

то модули всех членов при ρ, стремящемся к бесконечности, имеют меньший порядок роста, чем модуль первого члена: второй — потому, что $k < q_j$, третий — потому, что $|r_\nu| < |r_j|$, а четвертый — потому, что $\theta_\nu \neq \theta_j$. Значит, функция $f(\rho e^{-i\theta_j})$ *эквивалентна* при ρ, стремящемся к бесконечности, $c_{jq_j}\frac{z^{q_j}}{(q_j)!}e^{|r_j|\rho}$. Теперь тождество $f(z) \equiv 0$ влечет за собой равенство $c_{jq_j} = 0$, что невозможно по предположению. Теорема доказана.

Следствие. *Если дифференциальное уравнение* (V, 4; 29), *где* $D = L\left(\frac{d}{dx}\right)$, *имеет характеристические корни* $r_1, r_2, \ldots, r_l$ *(корни* $L(z)$*) кратности* $p_1, p_2, \ldots, p_l$ *соответственно, то общее решение уравнения определяется формулой* (V, 4; 44).

Скалярное дифференциальное уравнение порядка p с постоянными коэффициентами и с правой частью

Пусть задано уравнение

$$Dy = y^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} A_i y^{(i)} = B(x), \qquad \text{(V, 4; 48)}$$

где A_i — постоянные, а B — непрерывная комплексная функция.

Согласно изложенному на стр. 51, уравнение будет полностью решено, если мы найдем решение $\eta = \eta_{p-1}(x, \xi)$ дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям 0, 0, 0, ..., 1 в точке ξ. Обозначим через η_{p-1} решение, соответствующее начальным значениям 0, 0, ..., 1 в точке 0. Тогда с помощью сдвига легко убедиться в том, что решение, соответствующее тем же самым начальным значениям в точке ξ, представляет собой функцию $x \to \eta_{p-1}(x - \xi)$. Вместо того чтобы применять метод, указанный в примечании [1]) на стр. 53, удобнее будет воспользоваться разрешающим оператором. С этой целью найдем решения η_i дифференциального уравнения, соответствующие начальным условиям $\eta_i^{(q)}(0) = \delta_i^q$, где δ_i^q — символ Кронекера.

Покажем, что для $h = 1, 2, \ldots, p$

$$\eta_{p-h} = -A_{p-h+1}\eta - A_{p-h+2}\eta' - \ldots - A_{p-1}\eta^{(h-2)} + \eta^{(h-1)}. \qquad \text{(V, 4; 49)}$$

Если дифференциальное уравнение записать в обозначениях, о которых говорится в примечании на стр. 66, то мы получим

$$\begin{aligned}
&\eta_{p-1}=\eta,\\
&\eta_{p-2}=\eta'+a_{p-1}\eta,\\
&\eta_{p-3}=\eta''+a_{p-1}\eta'+a_{p-2}\eta,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\eta_1=\eta^{(p-2)}+a_{p-1}\eta^{(p-3)}+\dots+a_3\eta'+a_2\eta,\\
&\eta_0=\eta^{(p-1)}+a_{p-1}\eta^{(p-2)}+\dots+a_3\eta''+a_2\eta'+a_1\eta\ ^{1)}.
\end{aligned} \qquad (V, 4; 49_2)$$

Это очевидно для $h=1$, когда имеет место равенство $\eta_{p-1}=\eta$. Остальные соотношения докажем по индукции, проверяя, что из справедливости этих соотношений для значения $h-1$ следует их справедливость для значения h. Заметим прежде всего, что функция, определенная формулой (V, 4; 49), является решением рассматриваемого дифференциального уравнения, поскольку любая производная решения сама является решением этого уравнения. Остается показать, что она удовлетворяет требуемым начальным условиям при $x=0$. Поскольку при $x=0$ в нуль обращаются все производные функции η порядков $\leqslant p-2$, то равны нулю производные рассматриваемой функции порядков $\leqslant p-h-1$. Ее производная порядка $p-h$ равна производной $(p-1)$-го порядка функции η, т. е. 1.

Производная порядка $p-h+1$ вычисляется так:

$$\eta_{p-h}^{(p-h+1)}(0)=-A_{p-1}\eta^{(p-1)}(0)+\eta^{(p)}(0)=$$
$$=(-A_{p-1}\eta+\eta')^{(p-1)}(0)=-\eta_{p-2}^{(p-1)}(0) \qquad (V, 4; 50)$$

и обращается в нуль в силу свойства, которое мы считаем доказанным для функции η_{p-2}. Так мы продвигаемся далее до производной порядка $p-2$:

$$\eta_{p-h}^{(p-2)}(0)=-A_{p-h+2}\eta^{(p-1)}(0)-\dots-A_{p-1}\eta^{(p+h-4)}(0)+$$
$$+\eta^{(p+h-3)}(0)=\eta_{p-h+1}^{(p-1)}(0), \qquad (V, 4; 51)$$

которая снова обращается в нуль, поскольку этим свойством по предположению обладает функция $\eta_{p-(h-1)}$. Окончательно для производной порядка $p-1$ получаем следующую формулу:

$$\eta_{p-h}^{(p-1)}(0)=-A_{p-h+1}\eta^{(p-1)}(0)-A_{p-h+2}\eta^{(p)}(0)-\dots$$
$$\dots-A_{p-1}\eta^{(p+h-3)}(0)+\eta^{(p+h-2)}(0). \qquad (V, 4; 52)$$

Преобразуем эту формулу, учитывая, что $\eta^{(h-2)}$ является решением дифференциального уравнения. Пользуясь свойствами

---

1) Возьмем, например, уравнение $y'''+ay''+by'+cy=0$. Для него $\eta_2=\eta$, $\eta_1=\eta'+a\eta$, $\eta_0=\eta''+a\eta'+b\eta$.

функции η, получаем

$$A_{p-h}\eta^{(p-2)}(0)+\ldots+A_1\eta^{(h-1)}(0)+A_0\eta^{(h-2)}(0)=0, \qquad (V, 4; 53)$$

чем и заканчивается доказательство указанного выше свойства. Мы можем теперь сформулировать следующий результат:

Теорема 19. *Решение дифференциального уравнения* (V, 4; 48), *соответствующее начальным значениям* y_0, y_0', y_0'', $\ldots$, $y_0^{(p-1)}$, *записывается в виде*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p-1} y_0^{(i)}\eta_i(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\eta(x-\xi)B(\xi)\,d\xi, \qquad (V, 4; 54)$$

где η — *решение однородного уравнения, соответствующее начальным значениям* 0, 0. …, 1 [1]) *в точке* 0, *а* η_i *определяются по формуле* (V, 4; 49).

Эта формула показывает, как наличие решения η дифференциального уравнения, соответствующего начальным значениям 0, 0, …, 1 в начале координат, позволяет полностью определить решение этого уравнения.

Примеры. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''+\omega^2 y=B(x), \qquad (V, 4; 55)$$

и соответствующие начальные значения y_0, y_0' в точке x_0. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x. \qquad (V, 4; 56)$$

Функция η, соответствующая начальным значениям 0, 1, определяется формулой

$$\eta(x)=\frac{\sin\omega x}{\omega}, \qquad (V, 4; 57)$$

и, следовательно, искомое решение f уравнения, соответствующее данным начальным условиям, запишется так:

$$\eta_1(x)=\eta(x)=\frac{\sin\omega x}{\omega},\quad \eta_0(x)=\eta'(x)=\cos\omega x, \qquad (V, 4; 58)$$

$$f(x)=y_0\cos\omega(x-x_0)+y_0'\frac{\sin\omega(x-x_0)}{\omega}+\int_{x_0}^{x}\frac{\sin\omega(x-\xi)}{\omega}B(\xi)\,d\xi.$$

Теорема 20 (Хевисайд). *Решение* $\eta=\eta_{p-1}$ *уравнения* (V, 4; 29), *соответствующее начальным значениям* 0, 0, …, 0, 1 *при* $x=0$, *определяется по формуле* (V, 4; 44), *где* c_{jk} — *коэф-*

[1]) Для порядка 1, $p=1$, имеется только одно начальное условие $\eta(0)=1$.

фициенты разложения на простые дроби рациональной функции $\frac{1}{L(Z)}$ (*L определяется формулой* (V, 4; 32)):

$$\frac{1}{L(Z)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=0}^{p_j-1}\frac{c_{jk}}{(Z-r_j)^{k+1}}\right). \qquad (V, 4; 59)$$

Доказательство. 1°) Рассмотрим разложение типа правой части равенства (V, 4; 59) с *произвольными* коэффициентами c_{jk}. Это разложение на простые дроби рациональной дроби $H(Z)/L(Z)$, где H — некоторый полином степени $\leqslant p$. Коэффициенты c_{jk}, применяемые в соотношении (V, 4; 59), соответствуют тем, которые получаются при $H(Z)\equiv 1$. Они *характеризуются* тем, что разложение правой части по степеням $1/z$ для достаточно большого $Z=z$ *начинается* с $1/z^p$, т. е. коффициенты при $1/z^q$ для $q<p$ равны нулю, а коэффициент при $1/z^p$ равен 1.

2°) Коэффициент при $1/z^q$ разложения функции $\left(\frac{1}{z-r}\right)^{k+1}$ по степеням $1/z$ при z, стремящемся к бесконечности, равен производной порядка $q-1$ функции $x\to\frac{x^k}{k!}e^{rx}$ при $x=0$.

В самом деле, с одной стороны,

$$\left(\frac{1}{z-r}\right)^{k+1}=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^k\left(\frac{1}{z-r}\right)=\sum_{q=k+1}^{\infty}\frac{(q-1)!}{k!\,(q-k-1)!}\,\frac{r^{q-k-1}}{z^q}, \qquad (V, 4; 60)$$

а с другой —

$$\frac{x^k}{k!}e^{rx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^nx^{k+n}}{k!\,n!}=\sum_{q=k+1}^{\infty}\frac{r^{q-k-1}x^{q-1}}{k!\,(q-k-1)!}, \qquad (V, 4; 61)$$

откуда

$$\left[\left(\frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}}\right)\left(\frac{x^k}{k!}e^{rx}\right)\right]_{x=0}=\frac{(q-1)!\,r^{q-k-1}}{k!\,(q-k-1)!}. \qquad (V, 4; 62)$$

Оба коэффициента равны между собой.

3°) Коэффициент при $1/z^q$ в разложении правой части соотношения (V, 4; 59) по степеням $1/z$ при z, стремящемся к бесконечности, равен производной $(q-1)$-го порядка при $x=0$ выражения, стоящего в правой части (V, 4; 44) с теми же самыми коэффициентами c_{jk}. Если мы запишем, как это говорилось в п. 1°), разложение правой части (V, 4; 59) по степеням $1/z$, начиная с $1/z^p$, то увидим, что функция, представимая соотношением (V, 4; 44), удовлетворяет при $x=0$ начальным условиям 0, 0, ..., 1. Этой функцией является $\eta_{p-1}=\eta$, и теорема доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - 5y' + 6 = 0. \tag{V, 4; 63}$$

Здесь

$$L(Z) = Z^2 - 5Z + 6. \tag{V, 4; 64}$$

Так как

$$\frac{1}{L(Z)} = \frac{1}{Z-3} - \frac{1}{Z-2}, \tag{V, 4; 65}$$

то

$$\eta_1(x) = \eta(x) = e^{3x} - e^{2x}. \tag{V, 4; 66}$$

Приведенное нами доказательство теоремы Хевисайда состоит в прямой проверке высказанного утверждения и не дает возможности понять, *почему* имеют место такие соотношения. Это будет сделано позже в так называемом операционном исчислении.

Замечания. 1°) В некоторых случаях разумнее данное уравнение порядка p свести к системе p дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение которой ищется затем матричным методом, а в других случаях лучше систему дифференциальных уравнений 1-го порядка свести к одному скалярному уравнению порядка p.

2°) В частном случае, когда правая часть B является линейной комбинацией произведения экспонент на полиномы, т. е. имеет вид $B(x) = \sum\limits_{\nu} P_\nu(x) e^{s_\nu x}$, в специальном курсе анализа показывается, как можно найти частное решение дифференциального уравнения в том же самом виде с полиномами более высокой степени, если некоторые из s_ν окажутся корнями характеристического уравнения. Впрочем, для нахождения этого частного решения можно было бы воспользоваться соотношениями, установленными на стр. 68.

После того как найдено частное решение, общее решение уравнения можно получить, добавляя к нему общее решение соответствующего однородного уравнения.

Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Теорема 21. *Для того чтобы любое решение дифференциального уравнения* (V, 4; 1), *когда* $\vec{F}$ *конечномерно* (*соответственно дифференциального уравнения* (V, 4; 29)), *при* x, *стремящемся к* $+\infty$, *оставалось ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы, с одной стороны, все характеристические корни имели вещественную часть* $\leqslant 0$ *и чтобы, с другой стороны, для характеристических корней с нулевой вещественной* *частью полиномы* $\vec{P}_j$ *из формулы* (V, 4; 23) *сводились к постоянным* (*соответственно, чтобы характеристические корни с нулевой вещественной частью были простыми*).

Замечание. Согласно изложенному на стр. 65, последнее свойство означает, что если число r_j является характеристическим корнем кратности p_j и имеет нулевую вещественную часть, то соответствующее ему векторное подпространство $\vec{F}_j$ является собственным подпространством, отвечающим собственному значению r_j.

Доказательство. Доказательство проведем для уравнения (V, 4; 1), когда $\vec{F}$ конечномерно. В этом случае общее решение уравнения имеет вид (V, 4; 23), где r_j — характеристические корни, а $\vec{P}_j$ — некоторые полиномы, свободные члены которых произвольны. Достаточность условий теоремы очевидна; поэтому нам надо лишь доказать их необходимость. Напомним, что любая производная решения дифференциального уравнения (V, 4; 1) также является решением этого уравнения, и, следовательно, если при x, стремящемся к бесконечности, любое решение этого уравнения ограничено, то ограниченной будет каждая производная решения. Поэтому нам достаточно будет показать, что *если некоторая функция* $\vec{f}$ *вида* (V, 4; 23) *при* x, *стремящемся к* $+\infty$, *ограничена вместе со своими производными, то все* r_j *имеют вещественную часть* $\leqslant 0$ *и для* r_j *с нулевой вещественной частью соответствующие полиномы сводятся к их свободным членам.* Пусть $\vec{c}_{jq_j}$ — коэффициент при наиболее высокой степени полинома $\vec{P}_j$, разложенного по $x^k/k!$. Рассмотрим дифференциальный оператор $M_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, определенный в (V, 4; 45) с $L(z) = \prod_{j=1}^{l} (z - r_j)^{p_j}$. Мы показали, что этот дифференциальный оператор преобразует функцию $\vec{f}$ в $\vec{c}_{jq_j} e^{r_j x}$. Это выражение должно оставаться ограниченным при x, стремящемся к $+\infty$. Так как коэффициент $\vec{c}_{jq_j}$ постоянен, то ограниченной должна быть экспонента. Однако это возможно только в том случае, когда вещественная часть числа r_j не положительна.

Рассмотрим теперь другой дифференциальный оператор $L_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, определенный в (V, 4; 45_2). Из изложенного на стр. 68

следует, что этот оператор преобразует функцию $\vec{f}$ в выражение $\vec{Q}_j(x)e^{r_jx}$, где $\vec{Q}_j$ — полином *той же степени*, что и $\vec{P}_j$. Если вещественная часть числа r_j равна нулю, то норма $\|\vec{Q}_j(x)e^{r_jx}\| = \|\vec{Q}_j(x)\|$ может быть ограниченной при x, стремящемся к $+\infty$, только в том случае, когда полином $\vec{Q}_j$ сводится к постоянной, т. е. когда полином $\vec{P}_j$ сам сводится к постоянной (к свободному члену). Теорема доказана.

Заметим, что в этом случае *дифференциальное уравнение обладает важным дополнительным свойством устойчивости: малое изменение начальных условий влечет за собой малое изменение решения дифференциального уравнения, и это справедливо не только для ограниченного множества значений* x, *но и для* x, *заключенных между* x_0 *и* $+\infty$. Точнее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\eta > 0$, что из неравенства $\|\vec{y}_0 - \vec{z}_0\| \leqslant \eta$ для решений $\vec{f}$ и $\vec{g}$ уравнения, соответствующих начальным значениям $\vec{y}_0$ и $\vec{z}_0$ в точке x_0, вытекает неравенство $\|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| \leqslant \varepsilon$ независимо от выбора $x \geqslant x_0$. В самом деле, функции $\vec{\eta}_i$, определяемые по формуле (V, 3; 9), обладают свойством ограниченности для $x \geqslant 0$. Резольвентная матрица $R(x, x_0)$, определенная на стр. 44 для $x \geqslant x_0$, тоже имеет ограниченную норму. Функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ определяются формулой (V, 3; 17), где $x_2 = x$, $x_1 = x_0$, а начальные значения равны соответственно $\vec{y}_0$ и $\vec{z}_0$. Предыдущее свойство теперь будет полностью доказано, если учесть, что $\|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| \leqslant \|R(x, x_0)\| \times \|\vec{y}_0 - \vec{z}_0\|$, и при заданном $\varepsilon > 0$ положить $\eta = \varepsilon / \sup\limits_{x \geqslant x_0} \|R(x, x_0)\|$.

Следствие. *Для того чтобы решение уравнения* (V, 4; 1), *если* $\vec{F}$ *конечномерно* (*соответственно решение уравнения* (V, 4; 29)), *оставалось ограниченным для любого вещественного* x, *необходимо и достаточно, чтобы все характеристические корни* r_j *были чисто мнимыми и чтобы все полиномы* $\vec{P}_j$, *определяемые в* (V, 4; 23), *сводились к их свободным членам* (*соответственно, чтобы все корни* r_j *были простыми*).

Рассуждение достаточно провести раздельно для переменной x, стремящейся к $+\infty$ (с применением теоремы), и для x, стремящемся к $-\infty$ (с применением теоремы после замены r_j на $-r_j$). Доказанная теорема и ее следствие имеют важные применения в механике (малые колебания системы около положения устойчивого равновесия).

ГЛАВА VI

Внешнее дифференциальное исчисление

§ 1. МУЛЬТИЛИНЕЙНЫЕ АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть J — конечное множество и $\mathfrak{S}$ — множество его перестановок, т. е. множество биекций J на себя. Если через $\sigma\tau$ обозначить композицию $\sigma \circ \tau$ перестановок σ и τ, то, как известно, закон композиции $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$ превращает множество $\mathfrak{S}$ в группу, называемую группой перестановок множества J.

Теорема 1. *Существует, и притом единственное, отображение* ε: $\sigma \to \varepsilon_\sigma$ *группы* $\mathfrak{S}$ *перестановок конечного множества* J *в двухэлементное множество* $\{+1, -1\}$, *обладающее следующими свойствами*:

1°) $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$;

2°) $\varepsilon_I = +1$, *если* I — *тождественная перестановка множества* J;

3°) $\varepsilon_\sigma = -1$, *если* σ — *транспозиция, т. е. перестановка, оставляющая инвариантными все элементы, кроме двух, которые она меняет местами.*

Двухэлементное множество $\{+1, -1\}$, снабженное законом умножения, является группой с единичным элементом $+1$. Условия 1°) и 2°) выражают тот факт, что отображение ε сохраняет групповую структуру $\mathfrak{S}$ и $\{+1, -1\}$. В самом деле, это отображение сохраняет закон умножения и единичный элемент, а поскольку

$$\varepsilon_{\sigma^{-1}}\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma^{-1}\sigma} = \varepsilon_I = +1, \tag{VI, 1; 1}$$

то оно сохраняет и переход к обратному элементу.

Доказательство. Единственность функции ε очевидна. В самом деле, эта функция известна на всех элементах σ, представляющих собой транспозиции множества J. Поскольку каждая перестановка есть произведение конечного числа транспозиций, то из условия 1°) вытекает, что функция ε определена для всех элементов $\mathfrak{S}$ и, следовательно, единственна. Остается доказать существование функции ε. Для этой цели мы можем считать, что J — это множество $\{1, 2, \ldots, N\}$. Рассмотрим произведение

$$P = \prod_{i,\, j \in J,\, i<j} (j - i). \tag{VI, 1; 2}$$

Если σ: $i \to \sigma_i = \sigma(i)$ есть некоторая перестановка J, то положим

$$\sigma(P) = \prod_{i,\, j \in J,\, i<j} (\sigma_j - \sigma_i) = \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)). \quad \text{(VI, 1; 3)}$$

Тогда, очевидно, имеет место соотношение

$$\sigma(P) = \varepsilon_\sigma P \quad \text{с} \quad \varepsilon_\sigma = (-1)^{\nu(\sigma)}, \quad \text{(VI, 1; 4)}$$

где $\nu(\sigma)$ можно назвать *числом инверсий перестановки* σ, т. е. числом таких пар (i, j), что $1 \leqslant i < j \leqslant N$ и $\sigma_i > \sigma_j$. Отсюда следует, что если f является произвольным отображением множества N первых целых чисел $\geqslant 1$ на себя, то

$$\prod_{i<j} (f(\sigma_j) - f(\sigma_i)) = \varepsilon_\sigma \prod_{i<j} (f(j) - f(i))\,^{1)}. \quad \text{(VI, 1; 5)}$$

Для двух перестановок σ и τ справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{\sigma\tau} P = (\sigma\tau)(P) = \prod_{i<j} ((\sigma\tau)_j - (\sigma\tau)_i) =$$
$$= \prod_{i<j} (\sigma(\tau_j) - \sigma(\tau_i)) = \varepsilon_\tau \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))\,^{2)} =$$
$$= \varepsilon_\tau \sigma(P) = \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma P, \quad \text{(VI, 1; 6)}$$

откуда следует соотношение 1°).

Условие 2°) проверяется тривиально.

Так же легко проверяется условие 3°). В самом деле, если σ представляет собой транспозицию, меняющую местами α и β и оставляющую неизменными остальные члены, и если предполагается, например, что $\alpha < \beta$, то σ не приводит к инверсии для таких пар (i, j), у которых i и j либо оба $\leqslant \alpha$, либо оба $\geqslant \beta$. Инверсия возникает для пары (α, k) и пары (k, β) при $\alpha < k < \beta$. Все рассмотренные до сих пор варианты давали лишь четное число инверсий. Поскольку при этой транспозиции пара (α, β) переходит в пару (β, α), то она дает одну инверсию. В итоге получается нечетное число инверсий, и, следовательно, если σ — некоторая транспозиция, то $\varepsilon_\sigma = -1$.

Величина ε_σ называется *сигнатурой перестановки* σ. Это некоторое число, равное $+1$ или -1 в зависимости от того, может ли σ быть выражено в виде четного или нечетного числа транспозиций. Отсюда следует, что четность числа транс-

---

[1]) Если брать все члены произведения левой части, то с точностью до знака мы получим один и только один раз члены произведения, стоящего в правой части. Число же изменений знака в точности равно $\nu(\sigma)$.

[2]) Здесь использовано соотношение (VI, 1; 5), в котором f заменено на σ, а σ — на τ.

позиций, приводящих к одной и той же заданной перестановке σ, всегда одна и та же[1]). Если $\varepsilon = +1$ (соответственно -1), то говорят, что перестановка σ четна (соответственно нечетна).

Симметричные и антисимметричные отображения

Пусть E и F — два произвольных множества, N — целое число $\geqslant 1$ и f — отображение E^N в F. Если σ — некоторая перестановка множества целых чисел $1, 2, \ldots, N$, то преобразованием f с помощью перестановки σ называется отображение σf множества E^N в F, определяемое следующей формулой:

$$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}). \qquad \text{(VI, 1; 7)}$$

Очевидно,

$$\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f. \qquad \text{(VI, 1; 7}_2\text{)}$$

Говорят, что отображение f множества E^N в F *симметрично*, если оно инвариантно относительно любой перестановки σ, т. е., иначе говоря, какова бы ни была перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}$, имеет место равенство $\sigma f = f$ или же, каковы бы ни были элементы $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из E и $\sigma \in \mathfrak{S}$, имеет место равенство

$$f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad \text{(VI, 1; 8)}$$

Пусть теперь $\vec{F}$ — векторное пространство. Говорят, что отображение $\vec{f}$ из E^N в $\vec{F}$ *антисимметрично*, если имеет место соотношение

$$\sigma\vec{f} = \varepsilon_\sigma \vec{f} \text{ для любого } \sigma \in \mathfrak{S}; \qquad \text{(VI, 1; 9)}$$

другими словами, для любых $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из E и $\sigma \in \mathfrak{S}$ справедливо соотношение

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \varepsilon_\sigma \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad \text{(VI, 1; 10)}$$

Это означает, что $\sigma\vec{f} = -\vec{f}$ для любой транспозиции σ. В самом деле, каждая перестановка σ является произведением транспозиций, а $\sigma\vec{f}$ есть произведение $\vec{f}$ на -1 в степени, равной числу этих транспозиций, т. е. на ε_σ.

---

[1]) Это утверждение a priori не очевидно. Не очевиден и тот факт, что тождественную перестановку нельзя представить в виде произведения нечетного числа соответствующим образом подобранных транспозиций. Это доказывается только с помощью теоремы 1, утверждающей существование функции сигнатуры ε!

Симметризацией $S\vec{f}$ отображения $\vec{f}$ множества E^N в векторное пространство $\vec{F}$ называется функция, определенная соотношением

$$S\vec{f} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sigma\vec{f}, \qquad \text{(VI, 1; 11)}$$

или

$$(S\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \vec{f}\left(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}\right). \qquad \text{(VI, 1; 12)}$$

Антисимметризацией отображения $\vec{f}$ называется функция $A\vec{f}$, определяемая равенством

$$A\vec{f} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \sigma\vec{f}, \qquad \text{(VI, 1; 13)}$$

или

$$(A\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \vec{f}\left(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}\right). \qquad \text{(VI, 1; 14)}$$

Теорема 2. *Для того чтобы отображение множества E^N в векторное пространство $\vec{F}$ было симметричным (соответственно антисимметричным), необходимо и достаточно, чтобы оно было симметризацией (соответственно антисимметризацией) некоторого отображения E^N в $\vec{F}$.*

Доказательство. Приведем доказательство, например, для антисимметричного случая. Прежде всего антисимметричная функция равна своей антисимметризации, умноженной на $1/N!$. В самом деле, для каждой перестановки σ справедливо соотношение (VI, 1; 9), откуда, складывая формулы, соответствующие $N!$ перестановкам, получаем:

$$A\vec{f} = N!\,\vec{f}. \qquad \text{(VI, 1; 15)}$$

Покажем теперь, что антисимметризация некоторой функции сама является антисимметричной функцией. Действительно, это утверждение вытекает из того, что при любой перестановке τ множества N первых целых чисел имеет место формула

$$\tau(A\vec{f}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \tau(\sigma\vec{f})\,^{1)} = \varepsilon_\tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_{\tau\sigma}((\tau\sigma)\vec{f}) = \varepsilon_\tau A\vec{f}\,^{2)}. \qquad \text{(VI, 1; 16)}$$

---

[1]) Оператор $g \to \tau g$ линеен, поэтому

$$\tau\left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma f\right) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \tau(\sigma f).$$

[2]) Поскольку если σ пробегает $\mathfrak{S}$, то перестановка $\tau\sigma$ также пробегает $\mathfrak{S}$, и притом только один раз.

Отображение E^N в $\vec{F}$ называется *альтернирующим*, если оно принимает значение 0 на любой системе N элементов $x_1, x_2, \ldots, x_N$ пространства E, в которой имеется два совпадающих элемента.

Теорема 3. *Для того чтобы мультилинейное отображение $\vec{E}^N$ в $\vec{F}$, где $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел, было антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы оно было альтернирующим.*

Доказательство. Докажем сначала, что любое антисимметричное отображение E^N, где E—произвольное множество, в векторное пространство $\vec{F}$ всегда является альтернирующим. В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — некоторые элементы из E и если $x_i = x_j$, то

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad \text{(VI, 1; 17)}$$

где через σ обозначена транспозиция, переставляющая элементы i и j и оставляющая неизменными остальные элементы. Однако, согласно соотношению антисимметрии, одновременно должно иметь место равенство

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = -\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad \text{(VI, 1; 18)}$$

Из обоих равенств следует, что обе их части равны нулю-

Покажем теперь, что всякое мультилинейное альтернирую. щее отображение $\vec{E}^N$ в $\vec{F}$, где $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства, антисимметрично.

В самом деле, если $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ — некоторые векторы из $\vec{E}$, то в силу мультилинейности отображения $\vec{f}$ при $i < j$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{i+1}, \ldots, \vec{X}_{j-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{j+1}, \ldots, \vec{X}_N) =\\ = \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N) +\\ + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N).\end{aligned} \qquad \text{(VI, 1; 19)}$$

Но так как по условию отображение $\vec{f}$ альтернирующее, то некоторые из записанных здесь членов равны нулю, и потому имеет место соотношение

$$\vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) = 0, \tag{VI, 1; 20}$$

доказывающее, что отображение $\vec{f}$ меняет знак, когда над переменными производится некоторая транспозиция. Это означает, что отображение $\vec{f}$ антисимметрично, и теорема доказана.

Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства и $\vec{u}$ является p-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$, то часто принято писать число p над $\vec{u}$ и обозначать это отображение через $\overset{p}{\vec{u}}$. Говорят также, что $\vec{u}$ есть *внешняя p-форма*, или *форма степени p на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*[1]).

Если пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы, то множество $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ p-линейных антисимметричных непрерывных отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ есть, очевидно, векторное пространство, являющееся векторным подпространством векторного пространства $\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ всевозможных p-линейных непрерывных отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$.

В частном случае, когда $\vec{F}$ — поле скаляров $\mathbb{K}$, вместо $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \mathbb{K})$ пишут также $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$. Если $p=1$, то $\Lambda^1 \overleftarrow{E}'$ является пространством $\overleftarrow{E}'$, сопряженным к пространству $\vec{E}$. Элемент пространства $\overleftarrow{E}'$ называется также *ковектором на $\vec{E}$*. Элемент пространства $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ называется тогда *p-ковектором на $\vec{E}$*. Элемент пространства $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ является *p-ковектором на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*.

При $p=0$ принято считать, что $A\mathscr{L}_0(\vec{E}^0; \vec{F})$ — *это само векторное пространство $\vec{F}$*, в частности поле скаляров, если $\vec{F} = \mathbb{K}$.

Теорема 4. *Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство размерности N с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$. Пусть $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ —*

---

[1]) Допуская вольность речи, мы используем здесь слово «форма». Обычно форма принимает скалярные значения. При $p=1$ получаем 1-форму, или форму на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$, — элемент пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Также для простоты изложения говорят p-форма ... на $\vec{E}$, а не на $\vec{E}^p$.

некоторый элемент пространства $\vec{E}^N$. *Через* X_{ij} *обозначим* j*-ю координату* i*-го вектора* $\vec{X}_i$.

Тогда антисимметризация N*-линейной (скалярной) формы*

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \to X_{1,1}X_{2,2} \ldots X_{N,N} \qquad \text{(VI, 1; 21)}$$

есть детерминантная функция, которая каждой системе из N *векторов ставит в соответствие определитель, составленный из координат этих векторов в рассматриваемом базисе.*

Доказательство. Эта антисимметризация определяется по формуле

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \to \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma X_{\sigma_1,1} X_{\sigma_2,2} \ldots X_{\sigma_N,N}; \qquad \text{(VI, 1; 22)}$$

согласно определению, это просто обычный определитель, рассматриваемый в алгебре. В дальнейшем мы будем обозначать его через $\det\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} (X_{i,j})$.

Теорема 5. *Пусть* $\vec{E}$ *и* $\vec{F}$ — *векторные пространства; пространство* $\vec{E}$ N*-мерно и снабжено некоторым базисом. Отображение* $\vec{u}$ *пространства* $\vec{E}^p$ *в* $\vec{F}$ *будет* p*-линейным и антисимметричным тогда и только тогда, когда его можно записать в виде*

$$u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \\ = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p), \qquad \text{(VI, 1; 23)}$$

где

$$\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \\ = \begin{vmatrix} X_{1,j_1} & X_{1,j_2} & \ldots & X_{1,j_p} \\ X_{2,j_1} & X_{2,j_2} & \ldots & X_{2,j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{p,j_1} & X_{p,j_2} & \ldots & X_{p,j_p} \end{vmatrix} = \det_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} (X_{k,j_l}),$$

а величины $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ *являются элементами пространства* $\vec{F}$. *Это выражение единственно, и имеет место равенство*

$$\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} = \vec{u}\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}\right). \qquad \text{(VI, 1; 24)}$$

Элементы $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ *образуют поэтому некоторый базис в пространстве* $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ p*-линейных антисимметричных форм на* $\vec{E}^p$.

Если пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы, то соответствие, при котором по системе коэффициентов $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \in \vec{F}$ (с числом $\binom{N}{p} = C_N^p$), согласно формуле (VI, 1; 23), *строится отображение $\vec{u}$, является линейной биекцией пространства $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$ на пространство $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$, непрерывной вместе со своей обратной биекцией.*

Доказательство. Мультилинейный характер отображения $\vec{u}$ позволяет записать такое равенство:

$$\vec{u}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \\ = \sum_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_p} X_{1, j'_1} X_{2, j'_2} \ldots X_{p, j'_p} \vec{u}\left(\vec{e}_{j'_1}, \vec{e}_{j'_2}, \ldots, \vec{e}_{j'_p}\right), \qquad (\mathrm{VI}, 1; 24_2)$$

где сумма распространяется *на всевозможные системы индексов* $(j'_1, j'_2, \ldots, j'_p)$. Если два из этих индексов j'_k окажутся равными, то соответствующее выражение будет равно нулю, поскольку отображение $\vec{u}$ альтернирующее.

Зададимся теперь числовой последовательностью, имеющей неравные индексы $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, расположенные в порядке возрастания. Соберем все члены, у которых система $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$ является некоторой перестановкой индексов $j_1, j_2, \ldots, j_p$. Учитывая соотношение (VI, 1; 10), получаем, что все найденные члены составляют сумму [1])

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\tau X_{1, j_{\tau_1}} X_{2, j_{\tau_2}} \ldots X_{p, j_{\tau_p}} \vec{u}\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}\right) = \\ = \vec{u}\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}\right) \det_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \left(X_{k, j_l}\right). \qquad (\mathrm{VI}, 1; 25)$$

Изменяя теперь систему индексов $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$, можно получить формулу (VI, 1; 23) вместе с соотношением (VI, 1; 24).

Обратно, каждая функция вида (VI, 1; 23) с произвольными коэффициентами $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, очевидно, p-линейна и антисимметрична. В самом деле, она является суммой функций, каждая из которых пропорциональна некоторому определителю, а выше мы видели, что определитель является мультилинейной антисимметризацией, т. е. антисимметричен.

Наконец, такое выражение, как (VI, 1; 23), заведомо единственно, т. е. *обязательно* имеет место равенство (VI, 1; 24).

[1]) Где $\mathfrak{S}_p$ есть группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, p\}$.

В самом деле, если в (VI, 1; 23) положить $\vec{X}_i = \vec{e}_{k_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, p$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_p)$, то мы получим

$$\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\left(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \ldots, \vec{e}_{k_p}\right) = \delta_{j_1, k_1}\delta_{j_2, k_2} \ldots \delta_{j_p, k_p}$$

(символы Кронекера), откуда $\vec{u}\left(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \ldots, \vec{e}_{k_p}\right) = \vec{a}_{k_1, k_2, \ldots, k_p}$, т. е. мы пришли к соотношению (VI, 1; 24).

Предположим, теперь, что пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы. Поскольку пространство $\vec{E}$ конечномерно, то всякое мультилинейное отображение $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ непрерывно. Следовательно, $\vec{u} \in A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$. Число коэффициентов $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ равно числу подмножеств по p элементов множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, т. е. равно $C_N^p = \binom{N}{p}$. Система коэффициентов $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ есть, следовательно, элемент множества $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$, и, значит, соответствие между системой $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ и $\vec{u}$ есть биекция $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$ на $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$. Эта биекция, очевидно, линейна. Она также непрерывна, поскольку

$$\|\vec{u}\| = \sup_{\|\vec{X}_i\| \leqslant 1} \|\vec{u}\,(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \left\|\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right\| \left\|\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right\|, \qquad \text{(VI, 1; 25}_2\text{)}$$

где $\left\|\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right\|$ является нормой p-линейной формы $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$. Так как речь идет о p-линейной форме на конечномерном пространстве $\vec{E}^p$, то эта форма непрерывна, а ее норма конечна. Поэтому имеет место оценка вида

$$\|\vec{u}\| \leqslant \text{const} \sum \left\|\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right\|, \qquad \text{(VI, 1; 25}_3\text{)}$$

а значит, рассматриваемая биекция непрерывна. Так как

$$\left\|\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right\| \leqslant \left\|\vec{e}_{j_1}\right\| \left\|\vec{e}_{j_2}\right\| \ldots \left\|\vec{e}_{j_p}\right\| \|u\| \leqslant \text{const}\, \|\vec{u}\|, \qquad \text{(VI, 1; 25}_4\text{)}$$

то обратная биекция также непрерывна, и теорема доказана.

Замечание. Мы доказали, что *если отождествить отображение* $\vec{u}$ *с системой его коэффициентов* $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, *то тем* *самым будет произведено отождествление пространств $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ и $\vec{F}^{\binom{N}{p}}$, сохраняющее векторные структуры и нормы с точностью до эквивалентности.*

Это отождествление, естественно, не является каноническим, поскольку оно зависит от выбора базиса в пространстве $\vec{E}$.

Пример. Рассмотрим случай $p=2$. Изменяя соответствующим образом обозначения, можно убедиться в том, что если в $\vec{E}$ выбран некоторый базис, то любое билинейное антисимметричное отображение $\vec{E}^2$ в $\vec{F}$ имеет вид

$$\vec{u}(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \vec{a}_{i,j}(X_i Y_j - X_j Y_i), \quad \text{где} \quad \vec{a}_{i,j} = \vec{u}(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \tag{VI, 1; 26}$$

Следствие 1. *При $p > n$ всякое p-линейное альтернирующее отображение $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ равно нулю. При этом пространство $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ сводится к элементу $\vec{0}$.*

Следствие 2. *Каждая N-линейная антисимметричная форма, действующая из $\vec{E}^N$ в $\vec{F}$, является произведением определителя (указанного в теореме 4) на фиксированный вектор из $\vec{F}$. Функция «определитель системы N векторов относительно некоторого базиса» есть единственное N-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^N$ в поле скаляров, принимающее значение 1 на системе N векторов базиса.*

Размерность пространства $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$ равна 1.

Следствие 3. *Размерность пространства $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ равна размерности пространства $\mathbb{K}^{\binom{N}{p}}$, т. е. равна $\binom{N}{p} = C_N^p$*[1]*.*

Таким образом, размерности пространств $\Lambda^0 \overleftarrow{E}' = \mathbb{K}$, $\Lambda^1 \overleftarrow{E}' = \overleftarrow{E}', \ldots, \Lambda^p \overleftarrow{E}', \ldots, \Lambda^N \overleftarrow{E}'$ равны числам $1 = C_N^0$, $N = C_N^1, \ldots$ $\ldots, C_N^p, \ldots, 1 = C_N^N, 0, 0, \ldots$.

[1]) При доказательстве следствия 3 мы пользовались некоторым фиксированным базисом в $\vec{E}$, существование которого непосредственно следует из определения векторных пространств. Поэтому следствие 3 может служить для доказательства того факта, что *все базисы пространства $\vec{E}$ имеют одно и то же число элементов.* Это число — размерность N — является таким наименьшим целым числом, при котором $\Lambda^{N+1} \overleftarrow{E}' = \{0\}$.

Внешнее произведение мультилинейных антисимметричных форм

Предположим сначала, что F есть поле скаляров. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ суть p линейных форм на $\vec{E}$. Исходя из этих форм, можно построить p-линейную антисимметричную форму на $\vec{E}^p$, а именно антисимметризацию p-линейной формы

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to u_1(\vec{X}_1)\, u_2(\vec{X}_2) \ldots u_p(\vec{X}_p). \qquad \text{(VI, 1; 27)}$$

Эта антисимметризация определяется такой формулой:

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p}) =$$

$$= \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (u_i(\vec{X}_j)). \qquad \text{(VI, 1; 28)}$$

Эту форму условились называть *внешним произведением* [1]) и обозначать через $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$. Поэтому имеет место формула

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (u_i(\vec{X}_j)). \qquad \text{(VI, 1; 29)}$$

В частности, для двух линейных форм u и v на $\vec{E}$ имеет место соотношение

$$(u \wedge v) \cdot (\vec{X}, \vec{Y}) = u(\vec{X})\, v(\vec{Y}) - u(\vec{Y})\, v(\vec{X}). \qquad \text{(VI, 1; 29}_2\text{)}$$

Рассмотрим теперь $p+q$ линейных форм $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$. Для них можно определить три произведения:

$$\overset{p}{u} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p, \quad \overset{q}{v} = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q,$$

$$\overset{p+q}{w} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q.$$

Согласно определению,

$$\overset{p+q}{w}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p})\, v_1(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}) \ldots v_q(\vec{X}_{\sigma_{p+q}}).$$

(VI, 1; 30)

---

[1]) Это произведение называют *внешним*, поскольку оно принадлежит не пространству множителей $\overleftarrow{E}'$, а некоторому другому пространству $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$.

Обозначим через $\mathfrak{S}'$ (соответственно $\mathfrak{S}''$) подгруппу группы $\mathfrak{S}_{p+q}$, составленную из перестановок, оставляющих инвариантными последние q целых чисел и меняющих местами только p первых (соответственно подгруппу перестановок, оставляющих инвариантными p первых целых чисел и меняющих местами только q последних). Говорят, что перестановка σ принадлежит классу перестановки τ, если она может быть записана в виде $\sigma = \tau\sigma'\sigma''$, где $\sigma' \in \mathfrak{S}'$ и $\sigma'' \in \mathfrak{S}''$.

Так составленный класс содержит $p!q!$ перестановок. Теперь сумму $\sum\limits_{\sigma}$ можно записать в виде $\sum\limits_{\tau,\,\sigma',\,\sigma''}$, где σ' пробегает $\mathfrak{S}'$, σ'' пробегает $\mathfrak{S}''$, а τ пробегает множество перестановок T, содержащее по одной и только одной перестановке из каждого класса.

Но тогда по определению p-линейной формы u и q-линейной формы v можно записать, что

$$\begin{aligned}
&w(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) = \\
&\quad = \sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau \Bigl[\Bigl(\sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} u_1\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}\bigr)\, u_2\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}\bigr) \ldots u_p\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}\bigr)\Bigr) \times \\
&\quad\quad \times \Bigl(\sum_{\sigma''} \varepsilon_{\sigma''} v_1\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}\bigr)\, v_2\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}\bigr) \ldots v_q\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma''_q)}\bigr)\Bigr)\Bigr] = \\
&= \sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau u(\vec{X}_{\tau_1}, \vec{X}_{\tau_2}, \ldots, \vec{X}_{\tau_p})\, v(\vec{X}_{\tau_{p+1}}, \vec{X}_{\tau_{p+2}}, \ldots, \vec{X}_{\tau_{p+q}}). \quad \text{(VI, 1; 31)}
\end{aligned}$$

Так как p-линейная форма u антисимметрична, то она равна своей антисимметризации, умноженной на $1/p!$. Аналогично, q-линейная форма v равна своей антисимметризации, умноженной на $1/q!$. Поэтому можно, используя все перестановки, записать

$$\begin{aligned}
&w(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) = \\
&\quad = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau \Bigl[\Bigl(\sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} u\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}, \vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}\bigr)\Bigr) \times \\
&\quad\quad \times \Bigl(\sum_{\sigma''} \varepsilon_{\sigma''} v\bigl(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+q})}\bigr)\Bigr)\Bigr] = \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \frac{1}{p!\,q!} \varepsilon_\sigma u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p})\, v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}). \quad \text{(VI, 1; 32)}
\end{aligned}$$

Это означает, что форма w является антисимметризацией $(p+q)$-линейной формы

$$\begin{aligned}
&(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \to \\
&\quad \to \frac{1}{p!\,q!} u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\, v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}). \quad \text{(VI, 1; 33)}
\end{aligned}$$

Мы пришли к следующему определению. Если u (соответственно v) является p-линейной (соответственно q-линейной) антисимметричной формой на $\vec{E}^p$ (соответственно на $\vec{E}^q$), то *внешним произведением* этих форм $u \wedge v$ называется $(p+q)$-линейная форма ϖ, определенная как антисимметризация функции (VI, 1; 33), т. е. форма, определенная по формуле (VI, 1; 32). По условию если $p=0$, а следовательно, если u — некоторый скаляр из $\mathbb{K}$, то $u \wedge v$ представляет собой форму uv, т. е. произведение формы v на скаляр u. То же самое имеет место для $q=0$.

Из этого определения вытекает, что если u является произведением $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$, а v — произведением $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$, то $u \wedge v$ есть произведение, определяемое просто как $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots$ $\ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$.

Точно так же если u, v и ϖ — соответственно p-линейная, q-линейная и r-линейная антисимметричные формы, то их внешнее произведение $u \wedge v \wedge \varpi$ определяется как $(p+q+r)$-линейная форма, являющаяся антисимметризацией функции

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}, \vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}) \to$$
$$\to \frac{1}{p!\,q!\,r!} u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\, v(\vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \times$$
$$\times \varpi(\vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}), \qquad \text{(VI, 1; 34)}$$

и, следовательно, определяется по формуле

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}) \to$$
$$\to \frac{1}{p!\,q!\,r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \varepsilon_\sigma u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p})\, v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}) \times$$
$$\times \varpi(\vec{X}_{\sigma_{p+q+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q+r}}). \qquad \text{(VI, 1; 35)}$$

Предположим, что пространство $\vec{E}$ имеет конечную размерность N и что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ — некоторый базис в $\vec{E}$. Обозначим через (ξ_i) линейную форму «i-я координата», которая каждому вектору из $\vec{E}$ ставит в соответствие его i-ю координату. Тогда, очевидно, внешнее произведение $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$ представляет собой p-линейную антисимметричную форму $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ из формулы (VI, 1; 23), которая каждой системе из p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ ставит в соответствие определитель, составленный из их координат с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_p$:

$$(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}) (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} (X_{i, j_k}). \qquad \text{(VI, 1; 35}_2\text{)}$$

Теперь p-линейная форма, определяемая формулой (VI, 1; 23), может быть записана в виде

$$\vec{u} = \sum \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}). \quad \text{(VI, 1; 36)}$$

Форма степени p называется *разложимой*, если она представима в виде внешнего произведения p линейных форм.

Теорема 6. *Если пространство $\vec{E}$ конечномерно, то любая p-линейная антисимметричная форма на $\vec{E}^p$ является линейной комбинацией конечного числа разложимых форм. Если $\vec{e}_i$ образуют некоторый базис в $\vec{E}$, то формы $\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_p} = \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, образуют базис в $\Delta^p \overleftarrow{E}'$.*

Обозначим через J некоторую часть из p элементов множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, через (ξ_J) — внешнее произведение $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ — элементы J, а через $\vec{a}_J$ — коэффициент $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$. Формула (VI, 1; 36) в этих обозначениях запишется в виде:

$$u = \sum_{J \in \mathfrak{P}_p (\{1, 2, \ldots, N\})} \vec{a}_J (\xi_J), \quad \text{(VI, 1; 37)}$$

где $\mathfrak{P}_p(A)$ — множество частей по p элементов множества A.

Теорема 7. *Внешнее умножение мультилинейных форм является мультилинейной и ассоциативной операцией.*

Доказательство. Когда говорят, что отображение мультилинейно, то это означает, например, что отображение $(u, v, w) \to u \wedge v \wedge w$ множества $\Lambda^p \overleftarrow{E}' \times \Lambda^q \overleftarrow{E}' \times \Lambda^r \overleftarrow{E}'$ в поле скаляров $\mathbb{K}$ является трилинейным отображением, т. е. что справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
(u_1 + u_2) \wedge v \wedge w = u_1 \wedge v \wedge w + u_2 \wedge v \wedge w, \\
u \wedge (v_1 + v_2) \wedge w = u \wedge v_1 \wedge w + u \wedge v_2 \wedge w, \\
u \wedge v \wedge (w_1 + w_2) = u \wedge v \wedge w_1 + u \wedge v \wedge w_2, \qquad \text{(VI, 1; 37}_2\text{)} \\
\lambda u \wedge \mu v \wedge \nu w = \lambda\mu\nu (u \wedge v \wedge w); \\
(\lambda, \mu, \nu \text{ — любые скаляры}).
\end{gathered}$$

Эти свойства очевидны.

Когда мы говорим об ассоциативности внешнего умножения, то это означает, например, что для мультилейных антисимметричных форм u, v, w, z имеют место следующие формулы:

$$u \wedge v \wedge w \wedge z = (u \wedge v \wedge w) \wedge z = u \wedge (v \wedge w \wedge z) = \\ = (u \wedge v) \wedge (w \wedge z) = (u \wedge v) \wedge w \wedge z = \\ = u \wedge (v \wedge w) \wedge z = u \wedge v \wedge (w \wedge z). \qquad \text{(VI, 1; 38)}$$

Эти формулы очевидны, если u, v, w, z являются разложимыми формами, т. е. представляют собой внешние произведения линейных форм вида

$$\begin{matrix} u = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p, & v = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q, \\ w = w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r, & z = z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s. \end{matrix} \qquad \text{(VI, 1; 39)}$$

В самом деле, в этом случае все выписанные в (VI, 1; 38) члены равны

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q \wedge \\ \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r \wedge z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s. \qquad \text{(VI, 1; 40)}$$

В случае когда пространство $\vec{E}$ конечномерно, согласно теореме 6, каждая мультилинейная антисимметричная форма является конечной комбинацией разложимых форм. Различные члены в равенствах (VI, 1; 38) мультилинейно зависят от u, v, w, z. Поскольку эти формы разложимы, то они равны. Мы не приводили доказательства для случая, когда пространство $\vec{E}$ бесконечномерно, но его легко свести к конечномерному случаю.

Теорема 8. *Внешнее произведение мультилинейных антисимметричных форм антикоммутативно: если u p-линейна, а v q-линейна, то справедлива формула*

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u. \qquad \text{(VI, 1; 41)}$$

Доказательство. Левая часть определяется по формуле (VI, 1; 30). Обозначим через τ перестановку, с помощью которой от $1, 2, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q$ производится переход к $q+1, q+2, \ldots, q+p, 1, 2, \ldots, q$. Так как эта перестановка имеет pq инверсий, то ее сигнатура равна $(-1)^{pq}$. Замечая, что при перестановке σ, пробегающей группу $\mathfrak{S}_{p+q}$, перестановка $\sigma\tau$ пробегает эту группу один и только один раз, мы можем записать левую часть соотношения (VI, 1; 41) иначе:

$$(u \wedge v) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$
$$= \frac{1}{p!\,q!} \varepsilon_\tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma(\tau_1)}, \vec{X}_{\sigma(\tau_2)}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_p)}) \times$$
$$\times v(\vec{X}_{\sigma(\tau_{p+1})}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_{p+q})}) =$$
$$= \frac{1}{p!\,q!} (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma_{q+1}}, \vec{X}_{\sigma_{q+2}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{q+p}}) \times$$
$$\times v(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_q}) =$$
$$= (-1)^{pq} (v \wedge u) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}). \qquad \text{(VI, 1; 42)}$$

Следствие 1. *Если u и v — линейные формы или, более общо, если это p-линейная и q-линейная формы, где p и q нечетны, то справедлива такая формула:*

$$u \wedge v = -v \wedge u\,[1]. \qquad \text{(VI, 1; 43)}$$

Если же хотя бы одно из целых чисел p или q четно, то имеет место такая формула:

$$u \wedge v = v \wedge u. \qquad \text{(VI, 1; 44)}$$

Следствие 2. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ суть p линейных форм, и пусть σ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, p$. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$u_{\sigma_1} \wedge u_{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge u_{\sigma_p} = \varepsilon_\sigma u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p. \qquad \text{(VI, 1; 45)}$$

Доказательство. Предположим сначала, что перестановка σ является транспозицией двух последовательных целых чисел. Тогда формулу (VI, 1; 45) можно записать так:

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_i \wedge u_{i+1} \wedge \ldots \wedge u_p =$$
$$= -u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_{i+1} \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_p. \qquad \text{(VI, 1; 46)}$$

Это равенство очевидно, так как в силу ассоциативности оно сводится к равенству $u_{i+1} \wedge u_i = -u_i \wedge u_{i+1}$, вытекающему из формулы (VI, 1; 43).

К случаю произвольной перестановки σ можно перейти, замечая, что она является композицией конечного числа транспозиций двух последовательных элементов и что четность числа таких транспозиций равна четности перестановки σ. Следствие 2

[1]) Для $p = q = 1$ это утверждение сразу же следует из формулы (VI, 1; 29_2).

дополняет теорему 7, выражая тот факт, что внешнее умножение *линейных* форм является антисимметричной операцией. Согласно теореме 3, эта операция альтернирующая. Поэтому справедливо

Следствие 3. *Внешнее произведение нескольких линейных форм, среди которых две пропорциональны, равно нулю.*

Естественно, это утверждение не верно, если приходится иметь дело с внешним произведением форм степени $\neq 1$. Например, если в четырехмерном пространстве ($N=4$) с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ через u мы обозначим 2-форму, определенную формулой

$$u=(\xi_1)\wedge(\xi_2)+(\xi_3)\wedge(\xi_4), \tag{VI,1;47}$$

то ее квадрат не равен нулю:

$$u\wedge u=2(\xi_1)\wedge(\xi_2)\wedge(\xi_3)\wedge(\xi_4). \tag{VI,1;48}$$

Впрочем, если степень формы равна 0, то $\Lambda^0\overleftarrow{E}'$ будет полем скаляров $\mathbb{K}$, а квадрат скаляра не всегда равен нулю!

Теорема 9. *Для того чтобы p линейных форм на векторном пространстве $\vec{E}$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы их внешнее произведение $\neq 0$.*

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что эти формы $u_1, u_2, \ldots, u_p$ независимы. Тогда можно найти p таких векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots \vec{X}_p$ в $\vec{E}$, для которых имеют место соотношения

$$u_i(\vec{X}_j)=\delta_{ij}, \tag{VI,1;49}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Согласно (VI, 1; 29), имеет место формула

$$u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_p(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)=1, \tag{VI,1;50}$$

из которой следует, что внешнее произведение $\neq 0$.

2°) Предположим теперь, что формы зависимы. Тогда хотя бы одна из них, например u_p, является линейной комбинацией остальных форм, а именно:

$$u_p=c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_{p-1}u_{p-1}. \tag{VI,1;51}$$

Теперь в силу линейности

$$u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_p=\sum_{i=1}^{p-1}c_iu_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_{p-1}\wedge u_i, \tag{VI,1;52}$$

где каждый из членов в силу следствия 3 теоремы 8 равен нулю.

Внешнее произведение мультилинейных отображений

Пусть u есть p-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ и v есть q-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^q$ в $\vec{G}$. Тогда можно образовать их внешнее произведение $u \wedge_{(B)} v$ относительно билинейного отображения B пространства $\vec{F} \times \vec{G}$ в векторное пространство $\vec{H}$. Это некоторое $(p+q)$-линейное отображение $\vec{E}^{p+q}$ в $\vec{H}$, определенное как антисимметризация функции

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \to \\ \to \frac{1}{p!\,q!} B(u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p),\ v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q})), \quad \text{(VI, 1; 53)}$$

т. е. определенное по формуле

$$u \wedge_{(B)} v(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) = \\ = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \frac{\varepsilon_\sigma}{p!\,q!} B\big(u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}),\ v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}})\big), \quad \text{(VI, 1; 54)}$$

Здесь не возникает, вообще говоря, вопроса об ассоциативности или о правиле антикоммутативности этого произведения. Однако эти свойства будут иметь место в двух следующих случаях, имеющих весьма важные практические приложения:

1°) Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, а $\vec{F}$, $\vec{G}$ и $\vec{H}$ совпадают с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемым как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Если линейное отображение B является обычным умножением в поле комплексных чисел, то, как и ранее, имеют место ассоциативность и антикоммутативность. Внешнее произведение конечного числа произвольных мультилинейных антисимметричных форм со значениями в $\mathbb{C}$ удовлетворяет всем предыдущим соотношениям.

Кроме того, внешнее произведение даже мультилинейно относительно поля комплесных чисел в том смысле, что последняя формула (VI, 1; 37_2) остается верной, если λ, μ и ν — комплексные числа.

2°) Предположим, что $\vec{G}$ — поле скаляров $\mathbb{K}$, $\vec{H}$ совпадает с $\vec{F}$, а билинейное отображение B есть обычное умножение вектора на скаляр. Тогда, очевидно, можно образовать внешнее произведение нескольких мультилинейных форм, значение одной из которых лежит в $\vec{F}$, а остальные принимают скалярные значения. Образованные таким образом произведения также удовлетворяют предыдущим соотношениям.

Примеры. В первом случае выберем в качестве $\vec{E}$ и $\vec{F}$ поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемое как векторное двумерное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Обозначим через ξ и η формы «первая и вторая координаты», т. е. формы, ставящие в соответствие комплексному числу $z = x + iy$ его вещественную часть x и мнимую часть y. Можно также рассмотреть $\mathbb{R}$-линейные отображения в $\mathbb{C}$: $\zeta = \xi + i\eta$ и $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, определенные формулами

$$\zeta(z) = z \quad \text{и} \quad \bar{\zeta}(z) = \bar{z}\ ^{1)}. \qquad \text{(VI, 1; 55)}$$

При этом имеют место следующие соотношения:

$$\xi \wedge \eta(z, z') = xy' - yx',$$
$$\zeta \wedge \bar{\zeta} = (\xi + i\eta) \wedge (\xi - i\eta) = -2i\xi \wedge \eta, \qquad \text{(VI, 1; 56)}$$
$$\zeta \wedge \bar{\zeta}(z, z') = z\bar{z}' - z'\bar{z} = -2i(xy' - yx').$$

Внешняя алгебра пространства $\vec{E}'$

Для пространства $\overleftarrow{E}'$, сопряженного к $\vec{E}$, мы определили ранее пространство $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$. Однако если $\vec{E}$ конечномерно, то его можно рассматривать как сопряженное к $\overleftarrow{E}'$. Поэтому можно определить пространство $\Lambda^p\vec{E}$ — пространство p-линейных антисимметричных форм на $\overleftarrow{E}'$. Алгебраическая структура внешней алгебры пространства $\vec{E}$ аналогична структуре внешней алгебры пространства $\overleftarrow{E}'$. Элемент пространства $\Lambda^p\vec{E}$ называется p-вектором.

Следует обратить особое внимание на поля скаляров. Векторное пространство $\vec{E}$ над полем $\mathbb{C}$ определяет некоторое векторное пространство $\vec{E}_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$. Однако сопряженное пространство $\overleftarrow{E}'$ (пространство $\mathbb{C}$-линейных отображений $\vec{E}$ в $\mathbb{C}$) не связано с пространством $(\vec{E}_{\mathbb{R}})'$ (пространством $\mathbb{R}$-линейных отображений $\vec{E}$ в $\mathbb{R}$). Следовательно, Λ^pE и $\Lambda^pE_{\mathbb{R}}$ не совпадают и даже имеют разные размерности. Например, если комплексная размерность пространства $\vec{E}$ равна n, то его вещественная

[1]) Отображение ζ также $\mathbb{C}$-линейно, но $\bar{\zeta}$ уже не $\mathbb{C}$-линейно.

размерность равна $2n$. Тогда комплексная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}$ равна $[n(n-1)]/2$, а значит, вещественная размерность равна $n(n-1)$, в то время как вещественная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}_{\mathbb{R}}$ равна $[2n(2n-1)]/2=n(2n-1)$. Впрочем, для $\vec{e}\in\vec{E}$ векторы $\vec{e}$ и $i\vec{e}$ являются зависимыми в $\mathbb{C}$, а следовательно, $\vec{e}\wedge_{\mathbb{C}} i\vec{e}=\vec{0}$ (теорема 9). Однако эти векторы независимы в $\mathbb{R}$, а значит, $\vec{e}\wedge_{\mathbb{R}} i\vec{e}\neq\vec{0}$.

Чаще всего используются p-формы и редко p-векторы.

§ 2. ОРИЕНТАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД $\mathbb{R}$

Напомним, что если u — линейное отображение n-мерного векторного пространства $\vec{E}$ в себя, то можно говорить об определителе отображения u. Если задан некоторый базис в $\vec{E}$, то отображение u определяется относительно этого базиса некоторой матрицей. Определитель отображения u совпадает с определителем этой матрицы при любом выборе базиса.

Определитель произведения (композиции) двух линейных отображений равен произведению определителей. Определитель тождественного отображения равен единице, а определители двух взаимно обратных биекций взаимно обратны друг другу.

Все эти свойства справедливы для любого поля скаляров.

В этом параграфе $\vec{E}$ будет представлять собой N-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Если это пространство задано как n-мерное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то его можно будет рассматривать как векторное пространство размерности $N=2n$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Напомним, что упорядоченным базисом в $\vec{E}$ называется такое отображение e множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ в $\vec{E}$: $i\to\vec{e}_i$, при котором векторы $(\vec{e}_i)_{i=1, 2, \ldots, N}$ линейно независимы в $\vec{E}$.

В множестве этих базисов можно установить отношение эквивалентности. Будем говорить, что базис e' *эквивалентен* базису e, если определитель e' относительно e положителен. Этот определитель является определителем однозначно определенного линейного отображения $\vec{E}$ в $\vec{E}$, при котором образом каждого базисного вектора $\vec{e}_i$ является вектор $\vec{e}'_i$. Установленное таким образом отношение действительно представляет собой некоторое отношение эквивалентности. В самом деле:

1°) Оно рефлексивно: если $e' = e$, то определитель равен $1 > 0$.

2°) Оно симметрично: определитель базиса e' относительно базиса e обратен определителю базиса e относительно базиса e', поскольку они являются определителями двух взаимно обратных отображений. Если один из них > 0, то таким же будет и другой.

3°) Оно транзитивно: пусть e, e', e'' — три упорядоченных базиса $\vec{E}$. Тогда линейное отображение $\vec{E}$ в $\vec{E}$, переводящее $\vec{e}_i$ в $\vec{e}''_i$, есть произведение линейного отображения, переводящего $\vec{e}_i$ в $\vec{e}'_i$, и линейного отображения, переводящего $\vec{e}'_i$ в $\vec{e}''_i$. Значит, определитель e'' относительно e является произведением определителя e' относительно e на определитель e'' относительно e'. Если оба последних определителя > 0, то таким же будет и первый определитель.

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество всевозможных упорядоченных базисов $\vec{E}$ на два класса.

В самом деле, в $\vec{E}$ можно найти два неэквивалентных базиса e и e' (например, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ и $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N$). Пусть e'' — какой-либо третий базис. Тогда отношение определителей e'' относительно e и e' равно определителю e' относительно e, который, очевидно, отрицателен. Следовательно, хотя бы один из этих двух определителей положителен, а значит, базис e'' эквивалентен либо e, либо e' [1]).

Говорят, что векторное пространство $\vec{E}$ ориентировано, если один из классов упорядоченных базисов в $\vec{E}$ выбран в качестве положительного класса, а другой считается отрицательным.

Замечания. 1°) Существуют две возможные ориентации пространства $\vec{E}$. Если выбрана некоторая ориентация пространства $\vec{E}$, то вторая ориентация, в которой положительным называют класс базисов, считавшийся отрицательным в первой ориентации, называется противоположной. В элементарных курсах анализа часто говорят, что выбор ориентации $\vec{E}$ произволен, но «в случае двумерного векторного пространства предпочтительнее в качестве положительного класса брать такой класс упорядоченных базисов, в которых второй вектор лежит слева от первого».

---

[1]) Именно здесь используется тот факт, что в качестве поля скаляров выбрано поле $\mathbb{R}$.

Совершенно очевидно, что эта фраза бессмысленна. Понятия «правый» и «левый» являются чисто физическими понятиями, имеющими смысл в занимаемой нами относительно небольшой области вселенной[1]). В двумерном векторном пространстве над вещественным полем понятий «правый» и «левый» не существует. Если, например, рассматривается двумерное векторное пространство полиномов степени $\leqslant 1$ относительно x, то совершенно невозможно сказать, какой из полиномов системы x и $1+x$ лежит правее другого.

2°) Если σ — некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, N\}$, то класс, определяемый базисом $i \to \vec{e}_{\sigma_i}$, является классом базиса $i \to \vec{e}_i$, умноженным на сигнатуру ε_σ перестановки σ.

3°) Если u — линейная биекция пространства $\vec{E}$ на себя и если $(\vec{e}_i)_{i=1, 2, \ldots, N}$ является базисом пространства $\vec{E}$, то базис $(u(\vec{e}_i))_{i=1, 2, \ldots, N}$ принадлежит тому же классу или нет в зависимости от того, будет ли определитель биекции $u > 0$ или < 0. Часто говорят, что в этом заключается «геометрическая интерпретация» знака определителя, но это не совсем точно, *поскольку ориентация не является внутренним геометрическим понятием* — она вытекает из свойств определителей линейных отображений.

Другие методы ориентации векторного пространства

Рассмотрим сначала одномерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Любые два его отличных от нуля элемента пропорциональны, и их отношение либо > 0, либо < 0.

Поэтому дополнение к 0 в векторном пространстве можно разложить на два класса, считая два элемента эквивалентными, или принадлежащими одному и тому же классу, если их отношение > 0. Ориентировать векторное пространство — это значит выбрать один из этих двух классов в качестве положительного. Заметим теперь, что если $\vec{E}$ является векторным пространством произвольной конечной размерности N, то пространство $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$, состоящее из N-линейных антисимметричных форм на $\vec{E}$, одномерно (следствие 2 теоремы 5) и, следовательно, может быть ориентировано. В этом случае за ориентацию про-

[1]) Если бы нам удалось установить связь с инженерами планеты, расположенной от нас на расстоянии миллиарда световых лет, то не ясно, как бы мы объяснили им, что́ мы понимаем под словами «правый» и «левый».

странства $\vec{E}$ берется по определению ориентация одномерного векторного пространства $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$. Ориентировать $\vec{E}$ — значит выбрать те N-линейные антисимметричные формы $\neq 0$, которые считаются положительными.

Покажем, что эти два метода ориентации векторного пространства эквивалентны.

В самом деле, пусть e — некоторый базис. Этот базис определяет координатные функции (ξ_i) и, следовательно, определяет некоторую N-форму — внешнее произведение $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots$ $\ldots \wedge (\xi_N)$. Точно так же если e' есть некоторый другой базис, то ему можно поставить в соответствие другую N-форму $(\xi_1') \wedge (\xi_2') \wedge \ldots \wedge (\xi_N')$. Обозначим через Δ определитель второго базиса относительно первого. Согласно определению внешнего произведения форм (формулы (VI, 1; 35_2)), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N) \cdot (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_N') = \Delta, \\
&(\xi_1') \wedge (\xi_2') \wedge \ldots \wedge (\xi_N') \cdot (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_N') = 1.
\end{aligned} \qquad \text{(VI, 2; 1)}$$

Из выписанных формул следует, что между N-формами (обязательно пропорциональными), соответствующими двум этим базисам, имеет место соотношение

$$(\xi_1') \wedge (\xi_2') \wedge \ldots \wedge (\xi_N') = \frac{1}{\Delta} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N). \qquad \text{(VI, 2; 2)}$$

Два базиса эквивалентны (в смысле установленного выше отношения эквивалентности между базисами) тогда и только тогда, когда отношение соответствующих N-форм положительно, т. е. если эти формы эквивалентны в смысле отношения эквивалентности, установленного ранее в пространстве N-форм.

Ориентировать пространство в смысле выбора положительного класса базисов — это значит, следовательно, ориентировать его в смысле выбора положительного класса N-форм; N-форма $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, соответствующая базису e: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$, принадлежит положительному классу N-форм тогда и только тогда, когда базис e принадлежит положительному классу. Если u является N-формой $\neq 0$, положительной в ориентации $\vec{E}$, то можно писать $u > 0$. Если $u = 0$ или $u > 0$, то пишут $u \geqslant 0$. *Это понятие знака N-формы на $\vec{E}$ имеет смысл лишь в том случае, если $\vec{E}$ ориентировано.*

Выше мы видели, что в векторных пространствах существуют две возможные ориентации, ни одна из которых не обладает какими-либо преимуществами по сравнению с другой. Однако, как мы сейчас увидим, это вовсе не так, когда речь идет о векторных пространствах над полем комплексных чисел.

Теорема 10. *Пусть $\vec{E}$ — векторное n-мерное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторый $\mathbb{C}$-базис в $\vec{E}$. Тогда $\vec{e}_1, i\vec{e}_1, \vec{e}_2, i\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\vec{E}$ (рассматриваемом как векторное $2n$-мерное пространство над полем вещественных чисел). Класс этого $\mathbb{R}$-базиса не зависит от выбора исходного $\mathbb{C}$-базиса.*

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что из нее вытекает существование «привилегированной» ориентации векторного пространства над полем комплексных чисел. *Исходя из векторного базиса, можно построить некоторый $\mathbb{R}$-базис, и класс всех таким образом построенных $\mathbb{R}$-базисов вседа один и тот же. Его можно считать положительным классом. Так определенная ориентация называется канонической ориентацией векторного пространства над полем комплексных чисел.* В случае одномерного векторного пространства над полем комплексных чисел это утверждение сводится к тому, что положительным считается базис $\vec{e}, i\vec{e}$, где $\vec{e}$ — произвольный вектор $\neq 0$. В частности, ориентация самого поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ является такой ориентацией, в которой базис, образованный числами 1 и i, считается положительным.

Доказательство. Рассматриваемый $\mathbb{C}$-базис определяет комплексные координатные функции, которые мы будем обозначать через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Соответствующий $\mathbb{R}$-базис определяет вещественные координатные функции, которые мы обозначим через $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n$. При этом $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\bar{\zeta}_j = \xi_j - i\eta_j$. Пусть теперь задан другой комплексный базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$, определяющий координаты $\xi'_j, \eta'_j, \zeta'_j$.

Мы хотим доказать, что

$$\frac{(\xi'_1) \wedge (\eta'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge (\eta'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_n) \wedge (\eta'_n)}{(\xi_1) \wedge (\eta_1) \wedge (\xi_2) \wedge (\eta_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_n) \wedge (\eta_n)} = \frac{1}{D} > 0, \qquad \text{(VI, 2; 3)}$$

где D — определитель второго $\mathbb{R}$-базиса, соответствующего второму $\mathbb{C}$-базису, относительно первого базиса.

Согласно (VI, 1; 56), можно записать, что

$$\frac{(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n) \wedge (\bar{\zeta}'_1) \wedge (\bar{\zeta}'_2) \wedge \ldots \wedge (\bar{\zeta}'_n)}{(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n) \wedge (\bar{\zeta}_1) \wedge (\bar{\zeta}_2) \wedge \ldots \wedge (\bar{\zeta}_n)} = \frac{1}{D}. \qquad \text{(VI, 2; 4)}$$

Однако линейные формы ζ_j не только $\mathbb{R}$-линейны, но и $\mathbb{C}$-линейны. Отсюда следует, что внешние произведения форм $(\zeta_1') \wedge (\zeta_2') \wedge \ldots \wedge (\zeta_n')$ и $(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n)$ пропорциональны с комплексным коэффициентам пропорциональности: можно снова повторить выкладки, которые мы делали для получения формулы (VI, 2; 1), проводя рассуждения над полем комплексных чисел так же, как в случае поля вещественных чисел. При этом мы получим, что

$$(\zeta_1') \wedge (\zeta_2') \wedge \ldots \wedge (\zeta_n') = \frac{1}{\Delta}(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n), \qquad \text{(VI, 2; 5)}$$

где Δ является определителем $\mathbb{C}$-базиса $\vec{e}_j'$ относительно $\mathbb{C}$-базиса $\vec{e}_j$. Поэтому окончательно мы приходим к такому соотношению:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{\overline{\Delta}}, \quad \text{или} \quad D = \Delta\overline{\Delta} = |\Delta|^2 > 0, \qquad \text{(VI, 2; 6)}$$

которое и доказывает наше утверждение.

Замечание. Формула $D = |\Delta|^2$ естественно распространяется и на якобианы. Пусть f — некоторое отображение аффинного пространства E размерности m над полем комплексных чисел в аффинное пространство F размерности m над полем комплексных чисел. Предположим, что отображение f дифференцируемо относительно поля комплексных чисел. Тогда оно тем более дифференцируемо относительно поля вещественных чисел.

Если в E и F выбраны системы координат относительно поля комплексных чисел, то этот выбор автоматически определяет некоторую систему координат относительно поля вещественных чисел, если воспользоваться методом, с помощью которого мы по $\mathbb{C}$-базису строили соответствующий $\mathbb{R}$-базис. Теперь можно, с одной стороны, рассмотреть якобиан $J_{\mathbb{C}}$ отображения f в точке a относительно системы координат над полем комплексных чисел, а с другой — его якобиан $J_{\mathbb{R}}$ относительно системы координат над полем вещественных чисел. Эти определители являются определителями образов при отображении $f'(a)$ базисов $\vec{E}$ относительно базисов $\vec{F}$. Только что доказанное может быть, следовательно, записано в следующем виде:

$$J_{\mathbb{R}} = |J_{\mathbb{C}}|^2 \geqslant 0\,[1]. \qquad \text{(VI, 2; 7)}$$

[1]) Наши прежние вычисления были проведены для случая $J_{\mathbb{C}} \neq 0$. Однако если $J_{\mathbb{C}} = 0$, то отображение $f'(a)$ будет переводить пространство $\vec{E}$ в некоторое векторное подпространство пространства $\vec{F}$, отличное от $\vec{F}$, и тогда $J_{\mathbb{R}} = 0$.

Особые свойства антисимметричных p-форм над евклидовым ориентированным N-мерным пространством E

Пусть e — *ортонормированный положительный базис* в $\vec{E}$. Он определяет некоторую N-форму $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$. Если e' — другой ортонормированный положительный базис в $\vec{E}$, то из формулы (VI, 2; 1) следует, что

$$(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N) = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N). \qquad \text{(VI, 2; 8)}$$

В самом деле, так как речь идет об ортонормированных базисах, то определитель второго базиса относительно первого обязательно равен ± 1 или, точнее, $+1$, поскольку оба базиса принадлежат положительному классу.

Иначе говоря, *N-форма* $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, *соответствующая ортонормированному положительному базису пространства $\vec{E}$, не зависит от этого базиса*. Эта N-форма, определенная раз и навсегда заданием евклидовой структуры и ориентации в $\vec{E}$, называется *фундаментальной N-формой пространства* $\vec{E}$. Мы будем обозначать ее через $\overset{N}{\xi}$. Нетрудно уточнить ее значение на системе N векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$. Этим значением является, согласно (VI, 1; 35_2), определитель N векторов относительно произвольного ортонормированного положительного базиса $\vec{E}$. Его абсолютная величина равна объему параллелепипеда с вершиной в начале координат, определенного этими N-векторами (следствие 5_2 теоремы 102 гл. IV). Если этот объем не равен нулю, то его знак определяет класс базиса, состоящего из этих N векторов, относительно заданной ориентации $\vec{E}$. Часто говорят, что это значение является *алгебраическим объемом параллелепипеда, определенного векторами* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, в ориентированном пространстве $\vec{E}$ (такой алгебраический объем может быть определен только после корректного определения понятия ориентации).

Существование фундаментальной N-формы позволит нам установить замечательные соотношения между векторами и формами.

1°) Между пространством N-форм над $\vec{E}$ и полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно установить биекцию. Для этого достаточно каждой N-форме поставить в соответствие отношение этой формы к фундаментальной N-форме. Таким образом, будет установлено соответствие между вещественным числом X и N-ковектором $X\overset{N}{\xi}$.

2°) Каждой системе из N векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ можно поставить в соответствие вещественное число, называемое смешанным произведением этих векторов. Это просто значение $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ фундаментальной N-формы на заданной системе векторов. Смешанное произведение равно определителю системы векторов относительно произвольного ортонормального положительного базиса, или алгебраическому объему параллелепипеда, образованного этими N векторами. Отображение «смешанное произведение», которое векторам $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ ставит в соответствие их смешанное произведение, является N-формой на $\vec{E}$, совпадающей с $\overset{N}{\xi}$.

Более общо, если задана система p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ из $\vec{E}$, то ей можно поставить в соответствие некоторую $(N-p)$-форму $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$, определенную следующим образом. Значение $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ на системе $N-p$ векторов $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots$ $\ldots, \vec{Y}_{N-p}$ является смешанным произведением N векторов $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$[1]):

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}) = \overset{N}{\xi} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \qquad \text{(VI, 2; 9)}$$

Так определенная на $\vec{E}^{N-p}$ функция $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ является $(N-p)$-линейной антисимметричной формой, т. е. $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ является элементом пространства $\Lambda^{N-p}\overset{\leftarrow}{E}'$.

Кроме того, отображение α, ставящее в соответствие p векторам $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ ассоциированную с ними форму, т. е. отображение $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p \to \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$, является p-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^p$ в $\Lambda^{N-p}\overset{\leftarrow}{E}'$.

---

[1]) Можно было выбрать другой порядок: $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}$. Это привело бы к умножению на $(-1)^{p(N-p)}$. Такой выбор избавлял бы нас от степеней (-1) в одних формулах, но приводил бы к степеням (-1) в других формулах!

Для $p = N$ получаем N-линейное отображение $\vec{E}^N$ в поле скаляров $\Lambda^0 \overleftarrow{E}'$: это отображение ставит в соответствие N векторам их смешанное произведение, т. е. фундаментальное отображение $\overset{N}{\xi}$. Если e является ортонормированным положительным базисом в $\vec{E}$, а в качестве p векторов берутся векторы $\vec{e}_{N-p+1}, \vec{e}_{N-p+2}, \ldots, \vec{e}_N$ из самого базиса, то, как это можно видеть из соотношения (VI, 2; 9), соответствующая форма определяется по формуле

$$\alpha_{\vec{e}_{N-p+1}, \ldots, \vec{e}_N} = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{N-p}). \qquad \text{(VI, 2; 10)}$$

Если J — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, состоящее из элементов $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, а $K = \complement J$ состоит из элементов $k_1 < k_2 < \ldots < k_{N-p}$, то

$$\alpha_{\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}} = \pm \left(\overset{N-p}{\xi_k} \right) = \pm \left(\xi_{k_1}\right) \wedge \left(\xi_{k_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\xi_{k_{N-p}}\right),$$
$$\text{(VI, 2; 11)}$$

где $\pm$ является сигнатурой перестановки, преобразующей 1, 2, ..., N в $k_1, k_2, \ldots, k_{N-p}, j_1, j_2, \ldots, j_p$.

В частности, для $p = 1$ имеет место формула

$$\alpha_{\vec{e}_j} = (-1)^{N-j} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \ldots \wedge (\xi_N).$$
$$\text{(VI, 2; 11}_2\text{)}$$

Если X_j — координаты вектора $\vec{X}$, то

$$\alpha_{\vec{X}} = \sum_{j=1}^{N} \left((-1)^{N-j} X_j (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)\right).$$
$$\text{(VI, 2; 11}_3\text{)}$$

Эта формула показывает, что для $p = 1$ отображение α является линейной биекцией $\vec{E}$ на $\Lambda^{N-1} \overleftarrow{E}'$.

Замечание. *Соотношения* 1°) *и* 2°) *в действительности зависят не от евклидовой структуры и ориентации $\vec{E}$, а от задания фундаментальной формы $\overset{N}{\xi}$.* Если на N-мерном векторном пространстве $\vec{E}$ задана некоторая *фундаментальная форма* $\overset{N}{\xi} \neq 0$ (т. е. некоторая мера объемов и ориентация без евклидовой структуры), то свойства 1°) и 2°) остаются в силе. Когда фундаментальный N-ковектор умножают на вещественное число k, то тем самым умножают оператор α на k. Если в $\vec{E}$ выбрать *произвольный* базис и положить $\overset{N}{\xi}\cdot(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N)=\Delta$, где $\overset{N}{\xi}=\Delta(\xi_1)\wedge(\xi_2)\wedge\ldots\wedge(\xi_N)$, то формулы (VI, 2; 11_2) и (VI, 2; 11_3) останутся справедливыми, если только их правую часть умножить на Δ.

3°) Известно, что в трехмерном ориентированном евклидовом вектором пространстве каждой системе из двух векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$ можно поставить в соответствие третий вектор, называемый векторным произведением двух данных. Это свойство может быть обобщено следующим образом.

Если $\vec{E}$ является N-мерным ориентированным евклидовым пространством, то каждой системе из $N-1$ векторов можно поставить в соответствие новый вектор $\vec{Z}$, называемый *векторным произведением* данных $N-1$ векторов и обозначаемый через $\vec{Z}=[\vec{X}_1\wedge\vec{X}_2\wedge\ldots\wedge\vec{X}_{N-1}]$[1]. Этот вектор определяется так. При соответствии, указанном в п. 2°), системе $N-1$ векторов отвечает некоторая 1-форма, т. е. некоторая линейная форма на $\vec{E}$. В гл. III (формула (III, 1; 19)) мы видели, что в этом случае каждой линейной форме на $\vec{E}$, т. е. каждому элементу сопряженного пространства $\overleftarrow{E}'$, можно поставить в соответствие определенный элемент $\vec{Z}$ из $\vec{E}$. Этот элемент $\vec{Z}$ и называют векторным произведением $N-1$ векторов. Отображение, которое $N-1$ векторам ставит в соответствие их векторное произведение, является $(N-1)$-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^{N-1}$ в $\vec{E}$.

Форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ определяется здесь следующим образом. Если $\vec{Y}$ — произвольный вектор в $\vec{E}$, то

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y})=\overset{N}{\xi}(\vec{Y}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}). \quad \text{(VI, 2; 12)}$$

Вектор $\vec{Z}$ определяется из тех соображений, что для произвольного вектора $\vec{Y}\in\vec{E}$ должна иметь место формула (III, 1; 19):

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}\cdot(\vec{Y})=(\vec{Z}\mid\vec{Y}). \qquad \text{(VI, 2; 13)}$$

[1]) Это обозначение не совсем корректно. В принципе символ $\wedge$ внешнего произведения надо было бы использовать только для обозначения произведений, не зависящих от евклидовой структуры и ориентации пространства.

Эта формула означает, что смешанное произведение векторов $\vec{Y}, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ совпадает со скалярным произведением вектора $\vec{Y}$ на векторное произведение $\vec{Z}=[\vec{X}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}]$. Изменяя обозначения и учитывая правила антикоммутации, мы можем написать следующие равенства:

$$\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)=(\vec{X}_1 \mid [\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N])=$$
$$=(-1)^{N-1}\overset{N}{\xi}(\vec{X}_N, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1})=(-1)^{N-1}([\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}] \mid \vec{X}_N).$$

Укажем геометрический способ построения векторного произведения. Так как правая часть формулы (VI, 2; 12) при линейно зависимых $N-1$ векторах равна нулю для любого $\vec{Y}$, то равна нулю форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$. Следовательно, в этом случае обращается в нуль вектор $\vec{Z}$. Обратно, если вектор $\vec{Z}$ равен нулю, то это означает, что равна нулю и форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ [1]), а тогда векторы $\vec{X}_j$ обязательно линейно зависимы. В самом деле, если они линейно независимы, то можно найти некоторый базис $\vec{E}$, образованный векторами $\vec{X}_j$ и вектором $\vec{Y}$, а тогда правая часть формулы (VI, 2; 12) $\neq 0$, что противоречит тому факту, что форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ равна нулю. Таким образом, *векторное произведение $N-1$ векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.*

Предположим теперь, что векторы $\vec{X}_j$ линейно независимы. Если вектор $\vec{Y}$ лежит в векторном подпространстве, порожденном этими векторами, то $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y})$, согласно (VI, 2; 12), обязательно равно нулю. Значит, $(\vec{Z} \mid \vec{Y})=0$. Следовательно, вектор $\vec{Z}$ ортогонален векторному подпространству, порожденному векторами $\vec{X}_j$.

Выберем теперь единичный вектор $\vec{\nu}$, ортогональный векторному подпространству, порожденному векторами $\vec{X}_j$, так, чтобы базис $\vec{\nu}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ был положительным относи-

---

[1]) На стр. 190 т. I мы видели, что соответствие между формой $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ и вектором $\vec{Z}$ является биекцией.

тельно ориентации $\vec{E}$. Определитель этого базиса (относительно положительных ортонормированных базисов), являющийся положительным числом, равен объему параллелепипеда, образованного векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{X}_j$ (следствие 5_2 теоремы 102 гл. IV). Этот определитель равен также произведению площади основания на высоту (теорема 104 гл. IV). Поскольку по условию $\vec{\nu}$ является единичным вектором, рассматриваемый определитель равен площади основания. Этот же определитель равен $(\vec{Z}\,|\,\vec{\nu})$. Это говорит о том, что *вектор $\vec{Z}$ равен произведению вектора $\vec{\nu}$ на некоторое число >0, равное $(N-1)$-мерной площади параллелепипеда, определенного векторами $\vec{X}_j$.*

Если мы рассмотрим в пространстве $\vec{E}$ произвольный положительный ортонормированный базис, то нетрудно будет найти составляющие векторного произведения данных $N-1$ векторов. Если эти составляющие обозначить через Z_j, а через Y_j обозначить составляющие произвольного вектора $\vec{Y}$ и если, как обычно, через $X_{i,j}$ обозначить координаты векторов $\vec{X}_i$, то мы получим такую формулу:

$$\sum_{j=1}^{N} Z_j Y_j = (\vec{Z}\,|\,\vec{Y}) = \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y}) = \overset{N}{\xi}(\vec{Y}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}), \tag{VI, 2; 14}$$

из которой следует, что Z_j является коэффициентом при Y_j в разложении определителя

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_N \\ X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \ldots & X_{N-1,N} \end{vmatrix} \tag{VI, 1; 15}$$

по элементам первой строки. Поэтому имеет место формула

$$Z_j = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,j-1} & X_{1,j+1} & \ldots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,j-1} & X_{2,j+1} & \ldots & X_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \ldots & X_{N-1,j-1} & X_{N-1,j+1} & \ldots & X_{N-1,N} \end{vmatrix}. \tag{VI, 2; 16}$$

Все результаты п. 3°) зависят одновременно от евклидовой структуры и ориентации пространства $\vec{E}$.

Все вышеизложенное можно сформулировать так:

Теорема 11. *Если* $\vec{E}$ *является* N*-мерным ориентированным евклидовым пространством, то в* $\vec{E}$ *существует фундаментальная* N*-форма* $\overset{N}{\xi}$, *представимая в виде* $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, *где* (ξ_i) — *координатные формы относительно произвольного ортонормированного положительного базиса. Существует линейная биекция пространства* N*-форм* $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$ *на поле скаляров, которая каждой* N*-форме ставит в соответствие ее отношение к* $\overset{N}{\xi}$. *Существует* p*-линейное антисимметричное отображение* $\vec{E}^p$ *в* $\Lambda^{N-p}\overleftarrow{E}'$, *определяемое формулами* (VI, 2; 9), (VI, 2; 10) *и* (VI, 2; 11). *Если* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ *суть* N *векторов пространства* $\vec{E}$, *то их смешанное произведение является вещественным числом, равным* $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ *или определителю этих векторов относительно любого ортонормированного положительного базиса. Смешанное произведение как отображение является линейной антисимметричной формой на* $\vec{E}^N$, *равной* $\overset{N}{\xi}$. *Векторное произведение векторов* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ *есть вектор* $\vec{Z} = [\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}]$, *равный нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы. Если же они линейно независимы, то вектор* $\vec{Z}$ *ортогонален к порождаемому им векторному подпространству в том смысле, что система векторов* $\vec{Z}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ *образует положительный базис, а длина вектора* $\vec{Z}$ *равна площади параллелепипеда, построенного на векторах* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$. *Векторное произведение является* $(N-1)$*-линейным антисимметричным отображением* $\vec{E}^{N-1}$ *в* $\vec{E}$. *Составляющие векторного произведения относительно ортонормированного базиса определяются по формуле* (VI, 2; 16).

Замечания. 1°) Если $\vec{E}$ является, например, двумерным ориентированным евклидовым пространством, то векторное произведение $[\vec{X}]$ можно образовать и из одного вектора $\vec{X}$ $(N-1=1)$. Согласно определению, это вектор $\vec{Z}$, полученный из вектора $\vec{X}$ поворотом на угол $-\pi/2$[1]).

---

[1]) Внимание! Понятие ориентированного угла *опирается* на понятие ориентации! Угол $(\vec{U}, \vec{V})$ между двумя ортогональными векторами евклидовой ориентированной плоскости считается равным $+\pi/2$, если базис $\vec{U}, \vec{V}$ положителен.

2°) Все, что было определено в этом параграфе, зависит, вообще говоря, не только от евклидовой структуры пространства $\vec{E}$, *но также и от его ориентации*. Если ориентацию $\vec{E}$ заменить на противоположную, то изменится знак фундаментальной N-формы, смешанного произведения N векторов, $(N-p)$-формы, соответствующей p векторам, векторного произведения $N-1$ векторов. Напротив, связь между векторами и формами (линейная биекция $\vec{E}$ на $\overleftarrow{E}'$, рассмотренная на стр. 190 т. I) зависит только от евклидовой структуры пространства и не зависит от его ориентации точно так же, как это было в случае скалярного произведения двух векторов! Часто говорят, что скалярное произведение двух векторов является полярной, или прямой, или четного рода величиной, в то время как смешанное произведение N векторов является аксиальной, или закрученной (sic!), или нечетного рода величиной.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E и $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство. *Дифференциальной формой степени p на Ω со значениями в $\vec{F}$* называется отображение $\vec{\omega}$ [1]) множества Ω в пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ p-линейных антисимметричных непрерывных отображений из $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Это отображение каждой точке x из Ω ставит в соответствие некоторый элемент $\vec{\omega}(x)$ пространства $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$, т. е. некоторый p-ковектор на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$. Можно также сказать, что дифференциальная форма степени p является *полем p-ковекторов на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*, полем, определенным на Ω. При $p=0$ получаем поле векторов из $\vec{F}$, т. е. просто некоторую функцию на Ω со значениями в $\vec{F}$. Если $\vec{F}=\mathbb{K}$, то мы получаем поле скаляров или скалярную функцию. Для $p=1$ это — поле линейных непрерывных отображений $\vec{E}$ в $\vec{F}$, т. е. отображение Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Если x

---

[1]) Стрелка над ω ставится потому, что $\vec{\omega}$ является некоторой формой со значениями в $\vec{F}$. Стрелка опускается, если $\vec{F}$ представляет собой поле скаляров. В этом частном случае ω является некоторой функцией на Ω со значениями в $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$, или некоторым полем p-ковекторов, определенных в Ω.

является точкой множества Ω и $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — некоторые векторы из $\vec{E}$, то через $\vec{\omega}(x)\cdot(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\in\vec{F}$ обозначается значение $\vec{\omega}(x)\in A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ на $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\in\vec{E}^p$. *Если пространство E имеет размерность N и если $p>N$, то дифференциальная форма степени p тождественно равна нулю.*

Часто для краткости дифференциальную форму степени p называют просто *формой степени p* или *p-формой*, что приводит к смешению p-форм, определенных в § 1, и дифференциальных форм, являющихся полями таких p-форм или отображениями множества Ω в пространство p-форм. Для того чтобы избежать этого смешения, *предпочтительнее, вообще говоря, для p-форм, встречающихся в* § 1, *использовать термин p-ковектор, а дифференциальными p-формами называть формы, рассматриваемые в этом параграфе.*

Говорят, что дифференциальная p-форма m раз дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^m, $m\geqslant 0$), если $\vec{\omega}$ является m раз дифференцируемой функцией (соответственно принадлежащей классу C^m) на Ω со значениями в нормированном векторном пространстве $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$.

Теорема 12. *Если пространство E имеет конечную размерность N и снабжено некоторой системой координат, а через (ξ_i) обозначена линейная форма «i-я координата», то каждая дифференциальная p-форма однозначно представляется в виде*

$$\overset{p}{\vec{\omega}}=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots i_p\leqslant N}\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(\xi_{i_1})\wedge(\xi_{i_2})\wedge\ldots\wedge(\xi_{i_p}), \quad \text{(VI, 3; 1)}$$

или

$$\overset{p}{\vec{\omega}}(x)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant N}\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x)(\xi_{i_1})\wedge(\xi_{i_2})\wedge\ldots\wedge(\xi_{i_p}),$$

или

$$\overset{p}{\vec{\omega}}=\sum_{J\in\mathfrak{P}_p(\{1, 2, \ldots, N\})}\vec{\omega}_J(\xi_J),$$

где $\vec{\omega}_J$ являются функциями на Ω со значениями в $\vec{F}$. Эта дифференциальная p-форма m раз дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^m) тогда и только тогда, когда m раз дифференцируемы (соответственно принадлежат классу C^m) функции $\vec{\omega}_J$, определенные на Ω со значениями в $\vec{F}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно для каждой точки x записать, что $\vec{\omega}(x)$ является p-ковектором со значениями в $\vec{F}$, и применить затем формулы (VI, 1; 23) и (VI, 1; 36). Эти формулы и замечание, следующее за теоремой 5, показывают, что векторное пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ может быть отождествлено с произведением $\binom{N}{p}$ векторных нормированных пространств, совпадающих с $\vec{F}$. Из теоремы 8_4 гл. III следует, что функция со значениями в произведении векторных нормированных пространств принадлежит классу C^m тогда и только тогда, когда каждая из ее составляющих принадлежит классу C^m. Это означает, что отображение $\vec{\omega}$ множества Ω в пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ принадлежит классу C^m тогда и только тогда, когда каждая из функций $\vec{\omega}_J$, определенных на Ω со значениями в $\vec{F}$, принадлежит классу C^m. Кроме того, согласно той же теореме гл. III, любая производная $\vec{\omega}$ имеет в качестве составляющих соответствующие производные функций $\vec{\omega}_J$. Другими словами, если $D^{\vec{p}}$ является символом дифференцирования порядка $\vec{p}$ (формула (III, 6; 26)), то имеет место следующая формула дифференцирования:

$$D^{\vec{p}}\vec{\omega} = \sum_J D^{\vec{p}}\vec{\omega}_J(\xi_J). \tag{VI, 3; 2}$$

Для частных производных $\partial/\partial x_k$ относительно координат справедлива формула:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_k} = \sum_J \frac{\partial\vec{\omega}_J}{\partial x_k}(\xi_J). \tag{VI, 3; 3}$$

Вместо (ξ_i) *и* (ξ_J) *по причинам, которые будут ясны позже, пишут* dx_i *и* dx_J. Это обозначение будет применяться систематически в дальнейшем. Однако следует понимать, что это может привести к некоторым недоразумениям. До настоящего момента символ dx_i обозначал i-ю координату вектора $\vec{dx}$ векторного пространства $\vec{E}$, а теперь dx_i обозначает *линейную форму на* $\vec{E}$, которая каждому вектору $\vec{X}$ из $\vec{E}$ ставит в соответствие его i-ю координату, так что имеет место формула

$$dx_i(\vec{X}) = X_i. \tag{VI, 3; 4}$$

Символ dx_i может также обозначать дифференциальную форму степени 1 на $\vec{E}$, значение которой в каждой точке x является линейной формой на $\vec{E}$, ставящей в соответствие каждому вектору из $\vec{E}$ его i-ю координату, так что имеет место соотношение

$$dx_i(x)\cdot\vec{X}=X_i. \qquad \text{(VI, 3; 5)}$$

Смешение первого и двух последних смыслов символа dx_i в главе, относящейся к дифференциальным формам, может привести к грубым ошибкам. Смешение же второго и третьего смыслов не существенно — не более существенно, чем смешение 1, обозначающей число 1, и 1, обозначающей постоянную функцию, равную 1.

Теперь наиболее общее выражение дифференциальной p-формы $\vec{\omega}$ на $\Omega\subset E$ со значениями в $\vec{F}$ имеет следующий вид:

$$\overset{p}{\vec{\omega}}=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant N}\vec{\omega}_{i_1,i_2,\ldots,i_p}\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p},$$
$$\overset{p}{\vec{\omega}}(x)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant N}\vec{\omega}_{i_1,i_2,\ldots,i_p}(x)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}, \qquad \text{(VI, 3; 6)}$$

что можно записать также в виде

$$\overset{p}{\vec{\omega}}=\sum_{J\in\mathfrak{P}_p\{1,2,\ldots,N\}}\vec{\omega}_J\,dx_J,$$
$$\overset{p}{\vec{\omega}}(x)=\sum_J\vec{\omega}_J(x)\,dx_J. \qquad \text{(VI, 3; 7)}$$

Примеры дифференциальных форм

1°) Дифференциальная форма степени 0 на вещественной прямой $\mathbb{R}$ — это функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\vec{F}$. Дифференциальная форма степени 1 записывается в виде $\vec{A}\,dx$, где $\vec{A}$ — некоторая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\vec{F}$, и для каждого вектора X из $\mathbb{R}$ имеет место формула

$$\vec{A}(x)\,dx\cdot\vec{X}=X\vec{A}(x)\,[1]. \qquad \text{(VI, 3; 8)}$$

2°) Дифференциальная форма степени 0 в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ представляет собой некоторую функцию. Диффе-

[1]) Произведение вектора $\vec{A}(x)\in\vec{F}$ на вещественный скаляр X. Если $\vec{F}=\mathbb{R}$ — поле скаляров, то мы получаем просто $XA(x)\in\mathbb{R}$

ренциальная форма степени 1 записывается в виде

$$\vec{A}(x, y)\,dx + \vec{B}(x, y)\,dy, \quad \vec{A}(x, y) \in \vec{F}, \quad \vec{B}(x, y) \in \vec{F}. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 8_2)$$

Ее значение в точке (x, y) пространства $\mathbb{R}^2$, на векторе (X, Y) пространства $\mathbb{R}^2$, задается следующей формулой:

$$(\vec{A}(x, y)\,dx + \vec{B}(x, y)\,dy) \cdot (X, Y) = \vec{A}(x, y)X + \vec{B}(x, y)Y. \quad (\mathrm{VI}, 3; 9)$$

Дифференциальная форма степени 2 записывается в виде

$$\vec{A}(x, y)\,dx \wedge dy, \quad \vec{A}(x, y) \in \vec{F}, \qquad (\mathrm{VI}, 3; 10)$$

а ее значение в точке (x, y) пространства $\mathbb{R}^2$, на паре векторов (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) из $\mathbb{R}^2$, определяется формулой

$$\vec{A}(x, y)\,dx \wedge dy \cdot ((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = \vec{A}(x, y)(X_1Y_2 - X_2Y_1). \qquad (\mathrm{VI}, 3; 11)$$

Естественно, что при этом имеет место соотношение антикоммутативности

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 12)$$

3°) В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ дифференциальная форма степени 0 есть некоторая функция. Дифференциальная форма степени 1 записывается так:

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx + \vec{B}(x, y, z)\,dy + \vec{C}(x, y, z)\,dz. \quad (\mathrm{VI}, 3; 13)$$

Ее значение в точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, на векторе $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, определяется по формуле

$$(\vec{A}(x, y, z)\,dx + \vec{B}(x, y, z)\,dy + \vec{C}(x, y, z)\,dz) \cdot (X, Y, Z) = \\ = \vec{A}(x, y, z)X + \vec{B}(x, y, z)Y + \vec{C}(x, y, z)Z. \quad (\mathrm{VI}, 3; 14)$$

Дифференциальная форма степени 2 записывается с помощью циклических перестановок так:

$$\vec{A}(x, y, z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x, y, z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x, y, z)\,dx \wedge dy\,^{1)}. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 15)$$

[1]) Формула (VI, 3; 6) должна приводить к применению $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$ и $dy \wedge dz$. Здесь из соображений симметрии мы вместо $dx \wedge dz$ предпочитаем пользоваться выражением $dz \wedge dx$.

Ее значение в точке (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$, на системе двух векторов (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) из $\mathbb{R}^3$, определяется по формуле

$$[\vec{A}(x, y, z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x, y, z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x, y, z)\,dx \wedge dy] \cdot$$
$$\cdot ((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) = \vec{A}(x, y, z)(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) +$$
$$+ \vec{B}(x, y, z)(Z_1X_2 - Z_2X_1) + \vec{C}(x, y, z)(X_1Y_2 - X_2Y_1). \quad \text{(VI, 3; 16)}$$

Естественно, что справедливо правило антикоммутативности

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz. \quad \text{(VI, 3; 17)}$$

Наконец, дифференциальная форма степени 3 задается формулой

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz, \quad \vec{A}(x, y, z) \in \vec{F}. \quad \text{(VI, 3; 18)}$$

Ее значение в точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, на системе трех векторов (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) пространства $\mathbb{R}^3$, определяется формулой

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz \cdot ((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)) =$$
$$= \vec{A}(x, y, z)\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(VI, 3; 19)}$$

Внешнее произведение дифференциальных форм

Дифференциальные формы степени p над открытым множеством Ω из E со значениями в $\vec{F}$ образуют векторное пространство. Как раз в смысле сложения элементов в этом векторном пространстве мы использовали символ $\sum$ в таких формулах, как (VI, 3; 6).

Если $\vec{\omega}$ и $\vec{\varpi}$ — две дифференциальные формы степени p над Ω и пространство E снабжено системой координат, относительно которой эти формы выражаются в виде $\sum\limits_{J} \vec{\omega}_J\, dx_J$ и

$\sum\limits_J \vec{\varpi}_J \, dx_J$, то имеют место очевидные формулы

$$\vec{\omega} + \vec{\varpi} = \sum_J (\vec{\omega}_J + \vec{\varpi}_J) \, dx_J, \quad k\vec{\omega} = \sum (k\vec{\omega}_J) \, dx_J, \qquad \text{(VI, 3; 20)}$$

где k — скаляр.

Кроме того, существует операция внешнего умножения дифференциальных форм. Рассматривая умножение, мы ограничимся случаями, уже изученными в § 1: речь будет идти или о скалярных дифференциальных формах ($\vec{F}$ является полем скаляров $\mathbb{K}$), или же если полем скаляров является $\mathbb{R}$, то $\vec{F}$ будет полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемым как двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, или же внешнее умножение будет применяться к дифференциальным формам, одна из которых принимает векторные значения, а все другие — скалярные.

Запишем несколько формул, предполагая для простоты, что все дифференциальные формы скалярны.

Пусть $\overset{p}{u}$ и $\overset{q}{v}$ — скалярные дифференциальные формы над Ω степени p и q соответственно. Определим их внешнее произведение $\overset{p}{u} \wedge \overset{q}{v}$ следующим образом.

Говорят, что значением этого произведения в точке x является $(p+q)$-ковектор, равный внешнему произведению p-ковектора $\overset{p}{u}(x)$ на q-ковектор $\overset{q}{v}(x)$:

$$(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x). \qquad \text{(VI, 3; 21)}$$

Теперь видно, что написанное ранее выражение $dx_{j_1} \wedge \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$ является внешним произведением, где dx_j рассматриваются, согласно формуле (VI, 3; 5), как дифференциальные формы степени 1.

Отметим также, что в формуле (VI, 3; 6) такое выражение, как $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$, можно интерпретировать как внешнее произведение $p+1$ форм: $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ — дифференциальной формы степени 0 и $dx_{j_1}, dx_{j_2}, \ldots, dx_{j_p}$ — скалярных дифференциальных форм степени 1. Таким образом, использование различных символов для обозначения суммы и произведения в формуле (VI, 3; 6) теперь полностью обосновано, тогда как до настоящего момента они применялись чисто формально. Однако значение символа d будет полностью разъяснено лишь позже (см. § 4). Естественно, что внешнее умножение дифференциальных форм является ассоциативной мультилинейной операцией, обладающей свойством антикоммутативности (теоремы 7, 8 и формула (VI, 1; 41)).

Примеры. В трехмерном векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеют место следующие формулы:

$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) =$$
$$= (BC' - CB')\,dy \wedge dz + (CA' - AC')\,dz \wedge dx + (AB' - BA')\,dx \wedge dy;$$
$$(A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) =$$
$$= (AA' + BB' + CC')\,dx \wedge dy \wedge dz; \quad \text{(VI, 3; 22)}$$
$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) \wedge$$
$$\wedge (A''\,dx + B''\,dy + C''\,dz) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Дифференциальная форма, соответствующая производной функции

Пусть $\vec{f}$ — дифференцируемая функция на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Тогда $f'(a)$ — то, что мы называли ее производной в точке a, — является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Следовательно, производная является в терминологии § 1 линейной формой на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$, и, значит, производная функция f' определяет некоторую дифференциальную форму степени 1 на Ω со значениями в $\vec{F}$ или отображение Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ (именно в этом смысле мы всегда рассматривали производную функцию функции f[1])). Соответствующая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ определяется по формуле

$$\overset{1}{\vec{\omega}}(x) \cdot (\vec{X}) = f'(x) \cdot \vec{X}. \quad \text{(VI, 3; 23)}$$

Эту дифференциальную форму удобно обозначать через $d\vec{f}$. Если пространство $\vec{E}$ N-мерно и в нем введены система координат и координатные функции, то, согласно формуле (VI, 3; 6),

[1]) Напротив, производная порядка $p \geqslant 2$ функции f является отображением Ω в пространство p-линейных *симметричных* отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$, и следовательно, она не определяет дифференциальной формы.

дифференциал $d\vec{f}$ записывается в виде

$$d\vec{f} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} dx_i,$$

$$d\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \qquad \text{(VI, 3; 24)}$$

$$d\vec{f}(x) \cdot \vec{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x)\, X_i.$$

Мы пришли, таким образом, к обозначениям формулы (III, 3; 18), объясняющим введенное обозначение $d\vec{f}$.

При таком обозначении выражение dx_i кажется полностью обоснованным. Если через x_i обозначить функцию, определенную на E, которая каждой точке E ставит в соответствие ее i-ю координату, то дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной функции, является дифференциальной формой dx_i, удовлетворяющей равенству (VI, 3; 5). Мы разовьем эти соображения в § 4. Естественно, что это побуждает нас вместо записи дифференциальной формы в виде формулы типа (VI, 3; 6) пользоваться, если это необходимо, формулой вида

$$\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} df_{j_1} \wedge df_{j_2} \wedge \ldots \wedge df_{j_p}, \qquad \text{(VI, 3; 25)}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — скалярные дифференцируемые функции на Ω, производные которых в каждой точке являются независимыми линейными формами на $\vec{E}$.

Теорема 13. *Если $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — скалярные дифференцируемые функции на Ω, то дифференциальная форма $df_1 \wedge \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p$ относительно некоторой системы координат в E может быть представлена в виде*

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D\left(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}\right)} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}. \qquad \text{(VI, 3; 26)}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить формулу (VI, 1; 23), заменив в ней $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j}$ на

$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$ (формула (VI, 1; 35_2)). Согласно (VI, 1; 24), имеем

$$a_{j_1, j_2, \ldots, j_p} =$$
$$= (df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \ldots \wedge df_p(x))(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}) =$$
$$= \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} (df_i(x)\vec{e}_{j_k})^{1)} = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_k}}(x)\right), \quad \text{(VI, 3; 27)}$$

откуда и вытекает необходимый результат.

Этот результат, впрочем, можно получить и непосредственно: следует заменить df_i на $\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} dx_l$ и образовать произведение, применяя правила антикоммутативности!

Примеры. Найдем выражение дифференциальной формы в полярных координатах r, θ, φ пространства $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим открытое множество Ω — дополнение к полуплоскости $y=0$, $x \geqslant 0$. Возьмем $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Величины r, θ, φ можно рассматривать как *функции* класса C^∞ на Ω. Хорошо известны выражения их дифференциалов dr, $d\theta$, $d\varphi$ как функций dx, dy, dz, и обратно. Например,

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin\theta \cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= dr \sin\theta \sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi, \\ dz &= dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta. \end{aligned} \quad \text{(VI, 3; 28)}$$

Теперь можно записать формулу

$$dx \wedge dy \wedge dz = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi. \quad \text{(VI, 3; 29)}$$

В этой формуле $dx \wedge dy \wedge dz$ является фундаментальной дифференциальной 3-формой.

В правой части равенства (VI, 3; 29) стоит выражение, в котором r, θ, φ рассматриваются как функции x, y, z и в котором dr, $d\theta$, $d\varphi$ являются дифференциальными формами степени 1, определенными через производные функций r, θ, φ по x, y, z. Конечно, необходимо следить за порядком, в котором записываются множители, поскольку, например, $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$ равно $-d\theta \wedge dr \wedge d\varphi$.

Отметим, что вычисления, связанные с дифференциальными формами, чрезвычайно просты: они производятся автоматически

---

1) Здесь использована формула (VI, 1; 29) для внешнего умножения форм.

с учетом мультилинейности, ассоциативности и антикоммутативности внешнего умножения.

Прообраз дифференциальной формы при отображении

Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства E, Ω_0 — открытое множество аффинного нормированного пространства E_0 и H — дифференцируемое отображение Ω_0 в Ω. Для каждой функции f, определенной на Ω и принимающей значения в некотором множестве, можно определить прообраз при отображении H: $H^*f = f \circ H$, являющийся некоторой функцией на Ω_0 со значениями в этом множестве [1]). Более общо, для каждой дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени p на Ω со значениями в $\vec{F}$ мы определим прообраз $H^*\vec{\omega}$ как некоторую дифференциальную форму степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$. Эта форма будет полностью определена своими значениями в каждой точке x множества Ω_0 на системе векторов $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ пространства $\vec{E}_0$. Это значение по определению равно значению $\vec{\omega}$ в точке $H(x)$ на системе образов $\vec{X}_i$ при производном отображении $H'(x)$:

$$(H^*\vec{\omega})(x)\cdot(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \\ = \vec{\omega}(H(x))\cdot(H'(x)\cdot\vec{X}_1, H'(x)\cdot\vec{X}_2, \ldots, H'(x)\cdot\vec{X}_p). \qquad \text{(VI, 3; 30)}$$

Убедимся, что таким образом мы действительно определили $H^*\vec{\omega}$ как некоторую дифференциальную форму степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$. С этой целью зафиксируем x. Если $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — векторы пространства $\vec{E}_0$, то правая часть имеет смысл, и тем самым определено $(H^*\vec{\omega})(x)$ как некоторая функция на $\vec{E}_0^p$. Эта функция, очевидно, является p-линейной антисимметричной, поскольку $\vec{\omega}(H(x))$ есть p-линейная антисимметричная функция на $\vec{E}^p$ и $H'(x)$ — линейное отображение $\vec{E}_0$ в $\vec{E}$.

Таким образом, $(H^*\vec{\omega})(x)$ определяется как p-ковектор на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$, и, следовательно, $H^*\vec{\omega}$: $x \to (H^*\vec{\omega})(x)$ опре-

[1]) В этом случае H может быть произвольным отображением. Однако, для того чтобы иметь возможность вычислить прообраз дифференциальной формы степени > 0, отображение H надо считать дифференцируемым.

делена полностью как дифференциальная форма степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$.

При $p=0$ эта формула сводится к равенству

$$H^* f(x) = f(H(x)), \tag{VI, 3; 31}$$

и мы снова получаем прообраз функции. Впрочем, понятие прообраза дифференциальной формы может быть всегда сведено к понятию прообраза некоторой функции. В самом деле, отображение H множества Ω_0 в Ω определяет также некоторое отображение $\tilde{H}$ множества $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ в множество $\Omega \times \vec{E}^p$:

$$(x, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to (H(x),\ H'(x)\cdot\vec{X}_1,\ H'(x)\cdot\vec{X}_2,\ \ldots,\ H'(x)\cdot\vec{X}_p). \tag{VI, 3; 32}$$

Если дифференциальной форме $\vec{\omega}$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ поставить в соответствие функцию $\vec{\tilde{\omega}}$, определенную на $\Omega\times\vec{E}^p$ со значениями в $\vec{F}$ по формуле

$$\vec{\tilde{\omega}}(y, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p) = \vec{\omega}(y)\cdot(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p), \tag{VI, 3; 33}$$

а ее прообразу — дифференциальной форме $H^*\vec{\omega}$, определенной на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$, поставить в соответствие аналогичную функцию $(H^*\vec{\omega})^\sim$, определенную на $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ со значениями $\vec{F}$, то $(H^*\vec{\omega})^\sim$ будет представлять собой прообраз функции $\vec{\tilde{\omega}}$ при отображении $\tilde{H}$: $(H^*\vec{\omega})^\sim = \tilde{H}(\vec{\tilde{\omega}})$.

Замечание. Если H является C^1-диффеоморфизмом Ω_0 на Ω, то можно также определить *прямой образ* при отображении H дифференциальной формы $\vec{\omega}_0$, определенной на Ω_0. Это будет дифференциальная форма на Ω, определенная соотношением

$$H\vec{\omega}_0 = (H^{-1})^*\vec{\omega}_0. \tag{VI, 3; 33$_2$}$$

Далее, если $x\in\Omega_0$ и $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — векторы из $\vec{E}_0$, то

$$H\vec{\omega}_0(H(x_0))\cdot(H'(x_0)\cdot\vec{X}_1,\ H'(x_0)\cdot\vec{X}_2,\ \ldots,\ H'(x_0)\cdot\vec{X}_p) = \\ = \vec{\omega}_0(x_0)\cdot(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \tag{VI, 3; 33$_3$}$$

Теорема 14. *Отображение H^*: $\vec{\omega}\to H^*\vec{\omega}$ является линейной операцией (т. е. сохраняет сложение дифференциальных* *форм и умножение их на скаляры). Кроме того, оно сохраняет внешнее произведение дифференциальных форм, т. е.*

$$H^*(u \wedge v) = H^*u \wedge H^*v. \qquad \text{(VI, 3; 34)}$$

Кроме того, если f — дифференцируемая функция на Ω, а через df обозначена дифференциальная форма степени 1, определенная ее производной, то H коммутирует с дифференциалом, т. е.

$$H^* df = dH^*f. \qquad \text{(VI, 3; 35)}$$

Наконец, если H является отображением класса C^1 множества Ω_1 в Ω_2, K — отображением класса C^1 множества Ω_2 в Ω_3 и $\vec{\omega}$ представляет собой дифференциальную форму на Ω_3, то имеет место соотношение

$$(K \circ H)^* \vec{\omega} = H^*(K^* \vec{\omega}). \qquad \text{(VI, 3; 35}_2\text{)}$$

Доказательство. Линейность отображения H^* очевидна. Покажем, что отображение H^* сохраняет внешнее умножение. Для простоты мы ограничимся обозначениями и понятиями для случая форм со скалярными значениями. Если u (соответственно v) имеет степень p (соответственно q), то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&(H^*(u \wedge v)(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) = \\
&= (u \wedge v)(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1, H'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{p+q}) = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \big[u(H(x)) \cdot \big(H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_1}, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_p}\big) \times \\
&\qquad\qquad \times v(H(x)) \cdot \big(H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_{p+q}}\big)\big] = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \big[(H^*u)(x) \cdot \big(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}\big) \times \\
&\qquad\qquad \times (H^*v)(x) \cdot \big(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \vec{X}_{\sigma_{p+2}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}\big)\big] = \\
&\qquad\qquad = (H^*u \wedge H^*v)(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}), \qquad \text{(VI, 3; 36)}
\end{aligned}$$

чем и доказывается требуемое утверждение.

Формула (VI, 3; 35) является результатом следующих вычислений:

$$\begin{aligned}
&(H^* df)(x) \cdot \vec{X} = df(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}) = f'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X})\,^{1)} = \\
&= (f'(H(x)) \circ H'(x)) \cdot \vec{X} = (f \circ H)'(x) \cdot \vec{X}\,^{2)} = (dH^*f)(x) \cdot \vec{X}. \qquad \text{(VI, 3; 37)}
\end{aligned}$$

---

[1]) По определению дифференциальной формы df степени 1 (формула (VI, 3; 23)).

[2]) Согласно теореме о сложной функции (теорема 11 гл. III).

Наконец, чтобы доказать равенство (VI, 3; 35_2), заметим, что для $x \in \Omega_1$ и p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ из $\vec{E}_1$ имеют место такие соотношения:

$$\begin{aligned}
((K \circ H)^* \vec{\omega})(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) &= \vec{\omega}((K \circ H)(x)) \cdot \\
&\cdot ((K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_1, \quad (K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, (K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_p) = \\
= \vec{\omega}(K(H(x))) \cdot (K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1), & \; K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_2), \ldots \\
&\ldots, K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_p)) = \\
= (K^* \vec{\omega})(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1, H'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, & \; H'(x) \cdot \vec{X}_p) = \\
&= (H^*(K^* \vec{\omega}))(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \qquad (\text{VI}, 3; 37_2)
\end{aligned}$$

Следствие 1. *Если дифференциальная форма $\vec{\omega}$ выражается в виде* (VI, 3; 25), *где f_i — скалярные дифференцируемые функции, то ее прообраз представляется в виде*

$$H^* \left(\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_p} \right) =$$
$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \left(H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right) d\left(H^* f_{i_1}\right) \wedge d\left(H^* f_{i_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(dH^* f_{i_p}\right), \tag{VI, 3; 38}$$

где $H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ и $H^* f_i$ — прообразы функций $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ и f_i, т. е. функций $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \circ H$ и $f_i \circ H$.

Следствие 2. *Пусть H — отображение открытого множества пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, определяемое формулами*

$$y = H(x),$$

или

$$y_i = H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{VI, 3; 39}$$

Тогда прообраз дифференциальной формы

$$\vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(y)\, dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}$$

при отображении H определяется формулой

$$H^* \vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(H(x))\, dH_{i_1} \wedge dH_{i_2} \wedge \ldots \wedge dH_{i_p} =$$
$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \ldots < i_p \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_p}} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x) \frac{D\left(H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p}\right)}{D\left(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}\right)} dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \ldots \wedge dx_{k_p}. \tag{VI, 3; 40}$$

Доказательство. В силу следствия 1 этот прообраз представим в виде (VI, 3; 38). Но здесь $f_j = y_j$, и поэтому $H^* f_j = H^*(y_j) = H_j$. Переход от 2-й формулы к 3-й производится с помощью (VI, 3; 26).

Из всех этих замечаний вытекает следующее правило вычисления прообраза дифференциальной формы:

Правило. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма на открытом множестве Ω пространства E, выраженная как функция координат y_i и их дифференциалов dy_i. Для вычисления ее прообраза следует, согласно (VI, 3; 39), заменить y_i на выражения H_i, считая последние функциями от x, а dy_i — на дифференциалы dH_i этих выражений. Затем нужно воспользоваться правилами ассоциативности и антикоммутативности внешних произведений. Это правило означает, что операция перехода к прообразам дифференциальных форм проста и носит автоматический характер.

Замечания. 1°) Часто, допуская вольность речи, как это делалось в теории замены переменных (стр. 240 т. I), говорят, что $H^*\vec{\omega}$ является той же дифференциальной формой, что и $\vec{\omega}$ (sic!), но выраженной через переменные x_j вместо переменных y_i. Вместо «прообраза дифференциальной формы» часто говорят «преобразование дифференциальной формы путем замены переменных $y = H(x)$».

2°) Когда мы записываем, например, в полярных координатах, что имеет место формула (VI, 3; 29), то ее можно понимать теперь в двух смыслах:

a) или же в этой формуле, как мы уже говорили, r, θ и φ рассматриваются как функции на $\mathbb{R}^3$, а dr, $d\theta$, $d\varphi$ — как их дифференциалы;

b) или же $dx \wedge dy \wedge dz$ имеет в качестве *прообраза* $r^2 \sin\theta\, dr \wedge \wedge\, d\theta \wedge d\varphi$ при отображении P пространства $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, определенном формулами

$$P(r, \theta, \varphi) = (x, y, z) = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta\ \sin\varphi,\ r \cos\theta).$$

Допущенная вольность речи, о которой говорилось в замечании 1°), отождествляет оба эти смысла и тем оправдывает себя.

Теорема 14_2. *Если отображение H принадлежит классу C^m, а форма $\vec{\omega}$ — классу C^q, то $H^*\vec{\omega}$ принадлежит классу $C^{\min(m-1,\, q)}$*

(кроме случая степени 0, *когда* $H^*\vec{\omega}$ *принадлежит классу* $C^{\min(m,q)}$).

Доказательство. Случай степени 0 сводится к теореме 19 гл. III (теорема о сложных функциях). Для других степеней, используя то, что говорилось относительно формулы (VI, 3; 33), заметим, что отображение $\tilde{H}$ множества $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ в $\Omega \times \vec{E}^p$, определенное формулой (VI, 3; 32), в силу наличия производной H' в этой формуле, принадлежит только классу C^{m-1}. Теперь достаточно к функциям $\vec{\omega}$ и $\tilde{H}\vec{\omega}$ снова применить теорему 19 гл. III.

Отметим, в частности, что *если* H *принадлежит классу* C^1 *и форма* $\vec{\omega}$ *непрерывна, то форма* $H^*\vec{\omega}$ *также непрерывна. Если* H *принадлежит классу* C^2 *и* $\vec{\omega}$ *принадлежит классу* C^1, *то* $H^*\vec{\omega}$ *принадлежит классу* C^1.

Дифференциальные формы на абстрактных многообразиях

Пусть V — многообразие, принадлежащее *по крайней мере классу* C^1, размерности n, содержащееся в аффинном пространстве E размерности N, или даже абстрактное. Тогда на нем можно определить понятие дифференциальной формы. В самом деле, понятие касательного вектора к такому многообразию нам уже известно. Ограничиваясь, например, случаем многообразия из E, можно также определить p-ковектор в точке $x \in V$ со значениями в $\vec{F}$ как некоторое p-линейное антисимметричное отображение пространства $(\vec{T}(x;\ V))^p$ в $\vec{F}$, где $\vec{T}(x;\ V)$ — векторное пространство, касательное к многообразию V в точке x. Точно таким же способом можно теперь определить дифференциальную форму $\vec{\omega}$ степени p на V со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{F}$ как поле p-ковекторов на V со значениями в $\vec{F}$, т. е. как отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in V$ некоторый p-ковектор $\vec{\omega}(x)$ в точке $x \in V$ со значениями в $\vec{F}$.

Нетрудно определить сумму и внешнее произведение дифференциальных форм, а также обобщить бо́льшую часть рассмотренных ранее свойств. В дальнейшем мы будем часто говорить о дифференциальных формах на многообразии V, не уточняя его характера. Можно ограничиться многообразием V, лежащим в аффинном пространстве E, и формами, определенными в окрестности Ω многообразия V в E.

Дифференциальные формы и поля в ориентированном евклидовом N-мерном пространстве

1°) Рассмотрим в евклидовом пространстве E вещественную дифференциальную форму степени 1. Эта форма является полем ковекторов. На стр. 190 т. I мы видели, что можно установить взаимно однозначное соответствие между ковекторами и элементами из $\vec{E}$. Следовательно, дифференциальной форме степени 1 можно поставить в соответствие некоторое векторное поле. Если в некоторой ортонормированной системе координат дифференциальная форма будет определена формулой $\sum\limits_i A_i dx_i$, то векторное поле будет определяться соотношением $x \to (A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x))$. *Это соответствие зависит только от евклидовой структуры пространства E и не зависит от его ориентации.*

2°) Если же пространство E ориентировано, то между N-ковекторами и скалярами можно установить взаимно однозначное соответствие (теорема 11). Следовательно, можно установить взаимно однозначное соответствие между скалярными дифференциальными формами степени N и полями скаляров, т. е. скалярными функциями. Относительно положительно ориентированной ортонормированной системы координат дифференциальная форма $f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N$ соответствует функции f.

3°) Наконец, можно установить взаимно однозначное соответствие между $(N-1)$-ковекторами и векторами из E (формула (VI, 2; 11_3)), а следовательно, взаимно однозначное соответствие между вещественными дифференциальными формами степени $N-1$ и векторными полями. Относительно положительной ортонормированной системы координат дифференциальной форме

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N \qquad \text{(VI, 3; 41)}$$

отвечает векторное поле

$$x \to \left((-1)^{N-1}\omega_1(x), (-1)^{N-2}\omega_2(x), \ldots, (-1)^{N-j}\omega_j(x), \ldots, \omega_N(x)\right). \qquad \text{(VI, 3; 42)}$$

В частном случае трехмерного пространства дифференциальной форме $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$ соответствует векторное поле с составляющими A, B, C.

Соответствия 2°) и 3°) зависят не от задания евклидовой структуры пространства и его ориентации, а от задания на $\vec{E}$ некоторого фундаментального N-ковектора $\overset{N}{\xi} \neq 0$ (мера объемов и ориентация). Предыдущие формулы тогда имеют место для любого такого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$, что $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) = 1$. Если взять *произвольный* базис, то будет иметь место равенство $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) = \Delta$, или $\overset{N}{\xi} = \Delta\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N$, а поле (VI, 3; 42) ассоциируется с дифференциальной формой

$$\Delta \sum_{j=1}^{N} \omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N. \qquad \text{(VI, 3; 42}_2\text{)}$$

Обозначая символом $\sim$ [1]) установленные выше соответствия между дифференциальными формами и полями, получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\overset{1}{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i\, dx_i \sim \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_N),\\ f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N \sim f,\\ \overset{N-1}{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (\omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N) \sim \\ \sim \vec{A}\left((-1)^{N-1}\omega_1, (-1)^{N-2}\omega_2, \ldots, (-1)^{N-j}\omega_j, \ldots, \omega_N\right).\end{gathered} \qquad \text{(VI, 3; 43)}$$

Замечания. 1°) *Установленное соответствие сохраняется при умножении на скалярную функцию.* Например, если $\overset{1}{\omega} \sim \vec{A}$ и g — вещественная функция на $\Omega \subset E$, то $g\overset{1}{\omega} \sim g\vec{A}$.

2°) В некоторых случаях оказывается полезным изучать это соответствие, выбирая для каждой точки из $\vec{E}$ базис, меняющийся вместе с этой точкой. Это как раз то, что мы делали в случае полярных координат на стр. 119.

3°) *В какой-то мере эти соответствия носят как «акробатический», так и «архаический» характер.* Они *часто* приносят большую пользу, *но меньшую, чем это принято думать*, ибо являются наследием того времени, когда теории дифференциальных форм еще не существовало.

---

[1]) Обозначение $\sim$ не удобно, но, пренебрегая этим, мы используем его, что чревато опасностями. Если $N = 2$, то $1 = N - 1$, а потому 1-я и 3-я формулы в этом случае одной форме степени 1 ставят в соответствие ортогональные векторные поля. Было бы нецелесообразным обозначать оба соответствия одним способом.

§ 4. КОГРАНИЦА ИЛИ ВНЕШНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВНЕШНЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть Ω — открытое множество N-мерного аффинного пространства E и $\vec{\omega}$ — дифференцируемая дифференциальная форма степени p, определенная на Ω со значениями в $\vec{F}$. Если в E выбрана некоторая система координат $\mathcal{R}$, то эта форма может быть выражена с помощью формулы (VI, 3; 7).

Будем называть *дифференциалом* или *кограницей дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *относительно системы координат* $\mathcal{R}$ дифференциальную форму степени $p+1$, определенную на Ω со значениями в $\vec{F}$ соотношением

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{J,\,\alpha} \frac{\partial \vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dx_J = \sum_J d\vec{\omega}_J \wedge dx_J,$$

или (VI, 4; 1)

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_\alpha dx_\alpha \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_\alpha}.$$

Напомним, что в этой формуле $\vec{\omega}_J$ есть функция, определенная на Ω со значениями в $\vec{F}$, и, следовательно, $d\vec{\omega}_J$ имеет смысл как дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной этой функции. При таких условиях $d\vec{\omega}_J \wedge \wedge dx_J$ является внешним произведением формы степени 1 и формы степени p и, значит, является формой степени $p+1$.

Заметим, что формула (VI, 4; 1) включает $dx_\alpha \wedge dx_J$, а не противоположное ему выражение $dx_J \wedge dx_\alpha$. Здесь необходимо раз и навсегда выбрать одну из двух равноправных возможностей, а именно ту, которая чаще будет встречаться в дальнейшем.

Полученное таким способом выражение не является каноническим представлением (VI, 3; 7) относительно формы $d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$ степени $p+1$, поскольку дифференциалы координат расположены не в обычном порядке, но такая перестановка легко выполняется.

Приведем несколько примеров.

Прежде всего, если речь идет о дифференциальной форме степени 0, т. е. о функции $\vec{f}$, то $d_{\mathcal{R}}\vec{f}$ является не чем иным, как дифференциалом этой функции $d\vec{f}$.

Рассмотрим теперь дифференциальную форму степени 1 на открытом множестве из $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy + \vec{C}\,dz) = d\vec{A} \wedge dx + d\vec{B} \wedge dy + d\vec{C} \wedge dz =$$
$$= \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz\right) \wedge dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{C}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{C}}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right)dx \wedge dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{C}}{\partial x}\right)dz \wedge dx. \qquad \text{(VI, 4; 2)}$$

Если взять дифференциальную форму степени 2, то мы получим

$$d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dy \wedge dz + \vec{B}\,dz \wedge dx + \vec{C}\,dx \wedge dy) =$$
$$= \overrightarrow{dA} \wedge dy \wedge dz + \overrightarrow{dB} \wedge dz \wedge dx + \overrightarrow{dC} \wedge dx \wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{C}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{C}}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{C}}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz. \qquad \text{(VI, 4; 3)}$$

Разумеется, что кограница формы степени N на Ω, будучи формой степени $N+1$, тождественно равна нулю.

Теорема 15. *Операция $d_{\mathcal{R}}$, определенная формулой* (VI, 4; 1), *обладает следующими четырьмя свойствами:*

1°) *Если $\vec{f}$ — дифференцируемая функция на Ω, рассматриваемая как дифференциальная форма степени 0, то $\overrightarrow{df}$ — дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной функции $\vec{f}$ по формуле* (VI, 3; 23).

2°) *Операция $d_{\mathcal{R}}$ линейна:*

$$\left.\begin{aligned} d_{\mathcal{R}}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) &= d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_1 + d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_2, \\ d_{\mathcal{R}}(k\vec{\omega}) &= k\,d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 4; 4)}$$

где k — скаляр.

3°) *Если* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ — *дифференцируемые дифференциальные формы степени соответственно* p *и* q *на* Ω *со значениями соответственно в векторных нормированных пространствах* $\vec{F}$ *и* $\vec{G}$ *и если, кроме того,* $\vec{B}$ *является непрерывным билинейным отображением* $\vec{F}\times\vec{G}$ *в векторное нормированное пространство* $\vec{H}$, *то для кограницы произведения имеет место следующая формула:*

$$d_{\mathcal{R}}(\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v}) = d_{\mathcal{R}}\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v} + (-1)^p \overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} d_{\mathcal{R}}\vec{v}. \qquad \text{(VI, 4; 5)}$$

В частности, если u *и* v — *скалярные дифференциальные формы, то*

$$d_{\mathcal{R}}(\overset{p}{u} \wedge v) = d_{\mathcal{R}}\overset{p}{u} \wedge v + (-1)^p \overset{p}{u} \wedge d_{\mathcal{R}}v\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 4; 6)}$$

4°) *Если* $\vec{\omega}$ — *дважды дифференцируемая дифференциальная форма на* Ω, *то*

$$d_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 4; 7)}$$

Доказательство. Свойства 1°) и 2°) очевидны. Прежде чем доказывать свойство 3°), заметим, что *формула определения* (VI, 4; 1) сохраняет смысл, если считать, что J не обязательно является возрастающей последовательностью элементов $j_1, j_2, \ldots, j_p$ множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. В самом деле, если в этом случае мы через $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$ обозначим последовательность тех же элементов, но расположенных в порядке возрастания, а через σ обозначим сигнатуру перестановки множества элементов $j_1, j_2, \ldots, j_p$, переводящей их в $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$, то получим, что

$$\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p} = \\ = \varepsilon_\sigma \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j'_p}. \qquad \text{(VI, 4; 8)}$$

Непосредственное применение формулы (VI, 4; 1) приводит к такому соотношению:

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_p \\ \alpha}} \frac{\varepsilon_\sigma \,\partial\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j'_p}, \qquad \text{(VI, 4; 9)}$$

---

[1]) Легко запомнить знак $(-1)^p$, если заметить, что он появляется после того, как $d_{\mathcal{R}}$ «перепрыгивает» через форму $\overset{p}{u}$ степени p.

которое можно записать в виде

$$d_{\mathscr{R}}\vec{\omega} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_p \\ \alpha}} \frac{\partial \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}; \tag{VI, 4; 10}$$

тем самым наше утверждение доказано.

Докажем теперь утверждение 3°). Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — дифференцируемые дифференциальные формы на Ω степени p и q соответственно, представленные в виде

$$\vec{u} = \sum_J \vec{u}_J \, dx_J, \quad \vec{v} = \sum_K \vec{v}_K \, dx_K. \tag{VI, 4; 11}$$

Тогда форма $\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v}$ (степени $p+q$) запишется в виде

$$\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v} = \sum_{J, K} B(\vec{u}_J, \vec{v}_K) \, dx_J \wedge dx_K. \tag{VI, 4; 12}$$

В силу сделанного выше замечания результат применения операции $d_{\mathscr{R}}$ к этому произведению вычисляется без труда даже тогда, когда в произведении $dx_J \wedge dx_K$ последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_p, k_1, k_2, \ldots, k_q$ из $J \cup K$ не расположена в порядке возрастания. В любом случае имеет место формула

$$d_{\mathscr{R}}(\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v}) = \sum_{J, K, \alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} B(\vec{u}_J, \vec{v}_K) \, dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K. \tag{VI, 4; 13}$$

С помощью формулы дифференцирования билинейной непрерывной функции (теорема 12 гл. III) последнюю формулу можно записать так:

$$\begin{aligned} &\sum_{J, K, \alpha} \vec{B}\left(\frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha}, \vec{v}_K\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K + \\ &\qquad + \sum_{J, K, \alpha} \vec{B}\left(\vec{u}_J, \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial x_\alpha}\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K = \\ &= \left(\sum_{J, \alpha} \frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_J\right) \wedge_{(B)} \sum_K \vec{v}_K \, dx_K + \\ &\qquad + (-1)^p \left(\sum_J \vec{u}_J \, dx_J\right) \wedge_{(B)} \left(\sum_{K, \alpha} \frac{\partial v_K}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_K\right)^{1)} = \\ &\qquad = d_{\mathscr{R}}\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v} + (-1)^p \vec{u} \wedge_{(B)} d_{\mathscr{R}}\vec{v}, \end{aligned} \tag{VI, 4; 14}$$

и утверждение 3°) доказано.

---

[1]) Знак $(-1)^p$ появляется вследствие того, что $dx_J \wedge dx_\alpha = (-1)^p dx_\alpha \wedge dx_J$ (формула антикоммутативности (VI, 1; 41)).

Докажем теперь утверждение 4°). Пусть $\vec{\omega}$ — дважды дифференцируемая дифференциальная форма степени p на Ω. Тогда последовательно получаем такие формулы:

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}=\sum_{J,\,\alpha}\frac{\partial\vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha}\,dx_\alpha\wedge dx_J,$$
$$d_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{R}}\vec{\omega})=\sum_{J,\,\alpha,\,\beta}\frac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\beta\,\partial x_\alpha}\,dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J. \qquad \text{(VI, 4; 15)}$$

В этой сумме сохраняются только системы α, β, J, в которых $\alpha\neq\beta$ и в которых ни один из двух элементов α, β не принадлежат J, так как в противном случае $dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J=0$. Если для одной и той же системы α, β при $\alpha<\beta$ мы сгруппируем члены с $dx_\alpha\wedge dx_\beta\wedge dx_J$ и $dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J$, то в силу свойства симметрии частных производных $\frac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\frac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\beta\,\partial x_\alpha}$ (теорема 16 гл. III) получим выражение, равное нулю. Этим и заканчивается доказательство теоремы [1]).

Следствие 1. *Если u, v, w — скалярные дифференциальные формы степени p, q и r соответственно, то*

$$d_{\mathcal{R}}(u\wedge v\wedge w)=d_{\mathcal{R}}u\wedge v\wedge w+(-1)^p u\wedge d_{\mathcal{R}}v\wedge w+$$
$$+(-1)^{p+q}u\wedge v\wedge d_{\mathcal{R}}w. \qquad \text{(VI, 4; 16)}$$

Мы получим эту формулу, если положим $u\wedge v\wedge w=(u\wedge v)\wedge w$ и дважды применим третье утверждение теоремы.

Следствие 2. *Если $\vec{\omega}$ является дифференцируемой формой на Ω и выражается в виде* (VI, 3; 25), *где $\vec{\omega}_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_p}$ — дифференцируемые функции, а f_j — скалярные дважды дифференцируемые функции, то справедливо соотношение*

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}d\vec{\omega}_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_p}\wedge df_{i_1}\wedge df_{i_2}\wedge\ldots\wedge df_{i_p}. \qquad \text{(VI, 4; 17)}$$

---

[1]) Более тонкими методами можно доказать, что $d_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}=\vec{0}$ даже в том случае, когда $\vec{\omega}$ не является дважды дифференцируемой формой, лишь бы только обе формы $\vec{\omega}$ и $d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$ принадлежали классу C^1.

Доказательство. В самом деле, согласно свойствам 1°) — 3°) имеем

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \Big[d\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \wedge df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots df_{i_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_{k-1}} \wedge d_{\mathcal{R}}\, df_{i_k} \wedge \\ \wedge df_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge df_{i_p}\Big]. \qquad (\text{VI}, 4; 17_2)$$

Результат теперь следует из того факта, что, согласно свойству 4°), $d_{\mathcal{R}}\, df_{i_k} = d_{\mathcal{R}} d_{\mathcal{R}} f_{i_k} = 0$.

Теорема 16 (обратная к теореме 15). *Операция $d_{\mathcal{R}}$, которая каждой дифференцируемой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на Ω со значениями в нормированном векторном пространстве $\vec{F}$, ставит в соответствие дифференциальную форму степени $p+1$, является единственной операцией, обладающей свойствами* 1°) — 4°) *теоремы* 15.

Доказательство. В самом деле, пусть ∂ — произвольная операция, обладающая этими свойствами. Если $\vec{\omega}$ является дифференциальной формой, записанной в виде (VI, 3; 6) относительно некоторой системы координат $\mathcal{R}$, то в силу ее линейности (свойство 2°)) имеем

$$\partial\vec{\omega} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \partial\left[\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\right]. \qquad (\text{VI}, 4;\ 18)$$

С другой стороны, согласно формуле, относящейся к произведению (свойство 3°)), это выражение можно записать так:

$$\partial\vec{\omega} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \Big[\partial\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge \partial\, dx_{i_k} \wedge \\ \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\Big]. \qquad (\text{VI}, 4;\ 19)$$

В силу свойства 1°) выражения $\partial\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ являются дифференциальными формами $d\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ степени 1, соответствующими производным функций $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$. Точно так же

$dx_k = \partial x_k$. Наконец, согласно свойству 4°), $\partial\, dx_k = \partial\, \partial x_k$ равны нулю. Отсюда следует, что $\partial\vec{\omega} = d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}$. Теорема доказана.

Следствие. *Операция $d_{\mathscr{R}}$, определенная с помощью некоторой системы координат $\mathscr{R}$, не зависит от этой системы координат. Это некоторая операция d, которая каждой дифференцируемой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$, ставит в соответствие некоторую дифференциальную форму степени $p+1$, определенную на Ω со значениями в $\vec{F}$ и обладающую свойствами* 1°) — 4°) *теоремы* 15.

Доказательство. Выберем две системы координат $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ в E. Каждая из операций $d_{\mathscr{R}}$ и $d_{\mathscr{R}'}$ обладает свойствами 1°) — 4°) теоремы 15. Однако, согласно теореме 16, существует только одна операция, обладающая этими свойствами. Поэтому $d_{\mathscr{R}} = d_{\mathscr{R}'}$.

Операция d называется внешним дифференцированием или операцией взятия кограницы дифференциальных форм. Форма, кограница которой равна нулю, называется замкнутой дифференциальной формой[1]*), или коциклом.*

Теорема 17. *Пусть Ω_0 — открытое множество из E_0, Ω — открытое множество из E и H — дважды дифференцируемое отображение Ω_0 в Ω. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференцируемая дифференциальная форма на Ω. Тогда имеет место формула коммутирования прообраза H^* и кограницы d:*

$$dH^*\vec{\omega} = H^* d\vec{\omega}. \tag{VI, 4; 20}$$

Доказательство. Если $\vec{\omega}$ — форма степени 0, то написанная формула совпадает с формулой (VI, 3; 35). В этом случае она остается справедливой, даже если отображение H дифференцируемо только один раз.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ является произвольной дифференцируемой дифференциальной формой степени p. Эта форма всегда может быть записана в виде суммы (VI, 3; 25), где f_i — дважды дифференцируемые скалярные функции, а $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ — дифференцируемые функции со значениями в $\vec{F}$. Достаточно взять, например, в качестве f_i координатные функции x_i относительно

[1]) Если множество Ω связно, то форма степени 0 замкнута тогда и только тогда, когда она является постоянной функцией (теорема 22 гл. III). Дифференциальная форма степени N, равной размерности пространства E, всегда замкнута.

некоторой системы координат в E. При этом имеет место формула (VI, 3; 38). Отсюда получаем, что

$$d H^* \vec{\omega} = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_p} \Big[d H^* \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \wedge d H^* f_{j_1} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{j_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} H^* \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} d H^* f_{j_1} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{j_{k-1}} \wedge d d H^* f_{j_k} \wedge \\ \wedge d H^* f_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{j_p} \Big]. \qquad \text{(VI, 4; 21)}$$

Так как $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ — дифференцируемая функция, а $d d H^* f_j = 0$ (f_j и H, а следовательно, и $H^* f_j$ дважды дифференцируемы), то $d H^* \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} = H^* d \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, откуда следует требуемый результат.

Обобщение на абстрактный случай. Если форма $\vec{\omega}$ степени p определена только на многообразии V класса C^2 размерности n, содержащемся в нормированном аффинном пространстве E, или даже если это абстрактное многообразие класса C^2, то *можно определить операцию взятия кограницы* d, которая каждой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на V, ставит в соответствие некоторую дифференциальную форму $d\vec{\omega}$ степени $p+1$, обладающую четырьмя свойствами теоремы 15 (одно из свойств требует, чтобы ω принадлежала классу C^2, а значит, V — классу C^3; это может привести к некоторым незначительным трудностям). Но мы не будем подробно останавливаться на этих фактах, представляющих большой интерес в теории дифференциальных форм.

Градиент, дивергенция, ротор в аффинном евклидовом ориентированном N-мерном пространстве E

1°) *Оператор градиента*: $\overrightarrow{\text{grad}}$. Вещественная дифференцируемая функция f имеет кограницу df. Согласно п. 1°) на стр. 126, ей можно поставить в соответствие некоторое векторное поле. Так определяется градиент функции f. Эта операция зависит не от ориентации, а только от евклидовой структуры пространства E. С ней мы уже встречались в формуле (III, 3; 23).

2°) *Дивергенция векторного поля*: div. Когда рассматривается дифференцируемое векторное поле, то с ним можно связать дифференцируемую дифференциальную форму степени $N-1$. Эта форма имеет кограницу, представляющую собой дифференциальную форму степени N, которой можно в свою очередь поставить в соответствие некоторую скалярную функцию. Эта функция, умноженная на $(-1)^{N-1}$, называется *дивергенцией* векторного поля[1]).

Дивергенция не зависит ни от евклидовой структуры, ни от ориентации пространства E. Она связана непосредственно с аффинной структурой этого пространства. В самом деле, для ее построения применяются две операции, зависящие от выбора фундаментального N-ковектора $\overset{N}{\xi} \neq 0$ на $\vec{E}$, и *эти операции*, как это видно из формулы (VI, 4; 24), *«нейтрализуют» друг друга.*

Если составляющими векторного поля относительно *произвольной* системы координат являются функции $x \to A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то соответствующая дифференциальная форма определяется, согласно (VI, 3, 42_2), по формуле

$$\omega = \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} A_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N, \tag{VI, 4; 22}$$

где Δ является значением N-формы $\overset{N}{\xi}$ в выбранной системе координат:

$$\Delta = \overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N), \qquad \overset{N}{\xi} = \Delta \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N. \tag{VI, 4; 22_2}$$

(Можно было ограничиться случаем, когда E является евклидовым ориентированным пространством, а система координат — положительная и ортонормированная. Тогда $\Delta = 1$.)

Кограница формы (VI, 4; 22) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} d\omega &= \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} dA_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \\ &\qquad \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N = \\ &= \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \\ &\qquad \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N = \\ &= \Delta (-1)^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N, \end{aligned} \tag{VI, 4; 23}$$

[1]) Сомножитель $(-1)^{N-1}$ вводится для того, чтобы получить формулу (VI 4; 24) без знака минус.

откуда вытекает следующая формула для дивергенции:

$$\operatorname{div}(A_1, A_2, \ldots, A_N) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \Delta \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_N}{\partial x_N}. \quad \text{(VI, 4; 24)}$$

3°) *Ротор векторного поля в случае трехмерного пространства.* Существует другая замечательная операция, которую можно определить только в ориентированном евклидовом пространстве размерности $N = 3$.

Будем исходить из дифференцируемого поля $\vec{A}$. Этому полю можно поставить в соответствие некоторую дифференциальную форму степени 1. Кограница этой формы является дифференциальной формой степени 2. Однако тогда $2 = N - 1$, и можно полученной форме поставить в соответствие некоторое векторное поле[1]).

Таким путем определяется оператор, который дифференцируемому векторному полю ставит в соответствие некоторое векторное поле. Этот оператор называют ротором и обозначают через $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$. Пусть A, B, C — три составляющие поля $\vec{A}$ относительно положительного ортонормированного базиса. Дифференциальная форма степени 1, соответствующая $\vec{A}$, имеет вид

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz. \quad \text{(VI, 4; 25)}$$

Ее кограница определяется по формуле (VI, 4; 2). Следовательно, согласно (VI, 3; 42) (для $N = 3$), составляющими векторного поля $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ являются функции

$$A_1 = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad B_1 = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad C_1 = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\,^{2)}. \quad \text{(VI, 4; 26)}$$

Замечание. Часто эти формулы распространяют на комплексные функции и комплексные поля. Если f является комплексной функцией $f = g + ih$, то через $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ обозначают комплексное векторное поле $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + i\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h$. Если $\vec{A}$ является

---

[1]) Здесь *имеется только одна операция*, зависящая от ориентации: переход от формы степени 2 к векторному полю. Следовательно, *полученное поле полярно, т. е. зависит от ориентации.* Оно зависит также, очевидно, и от евклидовой структуры пространства.

[2]) К ротору частично относится замечание 3°), приведенное по другому поводу на стр. 127.

комплексным векторным полем $\vec{A}=\vec{V}+i\vec{W}$, то полагают $\operatorname{div}\vec{A}=\operatorname{div}\vec{V}+i\operatorname{div}\vec{W}$ и $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V}+i\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{W}$.

Теорема 18. 1°) *В открытом множестве аффинного евклидова ориентированного трехмерного пространства ротор градиента вещественной дважды дифференцируемой функции и дивергенция ротора дважды дифференцируемого векторного поля равны нулю.*

2°) *Если f является дважды дифференцируемой вещественной функцией, определенной на открытом множестве аффинного евклидова пространства размерности N, то имеет место формула*

$$\Delta f=\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f, \tag{VI, 4; 27}$$

где Δ — дифференциальный оператор 2-го порядка, который называется лапласианом и представляется в любой ортонормированной системе координат в виде

$$\Delta=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{VI, 4; 28}$$

3°) *Если $\vec{A}$ является дважды дифференцируемым векторным полем, определенным на открытом множестве ориентированного аффинного евклидова трехмерного пространства, то для лапласиана Δ справедлива следующая формула:*

$$\Delta\vec{A}=\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{A}-\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}. \tag{VI, 4; 29}$$

Доказательство. Утверждение 1°) вытекает непосредственно из соотношения $dd=0$.

Утверждения 2°) и 3°) очевидны. Достаточно взять ортонормированную систему координат (положительную, если пространство E ориентировано) и применить формулы, определяющие градиент, ротор и дивергенцию.

Замечание. Подведем итог изложенному:

a) Дивергенция векторного поля зависит от аффинной структуры пространства E.

b) Градиент функции зависит от аффинной евклидовой структуры пространства E.

c) Лапласиан Δ зависит от аффинной евклидовой структуры пространства E.

d) Ротор векторного поля существует лишь в том случае, когда пространство E трехмерно, и зависит от аффинной евклидовой ориентированной структуры пространства E.

Механическая интерпретация дивергенции

Рассмотрим течение жидкости в трехмерном аффинном евклидовом пространстве. Выбрав ортонормированную систему координат, мы можем отождествить это пространство с пространством $\mathbb{R}^3$. «Частица», занимавшая в момент времени t_0 положение (x_0, y_0, z_0) в $\mathbb{R}^3$, в момент времени t займет положение

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t),\quad y = y(x_0, y_0, z_0, t),\quad z = z(x_0, y_0, z_0, t). \quad (\mathrm{VI}, 4; 29_2)$$

Скорость этой частицы в заданный момент времени t равна $\vec{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) = (\xi, \eta, \zeta)$. Эта скорость является функцией от x_0, y_0, z_0. Однако можно было бы также для заданного t выразить x_0, y_0, z_0 как функции от x, y, z[1]). Подставляя эти значения в (ξ, η, ζ), получим их выражение в виде функции от x, y, z и таким образом определим *в каждый момент времени t поле скоростей.*

Рассмотрим множество частиц, заполняющих в момент времени t_0 заданную область Ω_0. В момент времени t это множество займет область Ω_t, объемная мера которой в силу формулы замены переменных в кратных интегралах (следствие 3 теоремы 102 гл. IV) вычисляется по формуле

$$V_t = \iiint_{\Omega_t} dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_0} \left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right| dx_0\,dy_0\,dz_0. \quad (\mathrm{VI}, 4; 29_3)$$

Производная по времени этой объемной меры

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right| dx_0\,dy_0\,dz_0$$

вычисляется дифференцированием под знаком $\iiint$, которое, очевидно, допустимо, если Ω_0 ограничена, x, y, z принадлежат классу C^2 и $\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}$ всюду $\neq 0$ (следствие теоремы 115 гл. IV).

Вычислим эту производную при $t = t_0$. Для t, близких к t_0, имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x_0} &= 1 + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t - t_0) + \ldots,\\
\frac{\partial x}{\partial y_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = \frac{\partial \xi}{\partial y_0}(t - t_0) + \ldots,\\
\frac{\partial x}{\partial z_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t - t_0) + \ldots
\end{aligned} \quad (\mathrm{VI}, 4; 29_4)$$

[1]) Всегда предполагается, что переход от момента t_0 к моменту t является некоторым гомеоморфизмом (и даже, вообще говоря, C^1-диффеоморфизмом).

и формулы того же типа для y и z. Якобиан, равный 1 при $t=t_0$, разлагается при бесконечно малом $t-t_0$ по следующей формуле:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}=$$
$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\xi}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial\xi}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial\xi}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \\ \frac{\partial\eta}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & 1+\frac{\partial\eta}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial\eta}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial\zeta}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & 1+\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_5)$$

Если сохранить лишь члены, содержащие $t-t_0$, то мы получим, что

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}=1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+\frac{\partial\eta}{\partial y_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right)(t-t_0)+\ \ldots, \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_6)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right|\right)_{t=t_0}=\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+\frac{\partial\eta}{\partial y_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}=\operatorname{div}\vec{v}_0. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_7)$$

Окончательно получаем формулу

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0}=\iiint\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}\vec{v}_0\,dx_0\,dy_0\,dz_0. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_8)$$

Однако выбор момента времени t_0 особой роли не играет. Формула (VI, 4; 29_8) записывается для произвольного момента времени t так:

$$\frac{dV}{dt}=\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}\vec{v}\,d\tau, \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_9)$$

где $d\tau$ — объемная мера в евклидовом пространстве E.

Рассмотрим предел логарифмической производной объема $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$, взятый в тот момент t, когда рассматриваемая область «равномерно стягивается» к точке $M\in E$. Этот предел вычисляется по формуле

$$\lim_{\Omega_t\to M}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\lim_{\Omega_t\to M}\frac{\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}\vec{v}\,d\tau}{\iiint\limits_{\Omega_t}d\tau}=(\operatorname{div}\vec{v})(M)\,^{1}). \qquad (\mathrm{VI}, 4; 29_{10})$$

[1]) С рассуждением такого рода мы уже встречались в следствии 6 теоремы 102 гл. IV.

Именно отсюда пришло слово «дивергенция», т. е. расхождение. Тот факт, что жидкость *несжимаема*, означает, что *в каждый момент t дивергенция поля скоростей равна нулю.*

Эти результаты показывают снова, что дивергенция зависит только от аффинной структуры пространства E. Действительно, объемы будут определены с того момента, как будет выбрана некоторая фундаментальная форма $\overset{N}{\xi}$ на $\vec{E}$, но влияние этого выбора исчезает при рассмотрении dV/V.

Вычисления в полярных координатах в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим, как обычно, отображение P области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, определенное формулами (IV, 9; 93).

Векторы $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi}$ были вычислены на стр. 750 т. I, и имеет место формула (IV, 10; 19). Сохраним те же обозначения. Пусть f — скалярная функция класса C^1 в $\mathbb{R}^3$. Если через $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ обозначать частные производные по r, θ и φ композиции $f \circ P$, то они совпадают с производными функции f по трем векторам $\vec{i}$, $r\vec{j}$, $r \sin\theta \vec{k}$.

В самом деле, согласно теореме о сложной функции, например, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(m) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(f \circ P)(m) = f'(P(m)) \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi}(m) =$$
$$= \left(D_{\frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi}(m)} f\right)(m) = \left(D_{r \sin\theta \vec{k}} f\right)(m). \qquad \text{(VI, 4; 30)}$$

Но эти производные в силу формулы (III, 3; 21) являются скалярными произведениями $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ на рассматриваемые векторы, так что окончательно мы получаем такие формулы:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{i}), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{j}), \quad \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{k}), \qquad \text{(VI, 4; 31)}$$

и, следовательно, представление градиента в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{k}. \qquad \text{(VI, 4; 32)}$$

Найдем теперь дифференциальные формы степени 1, соответствующие векторным полям $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в евклидовой структуре пространства E. По определению формам dr, $d\theta$, $d\varphi$ [1]) отвечают $\overrightarrow{\operatorname{grad}} r$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$, т. е., согласно (VI, 4; 32), векторы $\vec{i}$, $\frac{1}{r}\vec{j}$, $\frac{1}{r\sin\theta}\vec{k}$. Поэтому

$$dr \sim \vec{i}, \quad r\,d\theta \sim \vec{j}, \quad r\sin\theta\,d\varphi \sim \vec{k}, \qquad \text{(VI, 4; 33)}$$

где символ $\sim$ означает эквивалентность дифференциальной формы степени 1 и векторного поля, определяемого евклидовой структурой $\mathbb{R}^3$.

Поскольку векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют положительный [2]) ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$, то соответствие между векторными полями и дифференциальными формами степени 2, определяемое формулой (VI, 2; 11_3), запишется в виде

$$\vec{i} \sim r^2 \sin\theta\,d\theta \wedge d\varphi, \quad \vec{j} \sim r\sin\theta\,d\varphi \wedge d\theta, \quad \vec{k} \sim r\,dr \wedge d\theta. \qquad \text{(VI, 4; 34)}$$

Наконец, соответствие между скалярными функциями и дифференциальными формами 3-й степени запишется так:

$$1 \sim dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\theta\,dr \wedge d\theta \wedge d\varphi. \qquad \text{(VI, 4; 35)}$$

Зададим теперь векторное поле тремя его составляющими в полярных координатах

$$\vec{A} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}. \qquad \text{(VI, 4; 36)}$$

Согласно (VI, 4; 34), ему отвечает дифференциальная форма степени 2:

$$Ar^2 \sin\theta\,d\theta \wedge d\varphi + Br\sin\theta\,d\varphi \wedge dr + Cr\,dr \wedge d\theta. \qquad \text{(VI, 4; 37)}$$

Ее кограница определяется так:

$$\left[\left(2Ar + r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)\sin\theta + \left(B\cos\theta + \frac{\partial B}{\partial \theta}\sin\theta\right)r + r\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right] dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \qquad \text{(VI, 4; 38)}$$

откуда, используя соответствие (VI, 4; 35), получаем дивергенцию [3])

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2A}{r} + \frac{B}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C}{\partial \varphi}. \qquad \text{(VI, 4; 39)}$$

---

[1]) Под dr, $d\theta$, $d\varphi$ здесь понимаются дифференциалы *функций* r, θ, φ на $\mathbb{R}^3$. Например, φ является функцией $M \to$ 3-я координата $P^{-1}(M)$, которая каждой точке M ставит в соответствие ее долготу.

[2]) Это предположение считается здесь выполненным. См. далее примечание на стр. 197.

[3]) Множитель $(-1)^{N-1}$, необходимый при вычислении дивергенции (стр. 136), для $N = 3$ равен $+1$.

Вычислим теперь лапласиан скалярной функции.

Имеет место формула (VI, 4; 27). Поэтому достаточно последовательно применить формулы (VI, 4; 32) и (VI, 4; 39) и получить

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad \text{(VI, 4; 40)}$$

Мы видим, что предлагаемые здесь методы значительно удобнее методов, указанных в гл. III (стр. 246 т. I). Это объясняется тем, что при вычислении лапласиана мы воспользовались тем фактом, что он существенно связан с евклидовой структурой пространства.

Внешняя первообразная дифференциальной формы

Пусть $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени p на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Выясним, при каких условиях существует внешняя первообразная формы $\vec{\omega}$, т. е. некоторая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$, принадлежащая по крайней мере классу C^1 и такая, что $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$.

Естественно, что это возможно лишь в том случае, когда степень p формы $\vec{\omega}$ будет $\geqslant 1$.

Предположим, что $\vec{\omega}$ является когранинцей некоторой формы $\vec{\varpi}$, принадлежащей не только классу C^1, но и классу C^2. Тогда $d\vec{\omega} = d\,d\vec{\varpi} = \vec{0}$. Форма $\vec{\omega}$ должна быть замкнутой. Это условие по крайней мере необходимо для того, чтобы форма $\vec{\omega}$ была когранинцей некоторой формы $\vec{\varpi}$ класса C^2. Условие это автоматически выполняется, если $p = N$ — размерности пространства E[1]). Докажем следующее обратное утверждение:

[1]) Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит только классу C^1 и является когранинцей некоторой формы $\vec{\varpi}$, также принадлежащей только классу C^1, то в силу примечания на стр. 132 имеет место равенство $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Если же форма $\vec{\omega}$ лишь непрерывна, то этим свойством она может не обладать. Однако, для того чтобы выяснить, является ли форма $\vec{\omega}$ когранинцей некоторой формы $\vec{\varpi}$, естественно предполагать, что $\vec{\varpi}$ принадлежит классу C^1, но нет никакой необходимости считать форму $\vec{\omega}$ дифференцируемой. Теория распределений эти затруднения снимает.

Теорема 19 (Пуанкаре). *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная замкнутая (т. е. $d\omega = 0$) форма степени $p \geqslant 1$ на открытом множестве Ω пространства E со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ класса C^1. Предположим, что существует такая система координат в E, относительно которой Ω обладает следующими свойствами: каждая параллель к какому-либо вектору базиса пространства $\vec{E}$ пересекает Ω по открытому отрезку, который, если он не пуст, содержит по крайней мере одну точку гиперплоскости, проведенной через начало координат параллельно другим векторам базиса.*

Тогда существуют такие дифференциальные формы $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ класса C^1, что $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$. Все эти формы можно получить, прибавляя к одной из них произвольную дифференциальную замкнутую, т. е. такую, кограница которой равна нулю[1]*, форму степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ класса C^1.*

Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит классу C^m (с конечным или бесконечным $m \geqslant 1$), то форму $\vec{\varpi}$ можно выбрать в классе C^m[2]*. При $p = 0$ форма $\vec{\varpi}$ принадлежит классу C^{m+1}.*

Условия, налагаемые нами на Ω, являются, очевидно, слишком ограничительными. Они выполняются, например, если Ω представляет собой открытый параллелепипед, стороны которого параллельны базисным векторам, или если Ω — открытый шар относительно некоторой подходящей нормы в E.

Легко видеть, однако, что если предыдущие ограничения слишком сильны, то *некоторые ограничения топологического характера, налагаемые на Ω, неизбежны*. Предположим, например, что E — плоскость $\mathbb{R}^2$ и что ω — дифференциальная форма степени 1, обычно обозначаемая через $d\varphi$, — «дифференциал аргумента или полярного угла», т. е.

$$d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \qquad \text{(VI, 4; 41)}$$

Форма ω является дифференциальной формой степени 1 класса C^∞, определенной в дополнении Ω к началу координат. Она замкнута: $d\omega = 0$. *Однако легко видеть, что она не является в Ω кограницей некоторой функции* (т. е. обычным дифференциалом функции класса C^1 на Ω). Пусть A — некоторая точка $\mathbb{R}^2$.

---

[1]) Такая замкнутая форма является постоянной функцией, если $p - 1 = 0$, и кограницей произвольной формы степени $p - 2$ класса C^1, если $p - 1 \geqslant 1$.

[2]) Однако все решения не принадлежат классу C^m!

Для любой точки M из $\mathbb{R}^2$ обозначим через $\Phi(A; M)$ угол, на который надо повернуть плоскость вокруг начала координат, чтобы точка A попала на полупрямую OM. Если наложить ограничение $-\pi \leqslant \Phi(A, M) < \pi$, то этот угол определится однозначно. Обозначим через $\mathscr{V}$ множество точек M из Ω, для которых $-\pi < \Phi(A; M) < \pi$. Это множество является открытой окрестностью точки A в Ω.

В этой окрестности точки A существуют первообразные формы ω, а именно функции $\varphi(M) = \varphi_0 + \Phi(A; M)$. Так как множество $\mathscr{V}$ связно, эти функции единственны. *Однако во всей области Ω первообразной не существует, т. е. не существует единого непрерывного определения полярного угла.* В самом деле, любая первообразная в Ω является тем более первообразной в $\mathscr{V}$. Следовательно, ее можно представить в $\mathscr{V}$ так, как указано выше. Пусть M стремится, оставаясь в множестве $\mathscr{V}$, к такой точке M_0, что $\Phi(A; M_0) = -\pi$. Когда она стремится к M_0 с одной и другой стороны от полупрямой AM_0, то $\varphi(M)$ стремится соответственно к $\varphi_0 - \pi$ и $\varphi_0 + \pi$, а следовательно, φ не может быть продолжена до непрерывной функции на Ω.

На этом примере видно, что *обозначение $d\varphi$ неудачно*, поскольку ω не является кограницей функции. Оно имеет смысл только в меньших открытых множествах, таких, как $\mathscr{V}$, в которых можно определить функцию φ. Конечно, если Ω не обладает свойствами, достаточными для обеспечения существования первообразной дифференциальной формы $\vec{\omega}$, то всегда можно утверждать, что каждая точка $a \in \Omega$ имеет такую окрестность $\mathscr{V}$ в Ω, в которой такая первообразная существует. Достаточно в качестве окрестности взять открытый параллелепипед или открытый шар.

Доказательство. Если существует некоторая внешняя первообразная $\vec{\varpi}$, то совершенно ясно, что все другие первообразные можно получить, добавляя к ней произвольную замкнутую форму $\vec{\theta}$, ибо тогда $d(\vec{\varpi} + \vec{\theta}) = d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$. При этом имеется бесконечное множество первообразных (поскольку существует бесконечное множество замкнутых форм: каждая дифференциальная форма с постоянными коэффициентами замкнута. Для нулевой степени в силу связности Ω единственными замкнутыми формами являются постоянные; для степеней высокого порядка имеется много других замкнутых форм!).

Мы будем доказывать теорему индукцией по размерности N пространства E. Выводы теоремы верны для $N \leqslant p-1$, поскольку тогда форма $\vec{\omega}$ тождественно равна нулю в силу того, что ее степень $p \geqslant N+1$.

Предположим, что теорема верна для всех аффинных пространств размерности 1, 2, ..., $N-1$, и докажем ее справедливость для размерности N. Хотя в условии теоремы полем скаляров может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, мы приведем здесь доказательство только для поля $\mathbb{R}$. Случай поля $\mathbb{C}$ может быть разобран только после того, как будет развита теория функций комплексной переменной.

Мы можем выбрать в пространстве E некоторую систему координат и тем самым отождествить его с $\mathbb{R}^N$.

В форме $\vec{\omega}$, представленной в виде (VI, 3; 6), выделим все члены, содержащие dx_1. Тогда можно записать, что

$$\vec{\omega} = dx_1 \wedge \vec{L} + \vec{M}, \tag{VI, 4; 42}$$

где $\vec{L}$ и $\vec{M}$ — дифференциальные формы степени $p-1$ и p соответственно, которые, если их представить в виде (VI, 3; 6), не содержат дифференциала dx_1.

Рассмотрим теперь дифференциальную форму $\vec{\Lambda}$ степени $p-1$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial\vec{\Lambda}}{\partial x_1} = \vec{L}. \tag{VI, 4; 43}$$

В силу предположений относительно Ω такую форму достаточно определить с помощью интеграла

$$\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int_0^{x_1} \vec{L}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi. \tag{VI, 4; 44}$$

Этот интеграл имеет смысл. В самом деле, для каждой точки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из Ω отрезок, соединяющий эту точку с точкой $(0, x_2, \ldots, x_N)$, полностью принадлежит Ω, и, следовательно, форма $\vec{L}$ на нем определена и непрерывна. Для фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ величина, стоящая в правой части под знаком $\int$, является непрерывной функцией ξ со значениями в $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$. Поскольку пространство $\vec{F}$ по условию полно, то $A\mathscr{L}^{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$ является банаховым пространством; значит, интеграл имеет смысл и определяет $\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ как некоторый элемент пространства $A\mathscr{L}^{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$, а $\vec{\Lambda}$ как некоторую дифференциальную форму степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$. Теперь видно, что $\vec{\Lambda}$ имеет частную производную по x_1, совпадающую с $\vec{L}$.

Кроме того, видно, что если $\vec{L}$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 1$, то то же самое будет верно для $\vec{\Lambda}$. В самом деле, каждая частная производная $\vec{\Lambda}$, не содержащая дифференцирования по x_1, вычисляется в силу следствия теоремы 115 гл. IV непосредственно под знаком $\int$. Каждая частная производная, содержащая дифференцирование по x_1, вычисляется дифференцированием относительно $x_2, \ldots, x_N$ под знаком $\int$, в то время как частное дифференцирование по x_1 производится по правилу дифференцирования интеграла по его верхнему пределу (теорема 89 гл. IV).

В частности, так как форма $\vec{L}$ по предположению принадлежит классу C^1, то форма $\vec{\Lambda}$ также принадлежит классу C^1 и имеет кограницу $d\vec{\Lambda}$, которая вычисляется по формуле

$$d\vec{\Lambda} = dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_j} = dx_1 \wedge \vec{L} + d'\vec{\Lambda}, \qquad (\text{VI}, 4; 45)$$

где d' — операция взятия кограницы «относительно $x_2, \ldots, x_N$», т. е. частная кограница, равная $d' = \sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$. Кроме того,

$$(d\vec{\Lambda})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ + \int_0^{x_1} ((d'\vec{L})(\xi, x_2, \ldots, x_N))\, d\xi. \qquad (\text{VI}, 4; 46)$$

Однако форма $\vec{\omega}$ не произвольна, поскольку она замкнута. Поэтому имеет место соотношение

$$\vec{0} = d\vec{\omega} = d(dx_1 \wedge \vec{L}) + d\vec{M} = (ddx_1 \wedge d\vec{L} - dx_1 \wedge d\vec{L}) + d\vec{M} = \\ = -dx_1 \wedge d'\vec{L} + dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} + d'\vec{M}. \qquad (\text{VI}, 4; 47)$$

Если, в частности, мы соберем все члены, содержащие dx_1, затем члены, не содержащие dx_1, то в обоих случаях мы должны получить $\vec{0}$. Поэтому

$$dx_1 \wedge \left(-d'\vec{L} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}\right) = 0, \quad d'\vec{M} = \vec{0}. \qquad (\text{VI}, 4; 48)$$

Заключенное в скобки выражение в первом равенстве не содержит члена с dx_1. Следовательно, его внешнее произведение на dx_1 может обращаться в нуль только тогда, когда оно само равно нулю. Отсюда

$$d'\vec{L} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}, \quad d'\vec{M} = \vec{0}. \qquad (VI, 4; 48_2)$$

Поэтому в силу (VI, 4; 46) и первой формулы (VI, 4; 48_2)

$$\begin{aligned} d\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ + \int_0^{x_1} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ + \vec{M}(x_1, x_2, \ldots, x_N) - \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N). \qquad (VI, 4; 49) \end{aligned}$$

Следовательно, *классу C^m принадлежит не только форма $\vec{\Lambda}$, но также и форма $d\vec{\Lambda}$*. (Последнее вовсе не означает, что $\vec{\Lambda}$ должна быть из класса C^{m+1}! Кограница $d\vec{\Lambda}$ включает только часть частных производных формы $\vec{\Lambda}$! Например, форма максимальной степени класса C^1 всегда замкнута, и потому ее равная нулю кограница принадлежит классу C^∞, а это ничего не дает для самой формы.)

Таким образом, имеет место следующее равенство (в силу соотношений (VI, 4; 42) и (VI, 4; 49)):

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} - d\vec{\Lambda})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \vec{P}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \\ = \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N). \qquad (VI, 4; 50) \end{aligned}$$

Если мы сможем доказать, что $\vec{P}$ есть кограница некоторой дифференциальной формы степени $p-1$, и поскольку то же самое имеет место для формы $d\vec{\Lambda}$ кограницы $\vec{\Lambda}$, то форма $\vec{\omega}$ будет обладать тем же свойством. Если, кроме того, форма $\vec{P}$ принадлежит классу C^m, то мы должны будем показать, что она является кограницей некоторой дифференциальной формы класса C^m.

Однако $\vec{P}$ — это дифференциальная форма, в которую не входят ни x_1, ни dx_1. Действительно, dx_1 в $\vec{M}$ не входит, а так как $\vec{M}$ вычисляется в точке $(0, x_2, \ldots, x_N)$, то x_1 также не входит в $\vec{M}$. Форма P замкнута, поскольку в силу формулы (VI, 4; 48) имеют место равенства

$$d\vec{P} = d'\vec{M} = \vec{0}. \qquad (VI, 4; 51)$$

Значит, $\vec{P}$ можно рассматривать как замкнутую дифференциальную форму класса C^m степени p на открытом множестве Ω_1 пространства $\mathbb{R}^{N-1}$, обладающем теми же свойствами, что и исходное открытое множество Ω в пространстве $\mathbb{R}^N$, так как Ω_1 является следом Ω на гиперплоскости $x_1=0$. Из предположения индукции следует, что существует дифференциальная форма $\vec{\theta}$ степени $p-1$ класса C^m на этом открытом множестве Ω_1, для которой $\vec{P}$ является кограницей. Этим заканчивается доказательство существования формы $\vec{\varpi}$.

Это доказательство в то же время содержит практический способ вычисления $\vec{\varpi}$. С этой целью надо переходить к дифференциальным формам, содержащим все меньшее и меньшее число переменных. Тогда на некотором шаге мы придем к дифференциальной форме степени p от p переменных, а на следующем шаге — к форме степени $p-1$, т. е. форме, тождественно равной нулю. Полезно подробнее посмотреть, что же происходит в этот момент. Предположим, что мы получили дифференциальную форму $\vec{\omega}$ класса C^m степени p, зависящую от p переменных, которые мы будем обозначать через $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Тогда ее можно представить в виде (VI, 4; 42), где вместо dx_1 следует написать dy_1. Здесь $\vec{M}=\vec{0}$, т. е.

$$\vec{\omega}=\vec{f}\,dy_1\wedge dy_2\wedge\ \ldots\ \wedge dy_p=$$
$$=dy_1\wedge(\vec{f}\,dy_2\wedge\ \ldots\ \wedge dy_p)=dy_1\wedge\vec{L}. \qquad \text{(VI, 4; 51}_2\text{)}$$

Теперь достаточно найти $\vec{\Lambda}$, используя предыдущий метод, и задача будет решена, поскольку $\vec{\omega}=d\vec{\Lambda}$.

Пусть $p=1$. Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит классу C^m, то полученная функция $\vec{\varpi}=\vec{f}$, очевидно, будет принадлежать классу C^{m+1}, поскольку она является функцией, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$, производная которой является отображением класса C^m множества Ω в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})$. Таким образом, теорема полностью доказана. Сформулируем в виде следствия ее частный случай при $p=1$.

Следствие 1. *Для того чтобы функции $A_1, A_2, \ldots, A_N$ класса C^1, определенные на открытом множестве Ω аффинного N-мерного пространства, которое обладает указанными свойствами, и принимающие значения в банаховом пространстве $\vec{F}$, были частными производными $\vec{A}_i=\partial\vec{f}/\partial x_i$ некоторой* *функции $\vec{f}$ класса C^1, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношениям совместности*

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \qquad \text{(VI, 4; 52)}$$

В этом случае функция $\vec{f}$ определяется с точностью до постоянной и принадлежит классу C^2. Кроме того, если функции $\vec{A}_i$ принадлежат классу C^m, то функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^{m+1}[1]*.*

Если E является евклидовым аффинным трехмерным ориентированным пространством, то, используя понятие векторного поля, можно сформулировать следующее следствие:

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество аффинного евклидова ориентированного трехмерного пространства, обладающего указанными в теореме свойствами. Тогда*

1°) *Для того чтобы векторное поле, определенное на Ω и принадлежащее классу C^1, было градиентом вещественной функции класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его ротор равнялся нулю. В этом случае функция f будет определена с точностью до аддитивной постоянной.*

2°) *Для того чтобы векторное поле класса C^1, определенное на Ω, было ротором некоторого векторного поля класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю. В этом случае поле, ротор которого задан, определяется с точностью до некоторого векторного поля, являющегося градиентом произвольной функции класса C^2.*

3°) *Каждая функция класса C^1, определенная на Ω, есть дивергенция некоторого векторного поля класса C^1. Это векторное поле определяется с точностью до векторного поля класса C^1, являющегося ротором некоторого векторного поля класса C^1.*

§ 5. ОРИЕНТАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ НАД ПОЛЕМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть V — некоторое многообразие размерности n класса C^1, содержащееся в N-мерном аффинном пространстве E.

Выясним, в каком смысле можно говорить об ориентации

---

[1]) В примечании на стр. 143 мы говорили, что предположение о принадлежности $\vec{A}_i$ классу C^1 вовсе не является естественным. В теории распределений условия совместности записываются для случая непрерывных функций.

многообразия V. Пусть a — некоторая точка V. Тогда V обладает в точке a касательным векторным подпространством размерности n, которое мы обозначили через $\vec{T}(a; V)$. Это некоторое векторное пространство над полем вещественных чисел, и его можно снабдить некоторой ориентацией.

Непрерывная система ориентаций многообразия

Системой ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V мы будем называть выбор для каждого $a \in V$ некоторой ориентации его векторного касательного пространства $\vec{T}(a; V)$. Система ориентаций многообразия V является, следовательно, некоторой функцией $\mathcal{T}$, определенной на V, которая в каждой точке $a \in V$ принимает значение $\mathcal{T}(a)$, принадлежащее двухэлементному множеству, состоящему из двух возможных ориентаций пространства $\vec{T}(a; V)$. Объясним, что мы будем понимать *под непрерывной системой ориентаций* $\mathcal{T}$ *многообразия* V (*или некоторой его части*). Система ориентаций *не является функцией обычного типа*, поскольку множество, в котором она принимает свои значения, в каждой точке a зависит от самой этой точки. Поэтому рассматриваемое понятие не является обычным понятием непрерывной функции.

Пусть $\Phi\colon \mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ является истинным параметрическим представлением класса C^1 размерности n открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Пусть α — такая точка $\mathcal{O}$, что $\Phi(\alpha) = a$. Мы знаем, что производное отображение $\Phi'(\alpha)$ устанавливает линейную биекцию $\mathbb{R}^n$ на $\vec{T}(a; V)$. Отсюда следует, что оно двум классам базисов в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие два класса базисов в $\vec{T}(a; V)$ [1]). Обозначим теперь через $\theta(\alpha; \Phi; \mathcal{T}) = \theta(\alpha; \Phi) = \theta(\alpha)$ величину, равную $+1$, если отображение Φ' ставит в соответствие положительному классу $\mathbb{R}^n$ (в его обычной канонической ориентации) положительный класс пространства $\vec{T}(a; V)$ в смысле ориентации $\mathcal{T}(a)$, и равную -1 в противоположном случае. Итак, карта Φ определяет некоторую функцию $\theta\colon \alpha \to \theta(\alpha; \Phi)$, определенную на открытом множестве $\mathcal{O}$ со значениями в двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$. Задание этой функции θ на множестве $\mathcal{O}$ определяет систему ориентаций на части $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Однако на этот раз функ-

---

[1]) В самом деле, линейная биекция u векторного пространства $\vec{E}$ на другое векторное пространство $\vec{F}$ преобразует два базиса e, e' одного и того же класса (соответственно противоположных классов) в два базиса $u(e)$, $u(e')$, также принадлежащие одному и тому же классу (соответственно противоположным классам). Это следует из того, что определитель $u(e')$ относительно $u(e)$ равен определителю e' относительно e.

ция θ принимает значения в одном и том же двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$.

Говорят, что *система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a относительно карты* Φ, образ которой покрывает a, если функция θ, отвечающая этой системе ориентаций и отображению Φ, непрерывна в точке α. Поскольку эта функция принимает значения в дискретном двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$, то ее непрерывность в точке α означает, что она постоянна в окрестности α.

Говорят, что система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна относительно Φ на каждом открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$, если функция θ, соответствующая Φ, непрерывна на каждом открытом множестве $\mathcal{O}$. Это означает, что каждая точка открытого множества $\mathcal{O}$ имеет окрестность, в которой θ постоянна, или что θ постоянна в каждой открытой связной части $\mathcal{O}$ и, в частности, на самом множестве $\mathcal{O}$, если оно связно. В самом деле, каждая из двух точек $+1$ и -1 является одновременно открытым и замкнутым подмножеством рассматриваемого двухэлементного множества, и, следовательно, непрерывность θ означает, что прообраз любого из этих двух элементов одновременно открыт и замкнут в топологическом пространстве $\mathcal{O}$.

Теорема 20. *Если система ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V непрерывна в точке a относительно некоторой карты Φ, образ которой покрывает a, то она непрерывна в точке a и относительно любой другой карты, образ которой покрывает a.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\Phi_1\colon \mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2\colon \mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2)$ — две карты, образы которых покрывают точку a, и $\Phi_i(\alpha_i) = a$. Поскольку речь идет о непрерывности в самой точке a, мы можем ограничиться открытыми множествами, меньшими, чем $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Так как в V существует одна и та же окрестность точки a, которая одновременно покрывается образами этих двух карт, мы можем ограничиться прообразами этого открытого множества, обозначая их по-прежнему через $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Это приведет нас к частному случаю, когда образы $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ являются одним и тем же открытым множеством из V. В силу следствия 1 теоремы 33 гл. III отображение $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \Phi_{2,1}$ является диффеоморфизмом класса C^1 множества $\mathcal{O}_1$ на множество $\mathcal{O}_2$.

Рассмотрим теперь некоторый базис пространства $\vec{T}(a; V)$, положительный в системе ориентаций $\mathcal{T}(a)$. Отображения $(\Phi_1'(\alpha_1))^{-1}$ и $(\Phi_2'(\alpha_2))^{-1}$ ставят ему в соответствие два базиса $\mathbb{R}^n$, знаки которых в канонической ориентации $\mathbb{R}^n$ соответственно равны знакам $\theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha_1; \Phi_1)$ и $\theta_2(\alpha_2) = \theta(\alpha_2; \Phi_2)$. От первого базиса $\mathbb{R}^n$ ко второму можно перейти с помощью линейного отображения $\Phi'_{2,1}(\alpha_1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Поэтому они имеют либо один и тот же знак, либо противоположные знаки в соответствии с тем, будет ли якобиан $\det \Phi'_{2,1}(\alpha_1) > 0$ или < 0. Окончательно получаем такую формулу:

$$\theta_2(\alpha_2) = \theta_1(\alpha_1) \operatorname{sign}(\det(\Phi'_{2,1}(\alpha_1))). \qquad \text{(VI, 5; 1)}$$

Поскольку функция $\Phi_{2,1}$ принадлежит классу C^1 и ее якобиан, не равный нулю в точке α_1, непрерывен, то он сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки. Следовательно, если θ_1 сохраняет знак в некоторой окрестности точки α_1, то найдется такая окрестность точки α_2, в которой θ_2 также сохранит знак. Теорема доказана.

Это позволяет нам ввести следующее определение. Говорят, что *система $\mathscr{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a*, если она непрерывна в этой точке относительно любой карты многообразия, образ которой покрывает a. *Система $\mathscr{T}$ ориентаций V непрерывна на части A многообразия V или на самом многообразии V, если она непрерывна в каждой точке a множества A или V.*

Сравнение двух непрерывных систем ориентаций

Рассмотрим две системы ориентаций $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ одного многообразия V. Можно говорить об отношении этих двух систем ориентаций в точке a, равном $+1$ или -1, в зависимости от того, будут ли ориентации $\mathscr{T}_1(a)$ и $\mathscr{T}_2(a)$ касательного пространства $\vec{T}(a; V)$, определяемые этими системами, одинаковыми или противоположными.

Отношение двух систем ориентаций многообразия V является функцией, определенной на этом многообразии со значениями в двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$.

Теорема 21. *Если две системы ориентаций $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ многообразия V непрерывны в точке a, то отношение этих систем ориентаций является постоянной функцией в любой окрестности точки a*[1]). *Обратно, если это отношение является постоянной функцией в некоторой окрестности точки a и если одна из двух систем ориентаций непрерывна в a, то другая также непрерывна в этой точке.*

В самом деле, если мы рассмотрим карту Φ, образ которой $\Phi(\mathscr{O})$ содержит точку a, то отношение двух систем ориен-

[1]) Это *не так очевидно*, как кажется: система непрерывных ориентаций не является непрерывной функцией в обычном смысле, поскольку ее значение в точке a лежит в множестве, изменяющемся вместе с a. Поэтому сразу же утверждать, что отношение двух таких «непрерывных функций» непрерывно, нельзя.

таций в точке $x \in V$ равно

$$\theta_1(\Phi^{-1}(x);\ \Phi)\,\theta_2(\Phi^{-1}(x);\ \Phi), \qquad \text{(VI, 5; 2)}$$

где θ_1 и θ_2 — функции, ассоциированные с Φ и двумя системами ориентаций. Отсюда вытекает требуемое заключение.

Следствие 1. *Если две системы ориентаций одного многообразия V непрерывны в точке a и совпадают в этой точке, то они совпадают во всей окрестности точки a.*

Следствие 2. *Если многообразие V связно, то две непрерывные системы ориентаций многообразия V либо совпадают на всем V, либо противоположны на всем V.*

В самом деле, их отношение является непрерывной функцией на V со значениями в множестве $\{+1, -1\}$. Прообраз относительно этой функции множества $\{+1\}$ или множества $\{-1\}$ одновременно и открыт, и замкнут, а значит, пуст или совпадает со всем многообразием V.

Ориентируемость и ориентация многообразия

Определение. Говорят, что *многообразие V класса C^1 размерности n ориентируемо*, если оно имеет хотя бы одну непрерывную систему ориентаций. Говорят, что это многообразие *ориентировано*, если зафиксирована одна из таких непрерывных систем, которая в этом случае называется *ориентацией многообразия V*. Если многообразие V связно и ориентируемо, то оно обладает двумя возможными ориентациями и выбор ориентации касательного векторного пространства в отдельной точке определяет ориентацию всего многообразия в целом. Например, аффинное пространство является ориентируемым многообразием. Ориентировать аффинное пространство — это значит ориентировать его присоединенное векторное пространство, поскольку оно является касательным векторным пространством в любой точке этого многообразия. В дальнейшем мы приведем примеры как ориентируемых, так и неориентируемых многообразий. Примем такое соглашение: *если некоторое многообразие имеет размерность* 0, *т. е. если оно является пространством, состоящим из изолированных точек, то ориентация этого многообразия состоит в приписывании каждой из его точек знака $+$ или $-$*. Если это многообразие связно, т. е. сводится к одной точке, то оно обладает, очевидно, двумя противоположными ориентациями. Если многообразие V ориентируемо, то через $\overset{\frown}{V}$ можно обозначить многообразие, снабженное некоторой ориентацией. В этом случае $\overset{\curvearrowleft}{V}$ будет обозначать многообразие V, снабженное противоположной ориентацией.

Ориентация многообразия коориентируемыми картами

Пусть Φ_1 и Φ_2 — две карты из некоторого атласа многообразия V. Говорят, что они *коориентируемы*, если их образы либо не пересекаются, либо отображение $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ множества Ω_1 на Ω_2 (где Ω_i является прообразом при отображении Φ_i пересечения $\Omega = \Phi_1(\mathcal{O}_1) \cap \Phi_2(\mathcal{O}_2)$) имеет всюду положительный якобиан.

Теорема 21_2. *Для того чтобы многообразие V было ориентируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовал его атлас, состоящий из попарно коориентируемых карт. Задание такого атласа фиксирует ориентацию многообразия V.*

Доказательство. Предположим, что многообразие V ориентировано. Пусть Φ—такая карта, что множество $\mathcal{O}$ связно. Функция θ относительно Φ будет постоянной на $\mathcal{O}$. Если эта постоянная равна $+1$, то мы ничего менять не будем и положим $\Psi = \Phi$. Если же она равна -1, то рассмотрим новую карту Ψ, определенную по формуле $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Phi(-u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Она отображает некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$ (которое совпадает не с множеством $\mathcal{O}$, а с его образом при отображении $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to (-u_1, u_2, \ldots, u_n)$) на *то же самое открытое множество* из V, а ее функция θ, очевидно, тождественно равна $+1$. В силу (VI, 5; 1) система всех карт Ψ коориентируема. Поскольку множества $\Psi(\mathcal{O}) = \Phi(\mathcal{O})$ покрывают V, они образуют некоторый атлас из попарно коориентируемых карт.

Обратно, предположим, что задан такой атлас. Если для каждой точки x из V мы рассмотрим некоторую ориентацию $\mathcal{T}(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$, то для всех карт Φ, образы которых покрывают точку x, в силу (VI, 5; 1) и предположения о коориентируемости карт соответствующая величина $\theta(\Phi^{-1}(x); \Phi)$ будет одинаковой. Следовательно, можно выбрать ориентацию $\mathcal{T}(x)$ так, чтобы эта величина была всюду равна $+1$. Тем самым определяется некоторая система ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V. Так как функция θ всюду равна $+1$, то эта система непрерывна и, следовательно, задает ориентацию многообразия V.

Ориентация многообразия с помощью непрерывных векторных полей

Теорема 22. *Пусть V — многообразие размерности n, снабженное некоторой системой ориентаций $\mathcal{T}$, и $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ ($\vec{U}_i$: $x \to \vec{U}_i(x)$) суть n векторных полей, определенных на V. Здесь $\vec{U}_i(x)$ — линейно независимые векторы, касательные* *к многообразию V в точке x. Если система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна в точке a, то, какой бы ни была система n векторных полей, непрерывных в точке a, знак базиса $\vec{U}_1(x)$, $\vec{U}_2(x)$, ..., $\vec{U}_n(x)$ в ориентации $\mathcal{T}(x)$ постоянен для всех x, достаточно близких к точке a.*

Обратно, если для некоторой системы n частных векторных полей, непрерывных в точке a, этот знак постоянен в некоторой окрестности точки a, то система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть Φ — карта, образ которой $\Phi(\mathcal{O})$ покрывает некоторую окрестность точки a. Пусть $x = \Phi(\xi)$ и $a = \Phi(\alpha)$. При отображении $(\Phi'(\xi))^{-1}$ вектору $\vec{U}_i(x)$ соответствует некоторый вектор $\vec{\mathcal{U}}_i(\xi)$ из $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по системе n линейно независимых векторных полей $\vec{U}_i$ определяется система линейно независимых векторных полей $\vec{\mathcal{U}}_i$ на $\mathcal{O}$. Из следствия 6 теоремы 33_4 гл. III вытекает, что если $\vec{U}_i$ непрерывны в точке $a = \Phi(\alpha)$, то соответствующие поля $\vec{\mathcal{U}}_i$ на $\mathcal{O}$ непрерывны в точке α. Знак системы n векторов $\vec{\mathcal{U}}_i(x)$ в точке $x \in \mathcal{O}$ (в канонической ориентации $\mathbb{R}^n$) равен знаку определителя этих n векторов. Однако этот определитель непрерывен в точке α (поскольку непрерывны поля) и всегда $\neq 0$. Значит, его знак в некоторой окрестности точки α непрерывен, т. е. постоянен. Знак системы векторов $\vec{U}_i(x)$ в ориентации $\mathcal{T}(x)$ равен произведению предыдущего знака на $\theta(\xi; \Phi)$.

Отсюда вытекает, что знак системы векторов $\vec{U}_i(x)$ для x, близких к a, постоянен тогда и только тогда, когда функция θ постоянна в окрестности точки α, т. е. тогда и только тогда, когда система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a относительно карты Φ, а значит, согласно теореме 20, просто непрерывна в точке a.

Замечание. Всегда можно найти систему n линейно независимых касательных векторных полей $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, ..., $\vec{U}_n$, непрерывных в точке a многообразия V. Для доказательства достаточно рассмотреть карту Φ, образ которой покрывает a, и взять в качестве $\vec{U}_i(x)$ образ $\xi = \Phi^{-1}(x)$ при отображении $\Phi'(\xi)$ i-го вектора базиса $\mathbb{R}^n$. Однако, вообще говоря, невозможно построить систему n непрерывных линейно независимых полей на всем многообразии V, *и даже одно непрерывное поле касательных векторов всюду* $\neq \vec{0}$ (см. стр. 321).

Ориентация многообразия с помощью знака вещественных дифференциальных форм

Теорема 23. *Пусть V — многообразие класса C^1 размерности n, снабженное некоторой системой ориентаций $\mathcal{T}$. Рассмотрим вещественную дифференциальную форму ω степени n, определенную на V, сужение которой в каждой точке $x \in V$ определяет на $\vec{T}(x; V)$ некоторую n-линейную антисимметричную ненулевую форму. Если система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a, то знак n-ковектора, определенный формой ω в точке x на $\vec{T}(x; V)$ относительно ориентации $\mathcal{T}(x)$ этого пространства, постоянен для всех x, достаточно близких к a, независимо от выбора формы ω, непрерывной в точке a.*

Обратно, если для некоторой частной формы ω, непрерывной в точке a, этот знак постоянен в некоторой окрестности точки a, то рассматриваемая система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ — система n векторных полей, касательных к многообразию V, линейно независимых и непрерывных в точке a. В предыдущем замечании мы видели, что такие поля существуют. Вещественная функция $x \to \omega(x) \cdot (\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x))$ непрерывна и $\neq 0$ в точке a. Следовательно, ее знак постоянен в некоторой окрестности точки a. Он равен произведению знака n-ковектора $\omega(x)$ и знака базиса $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$ относительно ориентации $\mathcal{T}(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$. Знак формы будет постоянным в окрестности точки a тогда и только тогда, когда будет постоянным знак системы n векторов, т. е. в силу теоремы 23, когда система ориентаций многообразия V будет непрерывной в точке a.

Замечание. Если в некоторой системе ориентаций многообразия V вещественная дифференциальная форма ω степени n, определенная на V, такова, что в каждой точке x из V n-ковектор $\omega(x)$ неотрицателен на $\vec{T}(x; V)$ (определение неотрицательного n-ковектора см. на стр. 100), то мы будем писать $\omega \geqslant 0$. Это понятие знака дифференциальной формы максимальной степени n на многообразии V размерности n имеет смысл только при заданной ориентации многообразия V.

Пример неориентируемого многообразия. Лист Мёбиуса

Возьмем прямоугольник $ABB'A'$ и склеим две его противоположные стороны AB и $A'B'$. При этом точка A совместится с точкой A' и точка B — с точкой B'. Чтобы получить лист Мёбиуса, надо прямоугольник предварительно перекрутить, т. е. сделать так, чтобы точка A совместилась с точкой B', а точка B — с точкой A'. Если $AM = B'M'$, то точка M должна совпасть с точкой M'. Лист Мёбиуса можно определить как двумерную поверхность класса C^∞ в $\mathbb{R}^3$.

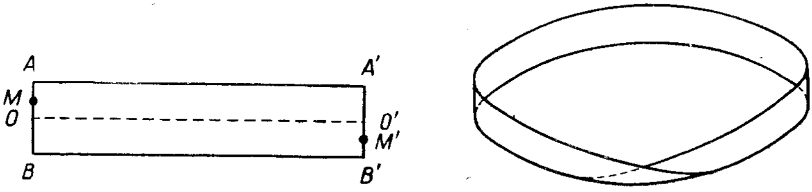

Рис. 1.

В качестве средней окружности листа Мёбиуса возьмем окружность Γ, определенную уравнениями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ или параметрическими уравнениями $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = 0$.

Пусть $m(\varphi) = m$ — точка этой окружности, соответствующая параметру φ. Определим на листе Мёбиуса открытый отрезок длины $2l < 2a$, перпендикулярный этой средней окружности, по формуле

$$M(\varphi, \rho) = m(\varphi) - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\vec{u} + \rho\cos\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3, \quad -l < \rho < l, \qquad \text{(VI, 5; 3)}$$

где $\vec{e}_3$ — единичный вектор оси z, а $\vec{u}$ — единичный вектор оси Om: $\overrightarrow{Om} = a\vec{u}$. При $\varphi = 0$ этот отрезок вертикален. Когда угол φ возрастает, отрезок «поворачивается вокруг касательной к средней окружности» на угол $\varphi/2$. Когда m возвращается в исходное положение при $\varphi = 2\pi$, отрезок также возвращается в исходное положение, но «перевернувшись».

Так можно получить параметрическое представление листа Мёбиуса:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(a - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y &= \left(a - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z &= \rho\cos\frac{\varphi}{2}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\varphi \in \mathbb{R}, \ -l < \rho < l, \\ &a, \ l \text{ заданы}, \ 0 < l < a. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 5; 4)}$$

Заметим, что если заменить φ на $\varphi + 2\pi$ и ρ на $-\rho$, то мы придем к той же точке листа Мёбиуса. Следовательно, предыдущее параметрическое представление является «несобственным параметрическим представлением». Однако локально это истинное параметрическое представление в смысле определения гл. III (стр. 321, т. I). В самом деле, если ограничиться изменением (φ, ρ) в открытом прямоугольнике $\mathcal{O}_{\varphi_0} = \mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^2$, определенном неравенствами $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0 + \pi$, $-l < \rho < +l$, то формула (VI, 5; 4) определит гомеоморфизм Φ

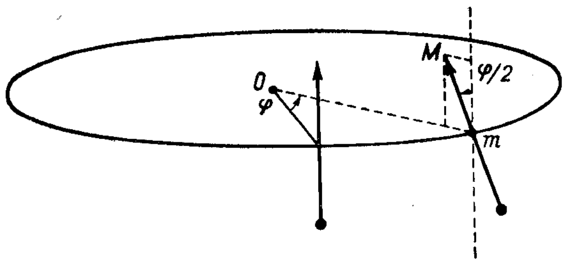

Рис. 2.

класса C^∞ прямоугольника $\mathcal{O}$ на некоторое открытое множество листа Мёбиуса. Для того чтобы доказать, что параметрическое представление Φ является истинным, достаточно показать, что *производное отображение отображения Φ в произвольной точке прямоугольника $\mathcal{O}$ имеет ранг 2.*

Дифференцирование формулы (VI, 4; 3) по ρ дает соотношение

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = -\sin\frac{\varphi}{2}\vec{u} + \cos\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3, \qquad \text{(VI, 5; 5)}$$

из которого видно, что вектор $\partial\vec{M}/\partial\rho$ не равен $\vec{0}$ (его составляющие $-\sin\varphi/2$ и $\cos\varphi/2$ по взаимно перпендикулярным осям одновременно в нуль не обращаются) и направлен вдоль подвижного отрезка. Дифференцирование по φ приводит к соотношению

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = \left(a - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\vec{u}}{d\varphi} - \frac{\rho}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\vec{u} - \frac{\rho}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3. \qquad \text{(VI, 5; 6)}$$

Из геометрических соображений видно, что полученный вектор $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ перпендикулярен предыдущему вектору (это получается сразу, если воспользоваться тем фактом, что $d\vec{u}/d\varphi$, $\vec{u}$ и $\vec{e}_3$ попарно ортогональны), а с другой стороны, он не равен $\vec{0}$, поскольку его составляющие по векторам $\vec{u}$ и $\vec{e}_3$ одновременно в нуль не обращаются.

Таким образом, векторы $\partial\vec{M}/\partial\rho$ и $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ действительно линейно независимы и параметрическое представление Φ является истинным. Лист Мёбиуса есть двумерная поверхность класса C^∞ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Теорема 23_2. *Лист Мёбиуса не ориентируем.*

Доказательство. Докажем, что не существует системы ориентаций $\mathcal{T}$ листа Мёбиуса V, *сужение которой на среднюю окружность* Γ непрерывно (т. е. непрерывно изменяется вдоль Γ). Для этого предположим, что такая система $\mathcal{T}$ существует, и покажем, что это приводит к противоречию.

Рассмотрим карту Φ, соответствующую открытому множеству $\mathcal{O}_{\varphi_0}$. Векторы $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ и $\partial\vec{M}/\partial\rho$ образуют систему двух непрерывных векторных полей на $\Phi(\mathcal{O})$. Эта система, согласно теореме 22, должна иметь постоянный знак относительно системы $\mathcal{T}$ ориентаций листа V, которая по предположению непрерывна на *связной* кривой $\Gamma\cap\Phi(\mathcal{O})$. Иначе говоря, базис $\partial\vec{M}/\partial\varphi$, $\partial\vec{M}/\partial\rho$ в точке $M(\varphi, 0)$ имеет постоянный знак, когда φ изменяется в интервале $\varphi_0-\pi<\varphi<\varphi_0+\pi$. Поскольку значение φ_0 произвольно, этот базис имеет постоянный знак *для всех вещественных* φ. Но это невозможно, так как $M(\varphi+2\pi, 0)=M(\varphi, 0)$, причем $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}(\varphi+2\pi, 0)=\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}(\varphi, 0)$ и $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\rho}(\varphi+2\pi, 0)=-\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\rho}(\varphi, 0)$, т. е. *два базиса, соответствующие* φ *и* $\varphi+2\pi$, *имеют противоположные знаки.* Мы пришли к противоречию. Этим объясняется следующий факт: когда пытаются ориентировать лист Мёбиуса, выбирают некоторую ориентацию в точке $(\varphi, 0)$, а затем продолжают ее по непрерывности, двигаясь вдоль окружности Γ, но после одного оборота (до $(\varphi+2\pi, 0)$) попадают в исходную точку с ориентацией, противоположной исходной. Это снова говорит о невозможности ориентировать лист Мёбиуса.

Лист Мёбиуса обладает другими интересными топологическими свойствами. Например, *если его разрезать вдоль средней окружности, то он не распадется на две части.* Это означает, что дополнение к средней окружности на V связно и даже линейно связно, что неверно для листа, склеенного обычным способом. Это свойство очевидно. В самом деле, легко найти путь, соединяющий в $V-\Gamma$ точку $M(\varphi_1, \rho_1)$ с точкой $M(\varphi_2, \rho_2)$, где ρ_1 и $\rho_2\neq 0$. Для этого достаточно непрерывно изменять φ от φ_1 к φ_2 и ρ от ρ_1 к ρ_2, не переходя через 0, если только ρ_1 и ρ_2 имеют один и тот же знак. Если же ρ_1 и ρ_2 имеют противоположные знаки, то надо будет непрерывно изменять φ

от φ_1 до $\varphi_2+2\pi$ и ρ от ρ_1 до $-\rho_2$, также не переходя через 0.

Упражнение. Непосредственно доказать предыдущие свойства листа Мёбиуса, определенного как абстрактное многообразие. Для этого надо рассмотреть прямоугольник $ABB'A'$ и совместить точки отрезка AB с точками отрезка $B'A'$, отождествляя точки M и M', расположенные на одинаковом расстоянии от A и B'. Нужно показать, что на фактормножестве легко устанавливается топологическая структура и даже структура абстрактного многообразия размерности 2 класса C^∞. С другой стороны, следует убедиться, что дополнение к OO^1 связно и что не существует системы ориентаций многообразия, которая непрерывно изменялась бы вдоль OO'.

Естественно, имеются многочисленные примеры ориентируемых многообразий. Так, ориентируема сфера аффинного евклидова пространства, ориентируемы как многообразия поверхности 2-го порядка — мы это докажем позже (следствие 2 теоремы 30). В качестве упражнения было бы полезным уже сейчас доказать эти факты.

Ориентируемость комплексных многообразий

Теорема 24. *Любое многообразие V класса C^1 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ ориентируемо и допускает каноническую ориентацию.*

Доказательство. Пусть n — комплексная размерность V и $2n$ — ее вещественная размерность. Касательное векторное пространство $\vec{T}(x; V)$ является векторным пространством над полем комплексных чисел комплексной размерности n и вещественной размерности $2n$. Согласно теореме 10, оно имеет каноническую ориентацию $\mathcal{T}(x)$. Значит, на многообразии V имеется система канонических ориентаций $\mathcal{T}$. Остается доказать ее непрерывность, и тогда она определит каноническую ориентацию V.

Точно так же, как и в замечании, следующем за теоремой 22, можно найти систему n векторных полей $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$, касательных к V, непрерывных в точке $a \in V$ и всюду линейно независимых относительно поля комплексных чисел. Тогда $\vec{U}_1, i\vec{U}_1, \vec{U}_2, i\vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n, i\vec{U}_n$ будут образовывать систему касательных векторных полей, непрерывных в точке a и всюду линейно независимых относительно поля вещественных чисел. Согласно определению канонической ориентации $\mathcal{T}(x)$ комплексного пространства $\vec{T}(x; V)$, ее класс всюду положителен.

Поэтому он имеет постоянный знак в окрестности точки a. Согласно теореме 22, система ориентаций непрерывна в точке a. Так как точка a произвольна, теорема доказана.

Трансверсальная ориентация многообразия Σ размерности $n=N-1$ в аффинном пространстве E размерности N над полем вещественных чисел

Рассмотрим в N-мерном аффинном пространстве E над полем вещественных чисел гиперповерхность Σ класса C^1, т. е. многообразие класса C^1 размерности $n=N-1$. У нас имеется интуитивное представление о том, что представляют собой «две стороны» этой гиперповерхности. Например, их можно было бы покрасить: одну красным, а другую желтым цветом (выбор цветов произвольный). Наша задача теперь состоит в том, чтобы придать точный смысл этому понятию.

Выберем сначала некоторую точку a поверхности Σ. Ее касательное пространство $\vec{T}(a; \Sigma)$ является некоторой гиперплоскостью в пространстве $\vec{E}$. Она делит пространство $\vec{E}$ на два открытых полупространства. Другими словами, в множестве векторов пространства $\vec{E}$ она определяет два класса векторов, трансверсальных к гиперповерхности Σ в точке a, т. е. не лежащих в касательном пространстве $\vec{T}(a; \Sigma)$.

[Если уравнение этого касательного пространства имеет вид $F(x)=0$, где F — некоторая линейная форма на $\vec{E}$, то два эти полупространства будут определяться соответственно неравенствами $F(x)>0$ и $F(x)<0$. Эти полупространства являются прообразами при непрерывном отображении F открытых множеств $\xi>0$ и $\xi<0$ прямой $\mathbb{R}$, а следовательно, они сами открыты в $\vec{E}$, а также в дополнении к гиперплоскости. Следовательно, это дополнение не связно. Каждое из двух полупространств открыто и связно и даже линейно связно. В самом деле, если две точки $\vec{Y}$ и $\vec{Z}$ принадлежат одному и тому же полупространству, то соединяющий их отрезок гиперплоскости не пересекает. Действительно, так как F линейно,

$$F(t\vec{Y}+(1-t)\vec{Z})=tF(\vec{Y})+(1-t)F(\vec{Z}), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (\mathrm{VI}, 5; 7)$$

т. е. F сохраняет постоянный знак на рассматриваемом отрезке.]

Говорят, что *гиперповерхность Σ трансверсально ориентирована в точке a или что зафиксированы соответствующие знаки двух сторон Σ в точке a*, если одно из двух полупространств, определенных гиперплоскостью $\vec{T}(a; \Sigma)$ в пространстве $\vec{E}$, снабжено знаком $+$, а другое знаком $-$. О векторе из положительного класса, трансверсальном в точке a, говорят, что «он пересекает векторное пространство, касательное к Σ в точке a» в положительном направлении или что он расположен на положительной стороне гиперповерхности Σ в точке a. Это означает также и то, что рассматривается факторпространство пространства $\vec{E}$ по гиперплоскости $\vec{T}(a;\ \Sigma)$. Это векторное факторпространство является *одномерным пространством над полем вещественных чисел*. Говорить о трансверсальной ориентации V в точке a все равно, что говорить об ориентации этого факторпространства в прежнем смысле.

Системой $\mathcal{N}$[1]) *трансверсальных ориентаций гиперповерхности* Σ называется такое отображение, которое каждой точке x из Σ ставит в соответствие некоторую трансверсальную ориентацию $\mathcal{N}(x)$ поверхности Σ в точке x. Это некоторая функция, определенная на Σ, которая в каждой точке x принимает значение в множестве, состоящем из двух элементов (которое зависит от точки x), а именно в множестве из двух возможных ориентаций векторного факторпространства $\vec{E}$ по $\vec{T}(x;\ \Sigma)$.

Выясним, как можно определить непрерывность системы трансверсальных ориентаций $\mathcal{N}$ многообразия Σ в точке $a \in \Sigma$.

Говорят, что поле X векторов пространства $\vec{E}$, определенных на Σ, трансверсально, если для каждой точки x из Σ вектор $\vec{X}(x)$ трансверсален в точке x к гиперповерхности Σ. Трансверсальные поля, непрерывные в точке $a \in \Sigma$, очевидно, существуют. В самом деле, существует окрестность точки a, в которой многообразие может быть записано в виде уравнения вида $x_1 = g(x_2,\ \ldots,\ x_N)$, где g принадлежит классу C^1, относительно подходящим образом выбранной системы координат. В этой окрестности постоянное векторное поле, равное вектору $\vec{e}_1$, не-непрерывно и трансверсально.

Определение. Говорят, что *система* $\mathcal{N}$ *трансверсальных ориентаций гиперповерхности* Σ *непрерывна в точке* $a \in \Sigma$, если, каково бы ни было определенное на Σ непрерывное в точке a и трансверсальное векторное поле $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$, знак век-

[1]) Французские слова tangentiel (касательная) и transversal (трансверсаль) оба начинаются с буквы t. Мы заменили трансверсаль на нормаль и через $\mathcal{T}$ обозначили систему обычных (тангенциальных или касательных) ориентаций, а через $\mathcal{N}$ — систему трансверсальных или нормальных ориентаций. Понятие нормали имеет смысл только тогда, когда в E введена евклидова структура. — *Прим. перев.*

тора $\vec{X}(x)$ относительно трансверсальной ориентации $\mathcal{N}(x)$ является непрерывной функцией x в точке a, т. е. постоянной в некоторой окрестности точки a.

Теорема 25. *Если на Σ заданы две системы непрерывных в точке a трансверсальных ориентаций, то их отношение (функция, определенная на Σ и всюду равная $+1$ или -1[1]) непрерывно в точке a, т. е. постоянно в некоторой окрестности этой точки. Обратно, если это отношение непрерывно и одна из двух систем трансверсальных ориентаций непрерывна, то непрерывной будет и вторая система.*

Теорема очевидна.

Следствие. *Если гиперповерхность Σ связна и две системы трансверсальных ориентаций V непрерывны, то они либо всюду совпадают на V, либо всюду на V противоположны.*

В самом деле, их отношение непрерывно на Σ и может принимать только значения $+1$ и -1. Поскольку V связно, это отношение постоянно.

Говорят, что *гиперповерхность Σ пространства E трансверсально ориентируема*, если она допускает непрерывную систему трансверсальных ориентаций. Гиперповерхность называется *трансверсально ориентированной*, если задана одна из таких систем.

Если гиперповерхность Σ связна и если она трансверсально ориентируема, то она допускает две возможные трансверсальные ориентации, противоположные друг другу. Трансверсальная ориентация Σ будет фиксированной, если задать трансверсальную ориентацию в одной точке гиперповерхности Σ[2]).

Трансверсальная ориентация с помощью непрерывных полей нормальных векторов

Приведем теперь некоторые теоремы относительно трансверсальной ориентации гиперповерхностей с помощью ориентации их нормалей в аффинном *евклидовом* пространстве.

Теорема 26. *Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 в аффинном евклидовом пространстве E. Для каждой точки a из Σ*

---

[1]) В некоторой точке V это отношение равно $+1$, если положительные классы трансверсальных векторов, определенных двумя системами трансверсальных ориентаций, совпадают в ней. В противном случае оно равно -1.

[2]) *Тангенциальная* ориентация многообразия, рассмотренная ранее, является внутренним свойством многообразия; многообразие может быть абстрактным. *Трансверсальная* ориентация относится к многообразию, лежащему в окружающем его пространстве. Можно определить две стороны кривой на плоскости, но это невозможно сделать ни для кривой, лежащей в $\mathbb{R}^3$, ни для абстрактной кривой.

в некоторой ее окрестности существует непрерывное поле единичных нормальных векторов.

Система трансверсальных ориентаций $\mathcal{N}$ поверхности Σ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда указанное поле имеет постоянный знак в некоторой окрестности точки a относительно трансверсальной ориентации $\mathcal{N}$.

Доказательство. В силу следствия теоремы 33_2 гл. III существует некоторая окрестность точки a, в которой гиперповерхность определяется нормальным уравнением $f(x)=0$, где f — некоторая функция класса C^1. Векторное поле, определенное векторами $\vec{v}(x)=\dfrac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)\|}$, является непрерывным полем единичных нормальных векторов. Если непрерывная система трансверсальных ориентаций $\mathcal{N}$ задана в окрестности точки a, то по определению такое непрерывное поле должно иметь постоянный знак относительно $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности точки a.

Обратно, предположим, что рассматриваемое поле имеет постоянный знак в некоторой окрестности точки a относительно некоторой системы трансверсальных ориентаций $\mathcal{N}$ поверхности Σ в окрестности точки a. Пусть X — произвольное непрерывное трансверсальное поле, определенное в некоторой окрестности точки a. Тогда скалярное произведение $(\vec{X}(x) \mid \vec{v}(x))$ непрерывно в точке a. Это произведение всюду $\neq 0$, а потому оно сохраняет постоянный знак в окрестности точки a, откуда следует, что в этой окрестности $\vec{X}(x)$ и $\vec{v}(x)$ имеют либо одинаковые, либо противоположные знаки относительно любой системы трансверсальных ориентаций, непрерывной или нет. Если рассматриваемая система ориентаций $\mathcal{N}$ такова, что поле $\vec{v}$ имеет постоянный знак в окрестности точки a, то то же самое будет верно для поля $\vec{X}$, а это по определению влечет за собой непрерывность системы $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций в точке a.

Следствие 1. *Для того чтобы система $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций гиперповерхности Σ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы поле $\vec{v}_+$ нормальных к Σ единичных векторов, положительных относительно системы $\mathcal{N}$, было непрерывным в точке a.*

Действительно, если поле единичных нормальных положительных относительно $\mathcal{N}$ векторов непрерывно в точке a, то мы имеем непрерывное поле единичных нормальных векторов постоянного знака, а значит, система ориентаций $\mathcal{N}$ непрерывна в точке a.

Обратно, предположим, что система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a. Мы уже рассматривали непрерывное поле $\vec{\nu}$ единичных нормальных векторов. Это поле сохраняет постоянный знак относительно $\mathscr{N}$ в некоторой окрестности точки a. Следовательно, само это поле или его противоположное является полем $\vec{\nu}_+$ единичных нормальных положительных векторов и непрерывно в точке a.

Следствие 2. *Для того чтобы гиперповерхность Σ евклидова пространства E была трансверсально ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы на Σ существовало непрерывное поле единичных нормальных векторов. Если поверхность Σ трансверсально ориентируема, то поле единичных нормальных векторов, положительных в трансверсальной ориентации, непрерывно.*

В самом деле, если существует непрерывное поле $\vec{\nu}$ единичных нормальных векторов и если в каждой точке x многообразия Σ мы зафиксируем трансверсальную ориентацию $\mathscr{N}(x)$ так, чтобы вектор $\vec{\nu}(x)$ был положителен в ориентации $\mathscr{N}(x)$, то из теоремы следует, что определенная таким образом система ориентаций $\mathscr{N}$ непрерывна, а следовательно, гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема.

Обратно, если гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема, то, согласно следствию 1, поле единичных нормальных положительных векторов непрерывно.

Следствие 3. *Каждая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства E, глобально определенная одним нормальным уравнением $f(x)=0$, где f принадлежит классу C^1 в E, трансверсально ориентируема. Каждая замкнутая гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства трансверсально ориентируема. Сферы евклидова пространства трансверсально ориентируемы.*

Если E снабжено некоторой евклидовой структурой, то при первом предположении существует непрерывное поле единичных нормальных векторов, а именно $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f / \| \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \|$. Теперь достаточно применить следствие 2.

Мы видели (замечание 2°) на стр. 808 т. I), что каждая замкнутая гиперповерхность класса C^∞ может быть определена одним нормальным уравнением. Поэтому она всегда трансверсально ориентируема. Можно доказать, что результат сохраняется в случае гиперповерхности класса C^1 [1]).

[1]) Доказательство очень сложно, и мы этот результат примем без доказательства.

Сферы евклидова пространства и поверхности второго порядка (без особых точек) имеют нормальное уравнение, а значит, трансверсально ориентируемы. Для сферы с уравнением $\|x-O\|^2-R^2=0$ поле, определенное предыдущим способом, имеет такой вид: $x \to \frac{\overrightarrow{x-O}}{R}$. Это «выходящее» нормальное поле, направленное по продолжению радиус-вектора с началом в центре. Говорят, что сферу можно трансверсально ориентировать так, что выходящие векторы будут положительными.

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{N}$ — система трансверсальных ориентаций на гиперповерхности Σ N-мерного аффинного пространства E. Если в некоторой окрестности точки a существует хотя бы одно непрерывное поле $\vec{X}$ трансверсальных векторов, имеющее постоянный знак в этой окрестности относительно $\mathscr{N}$, то система $\mathscr{N}$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зафиксируем на E некоторую евклидову структуру; например, выбрав некоторую систему координат, отождествим E с $\mathbb{R}^N$. Пусть $\vec{\nu}$ — непрерывное поле единичных нормальных векторов в окрестности a. Тогда скалярное произведение $(\vec{X}\,|\,\vec{\nu})$ непрерывно, и, следовательно, как мы видели в теореме 26, поле $\vec{X}$ и поле $\vec{\nu}$ всегда имеют либо один и тот же знак, либо противоположные знаки относительно произвольной, непрерывной или нет, системы трансверсальных ориентаций в окрестности точки a. Однако так как поле $\vec{X}$ имеет постоянный знак относительно $\mathscr{N}$ в окрестности a, то то же самое будет верно для поля $\vec{\nu}$, а из теоремы 26 будет следовать, что система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a.

Замечание. Когда в физике говорят о двух сторонах связной гиперповерхности Σ евклидова пространства, то считают, что Σ «утолщена», т. е. ей придают некоторый объем $\mathscr{U}$, ограниченный двумя гиперповерхностями Σ' и Σ'', «параллельными Σ» и полученными откладыванием на нормали к Σ в каждой ее точке a двух малых векторов $\pm\varepsilon\vec{\nu}(a)$ с одной и другой стороны от этой точки. Локально это не приводит к трудностям[1]). Однако есть ли у нас уверенность в том, что глобально эти поверхности Σ' и Σ'' «различны»? Они будут такими, т. е.

[1]) Необходимо также, чтобы точки $x \pm \varepsilon\vec{\nu}(x)$ действительно описывали некоторые многообразия. Если поверхность Σ компактна и принадлежит классу C^2, то это утверждение можно доказать.

граница $\mathcal{U}$ имеет две, а не одну связные составляющие тогда и только тогда, когда Σ трансверсально ориентируема. Если же это не так, то $a+\varepsilon\vec{\nu}(a)$ и $a-\varepsilon\vec{\nu}(a)$ могут быть соединены некоторым путем (не расположенным целиком в окрестности точки a).

Мы заменим подход, в котором участвует «утолщение» $\mathcal{U}$ и точки $a\pm\varepsilon\vec{\nu}(a)$, более удобным изучением поля нормалей $\vec{\nu}$.

Разбиение пространства на области с помощью гиперповерхностей

Дадим теперь другое определение двух сторон гиперповерхности E, обращаясь к более непосредственному представлению о разделении пространства гиперповерхностью на две части.

Предположим для определенности, что поверхность Σ является некоторой сферой евклидова пространства. Тогда она разделяет пространство E на две области, которые называются обычно, кстати говоря довольно неудачно, внутренностью и внешностью сферы. Можно сказать, что из двух сторон сферы одна «смотрит внутрь сферы», а другая «смотрит вне сферы». Однако совершенно очевидно, что такое описание в общем случае невозможно.

Предположим, например, что в плоскости $\mathbb{R}^2$ гиперповерхность Σ является открытым отрезком $]0, 1[$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Ясно, что эта гиперповерхность трансверсально ориентируема, однако Σ не делит пространства на две области, и метод, примененный для сфер, в этом случае непригоден.

Однако локально такой отрезок еще может разделить пространство на две области. Иначе говоря, если взять произвольную точку рассматриваемого отрезка $]0, 1[$ и маленькую окрестность этой точки, то эта окрестность, если она хорошо выбрана, делится отрезком на две области.

Определение. Говорят, что *связное топологическое пространство E делится множеством A на k «областей»* (k конечно или бесконечно), если дополнение к A состоит из k связных компонент. Эти связные компоненты называются *областями, определенными в E множеством A*.

В случаях, которые мы собираемся рассмотреть, пространство E будет локально связным (например, аффинным нормированным пространством, или открытым множеством аффинного нормированного пространства, или многообразием), а множество A замкнутым в E. Тогда $\complement A$ открыто в E и локально связно. В дополнении по общей топологии связных пространств (теоремы 36_6 и в следующих за ней замечаниях гл. II тома I) отмечалось, что каждая связная компонента $\complement A$ открыта в $\complement A$, а следовательно, и в E, поскольку дополнение $\complement A$ открыто в E. Таким образом, $\complement A$ является объединением k непустых открытых связных непересекающихся частей.

Теорема 27. *Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 в E. Тогда, какова бы ни была точка a из Σ, существует открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки a в E, обладающая следующими свойствами:*

1°) *Окрестность $\mathscr{V}$ гомеоморфна некоторому открытому шару.*

2°) *Пересечение $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто в окрестности $\mathscr{V}$ и делит ее на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Любая точка пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ является точкой прикосновения каждой из этих двух областей*[1]).

3°) *Гиперповерхность Σ имеет в $\mathscr{V}$ нормальное уравнение $f(x)=0$, и обе области определяются неравенствами $f(x)>0$ и $f(x)<0$.*

Доказательство. Согласно следствию 2_2 теоремы 32 гл. III, существует C^1-диффеоморфизм Φ открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^N$ на окрестность $\Phi(\mathcal{O})$ точки a в E, такую, что пересечение $\Sigma \cap \Phi(\mathcal{O})$ является образом при отображении Φ пересечения $\mathcal{O}$ с гиперповерхностью $u_1=0$. Если $\Phi(\alpha)=a$, то достаточно будет выбрать в $\mathcal{O}$ некоторый открытый шар с центром α и мы получим открытое множество из $\mathcal{O}$, разделенное гиперповерхностью $u_1=0$ на две области.

Если теперь в качестве $\mathscr{V}$ взять образ этого шара при отображении Φ, то, поскольку Φ является гомеоморфизмом, мы получим искомое открытое множество. Функция f является результатом преобразования функции $u \to u_1$ на $\mathbb{R}^N$ с помощью отображения Φ, т. е. $f(x)=$ первая координата отображения $\Phi^{-1}(x)$.

[1]) Это свойство показывает, что гиперповерхность имеет не очень сложный вид. Если рассмотреть замкнутое множество A, изображенное на рис. 3, то можно заметить, что оно делит плоскость на две области. Однако

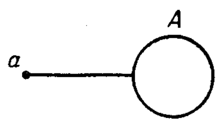

Рис. 3.

имеются такие его точки, как точка a, которые являются точками прикосновения только одной из этих областей.

Сформулируем теперь глобальную теорему, которая применима в случае замкнутой гиперповерхности Σ.

Теорема 28. *Каждая замкнутая непустая гиперповерхность Σ класса C^1 аффинного пространства E разделяет его по крайней мере на две области, и точно на две области, если гиперповерхность Σ связна.*

Доказательство. 1°) Доказательство того, что $\Omega = \complement\Sigma$ состоит *по крайней мере* из двух областей, довольно сложно, и потому мы его опускаем.

2°) Напротив, относительно легко убедиться в том, что если гиперповерхность Σ связна, то имеется не более двух областей. В самом деле, пусть $(\Omega_i)_{i \in I}$ — связные компоненты области $\Omega = \complement\Sigma$.

Докажем, что множество точек гиперповерхности Σ, являющихся точками прикосновения одного из Ω_i, одновременно открыто и замкнуто в Σ. Это множество, очевидно, замкнуто в Σ, поскольку оно является пересечением Σ с замкнутым множеством $\overline{\Omega}_i$ из E. Докажем, что оно открыто в Σ. В самом деле, пусть a — точка из Σ, являющаяся точкой прикосновения множества Ω_i. Пусть $\mathscr{V}$ — окрестность точки a в E, обладающая указанными в теореме 27 свойствами. Поскольку a является точкой прикосновения для Ω_i, то хотя бы одно из двух открытых множеств $\mathscr{V}_1$ или $\mathscr{V}_2$ пересекается с Ω_i. Если, например, $\mathscr{V}_1$ пересекается с Ω_i, то множество $\mathscr{V}_1 \cup \Omega_i$ является объединением двух связных подмножеств, имеющих непустое пересечение, а следовательно, согласно теореме 36_2 (стр. 92 т. I), связно. Однако Ω_i является связной компонентой Ω, а следовательно, не существует связной части множества Ω, строго большей, чем Ω_i. Значит, $\Omega_i \cup \mathscr{V}_1 = \Omega_i$ или $\mathscr{V}_1 \subset \Omega_i$. В этом случае все точки, близкие к a (точки пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}_i$), являются точками прикосновения окрестности $\mathscr{V}_1$, а значит, и Ω_i.

Поскольку гиперповерхность Σ по предположению связна, то каждая точка Σ является точкой прикосновения множества Ω_i или же в Σ нет ни одной точки прикосновения этого множества. Однако второй случай не может иметь места. В самом деле, пусть m_i — некоторая точка Ω_i. Известно (стр. 83 т. I), что в Σ имеется точка a_i, расстояние от которой до m_i минимально. Отрезок $]a_i, m_i]$ и множество Ω_i связны и имеют непустое пересечение, поскольку оба они содержат точку m_i. Следовательно, их объединение связно, и так как Ω_i является связной компонентой Ω, то $]a_i, m_i] \subset \Omega_i$. Но тогда $a_i \in \Sigma$ является точкой прикосновения отрезка $]a_i, m_i]$, а значит, и множества Ω_i. *Отсюда следует, что каждая точка гиперповерхности Σ является точкой прикосновения множества Ω_i.*

Однако точка из Σ может быть точкой прикосновения не более чем двух из этих множеств. В самом деле, возьмем снова точку $a \in \Sigma$ и уже рассмотренное открытое множество $\mathscr{V}$, которое делится множеством $\Sigma \cap \mathscr{V}$ на два открытых множества $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Мы видели, что если a является точкой прикосновения Ω_i, то хотя бы одно из открытых множеств $\mathscr{V}_1$ или $\mathscr{V}_2$ целиком лежит в Ω_i, чем и доказывается наше утверждение.

Таким образом, мы показали, что точка $a \in \Sigma$ является точкой прикосновения каждого множества Ω_i и не может быть точкой прикосновения более чем двух из этих множеств. Отсюда вытекает, что Ω состоит не более чем из двух областей. Теорема доказана.

Замечания. 1°) Теорему можно распространить на недифференцируемые гиперповерхности, но эта задача еще сложнее.

Например, множество аффинного N-мерного пространства E, гомеоморфное сфере в $\mathbb{R}^N$, *без условия дифференцируемости*, делит E на две области. [При $N=2$ это утверждение является теоремой Жордана: «Замкнутая простая (без двойных точек) кривая, т. е. множество, гомеоморфное окружности, делит плоскость на две области». При $N=3$ — это теорема Лебега.]

2°) Если гиперповерхность Σ не замкнута, то ее дополнение в E может быть связным. Так будет, например, если Σ является открытым отрезком $]0, 1[$ вещественной оси в $\mathbb{R}^2$.

3°) Если связная поверхность Σ не компактна (например, если это гиперплоскость), то ни одна из областей, определенных поверхностью Σ, не является «привилегированной» по сравнению с другой.

Если же связная гиперповерхность Σ компактна в E, то она ограничена. Пусть B — замкнутый шар, содержащий Σ. Дополнение к B является открытым связным множеством в E, не имеющим общих точек с Σ, и следовательно, целиком лежит в одной из двух областей Ω_1 и Ω_2, определенных в E гиперповерхностью Σ. Пусть это будет область Ω_2. Она не зависит от выбора шара B. В самом деле, если B' — другой замкнутый шар, содержащий Σ, и если $\complement B'$ содержится в Ω_1, то мы получили бы, что для замкнутого шара B'', содержащего одновременно B и B', дополнение $\complement B''$ будет одновременно лежать в Ω_1 и Ω_2, что невозможно.

Область Ω_2 называется *областью, содержащей бесконечно удаленную точку*, или *связной компонентой бесконечности в* $\complement\Sigma$, или *внешней областью, определяемой поверхностью* Σ, а область Ω_1 — *внутренней областью*. Так как Ω_1 содержится в каждом замкнутом шаре, содержащем Σ, то область Ω_1 ограничена.

Трансверсальная ориентация гиперповерхности и разбиение пространства на области

С помощью двух областей, определенных поверхностью Σ в пространстве E, можно определить трансверсальную ориентацию нового типа.

Определение. Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства E, и пусть $\mathscr{V}$ — такое открытое множество в E, что $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто и делит $\mathscr{V}$ на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Пусть a — точка Σ, являющаяся одновременно точкой прикосновения для $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Вектор $\vec{X}$ пространства $\vec{E}$, трансверсальный к Σ в точке a, называется *входящим в область* $\mathscr{V}_1$, если он является вектором «начальной скорости» для некоторой траектории M: $t \to M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $M(0) = a$, класса C^1, целиком лежащей при $t > 0$ в области $\mathscr{V}_1$. (Напомним, что вектором скорости в точке t траектории M класса C^1 является производный вектор $d\vec{M}/dt$. Здесь предполагается, что $M(0) = a$ и $d\vec{M}/dt(0) = \vec{X}$.) Вектором, *выходящим из области* $\mathscr{V}_1$, называют по определению вектор, входящий в область $\mathscr{V}_2$. (Вовсе *не очевидно*, что трансверсальный вектор не может быть одновременно входящим и выходящим или ни тем, ни другим! Мы в этом убедимся позже в теореме 29, п. 4°).)

Дадим другое определение входящих и выходящих векторов.

Теорема 29. *Пусть Σ — некоторая гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства E. Пусть a — некоторая точка Σ и $\mathscr{V}$ — открытая окрестность точки a в E, обладающая свойствами, указанными в теореме 27. Тогда:*

1°) *Для того чтобы трансверсальный вектор $\vec{X}$ в точке $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ был входящим в $\mathscr{V}_1$, необходимо и достаточно, чтобы для достаточно малого $t > 0$ точка $x + t\vec{X}$ лежала в $\mathscr{V}_1$.*

2°) *Если $f(x) = 0$ — нормальное уравнение гиперповерхности Σ в $\mathscr{V}$, такое, что область $\mathscr{V}_1$ определяется неравенством $f(x) > 0$, то вектор $\vec{X}$ будет трансверсальным в точке $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ и входящим в $\mathscr{V}_1$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$.*

3°) *Если вектор $\vec{X}$ является трансверсальным в x и входящим в $\mathscr{V}_1$, то для каждой вещественной функции φ класса C^1, определенной в $\mathscr{V}$, равной нулю на Σ и $\geqslant$ на $\mathscr{V}_1$, имеет место неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Обратно, если вектор $\vec{X}$ трансверсален и если для некоторой функции φ этого типа имеет место неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} > 0$, то $\vec{X}$ является входящим в $\mathscr{V}_1$ в точке x.*

4°) *В каждой точке $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$, и множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_2$, образуют два класса трансверсальных векторов, определенных гиперплоскостью $\vec{T}(x; \Sigma)$ в E. Если класс векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$, назвать положительным, то тем самым на $\Sigma \cap \mathscr{V}$ будет определена непрерывная система трансверсальных ориентаций.*

Доказательство. 1°) а) Пусть $\vec{X}$ — трансверсальный вектор к Σ в точке x, такой, что при некотором $t > 0$ точка $x + t\vec{X}$ лежит в $\mathscr{V}_1$. Тогда мы имеем траекторию $x + t\vec{X}$, для которой вектор $\vec{X}$ является вектором начальной скорости, так что, согласно определению, $\vec{X}$ является входящим в $\mathscr{V}_1$. Обратное утверждение будет доказано несколько позже.

3°) а) Докажем, что если вектор $\vec{X}$ является трансверсальным к Σ в x и входящим в $\mathscr{V}_1$, а функция φ класса C^1 равна нулю на Σ и $\geqslant 0$ на $\mathscr{V}_1$, то $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Пусть M — некоторая траектория в $\mathscr{V}_1$, для которой $\vec{X}$ является вектором начальной скорости. Тогда функция $\varphi \circ M$ неотрицательна для $t \geqslant 0$, равна нулю при $t = 0$ и принадлежит классу C^1. Ее производная при $t = 0$, очевидно, $\geqslant 0$. Согласно теореме о производной сложной функции, это приводит к неравенству $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$.

2°) а) Функция f является частным случаем функции φ. Поэтому если вектор $\vec{X}$ трансверсален и входит в $\mathscr{V}_1$ в точке x, то $f'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Но $f'(x) \cdot \vec{X} = \vec{0}$ является уравнением касательного векторного подпространства. Вектор $\vec{X}$, будучи трансверсальным, не лежит в этом подпространстве, а следовательно, $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$.

2°) b) Обратно, пусть $\vec{X}$ — такой вектор, что $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Тогда функция $t \to f(x + t\vec{X})$ принадлежит классу C^1 и равна нулю при $t = 0$, а ее производная $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$ при $t = 0$. Следовательно, при достаточно малом $t > 0$ эта функция > 0. Отсюда вытекает, что точка $x + t\vec{X}$ при достаточно малом $t > 0$ лежит в $\mathscr{V}_1$, а значит, согласно 1°) а), вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$. Тем самым утверждение 2°) полностью доказано.

4°) Если заменить $\mathscr{V}_1$ на $\mathscr{V}_2$ и f на $-f$, то, согласно 2°), каждый трансверсальный вектор входит или в $\mathscr{V}_1$, или в $\mathscr{V}_2$: $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$ (соответственно в $\mathscr{V}_2$) в точке x, если $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$

(соответственно <0). Множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$, и множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_2$, являются двумя полупространствами, определенными гиперплоскостью $\vec{T}(x; \Sigma)$, уравнение которой имеет вид $f'(x) \cdot \vec{X} = \vec{0}$.

Назовем положительным класс трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$. Тем самым будет определена некоторая система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций. Если $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$ является непрерывным *полем* трансверсальных векторов, то $x \to f'(x) \cdot \vec{X}(x$ будет вещественной непрерывной функцией на $\Sigma \cap \mathscr{V}$, всюду $\neq 0$, а значит, сохраняющей знак в окрестности каждой точки Это говорит о том, что вектор $\vec{X}$ сохраняет постоянный знак относительно $\mathscr{N}$. Значит, система трансверсальных ориентаций $\mathscr{N}$ непрерывна, и тем самым доказано утверждение 4°).

1°) b) Если вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$ в точке x, то, согласно 2°) a), $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Следовательно, согласно доказанному в 2°) b), точка $x + t\vec{X}$ для достаточно малого $t > 0$ лежит в $\mathscr{V}_1$. Этим заканчивается доказательство утверждения 1°).

3°) b) Пусть φ — вещественная функция класса C^1, равная нулю на $\Sigma \cap \mathscr{V}$, $\geqslant 0$ в $\mathscr{V}_1$ и такая, что $\varphi'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Вектор $\vec{X}$ предполагается трансверсальным [1]). Следовательно, согласно 4°), вектор $\vec{X}$ или вектор $-\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$. Во втором случае, согласно 3°) a), выполнялось бы неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \leqslant 0$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$, чем и заканчивается доказательство утверждения 3°) и всей теоремы.

Замечания. 1°) Утверждения 1°), 3°), 4°) теоремы сохраняются в том случае, когда область $\mathscr{V}$ является *произвольным* открытым множеством пространства E, в котором пересечение $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто и делит $\mathscr{V}$ на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$, для каждой из которых все точки пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ являются точками прикосновения. Если существует нормальное уравнение $f(x) = 0$ пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ в $\mathscr{V}$, то справедливым будет и утверждение 2°).

Предположим, что пространство E евклидово и что поверхность Σ является сферой с нормальным уравнением $\| x - O \|^2 - R^2 = 0$. «Внутренней областью» множества $E - \Sigma$ принято называть его часть, содержащую центр сферы O, а «внешней областью» — ту часть, которая этим свойством не обладает.

[1]) Легко видеть, что в силу условия $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \neq 0$ вектор $\vec{X}$ обязательно является трансверсальным.

Неравенства $\|\overrightarrow{x-O}\|^2 < R^2$ и $\|\overrightarrow{x-O}\|^2 > R^2$ являются соответственно уравнениями этих частей. Входящими (соответственно выходящими) векторами в точке сферы называют входящие (соответственно выходящие) векторы относительно внутренней области. Трансверсальной канонической ориентацией сферы называют ту ориентацию, для которой выходящие векторы положительны.

2°) Если Σ — замкнутая связная гиперповерхность пространства E, то она делит это пространство на две области Ω_1 и Ω_2 (теорема 28). Следовательно, гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема и можно будет, например, назвать положительными трансверсальные векторы, входящие в Ω_1. Мы снова получаем следствие 3 теоремы 26. Если гиперповерхность Σ компактна, то из замечания 3°) на стр. 171 вытекает, что Ω_1 и Ω_2 играют неодинаковую роль: Ω_1 является внутренней (или ограниченной) областью, а Ω_2—внешней областью (или областью бесконечности). Учитывая замечание 1°), *можно определить «привилегированную» трансверсальную ориентацию гиперповерхности* Σ, в которой входящие в Ω_2 или выходящие из Ω_1 векторы, называемые просто выходящими векторами, положительны.

Связь между трансверсальной и касательной ориентациями

Теорема 30. *Для того чтобы гиперповерхность Σ аффинного пространства была ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была трансверсально ориентируемой. Если, кроме того, пространство E ориентировано, то оно определяет каноническое соответствие между обычными, или касательными, ориентациями гиперповерхности Σ и ее трансверсальными ориентациями.*

Доказательство. Предположим, что пространство E ориентировано и задана система $\mathscr{T}$ касательных ориентаций гиперповерхности Σ.

Построим систему $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций следующим образом. Будем говорить, что трансверсальный в x вектор $\vec{X}$ положителен (соответственно отрицателен), если для некоторого *положительного в ориентации* $\mathscr{T}(x)$ *базиса* $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ *гиперплоскости* $\vec{T}(x;\Sigma)$ базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_n$ пространства $\vec{E}$ положителен (соответственно отрицателен) в смысле ориентации пространства E. Если это свойство выполняется для *некоторого базиса* гиперплоскости $\vec{T}(x;\Sigma)$, то оно выполняется и *для любого другого положительного базиса.*

В самом деле, если U: $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — некоторый базис пространства $\vec{T}(x; \Sigma)$ и U': $\vec{U}'_1, \vec{U}'_2, \ldots, \vec{U}'_{N-1}$ — другой его базис, то определитель U' относительно U равен определителю базиса $\vec{X}, \vec{U}'_1, \ldots, \vec{U}'_{N-1}$ пространства $\vec{E}$ относительно базиса $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$. Следовательно, наше определение не зависит от выбранного положительного базиса в $\vec{T}(x; \Sigma)$.

Определенная нами ориентация является трансверсальной ориентацией Σ в точке x. В самом деле, если $\vec{Y}$ — другой произвольный трансверсальный вектор в точке x, то мы можем записать, что $\vec{Y} = \lambda\vec{X} + \lambda_1\vec{U}_1 + \ldots + \lambda_{N-1}\vec{U}_{N-1}$. При этом в зависимости от того, будет ли $\lambda > 0$ или <0, векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ лежат или нет в одном и том же подпространстве, определенном в $\vec{E}$ гиперплоскостью $\vec{T}(x; \Sigma)$. Здесь λ — это определитель системы векторов $\vec{Y}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ относительно базиса $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$. Следовательно, все векторы, принадлежащие одному из полупространств, имеют в силу предыдущего определения один и тот же знак, а два вектора, принадлежащие различным полупространствам, имеют противоположные знаки. Это означает, что мы определили некоторую трансверсальную ориентацию гиперповерхности Σ в точке x и, следовательно, некоторую систему $\mathscr{N}$ ее трансверсальных ориентаций.

Обратно, если мы будем исходить из системы $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций гиперповерхности Σ, то сможем сказать, что некоторый базис $\vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$ положителен, если базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ пространства $\vec{E}$ положителен относительно ориентации $\vec{E}$, когда $\vec{X}$ — положительный трансверсальный вектор относительно $\mathscr{N}(x)$.

Рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что это определение не зависит от выбора вектора $\vec{X}$, положительного в ориентации $\mathscr{N}(x)$, и что мы тем самым определили касательную ориентацию Σ в точке x, т. е. систему $\mathscr{T}$ касательных ориентаций. Кроме того, соответствия $\mathscr{T} \to \mathscr{N}$ и $\mathscr{N} \to \mathscr{T}$ взаимно обратны друг другу. Если вектор $\vec{X}$ трансверсален в точке x к гиперповерхности Σ и $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — базис гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$, то знак системы $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ в ориентации E равен произведению знака вектора $\vec{X}$ в $\mathscr{N}(x)$ на знак системы $\vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ в $\mathscr{T}(x)$.

Остается показать, что если система $\mathcal{T}$ касательных ориентаций непрерывна, то система $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций также непрерывна, и обратно.

В некоторой окрестности точки a многообразия Σ можно найти систему $N-1$ касательных к многообразию векторных полей, которые являются непрерывными и линейно независимыми в каждой точке этого многообразия. Обозначим их так: $x \to \vec{U}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Можно также найти непрерывное поле трансверсальных векторов $x \to \vec{X}(x)$. Система векторов $\vec{X}(x), \vec{U}_1(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$ является системой N линейно независимых и непрерывных в точке a векторных полей. Отсюда следует, что ее знак относительно ориентации $\vec{E}$ постоянен в окрестности точки a, и, изменяя при необходимости поле $\vec{X}$, можно считать, что этот знак в окрестности точки a всюду положителен относительно выбранной ориентации в $\vec{E}$. Из всего сказанного вытекает, что знак системы из $N-1$ векторов $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2,(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$ относительно касательной ориентации $\mathcal{T}(x)$ совпадает со знаком вектора $\vec{X}(x)$ относительно соответствующей трансверсальной ориентации $\mathcal{N}(x)$. Согласно теореме 22, первый знак постоянен в окрестности точки a тогда и только тогда, когда система $\mathcal{T}$ касательных ориентаций непрерывна в точке a, а, согласно следствию 4 теоремы 26, второй знак постоянен в окрестности точки a тогда и только тогда, когда система $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a. Следовательно, ориентация $\mathcal{T}$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна ориентация $\mathcal{N}$. Тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1°) Если в качестве гиперповерхности Σ мы возьмем гиперплоскость $x_1 = 0$, то ориентация этого многообразия, в которой система векторов $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ положительна, находится в соответствии с той трансверсальной ориентацией, в которой положительно векторное поле $\vec{e}_1$.

Если в качестве гиперповерхности взять гиперплоскость $x_k = 0$, то ориентация, в которой положительна система векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_N$, находится в соответствии с трансверсальной ориентацией, в которой положительно векторное поле $(-1)^{k-1}\vec{e}_k$.

2°) Пусть $U = \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — базис гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$. Если $\vec{E}$ является ориентированным евклидовым пространством, то можно определить векторное произведение $\vec{X}=[\vec{U}_1\wedge\vec{U}_2\wedge\ldots\wedge\vec{U}_{N-1}]$, нормальное к Σ в точке x (теорема 11). С другой стороны, базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ положителен в ориентации пространства $\vec{E}$. Следовательно, *базис U положителен в касательной ориентации тогда и только тогда, когда вектор $\vec{X}$ положителен в соответствующей трансверсальной ориентации.*

Пусть Φ — карта многообразия, образ которой покрывает точку a, где $\Phi(\alpha)=a$, и $\mathscr{T}$ — некоторая система ориентаций гиперповерхности Σ. Система векторов $\dfrac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_i}(\alpha)$, $i=1, 2, \ldots, N-1$, является образом при отображении $\Phi'(\alpha)$ системы векторов канонического базиса пространства $\mathbb{R}^{N-1}$. Следовательно, если θ — функция, соответствующая системе $\mathscr{T}$ касательных ориентаций (стр. 151), то знак этой системы векторов в $\vec{T}(a; V)$ равен $\theta(\alpha; \Phi)$.

Значит, векторное произведение этих векторов имеет такой же знак относительно соответствующей трансверсальной ориентации. Другими словами, трансверсальной ориентацией $\mathscr{N}$, соответствующей данной касательной ориентации $\mathscr{T}$, будет та, в которой вектор

$$\theta(\alpha; \Phi)\left[\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_1}(\alpha)\wedge\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_2}(\alpha)\wedge\ldots\wedge\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_{N-1}}(\alpha)\right] \qquad (\mathrm{VI}, 5; 8)$$

является нормальным положительным вектором для любой карты Φ и любой точки α.

3°) Возьмем частный случай, когда размерность $N=1$, и пусть c — некоторая точка пространства E, которую мы будем рассматривать как гиперповерхность. В этом случае соответствие между касательными и трансверсальными ориентациями устанавливается *по определению* следующим образом.

Ориентировать точку c касательно — это значит приписать ей знак $+$ или $-$. Ориентировать ее трансверсально — это значит приписать знак $+$ или $-$ двум полупрямым, определяемым началом в точке c, т. е. значит ориентировать $\vec{E}$. Если $\vec{E}$ снабжено некоторой ориентацией, то мы будем устанавливать соответствие между касательной и трансверсальной ориентациями точки c, приписывая этой точке знак $+$, если ее трансверсальная ориентация совпадает с заданной ориентацией $\vec{E}$.

Следствие 1. *Лист Мёбиуса не ориентируем трансверсально в $\mathbb{R}^3$.*

В самом деле, мы видели, что он не ориентируем (теорема 23_2). Зафиксировать «две стороны» этой поверхности невозможно. *Лист Мёбиуса является односторонней гиперповерхностью пространства* $\mathbb{R}^3$. Например, возьмем точку $\varphi=0$, $\rho=0$ и назовем положительной стороной в этой точке ту сторону, которая обращена к началу координат. Затем будем изменять непрерывно параметр φ и снова вернемся к началу координат со значением параметра $\varphi=2\pi$ и $\rho=0$. В результате положительной стороной окажется та, которая обращена в противоположную сторону от начала координат. В заданной точке поверхность действительно имеет две стороны, но глобально это утверждение неверно, поскольку можно, непрерывно перемещаясь по поверхности, перейти с одной стороны в некоторой точке к другой стороне в той же самой точке[1]).

Следствие 2. *Каждая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства, полностью определенная нормальным уравнением $f(x)=0$, ориентируема. Каждая замкнутая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства ориентируема. Сферы аффинного евклидова конечномерного пространства ориентируемы.*

Для доказательства достаточно применить следствие 3 теоремы 26[2]). В частности, если гиперповерхность Σ является компактной гиперповерхностью класса C^1, то она допускает привилегированную трансверсальную ориентацию (в которой, согласно замечанию 2°) на стр. 175, выходящие векторы положительны) и, следовательно, привилегированную касательную ориентацию, если пространство $\vec{E}$ ориентировано. Учитывая данное в доказательстве теоремы определение соответствия между трансверсальными и касательными ориентациями, можно видеть, что система $N-1$ линейно независимых векторов, касательных к Σ в точке x, положительна в этой касательной ориентации, если при подстановке перед этой системой

---

[1]) Говорят, что один бородач, не зная, куда класть свою бороду ночью — под одеяло или на него, купил себе последнее в виде листа Мёбиуса, имеющего только одну сторону. Однако ему не удалось выйти из создавшегося положения, поскольку его борода покрыла одеяло не полностью, а локально. В некоторой окрестности каждой точки всякая гиперповерхность трансверсально ориентируема и всегда имеет две стороны!

[2]) Лист Мёбиуса, определенный соотношениями (VI, 5; 4), *не замкнут* (взято *строгое* неравенство $-l<\rho<l$). Если бы было взято расширенное неравенство $-l\leqslant\rho\leqslant l$, то тогда мы бы не получили многообразия, поскольку имелся бы «край». Однако естественно, что в аффинном N-мерном пространстве E могут существовать замкнутые и даже компактные *неориентируемые* многообразия размерности $n<N-1$ (которые, следовательно, не являются гиперповерхностями).

векторов «выходящего» вектора получается положительный базис в ориентации пространства $\vec{E}$.

Если, в частности, положить $N=2$, то это снова дает обычную «прямую» ориентацию некоторой компактной кривой класса C^1 в ориентированной плоскости и «прямую» ориентацию тригонометрической окружности в $\mathbb{R}^2$.

Замечания. 1) Подводя итог результатам теоремы 28, следствия 3 теоремы 26 и следствия 2 теоремы 30, мы можем утверждать следующее:

Связная замкнутая гиперповерхность Σ класса C^1 конечномерного аффинного пространства E касательно и трансверсально ориентируема и делит это пространство на две области. Если гиперповерхность Σ компактна, то эти две области не равноценны (одна из них ограничена). Существуют трансверсальная каноническая ориентация (выходящие векторы положительны) и касательная каноническая ориентация, если $\vec{E}$ ориентировано.

2°) *Задать касательную ориентацию на кривой класса C^1 — значит задать направление обхода этой кривой.* В качестве положительного направления обхода выбирается такой обход, при котором вектор скорости в каждой точке, если он $\neq 0$, является положительным в смысле ориентации в этой точке.

3°) *Ориентировать двумерное многообразие V — значит указать направление обхода компактных кривых в окрестности каждой точки.* В самом деле, если, например, окружающее пространство E наделено евклидовой структурой, то ортогональная проекция многообразия на его касательное подпространство в точке a, суженная на достаточно малую окрестность $\mathscr{V}$ точки a, является C^1-диффеоморфизмом. Следовательно, направление обхода компактных кривых многообразия, содержащихся в окрестности $\mathscr{V}$ точки a, эквивалентно направлению обхода их проекций в касательной плоскости к многообразию в точке a. В силу имеющейся ориентации многообразия V касательная плоскость будет также снабжена ориентацией, а мы только что видели, что ориентация плоскости ориентирует ее компактные кривые, т. е. определяет на них некоторое направление обхода [1]).

4°) Пусть V есть n-мерное многообразие класса C^1 и Σ — гиперповерхность, т. е. некоторое подмногообразие V размерности $n-1$ класса C^1. Тогда сохраняются все *локальные* результаты,

---

[1]) *Этот результат носит чисто локальный характер*: для каждой точки $a \in V$ можно найти такую окрестность $\mathscr{V}$ этой точки, что ориентация V определяет направление обхода компактных *непрерывных* кривых в $\mathscr{V}$. Однако если сфера в $\mathbb{R}^3$ ориентируема, то это не даст привилегированного направления обхода на «больших кругах» этой сферы.

доказанные начиная с теоремы 25. Если многообразие V ориентируемо, то многообразие Σ касательно ориентируемо тогда и только тогда, когда это многообразие трансверсально ориентируемо. Если многообразие V ориентируемо, то существует взаимно однозначное соответствие между касательными ориентациями многообразия Σ и его трансверсальными ориентациями.

Однако глобальные теоремы относительно ориентации или о разделении на области не имеют места. Если многообразие Σ замкнуто в V, то оно может иметь связное дополнение. Например, параллели или меридианы на торе являются компактными гиперповерхностями, не разделяющими тор на несколько областей. То же самое верно и для средней окружности листа Мёбиуса (см. стр. 160). В дополнении V к началу координат в $\mathbb{R}^2$ полупрямая, выходящая из начала координат, является замкнутой гиперповерхностью, не делящей V на несколько областей. В каждом из этих случаев гиперповерхность не может определяться единственным нормальным уравнением $f(x)=0$ (в противном случае, как это было показано при доказательстве теоремы 28, она делила бы V по крайней мере на две области). Средняя окружность листа Мёбиуса касательно ориентируема, но не ориентируема трансверсально. Приведенные ранее глобальные теоремы носят частный характер и связаны с замкнутыми гиперповерхностями *аффинного пространства.* Все эти свойства относятся к области *алгебраической топологии.*

Является ли наша реальная вселенная ориентируемым многообразием? При изучении этого вопроса мы оставим в стороне точку зрения теории относительности, которая обязывает нас рассматривать четырехмерную вселенную и не вносит существенных усложнений в то, что касается ориентации.

Примем в качестве модели вселенной, в которой мы живем, некоторое трехмерное многообразие класса C^∞ и попытаемся выяснить, будет ли оно ориентируемым, и можно ли, учитывая некоторые физические законы, снабдить его канонической ориентацией. Предположим для определенности, что это многообразие не ориентируемо. Это означает, что существуют некоторые пути, аналогичные средней окружности листа Мёбиуса, такие, что, отправляясь от некоторой исходной ориентации в точке, где мы начинаем движение, и продолжая непрерывно эту ориентацию вдоль таких путей, можно вернуться в исходную точку с противоположной ориентацией [1]. Человек, совершивший такое путешествие, вернувшись на Землю, нашел бы, что его

[1]) В самом деле, можно доказать, что факты, связанные с листом Мёбиуса, являются общими: если некоторое многообразие не ориентируемо, то существуют «пути дезориентации» — компактные кривые, вдоль которых не существует никакой непрерывной системы ориентаций многообразия.

сердце расположено справа, а печень — слева. Если бы он захватил с собой книги на французском языке, то по возвращении оказалось бы, что они напечатаны справа налево, а если бы он взял с собой виннокаменную правовращающую кислоту, то вернулся бы с виннокаменной левовращающей кислотой[1]). *И все это, естественно, при отсутствии каких-либо изменений в каждой точке пути.* Впрочем, этот человек считал бы себя абсолютно нормальным и неизменившимся, а обращенными оказались бы для него все явления, с которыми он встретился на Земле. Для того чтобы вернуть все к прежнему состоянию, ему достаточно было бы совершить такое путешествие еще раз.

Этот простой пример показывает, как шатки те основания, на которых покоятся все понятия ориентации, даваемые в элементарных учебниках по физике и математике.

Амперовское правило буравчика *в его обычной формулировке*, справедливое в трехмерном *ориентированном* многообразии, строго говоря, не имеет смысла, если не выбрана правая или левая ориентация пространства. Рассматривая это правило более внимательно с этой точки зрения, можно заметить, что в определении магнитного поля имеется некоторая неточность. Человек, о котором мы говорили выше, совершивший длительное путешествие для того, чтобы получить другую ориентацию, вернулся бы *с обращенным компасом*, северный полюс которого был бы обозначен буквой S, а южный полюс — буквой N (определение этих полюсов связано с Землей, а ее он с собой в дорогу не брал). Если бы этот человек взял с собой провод, по которому проходит электрический ток, и компас, то для него за время его дальнего странствия ничего бы не изменилось. Но мы бы при его возвращении заметили, что его компас ориентирован в направлении, противоположном амперовскому правилу буравчика. Однако это было бы просто видимостью, поскольку обозначения N и S полюсов его компаса были бы неверными. Мы видим, что магнитное поле не является настоящим вектором. Это — аксиальный вектор, аналогичный векторному произведению. Отсюда следует, что наш путешественник, пройдя по пути, приводящему к изменению ориентации, не нашел бы даже изменений в электромагнитных законах! Эти законы не требуют, чтобы физическое пространство было ориентируемым[2]).

---

[1]) «Способ» непромышленного изготовления виннокаменной левовращающей кислоты.

[2]) В теории относительности разделять электрическое и магнитное поля не разрешается. Имеется некоторое «электромагнитное поле», антисимметричный тензор 2-го порядка (имеющий, следовательно, шесть основных составляющих), который является по сути дела некоторой *дифференциальной формой 2-й степени* в четырехмерной пространственно-временной вселенной. В галилеевской системе координат этой форме можно поставить в соответ-

Однако последние открытия в физике, относящиеся к радиоактивному β-распаду, как будто указывают на то, что пространство ориентируемо.

Рассмотрим атомное ядро, имеющее спин, т. е. имеющее заданное собственное вращение. Его вектор углового момента является векторным произведением — некоторым аксиальным вектором, т. е. вектором, зависящим от ориентации. Предположим, что это ядро радиоактивно и что опытным путем доказано, что при β-распаде имеется бóльшая вероятность испускания электрона в одно из двух полупространств, определяемых плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения. Это явление не зависит от ориентации пространства. Теперь можно определить привилегированную ориентацию пространства, например такую, при которой угловой момент ядра будет лежать в том полупространстве, вероятность испускания в которое меньше. (Это та ориентация, которой на Земле соответствует право-левая ориентация человеческого тела. Она была экспериментально установлена физиком Ву в опыте с кобальтом-60, проведенном в 1956 г. и подтвердившем теоретические соображения Янга и Ли.)

Тем не менее, это физическое явление не достаточно убедительно, поскольку ничто не доказывает, что в очень удаленных от нас областях вселенной нет кобальта-60, «симметричного» по отношению к нашему, для которого имели бы место противоположные явления. Добавим ко всему этому, что наши представления о всей вселенной, быть может, так далеки от действительности, что вопрос об ориентации не имеет никакого смысла.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ НА ОРИЕНТИРОВАННОМ МНОГООБРАЗИИ

Мера Радона, определенная непрерывной дифференциальной формой $\vec{\omega}$ степени n на ориентированном n-мерном многообразии класса C^1

Пусть $\vec{V}$ — *ориентированное* n-мерное многообразие класса C^1 над полем вещественных чисел (абстрактное или содержащееся в аффинном пространстве), счетное в бесконечности [1]).

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта V. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма максимальной степени n, непрерывная

ствие некоторый полярный вектор (электрическое поле) и некоторый аксиальный вектор (магнитное поле).

[1]) В этом параграфе мы предполагаем, что все рассматриваемые в нем многообразия счетны в бесконечности. Непрерывное многообразие, содержащееся в аффинном пространстве, счетно в бесконечности.

на V и принимающая значения в *банаховом пространстве* $\vec{F}$[1]).

Рассмотрим теперь прообраз формы $\vec{\omega}$ при отображении Φ: $\Phi^*\vec{\omega}$. Так как форма $\vec{\omega}$ непрерывна и отображение Φ принадлежит классу C^1, то этот прообраз является непрерывной дифференциальной формой на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$ (теорема 14_2). Степень этой формы равна размерности n пространства $\mathbb{R}^n$, так что ее можно записать в виде

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n. \quad \text{(VI, 6; 1)}$$

Свяжем с этой формой меру Радона, определенную на открытом множестве $\mathcal{O}$ со значениями в $\vec{F}$[2]), по формуле

$$\vec{\mu}, \quad \text{или} \quad \vec{\mu}_{\Phi}, \quad \text{или} \quad \vec{\mu}_{\vec{\omega}, \Phi} =$$

$$= \vec{f}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, \theta(u_1, u_2, \ldots, u_n; \Phi)\, du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n, \quad \text{(VI, 6; 2)}$$

где θ — функция, связанная с ориентацией V с помощью карты Φ. Поскольку Φ является гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на $\Phi(\mathcal{O})$, то $\vec{\mu}_{\Phi}$ имеет образ $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$, являющийся мерой на открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$ из V.

Таким образом, задание многообразия V, ориентации этого многообразия, дифференциальной формы $\vec{\omega}$ на многообразии и его карты Φ определяет некоторую меру Радона $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$ на $\Phi(\mathcal{O})$.

Теорема 31. *Пусть $\vec{V}$ — ориентированное многообразие и $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма, определенная на V*[3]). *Пусть Φ_1: $\mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и Φ_2: $\mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2)$ — две карты V, образы которых $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение Ω.*

---

[1]) Можно будет для простоты в качестве $\vec{F}$ взять поле скаляров.

[2]) В силу того, что пространство $\vec{F}$ предполагается полным, формула (VI, 6; 2) определяет меру со значениями в $\vec{F}$ как произведение меры Лебега $du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n$ на непрерывную функцию со значениями в $\vec{F}$: $\vec{f}\theta$. Определение дано в формуле (IV, 5; 6). С этого момента мы не будем напоминать, что $\vec{F}$ является банаховым пространством.

[3]) Очень часто V будет лежать в некотором открытом множестве аффинного пространства, а $\vec{\omega}$ будет определена и непрерывна в этом открытом множестве.

Тогда две меры $\Phi_1\vec{\mu}_1$ и $\Phi_2\vec{\mu}_2$, определенные картами Φ_1 и Φ_2 исходя из ориентированного многообразия $\vec{V}$ и дифференциальной формы $\vec{\omega}$, совпадают в открытом множестве Ω.

Доказательство. Пусть Ω_1 и Ω_2 — прообразы Ω при отображениях Φ_1 и Φ_2 соответственно. Отбросив $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, мы в дальнейшем ограничимся множествами Ω_1 и Ω_2. Поскольку $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ является C^1-диффеоморфизмом Ω_1 на Ω_2 (следствие 1 теоремы 33 гл. III), то он дает одновременно образы и прообразы для функций, дифференциальных форм, мер и т. д. Будет удобным использовать символ $\sim$ для математических объектов, определенных на множествах Ω_1 и Ω_2 и соответствующих друг другу при отображении $\Phi_{2,1}$.

Покажем, что

$$\vec{\mu}_2 = \Phi_{2,1}\vec{\mu}_1 \quad \text{или} \quad \vec{\mu}_1 \sim \vec{\mu}_2. \tag{VI, 6; 3}$$

Тогда в силу равенства $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Phi_{2,1}$ будет иметь место соотношение $\Phi_1\vec{\mu}_1 = \Phi_2\vec{\mu}_2$.

Мы видели, что отображение $\Phi_{2,1}$ принадлежит классу C^1. Предположим, что это отображение определено формулой

$$\begin{gathered} u \to v = \Phi_{2,1}(u) = v(u), \\ v_i = v_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{VI, 6; 4}$$

Прообраз дифференциальной формы $dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n$ при отображении $\Phi_{2,1}$ равен (формула (VI, 3; 40))

$$\Phi_{2,1}^*(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n) = (\det \Phi'_{2,1}(u))\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n, \tag{VI, 6; 5}$$

или

$$(\det \Phi'_{2,1}(u))\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n. \tag{VI, 6; 6}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \vec{f}_1\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n &= \Phi_1^*\vec{\omega} = (\Phi_2 \circ \Phi_{2,1})^* \vec{\omega} = \\ &= \Phi_{2,1}^*(\Phi_2^*\vec{\omega}) = \Phi_{2,1}^*(\vec{f}_2\, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n), \end{aligned} \tag{VI, 6; 7}$$

или

$$\vec{f}_1\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim \vec{f}_2\, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n. \tag{VI, 6; 8}$$

Из (VI, 6; 6) и (VI, 6; 8) путем деления находим, что

$$\frac{\vec{f}_1(u)}{\left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right)} \sim \vec{f}_2(v)\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 6; 9)}$$

Согласно (VI, 5; 1), для функций θ_1 и θ_2, связанных с ориентацией V, и отображений Φ_1 и Φ_2 справедливо соотношение

$$\theta_1(u) \operatorname{sgn}\left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right) \sim \theta_2(v). \qquad \text{(VI, 6; 10)}$$

Перемножая (VI, 6; 9) и (VI, 6; 10), получаем

$$\frac{\vec{f}_1(u)\,\theta_1(u)}{\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right|} \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v). \qquad \text{(VI, 6; 11)}$$

Согласно формуле замены переменных в кратных интегралах (следствие 1 теоремы 102 гл. IV), образ меры $\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right| du$ при отображении $\Phi_{2,1}$ является мерой dv:

$$\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right| du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n \sim dv_1 \otimes dv_2 \otimes \ldots \otimes dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 12)}$$

Перемножая почленно (VI, 6; 11) и (VI, 6; 12), получаем искомое соотношение $\vec{\mu}_1 \sim \vec{\mu}_2$:

$$\vec{f}_1(u)\,\theta_1(u)\,du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v)\,dv_1 \otimes dv_2 \otimes \ldots \otimes dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 13)}$$

Следствие. *Если $\vec{V}$ является ориентированным n-мерным многообразием класса C^1 и $\vec{\omega}$ представляет собой непрерывную на V дифференциальную форму степени n со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то на V существует, и притом единственная, мера Радона $[\vec{\omega}]_{\vec{V}} = [\vec{\omega}]$*[2] *со значениями в $\vec{F}$, такая, что для каждой карты Φ мера $[\vec{\omega}]$ равна в открытом множе-*

[1]) Если заменить v на $\Phi_{2,1}(u)$, то знак $\sim$ для функций будет обозначать знак $=$.

[2]) Обозначение $[\vec{\omega}]$ является упрощенным, поскольку мера определяется заданием $\vec{\omega}$ и *ориентированного* многообразия $\vec{V}$.

В итоге возможность определения меры Радона $[\vec{\omega}]$, исходя из $\vec{\omega}$ и некоторой ориентации V, а также возможность определения интеграла от $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$ (формула (VI, 6; 14)) вытекает из того, что замена переменных в форме степени n использует якобиан, замена переменных в кратных интегралах использует модуль якобиана, а знак якобиана связан с ориентацией.

Следует заметить, что *здесь мы должны были воспользоваться* теоремой 102 гл. IV (замена переменных в кратных интегралах), и потому излагаемая теория не предоставляет возможности дать вариант доказательства теоремы 102 гл. IV.

стве $\Phi(\mathcal{O})$ *образу* $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ *меры* $\vec{\mu}_\Phi$, *соответствующей на* $\mathcal{O}$ *многообразию* $\vec{V}$ *и форме* $\vec{\omega}$ *при отображении* Φ.

Доказательство. В самом деле, когда Φ пробегает всевозможные карты V, $\Phi(\mathcal{O})$ образуют открытое покрытие V. Каждой из этих карт ставится в соответствие некоторая мера $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ в открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$, и в пересечении двух этих открытых множеств соответствующие им меры совпадают. Для завершения доказательства достаточно применить теперь теорему 17 гл. IV о склеивании кусков.

Замечания. 1°) Найденная мера $[\omega]$ будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда скалярная дифференциальная форма $\omega \geqslant 0$ относительно ориентации V.

В самом деле, для того чтобы убедиться в том, что $[\omega]$ положительна, достаточно проверить это свойство в каждом открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$. Поскольку Φ является гомеоморфизмом, то достаточно убедиться, что мера $\mu_{\omega,\Phi} \geqslant 0$. Последнее же неравенство будет выполняться тогда и только тогда, когда функция $f\theta \geqslant 0$ [1]).

Это означает, что дифференциальная форма $f\theta\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$ неотрицательна относительно канонической ориентации $\mathbb{R}^n$. Так как $f\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n = \Phi^*\omega$, то по определению θ это сводится к утверждению о том, что форма ω неотрицательна относительно ориентации многообразия V.

2°) Если ориентация многообразия V не фиксирована, то *дифференциальная форма* $\vec{\omega}$ *меры на* V *не определяет*. В этом случае допустимо, чтобы форма $\vec{\omega}$ определяла некоторую *полярную меру* на V, т. е. чтобы она каждой ориентации многообразия V ставила в соответствие определенную меру Радона и *двум противоположным ориентациям* V — *две противоположные меры Радона*.

3°) Если открытое множество W из V снабжено ориентацией $\vec{W}$, определенной ориентацией $\vec{V}$, то мера $[\vec{\omega}]_{\vec{W}}$, определенная формой $\vec{\omega}$ на W, является сужением меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на открытое множество W.

В самом деле, пусть Φ является такой картой, что $\Phi(\mathcal{O}) \subset W$. Тогда $[\vec{\omega}]_{\vec{W}}$ и сужение $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на W совпадают в $\Phi(\mathcal{O})$ с $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$.

[1]) В действительности в силу следствия теоремы 52 гл. IV тогда и только тогда, когда функция $f\theta$ будет *почти всюду* $\geqslant 0$ (*почти* относительно меры Лебега). Поскольку $f\theta$ непрерывна, то это равносильно утверждению, что она *всюду* $\geqslant 0$.

Следовательно, они совпадают (теорема 13 гл. IV) в объединении таких открытых множеств, как $\Phi(\mathcal{O})$, т. е. в W.

4°) Мера $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ линейно зависит от дифференциальной формы $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} &[\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2]_{\vec{V}}=[\vec{\omega}_1]_{\vec{V}}+[\vec{\omega}_2]_{\vec{V}},\\ &[k\vec{\omega}]_{\vec{V}}=k\,[\vec{\omega}]_{\vec{V}}, \quad \text{где } k \text{ — скалярная постоянная.}\end{aligned} \tag{VI, 6; 13$_2$}$$

Интеграл от дифференциальной формы степени *n* на *n*-мерном ориентируемом многообразии

Определение. Пусть $\vec{V}$ — ориентированное n-мерное многообразие класса C^1 и $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n на V. Говорят, что $\vec{\omega}$ *интегрируема на* V, если при мере Радона $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$, интегрируема по мере $[\vec{\omega}]$ функция 1. В этом случае интеграл называется *интегралом формы* $\vec{\omega}$ *на* $\vec{V}$ и обозначается через $\int_{\vec{V}}\vec{\omega}$:

$$\int_{\vec{V}}\vec{\omega}=\int_{V}[\vec{\omega}]_{\vec{V}}=[\vec{\omega}]_{\vec{V}}(1)=[\vec{\omega}]_{\vec{V}}(V)\,^{1)}. \tag{VI, 6; 14}$$

Интеграл от $\vec{\omega}$ всегда существует, если $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель на V и тем более если V компактно.

Этот интеграл существует, если норма меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ конечна и пространство $\vec{F}$ конечномерно (следствие теоремы 54_2 гл. IV).

---

[1]) Это интеграл от 1, или мера V относительно *векторной* меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$. Мы считаем, что он имеет смысл согласно (IV, 5; 10). Это означает, что мера $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ имеет базу $\geqslant 0$. Такое условие всегда выполняется, если $\vec{F}$ является скалярным полем или конечномерно (теорема 54 гл. IV). Однако здесь можно даже доказать, что это условие будет выполняться при любом $\vec{F}$. Если V содержится в аффинном пространстве, то его можно наделить евклидовой структурой, а тогда из теоремы 32 следует, что $[\vec{\omega}]$ имеет базой dS-меру n-мерных площадей на V.

Элементарные свойства интеграла

1°) Интеграл меняет знак, если многообразие $\vec{V}$ заменить многообразием $\overleftarrow{V}$, т. е. тем же многообразием, но с противоположной ориентацией.

2°) Интеграл линейно зависит от $\vec{\omega}$:

$$\int_{\vec{V}} (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \int_{\vec{V}} \vec{\omega}_1 + \int_{\vec{V}} \vec{\omega}_2,$$

$$\int_{\vec{V}} k\vec{\omega} = k \int_{\vec{V}} \vec{\omega}, \quad \text{где} \quad k \text{ — скалярная постоянная.} \tag{VI, 6; 15}$$

Существование правой части первой формулы влечет за собой существование ее левой части. Обе части второй формулы существуют одновременно (кроме случая $k=0$, когда из существования правой части следует существование левой, но не наоборот!).

В самом деле, для доказательства достаточно применить (VI, 6; 13_2), а для интегрирования 1 по мерам, входящим в эти формулы, — формулу (IV, 5; 16) (теорема 54 гл. IV).

Практическое вычисление интеграла

Предположим, что $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель K. Будем рассматривать такую конечную систему карт Φ_i, при которой открытые множества $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$ образуют покрытие K.

Обозначим через α_i подчиненное разложение единицы. Тогда мы получим равенство $\vec{\omega} = \sum\limits_i (\alpha_i \vec{\omega})$ и, следовательно, формулу

$$\int_{\vec{V}} \vec{\omega} = \sum_i \int_{\vec{V}} \alpha_i \vec{\omega}. \tag{VI, 6; 16}$$

Нам достаточно будет вычислить каждый из интегралов правой части. Для этого заметим, что, согласно определению меры $\vec{\mu}_{\Phi_i}$ с помощью формулы (VI, 6; 2), эти интегралы можно записать в виде обычных кратных интегралов

$$\int_{\vec{V}} \alpha_i \vec{\omega} = \int_{\Phi_i(\mathcal{O}_i)} \alpha_i \vec{\omega} = \int_{\mathcal{O}_i} \alpha_i (\Phi_i(u)) \vec{f}(u)\, \theta(u; \Phi)\, du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n. \tag{VI, 6; 17}$$

Вместо разложения единицы можно, естественно, воспользоваться также представлением многообразия V в виде объединения $\bigcup_i V_i$ (конечного или счетного) непересекающихся $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$-измеримых множеств, достаточно малых для того, чтобы каждое из них содержалось в образе карты. Если V_i содержится в $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, то имеет место формула

$$\int_{\vec{V}} \vec{\omega} = \int_{\vec{V}} [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int_{V_i} [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int_{\Phi_i^{-1}(V_i)} f_i \theta_i \, du_1 \otimes \ldots \otimes du_n, \tag{VI, 6; 18}$$

приводящая нас к вычислению обычных кратных интегралов. Позже мы укажем более конкретные примеры (стр. 194 и далее).

Замечание. Рассмотрим частный случай многообразия V размерности 0, т. е. многообразия, образованного изолированными точками. Тогда форма $\vec{\omega}$ нулевой степени сводится к некоторой функции $\vec{f}$, а мера $[\vec{\omega}]$ будет по определению равна

$$[\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_\nu \pm \vec{f}(a_\nu)\, \delta_{(a_\nu)}, \qquad a_\nu \in V. \tag{VI, 6; 19}$$

Мы знаем, что ориентировать точку — это значит приписать ей определенный знак. Поэтому знак + или — в последнем выражении соответствует ориентации каждой точки a_ν. Таким образом, интеграл будет определяться формулой

$$\int_{\vec{V}} \vec{\omega} = \sum_\nu \pm \vec{f}(a_\nu)\,[1]. \tag{VI, 6; 20}$$

Оценка интеграла

Теорема 32. *Пусть $\vec{V}$ — ориентированное многообразие класса C^1 размерности n, содержащееся в N-мерном аффинном евклидовом пространстве, снабженном ортонормированной системой координат. Пусть $\vec{\omega}$ — определенная и непрерывная на V дифференциальная форма степени n, записанная в виде* (VI, 3; 7) (*где J пробегает множество всех подмножеств, содержащих n элементов множества* $\{1, 2, \ldots, N\}$).

---

[1]) Казалось бы a priori, что в случае нулевой размерности и степени знаки $\pm$ просто излишни. На *неориентированном* многообразии V форма $\vec{\omega}$ определяет меру по формуле (VI, 6; 19) всюду со знаком + и имеет всюду интеграл (VI, 6; 20) со знаком +. Однако принятые соглашения для $n = 0$ будут необходимы при рассмотрении *формулы Стокса*, с которой мы встретимся позднее (теоремы 37 и 39).

Тогда мера $[\vec{\omega}]$, *определенная формой* $\vec{\omega}$ *на* $\vec{V}$, *имеет базой* dS-*меру* n-*мерных площадей на* V. *При этом*

$$[\vec{\omega}] = \vec{p}(x)\,dS, \quad \text{где } \vec{p} \text{ непрерывна на } V, \qquad \|\vec{p}(x)\| \leqslant \sum_J \|\vec{\omega}_J(x)\|. \tag{VI, 6; 21}$$

Доказательство. Пусть Φ: $u \to x = \Phi(u)$ является некоторой картой V. Тогда $\Phi^*\vec{\omega}$ представляет собой дифференциальную форму степени n на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$, которую, согласно следствию 2 теоремы 14, можно записать в виде

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}\,du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n =$$
$$= \left(\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}(\Phi(u)) \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right) \times$$
$$\times du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n. \tag{VI, 6; 22}$$

Мера Радона $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\vec{\omega}, \Phi}$, связанная с $\vec{\omega}$ с помощью $\vec{V}$ и Φ, определяется на $\mathcal{O}$ по формуле

$$d\vec{\mu} = \left(\theta \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right) \times$$
$$\times du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n. \tag{VI, 6; 23}$$

С другой стороны, мера Радона, соответствующая n-мерной площади на V, запишется на $\mathcal{O}$ как $D(u)\,du$, где $D(u)$ является n-площадью параллелепипеда, определенного n векторами $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u_i}(u)$, и $du = du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n$.

Эта площадь не меньше площади ее ортогональной проекции на подпространство, порожденное векторами $\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_n}$ базиса $\vec{E}$[1]). Следовательно, имеет место неравенство

$$D(u) \geqslant \left| \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right|. \tag{VI, 6; 24}$$

[1]) Это вытекает из теоремы 100 гл. IV при $n = N - 1$ (проекция площадей гиперплоскостей). Для произвольного n это следует из результата (не доказанного) упражнения, приведенного на стр. 757 т. I, ибо площадь параллелепипеда равна квадратному корню из суммы квадратов площадей его проекций на подпространства, определяемые n векторами базиса. Указанный результат здесь почти очевиден. Его можно получить индукцией по n, выражая площадь в виде произведения площади основания на длину высоты (теорема 104 гл. IV).

Теперь можно записать

$$d\vec{\mu} = \vec{q}(u)(D(u)\,du), \tag{VI, 6; 25}$$

где

$$\vec{q}(u) = \theta(u;\ \Phi)\left[\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1,\,j_2,\,\ldots,\,j_n}(\Phi(u)) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{D(u)} \frac{D\left(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_n}\right)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right]. \tag{VI, 6; 26}$$

Функция $\vec{q}$ непрерывна на $\mathcal{O}$ и, согласно (VI, 6;24), допускает оценку:

$$\|\vec{q}(u)\| \leqslant \sum_J \|\vec{\omega}_J(\Phi(u))\|. \tag{VI, 6;27}$$

Поскольку Φ является гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на $\Phi(\mathcal{O})$, то для открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ из V можно записать, что

$$[\vec{\omega}] = \vec{p}(x)\,dS, \text{ где } \vec{p}(x) = \vec{q}\left(\Phi^{-1}(x)\right). \tag{VI, 6;28}$$

Функция $\vec{p}$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (VI, 6;21). Она определена на $\Phi(\mathcal{O})$ относительно карты Φ. Однако, если Φ_1 и Φ_2 — две карты, а $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение Ω, то *соответствующие функции* $\vec{p}_1$ *и* $\vec{p}_2$ *совпадают на* Ω. Для того чтобы в этом убедиться, надо доказать, что если сузить Φ_1 и Φ_2 на прообразы Ω_1 и Ω_2 множества Ω, то в обозначениях, введенных при доказательстве теоремы 31, имеет место соотношение

$$\theta_1(u) \frac{D\left(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_n}\right)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)} \cdot \frac{1}{D_1(u)} \sim \theta_2(v) \frac{D\left(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_n}\right)}{D(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)} \cdot \frac{1}{D_2(v)}, \tag{VI, 6; 29}$$

где D_1 и D_2 — множители, определяющие n-мерные площади относительно карт Φ_1 и Φ_2. Это очевидно, поскольку

$$\theta_2(v) \sim \theta_1(u)\operatorname{sign}(\det \Phi'_{2,1}(u)), \text{ согласно (VI, 6;10)},$$

$$\frac{D\left(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_n}\right)}{D(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)} \sim \frac{D\left(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_n}\right)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)} \cdot \frac{1}{\det\left(\Phi'_{2,1}(u)\right)}, \tag{VI, 6;30}$$

где $\det \Phi'_{2,1}(u) = \dfrac{D(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$. Теперь, согласно (VI, 10;19),

$$D_2(v) \sim \frac{D_1(u)}{|\det \Phi'_{2,1}(u)|}\ ^{1)}.$$

Функции $\vec{p}_i$, соответствующие различным картам Φ_i, определяют одну и ту же функцию $\vec{p}$ на V; последняя непрерывна, принимает значения в $\vec{F}$ и допускает оценку (VI, 6;21). С другой стороны, мера $[\vec{\omega}] - \vec{p}\,dS$ равна нулю в семействе открытых множеств $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, образующих покрытие V, а следовательно, равна нулю на V (теорема 13 гл. IV). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы коэффициенты $\vec{\omega}_J$ формы $\vec{\omega}$ ограничены по норме на V и если V имеет конечную площадь, то интеграл от $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$ существует и имеет место оценка*

$$\left\| \int_{\vec{V}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\sum_J \||\vec{\omega}_J\|| \right) S, \tag{VI, 6; 31}$$

где S — площадь V.

Доказательство. Функция 1 интегрируема относительно $[\vec{\omega}] = \vec{p}\,dS$ тогда и только тогда, когда $\vec{p}$ является dS-интегрируемой (определение в формуле (IV, 5; 10)). Результат теперь вытекает из следствия 2 теоремы 39 гл. IV.

Следствие 2. *Если W является подмногообразием многообразия V размерности $< n$, то оно имеет нулевую меру по мере $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей дифференциальной форме $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$.*

Предположим для простоты, что V лежит в конечномерном аффинном пространстве E. Снабдим E произвольной евклидовой структурой. Из следствия 3 теоремы 107 гл. IV вытекает, что W имеет нулевую меру по n-площади dS.

---

1) Это доказательство совпадения функций $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ в Ω с помощью (VI, 6;30) может быть заменено прямым применением теоремы Лебега — Никодима (теорема 52 гл. IV). В самом деле, в Ω должны выполняться равенства $[\vec{\omega}] = \vec{p}_1\,dS = \vec{p}_2\,dS$, а следовательно, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ должны быть dS-почти всюду равны. Так как обе функции непрерывны, то они равны всюду.

Применение к практическим вычислениям

Предположим, что надо вычислить интеграл $\int \vec{\omega}$ от некоторой непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени $N-1$ на сфере $\vec{\Sigma}$ с центром в начале координат радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^N$, которая снабжена своей канонической ориентацией (соответствующей трансверсальной ориентации, в которой выходящие векторы положительны; см. следствие 2 теоремы 30). Экватор $x_N=0$ является многообразием размерности, строго меньшей, чем размерность сферы, и, следовательно, в силу следствия 2 *в интеграле его можно отбросить.* Значит, интеграл равен сумме двух интегралов, соответствующих верхней полусфере $\vec{\Sigma}_+$ и нижней полусфере $\vec{\Sigma}_-$:

$$\int_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \int_{\Sigma} [\vec{\omega}] = \int_{\Sigma_+} [\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}} + \int_{\Sigma_-} [\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}} = \int_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega}, \quad \text{(VI, 6; 32)}$$

где Σ_+ определяется неравенством $x_N>0$, а Σ_- определяется неравенством $x_N<0$. [Существование интеграла от $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}}$ на Σ в силу компактности сферы Σ влечет за собой существование этих интегралов на любой dS-измеримой части Σ, а значит, на Σ_+ и Σ_-, т. е. существование последних интегралов в (VI, 6;31).]

Рассмотрим, например, интеграл по верхней полусфере. Карта этой полусферы определяется отображением Φ, задаваемым соотношением

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_N),\\ x_N = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2},\end{gathered} \quad \text{(VI, 6; 33)}$$

где $\mathcal{O}$ — открытый шар $\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 < R^2$ в $\mathbb{R}^{N-1}$. Сначала надо найти прообраз $\vec{\omega}$, определяемый этой картой. Для этого достаточно записать $\vec{\omega}$ в виде (VI, 3; 6) и заменить соответственно x_N и dx_N соотношением (VI, 6; 33) и соотношением, полученным из него дифференцированием:

$$dx_N = \frac{-x_1\,dx_1 - x_2\,dx_2 - \ldots - x_{N-1}\,dx_{N-1}}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2}}. \quad \text{(VI, 6; 34)}$$

Так получается дифференциальная форма $\Phi^*\vec{\omega}$, имеющая вид

$$\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{N-1}, \quad \text{(VI, 6; 35)}$$

где $\vec{f}$ — непрерывная функция на открытом шаре $\mathcal{O}$. Затем надо вычислить функцию $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; \Phi)$. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ положительна в канонической ориентации пространства $\mathbb{R}^{N-1}$. Ее образ при отображении $\Phi'(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ представляет собой систему векторов, касательных к верхней полусфере в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, проекции которых равны предыдущим векторам. Обозначим эти векторы через $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_{N-1}$. Заметим, что в каждой точке верхней полусферы вектор e_N — выходящий. Знак базиса $\vec{e}'_N, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_{N-1}$ в $\mathbb{R}^N$ (являющийся также знаком базиса $\vec{e}_N, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ [1]), т. е. $(-1)^{N-1}$) равен знаку базиса $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_{N-1}$ в касательной ориентации сферы. Окончательно функция θ равна $(-1)^{N-1}$. Поэтому имеет место формула

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} = (-1)^{N-1} \int\limits_{\mathcal{O}} \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{N-1}, \qquad \text{(VI, 6; 36)}$$

сводящая вычисление интеграла от дифференциальной формы к вычислению обычного кратного интеграла.

Такими же будут вычисления, относящиеся к нижней полусфере, однако в формулах (VI, 6; 33), (VI, 6; 34) следует писать знак —, а именно:

$$\begin{aligned} x_N &= -\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2}, \\ dx_N &= +\frac{x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + \ldots + x_{N-1}\, dx_{N-1}}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2}}. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 6; 37)}$$

В каждой точке нижней полусферы вектор $\vec{e}_N$ является *входящим*, и, следовательно, соответствующая функция θ равна $(-1)^N$.

Рассмотрим частный случай, когда размерность $N = 3$. Предположим, что $\vec{\omega}$ имеет вид:

$$\vec{\omega} = \vec{A}\, dy \wedge dz + \vec{B}\, dz \wedge dx + \vec{C}\, dx \wedge dy. \qquad \text{(VI, 6; 38)}$$

С помощью формул (VI, 6; 33) и (VI, 6; 34) формулу (VI, 6; 35) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^* \vec{\omega} &= -\vec{A}\, dy \wedge \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - \vec{B}\, \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \wedge dx + \vec{C}\, dx \wedge dy = \\ &= \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x + \vec{B}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) dx \wedge dy. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 6; 39)}$$

---

[1]) Так как $\vec{e}'_i = \vec{e}_i + \lambda_i \vec{e}_N$, то определитель одного из базисов относительно другого равен 1.

Здесь $\theta=(-1)^2=+1$; поэтому

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} = \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x+\vec{B}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx\,dy. \tag{VI, 6; 40}$$

Далее,

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega} = -\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} - \frac{\vec{A}x+\vec{B}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx\,dy. \tag{VI, 6; 41}$$

Окончательно будем иметь

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \int\limits_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int\limits_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega}.$$

Совершенно ясно, что в (VI, 6; 40) [соответственно (VI, 6; 41)] в выражениях для $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, являющихся функциями от x, y, z, следует заменить z на $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (соответственно на $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$). Кроме того, в полярных координатах имеется карта $\Phi=P$ сферы, определяемая соотношением (IV, 9; 33). Здесь $\mathcal{O}$ представляет собой прямоугольник $\mathbb{R}^2$, определенный неравенствами $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$ (считаем $r=\mathbb{R}$). Дополнение к образу $P(\mathcal{O})$ этой карты является меридиональной полуокружностью и имеет, следовательно, согласно предыдущему следствию, нулевую меру относительно меры $[\vec{\omega}]$, соответствующей форме $\vec{\omega}$. Значит, легко вычисляется интеграл на образе карты. В (VI, 6; 38) следует заменить x, y, z их выражениями (IV, 9; 33), а dx, dy, dz их дифференциалами (где $r=R$, $dr=0$). При этом мы получим равенство

$$P^*\vec{\omega} = \vec{f}(\theta, \varphi)\,d\theta \wedge d\varphi. \tag{VI, 6; 42}$$

Теперь надо вычислить функцию ориентации θ [1]). Для этого нужно в определенной точке (θ, φ) прямоугольника $\mathcal{O}$ вычислить ориентацию системы из двух векторов $\frac{\partial\vec{P}}{\partial\theta}(\theta, \varphi)$ и $\frac{\partial\vec{P}}{\partial\varphi}(\theta, \varphi)$ на сфере. Их геометрическое расположение (изученное на стр. 750 т. I) говорит о том, что система этих двух векторов положительна в той ориентации сферы, функция ориентации которой равна $+1$ [1]). Окончательно вычисление сводится к вычислению

[1]) Речь идет здесь о функции ориентации $\theta(u; \Phi)$, *не имеющей никакого отношения к широте* θ — одной из полярных координат. Печальное следствие того факта, что алфавит конечен.

обычного двойного интеграла

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \iint\limits_{\mathcal{O}} \vec{f}(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi. \qquad \text{(VI, 6; 43)}$$

Рассмотрим в качестве частного примера интеграл

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}, \qquad \text{(VI, 6; 44)}$$

где $\vec{\Gamma}$ — тригонометрическая окружность, снабженная канонической ориентацией. Существует, очевидно, карта этой окружности, определенная отображением Φ: $\varphi \to (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Здесь $\mathcal{O}$ — открытое множество $0 < \varphi < 2\pi$ прямой $\mathbb{R}$. Образ $\Phi(\mathcal{O})$ является на Γ дополнением к точке, т. е. к множеству нулевой меры по мере $[\vec{\omega}]$. Мы видим, таким образом, что прообраз дифференциальной формы является формой $d\varphi$ на $\mathbb{R}$.

---

[1]) В этот момент, наши не посвященные в тайны ориентации читатели, мы не обратили никакого внимания на то, является ли триэдр $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ положительным или нет. Поэтому мы доказали лишь, что $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$ равно ± 1, а этого вполне достаточно для замены переменных в кратных интегралах.

1-*е доказательство.* Непосредственным дифференцированием функций x, y, z можно вычислить якобиан и из неравенства $+r^2 \sin\theta > 0$ получить, что $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют положительный базис. Недостаток этого метода заключается в том, что при его использовании теряются все преимущества, получаемые при геометрическом определении модуля якобиана.

2-*е доказательство.* Проведем сначала рассуждение для *плоских* полярных координат ρ и φ. Согласно выбору положительного направления на тригонометрической окружности в *ориентированной плоскости* (направления углов), в касательной ориентации этой окружности, соответствующей той трансверсальной ориентации, в которой выходящие векторы являются положительными, базис $\vec{u}$, $\vec{v}$ (где $\vec{u}$ — выходящая нормаль, а $\vec{v}$ — касательная в прямом направлении) положителен.

Если мы перейдем к канонически ориентированному пространству $\mathbb{R}^3$, то увидим, что векторы $\vec{i}$ и $\varepsilon\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — третий вектор базиса (ось z) и $\varepsilon = \operatorname{sign} z$, $z \neq 0$, являются выходящими относительно сферы. Так как векторы $\vec{j}$ и $\vec{k}$ касательны к сфере, то базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеет тот же знак, что и базис $\varepsilon\vec{e}_3$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Но тогда он совпадает со знаком $\varepsilon\vec{e}_3$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ или $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$, $\varepsilon\vec{e}_3$, где $\vec{j}_0$ и $\vec{k}_0$ — горизонтальные проекции векторов $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Векторы $\vec{j}_0$ и $\vec{k}_0$ с точностью до положительного множителя совпадают с векторами $\varepsilon\vec{u}$ и $\vec{v}$, где $\vec{u}$ и $\vec{v}$ соответствуют полярным координатам в (x, y)-плоскости. Окончательно тройка $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеет знак системы векторов $\varepsilon\vec{u}$, $\vec{v}$, $\varepsilon\vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$ или знак системы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$, где $\vec{u}$, $\vec{v}$ лежат в $\mathbb{R}^2$, т. е. положительна. Этот результат, доказанный для $z \neq 0$, останется по непрерывности справедливым при $z = 0$. Так как тогда вектор $\vec{i}$ является выходящей нормалью, то $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют положительный базис в касательной ориентации сферы.

Функция θ ориентации равна $+1$, иными словами, отображение Φ переводит положительное направление обхода $\mathbb{R}$ в положительное направление обхода тригонометрической окружности. Поэтому имеет место формула

$$\int_{\vec{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{]0,\,2\pi[} d\varphi = 2\pi. \qquad \text{(VI, 6; 45)}$$

Эти рассуждения основаны в большой степени на интуиции. *При приобретении некоторого опыта рассмотренные операции выполняются очень быстро. Весь этот формализм удачно сочетает в себе интуицию и автоматизм. Однако всегда надо обращать некоторое внимание на знаки, которые порождает введенная ориентация.*

Следствие 3. *Если в условиях теоремы некоторая непрерывная дифференциальная форма $\vec{\omega}_\nu$ при ν, стремящемся к бесконечности, сходится к дифференциальной форме $\vec{\omega}$ равномерно на каждом компакте из V, то мера $[\vec{\omega}_\nu]$, соответствующая $\vec{\omega}_\nu$, локально сходится по норме, и тем более широко, к мере $[\vec{\omega}]$, соответствующей $\vec{\omega}$.*

Доказательство. Мы говорим, что $\vec{\omega}_\nu$ сходится к $\vec{\omega}$, если в выражении (VI, 3; 7) каждая из функций $(\vec{\omega}_\nu)_J$ сходится к функции $(\vec{\omega})_J$. (В этом определении предполагается, что многообразие V задано в открытом множестве аффинного пространства, а форма $\vec{\omega}$ определена и непрерывна в открытом множестве.)

Оценка (VI, 6; 21), примененная к $\vec{\omega}_\nu - \vec{\omega}$, показывает, что функция $\vec{p}_\nu$, соответствующая $\vec{\omega}_\nu$, сходится к функции $\vec{p}$, соответствующей $\vec{\omega}$, равномерно на каждом компакте из V. Следовательно, на каждом компакте K из V

$$\|\vec{p}_\nu\,dS - \vec{p}\,dS\|_K \leqslant \left(\sup_{x \in K} \|\vec{p}_\nu(x) - \vec{p}(x)\|\right) \int_K dS \qquad \text{(VI, 6; 46)}$$

сходится к 0. Теорема Лебега (теорема 35 гл. IV) дает значительно менее ограничительные условия для получения такого же результата (см. пример на стр. 631 т. I): если $\vec{\omega}_\nu$ просто сходится dS-почти всюду к $\vec{\omega}$ и имеет место оценка $\sum_J \|(\vec{\omega}_\nu)_J(x)\| \leqslant$ $\leqslant g(x)$, где g — некоторая локально dS-интегрируемая функция $\geqslant 0$ на V, то $[\vec{\omega}_\nu]$ локально сходится по норме к $[\vec{\omega}]$. Если функция g ограничена на V и если V имеет конечную площадь, то из теоремы Лебега следует, что $\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}_\nu$ сходится к $\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}$.

Случай гиперповерхности евклидова пространства

Вычислим явно функцию $\vec{p}$ формулы (VI, 6; 21) для случая гиперповерхности Σ евклидова пространства.

Теорема 33. *Пусть E есть N-мерное ориентированное аффинное евклидово пространство, снабженное ортонормированным положительным базисом. Пусть Σ — ориентированная гиперповерхность класса C^1 из E. Если $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени $N-1$ в E, определенная формулой*

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}_j(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N, \tag{VI, 6; 47}$$

то соответствующая мера $[\vec{\omega}]$ на $\vec{\Sigma}$ определяется по формуле

$$[\vec{\omega}] = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \vec{\omega}_j(x) \cos\alpha_j(x)\, dS, \tag{VI, 6; 48}$$

где $\alpha_j(x)$ — угол, образованный j-м вектором базиса пространства $\vec{E}$ с положительной нормалью к Σ в точке x (в трансверсальной ориентации, соответствующей касательной ориентации в ориентации пространства $\vec{E}$).

Доказательство. Пусть Φ — некоторая карта V. Согласно (VI, 5; 7), можно определить на нормали положительный в трансверсальной ориентации вектор. Соответствующий единичный вектор нормали определяется по формуле

$$\vec{\nu} = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}(u) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(u)\right], \tag{VI. 6; 49}$$

где $D(u)$ — площадь параллелепипеда, образованного векторами $\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_i}(u)$, т. е. длина их векторного произведения.

Согласно формуле (VI, 2; 16), он имеет координаты

$$\cos\alpha_j = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)}(-1)^{j-1}\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})}. \tag{VI, 6; 50}$$

Используя формулу (VI, 6; 26), получаем

$$\vec{q}(u) = \sum \omega_j(\Phi(u))(-1)^{j-1}\cos\alpha_j, \qquad \text{(VI, 6; 51)}$$

откуда в силу (VI, 6; 28) вытекает соотношение (VI, 6; 48).

Следствие. *В условиях теоремы интеграл* $\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega}$ *вычисляется как интеграл по поверхности*:

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int\limits_{\Sigma} \vec{\omega}_j \cos\alpha_j\, dS. \qquad \text{(VI, 6; 52)}$$

Из существования одной из частей этого равенства вытекает существование другой.

Пример. В $\mathbb{R}^3$ справедлива формула

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} (A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy) =$$

$$= \int\limits_{\Sigma} (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\, dS. \qquad \text{(VI, 6; 53)}$$

Замечание. В силу формулы (VI, 3; 43) форму $\vec{\omega}$ степени $N-1$ часто пишут в виде

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \vec{A}_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N. \qquad \text{(VI, 6; 53}_2\text{)}$$

Тогда

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = (-1)^{N-1} \int\limits_{\Sigma} \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j \cos\alpha_j\, dS. \qquad \text{(VI, 6; 53}_3\text{)}$$

Преобразование с помощью диффеоморфизма

Теорема 34. *Пусть* $\vec{V}$ *и* $\vec{V}'$ — *два n-мерных ориентированных многообразия класса* C^1. *Пусть* H — *некоторый* C^1-*диффеоморфизм* V *на* V', *сохраняющий ориентацию*[1]. *Если* $\vec{\omega}$ *является непрерывной дифференциальной формой степени* n *на* V *и* $H\vec{\omega}$ — *ее образ на* V'[2], *то мера* $[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'}$, *соответствующая* $H\vec{\omega}$,

---

[1]) Это означает, что образ при отображении $H'(x)$ некоторого положительного в ориентации $\vec{V}$ базиса из $\vec{T}(x;\ V)$ является положительным в ориентации $\vec{V}'$ базисом из $\vec{T}(H(x);\ V')$.

[2]) Поскольку H является C^1-диффеоморфизмом, то имеются как образы, так и прообразы.

является образом при отображении H меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей $\vec{\omega}$, а для интегралов имеет место следующая формула:

$$\int_{\vec{V}'} H\vec{\omega} = \int_{\vec{V}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 6; 54)}$$

Существование одной из частей этого равенства эквивалентно существованию другой.

Доказательство. Достаточно рассмотреть карту Φ относительно V, так что $H \circ \Phi$ будет картой относительно V'. При этом мы сразу же получаем следующие формулы:

$$\Phi^* \vec{\omega} = \Phi^* H^* H\vec{\omega} = (H \circ \Phi)^* (H\vec{\omega}). \qquad \text{(VI, 6; 55)}$$

Следовательно, форма $\vec{f}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$ из (VI, 6; 1) одна и та же для формы $\vec{\omega}$ на V и формы $H\vec{\omega}$ на V'; кроме того, справедливо равенство

$$(\theta(u;\ \Phi))_V = (\theta(u;\ H \circ \Phi))_{V'}, \qquad \text{(VI, 6; 56)}$$

поскольку отображение H сохраняет ориентацию.

Согласно (VI, 6; 2), меры $\vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi}$ и $\vec{\mu}_{H\vec{\omega},\,H\circ\Phi}$ совпадают. Поэтому

$$\begin{aligned}[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'} &= (H \circ \Phi)\, \vec{\mu}_{H\vec{\omega},\, H\circ\Phi} = (H \circ \Phi)\, \vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi} = \\ &= H\left(\Phi \vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi}\right) = H\left([\vec{\omega}]_{\vec{V}}\right),\end{aligned} \qquad \text{(VI, 6; 57)}$$

т. е. мера, соответствующая $H\vec{\omega}$ на $\vec{V}'$ $\left([H\vec{\omega}]_{\vec{V}'}\right)$, равна образу при отображении H меры, соответствующей $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$ $\left(H\left([\vec{\omega}]_{\vec{V}}\right)\right)$. Далее в силу теоремы 60 гл. IV интегралы от 1 по мерам $[\vec{\omega}]$ и $[H\vec{\omega}]$ совпадают, что дает соотношение (VI, 6; 54).

Можно также исходить из непрерывной дифференциальной формы $\vec{\varpi}$ степени n на V'; тогда

$$\int_{\vec{V}} H^* \vec{\varpi} = \int_{\vec{V}'} \vec{\varpi}. \qquad \text{(VI, 6; 58)}$$

Обе части этой формулы остаются справедливыми, когда H является только отображением класса C^1, *а не диффеоморфизмом. Но тогда не верна сама формула, поскольку обе ее части, вообще говоря, не совпадают.* (*Они будут совпадать, если H будет C^1-диффеоморфизмом, не сохраняющим ориентации!*)

Например, если $\vec{V}=\vec{V}'$ является отрезком $]-1, +1[$ прямой $\mathbb{R}$ в ее канонической ориентации, H является отображением $x\to y=x^2$ и $\varpi=dy$, то $H^*\varpi=2x\,dx$ и

$$\begin{aligned}\int\limits_{\vec{V}}\varpi&=\int\limits_{]-1,\,+1[}dy=2,\\ \int\limits_{\vec{V}}H^*\varpi&=\int\limits_{]-1,\,+1[}2x\,dx=0.\end{aligned}\qquad\text{(VI, 6; 59)}$$

Интеграл от дифференциальной формы по особому ориентированному многообразию

Рассмотрим в открытом множестве Ω аффинного конечномерного пространства E особое n-мерное многообразие класса C^1, определенное отображением H класса C^1 истинного n-мерного многообразия V класса C^1 в Ω. Мы будем обозначать это особое многообразие через $H\,|V$. Если V снабжено ориентацией $\vec{V}$, то в этом случае имеют дело с особым ориентированным многообразием, которое обозначают через $H\,|\vec{V}$.

Пусть $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n в Ω со значениями в некотором банаховом пространстве. Эта форма имеет прообразом непрерывную дифференциальную форму $H^*\vec{\omega}$ степени n на V, определяющую некоторую меру Радона $[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на V, соответствующую ориентации $\vec{V}$. Если нет опасности смешения, то ее будет удобнее обозначать через $[\vec{\omega}]_{H|\vec{V}}$ или даже $[\vec{\omega}]$.

Интегралом от $\vec{\omega}$ на особом ориентированном многообразии $H\,|\vec{V}$, если он существует, называется интеграл от прообраза $H^*\vec{\omega}$ на ориентированном многообразии $\vec{V}$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_{H|\vec{V}}\vec{\omega}=\int\limits_{\vec{V}}H^*\vec{\omega}=\int\limits_{V}[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}.\qquad\text{(VI, 6; 60)}$$

Естественно, что этот интеграл существует всегда, если прообраз при отображении H носителя $\vec{\omega}$ является компактом многообразия V. Это заведомо так, если $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель и отображение H собственное (см. стр. 618 т. I) или если V компактно.

Пример. Вернемся к формуле (VI, 6; 59). Интеграл $\int\limits_{\vec{V}} H^*\omega = 0$ является по определению интегралом от $\varpi = dy$ на особом многообразии, определенном отображением $H: x \to x^2$ интервала $]-1, +1[$ в прямую $\mathbb{R}$. *Поэтому всегда имеют место равенства*

$$0 = \int\limits_{\overrightarrow{]-1, +1[}} 2x\,dx = \int\limits_{H\,|\,\overrightarrow{]-1, +1[}} dy. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 60_2)$$

Однако нет никаких оснований заменять особое многообразие $H\,|\,]-1, +1[$ многообразием $]-1, +1[$.

Теорема 35. *Интегралы от дифференциальной формы на двух особых ориентированных эквивалентных многообразиях существуют одновременно и равны между собой.*

Доказательство. Пусть V_1 и V_2 — два n-мерных многообразия класса C^1 и H_1, H_2 — отображения V_1 и V_2 в E, определяющие два особых многообразия в E. Будем считать, что эти многообразия эквивалентны, т. е. что существует такой C^1-диффеоморфизм K многообразия V_1 на V_2, что $H_1 = H_2 \circ K$.

Многообразия V_1 и V_2 по предположению ориентированы. Чтобы иметь два *ориентированных* особых эквивалентных многообразия, необходимо предполагать, что отображение K переводит ориентацию $\vec{V}_1$ в ориентацию $\vec{V}_2$ в смысле теоремы 34.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n на E. Эта форма имеет прообраз $H_1^*\vec{\omega}$ на V_1, который в силу ориентированности $\vec{V}_1$ определяет на V_1 некоторую меру Радона $[\vec{\omega}]_{H\,|\,\vec{V}_1}$. Точно так же $H_2^*\vec{\omega}$ определяет на V_2 некоторую меру Радона $[\vec{\omega}]_{H\,|\,\vec{V}_2}$.

Кроме того, в силу приведенных выше соотношений

$$H_1^*\vec{\omega} = (H_2 \circ K)^*\vec{\omega} = K^*(H_2^*\vec{\omega}), \text{ или } K(H_1^*\vec{\omega}) = H_2^*\vec{\omega}. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 61)$$

Поэтому из теоремы 34 следует, что мера $[H_2^*\vec{\omega}]_{\vec{V}_2}$ является образом меры $[H_1^*\vec{\omega}]_{\vec{V}_1}$ при отображении K, а из формулы (VI, 6; 54) следует, что $\int\limits_{\vec{V}_1} H_1^*\vec{\omega} = \int\limits_{\vec{V}_2} H_2^*\vec{\omega}$, а значит, $\int\limits_{H_1\,|\,\vec{V}_1} \vec{\omega} = \int\limits_{H_2\,|\,\vec{V}_2} \vec{\omega}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть H — отображение класса C^1 ориентированного n-мерного многообразия $\vec{V}$ в аффинное пространство E, определяющее особое ориентированное многообразие. Если образ $H(V)$ является n-мерным многообразием V_0 класса C^1 в пространстве E и отображение H является C^1-диффеоморфизмом V на V_0, то интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n на E на особом многообразии $H\,|\,\vec{V}$ есть не что иное, как интеграл от $\vec{\omega}$ на образе V_0, снабженном ориентацией $\vec{V}_0$, перенесенной отображением H из $\vec{V}$.*

Доказательство. В самом деле, особое многообразие $H\,|\,V$ эквивалентно особому многообразию $I\,|\,V_0$, где I — тождественное отображение. Здесь $K=H$, а тогда $H=I\circ K$.

Свойства интеграла от формы на особом многообразии

1°) Если ориентацию особого многообразия $\vec{V}$ заменить противоположной ориентацией $\overleftarrow{V}$, то интеграл изменит знак.

2°) Интеграл линейно зависит от $\vec{\omega}$.

3°) Теорема 32 остается справедливой в следующих предположениях. Если пространство E евклидово, то особое многообразие $H\,|\,V$ (где H — отображение V в E) имеет меру n-мерных площадей; эта мера $dS\geqslant 0$ *находится на* V (гл. IV, теорема 107). Мера на V, $[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, имеет базу dS и равна $\vec{p}\,ds$, где функция $\vec{p}$ непрерывна на V, и имеет место неравенство

$$\|\vec{p}(\xi)\|\leqslant\sum_J\|\vec{\omega}_J(H(\xi))\|,\quad \xi\in V. \qquad \text{(VI, 6; 62)}$$

Отсюда вытекает, в частности, что $\int\limits_{H\,|\,\vec{V}}\vec{\omega}$ заведомо существует, если коэффициенты $\vec{\omega}_J$ формы $\vec{\omega}$ ограничены и если n-площадь V конечна.

Если n-мерное многообразие V имеет образ $H(V)$, лежащий в подмногообразии класса C^1 размерности $<n$ из E, имеющем, согласно следствию 3 теоремы 107 гл. IV, равную нулю n-площадь, то интеграл от $\overset{n}{\vec{\omega}}$ по особому многообразию $H\,|\,\vec{V}$ равен нулю. Так же легко обобщается теорема 33.

Интеграл от дифференциальных форм на многообразиях, имеющих особенности

Рассмотрим для примера множество Σ пространства $\mathbb{R}^3$, представляющее собой объединение круга

$$z=0, \quad x^2+y^2\leqslant 1 \qquad \text{(VI, 6; 63)}$$

и конической поверхности вращения

$$x^2+y^2=(z-1)^2, \quad 0\leqslant z\leqslant 1 \qquad \text{(VI, 6; 64)}$$

(см. рис. 4). Множество Σ компактно.

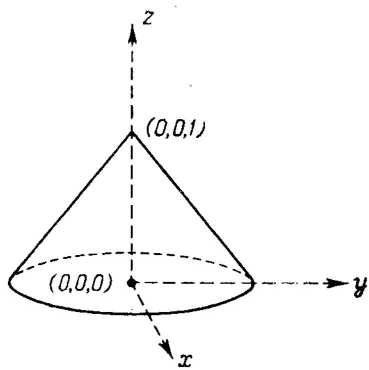

Рис. 4.

Конечно, множество Σ не является гиперповерхностью класса C^1. Оно представляет собой объединение открытого круга Σ_1: $z=0$, $x^2+y^2<1$ — гиперповерхности класса C^∞, конической поверхности Σ_2 (без вершины и основания): $x^2+y^2=(z-1)^2$, $0<z<1$ — гиперповерхности класса C^∞, точки с координатами (0, 0, 1) и окружности $z=0$, $x^2+y^2=1$ — одномерного многообразия класса C^∞. Имеются, таким образом, «особые точки» (вершина конуса и точки окружности), вследствие чего Σ не может быть многообразием. Можно сказать, что Σ является «многообразием с особыми точками, или псевдомногообразием», класса C^∞ размерности 2.

Попытаемся дать общее определение этому понятию. Говорят, что часть многообразия класса C^1 *n-мерно пренебрежима*, если она является объединением конечного или счетного множества подмногообразий (класса C^1) размерности $<n$. Если $n=1$, 1-мерно пренебрежимая часть является конечным или счетным множеством точек. Если $n=0$, 0-мерно пренебрежи-

мая часть пуста. Определенные выше n-мерно пренебрежимые части представляют интерес по той причине, что интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n по любой n-мерно пренебрежимой части n-мерного многообразия V класса C^1 обязательно равен нулю (следствие 2 теоремы 32). Пусть теперь $\tilde{V}$ — многообразие класса C^m произвольной размерности. Говорят, что некоторая часть V многообразия $\tilde{V}$ является *псевдомногообразием*, или *многообразием с особыми точками*, класса C^m размерности n, если существует часть $\mathcal{U}$ множества V, открытая относительно V и являющаяся подмногообразием $\tilde{V}$ класса C^m размерности n, и если дополнение $V - \mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}$ в V n-мерно пренебрежимо. Выбор этого открытого множества $\mathcal{U}$ в V, естественно, довольно произволен, поскольку если взять одно такое множество, то затем можно выбрать меньшее, отбрасывая какое-либо замкнутое подмногообразие размерности $< n$. Однако существует множество $\mathcal{U}$, которое является наибольшим среди других множеств этого типа: множество точек V, в окрестности которых V является истинным многообразием класса C^m размерности n. Это открытое множество $\mathcal{U}$ называется регулярной частью множества V. Множество $V - \mathcal{U}$ называется особой частью. Псевдомногообразие V называется ориентированным, если ориентировано подмногообразие $\mathcal{U}$.

В случае определенного выше псевдомногообразия Σ имеем $\mathcal{U} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Особая часть $\Sigma - \mathcal{U}$ представляет собой объединение окружности и точки. Мы можем ориентировать Σ, например, следующим образом. В каждой точке круга Σ_1 касательное векторное подпространство есть подпространство $\mathbb{R}^2$, определенное двумя первыми координатными осями. В качестве ориентации мы выберем ориентацию, *противоположную канонической ориентации*. Векторное касательное пространство в каждой точке конической поверхности Σ мы будем ориентировать, считая, что два вектора образуют базис положительного знака, если их горизонтальная проекция на пространство $\mathbb{R}^2$, образованное двумя первыми координатными осями, является базисом положительного знака *в канонической ориентации* $\mathbb{R}^2$. Псевдомногообразие Σ делит пространство на две области, которые можно назвать внутренней (ограниченной) областью и внешней областью (бесконечная область). *Трансверсальной ориентацией* Σ, соответствующей предыдущей ориентации, будет та, в которой положительными считаются векторы, входящие во внешнюю область (или выходящие из внутренней области). Третий вектор базиса $\vec{e}_3$ трансверсально отрицателен в каждой точке Σ_1 и трансверсально положителен в каждой точке Σ_2.

Как было сказано выше, *трансверсальная или касательная ориентация определяются только на регулярной части* Σ. *В точках окружности и в вершине конуса, в которых не существует касательной плоскости, никакой ориентации не определялось.*

Интегралом от дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n на $\vec{V}$ мы будем теперь называть интеграл на регулярной части $\widehat{\vec{\mathcal{U}}}$. Это определение вполне оправдано, поскольку $V - \mathcal{U}$ n-мерно пренебрежимо.

В рассмотренном примере мы получим интеграл на $\vec{\Sigma}_1 \cup \vec{\Sigma}_2$. Если форма $\vec{\omega}$ непрерывна в окрестности псевдомногообразия Σ в $\mathbb{R}^3$, то она ограничена на компактном множестве Σ, а, поскольку Σ_1 и Σ_2 имеют конечные площади, рассматриваемый интеграл имеет смысл.

Пусть теперь V — псевдомногообразие класса C^m размерности n с регулярной частью $\mathcal{U}$ и H — непрерывное отображение V в открытое множество Ω аффинного пространства. Говорят, что $H|V$ является особым псевдомногообразием класса C^m из Ω, если существует такое открытое подмножество $\mathcal{U}_H$ в $\mathcal{U}$, что H на $\mathcal{U}_H$ принадлежит классу C^m, а множество $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$ n-мерно пренебрежимо. Выбор множества $\mathcal{U}_H$ здесь довольно произволен, однако среди этих множеств имеется наибольшее: это множество точек из $\mathcal{U}$, в окрестности которых отображение H принадлежит классу C^m. Если V ориентировано, то интегралом от $\vec{\omega}$ по $H|\vec{V}$ называется, если он существует, интеграл от $\vec{\omega}$ по $H|\widehat{\vec{\mathcal{U}}}_H$, т. е. интеграл от $H^*\vec{\omega}$ по $\widehat{\vec{\mathcal{U}}}_H$.

Криволинейный интеграл

Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени 1, определенная и непрерывная на некотором многообразии, представляющем собой открытое множество N-мерного аффинного пространства E. Тогда ее можно проинтегрировать по параметрически ориентированной кривой класса C^1, если, например, эта кривая имеет конечную длину, а форма $\vec{\omega}$ ограничена на этой кривой.

Форма $\vec{\omega}$ по отношению к произвольно выбранной системе координат в E записывается в виде

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_i, \qquad \text{(VI, 6; 65)}$$

где A_i — функции, определенные на множестве Ω со значениями в пространстве $\vec{F}$.

Рассмотрим особое ориентированное многообразие, определенное следующим образом. Пусть $[\alpha, \beta]$ — компактный интервал вещественной прямой $\mathbb{R}$, причем разность $\beta - \alpha \neq 0$ имеет произвольный знак. Пусть $t \to M(t)$ — некоторый путь на Ω, определенный отображением M класса C^1 интервала $[\alpha, \beta]$ в Ω. Выберем на $[\alpha, \beta]$ направление от α к β, что приведет к ориентации прямой $\mathbb{R}$, если $\alpha < \beta$, и противоположной ориентации, если $\alpha > \beta$. Тогда $[\overset{\frown}{\alpha, \beta}]$ будет ориентированным псевдомногообразием размерности 1 с регулярной частью $]\alpha, \beta[$, а $M \mid [\overset{\frown}{\alpha, \beta}]$ будет ориентированным особым псевдомногообразием $\vec{\Gamma}$ размерности 1 конечной длины. Пусть $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, — координаты точки $M(t)$.

Согласно определению,

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \int\limits_{]\overset{\frown}{\alpha, \beta}[} M^*\vec{\omega} = \int\limits_{]\overset{\frown}{\alpha, \beta}[} \vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)}\, dt =$$
$$= \int\limits_{]\overset{\frown}{\alpha, \beta}[} \left(\sum_{j=1}^{N} A_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))\, x_j'(t) \right) dt. \qquad \text{(VI, 6; 66)}$$

Поясним подробно эти формулы. Прежде всего нам надо найти дифференциальную форму $M^*\vec{\omega}$ (второй член предыдущей формулы). Она определяется по формуле (VI, 3; 30):

$$(M^*\vec{\omega})(t) \cdot 1 = \vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)} \quad (1 \in \mathbb{R}), \qquad \text{(VI, 6; 66}_2\text{)}$$

где $\vec{\omega}(M(t)) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и $\overrightarrow{M'(t)} \in \vec{E}$, так что обе части соотношения (VI, 6; 66_2) являются элементами пространства $\vec{F}$[1]). Искомый прообраз является дифференциальной формой на $]\alpha, \beta[$ со значениями в $\vec{F}$, равной $\vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)}\, dt$. Последний член в (VI, 6; 66) получается переходом к выбранной системе координат.

В этих формулах dt рассматривается как некоторая *дифференциальная форма на* $\mathbb{R}$, а интеграл вычисляется по ориентированному интервалу $]\overset{\frown}{\alpha, \beta}[$. Функция θ, определяющая ориентацию, в данном случае равна $+1$, если $\alpha < \beta$, и -1,

[1]) Напомним, что во всем этом параграфе форма $\vec{\omega}$ принимает значения в банаховом пространстве $\vec{F}$.

если $\alpha > \beta$. Поэтому интеграл равен $\pm \int\limits_{]\alpha, \beta[} \ldots dt$, где dt является теперь *мерой Лебега на* $\mathbb{R}$. В конце концов мы приходим к определенному интегралу $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \ldots dt$ относительно меры Лебега dt на $\mathbb{R}$, определяемому в курсе математического анализа по формуле (IV, 9; 1)[1]. Окончательно получаем

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t))\, x_i'(t) \right) dt. \qquad \text{(VI, 6; 67)}$$

Это определение хорошо согласуется с обычным определением *криволинейного интеграла*, приводимым в курсе математического анализа. Мы снова приходим к выводу, что такой криволинейный интеграл может вычисляться только на ориентированных кривых, т. е. на кривых, снабженных направлением обхода, и что замена ориентации кривой приводит к изменению знака интеграла[2].

Криволинейный интеграл можно вычислить на пути класса C^1, а также на пути, кусочно принадлежащему классу C^1 (например, на ориентированной ломаной линии). В этом случае через M мы будем обозначать непрерывное отображение $[\alpha, \beta]$ в Ω, для которого можно найти конечное число точек $t_0 = \alpha$, $t_1, t_2, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n = \beta$, образующих такую конечную по-

---

[1]) Имеется большая путаница в написании этих формул. Принято (к сожалению!) одним и тем же символом dt обозначать совершенно разные вещи: дифференциальную форму 1-й степени (дифференциал тождественной функции $t \to t$) и меру Радона (меру Лебега на $\mathbb{R}$). Если производится преобразование $t \to -t$, то форма заменяется на противоположную, в то время как мера остается неизменной. Впрочем, согласно следствию теоремы 31, мера связана с формой при канонической ориентации $\mathbb{R}$. Было бы лучше меру Лебега обозначить через $|dt|$ [согласно формуле замены переменной (IV; 9; 72)], а обозначение $dx = |\xi'(t)|\, dt$ записать в виде $|dx| = |\xi'(t)|\, |dt|$. Мы видели также, что символ $\int\limits_{\alpha}^{\beta}$ является интегралом от некоторой дифференциальной формы степени 1 на некотором ориентированном многообразии.

[2]) Это приводит в формуле (VI, 6; 67) к замене $\int\limits_{\alpha}^{\beta}$ на $\int\limits_{\beta}^{\alpha}$.

следовательность (возрастающую или убывающую в зависимости от того, будет ли $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$), чтобы отображение M принадлежало классу C^1 в каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. В каждой точке t_i отображение M непрерывно, но его производные слева и справа в этих точках не обязательно совпадают. Тогда $M | [\alpha, \beta]$ будет особым псевдомногообразием в смысле определения, данного на стр. 206. Множество $\mathcal{U}_M$ является дополнением к множеству $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ в $[\alpha, \beta]$. Криволинейный интеграл $\int\limits_{M | \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega}$ теперь определяется равенством

$$\int\limits_{M | \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{M |] t_i, t_{i+1} [} \vec{\omega}, \qquad \text{(VI, 6; 68)}$$

где каждый член представляет собой интеграл на ориентированном особом многообразии класса C^1. Вычисления, производимые по формуле (VI, 6; 66) для каждого интервала $[t_i, t_{i+1}]$, приводят к выражениям (VI, 6; 67), имеющим смысл для функции $\vec{M}'$, определенной всюду, кроме конечного числа точек, т. е. dt-почти всюду, и правильной, а значит, dt-интегрируемой (и даже интегрируемой по Риману).

Криволинейный интеграл по произвольному пути конечной длины

1°) Определение. Пусть M — путь, определенный непрерывным отображением отрезка $[\alpha, \beta]$ прямой $\mathbb{R}$ в открытое множество Ω конечномерного аффинного пространства E. Будем считать, что этот путь (не обязательно принадлежащий классу C^1!) имеет конечную длину, т. е. что функция M имеет ограниченную вариацию (стр. 701 т. I). Пусть, кроме того, $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени 1, непрерывная на множестве Ω. Интеграл от $\vec{\omega}$ по ориентированному пути M (где $[\alpha, \beta]$ ориентирован так, как было указано на стр. 208) определим по формуле

$$\int\limits_{M | \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \int_\alpha^\beta \vec{\omega}(M) \cdot d\vec{M} = \int_\alpha^\beta \vec{\omega}(M(t)) \cdot d\vec{M}(t). \qquad \text{(VI, 6; 69)}$$

Речь идет о выражении $\int B(\vec{f}, \overrightarrow{d\mu})$, определенном в формуле (IV, 5; 13). Здесь $t \to \vec{\omega}(M(t))$ является непрерывным отображением $\vec{f}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$; $d\vec{M} = d\vec{\mu}$ есть мера на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\vec{E}$, для которой функция M является неопределенным интегралом (теорема 88 гл. IV). Что же касается отображения B, то оно является непрерывным каноническим билинейным отображением $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}) \times \vec{E}$ в $\vec{F}$, определенным по формуле $(u, \vec{X}) \to u \cdot \vec{X}$.

Если пространство E снабжено системой координат, относительно которой $\vec{\omega}$ допускает представление (VI, 6; 65), а функция M имеет координаты $t \to x_i(t)$, то рассматриваемый выше интеграл можно записать в виде

$$\int_{M \mid \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A}_i (M(t))\, dx_i(t). \qquad \text{(VI, 6; 70)}$$

Здесь мы рассматриваем интегралы от непрерывных функций $t \to \vec{A}_i(M(t))$, определенных на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\vec{F}$, относительно мер dx_i на $[\alpha, \beta]$, соответствующих в силу теоремы 88 гл. IV функциям ограниченной вариации $t \to x_i(t)$. Если окажется, что M принадлежит классу C^1 или кусочно принадлежит этому классу, то можно в силу следствия 1 теоремы 89 гл. IV написать, что $d\vec{M}(t) = \overrightarrow{M'(t)}\, dt$, $dx_i(t) = x_i'(t)\, dt$. Так мы вернемся к формуле (VI, 6; 67), а это означает, что определенный нами интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени 1 *по пути конечной длины* является обобщением уже известного интеграла по пути класса C^1 или по пути, кусочно принадлежащему этому классу.

2°) Оценка. Если пространство $\vec{E}$ нормировано, то интеграл (VI, 6; 69) можно оценить следующим образом:

$$\left\| \int_{M \mid \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha, \beta]} \| \vec{\omega}(M(t)) \| \right) L, \qquad \text{(VI, 6; 71)}$$

где $\| \ \|$ — норма в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и L — полная вариация функции M на $[\alpha, \beta]$, т. е. длина пути $M \mid [\alpha, \beta]$ в метрическом пространстве E. В самом деле, согласно следствию 2 теоремы 90 и его доказательству, $d\vec{M}(t) = \vec{q}(t)\, ds(t)$, где ds, мера длин относительно пути, есть неотрицательная мера на $[\alpha, \beta]$ и норма $\vec{q}$ равна 1. Путь ds-почти всюду имеет касательную, и $\vec{q}(t)$ является единичным вектором касательной в точке $M(t)$, ориентированной в направлении возрастания значений t (а следовательно, при $\alpha > \beta$, имеющей направление, противоположное пробеганию пути).

Тогда, согласно определению (IV, 5; 13),

$$\int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{q}(t)\,ds(t). \qquad \text{(VI, 6; 72)}$$

Так как $\|\vec{q}(t)\| = 1$, то $\|\vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{q}(t)\| \leqslant \|\vec{\omega}(M(t))\|$, откуда следует (VI, 6; 71). Эта оценка напоминает оценку (VI, 6; 31).

Если пространство E евклидово, то через $\cos\alpha_j(t)$ можно обозначить направляющие косинусы касательной в точке $M(t)$. Поэтому $dx_j(t) = (\cos\alpha_j(t))\,ds(t)$. Теперь в силу соотношения (VI, 6; 70) получаем оценку

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha,\beta]} \left\| \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j(M(t)) \cos\alpha_j(t) \right\| \right) L, \qquad \text{(VI, 6; 73)}$$

которую с помощью неравенства Коши — Шварца можно усилить:

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha,\beta]} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \|\vec{A}_j(M(t))\|^2} \right) L. \qquad \text{(VI, 6; 74)}$$

3°) Вычисление интеграла путем перехода к пределу. Пусть Δ — разбиение $t_0 = \alpha$, t_1, t_2, ..., t_i, t_{i+1}, ..., $t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, где наибольшая из длин отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ равна η. Вычислим разность между интегралом (VI, 6; 69) и суммой

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot \overrightarrow{(M(t_{i+1}) - M(t_i))}, \quad \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]. \qquad \text{(VI, 6; 75)}$$

Выражение (VI, 6; 75) можно записать в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{\varpi}(t) \cdot d\vec{M}(t), \qquad \text{(VI, 6; 76)}$$

где $\vec{\varpi}$ — функция на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, равная $\vec{\omega}(M(\theta_i))$ в интервале $]t_i; t_{i+1}[$. Таким образом, имеем

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{]\alpha,\beta[}} \vec{\omega} - \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot \overrightarrow{(M(t_{i+1}) - M(t_i))} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)) \cdot d\vec{M}(t) \right\|. \qquad \text{(VI, 6; 77)}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем η настолько малым, чтобы при всех $|t' - t''| \leqslant \eta$ выполнялось неравенство $\|\vec{\omega}(M(t')) - \vec{\omega}(M(t''))\| \leqslant \varepsilon/L$, где L — длина пути (это возможно, так как функция $t \to \vec{\omega}(M(t))$, непрерывная на компакте $[\alpha, \beta]$, равномерно непрерывна на нем). Тогда $\|\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)\| \leqslant \varepsilon/L$ и правая часть неравенства (VI, 6; 77) не превосходит числа $\frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$. Отсюда следует, что интеграл от $\vec{\omega}$ по пути $M | \overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ является пределом сумм Римана (VI, 6; 75) при η, стремящемся к нулю. Из этого утверждения видно, что интеграл не зависит от параметризации пути. Две эквивалентные параметризации пути дают один и тот же интеграл; этот факт распространяет теорему 35 на случай, когда путь M имеет только конечную длину. Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 36. *Интеграл от дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *первой степени, определенной и непрерывной на открытом множестве* Ω *аффинного конечномерного пространства* E, *по пути* $M | \overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ *класса* C^1 *в* Ω *выражается в виде* (VI, 6; 67). *Если путь конечной длины не обязательно принадлежит классу* C^1, *то интеграл можно обобщить в соответствии с формулами* (VI, 6; 69) *и* (VI, 6; 70). *Этот интеграл не зависит от параметризации пути: два эквивалентных пути дают один и тот же интеграл. Интеграл допускает оценки* (VI, 6; 71), (VI, 6; 73) и (VI, 6; 74). *Он является пределом сумм Римана* (VI, 6; 75), *когда наибольшая из длин отрезков разбиения* Δ *интервала* $[\alpha, \beta]$ *стремится к нулю.*

§ 7. ФОРМУЛА СТОКСА

Многообразия с краем

Введем сначала понятие многообразия с краем. Прототипом такого многообразия может служить замкнутый шар евклидова аффинного пространства, границей которого служит соответствующая сфера.

Многообразием с краем класса C^m *размерности* n называется замкнутая часть V многообразия $\widetilde{V}$ класса C^m размерности n, совпадающая с замыканием своей внутренности, $V = \overline{\overset{\circ}{V}}$, граница которой $\dot{V} = \Sigma$ является гиперповерхностью в $\widetilde{V}$, т. е. подмногообразием класса C^m размерности $n - 1$. Эта граница Σ называется *краем*, или *границей*, многообразия V и обозначается через bV. Многообразие с краем V является довольно частным случаем псевдомногообразия класса C^m размерности n. Двумерное псевдомногообразие класса C^∞, определенное в (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64), многообразием с краем не является. Некоторые топологические свойства, относящиеся к случаю, когда V — шар евклидова пространства и bV — соответствующая сфера, переносятся на общий случай. Если граница Σ пуста, то V становится обычным многообразием без края. Рассмотрим поэтому случай, когда граница Σ не пуста. Ее дополнение $\complement\Sigma$ в $\tilde{V}$ является объединением двух непересекающихся открытых множеств: внутренности $\mathring{V}$ множества V и дополнения $\complement V$, внешней части V. Ни одно из этих двух открытых множеств не может быть пустым. В самом деле, если бы $\mathring{V}$ было пусто, то $V = \overline{\mathring{V}}$ также было пусто. С другой стороны, если $\complement V$ пусто, то множество V совпадает с $\tilde{V}$ и, следовательно, его граница Σ пуста. Отсюда следует, что $\complement\Sigma$ есть объединение двух открытых непересекающихся и непустых множеств, а следовательно, оно не связно и содержит не менее двух областей.

Обозначим через $(\Omega_i)_{i \in I}$ связные компоненты $\complement\Sigma$; каждая из них, если она имеет общие точки одновременно с $\mathring{V}$ и $\complement V$, согласно теореме 36 гл. II, должна иметь общие точки с Σ, а это невозможно, так как она лежит в дополнении к Σ. Следовательно, каждая из областей Ω_i содержится полностью в $\mathring{V}$ или полностью в $\complement V$. Другими словами, множество I можно представить в виде объединения двух дополнительных множеств J и K, так что $\mathring{V} = \bigcup\limits_{i \in J} (\Omega_i)$ и $\complement V = \bigcup\limits_{i \in K} \Omega_i$. Внутренность и внешняя часть V являются объединением областей, дополнительных к Σ. Если окажется, что Σ делит V ровно на две части, то обе эти области равны $\mathring{V}$ и $\complement V$. Рассуждение, аналогичное проведенному в теореме 28, показывает, что если $\tilde{V}$ и Σ связны, то Σ делит $\tilde{V}$ не более чем на две области[1]). Однако так как в сделанных предположениях (Σ является границей V) существует не менее двух областей, то Σ делит $\tilde{V}$ ровно на две области $\mathring{V}$ и $\complement V$.

---

[1]) Поскольку при доказательстве теоремы 28 $\tilde{V}$ предполагалось аффинным пространством, то можно было использовать отрезок прямой, соединяющей точку области с точкой Σ. Здесь $\tilde{V}$ связно, а следовательно, линейно связно (т. I, гл. II, § 10, теорема 36_7). Поэтому точку области и точку Σ можно соединить некоторым путем, а этого достаточно для проведения необходимых рассуждений.

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество из $\tilde{V}$. Тогда пересечение $V \cap \mathcal{O}$ представляет собой в $\mathcal{O}$ многообразие с краем, и его граница есть не что иное, как $\Sigma \cap \mathcal{O}$.

[Это чисто топологическое свойство, вытекающее из того, что $\mathcal{O}$ — открытое множество. Когда говорят, что точка $a \in \mathcal{O}$ является внутренней в $V \cap \mathcal{O}$ относительно $\mathcal{O}$, это означает, что $V \cap \mathcal{O}$ является окрестностью a в $\mathcal{O}$. Однако, так как множество $\mathcal{O}$ открыто, это утверждение сводится к следующему: V является окрестностью a в $\tilde{V}$ и, значит, a лежит в пересечении внутренности $\overset{\circ}{V}$ множества V и множества $\mathcal{O}$. Следовательно, $(V \cap \mathcal{O})^{\circ} = \overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$. С другой стороны, для того чтобы точка $a \in \mathcal{O}$ принадлежала границе множества $V \cap \mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы каждая окрестность a в $\mathcal{O}$ содержала точки V и точки $\complement V$. Это утверждение равносильно тому, что каждая окрестность точки a в V обладает тем же свойством, поскольку $\mathcal{O}$ открыто, т. е. a лежит на границе множества V, а значит, в $\Sigma \cap \mathcal{O}$. Таким образом, получаем $(V \cap \mathcal{O})^{\bullet} = \dot{V} \cap \mathcal{O} = \Sigma \cap \mathcal{O}$. Множество $\Sigma \cap \mathcal{O}$ является многообразием класса C^m размерности $n-1$. Наконец, каждая точка множества $V \cap \mathcal{O}$ является точкой прикосновения в $\tilde{V}$ для $\overset{\circ}{V}$, а следовательно, в $\mathcal{O}$ для $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$. Значит, $V \cap \mathcal{O}$ является в $\mathcal{O}$ замыканием своей внутренности.]

Если окажется, что граница Σ делит $\mathcal{O}$ на две области, то этими областями будут $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$ и $\complement V \cap \mathcal{O}$. В теореме 27 мы видели, что каждая точка a из Σ обладает открытыми окрестностями $\mathscr{V}$, которые делятся поверхностью Σ на две области, для каждой из которых точка a является точкой прикосновения. Отсюда вытекает, что каждая точка a из Σ является одновременно точкой прикосновения для $\overset{\circ}{V}$ и для $\complement V$.

Многообразие с псевдокраем

Для формулы Стокса нам понадобятся множества, представляющие собой только многообразия с псевдокраем.

Говорят, что множество V есть *многообразие с псевдокраем класса C^m размерности n*, если оно является частью некоторого многообразия $\tilde{V}$ класса C^m размерности n, замкнутой в $\tilde{V}$ и совпадающей с замыканием своей внутренности, граница которого Σ является псевдомногообразием класса C^m размерности $n-1$[1]).

[1]) Эта граница называется псевдограницей. — *Прим. ред.*

Так, например, множество точек (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих неравенствам

$$x^2+y^2 \leqslant (1-z)^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{VI, 7; 1}$$

образует многообразие с псевдокраем класса C^∞ размерности 3, внутренность которого $\overset{\circ}{V}$ является множеством точек, удовлетворяющих неравенствам

$$x^2+y^2 < (1-z)^2, \quad 0 < z < 1, \tag{VI, 7; 2}$$

а граница которого Σ является псевдогиперповерхностью, определенной соотношениями (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64). Точно так же если в плоскости мы рассмотрим выпуклый многоугольник, то он будет представлять собой многообразие с псевдокраем класса C^∞ размерности 2, внутренность которого является внутренней частью многоугольника, а его граница — контур многоугольника — является объединением конечного числа отрезков прямых, т. е. псевдомногообразием класса C^∞ размерности 1. Более общо, полиэдральное тело является многообразием с псевдокраем.

Многообразие с псевдокраем является частным случаем псевдомногообразия [поверхность Σ, определенная соотношениями (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64), не является многообразием с псевдокраем; однако мы только что видели, что она является псевдограницей некоторого многообразия с псевдокраем].

Если V является многообразием с краем, то его граница Σ есть истинное многообразие без края. Поэтому $bbV=\emptyset$. Напротив, если V — многообразие с псевдокраем, то его псевдограница Σ — всего лишь некоторое псевдомногообразие.

В итоге мы получаем следующие импликации[1]):

V — многообразие, $bV=\emptyset$	$\longrightarrow$	V — многообразие с краем, bV — многообразие, $bbV=\emptyset$	$\longrightarrow$	V — многообразие с псевдокраем, bV — псевдомногообразие	$\longrightarrow$	V — псевдомногообразие

Пусть теперь V — многообразие с псевдокраем класса C^m размерности n и H — отображение класса C^m некоторой окрестности V из $\tilde{V}$ в многообразие Ω (которое здесь, вообще говоря, будет некоторым открытым множеством аффинного пространства). Тогда $H|V$ является особым много-

[1]) Все эти «варварские» понятия вводятся не ради удовольствия! Обычно на практике приходится вводить формулу Стокса для пространств, аналогичных полиэдрам, т. е. для многообразий с псевдокраем.

образием с псевдокраем в Ω класса C^m размерности n. Его псевдокрай является особым псевдомногообразием $H \mid bV$ класса C^m размерности $n-1$.

Ориентация псевдокрая

Пусть сначала $V \subset \tilde{V}$ — некоторое многообразие с краем класса C^1. Предположим, что $\tilde{V}$ ориентировано. Тогда V также будет ориентированным в смысле ориентации псевдомногообразий: его регулярная часть $\mathring{V}$ — открытое множество из $\tilde{V}$ — ориентирована. Кроме того, *край Σ можно снабдить канонической ориентацией.*

В самом деле, границу можно снабдить трансверсальной ориентацией, в которой выходящие относительно $\mathring{V}$ векторы считаются положительными (теорема 29). Поскольку граница Σ является гиперповерхностью в ориентированном многообразии $\tilde{V}$, то теперь ее можно снабдить соответствующей касательной ориентацией (теорема 30 и замечание на стр. 177). Базис касательного векторного пространства в точке x поверхности Σ будет положительным в этой ориентации, если после присоединения к нему впереди вектора, выходящего относительно $\mathring{V}$ в точке x, он будет положительным в ориентации $\tilde{V}$. В этом случае говорят, что ориентированное многообразие $\vec{\Sigma}$ является краем ориентированного многообразия с краем $\vec{V}$ и пишут: $\vec{\Sigma} = \widehat{b\vec{V}}$. Если $\vec{V}$ заменить на $\overleftarrow{V}$, т. е. на V с противоположной ориентацией, то $\vec{\Sigma}$ заменится на $\overleftarrow{\Sigma}$. Уместно заметить, что $\complement\mathring{V}$ также является многообразием с краем с внутренней частью $\complement V$ и тем же самым краем Σ. Если $\complement\mathring{V}$ ориентировано в соответствии с ориентацией $\tilde{V}$, то *ориентация Σ как границы $\complement\mathring{V}$ противоположна ее ориентации как границы V.* Если, например, V является замкнутым шаром $\|x\| \leqslant R$ некоторого аффинного евклидова пространства, то ориентация Σ как границы V является канонической ориентацией сфер евклидова пространства (стр. 179). Ориентация Σ как границы множества $\|x\| \geqslant R$ противоположна предыдущей ориентации.

Если рассматривается ориентированное особое многообразие с краем $H \mid \vec{V}$, определенное отображением H класса C^1 некоторого ориентированного многообразия с краем $\vec{V}$, то границей этого особого многообразия называется сужение $H \mid \widehat{b\vec{V}} = H \mid \vec{\Sigma}$ отображения H на границу $\vec{\Sigma}$ многообразия $\vec{V}$.

Если $\vec{V}$ является лишь ориентированным многообразием с псевдокраем, то можно тем же самым методом ориентировать регулярную часть $\mathcal{U}$ псевдокрая Σ. Это то же самое, что мы называли ориентацией Σ. Следовательно, здесь псевдограница ориентированного многообразия с псевдокраем является ориентированным псевдомногообразием. Например, если V — полиэдр, то ориентация V определяет ориентацию граней полиэдра. Если $\vec{V}$ — множество, определенное формулой (VI, 7; 1) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и снабженное канонической ориентацией $\mathbb{R}^3$, то его псевдокрай является псевдогиперповерхностью $\hat{\Sigma}$, определенной формулами (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64) и снабженной ранее определенной ориентацией. То же самое можно сделать для особого многообразия с псевдокраем.

Ориентированное многообразие (без края) называют также *циклом*. Например, ориентированная сфера евклидова пространства является компактным циклом. Отображение H цикла является особым циклом. Таким образом, край многообразия (соответственно особого многообразия) с краем является циклом (соответственно особым циклом).

Теорема Стокса

Пусть $\vec{V} \subset \vec{\tilde{V}}$ — ориентированное многообразие класса C^1 размерности n с краем или псевдокраем. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1 на V.

Имеет место формула Стокса

$$\int\limits_{\vec{V}} d\vec{\omega} = \int\limits_{\overrightarrow{bV}} \vec{\omega}. \tag{VI, 7; 3}$$

Согласно этой формуле, допустима перестановка операции взятия границы многообразия $\vec{V}$ и операции взятия кограницы дифференциальной формы $\vec{\omega}$. (Именно отсюда произошло название «кограница», естественно согласующееся с понятием границы многообразия.) В этой формуле, с одной стороны, интегрируется дифференциальная форма $\vec{\omega}$ степени $n-1$ на ориентированном псевдомногообразии $\overrightarrow{bV}$ размерности $n-1$ и, с другой, — дифференциальная форма $d\vec{\omega}$ степени n на ориентированном псевдомногообразии $\vec{V}$ размерности n.

Эта теорема применима только при некоторых весьма ограничительных условиях. Ее можно, естественно, обобщить на особые многообразия с краем или псевдокраем (см. формулу (VI, 7; 4)).

Элементарная теорема Стокса

Теорема 37. *Пусть $V \subset \tilde{V}$ — ориентированное многообразие с краем Σ класса C^2 размерности n. Пусть H — отображение класса C^2 некоторой окрестности многообразия V из $\tilde{V}$ в многообразие Ω класса C^2, определяющее некоторое ориентированное особое многообразие с краем $H \mid \vec{V}$ многообразия Ω* [1]. *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1, определенная в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Если V пересекает прообраз при отображении H носителя $\vec{\omega}$ по некоторому компакту (а это так, когда V компактно [2]*) или когда $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель и отображение H является собственным на V), то имеет место формула Стокса*

$$\int_{H \mid \vec{V}} d\vec{\omega} = \int_{H \mid b\vec{V}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 4)}$$

Эта теорема называется *элементарной* теоремой Стокса по той причине, что многообразие V имеет край bV, являющийся истинным многообразием.

Доказательство. 1-*й случай*. Пусть $\Omega = \tilde{V} = V = \mathbb{R}^n$ (следовательно, $\Sigma = \emptyset$), H — тождественное отображение и форма $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель. Предполагается, что пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено своей канонической ориентацией.

Можно считать, что дифференциальная форма $\vec{\omega}$ записана в виде (VI, 3; 41):

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 5)}$$

Тогда

$$d\vec{\omega} = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 6)}$$

Нам достаточно будет показать, что формула (VI, 7; 3) справедлива в случае, когда сумма сводится к *одному* члену,

---

[1]) В дальнейшем в этом курсе многообразие Ω будет открытым множеством конечномерного аффинного пространства. Именно так будет в том случае, когда V лежит в конечномерном аффинном пространстве и H — тождественное преобразование.

[2]) Это случай, с которым мы будем встречаться чаще всего.

т. е. доказать ее для формы $\vec{\omega}=\vec{\omega}_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

При $V=\mathbb{R}^n$, снабженном канонической ориентацией, функция ориентации θ, указанная на стр. 151, равна $+1$, и поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots} \int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{VI, 7; 7}$$

является обычным кратным интегралом. Написанные интегралы имеют смысл, поскольку $\vec{\omega}$ непрерывна и имеет компактный носитель.

Так как край Σ пуст, то интеграл на $\vec{\Sigma}$ равен нулю, и доказываемая формула запишется в виде

$$\int\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots} \int \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0. \tag{VI, 7; 8}$$

Применим теорему Фубини (теорема 77 гл. IV):

$$\int\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots} \int \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\ldots} \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j. \tag{VI, 7; 9}$$

В теореме Фубини указывается, что последний интеграл имеет смысл только для $(dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n)$-почти всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ и что он определяет $(dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n)$-интегрируемую функцию. Однако так как для $\vec{\omega}$ с компактным носителем имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j =$$
$$= [\vec{\omega}_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_n)]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = \vec{0}, \tag{VI, 7; 10}$$

то *последний интеграл всегда существует и равен нулю.*

2-й случай. Многообразие V является замкнутым полупространством $x_1 \leqslant 0$ пространства $\tilde{V}=\Omega=\mathbb{R}^n$, H — тождественное отображение и $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Мы предполагаем, что $\mathbb{R}^n$ снабжено канонической ориентацией. В этом случае Σ представляет собой гиперплоскость $x_1=0$, и, как это указывалось на стр. 177, ориентация Σ является канонической ориентацией, в которой базис $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ положителен. Как и в первом случае, предположим, что $\vec{\omega}$ имеет вид (VI, 7; 6), где сумма $\sum$ сводится к одному члену. Левая часть равенства (VI, 7; 4) является интегралом, равным интегралу, стоящему в левой части равенства (VI, 7; 8), но вычисленному не на $\mathbb{R}^n$, а на V — полупространстве $x_1 \leqslant 0$. Правая часть равенства (VI, 7; 4) вычисляется следующим образом. Для многообразия Σ берется тождественная карта. Прообраз формы $\vec{\omega}$ на $\mathbb{R}^n$ является формой на $\mathbb{R}^{n-1}$, полученной в результате замены x_1 и dx_1 на 0 в форме $\vec{\omega}$, т. е. является дифференциальной формой вида $\vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \wedge dx_3, \ldots, dx_n$.

Поскольку Σ имеет каноническую ориентацию пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, функция ориентации θ снова равна 1, и мы получаем:

$$\int_{\vec{\Sigma}} \ldots dx_2 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int \ldots dx_2\, dx_3 \ldots dx_n. \tag{VI, 7; 11}$$

Таким образом, формула Стокса запишется в виде

$$\iint_{x_1 \leqslant 0} \ldots \int \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0 \quad \text{для} \quad j \neq 1 \tag{VI, 7; 12}$$

и

$$\iint_{x_1 \leqslant 0} \ldots \int \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int \vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{VI, 7; 13}$$

Формула (VI, 7; 12) доказывается так же, как доказывалась формула (VI, 7; 8). Согласно теореме Фубини (формула (IV, 8; 35)),

$$\iint_{x_1 \leqslant 0} \ldots \int \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{x_1 \leqslant 0} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_j, \tag{VI, 7; 14}$$

причем последний интеграл равен нулю.

Для формулы (VI, 7; 13) снова воспользуемся теоремой Фубини, которая даст на этот раз с другими пределами интегрирования такое равенство:

$$\int\int\limits_{x_1\leqslant 0}\cdots\int \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdots\int dx_2\ldots dx_n\int\limits_{x_1\leqslant 0}\frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}dx_1. \qquad (VI, 7; 15)$$

Но последний интеграл равен

$$\int\limits_{x_1\leqslant 0}\frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1=$$
$$=[\vec{\omega}_1(\xi, x_2, \ldots, x_n)]_{\xi=-\infty}^{\xi=0}=\vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n). \qquad (VI, 7; 16)$$

Подставляя его в (VI, 7; 15), получаем (VI, 7; 13).

3-*й случай*. Многообразие V произвольно, $\Omega=\widetilde{V}$, H — тождественное отображение, носитель дифференциальной формы $\vec{\omega}$ пересекает многообразие V по некоторому компакту.

Пусть a — точка V. Если эта точка лежит в $\mathring{V}$, то она имеет связную окрестность $\mathscr{V}_a$ в $\mathring{V}$, являющуюся образом карты Φ_a множества $\mathring{V}$. Карта Φ_a отображает открытое множество $\mathscr{O}_a$ из $\mathbb{R}^n$ в V, так что $\Phi_a(\mathscr{O}_a)=\mathscr{V}_a$.

Если же точка a принадлежит Σ, то, согласно следствию 2_2 теоремы 32 гл. III, можно найти такой C^2-диффеоморфизм Φ_a открытого шара $\mathscr{O}_a$ из $\mathbb{R}^n$ на открытую область $\mathscr{V}_a$ в V, содержащую a, что пересечение $\Sigma\cap\mathscr{V}_a$ будет образом при отображении Φ_a пересечения $\mathscr{O}_a$ с гиперповерхностью $u_1=0$ пространства $\mathbb{R}^n$. Эта гиперповерхность разрезает шар на две области $u_1<0$ и $u_1>0$, образы которых при отображении Φ_a являются двумя областями, определенными в $\mathscr{V}_a$ поверхностью Σ. На стр. 215 мы видели, что эти области обязательно равны $\mathring{V}\cap\mathscr{V}_a$ и $\complement V\cap\mathscr{V}_a$. Заменяя, если это необходимо, u_1 на $-u_1$ (что означает, очевидно, замену карты), можно считать, что образом $u_1<0$ при отображении Φ_a является пересечение $\mathring{V}\cap\mathscr{V}_a$.

Множество построенных окрестностей $\mathscr{V}_a$ образует некоторое покрытие V и тем более покрытие компактного по условию пересечения V и носителя формы $\vec{\omega}$. Значит, существует конечное число окрестностей $\mathscr{V}_a$, покрывающих это пересечение (пусть это будут $(\mathscr{V}_i)_{i\in I}$, соответствующие точкам a_i). Пусть $(\alpha_i)_{i\in I}$ — подчиненное разложение единицы, образованное функциями класса C^2. Так как $\widetilde{V}$ по предположению принадлежит классу C^2, такое разложение в силу теоремы 11 гл. IV возможно.

Формула Стокса теперь запишется в виде

$$\sum_{i\in I}\int_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega})=\sum_{i\in I}\int_{\widehat{bV}}\alpha_i\vec{\omega}, \qquad (\mathrm{VI}, 7; 17)$$

поскольку $\sum_{i\in I}\alpha_i$ равна 1 на пересечении V и носителя $\vec{\omega}$.

Докажем, что каждый член первой суммы равен соответствующему члену второй суммы. Поскольку отображение Φ_i является C^2-*диффеоморфизмом*, то оно перестановочно с кограницей d (теорема 17) и $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$ принадлежит классу C^1 в $\mathcal{O}_i$ (теорема 14_2). Поэтому

$$\begin{gathered}\int_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega})=\int_{\mathcal{O}_i}\Phi_i^* d(\alpha_i\vec{\omega})=\int_{\mathcal{O}_i} d(\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})),\\ \int_{\widehat{bV}}\alpha_i\vec{\omega}=\vec{0},\end{gathered} \qquad (\mathrm{VI}, 7; 18)$$

если $a_i\in\mathring{V}$, и

$$\begin{gathered}\int_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega})=\int_{\vec{\mathcal{O}}_i\cap\{u_1<0\}} d(\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})),\\ \int_{\widehat{bV}}\alpha_i\vec{\omega}=\int_{\overrightarrow{\mathcal{O}_i\cap\{u_1=0\}}}\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega}),\end{gathered} \qquad (\mathrm{VI}, 7; 19)$$

если $a_i\in\Sigma$.

Продолжим форму $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$, определенную только в $\mathcal{O}_i$, нулем $\vec{0}$ в $\complement\mathcal{O}_i$. Она будет тогда равна нулю в $\complement K_i$, где K_i — носитель $\Phi_i^*\alpha_i$. Продолженная таким образом на $\mathbb{R}^n$ форма принадлежит классу C^1, что очевидно, так как она принадлежит этому классу в *двух открытых* множествах $\mathcal{O}_i$ и $\complement K_i$, дающих в объединении $\mathbb{R}^n$. Если условиться обозначать попрежнему через $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$ продолженную форму, то в формулах (VI, 7; 18) и (VI, 7; 19) можно заменить $\mathcal{O}_i$ на $\mathbb{R}^n$.

Ориентация, которой надо снабдить $\mathbb{R}^n$, является канонической ориентацией или противоположной ей (в зависимости от функции ориентации θ_i, связанной с Φ_i; постоянство знака обеспечивается связностью множества $\mathcal{O}_i$). Впрочем, это особой роли не играет и можно взять, например, каноническую ориентацию $\mathbb{R}^n$, поскольку при этом одновременно сохранятся или изменятся знаки обеих частей.

Равенство обеих строк в формуле (VI, 7; 18) вытекает из 1-го доказанного случая, а равенство обеих строк в (VI, 7; 19) вытекает из 2-го случая. Таким образом, (VI, 7; 17), а значит, и 3-й случай доказаны.

4-*й случай*: *общий случай*. Пусть теперь отображение H произвольно. Согласно определению интеграла от дифференциальной формы по особому многообразию, формула Стокса эквивалентна соотношению

$$\int_{\vec{V}} H^* d\vec{\omega} = \int_{\widehat{bV}} H^* \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 20)}$$

Так как отображение H по предположению принадлежит классу C^2, то отображение H^* коммутирует с кограницей d (теорема 17), а это приводит к равенству

$$\int_{\vec{V}} d\,(H^* \vec{\omega}) = \int_{\widehat{bV}} H^* \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 21)}$$

Но по предположению носитель $H^* \vec{\omega}$ пересекается с V по компакту, и полученная формула получается из 3-го случая относительно $H^* \vec{\omega}$. Тем самым элементарная теорема Стокса полностью доказана.

Замечание. В большинстве случаев можно ограничиться предположением о том, что H и $\tilde{V}$ принадлежат не классу C^2, а лишь классу C^1. Мы не будем приводить здесь точные условия для этого случая. Иногда это не вносит никаких серьезных дополнительных трудностей; иногда переход от C^2 к C^1 сам по себе является новой и тонкой теорией.

Общая теорема Стокса

В случае, *когда многообразие V имеет псевдограницу Σ, сформулированы условия применимости формулы Стокса*, которые могут охватить хотя бы наиболее часто встречающиеся случаи. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая более или менее удовлетворительной общности.

Пусть Σ — замкнутая псевдогиперповерхность класса C^1 из $\mathbb{R}^n$ или некоторый открытый шар из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\vec{F}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, порожденное базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n$.

Пусть P_j — операция «проектирования на F_j параллельно $\vec{e}_j$»: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Это линейное непрерывное отображение $\mathbb{R}^n$ на $\vec{F}_j = \mathbb{R}^{n-1}$. Пусть b — некоторая точка F_j. Предположим, что в подпространстве $\vec{F}_j$ существует окрестность $\mathscr{B}$ точки b, проектирующий цилиндр которой $P_j^{-1}\mathscr{B}$ пересекает Σ в конечном числе l (возможно, и нулевом) связных компонент Σ_k, $k=1, 2, \ldots, l$, каждая из которых имеет явное уравнение $x_j = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, причем функции F_k принадлежат классу C^1 на $\mathscr{B}$. Отсюда следует, что $P_j^{-1}\mathscr{B} \cap \Sigma$ лежит в регулярной части $\mathscr{U}$ поверхности Σ. В этом случае говорят, что точка b из $\vec{F}_j$ является P_j-регулярной для Σ.

Будем называть поверхность Σ регулярной для проекции P_j, если каждая точка b из $\vec{F}_j$ является P_j-регулярной для Σ, кроме, быть может, точек b исключительного множества $\mathscr{F}_j$ из $\vec{F}_j$ лебеговой меры нуль в пространстве $\vec{F}_j$, проектирующий цилиндр которого $P^{-1}\mathscr{F}_j$ пересекает регулярную часть $\mathscr{U}$ множества Σ по множеству нулевой $(n-1)$-мерной площади. Среди точек этого пересечения фигурируют точки «видимого контура» части $\mathscr{U}$, т. е. такие точки из $\mathscr{U}$, в которых касательная гиперплоскость параллельна $\vec{e}_j$ (и все точки пересечения $\mathscr{U}$ с проектирующим цилиндром видимого контура). Предполагается, что множество этих точек видимого контура имеет, в частности, нулевую $(n-1)$-мерную площадь. (Это не тот случай, когда, например, Σ является псевдограницей куба с ребрами, параллельными координатным осям. Однако теорема Стокса применима к кубу! Простое изменение системы координат делает псевдограницу куба P_j-регулярной для каждого $j=1, 2, \ldots, n$, а этого нам достаточно.)

Теорема 38. *Пусть $\tilde{V}$ — многообразие с псевдокраем класса C^1 некоторого ориентированного n-мерного многообразия $\vec{V}$ класса C^1. Предположим, что для каждой точки a особой части псевдограницы Σ существует C^1-диффеоморфизм Φ_a некоторого открытого шара $\mathscr{O}_a$ пространства $\mathbb{R}^n$ (или самого пространства $\mathbb{R}^n$) на некоторую открытую окрестность $\Phi_a(\mathscr{O}_a)$ точки a в $\tilde{V}$, такой, что область $\Phi_a^{-1}(\Sigma)$ является P_j-регулярной в $\mathscr{O}_a$ для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ и имеет регулярную часть $\Phi_a^{-1}(\mathscr{U})$ конечной $(n-1)$-мерной площади.*

Пусть H — отображение класса C^1 открытой окрестности V из $\tilde{V}$ в некоторое многообразие Ω класса C^2.

Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1 в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если пересе-

чение V и прообраза при отображении H носителя $\vec{\omega}$ компактно, то имеет место формула Стокса (VI, 7; 4).

Конечно, эта теорема содержит как частный случай предыдущую. Можно было бы доказать ее сразу. Однако мы предпочли дать сначала элементарное доказательство элементарного случая. Точно так же, как и в предыдущей теореме, мы приведем доказательство только для значительно более простого случая, когда C^1 всюду заменено на C^2.

Доказательство. *1-случай.* Пусть $\tilde{V}$ — открытый шар из $\mathbb{R}^n$ или само пространство $\mathbb{R}^n$. Для упрощения технической стороны доказательства положим $\tilde{V}=\mathbb{R}^n$. Псевдограница Σ многообразия V P_j-регулярна для каждого $j=1, 2, \ldots, n$, а ее регулярная часть $\mathcal{U}$ имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь. Пусть $\Omega=\tilde{V}$, H — тождественное отображение и носитель формы $\vec{\omega}$ компактен. В этом первом случае предположение о том, что $\mathcal{U}$ принадлежит классу C^1, не усложняет задачу. Мы будем считать, что форма $\vec{\omega}$ задана в виде (VI, 7; 5) с единственным членом $\vec{\omega}_j$ в сумме $\sum$.

Нам достаточно для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ показать, что

$$(-1)^{j-1}\int\int\underset{V}{\ldots}\int\frac{\partial\vec{\omega}_j}{\partial x_j}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{\vec{\Sigma}}\vec{\omega}_j\,dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\ldots\wedge dx_n, \qquad \text{(VI, 7; 22)}$$

где интеграл $\int_{\vec{\Sigma}}$ равен $\int_{\vec{\mathcal{U}}}$, а $\mathcal{U}$ — регулярная часть Σ.

Различные значения j здесь играют одинаковую роль. Поэтому достаточно провести доказательство, например, для $j=1$.

A) Левую часть можно вычислить по формуле Фубини, что дает интеграл

$$\int\ldots\int dx_2\,dx_3\ldots dx_n\int_{V(x_2,\ldots,x_n)}\frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1, \qquad \text{(VI, 7; 23)}$$

где $V(x_2, \ldots, x_n)$ — множество из $\mathbb{R}$, образованное такими значениями x_1, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in V$ [след многообразия V на прямой, параллельной оси x_1, с координатами $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — см. формулу (IV, 8; 35)]. Теорема Фубини утверждает только, что последний интеграл имеет смысл для $(dx_2\,dx_3\ldots dx_n)$-почти всех значений $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и определяет некоторую

$(dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n)$-интегрируемую функцию. Больше здесь ничего нельзя сказать, как это было в первом или втором случаях доказательства теоремы 37.

Обозначим последний интеграл через $\vec{J}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Он $(dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n)$-интегрируем, и, следовательно, на $\mathbb{R}^{n-1}$ мера $\vec{J}(x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n$ имеет конечную норму. Обозначим эту меру через $\vec{\nu}$. Тогда левая часть соотношения (VI, 7; 23) будет равна $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu}$. Таким образом,

$$\begin{gathered}\vec{J}(x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{V(x_2, \ldots, x_n)} \frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1,\\ d\vec{\nu} = \vec{J}(x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\,\ldots\,dx_n, \qquad \text{(VI, 7; 24)}\\ \int\limits_{\vec{V}} d\vec{\omega} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu}.\end{gathered}$$

B) Рассмотрим теперь дифференциальную форму $\vec{\omega}$. На регулярной части $\vec{\mathcal{U}}$ (ориентированной как граница множества V) поверхности Σ она определяет некоторую меру $[\vec{\omega}] = [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$. Поскольку форма $\vec{\omega}_1$ со значениями в $\vec{F}$ непрерывна и имеет компактный носитель, ее норма ограничена. С другой стороны, так как часть $\mathcal{U}$ по предположению имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь, из теоремы 32 следует, что $[\vec{\omega}]$ является мерой с конечной нормой и базой dS, являющейся мерой $\geqslant 0$ с конечной нормой. Теперь в силу непрерывности проекции P_1: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \to (x_2, x_3, \ldots, x_n)$ образ $\vec{\mu} = P[\vec{\omega}]$ существует и является мерой конечной нормы на $\mathbb{R}^{n-1}$ (теорема 59 гл. IV и ее обобщение на случай векторных мер; см. стр. 627 т. I[1])). Правая часть соотношения (VI, 7; 4) равна $\int\limits_{\vec{\mathcal{U}}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$.

[1]) В противоположность тому, что говорилось ранее на стр. 627 т. I, теперь нет необходимости предполагать пространство $\vec{F}$ конечномерным, поскольку *мы уже знаем*, что $[\vec{\omega}]_{\mathcal{U}}$ имеет базу dS и плотность, ограниченную величиной $|||\vec{\omega}_1||| < +\infty$.

Напротив, нам неизвестно, будет ли образ $P_1[\vec{\omega}]$ меры $[\vec{\omega}]$ при отображении P_1 иметь базу $\geqslant 0$. Значит, мы не можем применить к нему теорию продолжения Лебега (стр. 610 т. I), а потому должны помнить о том, что

C) Пусть $b=(b_2, \ldots, b_n)$ — точка пространства $\vec{F}_1=\mathbb{R}^{n-1}$, P_1-регулярная для Σ, и пусть $\mathscr{B}$ — некоторая открытая связная окрестность точки b в $\vec{F}_1$, обладающая свойствами, указанными на стр. 225.

Покажем, что $\vec{\mu}=\vec{\nu}$ *в окрестности* $\mathscr{B}$. Если ограничиться только значениями образа $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathscr{U}}}$ при отображении P_1, лежащими в $\mathscr{B}$, то $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathscr{U}}}$ можно заменить на $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathscr{U}}}$ — меру, соответствующую форме $\vec{\omega}$ на ориентированном многообразии $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathscr{U}}$ [1]).

Здесь $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathscr{U}}=\vec{\Sigma}_1\cup\vec{\Sigma}_2\cup\ldots\cup\vec{\Sigma}_l$.

Рассмотрим меру $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$, определенную формой $\vec{\omega}$ на $\vec{\Sigma}_k$. Сужение $P_{1,k}$ проекции P_1 на Σ_k является C^1-диффеоморфизмом Σ_k на $\mathscr{B}$, поскольку это сужение допускает обратное отображение

$$P_{1,k}^{-1}\colon (x_2, \ldots, x_n)\to(x_1=F_k(x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(VI, 7; 26)}$$

класса C^1 окрестности $\mathscr{B}$ в $\mathbb{R}^n$.

Кроме того, можно сказать, что $P_{1,k}^{-1}\colon \mathscr{B}\to\Sigma_k$ является некоторой картой множества Σ_k. Согласно определению меры, соответствующей дифференциальной форме на ориентированном многообразии и построенной по карте этого многообразия (формула (VI, 6; 2)), $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$ является образом при отображении $P_{1,k}^{-1}$ меры

$$\vec{\mu}_k=\theta_k\vec{\omega}_1(F_k(x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\ldots dx_n, \qquad \text{(VI, 7; 27)}$$

эта теория здесь неприменима. Однако *мы настоятельно рекомендуем читателю* не обременять себя трудностями, связанными, возможно, с бесконечномерностью или даже с векторной природой пространства $\vec{F}$. Используя другие методы (слабые интегралы, теорему Хана — Банаха), можно свести случай дифференциальной формы с векторными значениями *непосредственно* к случаю формы со скалярными значениями!

[1]) Это вовсе не так очевидно, как кажется! На стр. 187 мы видели, что мера $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathscr{U}}}$ является сужением на $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\mathscr{U}$ меры $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathscr{U}}}$. С другой стороны, легко доказать свойство образов мер, не упоминавшееся в § 6 гл. IV: если P_1 является непрерывным λ-собственным отображением $X=\mathscr{U}$ в $Y=\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mathscr{B}$ является открытым множеством в Y, то сужение образа меры $P_1\lambda$ на открытое множество $\mathscr{B}$ совпадает с образом при отображении P_1 сужения λ на открытое множество $P_1^{-1}\mathscr{B}$.

определенной на $\mathscr{B}$. Здесь θ_k — функция ориентации, связанная с картой $P_{1,k}^{-1}$. Так как окрестность $\mathscr{B}$ по предположению связна, эта функция постоянна (равна ± 1). Следовательно, образ меры $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$ при отображении P_1 равен $\vec{\mu}_k$. Окончательно образ меры $[\vec{\omega}]_{P^{-1}\mathscr{B} \cap \vec{\mathscr{U}}}$ при отображении P_1, т. е. сужение меры $\vec{\mu}$ на $\mathscr{B}$, является мерой $\sum\limits_k \vec{\mu}_k$. Таким образом, в окрестности $\mathscr{B}$

$$\vec{\mu} = \sum_{k=1}^{l} \vec{\mu}_k =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{l} \theta_k \vec{\omega}_1 (F_k(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \right) dx_2 \ldots dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 28)}$$

Для того чтобы закончить вычисление $\vec{\mu}$ в $\mathscr{B}$, уточним θ_k. Рассмотрим в точке x из Σ_k векторы $\vec{e}_2', \vec{e}_3', \ldots, \vec{e}_n'$ касательной гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma_k)$, проекциями которых на $\vec{F}_1$ служат векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$ базиса $\vec{F}_1$.

[Поскольку уравнение касательной гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma_k)$, согласно формуле (III, 3; 19_2), имеет вид

$$X_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_2, \ldots, x_n) X_j \qquad \text{(VI, 7; 29)}$$

и $\vec{e}_j$ является вектором, j-я координата которого равна 1, а все остальные — нули, то первой составляющей вектора $\vec{e}_j'$ будет $\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$, и мы получим

$$\vec{e}_j' = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)\, \vec{e}_1 + \vec{e}_j.] \qquad \text{(VI, 7; 30)}$$

По определению, θ_k — это знак базиса $\vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ касательной гиперплоскости $T(x; \vec{\Sigma}_k)$. В силу (VI, 7; 30) базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ пространства $\mathbb{R}^n$ имеет такой же знак, что и канонический базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т. е. этот знак положителен. Следовательно, θ_k — это также знак вектора $\vec{e}_1$ в трансверсальной ориентации $\vec{\Sigma}_k$, соответствующей касательной ориентации поверхности $\vec{\Sigma}_k$. Однако поверхность $\vec{\Sigma}_k$ имеет ориентацию границы V. Значит, функция θ_k равна $+1$, если вектор $\vec{e}_1$ *выходит* из $\mathring{V}$ в точках Σ_k, и равна -1, если этот вектор ***входит*** в $\overset{\circ}{V}$ в точках поверхности Σ_k. Формула (VI, 7; 28) теперь полностью объяснена.

Рассмотрим теперь меру $\vec{\nu}$ в окрестности $\mathscr{B}$. Для точки $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathscr{B}$ параллель $D = D_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$ к оси x_1, проходящая через эту точку, пересекает $\overset{\circ}{V}$ и $\tilde{V} - V = \complement V$ по некоторым открытым множествам. Граничными точками этих открытых множеств могут быть только точки пересечения $D \cap \Sigma_k$ (или $D \cap \dot{\tilde{V}}$, где $\dot{\tilde{V}}$ является граничной сферой шара $\tilde{V}$, если только $\tilde{V}$ — шар; как уже отмечалось выше, мы проведем доказательство для случая, когда $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$). Обратно, если точка $A_k \in \in D \cap \Sigma_k$ и $\mathscr{W}_k$ является окрестностью точки A_k в $P^{-1}\mathscr{B}$, обладающей относительно Σ_k свойствами, указанными в теореме 27, то, как мы видели на стр. 215, две области, определяемые окрестностью $\mathscr{W}_k$ в Σ_k, равны $\overset{\circ}{V} \cap \mathscr{W}_k$ и $\complement V \cap \mathscr{W}_k$. Параллель D, трансверсальная к Σ_k в A_k, проходит от одной до другой области в A_k (теорема 29). Следовательно, A_k действительно является граничной точкой одновременно для $D \cap \overset{\circ}{V}$ и для $D \cap \complement V$ [1]).

Расположим точки A_k в порядке возрастания координаты x_1, а именно $A'_1, A'_2, \ldots, A'_l$. Они делят прямую D на $l+1$ открытых интервалов (из которых два полупрямые). Каждое из множеств $D \cap \overset{\circ}{V}$ и $D \cap \complement V$ представляет собой объединение некоторых из этих интервалов (рассуждение, проведенное на стр. 214). Один из двух последовательных интервалов лежит в $D \cap \overset{\circ}{V}$, а другой — в $D \cap \complement V$, а их общие концы не являются граничными точками. Если договориться через $A'_{-\infty}$ обозначать точку пополненной прямой $\overline{D}$ с координатой $x_1 = -\infty$, то $D \cap V$ будет представлять собой объединение интервалов $[A'_{-\infty}, A'_1]$, $[A'_2, A'_3]$, $[A'_4, A'_5]$, ... или объединение интервалов $[A'_1, A'_2]$, $[A'_3, A'_4]$, ...

Теперь $\vec{J}(x_2, \ldots, x_n)$ вычисляется сразу (формула (VI, 7; 24)). Если $[A'_i, A'_{i+1}]$ является интервалом из $V_{x_2, \ldots, x_n}$, то

$$\int \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 = \\ = \vec{\omega}_1(x'_{i+1}, x_2, \ldots, x_n) - \vec{\omega}_1(x'_i, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{(VI, 7; 31)}$$

---

[1]) На стр. 215 мы видели, что $\overset{\circ}{V} \cap \mathscr{O}$, $\complement V \cap \mathscr{O}$ и $\Sigma \cap \mathscr{O}$ являются внутренней, внешней и граничной частями множества $V \cap \mathscr{O}$ относительно $\mathscr{O}$, если только множество $\mathscr{O}$ открыто. Это топологическое свойство. Здесь D не является открытым множеством, но указанное свойство, как мы только что видели, сохраняется, поскольку Σ_k представляют собой гиперповерхности класса C^1, по отношению к которым прямая D трансверсальна.

где x'_i есть 1-я координата точки A'_i с $\vec{\omega}_1(x'_i, x_2, \ldots, x_n) = 0$, если $x'_i = \pm\infty$, поскольку $\vec{\omega}_1$ имеет компактный носитель.

Суммируя по различным интервалам, получаем

$$\vec{J}(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{l} \eta_k \vec{\omega}_1(F_k(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{(VI, 7; 32)}$$

где η_k равно $+1$, если прямая D пересекает поверхность Σ_k, переходя из $\mathring{V}$ в $\complement V$, когда x_1 возрастает, т. е. если вектор $\vec{e}_1$ выходит из $\mathring{V}$ в точке A_k. В противном случае $\eta_k = -1$. Согласно изложенному выше, это означает, что $\eta_k = \theta_k$. Сравнивая формулы (VI, 7; 32) и (VI, 7; 28), мы теперь видим, что $\vec{\mu} = \vec{\nu}$ в окрестности $\mathscr{B}$.

D) Согласно теореме 13 гл. IV, мера $\vec{\mu} - \vec{\nu}$, равная нулю во всех открытых множествах $\mathscr{B}$ пространства $\vec{F}_1$, равна нулю в их объединении. Но это объединение является открытым множеством $\complement \mathscr{F}_1 = \mathscr{O}_1$ точек b из $\vec{F}_1$, являющихся P_1-регулярными для Σ. В этом открытом множестве $\mathscr{O}_1$ мера $\vec{\mu} - \vec{\nu}$ равна нулю.

Мы видели, что в множестве $\mathscr{O}_1$ мера $\vec{\mu}$ имеет базой меру $dx_2 dx_3 \ldots dx_n \geqslant 0$, ибо ту же базу имеет мера $\vec{\nu}$. К ней можно применить теорию продолжения Лебега и интегрировать ее по $\mathscr{O}_1$. Поскольку мера $\vec{\mu}$ является образом $P_1[\vec{\omega}]_{\vec{\mathscr{U}}}$, мы получаем

$$\int_{\mathscr{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{\mathscr{O}_1} d\vec{\mu} = \int_{P_1^{-1}\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{U}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathscr{U}}}. \qquad \text{(VI, 7; 33)}$$

Это соотношение теперь позволит нам доказать формулу Стокса. В самом деле, поскольку поверхность Σ P_1-регулярна, то $\mathscr{F}_1 = \complement \mathscr{O}_1$ имеет нулевую меру относительно $dx_2 \ldots dx_n$. Следовательно, $\int_{\mathscr{F}_1} d\vec{\nu} = \vec{0}$ и, согласно (VI, 7; 24),

$$\int_{\mathscr{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{R^{n-1}} d\vec{\nu} = \int_{\vec{V}} d\vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 34)}$$

Аналогично, поскольку поверхность Σ P_1-регулярна, $P^{-1}\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{U}$ имеет нулевую $(n-1)$-мерную площадь, а так как $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$ имеет базой dS, то $\int\limits_{p_1^{-1}\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}} = \vec{0}$, так что

$$\int\limits_{p_1^{-1}\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}} = \int\limits_{\mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}} = \int\limits_{\widehat{bV}} \vec{\omega}. \qquad (\mathrm{VI}, 7; 35)$$

Подставляя теперь (VI, 7; 34) и (VI, 7; 35) в (VI, 7; 33), получаем (VI, 7; 3).

2-й случай. Многообразие $\tilde{V}$ произвольно, $\Omega = \tilde{V}$, H — тождественное отображение, носитель $\vec{\omega}$ пересекает V по некоторому компакту.

В этом случае для каждой точки $a \in \mathring{V}$ или регулярной части $\mathcal{U}$ поверхности Σ можно найти открытое множество $\mathcal{O}_a$ в $\mathbb{R}^n$ и отображение Φ_a, обладающее свойствами, указанными в доказательстве третьего случая *элементарной* теоремы Стокса. Если a является особой точкой поверхности Σ, то можно найти шар $\mathcal{O}_a$ в R^n и отображение Φ_a, обладающие свойствами, указанными в условии настоящей теоремы. Доказательство заканчивается с помощью разложения единицы точно так же, как в третьем случае элементарной теоремы с той разницей, что здесь надо будет перейти либо к первому случаю (при $a \in \mathring{V}$), или ко второму случаю (при $a \in \mathcal{U}$) элементарной теоремы, либо к первому случаю настоящей теоремы (при $a \in \Sigma - \mathcal{U}$).

3-й случай. Общий случай точно такой же, как и четвертый случай элементарной теоремы. Таким образом, *общая теорема Стокса* полностью доказана (по крайней мере, если всюду заменить C^1 на C^2).

Упражнения. 1°) Доказать, что компактный полиэдр V аффинного конечномерного пространства удовлетворяет условиям теоремы. Выбирая систему координат, ни один из базисных векторов которой не параллелен ни одной из граней полиэдра, мы придем к первому случаю доказательства. В этом случае можно провести и прямое доказательство даже тогда, когда базисные векторы выбранной системы координат параллельны граням полиэдра. Достаточно взять, например, в качестве V куб с ребрами, параллельными базисным векторам, и проверить, что теорема Стокса тогда непосредственно следует из теоремы Фубини.

2°) Предположим, что V представляет собой многообразие с компактным псевдокраем на плоскости $\tilde{V} = E$, где псевдокрай является некоторой кривой Σ, кусочно принадлежащей классу C^1. Это означает, что псевдомногообразие Σ класса C^1 имеет только конечное число особых точек, в окрестности которых кривая Σ является объединением конечного числа дуг класса C^1, пересекающихся в этой точке. Таким образом, мы оказываемся в условиях применимости рассмотренной теории. (Для каждой особой точки кривой Σ достаточно выбрать систему координат, оси которой не параллельны касательным в этой точке.)

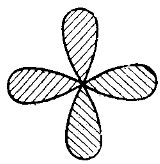

Рис. 5.
V — заштрихованная область.

Изучение частного случая $n=1$

Теорема 39. *Если $M|[\alpha, \beta]$ является путем конечной длины в открытом множестве Ω аффинного конечномерного пространства E, ориентированном в направлении пробегания $\alpha\to\beta$, а $\vec{f}$ является функцией класса C^1 в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то имеет место формула Стокса*

$$\int\limits_{M\,|\,[\alpha,\,\beta]} \overrightarrow{df} = \vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha))\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 7; 36)}$$

Здесь многообразие V — интервал $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, снабженный ориентацией, соответствующей направлению от α к β, и H — отображение M интервала $[\alpha, \beta]$ в Ω.

Мы видим, что трансверсальная ориентация границы $\{\alpha, \beta\}$ получается в том случае, когда положительными в точке α считаются векторы, имеющие направление $\beta\to\alpha$, а положительными в точке β — векторы, имеющие направление $\alpha\to\beta$. Соответствующая касательная ориентация, как мы это видели на стр. 178, заключается в приписывании точке β знака $+$ и точке α знака $-$. Особым многообразием, границей $M|\widehat{[\alpha, \beta]}$,

[1]) В конечном счете формула Стокса является обобщением классической формулы $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = \vec{f}(\beta) - \vec{f}(\alpha)$, соответствующей $E=\mathbb{R}$, где M — тождественное отображение.

будет $M|\{(\alpha, -), (\beta, +)\}$. Согласно определению (VI, 6; 20), интеграл от $\vec{f}$ на этом особом многообразии равен правой части равенства (VI, 7; 36).

Доказательство. Формула (VI, 7; 36) не является частным случаем общей формулы Стокса, поскольку в случае $n=1$ речь идет (теорема 36) об интеграле от дифференциальной формы по пути, не принадлежащему, вообще говоря, классу C^1 и даже кусочно не принадлежащему классу C^1, а имеющему лишь конечную длину.

Выберем в $\vec{E}$ какую-либо норму. К функции $\vec{f}$ применим формулу конечных приращений (следствие 1 теоремы 13 гл. III) относительно точки $x=M(t')$ и приращения $\vec{h}=\overrightarrow{M(t'')-M(t')}$. Так получается следующая формула:

$$\|\vec{f}(M(t''))-\vec{f}(M(t'))-f'(M(t'))\cdot\overrightarrow{(M(t'')-M(t'))}\|\leqslant$$
$$\leqslant\delta\|\overrightarrow{M(t'')-M(t')}\|, \qquad \text{(VI, 7; 37)}$$

где δ допускает такую оценку:

$$\delta\leqslant\sup_{P\in[M(t'),\,M(t'')]}\|f'(P)-f'(M(t'))\|. \qquad \text{(VI, 7; 38)}$$

Для любого заданного $\varepsilon>0$ теперь можно найти такое число $\zeta>0$, что неравенство $\|P-M(t')\|\leqslant\zeta$ $(t\in[\alpha,\beta],\ P\in\Omega)$ влечет за собой неравенство

$$\|f'(P)-f'(M(t'))\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \text{(VI, 7; 39)}$$

где L — длина пути M. Это вытекает из теоремы о равномерной непрерывности непрерывных функций на компакте (теорема 31 гл. II в усиленной форме, приведенная в примечании [2]) на стр. 374 тома I), примененной к непрерывной функции f', определенной на компакте $M([\alpha,\beta])$ — образе интервала $[\alpha,\beta]$ при отображении M метрического пространства Ω.

Применяя затем к непрерывной функции M на компакте $[\alpha,\beta]$ обычную теорему 31 гл. II, и, с другой стороны, теорему 36 настоящей главы, можно найти такое $\eta>0$, чтобы

1°) из неравенства $|t''-t'|\leqslant\eta$ следовало неравенство $\|\overrightarrow{M(t'')-M(t')}\|\leqslant\zeta$;

2°) разность между левой частью соотношений (VI, 7; 36) и (VI, 6; 75) при $\theta_i=t_i$ и $\vec{\omega}=d\vec{f}$ была $\leqslant\varepsilon/2$, когда наибольшая из длин разбиения Δ интервала $[\alpha,\beta]$ не превосходит η.

Если теперь мы выберем такое разбиение Δ с наибольшей из длин частных интервалов $\leqslant\eta$, то неравенство (VI, 7; 37) будет справедливым для $t'=t_i$, $t''=t_{i+1}$ при $\delta\leqslant\varepsilon/2L$.

Тогда

$$\left\| \int\limits_{M \mid [\alpha, \beta]} d\vec{f} - (\vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha))) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{M \mid [\alpha, \beta]} d\vec{f} - \sum_{i=0}^{n-1} f'(M(t_i)) \cdot (\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}) \right\| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \| (f'(M(t_i)) \cdot \overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}) - (\vec{f}(M(t_{i+1})) - \vec{f}(M(t_i))) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \qquad \text{(VI, 7; 40)}$$

Разность между обеими частями соотношения (VI, 7; 36) оказалось $\leqslant \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, это означает, что обе части равны, и теорема доказана.

Частный случай $n = 2$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Формула Римана

Пусть V — компактное многообразие с псевдокраем в $\tilde{V} = \mathbb{R}^2$. Тогда $\overset{\circ}{V}$ будет ограниченным открытым множеством в $\mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что границей является кривая Σ, кусочно принадлежащая классу C^1 [пример 2°), стр. 232], что V снабжено, например, канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$, а кривая Σ имеет каноническую ориентацию псевдограницы многообразия $\vec{V}$.

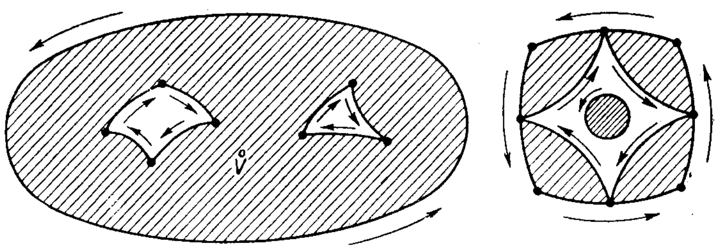

Рис. 6.

В качестве примера можно взять области, изображенные на рис. 6. Мы заштриховали $\overset{\circ}{V}$ и указали направление обхода псевдограницы $\vec{\Sigma}$ многообразия $\vec{V}$:

[В первом примере $\overset{\circ}{V}$ связно, во втором — нет ($\overset{\circ}{V}$ имеет пять связных компонент, а V — две). Впрочем, в качестве V можно взять объединение двух множеств рисунка. Тогда $\overset{\circ}{V}$ будет иметь шесть связных компонент, а V — три.]

Пусть $\vec{\omega} = \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy$ — дифференциальная форма класса C^1, определенная в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{R}^2$, содержащем V, и принимающая значения в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда, учитывая соотношение (VI, 4; 2), приспособленное к $\mathbb{R}^2$ вместо $\mathbb{R}^3$, формулу (VI, 7; 3) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\vec{\mathring{V}}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy. \qquad \text{(VI, 7; 41)}$$

По определению интеграла от дифференциальной формы интеграл $\iint\limits_{\vec{\mathring{V}}} \ldots dx \wedge dy$ можно заменить обычным двойным интегралом $\iint\limits_{V} \ldots dx\,dy$. (Функция ориентации θ, определенная на стр. 151, равна $+1$, поскольку мы ориентировали $\mathring{V}$ в соответствии с канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$. Безразлично, будем

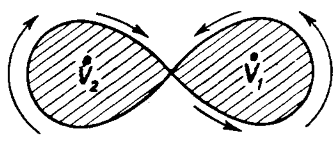

Рис. 7.

ли мы писать $\iint\limits_{\mathring{V}}$ или $\iint\limits_{V}$, поскольку граница Σ имеет нулевую меру относительно меры $dx\,dy$.) Отсюда вытекает как частный случай формулы Стокса формула Римана

$$\iint\limits_{V} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy. \qquad \text{(VI, 7; 42)}$$

Можно было бы попытаться обобщить эту формулу на случай, когда кривая Σ имеет лишь конечную длину и не принадлежит кусочно классу C^1. Мы получили бы теоремы, относящиеся к случаям $n = 2$, $n - 1 = 1$ и выходящие за рамки общей теоремы Стокса. Существует много сложных случаев, о которых мы здесь не упоминали. Они будут изучаться специальными методами.

Возьмем теперь в качестве V фигуру, изображенную на рис. 7, в которой $\mathring{V}_1$ снабжена канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$, а $\overset{\circ}{V}_2$ — противоположной ориентацией и где Σ имеет ориентацию псевдограницы.

Формула (VI, 7; 41) остается верной, но функция ориентации θ равна $+1$ в $\overset{\circ}{V}_1$ и -1 в $\overset{\circ}{V}_2$, так что $\iint\limits_{\vec{\overset{\circ}{V}}} \ldots dx \wedge dy$ равен $\iint\limits_{\overset{\circ}{V}_1} \ldots dx\, dy$, а $\iint\limits_{\vec{\overset{\circ}{V}}_2} \ldots dx \wedge dy$ равен $-\iint\limits_{\overset{\circ}{V}_2} \ldots dx\, dy$.

Формула Римана в этом случае запишется так:

$$\iint\limits_{\overset{\circ}{V}_1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\, dy - \int\limits_{\overset{\circ}{V}_2} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{A}\, dx + \vec{B}\, dy. \qquad \text{(VI, 7; 43)}$$

Замечательные интегральные формулы векторного анализа

1°) *Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой аффинного евклидова пространства.* Пусть $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$ — непрерывное векторное поле на открытом множестве Ω конечномерного аффинного евклидова пространства E. Пусть $\vec{\Gamma}$ — ориентированная кривая в Ω, кусочно принадлежащая классу C^1. Обозначим через $\vec{t}(x)$ единичный вектор касательной в точке x, положительный в ориентации $\vec{\Gamma}$. Интеграл

$$\mathscr{C} = \int\limits_{\Gamma} (\vec{X}(x) | \vec{t}(x))\, ds, \qquad \text{(VI, 7; 44)}$$

где ds — неотрицательная мера длин на Γ, называется работой или циркуляцией $\mathscr{C}$ поля X вдоль $\vec{\Gamma}$. Часто через $\overrightarrow{ds}$ обозначают меру $\vec{t}\, ds$ на Γ со значениями в $\vec{E}$. Тогда, согласно формуле (IV, 5; 13), интеграл (VI, 7; 44) запишется в виде

$$\mathscr{C} = \int\limits_{\Gamma} (\vec{X} | \overrightarrow{ds}). \qquad \text{(VI, 7; 45)}$$

Это применение формулы (IV, 5; 13) к непрерывной на Γ со значениями в $\vec{E}$ функции $\vec{X}$, к мере $\overrightarrow{ds}$ (с базой $ds \geqslant 0$) на Γ со значениями в $\vec{E}$ и к билинейной форме B, являющейся евклидовым скалярным произведением на $E \times E$. Если в пространстве E введена ортонормированная система координат и через $\cos \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, обозначены направляющие косинусы положительной полукасательной к Г, а через X_i — составляющие поля, то

$$\mathscr{C} = \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) ds. \qquad \text{(VI, 7; 46)}$$

Если ω — дифференциальная форма (с вещественными значениями) первой степени, соответствующая полю $\vec{X}$ в евклидовой структуре E:

$$\omega(x) \cdot \vec{Z} = (\vec{X}(z) \mid \vec{Z}),$$

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} X_j \, dx_j, \qquad \text{(VI, 7; 47)}$$

то

$$\mathscr{C} = \int_{\vec{\Gamma}} \omega \text{ [1]}. \qquad \text{(VI, 7; 48)}$$

В механике дифференциальная форма ω называется *элементарной работой векторного поля.* Очевидно, элементарная работа — это *не бесконечно малая величина, а некоторая дифференциальная форма.* Часто ее ошибочно записывают в виде $d\mathscr{C}$, что не верно, так как, вообще говоря, это не дифференциал скалярной функции. Если $\vec{X}$ — функция класса C^1, то, для того чтобы $\mathscr{C}$ была таким дифференциалом, необходимо, чтобы $d\omega = 0$ (т. е. в случае, когда размерность E равна 3, чтобы $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{X} = \vec{0}$). Это приводит к классическим условиям (VI, 4; 52), в которых A_j заменены на X_j. Если область Ω имеет вид, указанный в теореме 19 Пуанкаре, то это условие, согласно этой теореме, является и достаточным. Тогда полагают $\omega = -dU$ или $\vec{X} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ и скалярная функция U, определенная с точностью до аддитивной постоянной, является *потенциалом векторного поля* (следствие 2 теоремы 19).

---

[1]) Для того чтобы получить это равенство, достаточно показать, что меры Радона $[\omega]_{\vec{\Gamma}}$ и $(\vec{X} \mid \vec{t})\, ds$ совпадают на Г. Согласно принципу кусочной склейки, достаточно убедиться, что это верно в окрестности каждой точки Г. Если $t \to M(t)$ является картой (не надо смешивать параметр t с единичным вектором $\vec{t}$), сохраняющей ориентацию (функция ориентации $\theta = 1$), то в окрестности такой точки две эти меры равны образу при отображении M меры на $\mathbb{R}$: $\sum_{j=1}^{N} X_j x'_j \, dt$, где dt — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Предыдущие результаты можно обобщить, заменяя Г ориентированным путем $M\,|\,\overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ конечной длины, как в теореме 36. Затем можно непосредственно применить эту теорему, *определяя* $\mathscr{C}$ по формуле (VI, 7; 48). Если через $d\overrightarrow{M}$ обозначить меру со значениями в $\vec{E}$, для которой функция M является неопределенным интегралом, то в силу теоремы 36 можно записать

$$\mathscr{C} = \int_\alpha^\beta (\vec{X}\,|\,d\overrightarrow{M}) = \int_\alpha^\beta (\vec{X}\,|\,\vec{q})\,ds = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^N X_j \cos\beta_j\right) ds = \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^N X_j\,dx_j\ ^{1)}, \tag{VI, 7; 48$_2$}$$

где $\vec{q}$ — единичный вектор, соответствующий направлению возрастания значений t, а $\cos\beta_j$ — его координаты. (Если $\alpha > \beta$, то $\vec{q} = -\vec{t}$ и $\cos\beta_j = -\cos\alpha_j$. Поскольку $\int_\alpha^\beta = -\int_{[\alpha, \beta]}$, то мы снова получаем тот же результат, что в (VI, 7; 44) и (VI, 7; 46)).

Если $\vec{X} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U$, то, согласно (VI, 7; 36), формула Стокса запишется в виде

$$\int_{M\,|\,\overset{\frown}{[\alpha, \beta]}} (\vec{X}\,|\,dM) = U(M(\alpha)) - U(M(\beta)) = f(M(\beta)) - f(M(\alpha)). \tag{VI, 7; 48$_3$}$$

2°) *Поток векторного поля через трансверсально ориентированную гиперповерхность в аффинном евклидовом конечномерном пространстве.* Будем рассматривать то же самое векторное поле $\vec{X}$. Пусть теперь Σ — гиперповерхность с границей класса C^1, компактная в Ω и *снабженная трансверсальной ориентацией.* Через $\vec{\nu}(x)$ обозначим единичный *положительный* вектор нормали в каждой точке $x \in \Sigma$.

Поток поля $\vec{X}$ через поверхность Σ определяется формулой

$$\Phi = \int_\Sigma (\vec{X}\,|\,\vec{\nu})\,dS, \tag{VI, 7; 49}$$

где интеграл берется относительно поверхностной меры dS. В ортонормированной системе координат эта формула может

---

[1]) Интегрирование ведется по t на $[\alpha, \beta]$. Поэтому $\int_\alpha^\beta$ равняется $\int_{t=\alpha}^{t=\beta}$.

быть записана в виде

$$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) dS, \qquad \text{(VI, 7; 50)}$$

где α_j — угол, образованный j-й осью координат и положительной нормалью к поверхности Σ. Векторную меру $\vec{\nu}(x)\,dS$ поверхности Σ часто оказывается удобным обозначать через $\overrightarrow{dS}$. При этих условиях поток векторного поля через трансверсально ориентированную поверхность Σ может быть записан в виде

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \overrightarrow{dS}). \qquad \text{(VI, 7; 51)}$$

Этот интеграл является интегралом в смысле формулы (IV, 5; 13), $\vec{X}$ — непрерывная функция на Σ со значениями в $\vec{E}$, $\overrightarrow{dS}$ — мера на Σ со значениями в $\vec{E}$, а B — билинейная форма, скалярное произведение на $\vec{E} \times \vec{E}$. Из определения (IV, 5; 13) непосредственно следует, что интеграл (IV, 7; 51) равен интегралу (IV, 7; 49).

Наконец, если через ω обозначить дифференциальную форму степени $N-1$, полученную по заданному векторному полю в соответствии с формулой (VI, 3; 43), и если пространство E ориентировано, то, используя формулы (VI, 3; 43) и (VI, 6; 52), можно убедиться в том, что поток векторного поля через поверхность Σ, снабженную трансверсальной ориентацией, равен произведению $(-1)^{N-1}$ на интеграл от соответствующей дифференциальной формы ω по поверхности $\vec{\Sigma}$ с касательной ориентацией, соответствующей ее трансверсальной ориентации, определенной, согласно избранной ориентации в E:

$$\Phi = (-1)^{N-1} \int_{\vec{\Sigma}} \omega. \qquad \text{(VI, 7; 51}_2\text{)}$$

Учитывая (VI, 4; 24), для поверхности Σ, являющейся псевдограницей некоторого «объема» V (многообразия с псевдокраем) в $\tilde{V} = E$, с помощью формулы Стокса приходим к соотношениям:

$$\int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = (-1)^{N-1} \int_{\vec{\Sigma}} \omega = (-1)^{N-1} \int_{V} d\omega = \int_{V} (\operatorname{div} \vec{X})\, dx. \qquad \text{(VI, 7; 52)}$$

Мы получили *формулу Остроградского*. В ортонормированной системе координат она имеет такой вид:

$$\int\limits_{\Sigma}\ldots\int(\vec{X}\,|\,\vec{\nu})\,dS=\int\int\limits_{V}\ldots\int(\operatorname{div}\vec{X})\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Sigma}\ldots\int\left(\sum_{j=1}^{N}X_j\cos\alpha_j\right)dS=\int\int\limits_{V}\ldots\int\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial X_j}{\partial x_j}\right)dx_1\ldots dx_N. \qquad \text{(VI, 7; 53)}$$

Здесь $\vec{\nu}$ — «внешняя нормаль» к V. Формула Остроградского не зависит от ориентации E, поскольку эта ориентация участвует в ней два раза: один раз при переходе от $\vec{X}$ к $\vec{\omega}$, а второй раз при обратном переходе от $\vec{\omega}$ к $\vec{X}$. Формула Римана (VI, 7; 42) является, естественно, частным случаем формулы Остроградского, соответствующей случаю $N=2$, но с другими обозначениями, поскольку обе они представляют собою формулу Стокса для многообразия с псевдокраем V некоторого N-мерного аффинного пространства $\tilde{V}=E$.

3°) *Первоначальная формула Стокса для поверхности, ограниченной кривой в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве.* Пусть Σ — многообразие с псевдокраем на поверхности $\tilde{\Sigma}$ класса C^1 трехмерного ориентированного аффинного евклидова пространства. Пусть Γ — его псевдограница, кривая, кусочно принадлежащая классу C^1. Предположим, что евклидово пространство E ориентировано, а также что поверхность $\vec{\Sigma}$ ориентирована (а следовательно, трансверсально ориентирована). Пусть $\vec{X}$ — векторное поле класса C^1 на E.

Обозначим через ω форму степени 1, соответствующую полю $\vec{X}$ в евклидовой структуре E. Так как пространство E является евклидовым ориентированным и трехмерным, то форме $\vec{d\omega}$ соответствует векторное поле $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}$ (см. п. 3°), стр. 137). Из формул (VI, 7; 48) и (VI, 7; 51_2) получаем

$$\mathscr{C}=\int\limits_{\Gamma}(\vec{X}\,|\,\overrightarrow{ds})=\int\limits_{\vec{\Gamma}}\omega=\int\limits_{\vec{\Sigma}}d\omega=\int\limits_{\Sigma}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}\,|\,\vec{\nu})\,dS=\Phi, \qquad \text{(VI, 7; 54)}$$

т. е. работа поля $\vec{X}$ вдоль кривой Γ равна потоку вектора $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}$ через поверхность Σ. Если взять ортонормированную положительную систему координат и через X, Y, Z обозначить составляющие поля $\vec{X}$, а через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы положительной нормали к Σ, то

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{VI, 7; 55}$$

Именно эта формула была доказана Стоксом, и ее название было перенесено на общую формулу Стокса (VI, 7; 3).

Подведем теперь итог результатам 1°) — 3°), не уточняя условий их применимости.

Правила преобразования интегралов в векторном анализе

1°) *Изменение функции при переходе от одной точки к другой в евклидовом аффинном пространстве равно работе ее градиента вдоль дуги, соединяющей начальную точку с конечной* (*формула* (VI, 7; 48)).

2°) *Поток векторного поля через ограничивающую объем V поверхность Σ, который пересекает поверхность в направлении выхода из V, в аффинном евклидовом пространстве равен интегралу от дивергенции поля по V.*

3°) *Работа векторного поля вдоль (ориентированной) границы $\vec{\Gamma}$ ориентированной поверхности $\vec{\Sigma}$ трехмерного ориентированного аффинного евклидова пространства равна потоку ротора поля через поверхность Σ, снабженную трансверсальной ориентацией, соответствующей ее касательной ориентации.*

Здесь можно повторить сказанное в замечании 3°) на стр. 127: систематическое использование дифференциальных форм и формулы Стокса предпочтительнее употребления многочисленных формул, относящихся к полям.

Вот несколько других формул, в которых обозначения, очевидные сами по себе, выражены через введенные ранее функции (здесь E есть N-мерное ориентированное аффинное евклидово пространство):

$$\int\int \ldots \int\limits_{V} \overrightarrow{\text{grad}}\, U\,dx = \int \ldots \int\limits_{bV} U\,\overrightarrow{dS},$$
$$\iiint\limits_{V} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{X}\,dx = -\iint\limits_{bV} [\vec{X} \wedge \overrightarrow{dS}]\,^{1)} \quad (N=3), \tag{VI, 7; 56}$$
$$\iint\limits_{\Sigma} [\overrightarrow{\text{grad}}\, U \wedge \overrightarrow{dS}]\,^{1)} = -\int\limits_{b\Sigma} U\,dS \quad (N=3).$$

[1]) Символ $[\wedge]$ означает векторное произведение; см. стр. 106.

Если ввести ортонормированную систему координат, то доказательства этих формул станут очевидными. Рассмотрим, например, вторую формулу. Относительно первой координаты она записывается так:

$$\int\int\int\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=-\int\int(Y\cos\gamma-Z\cos\beta)\,dS. \qquad \text{(VI, 7; 57)}$$

Эта формула является частным случаем формулы Остроградского, в которой X, Y, Z заменены на O, Z, $-Y$.

Приведем, наконец, формулу Грина, постоянно применяемую в механике и физике:

Теорема 40. *Пусть V есть N-мерное многообразие с псевдокраем класса C^1 в открытом множестве $\tilde{V}=\Omega$ аффинного евклидова N-мерного пространства E. Пусть U, W — вещественные функции класса C^2 в Ω. Обозначим через Σ псевдограницу V и через $\vec{\nu}(x)$ — единичный вектор нормали к Σ, выходящей из V в точке x псевдограницы Σ. Тогда, если относительно V и Σ выполнены условия теоремы 38, а носитель функции U пересекает многообразие V по некоторому компакту, справедливы следующие формулы:*

$$\int\underset{\Sigma}{\cdots}\int\frac{dW}{d\vec{\nu}}dS=\int\int\underset{V}{\cdots}\int\Delta W\,dx, \qquad \text{(VI, 7; 58)}$$

$$\int\underset{\Sigma}{\cdots}\int U\frac{dW}{d\vec{\nu}}dS=\int\int\underset{V}{\cdots}\int(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U\,|\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W\,dx)+$$
$$+\int\int\underset{V}{\cdots}\int U\,\Delta W\,dx, \qquad \text{(VI, 7; 59)}$$

$$\int\underset{\Sigma}{\cdots}\int U\frac{dU}{d\vec{\nu}}dS=\int\int\underset{V}{\cdots}\int\|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U\|^2+\int\int\underset{V}{\cdots}\int U\,\Delta U\,dx, \qquad \text{(VI, 7; 60)}$$

$$\int\underset{\Sigma}{\cdots}\int\left(U\frac{dW}{d\vec{\nu}}-W\frac{dU}{d\vec{\nu}}\right)dS=\int\int\underset{V}{\cdots}\int(U\,\Delta W-W\,\Delta U)\,dx. \qquad \text{(VI, 7; 61)}$$

В этих формулах Δ — лапласиан, а $d/d\vec{\nu}$ — производная по вектору $\vec{\nu}$ [обозначавшаяся в формуле (III, 3; 4) через $D_{\vec{\nu}}$].

Доказательство. Докажем сначала формулу (VI, 7; 59). Для этого достаточно применить формулу Остроградского (VI, 7; 52) относительно векторного поля, определяемого с помощью $U\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W$. В самом деле, из (III, 3; 21) получаем

$$(U\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W\,|\,\vec{\nu})=U\,(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W\,|\,\vec{\nu})=U\frac{dW}{d\vec{\nu}}. \qquad \text{(VI, 7; 62)}$$

С другой стороны, если выбрать некоторую ортонормированную систему координат, то мы получим, что

$$\operatorname{div}(U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W)=\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(U \frac{\partial W}{\partial x_j}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial W}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{N} U \frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}=(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U \mid \overrightarrow{\operatorname{grad}} W)+U \Delta W. \quad (\mathrm{VI}, 7; 63)$$

Требуемый результат вытекает теперь из формулы Остроградского.

Формула Остроградского предполагает, что поле $U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W$ принадлежит классу C^1, а это верно, если U принадлежит классу C^1, а W принадлежит классу C^2.

Применяя формулу (VI, 7; 59) к $U=1$, можно сразу получить формулу (VI, 7; 58). Если U принадлежит классу C^2, то, полагая $W=U$ в (VI, 7; 59), получаем формулу (VI, 7; 60).

Если U и W принадлежат классу C^2, то, применяя формулу (VI, 7; 59), меняя в ней ролями U и W и вычитая результат из начальной формулы, можно получить формулу (VI, 7; 61).

Предыдущие формулы часто применяются в случае функций с комплексными значениями, как это говорилось в замечании на стр. 137. В этом случае в формуле (VI, 7; 59) обычно W заменяется на $\overline{W}$. Если в (VI, 7; 59) заменить W на $\overline{U}$ (вместо U), то получится равенство, аналогичное равенству (VI, 7; 60), в котором $\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} U\|^2$ заменен на

$$(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U \mid \overrightarrow{\operatorname{grad}} \overline{U})=\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial U}{\partial x_j}\right|^2 \geqslant 0 \quad (\mathrm{VI}, 7; 64)$$

относительно некоторой ортонормированной системы координат.

В теории уравнений с частными производными из этих формул выводится большое число следствий. Например, для гармонических функций получается следующая теорема, к которой мы вернемся позже: если функция U класса C^2 в E является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U=0$, и если она равна нулю на границе Σ области V, то она тождественно равна нулю в V.

В самом деле, для доказательства достаточно воспользоваться формулой (VI, 7; 60), в которой функция U заменена функцией $\overline{U}$. Так как функция U по предположению равна нулю на Σ, то интеграл по поверхности равен нулю.

Поскольку U по предположению есть гармоническая функция, то ΔU обращается в нуль и окончательно остается лишь $\int\int\limits_V \ldots \int (\overrightarrow{\operatorname{grad}} U \,|\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} \bar{U})\, dx$.

Подинтегральная функция здесь $\geqslant 0$; поэтому из теоремы 26 гл. IV следует, что ее интеграл может обращаться в нуль только тогда, когда эта функция почти всюду равна нулю (почти всюду по мере Лебега). Однако поскольку она непрерывна, то это может произойти только в том случае, когда она тождественно равна нулю [1]).

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Интегралы дифференциальных замкнутых форм по компактным ориентированным многообразиям без края

Напомним, что коциклом на открытом множестве Ω N-мерного аффинного пространства E называется замкнутая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ [2]) класса C^1, т. е. такая форма, что $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Говорят, что непрерывная дифференциальная форма $\vec{\omega}$ степени p является кограницей, если существует такая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ класса C^1, что $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Из соотношения $d \circ d = 0$ следует, что кограница, если она сама является некоторой дифференциальной формой класса C^1, обязательно будет коциклом [3]). Теорема 19 (Пуанкаре) показывает, что если открытое множество Ω обладает некоторыми *весьма специальными* топологическими свойствами, то и, обратно, коцикл является кограницей.

Особым C^m-циклом открытого множества Ω из E мы называли (стр. 218) особое ориентированное многообразие *без края* класса C^m из Ω, т. е. отображение H класса C^m ориентированного многообразия V класса C^m в Ω [4]).

---

[1]) Из этого рассуждения следует, что $\overrightarrow{\operatorname{grad}} U = 0$, т. е. $U = \text{const}$, но так как на границе Σ функция U равна нулю, то $U \equiv 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Как всегда, речь идет о дифференциальных формах со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

[3]) Здесь форма $\vec{\omega}$ предполагается только непрерывной. Она может быть кограницей, даже если она не дифференцируема, и в этом случае нет смысла выяснять, будет ли она коциклом!

[4]) Напомним, что особое многообразие $V \,|\, H$ считается *лежащим в* Ω, если образ $H(V)$ содержится в Ω. Где находится V, неизвестно (оно может оказаться абстрактным).

Во всем этом параграфе мы будем рассматривать только случай, когда многообразие V компактно. Мы будем называть *C^m-циклом* в Ω особое компактное ориентированное многообразие $H|V$ класса C^m в Ω, т. е. такое многообразие, в котором V компактно.

С другой стороны, C^m-границей размерности n в Ω мы будем называть особое ориентированное компактное многообразие размерности n, являющееся границей некоторого особого ориентированного компактного многообразия с краем размерности $n+1$ класса C^m из Ω [1]).

Очевидно, C^m-цикл (соответственно C^m-граница) заведомо является C^l-циклом (соответственно C^l-границей) для $l \leqslant m$.

Граница необходимо является циклом. Напротив, цикл не обязательно является границей. Рассмотрим, например, в открытом множестве Ω, дополнении к нулю евклидова аффинного пространства, ориентированный цикл, определенный сферой с центром в нуле. Он, очевидно, является границей во всем пространстве E замкнутого шара, снабженного соответствующей ориентацией. В открытом множестве Ω он будет также границей замкнутого шара с выброшенным центром, но такое многообразие с краем *не компактно*. В предыдущем смысле *сфера не является границей в* Ω [2]).

В приведенных определениях *мы всегда предполагали*, что $m \geqslant 1$. Мы никогда не рассматривали топологические многообразия или многообразия класса C^0, а тем более их ориентации. Однако мы будем позволять себе в дальнейшем говорить о C^0-циклах и C^0-границах. По этой причине *непрерывное* отображение H ориентированного компактного многообразия $\vec{V}$ с краем класса C^1 мы будем называть особым ориентированным компактным многообразием с краем класса C^0. Класс C^0 многообразия $H|V$ соответствует классу C^0 отображения H; здесь V всегда предполагается принадлежащим классу C^1.

Граница этого особого многообразия является сужением H на границу многообразия $\vec{V}$, снабженного ориентацией границы. В этом случае C^0-цикл является ориентированным компактным особым C^0-многообразием без края, а C^0-граница является границей некоторого особого ориентированного компактного C^0-многообразия с краем. Операция взятия границы b и операция взятия кограницы d в силу формулы Стокса тесно связаны между собой. Кроме того, $b \circ b = \emptyset$ и $d \circ d = 0$.

[1]) В этом параграфе мы не будем рассматривать многообразия с псевдокраем.

[2]) Это говорит о том, что цикл из Ω может быть границей в E и не быть границей в Ω. Мы только что видели, что сфера *не является* границей в Ω. Доказательство будет приведено далее, в следствии 2 теоремы 58.

Интеграл от коцикла по циклу

Теорема 41. *Интеграл от коцикла по C^1-границе равен нулю. Интеграл от кограницы по C^1-циклу равен нулю. Интеграл от кограницы по C^1-границе тем более равен нулю.*

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 37 Стокса.

1°) Если $H|\vec{V}$ является C^1-границей, то существует такое особое ориентированное компактное многообразие $H|\vec{W}$, что $H|\vec{V} = H|\widehat{bW}$. Если $\vec{\omega}$ — коцикл, то

$$\int\limits_{H|\widehat{bW}} \vec{\omega} = \int\limits_{H|\vec{W}} d\vec{\omega} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 1)}$$

2°) Если $\vec{\omega}$ — кограница, то существует такая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ класса C^1, что $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Если $H|\vec{V}$ — цикл, т. е. $\widehat{bV} = \emptyset$, то

$$\int\limits_{H|\vec{V}} d\vec{\varpi} = \int\limits_{H|\widehat{bV}} \vec{\varpi} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 2)}$$

3°) Поскольку граница заведомо является циклом, то утверждение 3°) вытекает из утверждения 2°).

Замечания. 1°) Наши предположения о компактности циклов и границ неизбежны, так как мы не делали никаких предположений о компактности носителей дифференциальных форм (по условию теоремы Стокса носитель прообраза формы при отображении H пересекает многообразие V по компакту). Естественно, могла бы существовать аналогичная теория, не содержащая предположений о компактности циклов и границ, но включающая их для носителей дифференциальных форм.

2°) Интеграл от коцикла по циклу необязательно равен нулю.

Рассмотрим, например, в плоскости дифференциальную форму полярного угла, определенную формулой (VI, 4; 41). Мы видели, что она представляет собой некоторый коцикл класса C^∞ в $\mathbb{R}^2 - 0$. Рассмотрим, с другой стороны, тригонометрическую окружность, снабженную ее канонической ориентацией. Это некоторый C^∞-цикл в $\mathbb{R}^2 - 0$. Интеграл от этого коцикла по рассматриваемому циклу равен $+2\pi \neq 0$. Это *новое доказательство* того, что рассматриваемая дифференциальная форма не есть кограница. Одновременно доказано, *по крайней мере для случая* $N = 2$, высказанное выше утверждение, а именно: в открытом дополнении к началу координат в N-мерном евклидовом аффинном пространстве цикл, определяемый ориентированной сферой, не является C^1-границей.

Доказательство, приведенное в следствии 2 теоремы 58, служит обобщением сформулированного утверждения на случай произвольного N. Этот результат типичен для этого параграфа: тот факт, что интеграл от некоторого коцикла по некоторому циклу не равен нулю, *одновременно показывает*, что коцикл не является кограницей и что цикл не является границей.

3°) Если форма $\vec{\omega}$ является кограницей, то ее интеграл по особому компактному ориентированному многообразию с краем $H\,|\,\vec{V}$ зависит только от границы $H\,|\,\widehat{b\vec{V}}$, а не от самого многообразия $H\,|\,\vec{V}$. Поскольку $\vec{\omega}=d\vec{\varpi}$, то формула Стокса дает

$$\int\limits_{H\,|\,\vec{V}} \vec{\omega} = \int\limits_{H\,|\,\widehat{b\vec{V}}} \vec{\varpi}. \tag{VI, 8; 3}$$

Следует заметить, что это свойство справедливо только тогда, когда форма $\vec{\omega}$ является некоторой кограницей, а в том случае, когда $\vec{\omega}$ представляет собой только коцикл, оно может не выполняться. В частном случае, когда граница V пуста, мы получаем, что интеграл от $\vec{\omega}$ равен нулю. Мы как раз видели, что этот факт справедлив, если форма $\vec{\omega}$ является кограницей, и не обязательно верен, если эта форма представляет собой только коцикл.

4°) Естественно, что не существует подобного результата относительно C^0-циклов или C^0-границ. Впрочем, в этих случаях интеграл не имеет никакого смысла. Напомним, что мы дали *доказательство* теоремы Стокса только для многообразий класса C^2 и принимаем ее *без доказательства* для многообразий класса C^1.

Займемся теперь изучением некоторых теорем, обратных к доказанным ранее. Вот для начала теорема, обратная к первой части теоремы 41:

Теорема 42. *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени p класса C^1 в некотором открытом множестве Ω аффинного N-мерного пространства. Если интеграл от формы $\vec{\omega}$ по всем C^∞-границам размерности p*[1]*, содержащимся в Ω, равен нулю, то форма $\vec{\omega}$ является коциклом.*

[1]) Беря C^∞-границу, мы рассматриваем более слабое условие, чем в случае C^1-границы. Однако мы приходим к требуемому заключению, и, следовательно, наша формулировка теоремы является более сильной. Позже, в замечании, следующем за теоремой 43, мы увидим, что наши предположения можно еще ослабить.

Доказательство. В самом деле, для каждого $(p+1)$-мерного ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ класса C^∞, содержащегося в Ω, интеграл $\int_{\vec{V}} d\vec{\omega} = \int_{\widehat{bV}} \vec{\omega} = \vec{0}$.

Наше утверждение теперь сразу же вытекает из следующей теоремы (примененной к $\vec{\varpi} = d\vec{\omega}$ и $n = p+1$), которая утверждает, что непрерывная дифференциальная форма полностью определена, если известны ее интегралы по ориентированным компактным многообразиям с краем класса C^∞.

Определеление непрерывной дифференциальной формы с помощью ее интегралов по ориентированным компактным многообразиям с краем

Теорема 43. *Пусть Ω — открытое множество аффинного пространства E конечной размерности N. Пусть $\vec{\varpi}$ — непрерывная дифференциальная форма на Ω степени n. Если для каждого n-мерного ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ класса C^∞, содержащегося в Ω, интеграл $\int_{\vec{V}} \vec{\varpi}$ равен нулю, то форма $\vec{\varpi}$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ — n векторов из $\vec{E}$ и a — точка множества Ω. Покажем, что $\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{0}$.

Пусть F — аффинное подпространство E, порожденное точкой a и векторами $\vec{X}_i$. Можно считать, что оно имеет размерность n, так как в противном случае векторы $\vec{X}_i$ были бы линейно зависимыми, а результат очевидным. Выберем в F систему координат $a, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$. Дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ определяет на F некоторую дифференциальную форму степени n, которую можно записать в виде $\vec{f} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Имеем

$$\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{f}(a). \qquad \text{(VI, 8; 4)}$$

Снабдим пространство $\vec{F}$ ориентацией, считая его базис положительным. Мера Радона $[\vec{\varpi}]_{\vec{F}}$ тогда будет иметь вид $\vec{f}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \vec{f}\, dx$. Если в качестве V мы возьмем некоторый шар $B(R)$ (в евклидовой норме, определенной введенной системой координат) с центром в точке a радиуса R объема $V(R)$, то по предположению получим

$$\int\int\ldots\int_{B(R)} \vec{f}(x)\,dx = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 5)}$$

Далее, справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\displaystyle\int\int\ldots\int_{B(R)} \vec{f}(x)\,dx}{\displaystyle\int\int\ldots\int_{B(R)} dx} - \vec{f}(a) \right\| \leqslant \frac{1}{V(R)} \int\int\ldots\int_{B(R)} \|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x-a\| \leqslant R} \|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\|, \qquad \text{(VI, 8; 6)}$$

в котором последний член стремится к 0 вместе с R, поскольку функция $\vec{f}$ непрерывна в точке a. С помощью (VI, 8; 5) переходом к пределу получаем, что $\vec{f}(a) = \vec{0}$, т. е. $\vec{\varpi} = \vec{0}$.

Замечание. Евклидовы шары здесь не играют особой роли. *Для справедливости равенства $\vec{\varpi} = \vec{0}$ достаточно, чтобы в каждой точке a из Ω для любого аффинного n-мерного подпространства F пространства E, содержащего a, существовала последовательность n-мерных ориентированных многообразий с краем или псевдокраем $\vec{V}_j \subset \tilde{V}_j = F$, равномерно стягивающихся к точке a при j, стремящемся к бесконечности, и таких, что $\int_{\vec{V}_j} \vec{\varpi} = 0$. Если псевдограницы таковы, что к ним можно применить общую теорему* 38 (*Стокса*), *то из равенства* $\int_{b\vec{V}} \vec{\omega} = \vec{0}$ *для всех V_j будет вытекать также заключение теоремы* 42.

Докажем теперь теоремы, обратные ко второй части теоремы 41.

Теорема де Рама

Теорема 44. *Если интеграл от дифференциальной формы $\vec{\omega}$ класса C^1 по открытому множеству Ω аффинного пространства равен нулю на всех C^∞-циклах* [1]), *содержащихся в Ω, то эта форма является кограницей. Если, кроме того, $\vec{\omega}$ принадлежит*

---

[1]) См. примечание на стр. 248.

классу C^m, $m \geqslant 1$, то можно найти для нее внешнюю первообразную, также принадлежащую классу C^m.

Теорема де Рама — один из самых глубоких результатов алгебраической топологии. Она является источником всех современных результатов этой математической теории. Ее доказательство является очень тонким, и мы его рассматривать не будем. *Во всяком случае, в дальнейшем мы не будем его использовать.* Ограничимся тем, что покажем, как эта теорема с новой точки зрения объясняет теорему Пуанкаре (теорему 19). Если $\vec{\omega}$ — замкнутая дифференциальная форма степени $p \geqslant 1$ класса C^1 на открытом множестве Ω, то из теоремы 41 вытекает, что ее интеграл по всем *C^∞-границам* равен нулю. Однако из этого еще не следует, что она является кограницей. Для этого надо было бы потребовать большего, а именно чтобы был равен нулю интеграл от этой формы по всем *C^∞-циклам.* Если окажется, что в открытом множестве Ω все C^∞-циклы размерности $p \geqslant 1$ являются также C^∞-границами, то это свойство будет выполнено и $\vec{\omega}$ будет кограницей, так что в этом случае в открытом множестве Ω все коциклы степени > 0 будут также кограницами и *в Ω будет справедлива теорема Пуанкаре.* Позже мы увидим, что свойство C^∞-циков быть C^∞-границами выполняется с точностью до небольших видоизменений (см. следствие 5 теоремы 54) для всех открытых множеств Ω, удовлетворяющих весьма жестким условиям теоремы 19[1]). Однако существуют другие условия, при которых это свойство также будет справедливым. То свойство открытого множества Ω аффинного пространства (или многообразия Ω класса C^2), что каждый коцикл степени > 0 из Ω является кограницей, очевидно, сохраняется при C^2-диффеоморфизме (в силу теоремы 17 такой C^2-диффеоморфизм коммутирует с d). Можно доказать, и это весьма любопытный и замечательный результат, что это свойство *сохраняется даже при простом гомеоморфизме* без условия дифференцируемости. Позже будут приведены некоторые частные доказательства этого утверждения (следствие 1 теоремы 53).

Сейчас мы докажем теорему де Рама и рассмотрим некоторые ее следствия для частного случая дифференциальных форм первой степени. Мы наложим более слабые условия, чем предыдущие, и дадим доказательство, в котором теорема 19 не используется.

---

[1]) Таким образом, теорема Пуанкаре является частным случаем теоремы де Рама. Однако доказательство теоремы де Рама, которое мы здесь не приводим, *использует* теорему Пуанкаре, являющуюся неизбежным промежуточным этапом рассуждений.

Теорема 45. *Пусть Ω — открытое множество аффинного пространства конечной размерности, $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени 1 класса C^m, $m \geqslant 0$, на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если интеграл от $\vec{\omega}$ по каждому C^∞-циклу, определенному отображением H класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности из $\mathbb{R}^2$ в Ω, равен нулю, то существует такая функция $\vec{f}$ класса C^{m+1} на Ω со значениями в $\vec{F}$, что $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Если множество Ω связно, то функция $\vec{f}$ определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Заметим, что при $m = 0$ форма $\vec{\omega}$ предполагается *непрерывной*, а не принадлежащей классу C^1. В теореме 19 Пуанкаре необходимо было считать $\vec{\omega}$ принадлежащей классу C^1, чтобы иметь возможность говорить о $d\vec{\omega}$. Предположение о принадлежности формы классу C^1, сделанное нами с целью убедиться в том, что она является дифференциалом некоторой другой формы, неестественно. Мы имеем в данном случае условие интегрального, а не дифференциального характера, которое позволяет считать $\vec{\omega}$ только непрерывной.

Доказательство. Тот факт, что в случае связного множества Ω функция $\vec{f}$ определяется с точностью до аддитивной постоянной, вытекает из теоремы 22 гл. III.

1-й этап. Докажем, что интеграл от $\vec{\omega}$ равен нулю по всем особым ориентированным компактным псевдомногообразиям, определенным отображением H, *кусочно принадлежащим* C^∞, ориентированной тригонометрической окружности в Ω.

В самом деле, параметризуем тригонометрическую окружность с помощью полярного угла θ, изменяющегося от 0 до 2π. Будем предполагать, что интервал $[0, 2\pi]$ можно разбить точками $\theta_0 = 0, \theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n = 2\pi$ так, чтобы отображение H принадлежало классу C^∞ в каждом интервале $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Докажем, что существует такое отображение g_i интервала $[\theta_i, \theta_{i+1}] \subset \mathbb{R}$ на прямую $\mathbb{R}$, которое принадлежит классу C^∞, строго возрастает, причем все его последовательные производные равны нулю на концах θ_i и θ_{i+1} интервала $[\theta_i, \theta_{i+1}]$.

Для этого построим сначала такую функцию на интервале $[0, 1]$. С этой целью воспользуемся методом доказательства теоремы о разложении единицы (теорема 11 гл. IV). Построим функцию G по формуле (IV, 2; 23)[1]), соответствующую

---

[1]) Напомним, что $G(s) = 0$ при $s \geqslant \eta^2$ и $= e^{-1/(\eta^2 - s^2)}$ при $s < \eta^2$. — *Прим ред.*

$\eta = 1/2$. Затем получим (стр. 455 т. I) функцию γ_1 на $\mathbb{R}$: $t \to \gamma_1(t) = G((t-a_1)^2) = G((t-1/2)^2)$, соответствующую $a_1 = 1/2$. Она принадлежит классу C^∞, положительна для $|t - 1/2| < 1/2$ или $0 < t < 1$ и равна нулю при $t \leqslant 0$ и $t \geqslant 1$. Обозначим через γ функцию, пропорциональную γ_1, интеграл от которой равен 1. Тогда $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau$ будет искомой функцией. Она принадлежит классу C^∞ как первообразная функции класса C^∞, строго возрастает в интервале $[0, 1]$ (поскольку ее производная $\gamma > 0$), равна нулю при $t \leqslant 0$ и равна $\int \gamma = 1$ при $t \geqslant 1$. Все ее производные равны нулю при $t = 0$ и $t = 1$ (см. рис. 8).

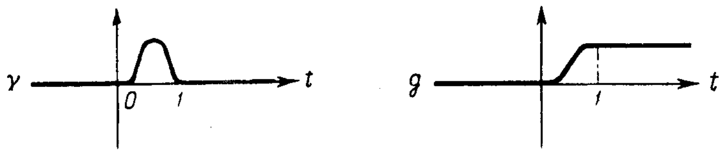

Рис. 8.

Определим функции g_i с помощью равенства

$$g_i(\theta) = g\left(\frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\right). \tag{VI, 8; 7}$$

Рассмотрим далее отображение K интервала $[0, 2\pi]$ в Ω, определенное по формуле

$$K(\theta) = H(g_i(\theta)) \quad \text{для} \quad \theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}. \tag{VI, 8; 8}$$

Это отображение принадлежит классу C^∞ *в каждом интервале* $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Однако поскольку все его последовательные производные равны нулю на концах этого интервала, то производные справа и производные слева отображения K в каждой из точек θ_i совпадают, и, следовательно, K является отображением *класса* C^∞ отрезка $[0, 2\pi]$ в Ω.

Кроме того, $K(0) = K(2\pi)$, и все последовательные производные функции K в точках 0 и 2π равны нулю. Поэтому K можно рассматривать как отображение класса C^∞ тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω.

С другой стороны, легко убедиться в том, что интегралы от $\vec{\omega}$ по $H\,|\,\vec{\Gamma}$ и $K\,|\,\vec{\Gamma}$ совпадают. В самом деле, эти интегралы являются соответственно суммами интегралов по $H\,|\,\overrightarrow{[\theta_i, \theta_{i+1}]}$ и $K\,|\,\overrightarrow{[\theta_i, \theta_{i+1}]}$. Однако отображения K и H отрезка $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ в Ω определяют два *эквивалентных* пути класса C^∞. Следовательно, интегралы от формы $\vec{\omega}$ по двум этим путям равны (теорема 35). Поскольку интеграл от формы $\vec{\omega}$ по $K\,|\,\vec{\Gamma}$ по предположению равен нулю, то интеграл от $\vec{\omega}$ по $H\,|\,\vec{\Gamma}$ также равен нулю.

2-*й этап.* Можно, очевидно, ограничиться доказательством для связного множества Ω, так как в противном случае рассуждения можно проводить раздельно для каждой из его компонент. Выберем раз и навсегда точку a и значение $\vec{f}(a)$ функции $\vec{f}$ в точке a. Определим функцию $\vec{f}$ по формуле

$$\vec{f}(x)=\vec{f}(a)+\int\limits_{\overrightarrow{[a,\,x]}}\vec{\omega}, \tag{VI, 8; 9}$$

где интеграл является криволинейным интегралом *по произвольному пути, кусочно принадлежащему классу C^∞ и лежащему в множестве* Ω с началом в точке a и концом в точке x. Такой путь заведомо существует. В самом деле, множество Ω связно и является открытым множеством аффинного пространства. Поэтому существует ломаная линия, соединяющая точки a и x (см. стр. 96 т. I), т. е. существует путь, кусочно принадлежащий классу C^∞. Покажем, что результат не зависит от выбранного пути. В самом деле, если мы возьмем два таких пути, то ничто не мешает нам, используя соответствующую замену параметров, считать, что первый путь определен отображением M отрезка $\overrightarrow{[0,\pi]}$ из $\mathbb{R}$ в Ω, кусочно принадлежащим классу C^∞, а второй путь определен отображением M отрезка $\overrightarrow{[2\pi,\pi]}$ в Ω, кусочно принадлежащим классу C^∞.

Отображение M интервала $[0,2\pi]$ в Ω, построенное с помощью предыдущих функций (они принимают одно и то же значение в точке π, так что отображение M непрерывно), определяет отображение $\overrightarrow{[0,2\pi]}$ в Ω, кусочно принадлежащее классу C^∞, т. е., поскольку $M(0)=M(2\pi)=a$, определяет отображение H ориентированной тригонометрической окружности в Ω, кусочно принадлежащее классу C^∞ [1]). Из резуль-

[1]) Ясно, почему мы вынуждены были перейти от отображений класса C^∞ к отображениям, *кусочно принадлежащим* этому классу. С одной стороны, ломаная линия кусочно принадлежит классу C^∞, а с другой стороны, мы получили отображение тригонометрической окружности в Ω, принадлежащее только кусочно классу C^∞. Конечно, *если теорема доказана*, то мы знаем, что $\vec{\omega}=d\vec{f}$, и, применяя теорему 39 и формулу (VI, 7; 36), мы увидим, что интеграл от $\vec{\omega}$ по $H\,|\,\vec{\Gamma}$ равен нулю *для любого пути* $H\,|\,[0,2\pi]$ *конечной длины*; можно будет также вычислить $\vec{f}(x)$ с помощью интеграла (VI, 8; 9) *по каждому пути конечной длины*, соединяющему точку a с точкой x.

тата, полученного на этапе 1, теперь вытекает, что интеграл от $\vec{\omega}$ по построенному особому псевдомногообразию равен нулю, а это означает, что оба интеграла (VI, 8; 9), соответствующие двум путям, равны.

3-*й этап*. Остается доказать, что функция $\vec{f}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Выберем некоторую систему координат в E. Тогда форму $\vec{\omega}$ можно представить в виде (VI, 6; 72): $\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j \, dx_j$.

Если мы покажем, что $\vec{f}$ имеет частные производные и

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} = \vec{A}_j, \qquad \text{(VI, 8; 12)}$$

то, поскольку функции $\vec{A}_j$ по предположению непрерывны в силу теоремы 15 гл. III, функция $\vec{f}$ будет принадлежать классу C^1 и будет выполняться равенство $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Если $\vec{\omega}$, а значит, и $\vec{A}_j$ принадлежат классу C^m, то $\vec{f}$, кроме того, принадлежит классу C^{m+1}. Итак, теорема доказана.

Пусть теперь x изменяется в окрестности x_0 вдоль прямой, проходящей через точку x_0 параллельно j-му базисному вектору. Выберем в формуле (VI, 8; 9) путь, соединяющий a с x и составленный последовательно из фиксированного пути, соединяющего a с x_0, и прямолинейного пути $[x_0, x]$. Тогда

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(x_0) + \int_{[x_0,\, x]} \vec{\omega} =$$

$$= \vec{f}(x_0) + \int_{(x_0)_j}^{x_j} \vec{A}_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_N) \, d\xi. \qquad \text{(VI, 8; 13)}$$

Теперь с помощью теоремы 89 гл. IV, дающей производную неопределенного интеграла по его верхнему пределу, для точки x_0 мы получим формулу

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(x_0) = \vec{A}_j(x_0), \qquad \text{(VI, 8; 14)}$$

которая завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Если $\vec{X}$ является непрерывным векторным полем на открытом множестве Ω конечномерного евклидова пространства, работа которого на любом цикле, определенном* *отображением класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности, равна нулю, то $\vec{X}$ является производной некоторого потенциала в Ω.*

Применение к функциям «аргумент» в $\mathbb{R}^2$

Пусть Ω — открытое множество, содержащееся в дополнении к началу координат в $\mathbb{R}^2$. *Функцией-аргументом* φ в этом множестве называется любая функция $M \to \varphi(M)$, равная в каждой точке M одному из значений аргумента $(0x, \overrightarrow{0M})$ в этой точке (по определению имеется бесконечное множество значений аргумента, а разность между ними равна целому кратному 2π). Очевидно, имеет смысл рассматривать только непрерывные функции-аргументы.

Следствие 2. *Если функция-аргумент в открытом множестве Ω из $\mathbb{R}^2 - 0$ непрерывна, то она принадлежит классу C^∞ и ее дифференциал представляет собой форму ω из* (VI, 4; 41) (*обозначаемую через $d\varphi$*). *Для существования такой функции в Ω необходимо и достаточно, чтобы для каждого отображения H класса C^∞ тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω интеграл от ω по $H | \vec{\Gamma}$ был равен нулю или чтобы форма ω была кограницей в Ω. В этом случае, если множество Ω связно, имеется бесконечное множество функций-аргументов. Разность между двумя такими функциями равна некоторому целому кратному 2π, а задание аргумента в одной точке из Ω однозначно определяет функцию во всем этом множестве.*

Доказательство. 1°) Пусть A — некоторая точка Ω. Введем функцию $M \to \Phi(A; M)$, рассмотренную на стр. 145. Она принадлежит классу C^∞, когда M принадлежит открытому множеству $|\Phi(A; M)| < \pi$, и является там некоторой первообразной для ω. Для того чтобы φ была функцией-аргументом, необходимо и достаточно, чтобы разность

$$\varphi(M) - \varphi(A) - \Phi(A; M) \qquad \text{(VI, 8; 15)}$$

в каждой точке M была некоторым целым кратным 2π и чтобы значение $\varphi(M_0)$ в некоторой точке M_0 было одним из аргументов точки M_0. Если функция-аргумент φ *непрерывна* в Ω, то это целое кратное 2π непрерывно для M из некоторой окрестности точки A, а значит, постоянно. Следовательно, в окрестности точки A функция φ принадлежит классу C^∞ и имеет ω в качестве дифференциала. Поскольку это утверждение справедливо для каждой точки A из Ω, функция φ принадлежит классу C^∞ в Ω и имеет кограницей форму ω. Таким образом, форма ω действительно является кограницей в Ω.

2°) Для того чтобы форма ω была кограницей в Ω, необходимо (согласно теореме 41) и достаточно (согласно теореме 45), чтобы $\int\limits_{H|\vec{\Gamma}} \omega = 0$ для каждого отображения H класса C^∞ тригонометрической окружности в Ω.

3°) Остается доказать, что если форма ω является кограницей в Ω, $\omega = d\Psi$, то существует функция-аргумент. При доказательстве можно предполагать, что множество Ω связно. Нет никаких оснований для того, чтобы сама функция Ψ была функцией-аргументом. Обозначим через $\mathscr{E}$ множество тех точек M из Ω, в которых $\Psi(M)$ является одним из аргументов точки M. Мы сейчас покажем, что множество $\mathscr{E}$ одновременно открыто и замкнуто в Ω. Тогда оно либо будет пусто, либо будет совпадать со связным множеством Ω. Поэтому если функцию Ψ изменить на такую постоянную, чтобы *в некоторой точке* Ω она принимала значение, равное одному из аргументов этой точки, то это же будет верно для каждой точки из Ω. Тем самым будет доказано существование непрерывных функций-аргументов в Ω. Таких функций в Ω существует бесконечное множество. Фиксируя одну такую функцию в некоторой точке Ω, мы фиксируем ее во всем множестве Ω. Разность между двумя такими функциями равна постоянной, которая в каждой точке Ω представляет собой некоторое целое кратное 2π. Таким образом, теорема будет доказана, если мы сумеем показать, что $\mathscr{E}$ одновременно открыто и замкнуто в Ω.

Пусть $A \in \Omega$. Обозначим через $\mathscr{V}$ такую открытую связную окрестность точки A в Ω, чтобы для точек M из $\mathscr{V}$ имело место неравенство $|\Phi(A; M)| < \pi$. Тогда в $\mathscr{V}$ функция Ψ и функция $M \to \Psi(A) + \Phi(A; M)$ являются первообразными для ω, равными в точке A. Поскольку окрестность $\mathscr{V}$ связна, они совпадают во всей этой окрестности.

Согласно сказанному по поводу (VI, 8; 15), функция Ψ является функцией-аргументом в $\mathscr{V}$, если *в некоторой точке* $\mathscr{V}$ ее значение равно одному из аргументов этой точки. Другими словами, если окрестность $\mathscr{V}$ содержит хотя бы одну точку из $\mathscr{E}$, то $\mathscr{V}$ целиком лежит в $\mathscr{E}$. Тогда

a) условие $A \in \mathscr{E}$ влечет за собой $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$; множество $\mathscr{E}$ является открытым множеством в Ω;

b) условие $A \in \Omega - \mathscr{E}$ влечет за собой $\mathscr{V} \subset \Omega - \mathscr{E}$; множество $\Omega - \mathscr{E}$ открыто в Ω.

Следовательно, множество $\mathscr{E}$ замкнуто в Ω, и следствие доказано.

При этом, задавая значение $\varphi(A)$ в некоторой точке A, если множество Ω связно, мы знаем, как определить $\varphi(M)$:

$$\varphi(M)=\varphi(A)+\int\limits_{[\overrightarrow{A,M}]}\omega, \tag{VI, 8; 18}$$

где интеграл берется по произвольному пути конечной длины с началом в точке A и концом в точке M.

Позже мы увидим, что можно рассуждать иначе: если выбрано $\varphi(A)$, то *по непрерывности* определяют значение аргумента вдоль произвольного пути, соединяющего точки A и M. Понятие это довольно интуитивно, но не так легко дать ему строгое истолкование. К этому вопросу мы вернемся в гл. VII.

Операция сложения циклов

Прежде чем начать собственно гомологические исследования, определим операцию сложения циклов.

Рассмотрим два C^m-цикла $H_1|\vec{V}_1$ и $H_2|\vec{V}_2$ одной и той же размерности в Ω. Предположим сначала, что множества V_1 и V_2 не имеют общих точек. Если через V обозначить их объединение, то можно снабдить V структурой топологического пространства, в котором множества V_1 и V_2 будут одновременно открытыми и замкнутыми. Для этого достаточно назвать открытым каждое множество из V, пересекающее одновременно V_1 и V_2 по открытым множествам. Затем множество V можно снабдить структурой ориентированного многообразия класса C^m (выбирая в качестве карты V все карты V_1 и карты V_2). Если теперь через H обозначить отображение V в Ω, принимающее значение H_1 на V_1 и значение H_2 на V_2, то тем самым будет определен новый цикл в Ω, который можно будет назвать *суммой* двух рассматриваемых циклов.

Если окажется, что V_1 и V_2 являются частями одного и того же множества и имеют общие точки (может даже случиться, что V_1 и V_2 совпадают), то через V надо будет обозначить *не объединение*, а *сумму* V_1 и V_2, т. е. произвольное множество, являющееся объединением двух *непересекающихся* частей V'_1, V'_2, находящихся во взаимно однозначном соответствии с множествами V_1 и V_2. Затем V_1 и V_2 заменяются на V'_1 и V'_2 с переносом на них в силу имеющихся взаимно однозначных соответствий структуры дифференцируемых многообразий и отображений H_1 и H_2. После этого точно так же, как и ранее, действуют с множеством $V=V'_1\cup V'_2$. Сумма циклов не единственна, поскольку она зависит от выбора V. Однако *она всегда определяется с точностью до эквивалентности* в том смысле, что два таким образом определенных цикла всегда эквивалентны в смысле эквивалентности ориентированных особых многообразий (см. стр. 203). Итак, *во всех случаях можно определить сумму двух циклов как цикл, определенный только с точностью до эквивалентности.* Если два данных цикла заменить эквивалентными циклами, то любой цикл, равный их сумме, заменится эквивалентным циклом. Определенная нами сумма по существу не является суммой двух циклов, а представляет собой сумму двух классов циклов. Класс циклов является классом эквивалентности по отношению эквивалентности между особыми ориентированными многообразиями.

Когда записывают соотношение вида $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$, где $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$ — некоторые циклы, то это означает, что $\vec{\Gamma}$ с точностью до эквивалентности равняется сумме $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$. Можно, очевидно, точно так же определить сумму произвольного числа циклов и целое кратное некоторого цикла $n\vec{\Gamma}$, где n — целое число $\geqslant 1$, как сумму n циклов, эквивалентных циклу $\vec{\Gamma}$. Более общо, если заданы циклы $\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2, \ldots, \vec{\Gamma}_l$ одной и той же размерности, то можно говорить об их линейной комбинации $p_1\vec{\Gamma}_1 + p_2\vec{\Gamma}_2 + \ldots$ $\ldots + p_l\vec{\Gamma}_l$, где p_i — целые числа $\geqslant 1$. Можно даже договориться брать эти числа равными нулю, если считать, что цикл $0\vec{\Gamma}$ является циклом $\vec{0}$ или пустым циклом. Определяя циклы с точностью до эквивалентности, мы приходим к выводу, что *сложение циклов ассоциативно и коммутативно.*

Циклы, гомологичные нулю

Определим гомологии циклов, введя новое отношение эквивалентности, в котором мы будем пренебрегать вырожденными циклами и границами. Назовем C^m-цикл $H\,|\,\vec{V}$ размерности n открытого множества Ω аффинного пространства E *вырожденным*, если в случае, когда размерность $n = 0$, он пуст, а когда размерность $n \geqslant 1$, образ V при отображении H является конечным множеством [1]).

Говорят, что *C^m-цикл $\vec{\Gamma}$ из открытого множества Ω C^m-гомологичен 0 в Ω*, если существуют две C^m-границы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и два вырожденных цикла $\vec{A}'$ и $\vec{B}'$ в Ω, такие, что имеет место соотношение

$$\vec{\Gamma} + \vec{A} + \vec{A}' = \vec{B} + \vec{B}'. \qquad \text{(VI, 8; 19)}$$

[1]) Роль вырожденных циклов выяснится лишь в следствии 2 теоремы 54.

Из этого определения следует, что вырожденный цикл и C^m-граница C^m-гомологичны 0. Цикл, эквивалентный циклу, C^m-гомологичному 0, сам C^m-гомологичен 0. Цикл, C^m-гомологичный 0, заведомо C^l-гомологичен 0 при $l \leqslant m$.

Теорема 46. *Если циклы $\vec{\Gamma}_j$ гомологичны 0 и если p_j — целые числа $\geqslant 0$, то цикл $\sum_j p_j \vec{\Gamma}_j$ гомологичен 0. Если цикл $\vec{\Gamma}$ гомологичен 0, то таким же будет цикл $\overleftarrow{\Gamma}$.*

Теорема очевидна (сумма двух границ является границей, а сумма вырожденных циклов является вырожденным циклом).

Теорема 47. *Если $\vec{\Gamma}$ — произвольный C^m-цикл, то цикл $\vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ является C^m-границей.*

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $\vec{V} \subset \vec{\tilde{V}}$ — ориентированное многообразие с краем размерности n класса C^m, то $\overrightarrow{[0, 1]} \times \vec{V} \subset \vec{\mathbb{R}} \times \vec{\tilde{V}}$ является многообразием размерности $n+1$ класса C^m с псевдокраем. Регулярная часть его псевдограницы представляет собой объединение трех непересекающихся ориентированных многообразий: $\overrightarrow{]0, 1[} \times \overleftarrow{bV}$, $\{1\} \times \vec{\mathring{V}}$ и $\{0\} \times \overleftarrow{\mathring{V}}$*[1]).

Доказательство. Если V — многообразие с краем из $\tilde{V}$ (размерности n), то $[0, 1] \times V$ есть часть многообразия $\mathbb{R} \times \tilde{V}$ размерности $n+1$, и сразу же видно, что оно является там многообразием с псевдокраем. Псевдограница представляет собой объединение множеств $[0, 1] \times bV$, $\{0\} \times V$, $\{1\} \times V$. Регулярная часть этой псевдограницы является объединением множеств $]0, 1[\times bV$, $\{0\} \times \mathring{V}$, $\{1\} \times \mathring{V}$, а ее сингулярная часть является объединением множеств $\{0\} \times bV$ и $\{1\} \times bV$. Все это можно проверить геометрически на рис. 9 (где в качестве V взят заштрихованный замкнутый круг; тогда $[0, 1] \times bV$ — «боковая поверхность цилиндра», а $\{0\} \times V$ и $\{1\} \times V$ — его основания) и доказать непосредственно.

Множество $\overrightarrow{[0, 1]} \times \vec{V}$ ориентируется следующим образом: касательное векторное пространство в каждой точке (t, x) является прямой суммой вещественной прямой $\mathbb{R}$, касательного векторного пространства к $[0, 1]$ в точке t, и касательного векторного пространства к V в точке x. Базис этого касательного

[1]) Надо внимательно следить за ориентацией!

пространства в точке (t, x) множества $[0, 1] \times V$ считается положительным, если он последовательно составлен из положительного вектора $\vec{e}_0 \in \mathbb{R}$ и положительного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ пространства $\vec{T}(x; \vec{V})$. Точно так же определяется ориентация множества $[0, 1] \times \overleftarrow{bV}$, поскольку $\overleftarrow{bV}$ также ориентировано.

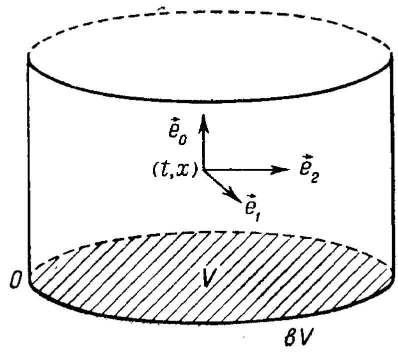

Рис. 9.

Что же касается многообразий $\{0\} \times \overleftarrow{V}$ или $\{1\} \times \vec{V}$, то их ориентация определяется очевидным образом исходя из ориентации V.

Докажем теперь утверждения леммы, касающиеся ориентации. Пусть (t, x) — точка множества $]0, 1[\times bV$. Пусть $\vec{e}_s$ — вектор, касательный к $\tilde{V}$ в точке x, выходящий из $\mathring{V}$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — некоторый положительный базис пространства $\vec{T}(x; \widehat{bV})$. Тогда $\vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — положительный базис в $\vec{T}(x; \vec{V})$, а значит, $\vec{e}_0, \vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — положительный базис пространства $\vec{T}((t, x); \vec{\mathbb{R}} \times \vec{\tilde{V}})$. Базис $\vec{e}_s, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$, очевидно, отрицателен. Поскольку $\vec{e}_s$ выходит из $]0, 1[\times \mathring{V}$ в точке (t, x), то базис $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ отрицателен в граничной ориентации $\vec{T}((t, x);]0, 1[\times bV)$ и в то же время он положителен в ориентации $]\overrightarrow{0, 1}[\times \widehat{bV}$. Это означает, что множество $]0, 1[\times bV$ как регулярная часть псевдограницы множества $]\overrightarrow{0, 1}[\times \vec{V}$ должно иметь ориентацию множества $]\overrightarrow{0, 1}[\times \overleftarrow{bV}$.

Пусть теперь x — некоторая точка $\mathring{V}$, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — положительный базис пространства $\vec{T}(x; \vec{\mathring{V}})$. Тогда базис

$\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ положителен в $\vec{T}((t, x); \mathbb{R}\times\vec{V})$ при любом t_0. Поскольку при $t=1$ вектор $\vec{e}_0$ является выходящим относительно $]0, 1[\times \overset{\circ}{V}$ и входящим при $t=0$, то система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ представляет собой положительный базис пространства $\vec{T}((1, x); \{1\}\times\overset{\circ}{V})$ и отрицательный базис пространства $\vec{T}((0, x); \{0\}\times\overset{\circ}{V})$ в ориентации границы множества $\overrightarrow{[0, 1]}\times\vec{V}$. Следовательно, являясь регулярными частями псевдограницы, $\{1\}\times\overset{\circ}{V}$ и $\{0\}\times\overset{\circ}{V}$ должны иметь ориентации множеств $\{1\}\times\vec{\overset{\circ}{V}}$ и $\{0\}\times\overleftarrow{\overset{\circ}{V}}$, чем и заканчивается доказательство леммы.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы.

Прежде всего заметим, что если в предположениях леммы V является многообразием *без края* ($bV=\emptyset$), то $\overrightarrow{]0, 1[}\times\vec{V}$ является не только многообразием с псевдокраем, но также и многообразием *с краем*, поскольку сингулярная часть границы $\{0, 1\}\times bV$ пуста и границей этого многообразия с краем служит объединение множеств $\{1\}\times\vec{V}$ и $\{0\}\times\overleftarrow{V}$.

Если теперь $\vec{\Gamma}$ является циклом $H|\vec{V}$, то $\overleftarrow{\Gamma}$ будет циклом $H|\overleftarrow{V}$. Рассмотрим особое ориентированное компактное многообразие с краем, определенное отображением K множества $[0, 1]\times\vec{V}$, где

$$K(t, x)=H(x). \tag{VI, 8; 20}$$

Из проведенных выше рассуждений следует, что границей этого особого многообразия служит

$$K\,|\,b(\overrightarrow{[0, 1]}\times\vec{V})=K\,|(\{1\}\times\vec{V}+\{0\}\times\overleftarrow{V}), \tag{VI, 8; 21}$$

а это есть цикл, эквивалентный циклу $\vec{\Gamma}+\overleftarrow{\Gamma}$, чем заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Если* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ — *два* C^m-*цикла и если* $\vec{\Gamma}_2$ *и* $\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2$ C^m-*гомологичны* 0, *то цикл* $\vec{\Gamma}_1$ C^m-*гомологичен* 0.

Доказательство. В самом деле, имеет место соотношение

$$\vec{\Gamma}_1+(\vec{\Gamma}_2+\overleftarrow{\Gamma}_2)=(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2)+\overleftarrow{\Gamma}_2, \tag{VI, 8; 22}$$

правая часть которого, будучи суммой двух циклов, гомологичных нулю, гомологична нулю. Значит, гомологична нулю его левая часть, откуда

$$\vec{\Gamma}_1 + (\vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_2) + \text{граница} + \text{вырожденный цикл} = \\ = \text{граница} + \text{вырожденный цикл}. \qquad \text{(VI, 8; 23)}$$

Поскольку, согласно теореме, $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ является границей, мы получаем, что цикл $\vec{\Gamma}_1$ гомологичен нулю.

Гомологичные циклы

Теорема 48. *Бинарное отношение между C^m-циклами в Ω: «цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^m-гомологичен 0 в Ω» является отношением эквивалентности, совместимым с операциями сложения циклов и умножения их на целые числа $\geqslant 0$.*

Если цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^m-гомологичен 0, то говорят, что *циклы* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ *C^m-гомологичны в Ω*. Класс эквивалентности, образованный всеми C^m-циклами, C^m-гомологичными друг другу, называется *классом C^m-гомологий в Ω*.

Доказательство. 1°) *Рефлексивность*. Так как цикл $\vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ является границей (теорема 47), то он C^m-гомологичен 0.

2°) *Симметричность*. Если цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ гомологичен 0, то гомологичным нулю будет цикл противоположной ориентации $\vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_1$.

3°) *Транзитивность*. Пусть $\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$, $\vec{\Gamma}_3$ — три цикла. Предположим, что циклы $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ и $\vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_3$ гомологичны 0. Тогда их сумма также будет гомологичной нулю. В силу ассоциативности эту сумму можно записать в виде $\vec{\Gamma}_1 + (\overleftarrow{\Gamma}_2 + \vec{\Gamma}_2) + \overleftarrow{\Gamma}_3$. По теореме 47 скобка гомологична нулю, а из следствия этой теоремы вытекает, что цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_3$ гомологичен нулю, чем и доказывается транзитивность.

Таким образом, речь действительно идет об отношении эквивалентности. Гомологичность циклов сохраняется при их сложении и умножении на целые числа $\geqslant 0$: если циклы $\vec{\Gamma}_j$ гомологичны циклам $\vec{\Gamma}'_j$ для $j = 1, 2, \ldots, l$ и если p_j — целые числа $\geqslant 0$, то цикл $\sum_j p_j \vec{\Gamma}_j$ гомологичен циклу $\sum_j p_j \vec{\Gamma}'_j$. Это очевидно, поскольку, согласно теореме 46, цикл $\sum_j p_j (\vec{\Gamma}_j + \overleftarrow{\Gamma}'_j)$ гомологичен 0.

Теорема 49. *Если $\vec{\omega}$ является замкнутой дифференциальной формой класса C^1 в открытом множестве Ω конечномерного аффинного пространства E, то ее интеграл по каждому циклу, C^1-гомологичному 0 в Ω, равен нулю, а ее интегралы по двум C^1-гомологичным циклам в Ω равны.*

Доказательство. Напомним сначала (теорема 35), что интегралы от $\vec{\omega}$ по двум эквивалентным циклам равны. Отсюда сразу же вытекает, что интеграл от $\vec{\omega}$ по сумме двух циклов равен сумме ее интегралов по этим циклам. Предположим, что цикл $\vec{\Gamma}$ гомологичен нулю, и пусть A, B суть C^1-границы, а $\vec{A}'$, $\vec{B}'$ — такие вырожденные циклы, для которых имеет место соотношение (VI, 8; 19). Тогда

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}'} \vec{\omega} = \int_{\vec{B}} \vec{\omega} + \int_{\vec{B}'} \vec{\omega}. \qquad (VI, 8; 24)$$

Из теоремы 41 вытекает, что интегралы от коцикла $\vec{\omega}$ по границам $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны нулю. Кроме того, эти интегралы, согласно замечанию 3°) на стр. 204—205, по циклам $\vec{A}'$ и $\vec{B}'$ равны нулю. Если теперь $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два C^1-гомологичных цикла, то цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^1-гомологичен 0, и следовательно,

$$\int_{\vec{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega} = \vec{0}, \quad \text{а значит,} \quad \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}. \qquad (VI, 8; 25)$$

Теперь в множестве коциклов или замкнутых дифференциальных форм класса C^1 в Ω со значениями в $\vec{F}$ можно рассмотреть бинарное отношение «$\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ является кограницей», которое снова, очевидно, является *некоторым отношением эквивалентности*. (В противоположность только что проведенным рассуждениям для гомологии это утверждение совершенно очевидно.)

Две формы одного и того же класса мы будем называть *когомологичными* (форма, когомологичная 0, — это форма класса C^1, являющаяся кограницей). Класс эквивалентности называется *классом когомологий* со значениями в $\vec{F}$. Класс когомологий некоторой замкнутой формы класса C^1 есть множество всех форм, когомологичных данной форме.

Следствие. *Интеграл от коцикла по C^1-циклу зависит только от класса когомологий коцикла и класса C^1-гомологий цикла.*

Доказательство. Пусть $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ — два когомологичных коцикла и $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два C^1-гомологичных C^1-цикла.

Тогда имеют место соотношения

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 - \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 = \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 - \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 =$$

$$= \int_{\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int_{\vec{\Gamma}_2} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2). \qquad \text{(VI, 8; 26)}$$

Но в силу доказанной теоремы первый интеграл правой части равен нулю, поскольку $\vec{\omega}_1$ является коциклом, а цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^1-гомологичен 0. Второй интеграл обращается в нуль, так как $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ является кограницей, а $\vec{\Gamma}_2$ представляет собой C^1-цикл (теорема 41).

Замечания. 1°) Для дифференциальных форм мы рассматривали только коциклы и кограницы, в то время как можно было бы ввести C^m-коциклы и C^m-кограницы. Мы поступили так только с целью упрощения рассуждений.

2°) Ставя перед собой такую же цель, мы все равно не смогли бы сделать этого для циклов и границ!

Нам абсолютно необходимы циклы и границы класса C^1, так как без этого условия интеграл по циклам от дифференциальной формы не имел бы смысла. Однако мы докажем некоторые свойства, в которых будут использованы только *непрерывные* отображения и *топология* без предположения дифференцируемости (см. теоремы 59, 61, 69). С этой целью, а, кроме того, нам это нужно из практических соображений, нам потребуются C^0-циклы и C^0-границы. Таким образом, рассмотрение C^m-циклов и C^m-границ по крайней мере для двух значений $m = 0$ и $m = 1$ неизбежно. Однако ничуть не сложнее брать произвольные m. Далее будут рассмотрены интересные теоремы, позволяющие переходить от одного значения m к другому (например, следствие 4 теоремы 54).

3°) Факторпространство векторного пространства коциклов на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$ по векторному подпространству кограниц называется *векторным пространством когомологий* Ω *со значениями в* $\vec{F}$. *Таким образом, множество классов когомологий со значениями в* $\vec{F}$ *имеет структуру векторного пространства* (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, будет ли $\vec{F}$ векторным пространством над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Множество классов C^m-гомологий множества Ω имеет структуру абелевой группы

В самом деле, если α_1 и α_2 — два класса и $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два произвольных цикла, принадлежащие этим классам, то $\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$ принадлежит одному и тому же классу, который можно обозначить через $\alpha_1 + \alpha_2$. Это сложение ассоциативно и коммутативно. В множестве таких классов имеется нулевой элемент — класс 0 пустого цикла (множество всех C^m-циклов, C^m-гомологичных 0). Если α является таким классом и если $\vec{\Gamma}$ — цикл из этого класса, то класс α', содержащий $\overleftarrow{\Gamma}$, удовлетворяет равенству $\alpha + \alpha' = 0$ (теорема 47), а следовательно, α' является классом $-\alpha$, противоположным классу α. Таким образом, множество классов C^m-гомологий множества Ω является абелевой группой, называемой *группой C^m-гомологий множества* Ω[1]).

Этот факт наводит на мысль ввести новое обозначение. Если $\vec{\Gamma}_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, — циклы и p_j — целые числа *произвольного знака*, то через $\sum\limits_j p_j \vec{\Gamma}_j$ мы будем обозначать цикл $\sum\limits_j |p_j| \vec{\Gamma}'_j$ (определенный как всякая сумма с точностью до эквивалентности), где $\vec{\Gamma}'_j = \vec{\Gamma}_j$, если $p_j > 0$, и $\vec{\Gamma}'_j = \overleftarrow{\Gamma}_j$, если $p_j < 0$. При этом становятся возможными сложение и умножение на целые числа произвольного знака; эти операции удовлетворяют обычным правилам при условии, что результат рассматривается не с точностью до эквивалентности (в смысле эквивалентности особых многообразий), а *с точностью до гомологии: цикл $\sum\limits_j p_j \vec{\Gamma}_j + \sum\limits_j q_j \vec{\Gamma}_j$ не равен или эквивалентен циклу $\sum\limits_j (p_j + q_j) \vec{\Gamma}_j$, а гомологичен ему*. Вычисления ведутся не над циклами, а над классами C^m-гомологий или же в группе C^m-гомологий (например, цикл $\vec{\Gamma} + (-\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ гомологичен 0, но не эквивалентен пустому циклу).

---

[1]) Наше определение гомологии и группы гомологий множества Ω отличается от принятого в современной алгебраической топологии — теории, выходящей за рамки данного курса. Кроме того, нет гарантии, что для всех Ω найдутся «хорошие» группы гомологий. Но для дальнейшего это не важно. Наши усилия сводятся к тому, чтобы

1°) использовать интеграл от дифференциальных форм и формулу Стокса для определения индекса и топологической степени (см. стр. 302 и 314) и доказательства некоторых важных теорем, таких, как следствие 2 теоремы 68 или теорема 69;

2°) получить хорошую базу для изложения теории аналитических функций комплексных переменных и интегралов от них.

4°) Пусть Ω' — открытое множество E, содержащееся в Ω. Каждая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ на Ω заведомо будет дифференциальной формой на Ω'. Если $\vec{\omega}$ является коциклом на Ω, то она будет коциклом и на Ω'. Если она является кограницей на Ω, то она будет также кограницей и на Ω'. Однако переход от Ω' к Ω, вообще говоря, производить нельзя. Коцикл на Ω' не обязательно продолжается в коцикл на Ω [например, если $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$, то дифференциальная форма ω из (VI, 4; 41) является коциклом на Ω', но в начале координат имеется особенность, и это не позволяет продолжить ее как коцикл на Ω].

Может случиться, что некоторый коцикл *на* Ω является кограницей на меньшем открытом множестве Ω', но не будет кограницей на Ω [например, если $\Omega = \mathbb{R} - 0$ и если Ω' является дополнением в $\mathbb{R}^2$ к некоторой полупрямой, исходящей из начала, то та же самая форма ω из (VI, 4; 41) является коциклом в Ω, кограницей в Ω', но не будет кограницей в Ω, как это мы видели согласно (VI, 4; 41)].

Для циклов имеет место обратная ситуация. Цикл в Ω' заведомо является циклом в Ω (ибо отображение H ориентированного многообразия $\vec{V}$ в Ω' является отображением H многообразия $\vec{V}$ в Ω). Цикл, гомологичный 0 в Ω', гомологичен 0 в Ω. Здесь переход от Ω к Ω', вообще говоря, невозможен. Цикл из Ω не обязательно лежит в Ω'. Может случиться, что цикл в Ω' будет гомологичен 0 в Ω и не будет гомологичен 0 в Ω'. Например, если $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$ и $\vec{\Gamma}$ является ориентированной тригонометрической окружностью, то она является C^∞-границей в Ω, но не будет C^∞-границей в Ω' и не будет гомологичной 0 в Ω' (см. замечание 2°) на стр. 247).

Гомотопия

Определение. Пусть f_1 и f_2 — *непрерывные* отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y. Говорят, что эти *отображения гомотопны*, если существует непрерывная деформация одного из них в другое, т. е. если существует отображение F произведения $[\alpha, \beta] \times X$ в Y, где $[\alpha, \beta]$ — такой отрезок из $\mathbb{R}$, что для любого $x \in X$ имеют место равенства

$$F(\alpha, x) = f_1(x), \quad F(\beta, x) = f_2(x). \tag{VI, 8; 27}$$

Если теперь для $t \in [\alpha, \beta]$ рассмотреть частное отображение F_t: $x \to F(t, x)$ пространства X в пространство Y, то для $t = \alpha$ оно совпадет с отображением f_1 пространства X в Y, а для $t = \beta$ оно совпадет с отображением f_2 пространства X в Y.

Поскольку отображение F является непрерывным отображением произведения $[\alpha, \beta] \times X$ в Y, то рассматриваемое отображение «изменяется непрерывно» вместе с изменением t, т. е. мы имеем «непрерывную деформацию», переводящую f_1 в f_2.

Если X является компактным, а Y — метрическим пространством, то из теоремы 66 гл. IV следует, что функция $t \to F_t$ представляет собой непрерывное отображение $[\alpha, \beta]$ в $(Y^X)_{cb}$. Значит, имеется точка пространства $(Y^X)_{cb}$, которая непрерывно изменяется вместе с t от f_1 при $t = \alpha$ до f_2 при $t = \beta$. Можно также сказать, что имеется *путь*, соединяющий f_1 и f_2 в $(Y^X)_{cb}$, и что два непрерывных отображения X в Y гомотопны, если они являются двумя точками пространства $(Y^X)_{cb}$, которые можно соединить некоторым путем. Во всех случаях, с которыми мы встретимся в этом параграфе, пространство X будет компактным, а Y — метрическим.

Отображение F называется *гомотопией*, переводящей f_1 в f_2. Естественно, если имеется одна такая гомотопия относительно отрезка $[\alpha, \beta]$ из $\mathbb{R}$, то можно найти и другую, в которой отрезок $[\alpha, \beta]$ заменен любым другим отрезком из $\mathbb{R}$, например отрезком $[0, 1]$. В самом деле, для этого достаточно заменить отображение F отображением F_0, определенным по формуле

$$F_0(t, x) = F(\alpha + t(\beta - \alpha), x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad \text{(VI, 8; 28)}$$

Гомотопия является чисто топологическим понятием, поскольку при ее определении используются только непрерывные отображения

Однако при изучении интегралов от дифференциальных форм, в которые входят многообразия класса C^m, $m \geqslant 1$, понадобится более узкое понятие, а именно понятие C^m-гомотопии.

Определение. Пусть X и Y — многообразия класса C^m, где m конечно или бесконечно. Говорят, что два отображения f_1 и f_2 класса C^m пространства X в пространство Y *C^m-гомотопны*, если существует отображение F множества $[\alpha, \beta] \times X$ в Y класса C^m, удовлетворяющее соотношению (VI, 8; 27)[1]).

Конечно, два C^m-гомотопных отображения класса C^m принадлежат классу C^l и C^l-гомотопны при $l \leqslant m$. В дальнейшем гомотопия означает C^0-гомотопию.

Теорема 50. *Если X и Y — многообразия класса C^m, то два отображения класса C^m многообразия X в Y, C^m-гомотопные*

[1]) Множество $[\alpha, \beta] \times X$ является не многообразием, а многообразием с краем из $\mathbb{R} \times X$. Тем не менее, принимая во внимание примечание на стр. 198 I-го тома, можно говорить, что отображение F множества $[\alpha, \beta] \times X$ принадлежит классу C^m.

третьему отображению, C^m-гомотопны между собой. Другими словами, отношение, выражающее тот факт, что два отображения C^m-гомотопны, является отношением эквивалентности в множестве отображений класса C^m многообразия X в многообразие Y. Класс эквивалентности называется классом C^m-гомотопии.

Доказательство. Пусть f_0, f_1, f_2 — три таких отображения X в Y класса C^m, что f_0 гомотопно f_1, а f_1 гомотопно f_2. Пусть G — гомотопия, переводящая f_0 в f_1, и H — гомотопия, переводящая f_1 в f_2. Всегда можно считать, что интервалы прямой $\mathbb{R}$, соответствующие этим гомотопиям, являются интервалами $[0, 1]$ и $[1, 2]$. Если $m=0$ (*в качестве X и Y тогда можно взять произвольные топологические пространства, а не обязательно многообразия*), то сразу же определяется гомотопия F, переводящая f_0 в f_2 и соответствующая интервалу $[0, 2]\subset\mathbb{R}$, по такой формуле:

$$F(t, x)=\begin{cases} G(t, x) & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \\ H(t, x) & \text{при} \quad 1\leqslant t\leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(VI, 8; 29)}$$

(что дает $F(1, x)=f_1(x)$), чем и доказывается теорема для $m=0$. Если X — компактное и Y — метрическое пространства, то это означает, что две точки, которые можно соединить путями с третьей точкой в топологическом пространстве $(Y^X)_{cb}$, можно также соединить между собой некоторым путем. Этот факт совершенно очевиден, и мы считали его таким на стр. 91 т. I. Доказательство, конечно, не так просто при $m\geqslant 1$. В самом деле, если применить формулу (VI, 8; 29), то полученное при этом отображение F не будет принадлежать классу C^m, ибо не существует его частной производной по t в точке, соответствующей $t=1$, а существуют только производная слева и производная справа по t. (Это означает, что стыковка двух путей класса C^m только кусочно принадлежит классу C^m; мы должны рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 45, чтобы заменить путь, кусочно принадлежащий классу C^m, путем класса C^m.)

Обозначим через g_0 строго возрастающее отображение класса C^∞ интервала $[0, 1]$ на себя, имеющее, кроме того, все последовательные производные, равные нулю на концах 0 и 1 этого интервала. Обозначим через g_1 отображение такого же типа интервала $[1, 2]$ на себя (см. доказательство теоремы 45). Тогда можно определить функцию F по следующей формуле:

$$F(t, x)=\begin{cases} G(g_0(t_0), x) & \text{для} \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \\ H(g_1(t), x) & \text{для} \quad 1\leqslant t\leqslant 2. \end{cases} \qquad \text{(VI, 8; 30)}$$

На этот раз функция F принадлежит классу C^m. В самом деле, она принадлежит классу C^m в $[0, 1]\times X$ и $[1, 2]\times X$. Ее производные при $t=1$ справа и слева принимают одно и то же значение. Действительно, если мы рассмотрим производную $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p D_x^{\vec{q}}$, $p \in \mathbb{N}$, $\vec{q} \in \mathbb{N}^n$ [1]), слева, а также справа, то увидим, что она принимает одно и то же значение: в силу свойств функций g_0 и g_1 она равна $D^{\vec{q}} f_1$ при $p = 0$ и равна нулю при $p \geqslant 1$. Таким образом, мы построили гомотопию класса C^m, переводящую f_0 в f_2, и тем самым доказали теорему.

Мы сейчас убедимся в том, что если данное пространство компактно, а пространство-образ является открытым множеством некоторого аффинного нормированного пространства, то *отображения, «достаточно близкие» к некоторому отображению, гомотопны ему.*

Теорема 51. *Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E.*

1°) *Если множество Ω звездно, в частности если оно выпукло (или если $\Omega = E$), или если оно обладает свойствами, указанными в теореме* 19 *Пуанкаре, то два произвольных отображения класса C^m произвольной части K некоторого многообразия V класса C^m (или произвольного топологического пространства K, если $m = 0$) в Ω C^m-гомотопны в Ω*[2]).

2°) *Если f является отображением класса C^m некоторой компактной части K многообразия V класса C^m (или произвольного топологического компактного пространства K, если $m = 0$) в Ω и если через $\delta > 0$ обозначено наименьшее расстояние $d(f(K), \complement\Omega)$ от компакта $f(K)$ из E до замкнутого множе-*

---

[1]) Здесь n — размерность X. Для того чтобы пользоваться языком частных производных, следует предполагать, что X и Y — открытые множества аффинных пространств. Когда речь идет только об *окрестности* каждой точки, то всегда можно, выбирая соответствующие карты X и Y, свести дело к этому случаю.

[2]) Можно (кроме исключительных случаев, указанных в примечании на стр. 198 т. I) говорить об отображении C^m только в случае многообразия или *открытого* подмножества многообразия. Если K — часть многообразия V, то отображением класса C^m части K в Ω мы назовем сужение f на K отображения $\tilde{f}$ класса C^m некоторой открытой окрестности $\mathscr{K}$ части K в многообразии V в пространство E. (Тогда его можно считать также отображением класса C^m окрестности $\mathscr{K}$ *в* Ω. В самом деле, $\tilde{f}^{-1}(\Omega)$ является открытым множеством $\mathscr{K}_1$ из $\mathscr{K}$, содержащим K, и $\tilde{f}$ отображает $\mathscr{K}_1$ *в* Ω.)

Когда мы говорим, что два таких отображения f и g части K в Ω C^m-гомотопны в Ω, то мы под этим понимаем следующее: существует некоторая гомотопия F между f и g в Ω, т. е. непрерывное отображение $[\alpha, \beta] \times K$ в Ω, удовлетворяющее равенствам (VI, 8; 27), которое может быть продолжено до некоторой гомотопии класса C^m между $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в E, т. е. до отображения класса C^m из $[\alpha, \beta] \times \mathscr{K}$ в E (или, если хотите, в Ω). В условиях теоремы надо было бы уточнить $\mathscr{K}$ и $\tilde{f}$ одновременно с K и f. *Однако речь идет только о K и f, чтобы не усложнять ни условия теоремы, ни ее доказательства.*

ства $\complement\Omega$, *то каждое отображение* g *класса* C^m *из* K *в* Ω, *такое, что* $\||\overrightarrow{f-g}\|| < \delta$ [1]), *является* C^m-*гомотопией* f *в* Ω.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Пусть* f *и* g — *два таких отображения класса* C^m *некоторой части* K *многообразия* V *в* Ω, *что для любого* $x \in K$ *весь отрезок* $[f(x), g(x)]$ *из* E *лежит в* Ω. *Тогда отображения* f *и* g C^m-*гомотопны в* Ω.

В самом деле, определим гомотопию, переводящую f в g по формуле

$$F(t, x) = f(x) + t(\overrightarrow{g(x) - f(x)}). \qquad \text{(VI, 8; 31)}$$

Это отображение класса C^m множества $[0, 1] \times K$ в Ω, причем $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$, чем и заканчивается доказательство леммы.

Если множество Ω выпукло, то свойство отрезка $[f(x), g(x)]$ для любого $x \in K$ целиком лежать в Ω сохраняется при любых f и g.

Говорят, что подмножество A пространства E звездно относительно точки a, если для любой точки x из A весь отрезок $[a, x]$ лежит в A. Подмножество называется звездным, если в нем существует такая точка a, относительно которой оно звездно. Выпуклое множество звездно относительно каждой своей точки.

Если Ω звездно относительно a, то каждое отображение f части K в Ω класса C^m, согласно изложенному выше, C^m-гомотопно постоянному отображению $K \to \{a\}$. Любые два C^m-отображения C^m-гомотопны этому отображению, а следовательно, C^m-гомотопны между собой.

Если K — компакт, то $f(K)$ будет компактом в E, и тогда (стр. 84 т. I) $\delta = d(f(K), \complement\Omega) > 0$. Если теперь $\||\overrightarrow{f-g}\|| < \delta$, то отрезок $[f(x), g(x)]$ для всех $x \in K$ лежит в Ω, а f и g C^m-гомотопны.

Предположим, наконец, что Ω обладает свойствами, указанными в теореме 19 Пуанкаре. Если через $P_1(x)$ для каждой точки $x \in \Omega$ мы обозначим проекцию x параллельно базисному вектору $\vec{e}_1$ на подпространство F_1, порожденное началом координат и базисными векторами $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_N$, то для каждой точки $x \in K$ отрезок $[f(x), P_1(f(x))]$ будет лежать в Ω. Тогда

---

[1]) Мы взяли $\||\ \ \||$. Здесь речь идет о $\||\ \ \||_0$, так как производные в эту норму не входят. Таким образом, $\||\overrightarrow{f-g}\||_K = \max\limits_{x\in K} \|\overrightarrow{f(x) - g(x)}\|$.

отображения f и $P_1 \circ f$ класса C^m являются C^m-гомотопными. Аналогично, если g — другое отображение класса C^m части K в Ω, то отображения g и $P_1 \circ g$ также C^m-гомотопны. Будем теперь проводить рассуждение по индукции. Доказываемая теорема относительно Ω, очевидно, верна, если размерность пространства E равна 0 (или 1). Предположим, что она доказана для случая, когда пространство E имеет размерность $N-1$. Тогда $P_1 \circ f$ и $P_1 \circ g$ будут отображениями класса C^m части K в открытое множество $P_1(\Omega) = \Omega \cap F_1$ из F_1, обладающее свойствами, указанными в теореме 19. Поскольку пространство F_1 является $(N-1)$-мерным, то по предположению индукции эти отображения C^m-гомотопны. Теперь в Ω мы имеем C^m-гомотопии: $f \to P_1 \circ f \to P_1 \circ g \to g$, и из теоремы 50 следует, что отображения f и g C^m-гомотопны и в случае, когда E N-мерно. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Теперь мы можем сформулировать важную теорему о приближении непрерывного отображения отображениями класса C^m.

Теорема 52. *Пусть K — некоторый компакт многообразия V класса C^m, и пусть f — непрерывное отображение K в открытое множество Ω аффинного нормированного пространства E. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое отображение g класса C^m многообразия V в E, что $g(K) \subset \Omega$* [1]*, причем на компакте K имеет место неравенство $\||\overrightarrow{f - g}\|| \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 < \min(\varepsilon, \delta)$, где δ — расстояние от компакта $f(K)$ до $C\Omega$. Для каждой точки $a \in K$ можно найти такую открытую окрестность $\mathscr{V}_a$ точки a в V, что для всех $x \in K \cap \mathscr{V}_a$ имеет место неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x) - f(a)}\| \leqslant \varepsilon_1. \qquad \text{(VI, 8; 32)}$$

Так как множество K компактно, то его можно покрыть конечным числом открытых множеств $\mathscr{V}_a$. Пусть это будут окрестности $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$ точек a_i. Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ — подчиненное разложение единицы, где α_i принадлежат классу C^m на V. Поскольку многообразие V принадлежит классу C^m, то, согласно теореме о разложении единицы (теорема 11 гл. IV), такое разложение возможно.

---

[1]) Естественно, что $g^{-1}(\Omega)$ является некоторой открытой окрестностью $\mathscr{K}$ множества K, а g отображает всю эту окрестность в Ω.

Обозначим теперь через O произвольную точку пространства E. Построим функцию

$$g(x) = O + \sum_{i \in I} \alpha_i(x) \overrightarrow{(f(a_i) - O)}. \qquad \text{(VI, 8; 33)}$$

Поскольку α_i принадлежат классу C^m, то эта функция как отображение V в E принадлежит классу C^m. С другой стороны, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &f(x) = O + \sum_{i \in I} \alpha_i(x) \overrightarrow{(f(x) - O)} \quad \text{для} \quad x \in K, \\ &\|\overrightarrow{g(x) - f(x)}\| \leqslant \sum_{i \in I} \alpha_i(x) \|\overrightarrow{f(x) - f(a_i)}\| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{для} \quad x \in K. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 8; 34)}$$

В силу выбора ε_1 последнее выражение $\leqslant \varepsilon$. Поскольку, кроме того, $\varepsilon_1 < \delta$, то $g(x)$ при всех $x \in K$ лежит в Ω, чем и заканчивается доказательство теоремы.

С помощью этой теоремы мы сможем установить некоторое соотношение между различными C^m-гомотопиями.

Теорема 53. *Пусть K — компакт некоторого многообразия V класса C^m, и пусть f_1 и f_2 — два отображения класса C^m компакта K в открытое множество Ω аффинного нормированного пространства E. Если отображения f и g C^0-гомотопны, то они C^m-гомотопны.*

Доказательство. В самом деле, пусть F — отображение $[0, 1] \times K$ в Ω, определяющее топологическую гомотопию между f_1 и f_2. Тогда F является непрерывным отображением некоторого компакта многообразия $\mathbb{R} \times V$ в Ω. Согласно теореме 52, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое отображение G: $[0, 1] \times K \to \Omega$ класса C^m, для которого справедливо неравенство $|||\overrightarrow{F - G}||| \leqslant \varepsilon$. Выберем $\varepsilon < \delta$, где δ — наименьшее из расстояний δ_1 и δ_2 от $f_1(K)$ и $f_2(K)$ до $\complement\Omega$. Заметим, что G является гомотопией класса C^m между двумя отображениями g_1 и g_2 компакта K в Ω, определенными равенствами

$$g_1(x) = G(0, x) \quad \text{и} \quad g_2(x) = G(1, x). \qquad \text{(VI, 8; 35)}$$

Таким образом, исходя из C^0-гомотопии между f_1 и f_2, мы нашли C^m-гомотопию между отображениями g_1 и g_2, «очень близкими» к f_1 и f_2.

Так как оба отображения f_1 и g_1 принадлежат классу C^m и $|||\overrightarrow{f_1 - g_1}||| < \delta_1$, то отображения f_1 и g_1, в силу теоремы 51, C^m-гомотопны.

Аналогично проверяется, что отображения f_2 и g_2 также C^m-гомотопны.

Таким образом, имеется три C^m-гомотопии, переводящие f_1 в g_1, g_1 в g_2 и g_2 в f_2. В силу теоремы 50 отсюда вытекает, что отображения f_1 и f_2 также C^m-гомотопны.

Следствие 1. *Пусть K — компакт некоторого многообразия V класса C^m и Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E. Если для некоторого целого числа $l_0 \leqslant m$ два произвольных отображения класса C^{l_0} компакта K в Ω гомотопны, то для каждого целого $l \leqslant m$ два произвольных отображения класса C^l компакта K в Ω C^l-гомотопны. Это свойство зависит только от топологии множества Ω; другими словами, оно остается справедливым, если множество Ω заменить любым другим ткрытым множеством Ω' аффинного нормированного пространства, гомеоморфным множеству Ω.*

Доказательство. *Возьмем сначала* $l=0$. Пусть f_1 и f_2 — два *непрерывных* отображения компакта K в Ω. Пусть $\varepsilon > 0$ — число, строго меньшее расстояний от $f_1(K)$ и $f_2(K)$ до $\complement\Omega$. Согласно теореме 52, существуют такие отображения g_1 и g_2 класса C^{l_0} компакта K в Ω, что $|||\overrightarrow{f_1 - g_1}||| \leqslant \varepsilon$ и $|||\overrightarrow{f_2 - g_2}||| \leqslant \varepsilon$. В силу теоремы 51 они гомотопны соответственно f_1 и f_2. Однако, согласно *предположению, сделанному относительно* l_0, отображения g_1 и g_2 гомотопны. Следовательно, имеют место гомотопии $f_1 \to g_1 \to g_2 \to f_2$. В силу теоремы 50 отображения f_1 и f_2 гомотопны.

Возьмем теперь произвольное целое число $l \leqslant m$. Согласно изложенному выше, два отображения компакта K в Ω класса C^l непрерывны, а значит, гомотопны. Следовательно, в силу теоремы 53 они C^l-гомотопны.

Любое свойство относительно отображений класса C^l не обязано априори сохраняться при гомеоморфизме. Казалось бы, что установленное выше свойство должно было сохраниться только при C^l-диффеоморфизме. Однако, поскольку оно эквивалентно тому же свойству при $l=0$, оно сохраняется и при гомеоморфизме.

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства, гомеоморфное выпуклому или звездному открытому множеству или открытому множеству, обладающему свойствами, указанными в теореме* 19 *Пуанкаре. Тогда два произвольных отображения класса C^m компакта K многообразия класса C^m в Ω являются C^m-гомотопными.*

В самом деле, из следствия 1 вытекает, что это свойство сохраняется при гомеоморфизме. Остается лишь обратиться к теореме 51.

Соотношения между гомотопией и гомологией

Теорема 54. *Пусть* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ — *два цикла класса* C^m *некоторого открытого множества* Ω *из* E. *Если эти циклы гомотопны в* Ω, *то они* C^m*-гомологичны в* Ω.

Доказательство. Прежде всего говорят, что два C^m-цикла гомотопны, если они определены как отображения H_1 и H_2 класса C^m *одного и того же* компактного ориентированного многообразия $\vec{V}$ (без края) и если H_1 и H_2 гомотопны. Согласно теореме 53, в этом случае они C^m-гомотопны.

Пусть K — некоторая C^m-гомотопия, т. е. C^m-отображение $[0, 1]\times V$, допускающее переход от одного отображения к другому. Так как $b\overrightarrow{V} = \emptyset$, то, согласно формуле (VI, 8; 21),

$$b(K\,|\,\overrightarrow{[0, 1]\times V}) = H_2|\vec{V} + H_1|\overleftarrow{V} = \vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_1. \qquad \text{(VI, 8; 36)}$$

Следовательно, цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ является C^m-границей, а значит, он C^m-гомологичен 0, и потому циклы $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ C^m-гомологичны друг другу.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Два цикла $H_1|\vec{V}$ и $H_2|\vec{V}$ могут быть, как это легко видеть, гомологичными, но не гомотопными. Кроме того, о гомотопии двух циклов можно говорить только в том случае, когда мы имеем два отображения *одного и того же многообразия*, тогда как это вовсе не так, когда речь идет о гомологии.

Следствие 1. *Если* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ — *два гомотопных* n*-мерных цикла класса* C^1 *из открытого множества* $\Omega \subset E$ *и если* $\vec{\omega}$ — *замкнутая дифференциальная форма степени* n *на* Ω *класса* C^1, *то интегралы от* $\vec{\omega}$ *по* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ *равны.*

В самом деле, циклы $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ C^1-гомологичны в Ω и остается лишь применить следствие к теореме 49.

Это следствие говорит еще и о том, что интеграл от коцикла по C^1-циклу может не быть нулем [см. стр. 247, замечание 2°)], но он не изменяется, когда этот цикл подвергается непрерывной деформации.

Для целей дальнейшего изложения удобно ввести понятие отображения, гомотопного нулю.

Определение. Если f — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, то говорят, что это *отображение гомотопно* 0, если оно гомотопно некоторому постоянному отображению.

Так как всякое постоянное отображение n-мерного компактного многообразия в Ω является циклом, гомологичным 0, если размерность n этого цикла > 0[1]), то имеет место

Следствие 2. *Если* Γ — *цикл размерности* $n > 0$ *класса* C^m *из открытого множества* $\Omega \subset E$, *гомотопный* 0, *то этот цикл* C^m-*гомологичен* 0 *и при* $m \geqslant 1$ *интеграл по этому циклу от каждого коцикла* $\vec{\omega}$ *степени* n *равен нулю.*

Естественно, что это свойство не сохраняется, если размерность $n = 0$ (ибо постоянное отображение не является более вырожденным циклом). Если $m = 0$, то интеграл от $\vec{\omega}$ не имеет смысла.

Следствие 3. *Если* Ω — *выпуклое или звездное открытое множество конечномерного аффинного пространства* E, *или открытое множество, обладающее свойствами, указанными в теореме* 19, *или открытое множество, гомеоморфное одному из предыдущих множеств, то каждый цикл класса* C^m *из* Ω *размерности* $n > 0$ C^m-*гомологичен* 0 *и, если* $m \geqslant 1$, *интеграл по такому циклу от каждого коцикла степени* n *равен нулю. Каждый коцикл* $\vec{\omega}$ *степени* $n > 0$ *на* Ω *является кограницей.*

В самом деле, если отображение $H \mid \vec{V}$ является C^m-циклом в Ω, то оно C^m-гомотопно любому другому C^m-циклу $H_0 \mid \vec{V}$, где H_0 — отображение класса C^m многообразия V в Ω. Выбирая в качестве H_0 постоянное отображение, мы убеждаемся в том, что цикл $H \mid \vec{V}$ C^m-гомотопен 0, а следовательно, C^m-гомологичен 0 при $n > 0$.

Интеграл от каждого коцикла $\vec{\omega}$ по такому циклу равен нулю. Из теоремы 44 де Рама мы знаем теперь, что каждый коцикл степени > 0 в Ω является кограницей: теорема 19 Пуанкаре в этом открытом множестве справедлива. Очевидно также, что она справедлива не только для открытых множеств, обладающих свойствами, указанными в теореме 19, но также

[1]) Именно здесь мы используем вырожденные циклы, введенные на стр. 259 при определении гомологии.

для выпуклых или звездных открытых множеств и для множеств, им гомеоморфных. Правда, мы *приняли без доказательства* теорему де Рама. В силу теоремы 45 наше утверждение доказано по крайней мере для степени $n=1$.

Следствие 4. *Каждый C^1-цикл открытого множества Ω конечномерного аффинного пространства E, C^0-гомологичный нулю, C^1-гомологичен нулю. Интеграл по этому циклу от любого коцикла равен нулю.*

Доказательство, которое мы дадим, несмотря на аналогичность наших условий условиям теоремы 53, не переносится на класс C^m. Оно пригодно в одном частном случае: особое C^0-многообразие определено как непрерывное отображение H многообразия *класса* C^1. Заменять здесь C^1 на C^m нельзя.

Доказательство. Пусть $H|\vec{V}$ — рассматриваемый C^1-цикл. То, что он C^0-гомологичен 0, по определению (VI, 8; 19) означает, что можно найти ориентированное многообразие $\vec{W}$ класса C^1 и *непрерывное* отображение K многообразия W в Ω, обладающие следующими свойствами:

A) Многообразие $\vec{W}$ является объединением трех открытых непересекающихся подмножеств $\vec{V}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$. Подмножество $\vec{A}$ является границей многообразия с краем $\vec{\mathfrak{A}}$ класса C^1. Отображение K совпадает с H на V. Его можно продолжить до некоторого непрерывного отображения $\tilde{K}$ многообразия $\mathfrak{A}$ в Ω. Кроме того, K вырожденно на B (другими словами, $K(B)$ является конечным множеством, если размерность $B>0$, и пусто, если эта размерность равна нулю. Естественно, отображение K принадлежит классу C^1 на B, ибо оно постоянно на каждой связной компоненте B). Тогда $K|\vec{W}=H|\vec{V}+\tilde{K}|b\vec{\mathfrak{A}}+K|\vec{B}$.

B) Многообразие $\vec{W}$ также является объединением двух непересекающихся открытых множеств $\vec{A}'$, $\vec{B}'$. Множество $\vec{A}'$ является границей некоторого многообразия с краем $\vec{\mathfrak{A}}'$. Отображение K можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{K}'$ многообразия $\mathfrak{A}'$ в Ω; оно вырожденно на B'. Теперь $K|\vec{W}=\tilde{K}'|b\vec{\mathfrak{A}}'+K|\vec{B}'$ [1]).

Тот факт, что цикл $H|\vec{V}$ гомологичен 0, теперь является следствием следующего соотношения:

$$H|\vec{V}+\tilde{K}|\widehat{b\mathfrak{A}}+K|\vec{B}=\tilde{K}'|\widehat{b\mathfrak{A}'}+K|\vec{B}'. \qquad \text{(VI, 8; 37)}$$

---

[1]) Многообразия $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ не лежат в W.

Пусть $\varepsilon > 0$ — число, строго меньшее расстояний от компактов $\tilde{K}(\mathfrak{A})$ и $\tilde{K}'(\mathfrak{A}')$ до $\complement\Omega$. Согласно теореме 52, *поскольку* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ *принадлежат классу* C^1, можно найти такие отображения $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}'_1$ многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ в Ω *класса* C^1, что $|||\overrightarrow{\tilde{K}_1 - \tilde{K}}||| \leqslant \varepsilon$ и $|||\overrightarrow{\tilde{K}'_1 - \tilde{K}'}||| \leqslant \varepsilon$. В силу теоремы 51 эти отображения C^0-гомотопны $\tilde{K}$ и $\tilde{K}'$ соответственно.

Теперь мы имеем следующие C^0-гомотопии циклов:

$$H|\vec{V} + \tilde{K}_1|\vec{A} + K|\vec{B} \to H|\vec{V} + K|\vec{A} + K|\vec{B} =$$
$$= K|\vec{W} = K|\vec{A}' + K|\vec{B}' \to \tilde{K}'_1|\vec{A}' + K|\vec{B}'. \qquad \text{(VI, 8; 38)}$$

Первый и последний части равенств — это *циклы класса* C^1. Так как они C^0-гомотопны, то в силу теоремы 53 они C^1-гомотопны. По теореме 54 они C^1-*гомологичны*. Но $\tilde{K}_1|\vec{A} = \tilde{K}_1|\widehat{b\mathfrak{A}}$ и $\tilde{K}'_1|A' = \tilde{K}'_1|\widehat{b\mathfrak{A}'}$ являются C^1-границами, а $K|\vec{B}$ и $K|\vec{B}'$ вырожденны, и значит, все C^1-гомологичны 0. Следовательно, согласно теореме 47, цикл $H|\vec{V}$ C^1-гомологичен нулю.

Если форма $\vec{\omega}$ является коциклом на Ω, то тот факт, что цикл $H|\vec{V}$ только C^0-*гомологичен* 0, не влечет за собой априори равенства $\int\limits_{H|\vec{V}} \vec{\omega} = \vec{0}$. Однако это равенство выполняется, поскольку цикл $H|\vec{V}$ C^1-гомологичен 0[1]).

Следствие 5. *Пусть Ω — открытое множество конечномерного аффинного пространства E. Тогда следующие свойства эквивалентны: в Ω все C^0-циклы C^0-гомологичны* 0 *и все C^1-циклы C^1-гомологичны* 0. *Если эти свойства справедливы для Ω, то они будут справедливыми и для любого открытого множества, гомеоморфного Ω.*

Доказательство. 1°) Предположим, что любой C^0-цикл C^0-гомологичен 0. Тогда любой C^1-цикл, будучи C^0-гомологичным 0, в силу следствия 4, C^1-гомологичен 0.

2°) Предположим, что каждый C^1-цикл C^1-гомологичен 0. Пусть $H|\vec{V}$ является C^0-циклом. Если H_1 — такое отображение

[1]) Мы сформулировали теорему 37 Стокса для класса C^1. Но мы отмечали, что ее доказательство для этого класса слишком сложно, и провели его только для случая класса C^2. Таким образом, мы здесь опираемся на свойство, принятое без доказательства.

Значение свойств, полученных в следствиях 1, 2 и 4, заключается в доказательстве того факта, что интеграл от коцикла по циклу зависит только от *топологических* свойств цикла относительно открытого множества Ω.

класса C^1 многообразия V в Ω, что $\| \overrightarrow{H - H_1} \| < d(H(V), \complement\Omega)$, то цикл $H|\vec{V}$ C^0-гомотопен циклу $H_1|\vec{V}$, а следовательно, C^0-гомологичен ему. По предположению цикл $H_1|\vec{V}$ класса C^1 C^1-гомологичен 0, а следовательно, и подавно C^0-гомологичен 0, а тогда цикл $H|\vec{V}$ также C^0-гомологичен 0.

При гомеоморфизме, очевидно, сохраняется свойство, относящееся к C^0, а значит, такое же свойство относительно C^1. Для всех открытых множеств, обладающих этим свойством, справедлива теорема Пуанкаре. См. по этому поводу стр. 276, где мы говорили о сохранении при гомеоморфизме открытых множеств, для которых справедлива теорема Пуанкаре.

Следствие 6. *Пусть $\vec{\omega}$ — коцикл степени* 1 *из открытого множества* Ω *конечномерного аффинного пространства* E, *и пусть* $H|\vec{\Gamma}$ *есть* C^0-*цикл конечной длины*, C^0-*гомологичный* 0. *Тогда интеграл от* $\vec{\omega}$ *по циклу* $H|\vec{\Gamma}$ *равен нулю.*

Доказательство. Для упрощения технической стороны доказательства предположим, что $\vec{\Gamma}$ является тригонометрической окружностью в $\mathbb{R}^2$.

Мы знаем, согласно следствию 4, что если отображение H принадлежит классу C^1 и цикл $H|\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0, то интеграл равен нулю. Мы считаем здесь, что цикл имеет конечную длину, и пользуемся определением интеграла, данным в теореме 36.

1°) Пусть δ—расстояние от $H(\Gamma)$ до $\complement\Omega$ в евклидовой норме пространства E. Поскольку отображение H непрерывно на компакте Γ, то оно равномерно непрерывно на нем. Если предположить, что окружность Γ параметризована с помощью $\theta \in [0, 2\pi]$, то можно найти такое $\eta > 0$, чтобы из неравенства $|\theta' - \theta''| \leqslant \eta$ следовало неравенство $\| \overrightarrow{H(\theta') - H(\theta'')} \| < \delta/2$. Пусть Δ: $\theta_0 = 0$, θ_1, θ_2, ..., $\theta_n = 2\pi$ — некоторое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$, причем наибольшая длина отрезков этого разбиения $\leqslant \eta$. Открытый шар B_i с центром $H(\theta_i)$ радиуса $\delta/2$ удовлетворяет условиям теоремы 19 Пуанкаре. Следовательно, форма $\vec{\omega}$ имеет внешнюю первообразную $\vec{f}_i$ в B_i: $\vec{\omega} = d\vec{f}_i$. Естественно, что функция f_i зависит от индекса i. Каждый путь $M|[\theta_i, \theta_{i+1}]$ лежит в этом открытом шаре, и, следовательно, по теореме 39

$$\int\limits_{H|[\overrightarrow{\theta_i, \theta_{i+1}}]} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H(\theta_i)). \tag{VI, 8; 39}$$

Обозначим через H_1 отображение Γ в Ω, определенное формулами

$$H_1(\theta) = H(\theta_i) + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\,(\overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)}) \qquad \text{(VI, 8; 40)}$$

для $\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}$.

Образом окружности Γ при отображении H_1 является ломаная с вершинами $H(\theta_i)$. При этом для $\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}$

$$\| \overrightarrow{H(\theta) - H(\theta_i)} \| < \frac{\delta}{2}$$

и

$$\| \overrightarrow{H_1(\theta) - H(\theta_i)} \| \leqslant \| \overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)} \| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{(VI, 8; 41)}$$

а следовательно, для каждого θ справедливо неравенство $\| \overrightarrow{H(\theta) - H_1(\theta)} \| < \delta$. Отсюда

$$||| \overrightarrow{H - H_1} ||| < \delta. \qquad \text{(VI, 8; 42)}$$

Согласно теореме 51, это означает, что циклы $H | \vec{\Gamma}$ и $H_1 | \vec{\Gamma}$ C^0-гомотопны, а значит, по теореме 54 C^0-гомологичны. Поскольку по предположению цикл $H | \vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0, то C^0-гомологичным 0 будет и цикл $H_1 | \vec{\Gamma}$. Согласно теореме 39,

$$\int\limits_{H_1 | [\widehat{\theta_i, \theta_{i+1}}]} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H_1(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H_1(\theta_i)). \qquad \text{(VI, 8; 43)}$$

Следовательно, интегралы от $\vec{\omega}$ по циклам $H | \vec{\Gamma}$ и $H_1 | \vec{\Gamma}$ равны.

2°) Для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл от $\vec{\omega}$ по циклу $H_1 | \vec{\Gamma}$ равен нулю. Однако $H_1 | \vec{\Gamma}$ теперь является циклом, кусочно принадлежащим *классу* C^1 (и даже классу C^∞), C^0-гомологичным 0.

При доказательстве первой части теоремы 45 было построено отображение H_2 окружности Γ в Ω *класса* C^∞, а не только кусочно принадлежащее этому классу, такое, что интегралы от $\vec{\omega}$ по двум циклам $H_1 | \vec{\Gamma}$ и $H_2 | \vec{\Gamma}$ были одни и те же. В каждом интервале $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ имеет место формула (VI, 8; 8): $H_2(\theta) = H_1(g_i(\theta))$. Отрезок $[H_1(\theta), H_2(\theta)]$ содержится в отрезке $[H(\theta_i), H(\theta_{i+1})]$, а следовательно, и в Ω. Из леммы к теореме 51 следует, что отображения H_1 и H_2 гомотопны, следовательно, C^0-гомологичны циклы $H_1 | \vec{\Gamma}$ и $H_2 | \vec{\Gamma}$, а потому цикл $H_2 | \vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0.

3°) Таким образом, нам достаточно будет убедиться в том, что интеграл от $\vec{\omega}$ по C^∞-циклу $H_2 | \vec{\Gamma}$, C^0-гомологичному нулю, равен нулю. Но это вытекает из следствия 4, ибо тогда цикл $H_2 | \vec{\Gamma}$ C^1-гомологичен нулю.

Односвязные пространства

Топологическое пространство X называется *односвязным*, если любое непрерывное отображение f плоской окружности в X гомотопно 0. Естественно, всегда можно предполагать, что эта окружность является тригонометрической окружностью в $\mathbb{R}^2$. Односвязность является чисто *топологическим* свойством пространства X, инвариантным относительно гомеоморфизма.

Обозначим через Δ единичный круг в $\mathbb{R}^2$. Отображение $(t, \vec{m}) \to t\vec{m}$ окружности Γ в круг Δ непрерывно. Каждая точка круга Δ *единственным образом* записывается в виде $t\vec{m}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ \vec{m} \in \Gamma)$, кроме начала координат $\vec{0}$, которое записывается в виде $0\vec{m}$, где $\vec{m}$ — произвольная точка Γ.

Теорема 55. *Для того чтобы отображение f тригонометрической окружности Γ в топологическое пространство X было гомотопным* 0, *необходимо и достаточно, чтобы отображение f допускало продолжение до непрерывного отображения $\tilde{f}$ единичного круга Δ в X.*

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что отображение f допускает такое продолжение $\tilde{f}$. Тогда мы можем определить гомотопию F между f и постоянным отображением Γ в X по формуле

$$F(t, \vec{m}) = \tilde{f}(t\vec{m}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad \vec{m} \in \Gamma. \qquad \text{(VI, 8; 44)}$$

Отображение F — такое непрерывное отображение $[0, 1] \times \Gamma$ в X, что $F(1, \vec{m}) = \tilde{f}(\vec{m}) = f(\vec{m})$ и $F(0, \vec{m}) = \tilde{f}(\vec{0})$. Следовательно, f гомотопно 0.

2°) Предположим теперь, что отображение f гомотопно 0, и пусть F — гомотопия, соответствующая такому отображению $[0, 1] \times \Gamma$ в пространство X, что $F(1, \vec{m}) = f(\vec{m})$, $F(0, \vec{m}) = a$, где элемент a фиксирован.

Тогда продолжение $\tilde{f}$ отображения f может быть определено по формуле

$$\tilde{f}(t\vec{m}) = F(t, \vec{m}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad \vec{m} \in \Gamma. \qquad \text{(VI, 8; 45)}$$

В этой формуле *нет никакой неоднозначности*: поскольку $F(0, \vec{m})$ принимает всегда одно и то же значение $a \in X$, то для центра круга можно взять $t = 0$ и выбирать $\vec{m}$ произвольно.

С другой стороны, определенная выше функция $\tilde{f}$ непрерывна. Для того чтобы в этом убедиться, предположим для простоты, что X — метрическое пространство.

Так как функция F непрерывна на компакте $[0, 1] \times \Gamma$, то она равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что из неравенств $|t' - t''| \leqslant \eta$ и $\|\vec{m}' - \vec{m}''\| \leqslant \eta$ вытекает неравенство

$$d(F(t', m'), \ F(t'', m'')) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(VI, 8; 46)}$$

Если теперь $t_0\vec{m}_0$ является точкой круга Δ, отличной от начала координат, то множество тех точек $t\vec{m}$, для которых $|t - t_0| \leqslant \eta$ и $\|\vec{m} - \vec{m}_0\| \leqslant \eta$, является окрестностью этой точки, в которой имеет место неравенство

$$d(\tilde{f}(t\vec{m}), \ \tilde{f}(t_0\vec{m}_0)) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(VI, 8; 47)}$$

из которого следует непрерывность функции $\tilde{f}$ в точке $t_0\vec{m}_0 \neq \vec{0}$. С другой стороны, множество точек $t\vec{m}$, для которых $|t| \leqslant \eta$ и $\vec{m}$ произвольно, образует окрестность начала координат, в которой

$$d(\tilde{f}(t\vec{m}), \ \tilde{f}(\vec{0})) = d(F(t, \vec{m}), \ F(0, \vec{m})) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(VI, 8; 48)}$$

Это означает, что функция $\tilde{f}$ непрерывна в $\vec{0}$, а следовательно, и всюду. Поскольку $\tilde{f} = f$ на Γ, то функция $\tilde{f}$ является продолжением функции f на Δ.

Следствие 1. *Топологическое пространство X односвязно тогда и только тогда, когда каждое непрерывное отображение в X окружности Γ — границы круга Δ — может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{f}$ круга Δ в X.*

Заметим, что односвязность вовсе не говорит о связности. Пространство может быть связным и не быть односвязным. Например, на стр. 288 [1]) мы увидим, что дополнение Ω к началу координат в $\mathbb{R}^2$ не является односвязным (так как тригонометрическую окружность путем непрерывной деформации стянуть в точку в Ω невозможно), в то время как это множество

[1]) Следствие 3 теоремы 58.

связно. Обратно, пространство X может быть односвязным, но не быть связным. Например, если мы предположим, что пространство X не связно, но является объединением двух открытых непересекающихся множеств X_1 и X_2, то X односвязно тогда и только тогда, когда односвязны оба множества X_1 и X_2. В самом деле, каждое непрерывное отображение окружности или круга в X непременно имеет образ, лежащий в одном из этих множеств X_1, X_2, ибо этот образ связен (теорема 33 гл. II).

Для каждого целого $n \geqslant 0$ можно определить понятие n-связности. Топологическое пространство X мы будем называть n-связным, если каждое непрерывное отображение единичной сферы из $\mathbb{R}^{n+1}$ в X гомотопно 0 или может быть продолжено до непрерывного отображения единичного шара из $\mathbb{R}^{n+1}$ в X. Это чисто топологическое свойство пространства X. Если пространство X 1-связно, то оно односвязно. Поскольку единичная сфера из $\mathbb{R}$ является двухэлементным множеством $\{-1, +1\}$, а единичный шар представляет собой отрезок $[-1, +1]$, то сразу же видно, что пространство X 0-связно тогда и только тогда, когда две произвольные точки X могут быть соединены некоторым путем, т. е. когда X линейно связно. Таким образом, с понятием связности, изученным в § 10 гл. II, связано понятие 0-связности, а не односвязности или 1-связности. Понятия n-связности для различных значений n не зависят одно от другого. Если здесь мы говорим только о случае $n=1$, то это объясняется той исключительной ролью, которую играют криволинейные интегралы от дифференциальных форм 1-й степени в гл. VII. Из теоремы 51 вытекает

Теорема 56. *Открытое множество Ω аффинного пространства E, связное, или звездное, или удовлетворяющее условиям теоремы* 19 *Пуанкаре, или гомеоморфное одному из пространств этих типов, n-связно при любом $n \geqslant 0$.*

Теорема 57. *Сфера, дополнение к точке, шаровой слой в N-мерном евклидовом пространстве E k-связны при $0 \leqslant k \leqslant N-2$. Они односвязны при $N > 2$ (и также, очевидно, при $N=1$ [1]), а следовательно, окончательно при $N \neq 2$).*

Напротив, в следствии 3 теоремы 58 мы увидим, что эти множества не $(N-1)$-связны. В частности, окружность евклидовой плоскости $(N=2)$ не односвязна.

Доказательство. 1°) Дадим сначала доказательство для пространства $\complement O$, где O — заданная точка из E. Пусть

[1]) Ибо каждое из этих трех открытых множеств в $\mathbb{R}$ представляет собой объединение двух открытых непересекающихся односвязных открытых множеств.

S — единичная сфера в $\mathbb{R}^{k+1}$, f — непрерывное отображение S в $\complement O$. Отображение f можно приблизить гомотопным ему отображением g класса C^1 (теоремы 52 и 51).

В пространстве E отображение g C^1-гомотопно 0 (теорема 51). Пусть G — гомотопия между g и постоянным отображением класса C^1 множества $[0, 1]\times S$ в E. Размерность пространства $[0, 1]\times S < N$. Образ $G([0, 1]\times S)$ имеет нулевую меру по мере Лебега относительно произвольной системы координат (следствие 1 теоремы 102_2 гл. IV). Значит, почти для всех векторов $\vec{u}$ из $\vec{E}$ множество $G([0, 1]\times S)$ не содержит $O-\vec{u}$. Отображение $G+\vec{u}$: $x\to G(x)+\vec{u}$ множества $[0, 1]\times S$ в E является в действительности отображением в $\complement O$. Тогда отображение $g+\vec{u}$ гомотопно 0 в $\complement O$. Для $\|\vec{u}\| < d(g(S), 0)$ оно гомотопно g в $\complement O$ (по теореме 51), а следовательно, отображение g гомотопно 0 в $\complement O$. Но тогда гомотопным 0 в $\complement O$ будет отображение f, а это означает, что множество $\complement O$ k-связно.

Замечание. Сферу S можно заменить любым компактным многообразием размерности $< N-1$. Множество $\complement O$ можно заменить множеством $\complement A$, где A—произвольное счетное замкнутое множество из E. [Известно, что в этом случае для почти всех значений $\vec{u}$ из $\vec{E}$ множество $(G+\vec{u})([0, 1]\times S)$ не содержит точки a_i из множества A. В силу теоремы 21 гл. IV (относительно счетного множества почти всюду выполняющихся свойств) мы знаем, что почти для всех значений $\vec{u}$ множество $(G+\vec{u})([0, 1]\times S)$ *не содержит ни одной из точек* A, а следовательно, отображение $g+\vec{u}$ гомотопно 0 в $\complement A$.]

2°) Рассмотрим теперь случай сферы Σ. При этом можно всегда перейти к случаю, когда Σ — единичная сфера пространства $\vec{E}$. Пусть f — непрерывное отображение S в Σ. Согласно доказанному в п. 1°), в $\complement\vec{O}$ существует некоторая гомотопия F (непрерывное отображение множества $[0, 1]\times S$ в $\complement\vec{O}$) отображения f в постоянное отображение.

Отображение $(t, x)\to\vec{F}(t, x)/\|\vec{F}(t, x)\|$ является гомотопией на *единичной сфере* Σ между отображением f и постоянным отображением. Следовательно, сфера Σ действительно k-связна.

3°) Рассмотрим, наконец, в $\vec{E}$ шаровой слой Ω с центром в точке $\vec{O}$. Если f — непрерывное отображение сферы S в Ω и Σ — сфера с центром O радиуса R, содержащаяся в Ω, то отрезок $\left[\vec{f}(x),\ R\frac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}\right]$ лежит в Ω для любого $x \in S$. Следовательно, отображение $\vec{f}$ гомотопно в Ω непрерывному отображению $x \to R\frac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}$ сферы S в сферу Σ. В п. 2°) мы видели, что это отображение гомотопно 0 в Σ. Следовательно, оно заведомо гомотопно 0 в множестве Ω, которое тем самым оказывается k-связным.

Совершенно очевидно, что тождественное отображение тригонометрической окружности из $\mathbb{R}^2$ в дополнении $\complement 0$ к началу координат не гомотопно нулю. В противном случае канонически ориентированная тригонометрическая окружность была бы C^0-гомологична 0 в $\complement 0$ (теорема 54), а следовательно, C^1-гомологична 0 (следствие 4 теоремы 54). Интеграл по этой окружности от коцикла $d\varphi$ из (VI, 4; 41) равен $2\pi \neq 0$. Следовательно, окружность не гомотопна 0 в подпространстве плоскости, содержащем окружность и не содержащем ее центра. Таким образом, *окружность, круговое кольцо* $R_1 < \|\overrightarrow{x-a}\| < R_2$, *дополнение к точке или к некоторому непустому компакту, произвольное подпространство евклидовой плоскости, содержащее окружность и не содержащее ее центра, не являются односвязными.*

Мы сейчас распространим это свойство на понятие $(N-1)$-связности в N-мерном аффинном евклидовом пространстве.

Дифференциальная форма «телесный угол»

Для выполнения поставленной задачи определим в ориентированном евклидовом N-мерном пространстве специальную дифференциальную форму степени $N-1$, называемую *телесным углом*, которая при $N=2$ имеет вид (VI, 4; 41). Пусть E — аффинное евклидово N-мерное пространство, и пусть O — точка E. Пусть Σ — *трансверсально ориентированная* гиперповерхность класса C^1 из E, не проходящая через O. Если эта ориентация такова, что в каждой точке $M \in \Sigma$ радиус-вектор OM трансверсален и положителен, то естественно назвать алгебраическим телесным углом, под которым из O видна поверхность Σ, телесный угол $\geqslant 0$, определенный в гл. IV с помощью интеграла (IV, 10; 25) (где V заменено на Σ). Напомним, что в этой формуле r есть расстояние OM и θ — *острый* угол, образованный OM с нормалью. При некоторых предположениях, сделанных относительно трансверсальной ориентации поверхности Σ, угол θ также является углом, образованным $\overrightarrow{OM}$ с единичным положительным вектором нормали $\vec{v}$. Согласно (VI, 7; 49), этот интеграл может быть выражен как поток через поверхность Σ векторного поля

$$\vec{X} = \frac{\vec{i}}{r^{N-1}}, \qquad \text{(VI, 8; 49)}$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор полупрямой OM.

Более общо, пусть Σ — *произвольная гиперповерхность класса C^1 из $E - O$*, имеющая произвольную трансверсальную ориентацию. *Телесным алгебраическим углом*[1]), под которым из точки O видна поверхность Σ, мы назовем поток векторного поля (VI, 8; 49) через поверхность Σ.

Этот угол зависит только от поверхности Σ, ее трансверсальной ориентации и евклидовой структуры E. Составляющие поля $\vec{X}$ относительно ортонормированной системы в E с началом в O определяются по формуле

$$X_j = \frac{x_j}{r^N}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad \text{(VI, 8; 50)}$$

Пусть пространство E ориентировано. Тогда, согласно (VI, 3; 42), полю $\vec{X}$ можно поставить в соответствие некоторую дифференциальную форму. Умножая ее на $(-1)^{N-1}$, получаем *дифференциальную форму «телесный угол»* $\omega = \omega_0$ степени $N-1$, интеграл от которой по поверхности $\vec{\Sigma}$, снабженной касательной ориентацией, соответствующей относительно $\vec{E}$ ее трансверсальной ориентации, равен алгебраическому телесному углу, под которым из точки O была видна поверхность Σ (формула (VI, 7; 51)). В ортонормированной положительной системе координат с началом в O имеет место равенство

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{x_j}{r^N} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n\,^{2)}. \qquad \text{(VI, 8; 51)}$$

---

[1]) Разница между определенным здесь *алгебраическим* телесным углом (произвольного знака), зависящим от трансверсальной ориентации Σ, и абсолютным телесным углом гл. IV (всегда $\geqslant 0$), не зависящим от какой-либо ориентации, очевидна. Если Σ — объединение двух сфер с центром в 0 и с противоположными ориентациями, то абсолютный телесный угол равен $2S_N$, в то время как алгебраический телесный угол равен 0.

[2]) Мы записываем здесь это равенство в некоторой системе координат, но ω_0 зависит только от евклидовой структуры и ориентации, поскольку поле $\vec{X}$, задаваемое с помощью (VI, 8; 49), зависит только от евклидовой структуры пространства.

Подчеркнем снова, что для определения этой формы следует предполагать пространство E *ориентированным* евклидовым. Если, не меняя евклидовой структуры пространства E, изменить его ориентацию, то векторное поле (VI, 8; 49) не останется неизменным и, следовательно, *дифференциальная форма* ω_0 *должна поменять знак.*

Некоторые примеры. 1°) Предположим, что E является евклидовой ориентированной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Тогда дифференциальная форма есть не что иное, как то, что мы называли дифференциалом аргумента или полярного угла $d\varphi$, и определяется по формуле (VI, 4; 41). Дифференциальная форма ω_0 является обобщением $d\varphi$ на случай произвольного N.

2°) Предположим, что пространство E есть $\mathbb{R}^3$ и что в нем введена система полярных координат r, θ, φ. Принимая во внимание соответствие между векторными полями и дифференциальными формами степени 2, определенное по формуле (VI, 4; 34), мы видим, что векторному полю (VI, 8; 49) соответствует дифференциальная форма

$$\omega_0 = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi. \qquad \text{(VI, 8; 52)}$$

Так как здесь $N-1=2$, $(-1)^{N-1}=1$, то мы получили искомую форму.

3°) Для $N=1$ форма ω_0 является формой степени 0 или функцией. Из формулы (VI, 8; 51) следует, что эта функция равна $\operatorname{sgn} x$, т. е. $+1$ для $x>0$ и -1 для $x<0$.

Теорема 58. *Если $\vec{E}$ есть N-мерное ориентированное евклидово пространство и O — точка E, то дифференциальная форма «телесный угол» ω_0 принадлежит классу C^∞ и замкнута в дополнении к O. Кроме того, ее интеграл по произвольной сфере $\vec{\Sigma}$ с центром в точке O, ориентированной как граница соответствующего шара, равен S_N, $(N-1)$-мерной площади единичной сферы пространства E:*

$$\int_{\vec{\Sigma}} \omega_0 = S_N. \qquad \text{(VI, 8; 53)}$$

Доказательство. То, что форма ω_0 принадлежит классу C^∞ в $E-O$, вытекает из ее представления (VI, 8; 51). Нетрудно получить кограницу этой формы:

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right)\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N. \qquad \text{(VI, 8; 54)}$$

Здесь

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{r^N} - \frac{N x_j}{r^{N+1}} \cdot \frac{x_j}{r}\right) = \frac{N}{r^N} - \frac{N r^2}{r^{N+2}} = 0,$$

а это означает, что форма ω_0 замкнута.

С другой стороны, ее интеграл по произвольной канонически ориентированной сфере с центром O радиуса R дает поток векторного поля (VI, 8; 49), который равен $\frac{S_N R^{N-1}}{R^{N-1}}$, т. е. площади единичной сферы [1]).

Замечание. Поскольку форма ω_0 замкнута в $E - O$, ее интегралы по двум C^1-гомологичным циклам из $E - O$ совпадают. Напротив, из формулы (VI, 8; 51) следует, что дифференциальная форма ω_0 имеет особенность в начале координат и заменить $E - O$ на E, естественно, невозможно.

Следствие 1. *Коцикл ω_0 не является кограницей в $E - O$.*

В самом деле, в противном случае его интеграл по циклу $\vec{\Sigma}$ был бы равен нулю.

Этот факт обобщает свойство, которое мы уже рассматривали для формы (VI, 4; 41).

Если взять формулу (VI, 8; 52), то мы получим, что $\omega_0 = d[-\cos\theta\, d\varphi]$. Однако функции θ и φ определены и дифференцируемы, например, в дополнении к замкнутой меридианной полуплоскости, проходящей через zz' и Ox, а не в $\mathbb{R}^3 - O$.

Следствие 2. *Ориентированная сфера конечномерного евклидова аффинного пространства не гомологична* 0 *в дополнении к ее центру и тем более не гомотопна* 0.

В самом деле, в противном случае, согласно следствию 4 теоремы 54, интеграл от коцикла ω_0 по этому циклу был бы равен нулю.

Следствие 3. *В N-мерном евклидовом пространстве сфера, дополнение к некоторой точке, шаровой слой или, более общо, подмножество, содержащее сферу, но не содержащее ее центра, не $(N-1)$-связны.*

---

[1]) Так как выходящий радиус-вектор трансверсально положителен, то здесь алгебраический телесный угол равен абсолютному телесному углу. Поэтому полученный результат является непосредственным следствием *определения* абсолютного телесного угла (стр. 769 т. I). При $N = 1$ интеграл от $\operatorname{sgn} x$ по ориентированной сфере (образованной из $\{+1, +\}$ и $\{-1, -\}$; см. стр. 233) равен $+2$ — площади единичной сферы или числу ее точек (см. замечание 5°) на стр. 766 I-го тома).

В самом деле, в таком подпространстве сфера не гомотопна 0, так как она не гомотопна 0 даже в дополнении к ее центру.

Полученный результат дополняет факт, который мы отмечали в теореме 57. Однако остается открытой проблема k-связности сферы в N-мерном пространстве при $k \geqslant N$. Это сложная проблема, пока еще полностью не решенная.

Следствие 4. *Не существует непрерывного отображения шара B евклидова конечномерного пространства на ограничивающую его сферу S, совпадающего с тождественным отображением на этой сфере.*

Если бы такое отображение существовало, то это означало бы следующее: тождественное отображение сферы S на себя можно продолжить до непрерывного отображения шара B на сферу S, а следовательно (теорема 55), сфера S гомотопна 0 в S и тем более в дополнении к ее центру, что противоречит следствию 2.

Следствие 5. *Две евклидовых сферы различных конечных размерностей не гомеоморфны. Два аффинных пространства различной конечной размерности не гомеоморфны.*

В самом деле, пусть N и N' — два целых числа >0 и $N' > N$. Сфера N'-мерного евклидова аффинного пространства $(N-1)$-связна (теорема 57), а сфера евклидова N-мерного пространства этим свойством не обладает (следствие 3). Следовательно, эти сферы гомеоморфными быть не могут.

Если бы два аффинных пространства размерностей N и N' были гомеоморфными, то дополнения к некоторой точке в этих пространствах также были бы гомеоморфными, что невозможно, поскольку одно из них $(N-1)$-связно, а другое — нет.

Эти результаты были сформулированы раньше, на стр. 98 т. I. Мы видим теперь, как много теорем было использовано для их доказательства! Если заменить «гомеоморфизм» на «C^1-диффеоморфизм», то инвариантность размерности устанавливается элементарно, как это мы видели в гл. III (следствие 4 теоремы 11 и примечание на стр. 234 т. I).

Теперь мы сможем дополнить теорему 19 Пуанкаре.

Теорема 59. *Пусть Ω — односвязное открытое множество конечномерного аффинного пространства E, $\vec{\omega}$ — замкнутая дифференциальная форма 1-й степени класса C^m $(m \geqslant 1)$ на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда форма $\vec{\omega}$ является дифференциалом некоторой функции $\vec{f}$ класса C^{m+1}, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Воспользуемся критерием теоремы 45.

Пусть H — отображение класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω. Поскольку множество Ω по предположению *односвязно*, отображение H гомотопно 0, а следовательно, C^∞-гомотопно 0 (теорема 53). Значит, цикл $H|\vec{\Gamma}$ C^∞-гомологичен 0 (теорема 54), а тогда интеграл от $\vec{\omega}$ по циклу $H|\vec{\Gamma}$ равен нулю. Из теоремы 45 следует, что форма $\vec{\omega}$ является кограницей.

Замечание. Этот результат, очевидно, значительно шире теоремы 19. Например, в дополнении к точке в аффинном пространстве размерности $N>2$ теорема Пуанкаре справедлива для степени 1, поскольку множество $\complement O$ односвязно (теорема 57). Однако *множество $\complement O$ не обладает свойствами множества теоремы* 19. Открытые множества теоремы 19 для каждого $k \geqslant 0$ были k-связны (теорема 51), в то время как здесь $\complement O$ для $N \neq 2$ односвязно, но не $(N-1)$-связно (следствие 3 теоремы 58). Впрочем, мы доказываем здесь существование внешней первообразной только для формы степени 1 в связи с односвязностью. Но в $\complement O$ форма ω_0 является некоторым коциклом степени $N-1$, который не есть кограница (следствие 1 теоремы 58), в то время как теорема 19 была применимой ко всем степеням >0. Теорема 59 не обобщается на степени $\neq 1$; открытое множество Ω аффинного пространства может быть k-связным, а все коциклы степени k не будут кограницами. Теорема 44 де Рама позволяет утверждать, что все коциклы степени k будут кограницами, если любой цикл размерности k гомологичен 0, а это не эквивалентно k-связности.

При $N=2$ множество $\complement O$ не односвязно, и мы видели, что теорема Пуанкаре не имеет место для степени 1 (формула (VI, 4; 41)).

Следствие 1. *Пусть $\vec{X}$—векторное поле класса C^m $(m \geqslant 1)$, определенное в односвязном открытом множестве Ω из N-мерного аффинного евклидова пространства E. Предположим, что составляющие X_i этого векторного поля в ортонормированной системе координат удовлетворяют соотношениям* (VI, 4; 52):

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{VI, 8; 55}$$

(*В случае $N=3$ эти соотношения означают, что ротор векторного поля равен нулю.*) *Тогда это векторное поле является дифференциалом некоторого потенциала U класса C^{m+1}.*

Следствие 2. *Если Ω — односвязное открытое множество из $\mathbb{R}^2-0$, то в Ω существует функция-аргумент класса C^∞.*

Если множество Ω односвязно, то, согласно теореме, коцикл ω из (VI, 4; 41) является кограницей, а тогда в силу следствия 2 теоремы 45 в Ω существуют непрерывные функции-аргументы.

Гомология в дополнении к конечному множеству аффинного пространства

Мы видели (следствие 3 теоремы 54), что в E или в открытом звездном множестве из E каждый C^m-цикл размерности >0 C^m-гомологичен 0. Далее мы займемся изучением C^m-гомологий в дополнении к конечному множеству N-мерного аффинного пространства E. Мы уже отмечали, что ориентированная сфера не гомологична 0 в дополнении к ее центру.

Теорема 60. *Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$ над полем вещественных чисел. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечное множество в Ω. Пусть $V \subset \tilde{V} = \Omega$ есть N-мерное компактное многообразие с краем класса C^m $(m \geqslant 1)$, снабженное ориентацией $\vec{V}$, определенной ориентацией пространства $\vec{E}$, и такое, что $a_i \in \mathring{V}$ для некоторого i и $a_j \notin V$ для $j \neq i$. Тогда класс C^m-гомологий поверхности $\vec{\Sigma} = \overrightarrow{bV}$ в открытом множестве $\Omega - A$ не зависит от выбора многообразия V.*

Доказательство. Снабдим E произвольной евклидовой структурой и обозначим через B_i замкнутый шар с центром в точке a_i, настолько малый, чтобы он не содержал никаких других точек a_j, $j \neq i$, а сам лежал бы в открытом множестве $\mathring{V}$. Ориентируем его с помощью ориентации пространства $\vec{E}$. Положим $\vec{\sigma}_i = \overrightarrow{bB_i}$. Множество $V - \mathring{B}_i$, не содержащее точки a_i, является компактным ориентированным (с помощью ориентации в $\vec{E}$) многообразием с краем класса C^m в $\Omega - A$ с границей $\vec{\Sigma} + \overleftarrow{\sigma}_i$. Следовательно, поверхность $\vec{\Sigma}$ в множестве $\Omega - A$ C^m-гомологична $\vec{\sigma}_i$. Если теперь взять две такие гиперповерхности $\vec{\Sigma}_1$, $\vec{\Sigma}_2$ и через B_i обозначить настолько малый шар, чтобы он содержался одновременно в соответствующих открытых множествах $\mathring{V}_1$ и $\mathring{V}_2$, то обе гиперповерхности $\vec{\Sigma}_1$ и $\vec{\Sigma}_2$ будут гомологичны $\vec{\sigma}_i$ в $\Omega - A$ и, следовательно, гомологичны друг другу (рис. 10).

Замечание. 1°) Каким бы ни был класс C^m, цикл $\vec{\sigma}_i$, определенный положительно ориентированной евклидовой сферой с центром в a_i, всегда принадлежит классу C^∞.

2°) Так как мы не определяем многообразий с краем класса C^0, то теорема не имеет смысла для $m=0$.

Рассмотрим все гиперповерхности $\vec{\Sigma}$ *класса* C^∞ указанного в теореме типа (например, такие евклидовы сферы, как $\vec{\sigma}_i$). Они попарно C^∞-гомологичны в $\Omega - A$, а следовательно, C^k-гомологичны для каждого конечного значения k, включая

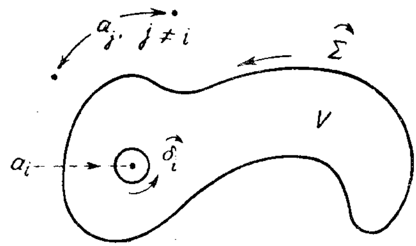

Рис. 10.

и $k=0$. Значит, *они определяют один и тот же класс C^k-гомологий в $\Omega - A$, который мы будем обозначать через* $(a_i^{(k)})$.

Если $\vec{\Sigma}$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 1$, и удовлетворяет условиям теоремы, то эта гиперповерхность принадлежит также классу C^m-гомологий $(a_i^{(m)})$ и классу C^k-гомологий $(a_i^{(k)})$ для $0 \leqslant k \leqslant m$. При $m=0$ все это не имеет смысла.

Естественно, что $\vec{\sigma}_i$ или $\vec{\Sigma}$ являются границами в Ω, а значит, C^m-гомологичны 0 *в* Ω. Следовательно, все C^m-циклы класса $(a_i^{(m)})$ из $\Omega - A$ C^m-гомологичны 0 в Ω. Однако этим свойством в $\Omega - A$ они не обладают (следствие 2 теоремы 58).

Общее выражение для классов гомологий в $\Omega - A$. Гомологичность нулю в Ω

Теорема 61. *Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечная часть Ω. Пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^m-цикл ($m \geqslant 0$) из $\Omega - A$, C^m-гомологичный 0 в Ω. Если размерность этого цикла $< N-1$, то он C^m-гомологичен 0 и в $\Omega - A$. Если его размерность равна $N-1$, то это утверждение, вообще говоря, не верно. Однако существуют такие однозначно опреде-*

ленные целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_l$ произвольных знаков, что рассматриваемый цикл принадлежит классу C^m-гомологий $\sum_{i=1}^{l} p_i\left(a_i^{(m)}\right)$ в $\Omega - A$.

Кроме того, если пространство E евклидово и если ω_{a_i} является дифференциальной формой «телесный угол» относительно точки a_i (формула (VI, 8; 51)) и цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^1 (или классу C^0) и имеет конечную длину для $N=2$, то

$$p_i = \frac{1}{S_N} \int_{\vec{\Gamma}} \omega_{a_i}. \tag{VI, 8; 56}$$

Если $\vec{E}$ — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемое как двумерное ориентированное евклидово пространство над $\mathbb{R}$, то для цикла $\vec{\Gamma}$ конечной длины класса C^0 имеет место равенство

$$p_i = \frac{1}{2i\pi} \int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z - a_i}\ ^{1)}. \tag{VI, 8; 57}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что для получения всех ее результатов следует рассматривать *только* циклы из $\Omega - A$, гомологичные 0 *в* Ω. В самом деле, мы только что видели, что каждый цикл класса $\left(a_i^{(m)}\right)$ гомологичен 0 в Ω. Циклы размерности $N-1$ из $\Omega - A$, не гомологичные 0 в Ω, не обязательно представимы в указанном виде. Если множество Ω выпукло или звездно, то это не является ограничением, и теорема будет справедливой для *каждого цикла* из $\Omega - A$. Отметим, что сложение классов гомологий производится так, как оно было определено в группе гомологий на стр. 266.

Доказательство. В первой части доказательства мы рассмотрим более сложный случай размерности $N-1$ и докажем существование чисел p_i, указанных в условии теоремы. Во второй части мы докажем их единственность, а в третьей части рассмотрим случай размерности $k < N-1$.

Первая часть. Рассмотрим сначала сложный случай, когда размерность равна $N-1$, и *докажем существование чисел* p_i.

Первый случай. Предположим, что особый C^m-цикл $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ размерности $N-1$ имеет вид $H \mid \overrightarrow{bV}$, где $\vec{V} \subset \vec{\vec{V}}$ есть

[1]) В этой формуле i имеет два различных смысла. Это целый индекс в p_i и a_i, но это и $\sqrt{-1}$ в выражении $2i\pi$.

N-мерное ориентированное компактное многообразие с краем класса C^m (класса C^1, если $m=0$), H — отображение класса C^m этого многообразия V *в* Ω [1]). Кроме того, предположим, что прообразом каждой точки a_i из A при отображении H является *конечное число* точек $\alpha_{i,\nu}$ из $\overset{\circ}{V}$ (они не могут лежать на bV, поскольку $\vec{\Gamma}$ лежит в $\Omega - A$), что каждая точка $\alpha_{i,\nu}$ имеет в V некоторую окрестность, в которой H принадлежит по крайней мере классу C^1 (это для случая, когда $m=0$), и, наконец, что производное отображение $H'(\alpha_{i,\nu};\ \tilde{V})$ является *инъективным* отображением $\vec{T}(\alpha_{i,\nu};\ \tilde{V})$ в $\vec{E}$, т. е. имеет максимальный ранг, равный N, или биективно. Тогда (теорема 29 и следствие 2 теоремы 31 гл. III) существует такая открытая связная окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$ точки $\alpha_{i,\nu}$ в $\overset{\circ}{V}$, что $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$ является открытым множеством в E и сужение H на $\mathscr{V}_{i,\nu}$ является C^m-диффеоморфизмом (C^1-диффеоморфизмом, если $m=0$) окрестности $\mathscr{V}_{i,\nu}$ на $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$. Конечно, окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$, кроме $a_{i,\nu}$, не содержит никаких других прообразов точки a_i. Мы ее можем выбрать настолько малой, чтобы она не содержала никаких прообразов точек a_j при $j \neq i$. Обозначим через $\beta_{i,\nu}$ компактное многообразие с краем из $\tilde{\beta}_{i,\nu} = \mathscr{V}_{i,\nu}$ класса C^m (класса C^1, если $m=0$), содержащее $\alpha_{i,\nu}$. Для того чтобы получить это многообразие, достаточно взять в качестве $\beta_{i,\nu}$ прообраз при сужении H на $\mathscr{V}_{i,\nu}$ некоторого шара $B_{i,\nu}$ с центром в точке a_i, содержащийся в $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$. Поскольку окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$ связна, то C^1-диффеоморфизм H, переводящий $\mathscr{V}_{i,\nu}$ на ее образ, сохраняет всюду данную или противоположную ориентацию (ориентацию $\vec{\tilde{V}}$ и $\vec{E}$). Обозначим через $\varepsilon_{i,\nu}$ величину, равную $+1$ или -1 в зависимости от того, какой из случаев рассматривается — первый или второй. Это означает, что $\varepsilon_{i,\nu}$ имеет в $\vec{E}$ знак некоторого базиса-образа при отображении $H'(\alpha_{i,\nu})$ положительного базиса из $\vec{T}(\alpha_{i,\nu};\ \vec{\tilde{V}})$. Если с помощью локальных карт, *сохраняющих ориентации*, множества $\mathscr{V}_{i,\nu}$ и $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$ свести к открытым множествам в $\mathbb{R}^N$, то $\varepsilon_{i,\nu}$ будет иметь знак якобиана отображения H.

Многообразие $\beta_{i,\nu}$ снабдим ориентацией согласно ориентации $\vec{\tilde{V}}$, а шар $B_{i,\nu}$ — согласно ориентации пространства $\vec{E}$. Тогда $H|\vec{\beta}_{i,\nu}$ будет особым многообразием, эквивалентным $\vec{B}_{i,\nu}$ или $\overleftarrow{B}_{i,\nu}$ в зависимости от того, будет ли $\varepsilon_{i,\nu} = +1$ или -1.

---

[1]) Напомним, что цикл $\vec{\Gamma}$ по предположению C^m-гомологичен 0 в Ω. Мы здесь рассматривали его весьма частный случай: C^m-*границу*.

Цикл $(H \mid \overrightarrow{b\beta_{i,\nu}})$ эквивалентен циклу $\varepsilon_{i,\nu}\overrightarrow{bB_{i,\nu}}$, принадлежащему классу C^m-гомологий $\varepsilon_{i,\nu}(a_i^{(m)})$ в $\Omega - A$.

Многообразие с краем $V - \bigcup\limits_{i,\nu} \mathring{\beta}_{i,\nu}$ класса C^1 с ориентацией $\vec{\tilde{V}}$ имеет в качестве границы объединение $\overrightarrow{bV}$ и $\overrightarrow{b\beta_{i,\nu}}$. Следовательно, особое многообразие $H \mid \overrightarrow{V - \bigcup\limits_{i,\nu} \beta_{i,\nu}}$, *содержащееся в* $\Omega - A$, имеет в качестве границы цикл $H \mid \overrightarrow{bV} + \sum\limits_{i,\nu} H \mid \overrightarrow{b\beta_{i,\nu}}$. Отсюда вытекает следующий результат:

Цикл $H \mid \overrightarrow{bV}$ C^m-*гомологичен в* $\Omega - A$ *циклу* $\sum\limits_{i,\nu} H \mid \overrightarrow{b\beta_{i,\nu}}$, *эквивалентному циклу* $\sum\limits_{i,\nu} \varepsilon_{i,\nu}\overrightarrow{bB_{i,\nu}}$. *Его классом* C^m-*гомологий является* $\sum\limits_{i} p_i(a_i^{(m)})$, *где* $p_i = \sum\limits_{\nu} \varepsilon_{i,\nu}$ — *разность между числом прообразов точек* a_i, *в которых отображение* H *сохраняет ориентацию, и числом прообразов, в которых* H *меняет ориентацию.*

Теорема полностью доказана для рассматриваемого частного случая, и, кроме того, *мы имеем геометрическую интерпретацию коэффициентов* p_i.

Второй случай. $\vec{\Gamma}$ — произвольный C^m-цикл из $\Omega - A$, C^m-гомологичный 0 в Ω, где $m \geqslant 1$.

В множестве Ω имеют место формулы

$$\begin{gathered} \vec{\Gamma} = H \mid \vec{\Sigma}, \\ H \mid \vec{\Sigma} + H \mid \vec{V} + H \mid \overrightarrow{W} = H \mid \vec{V}' + H \mid \overrightarrow{W}'. \end{gathered} \tag{VI, 8; 58}$$

Циклы $H \mid \vec{V}$, $H \mid \overrightarrow{W}$, $H \mid \vec{V}'$ и $H \mid \overrightarrow{W}'$ *лежат в* Ω *и не обязательно в* $\Omega - A$. Образы $H(W)$ и $H(W')$ являются конечными множествами (и могут содержать некоторые точки a_i). С другой стороны, $H \mid \vec{V} = \tilde{H} \mid \overrightarrow{b\mathscr{V}}$, $H \mid \vec{V}' = \tilde{H} \mid \overrightarrow{b\mathscr{V}'}$, где $\tilde{H}$ и $\tilde{H}'$ являются отображениями класса C^m компактных ориентированных многообразий с краем $\vec{\mathscr{V}}$, $\vec{\mathscr{V}}'$ размерности N в Ω. Здесь не предполагается, что выполнены довольно специальные свойства 1-го случая.

Пусть $\vec{u}$ — некоторый вектор из E. Рассмотрим вместо отображения $\tilde{H}$ отображение $\tilde{H} + \vec{u}$ многообразия $\mathscr{V}$ из E, определенное по формуле $\xi \to H(\xi) + \vec{u}$. Покажем, что, *каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *почти для всех векторов* $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$ (*в некоторой выбранной норме пространства* E), *отображение* $\tilde{H} + \vec{u}$ *многообразия* $\mathscr{V}$ *в* Ω *обладает свойствами, которые мы считали выполненными в* 1*-м случае.*

Выберем и зафиксируем в пространстве E некоторую систему координат и рассмотрим связанную с ней меру Лебега. Для произвольной точки $\alpha \in \mathscr{V}$ выберем ее окрестность $\mathscr{V}_a$ в $\mathscr{V}$, которая была бы образом относительно карты Φ_α некоторого открытого множества $\mathscr{O}_\alpha$ из $\mathbb{R}^N$. Тогда $H \circ \Phi_\alpha$ будет отображением класса C^m множества $\mathscr{O}_\alpha$ в Ω. Утверждение, что в точке ξ из $\mathscr{V}_\alpha$ ранг $H'(\xi)$ меньше N, эквивалентно утверждению, что якобиан отображения $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ равен нулю в точке $\Phi_\alpha^{-1}(\xi)$. Из теоремы 102_2 гл. IV вытекает, что если мы рассмотрим множество таких точек Ω, в которых якобиан отображения $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ равен нулю, то его образ при отображении $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ имеет нулевую меру относительно меры Лебега. Это значит, что если мы рассматриваем множество точек ξ из $\mathscr{V}_a$, в которых ранг отображения $\tilde{H}'$ меньше N, то его образ при отображении $\tilde{H}$ имеет нулевую меру в E.

Таким образом, каждая точка $\alpha \in \mathring{V}$ имеет такую окрестность $\mathscr{V}_\alpha$, что множество точек этой окрестности, в которых ранг $\tilde{H}'$ меньше N, имеет при отображении $\tilde{H}$ образ нулевой меры. Поскольку множество $\mathscr{V}$ компактно, его можно покрыть конечным числом этих окрестностей. Следовательно, *множество точек* ξ *из* $\mathscr{V}$, *в которых ранг* $\tilde{H}'(\xi)$ *меньше* N, *имеет при отображении* $\tilde{H}$ *образ нулевой меры в* E.

Следовательно, если мы рассмотрим множество таких векторов $\vec{u}$, что $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, то *почти для всех этих значений* $\vec{u}$ точка $a_i - \vec{u}$ не принадлежит этому образу. Можно также сказать, что почти для всех значений $\vec{u}$ из шара $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$ точка a_i является точкой, все прообразы которой при отображении $\tilde{H} + \vec{u}$ являются точками $\alpha_{i,\nu} \in \mathscr{V}$, в которых производное отображение от $\tilde{H} + \vec{u}$ имеет ранг, равный N. Точки этих прообразов тогда необходимо изолированы (в окрестности $\mathscr{V}_{i,\nu}$ каждой из точек $\alpha_{i,\nu}$ отображение H является гомеоморфизмом и точка a_i в качестве прообраза имеет только точку $\alpha_{i,\nu}$), а поскольку многообразие $\mathscr{V}$ компактно, то их имеется конечное число (множество $H^{-1}(a_i)$ дискретно, поскольку все его точки изолированы, и замкнуто в $\mathscr{V}$, а следовательно, компактно; дискретный компакт всегда конечен [1]). С другой стороны, множество $H(V) = \tilde{H}(b\mathscr{V})$ является образом при отображении, *принадлежащем по крайней мере классу* C^1, некоторого многообразия размерности $N-1$. Оно имеет нулевую меру в E. Следовательно, почти для всех векторов $\vec{u}$ с нормой $\leqslant \varepsilon$ точки $a_i - \vec{u}$ не лежат в этом образе, или же иначе: $(H + \vec{u})(V)$ не содержит точек a_i и прообразы точек a_i при отображении $H + \vec{u}$ лежат во внутренности $\mathring{\mathscr{V}}$ множества $\mathscr{V}$.

Это справедливо для каждой точки $a_i \in A$.

Непосредственное применение теоремы 21 гл. IV показывает следующее: *почти для всех значений* $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, прообразы любой из точек a_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, при отображении $\tilde{H} + \vec{u}$ лежат вне границы $\mathscr{V}$; число этих прообразов конечно, и в каждом из прообразов ранг отображения $(\tilde{H} + \vec{u})'$ равен N. Таким образом, мы находимся в условиях применимости первого случая теоремы.

Тем самым доказано, что существуют такие целые числа $q_1, q_2, \ldots, q_l$, что $(\tilde{H} + \vec{u}) | \widehat{b\mathscr{V}} = (H + \vec{u}) | \vec{V}$ является C^m-циклом в проколотом открытом множестве $\Omega - A$, принадлежащим классу C^m-гомологий [2]) $q_1(a_1^{(m)}) + q_2(a_2^{(m)}) + \ldots + q_l(a_l^{(m)})$.

Все проделанное нами для C^m-цикла $H | \vec{V}$ из (VI, 8; 58) может быть повторено и для цикла $H | \vec{V}'$. Кроме того, если даже образ вырожденного цикла $H | \overrightarrow{W}$ или $H | \overrightarrow{W}'$ и содержит некоторые точки a_i, то его перенос на вектор $\vec{u}$ содержать их уже не будет, и это верно для всех значений $\vec{u}$, кроме конечного их числа, т. е. для почти всех значений $\vec{u}$. Этот перенос является, следовательно, вырожденным циклом из $\Omega - A$, гомологичным 0 в $\Omega - A$.

Применяя еще раз теорему 21 гл. IV, мы получаем такой результат:

Почти для всех значений $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, *переносы на вектор* $\vec{u}$ *циклов* $H | \vec{V}$ *и* $H | \vec{V}'$ *лежат в* $\Omega - A$ *и принадлежат классам* C^m*-гомологий, являющимся конечными комбина-*

[1]) Если множество K компактно и дискретно, то каждая из его точек является открытым множеством, и эти открытые множества образуют покрытие. Так как существует конечное подпокрытие, то K конечно.

[2]) Цикл $(H + \vec{u}) | \vec{V}$ можно назвать переносом цикла $H | \vec{V}$ с помощью $\vec{u}$.

циями вида $\sum_i q_i(a_i^{(m)})$, $\sum_i r_i(a_i^{(m)})$ [1]), *а переносы* $H\,|\,\overrightarrow{\widehat{W}}$ *и* $H\,|\,\overrightarrow{\widehat{W'}}$ *являются вырожденными циклами в* $\Omega - A$.

Теперь *почти для всех значений* $\vec{u}$ перенос на вектор $\vec{u}$ цикла $\vec{\Gamma}$ лежит в $\Omega - A$ и его классом C^m-гомологий в $\Omega - A$ служит $\sum_i p_i(a_i^{(m)})$, где $p_i = r_i - q_i$ (в силу представления (VI, 8; 58) для $\vec{\Gamma}$).

Однако если ε выбрано строго меньшим расстояния δ от образа $\vec{\Gamma}$ (лежащего в $\Omega - A$) до $\complement(\Omega - A)$, то перенос $\vec{\Gamma}$ на вектор $\vec{u}$ C^m-гомологичен $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ (теоремы 51 и 54). Следовательно, цикл $\vec{\Gamma}$ также принадлежит классу $\sum_i p_i a_i^{(m)}$, и теорема для этого случая доказана.

Здесь нет прямой геометрической интерпретации чисел p_i. Однако достаточно малый перенос $\vec{u}$ цикла $\vec{\Gamma}$ позволяет найти такую интерпретацию почти для всех значений $\vec{u}$.

Третий (общий) случай. Нам осталось разобрать лишь случай $m = 0$. Пусть $\vec{\Gamma} = H\,|\,\vec{\Sigma}$ есть C^0-цикл из $\Omega - A$, C^0-гомологичный 0 в Ω. Многообразие $\vec{\Sigma}$ принадлежит классу C^1, а отображение H только непрерывно. Пусть H_1 — такое отображение класса C^1 из $\vec{\Sigma}$ в $\Omega - A$, что $|||\overrightarrow{H - H_1}||| < d(H(\Sigma), \complement(\Omega - A))$ (теорема 52). Тогда C^1-цикл $H_1\,|\,\vec{\Sigma}$ C^0-гомологичен $H\,|\,\vec{\Sigma}$ (теоремы 51 и 54) в $\Omega - A$ и тем более в Ω. Следовательно, этот цикл C^0-гомологичен 0 в Ω. Поскольку это C^1-цикл, то он C^1-гомологичен 0 в Ω (следствие 4 теоремы 54). Из второго случая следует, что в $\Omega - A$ он C^1-гомологичен комбинации $\sum_i p_i\vec{\sigma}_i$, где $\vec{\sigma}_i$ есть C^∞-цикл класса a_i^∞. Но тогда цикл $H\,|\,\vec{\Sigma}$, C^0-гомологичный циклу $H_1\,|\,\vec{\Sigma}$ в $\Omega - A$, C^0-гомологичен $\sum_i p_i\vec{\sigma}_i$, а следовательно, его классом C^0-гомологий является $\sum_i p_i(a_i^{(0)})$, чем и заканчивается доказательство теоремы для случая размерности $N - 1$.

---

[1]) q_i и r_i могут зависеть от $\vec{u}$.

Для интерпретации p_i в случае $m=0$ надо сначала аппроксимировать отображение H отображением H_1 класса C^1, что приведет нас ко второму случаю[1]).

Вторая часть. Докажем единственность чисел p_i и формулы (VI, 8; 56) и (VI, 8; 57) для размерности $N-1$.

Снабдим E произвольной евклидовой структурой. Пусть $\vec{\sigma}_i$ — сфера с центром в точке a_i, граница шара, содержащегося в Ω и не содержащего ни одной из точек a_j при $j \neq i$. Тогда $\vec{\sigma}_i$ будет принадлежать классу $(a_i^{(m)})$ при любом m.

1°) Предположим сначала, что $m \geqslant 1$ или же что $N=2$, $m=0$ и цикл $\vec{\Gamma}$ имеет конечную длину.

Поскольку дифференциальная форма ω_{a_i} принадлежит классу C^1 и замкнута в $\Omega - a_i$, то она заведомо будет такой же и в $\Omega - A$.

Поскольку цикл $\vec{\Gamma}$ по предположению гомологичен циклу $p_1\vec{\sigma}_1 + p_2\vec{\sigma}_2 + \ldots + p_l\vec{\sigma}_l$, то интегралы от ω_{a_i} по этим двум циклам обязательно равны (следствие теоремы 49 при $m \geqslant 1$ и следствие 6 теоремы 54 при $N=2$, $m=0$ и $\vec{\Gamma}$ конечной длины). Согласно формуле (VI, 8; 53), интеграл по сфере $\vec{\sigma}_i$ равен S_N, а интеграл по какой-либо из сфер $\vec{\sigma}_j$ при $j \neq i$ равен нулю, ибо такая сфера является границей шара в $\Omega - a_i$. Тем самым, с одной стороны, доказана формула (VI, 8; 56), а с другой — единственность коэффициентов p_i, когда цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^m при $m \geqslant 1$, поскольку интегралы, заданные этой формулой, полностью определяются только заданием цикла $\vec{\Gamma}$.

В частном случае, когда $E = \mathbb{C}$, получаем

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\frac{dx + i\,dy}{x+iy} = \frac{1}{2i\pi}\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{1}{2i\pi} d\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\omega_0, \qquad \text{(VI, 8; 59)}$$

где ω_0 — форма (VI, 4; 41)[2]). Поскольку $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ является функцией класса C^∞ в $\complement 0$, то ее дифференциал имеет инте-

[1]) Напомним, что непрерывный образ отрезка может заполнить весь куб (стр. 97 т. I)! C^0-цикл — это ужасная вещь; было бы чудом получить такие теоремы для C^0-циклов!

[2]) Имеем $dz/z = d(\ln z) = d\ln|z| + i\,d\varphi$. Однако $\ln z$ и φ не являются корректно определенными функциями, и это рассуждение требует специального обоснования. Оно не столь сложно, но значительно длиннее проведенного выше вычисления.

грал, равный нулю по Г (специальная формула Стокса для случая $n=1$; теорема 39). Теперь (VI, 8; 57) вытекает из (VI, 8; 56).

2°) Если $\vec{\Gamma}$ является циклом класса C^0, то необходимо провести особое доказательство единственности. Пусть N произвольно (а если $N=2$, то $\vec{\Gamma}$ не обязательно имеет конечную длину). Здесь мы не ставим своей задачей вычисление интеграла $\int_{\vec{\Gamma}} \omega_{a_i}$. Мы предполагаем, что можно найти такие целые числа p_i и q_i, чтобы цикл $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ был C^0-гомологичен циклам $\sum_i p_i \vec{\sigma}_i$ и $\sum_i q_i \vec{\sigma}_i$. Тогда и последние циклы будут C^0-гомологичными. Однако поскольку речь идет о двух циклах класса C^1 и даже C^∞ (так как евклидовы сферы являются гиперповерхностями класса C^∞), то из следствия 4 теоремы 54 вытекает, что эти два цикла также C^1-гомологичны. Из только что проведенных рассуждений вытекает, что $p_i = q_i$, чем и доказывается единственность для случая $m=0$.

Третья часть. Речь пойдет о размерностях $k < N-1$. Рассуждения можно было бы разбить на те же этапы, но в данном случае дело обстоит гораздо проще.

Первый случай. $\vec{\Gamma} = H \mid \widehat{bV}$, где H и V принадлежат классу C^m (V принадлежит классу C^1, если $m=0$) и $H(V) \subset \Omega - A$. Результат в этом случае очевиден: цикл $\vec{\Gamma}$ C^m-гомологичен 0 в $\Omega - A$.

Второй случай. $\vec{\Gamma} = H \mid \vec{\Sigma}$, где H принадлежит по меньшей мере классу C^1. Поскольку цикл $H \mid \vec{\Sigma}$ по предположению C^1-гомологичен 0 в Ω, то имеет место формула (VI, 8; 58). Поскольку тогда размерность $\mathscr{V}$ меньше N, то $\tilde{H} \mid \vec{\mathscr{V}}$ имеет нулевую меру. Почти для всех значений $\vec{u} \in \vec{E}$, $\tilde{H} + \vec{u}(\mathscr{V})$ лежит в $\Omega - A$, и мы пришли к 1-му случаю.

Третий случай. Как и в первой части, он сводится ко второму случаю.

Замечания. 1°) Если $\vec{\Gamma}$ есть C^0-цикл, то целые числа p_i, вообще говоря, не могут быть вычислены с помощью интегралов по $\vec{\Gamma}$. Но они могут быть вычислены по C^1-циклу $\vec{\Gamma}_1$, настолько близкому к $\vec{\Gamma}$, что он ему C^0-гомологичен.

2°) Интересно отметить, что число p_i может быть вычислено, если известны цикл $\vec{\Gamma}$ и точка a_i, причем другие точки a_j при $j \neq i$ не используются.

3°) Если меняется ориентация пространства E, то класс гомологий цикла $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ не меняется. Однако классы $(a_i^{(m)})$ меняют знак, поскольку меняется ориентация шаров, а значит, и сфер. Следовательно, меняют знак числа p_i. Это можно видеть также из (VI, 8; 56), поскольку формы ω_{a_i} заменяются на противоположные.

Следствие. *Пусть E — аффинное N-мерное пространство на $\mathbb{R}$, и пусть A — конечная часть E, состоящая из l элементов. Группа C^m-гомологий множества $E - A$ для размерностей, заключенных строго между 0 и $N-1$, сводится к $\{0\}$. Для размерности 0 она изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака. Для размерности $N-1$ она изоморфна $\mathbb{Z}^l$.*

1°) Пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^m-цикл из $E - A$ размерности k, $0 < k < N-1$. Так как он C^m-гомологичен 0 в E (следствие 3 теоремы 54), то, согласно теореме 61, этот цикл гомологичен 0 в $E - A$. Следовательно, группа C^m-гомологий размерности k сводится к $\{0\}$.

2°) Зададим ориентацию в пространстве E. В группе C^m-гомологий размерности $N-1$ участвуют классы вида $\sum_{i=1}^{l} p_i (a_i^{(m)})$. Любые два таких класса, не соответствующие одной и той же системе целых чисел p_i, различны. Поскольку каждый цикл из $E - A$ гомологичен 0 в E (следствие 3 теоремы 54), то, согласно теореме, других классов, кроме этих, не существует. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между группой гомологий и множеством $\mathbb{Z}^l$ систем $p = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$, состоящих из l целых чисел произвольного знака. Кроме того, сумма класса $\sum_{i=1}^{l} p_i (a_i^{(m)})$ и класса $\sum_{i=1}^{l} q_i (a_i^{(m)})$ является классом $\sum_{i=1}^{l} (p_i + q_i)(a_i^{(m)})$. Сложение классов соответствует сложению в множестве $\mathbb{Z}^l$, рассматриваемом как группа-произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$.

Следует заметить, что соответствие между группой гомологий размерности $N-1$ и $\mathbb{Z}^l$ не является каноническим. Оно будет каноническим только в том случае, *когда пространство E ориентировано*. Если в некоторой ориентации $\vec{E}$ некоторый класс соответствует $p \in \mathbb{Z}^l$, то в противоположной ориентации тот же самый класс соответствует $-p = (-p_1, -p_2, \ldots, -p_l)$.

3°) Доказательство в случае размерности 0 мы предоставим читателю. Нужно будет показать последовательно следующее:

a) Что все циклы $\{x, +\}$, $x \in E - A$, принадлежат одному и тому же классу гомологий. Этот класс мы обозначим через $\mathbf{1}$ (это вытекает из того, что $E - A$ линейно связно).

b) Что каждый цикл $H|\vec{\Sigma}$ размерности 0 принадлежит классу $p\mathbf{1}$ при $p \in \mathbb{Z}$. (Это очевидно, так как $\vec{\Sigma}$ является конечным множеством точек, снабженных знаками $\pm$. Тогда p будет равно числу знаков $+$, уменьшенному на число знаков $-$.)

c) Что классы $p\mathbf{1}$ и $p'\mathbf{1}$ совпадают только тогда, когда $p = p'$. (Постоянная $\mathbf{1}$ является коциклом степени 0. Его интегралы по двум гомологичным циклам размерности 0 совпадают; его интеграл по $p\,\{x, +\}$ равен p.)

Теперь устанавливается взаимно однозначное соответствие между группой гомологий для размерности 0 и группой $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака, причем это соответствие сохраняет сложение. Здесь в противоположность п. 2°) соответствие каноническое; оно не зависит от ориентации пространства E. Результат 3°) имеет место не только для множества $E - A$, но и для любого открытого связного множества аффинного пространства.

Индекс цикла размерности $N-1$ относительно точки в ориентированном N-мерном аффинном пространстве

Определение. Пусть $\vec{E}$ — ориентированное N-мерное аффинное пространство, a — точка E и $\vec{\Gamma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в $E - a$. *Индексом этого цикла относительно точки a называется целое число p произвольного знака, однозначно определяемое условием, что цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^0-гомологий $p(a^{(0)})$ в $E - a$.*

Это определение корректно, так как *в пространстве E* цикл $\vec{\Gamma}$ всегда C^0-гомологичен нулю и к нему можно применить теорему 61. *Если p является таким индексом, то естественно говорить, что алгебраическое число обходов цикла $\vec{\Gamma}$ вокруг точки a равно p.* В самом деле, если $\vec{\sigma}$ — сфера с центром в точке a с положительной ориентацией, то естественно сказать, что она обходит $+1$ раз точку a, а $p\vec{\sigma}$ имеет индекс p. Из теоремы 61 тогда следует, что если A является конечной частью Ω и если $\vec{\Gamma}$ — цикл из $\Omega - A$, гомологичный 0 в Ω, то входящие в него целые числа p_i — это индексы цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точек a_i. Отсюда вытекает также, что если $\vec{E}$ имеет, кроме того, евклидову структуру и если цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^1 (или классу C^0 и имеет конечную длину при $N = 2$), то его индекс равен числу $1/S_N$, умноженному на интеграл по $\vec{\Gamma}$ от дифференциальной формы «телесный угол» ω_a, или же числу $1/S_N$, умноженному на алгебраический телесный угол, под которым из точки a виден цикл $\vec{\Gamma}$. Если E является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то, согласно формуле (VI, 8; 57), индекс равен $\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z-a}$.

Обозначим этот индекс через $I(\vec{\Gamma};\ a)$. Он существенно зависит от ориентации пространства $\vec{E}$ и меняет знак, если эта ориентация меняется. Более общо, если K является C^1-диффеоморфизмом Ω на открытое множество Ω' из E, сохраняющим (соответственно изменяющим) ориентации, т. е. таким, что якобиан > 0 (соответственно < 0), то цикл-образ $K\vec{\Gamma}$ (если $\vec{\Gamma} = H \mid \vec{\Sigma}$, то цикл $K\vec{\Gamma}$-равен $K \circ H \mid \vec{\Sigma}$) относительно точки-образа $a' = K(a)$ имеет индекс (соответственно противоположный индекс), равный индексу цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точки a. В самом деле, пусть $\vec{\sigma}$ — граница некоторого евклидова шара B с центром в точке a. Тогда $\vec{\sigma}' = K(\vec{\sigma})$ является границей $\vec{B}' = K(\vec{B})$. Поскольку отображение K сохраняет (соответственно обращает) ориентацию в $\vec{E}$, то $\vec{B}'$ имеет ориентацию $\vec{E}$ (соответственно противоположную ориентацию), а следовательно, $\vec{\sigma}'$ имеет класс C^0-гомологий (a'^0) (соответственно $-(a'^0)$). Так как отображение K является гомеоморфизмом, то оно сохраняет C^0-гомологии. Следовательно, если цикл $\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен $p\vec{\sigma}$, $p = I(\vec{\Gamma};\ a)$, то цикл $K\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен циклу $pK\vec{\sigma} = p\vec{\sigma}'$, а значит, имеет место равенство $I(K\vec{\Gamma};\ K(a)) = p$ (соответственно $-p$).

Замечание. Априори совершенно не очевидно,

1°) что интеграл $\frac{1}{S_N} \int\limits_{\vec{\Gamma}} \omega_a$ будет *целым числом*;

2°) что этот интеграл не зависит от евклидовой структуры (от которой зависит ω_a), а зависит только от $\vec{\Gamma}$, ориентации $\vec{E}$ и от a.

Все эти факты, естественно, весьма интуитивны, и можно указать много старых математических курсов, в которых все они принимались без доказательства. Однако мы убедились, какие большие трудности надо было преодолеть для их доказательства.

При $N=2$, $N-1=1$, форма $\omega=d\varphi$ является «дифференциалом» полярного угла и «хорошо видно», что алгебраическое число обходов циклом $\vec{\Gamma}$ начала координат равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\vec{\Gamma}} d\varphi$ и является целым числом.

Инвариантность индекса при непрерывной деформации

Докажем, что индекс цикла $\vec{\Gamma}$ из E относительно точки $a\in E$ не меняется, когда $\vec{\Gamma}$ и a изменяются непрерывно, но точка a не принадлежит образу цикла $\vec{\Gamma}$. Точнее, имеет место

Теорема 62. *Пусть $H\,|\vec{\Sigma}$ и $H'\,|\vec{\Sigma}$ — два $(N-1)$-мерных цикла N-мерного нормированного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$, a, a' — две точки из E и $a\notin H(\Sigma)$.*

Тогда, если $\|\overrightarrow{a-a'}\|+|||\overrightarrow{H-H'}|||<d(H(\Sigma), a)$, то $a'\notin H(\Sigma')$ и индекс цикла $H'\,|\vec{\Sigma}$ относительно точки a' равен индексу цикла $H\,|\vec{\Sigma}$ относительно точки a.

Доказательство. При переносе (являющемся C^1-диффеоморфизмом с якобианом >0) индекс цикла $H'\,|\vec{\Sigma}$ относительно точки a' равен индексу перенесенного цикла $H'+(\overrightarrow{a-a'})\,|\vec{\Sigma}$ относительно точки $a'+(\overrightarrow{a-a'})=a$. Так как $\overrightarrow{|||H'+(\overrightarrow{a-a'})-H|||}<d(H(\Sigma), a)$, то циклы $H'+(\overrightarrow{a-a'})\,|\vec{\Sigma}$ и $H\,|\vec{\Sigma}$ гомотопны в $\complement a$ (теорема 51). Следовательно, они гомологичны в $\complement a$ (теорема 54), а значит, имеют один и тот же индекс в точке a.

Следствие 1. *Пусть $\vec{E}$ есть N-мерное ориентированное аффинное пространство, а $\vec{\Sigma}$ является $(N-1)$-мерным ориентированным компактным многообразием без края. Пусть Λ — то-*

пологическое пространство и H_λ — *непрерывное отображение* Σ *в* E, *непрерывно зависящее от параметра* λ *из* Λ, *т. е.* $\lambda \to H_\lambda$ *является непрерывным отображением* Λ *в* $(E^\Sigma)_{cb}$ [1], *и, кроме того, пусть* a_λ: $\lambda \to a_\lambda$ *является непрерывным отображением* Λ *в* E. *Если теперь для каждого значения* λ *точка* a_λ *не принадлежит образу* $H_\lambda(\Sigma)$, *то индекс цикла* $H_\lambda \,|\, \vec{\Sigma}$ *относительно точки* a_λ *меняется непрерывно при изменении* λ. *Следовательно, каждая точка* λ *имеет некоторую окрестность, в которой этот индекс остается постоянным. В частности, он остается постоянным на каждой связной компоненте* Λ *и на всем пространстве, если* Λ *связно.*

Следствие 2. *Пусть* $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — *последовательность непрерывных отображений* $\vec{\Sigma}$ *в* $\vec{E}$, *равномерно сходящихся на* Σ *к некоторому отображению* H *при* n, *стремящемся к бесконечности. Пусть* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — *последовательность точек из* E, *сходящаяся к точке* a *при* n, *стремящемся к бесконечности. Если* $a \notin H(\Sigma)$, *то при достаточно большом* n *точки* $a_n \notin H_n(\Sigma)$ *и индекс цикла* $H_n \,|\, \vec{\Sigma}$ *относительно точки* a_n *равен индексу цикла* $H \,|\, \vec{\Sigma}$ *относительно точки* a.

Следствие 3. *Пусть* $H \,|\, \vec{\Sigma}$ — *некоторый* $(N-1)$-*мерный цикл аффинного ориентированного пространства* $\vec{E}$. *Индекс этого цикла относительно точки* a, *принадлежащей множеству* $E - H(\Sigma)$, *остается неизменным, когда точка* a *пробегает связную компоненту этого открытого множества, а также для любых двух точек, которые можно соединить путем, не пересекающим образ* $H(\Sigma)$. *Если в двух точках* a *и* b *индекс цикла* $H \,|\, \vec{\Sigma}$ *не одинаков, то не существует пути, соединяющего эти две точки и не пересекающего образ* $H(\Sigma)$.

Это следствие, вытекающее непосредственно из следствия 1, является одним из самых сильных средств для доказательства того факта, что два множества имеют общую точку.

Рассмотрим следующий пример (прямое доказательство которого весьма сложно). Пусть γ — окружность в $\mathbb{R}^2$, а AA' и BB' — два взаимно перпендикулярных диаметра. Обозначим через α (соответственно через β) путь, соединяющий A с A' (соответственно B с B'), целиком лежащий (кроме его концов) в области, внутренней относительно γ. *Докажем, что эти пути обязательно пересекаются.*

[1]) Это означает, что при λ, стремящемся к λ_0 в Λ, отображение H_λ сходится к отображению H_{λ_0} равномерно на Σ. При этом предполагается, что на E задана какая-либо норма.

Рассмотрим путь α, определенный непрерывным отображением H отрезка $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, где $H(0) = A$, $H(\pi) = A'$.

Пусть γ' — окружность, проходящая через A и A'. Обозначим через γ'_i (соответственно через γ'_e) часть окружности, расположенную во внутренней (соответственно внешней) области относительно окружности γ.

Построим непрерывное отображение $\tilde{H}$ тригонометрической окружности Γ в $\mathbb{R}^2$ следующим образом. Для полуокружности

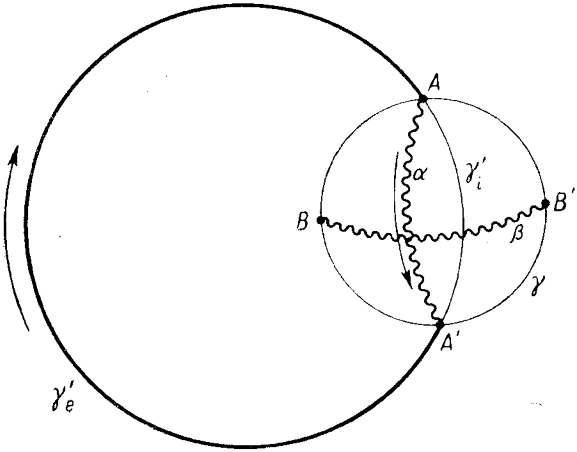

Рис. 11.

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ отображение $\tilde{H} = H$ известно. Для $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ возьмем в качестве $\tilde{H}$ сужение на $[\pi, 2\pi]$ такого очевидного гомеоморфизма $\tilde{H}'$ тригонометрической окружности на окружность γ', для которого $\tilde{H}'(\pi) = A'$ и $\tilde{H}'(2\pi) = A$.

Найдем индексы точек B и B' относительно цикла $\tilde{H} \mid \vec{\Gamma}$. Этот цикл гомотопичен $\tilde{H}' \mid \vec{\Gamma}$ в множестве $\mathbb{R}^2 - B - B'$, поскольку каждый отрезок $[\tilde{H}(\theta), \tilde{H}'(\theta)]$ лежит в этом открытом множестве. (Это очевидно для $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Если $0 < \theta < \pi$, то $\tilde{H}(\theta)$ и $\tilde{H}'(\theta)$ лежат в открытом круге, ограниченном окружностью γ, а этот круг является выпуклым.) Следовательно, искомые индексы необходимо являются индексами точек B и B' относительно цикла $\tilde{H}' \mid \vec{\Gamma}$ или относительно эквивалентного цикла $\overleftarrow{\gamma}'$, ориентированного в противоположном направлении. Эти индексы, следовательно, равны соответственно -1 и 0 и не равны друг другу. Значит, путь β, соединяющий B

с B', пересекает образ $\tilde{H}(\vec{\Gamma})$. Так как он не может пересечься с $\tilde{H}([\pi, 2\pi])$, то он пересекает α, что мы и хотели доказать.

Следствие 4. *Пусть $H|\vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл ориентированного N-мерного аффинного пространства E, содержащийся в открытом шаре $\overset{\circ}{B}$ с центром 0 радиуса R. Тогда его индекс относительно любой точки a, не лежащей в этом шаре, обязательно равен нулю. Если b — точка, относительно которой индекс цикла $\neq 0$, то не существует никакого обобщенного пути*[1]*, соединяющего точку b с бесконечностью и не пересекающегося с образом цикла.*

Доказательство. Цикл, принадлежащий открытому шару $\overset{\circ}{B}$, всегда гомологичен 0 в этом шаре, поскольку шар является выпуклым множеством (следствие 3 теоремы 54), и, следовательно, гомологичен 0 в множестве $E - a$, если точка a не принадлежит шару. Значит, его индекс относительно точки a равен 0. Впрочем, интуитивно ясно, что такой цикл не может «окружать» точку a.

Предположим, что существует такой обобщенный путь $M|[0, +\infty[$, соединяющий точку b с бесконечностью в пространстве E, образ которого не пересекает образа $H(\Sigma)$ цикла. Тогда индекс цикла относительно точки $M(t)$ должен быть постоянным, когда t изменяется от 0 до $+\infty$. Начиная с достаточно больших значений t, этот индекс равен 0. Следовательно, индекс относительно точки b также равен нулю. Этим доказывается, что если индекс в точке b не равен нулю, то не существует обобщенного пути, соединяющего точку b с бесконечностью и не пересекающего образа цикла $H(\Sigma)$.

Изменение индекса цикла при пересечении образа цикла

Мы видели, что индекс цикла относительно точки a может изменяться только тогда, когда точка a пересекает образ цикла. Мы сейчас увидим, *как* изменяется рассматриваемый индекс, если точка a пересекает цикл в достаточно регулярной точке.

Пусть $H|\vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в N-мерном аффинном ориентированном пространстве $\vec{E}$. Пусть a_0 — точка $H(\Sigma)$. Точка $a_0 \in H(\Sigma)$ называется *регулярной* на образе цикла, если она

[1]) Обобщенный путь, соединяющий точку b с бесконечностью, является непрерывным отображением M полупрямой из $\mathbb{R}$, например $[0, +\infty[$, в E, таким, что $M(0) = b$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \overrightarrow{\| M(t) - b \|} = +\infty$.

имеет только один прообраз α_0 при отображении H и если существуют такая открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки a_0 в E и такая открытая окрестность $\mathscr{U}$ точки α_0 в Σ, что $H^{-1}(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$, а отображение H является C^1-диффеоморфизмом окрестности $\mathscr{U}$ на гиперповерхность $H(\mathscr{U}) = \Sigma_0$ класса C^1 из $\mathscr{V}$. Используя теоремы об обратных функциях и о постоянстве ранга (теоремы 29 и 33_5 гл. III), а также компактность Σ, можно доказать, что эти свойства будут выполняться тогда, когда точка a_0 имеет только один прообраз α_0 в Σ, отображение H принадлежит классу C^1 в окрестности точки α_0 и $H'(\alpha_0)$ является инъективным отображением или отображением ранга $N-1$ множества $\vec{T}(\alpha_0; \Sigma)$ в $\vec{E}$.

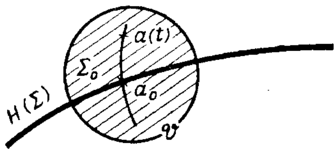

Рис. 12

Отображение H переносит ориентацию окрестности $\mathscr{U}$ (определенную многообразием $\vec{\Sigma}$) на некоторую ориентацию многообразия $\Sigma_0 = H(\mathscr{U})$. Это приводит к трансверсальной ориентации этой гиперповерхности, соответствующей ее ориентации, определенной заданной ориентацией пространства $\vec{E}$. Теперь можно сказать, что переменная точка a пересекает цикл в точке a_0 в положительном направлении, если она описывает траекторию класса C^1, $t \to a(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $a(t_0) = a_0$, $a(t) \notin H(\Sigma)$ для $t \neq t_0$, и если вектор скорости в момент t_0 трансверсально положителен относительно Σ_0 (см. рис. 12).

Теорема 63. *Пусть $H | \vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в N-мерном ориентированном аффинном пространстве $\vec{E}$. Если точка a из E пересекает образ цикла в регулярной точке в положительном направлении, то индекс цикла относительно точки a уменьшается на единицу.*

Доказательство. Сохраним обозначения, введенные перед формулировкой теоремы. Пусть $a_1 = a(t_1)$, $a_2 = a(t_2)$ — концы рассматриваемой траектории. Нам надо доказать, что

$$I(H | \vec{\Sigma}; a_2) = I(H | \vec{\Sigma}; a_1) - 1,$$

или $\qquad$ (VI, 8; 60)

$$I_2 = I_1 - 1.$$

Если воспользоваться переносом, то задача сведется к доказательству соотношения

$$I(H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,|\,\vec{\Sigma};\ a_1)=I(H\,|\,\vec{\Sigma};\ a_1)-1. \qquad \text{(VI, 8; 61)}$$

Нам надо сравнить индексы I_2 и I_1 двух различных циклов *относительно одной и той же точки* a_1.

Мы знаем, что в E существует гомотопия, переводящая один цикл в другой. Это отображение $\widetilde{H}$ множества $[t_1,\ t_2]\times\Sigma$ в E, определенное соотношением

$$(t,\ x)\to\widetilde{H}(t,\ x)=H(x)+\overrightarrow{a_1-a(t)}. \qquad \text{(VI 8; 62)}$$

Для вычисления индексов I_2 и I_1 можно заменить $H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,|\,\vec{\Sigma}$ и $H\,|\,\vec{\Sigma}$ эквивалентными циклами $\widetilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}$ и $\widetilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\vec{\Sigma}$ и применить формулу (VI, 8; 21) (в которой надо заменить отрезок $[0,\ 1]$ на $[t_1,\ t_2]$):

$$\widetilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}+\widetilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\overleftarrow{\Sigma}=\widetilde{H}\,|\,b\,([t_1,\ t_2]\times\vec{\Sigma}), \qquad \text{(VI, 8; 63)}$$

где искомая разность I_2-I_1 будет индексом цикла левой части в точке a_1.

Но мы находимся в условиях применимости первого случая первой части доказательства теоремы 61.

Цикл, записанный справа, является границей в E. Кроме того, прообраз точки a_0 при отображении $\widetilde{H}$ является единственной точкой $(t,\ x)$ из $[t_1,\ t_2]\times\Sigma$, такой, что

$$\overrightarrow{H(x)-a(t)}=\vec{0}, \qquad \text{(VI, 8; 64)}$$

т. е. точкой $(t_0,\ \alpha_0)$ $(H(\alpha_0)=a_0)$, поскольку по предположению траектория пересекается с Σ в единственной точке a_0, соответствующей моменту времени t_0. В окрестности этой точки отображение $\widetilde{H}$ принадлежит классу C^1, поскольку этому классу принадлежит траектория, а также отображение H в окрестности точки α_0. С другой стороны, производную $\widetilde{H}'(t_0,\ \alpha_0)$ легко вычислить. В дифференциальных обозначениях эта производная записывается так:

$$(dt,\ d\xi)\to\frac{\partial\widetilde{H}'}{\partial t}(t_0,\ \alpha_0)\,dt+\frac{\partial\widetilde{H}'}{\partial\xi}(t_0,\ \alpha_0)\cdot\overrightarrow{d\xi}=$$
$$=-\vec{a}'(t_0)\,dt+H'(\alpha_0)\cdot\overrightarrow{d\xi}. \qquad \text{(VI, 8; 65)}$$

Поскольку ранг отображения $H'(\alpha_0)$ равен $N-1$, то оно переводит касательное пространство $\vec{T}(\alpha_0;\ \Sigma)$ в касательное пространство $\vec{T}(a_0;\ \Sigma_0)$. Так как вектор $\vec{a}'(t_0)$ трансверсален к пространству $\vec{T}(a_0; \Sigma)$, то отображение $\tilde{H}'(t_0; \alpha_0)$ переводит пространство $\vec{T}((t_0, \alpha_0); [t_1, t_2] \times \Sigma)$ в $\vec{E}$, а следовательно, имеет ранг N. Кроме того, это отображение преобразует единичный положительный вектор, касательный к $[t_1, t_2]$, в вектор $-\vec{a}'(t_0)$, трансверсально *отрицательный* относительно гиперповерхности Σ_0. Так как ориентация поверхности $\overset{\frown}{\Sigma}_0$ является результатом переноса ориентации многообразия $\overset{\frown}{\Sigma}$ при отображении H, то рассматриваемое отображение переводит положительный базис пространства $\vec{T}(\alpha_0; \overset{\frown}{\Sigma})$ в положительный базис пространства $\vec{T}(a_0; \overset{\frown}{\Sigma}_0)$. Следовательно, оно переводит положительный базис пространства $\vec{T}((t_0, \alpha_0); [\overset{\frown}{t_1, t_2}] \times \overset{\frown}{\Sigma})$ в некоторый отрицательный базис пространства $\overset{\frown}{\vec{E}}$.

Из результата, приведенного в конце 1-го случая 1-й части доказательства теоремы 61, теперь следует, что цикл, записанный в правой части соотношения (VI, 8; 63), принадлежит в $E-a$ классу C^0-гомологий $-\left(a_1^{(0)}\right)$. Следовательно, его индекс относительно точки a_1 равен -1, а так как этот индекс равен $I_2 - I_1$, то теорема доказана.

Приложение к вычислению индексов в различных областях пространства, определенных некоторым циклом

Рассмотрим, например, цикл, изображенный на приведенном ниже рис. 13. Мы его будем рассматривать как особый цикл — образ тригонометрической окружности. Эту тригонометрическую окружность снабдим обычной канонической ориентацией. Тогда цикл можно рассматривать как кривую, имеющую направление обхода, указанное стрелками. В каждой области дополнения к этому циклу индекс сохраняет постоянное значение. Нетрудно узнать, чему равен этот индекс в каждой точке, вычислив $\frac{1}{2\pi} \int d\varphi_a$, или вариацию аргумента (с началом в a). Однако это можно сделать значительно быстрее, заметив, что в связной компоненте бесконечности, т. е. для достаточно удаленных точек, индекс равен нулю и что каждый раз при пересечении границы в положительном (соответственно отрицательном) направлении индекс изменяется на -1 (соответственно $+1$).

В случае, изображенном на рис. 13, следует избегать пересекать кривую в особых точках, чтобы оставаться в условиях теоремы.

Следствие 1. *Пусть $H|\vec{\Sigma}$ — некоторый цикл ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$ и a — точка, не принадлежащая его образу. Предположим, что можно построить такой путь, идущий от точки a в бесконечность, который пересекает образ цикла только в конечном числе точек, каждая из которых является регулярной для образа цикла, причем в указанных точках путь пересекает цикл трансверсально. Тогда ин-*

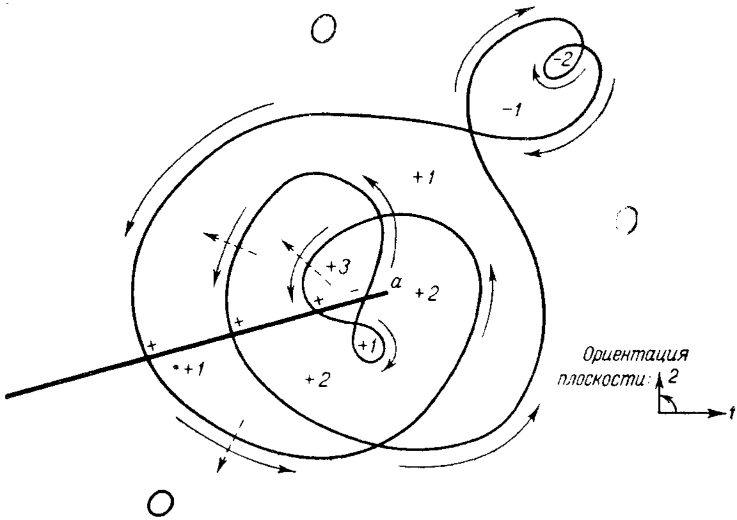

Рис. 13.

Стрелки указывают направление обхода, а пунктирные стрелки — трансверсальное направление > 0. (Напомним, что трансверсально положительный вектор и *следующий за ним* касательный положительный вектор образуют положительный базис в ориентированной плоскости!)

декс $I(a)$ цикла относительно точки a равен алгебраическому числу пересечений пути и цикла, т. е. числу точек, в которых путь пересекает цикл (двигаясь от точки a в бесконечность) в положительном направлении, минус число точек, в которых путь пересекает цикл в отрицательном направлении.

Эти выводы очевидны, поскольку при каждом пересечении (в предположениях теоремы) индекс изменяется на $+1$ или -1 и поскольку для достаточно удаленных точек индекс равен нулю. Следовательно, если i является алгебраическим числом пересечений, то $I(a) - i = 0$, или $I(a) = i$. Этот процесс можно воспроизвести на рисунке, вычисляя индекс точки a с помощью пути, изображенного жирной линией и идущего от a до бесконечности. Результат, очевидно, не зависит от выбранного пути.

Следствие 2. *Пусть Σ — связная компактная ориентируемая гиперповерхность класса C^1 конечномерного аффинного пространства E. Тогда поверхность Σ делит пространство на две области: одна из них — это связная компонента бесконечности, в которой индекс Σ равен нулю, и вторая — это ограниченная область, в которой индекс Σ равен ± 1 в зависимости от ориентации Σ и E.*

Согласно замечанию 3°) после теоремы 28, гиперповерхность Σ делит пространство E на две области, одна из которых связана с бесконечностью, а другая ограничена. Если $\overset{\circ}{V}$ — ограниченная область, то $V = \overset{\circ}{V} \cup \Sigma$ является многообразием с краем, которое ориентировано, если ориентировано пространство E, границей которого является Σ. Если применить теорему 60, то можно убедиться, что гиперповерхность Σ принадлежит следующему классу C^1-гомологий множества $E - a$: 0, если $a \in \complement V$; $(a^{(1)})$, если $a \in \overset{\circ}{V}$ и если $\vec{\Sigma}$ имеет ориентацию множества $\overrightarrow{bV}$; $-(a^{(1)})$, если $a \in \overset{\circ}{V}$ и $\vec{\Sigma} = \overleftarrow{bV}$. Таким образом, требуемый результат вытекает из сказанного ранее.

Однако, рассматривая разделение пространства E связной поверхностью Σ, мы показали в теореме 28, что существует *не более двух областей*. Для доказательства существования не менее двух областей мы воспользовались тем фактом, что поверхность имеет нормальное уравнение согласно недоказанному замечанию на стр. 808 I-го тома (это, действительно, очень трудно сделать). *Теперь мы можем дать доказательство следствия, не опирающееся на это замечание.*

Из доказательства теоремы 28 мы сохраним только полностью доказанный факт, а именно: имеется не более двух областей. Затем, поскольку поверхность $\vec{\Sigma}$ класса C^1 по предположению ориентирована в ориентированном пространстве $\vec{E}$, она имеет трансверсальную ориентацию и ее можно трансверсально пересечь в любой из ее точек. Индекс поверхности $\vec{\Sigma}$ тогда изменится на единицу. Таким образом, имеется *не менее двух* значений индекса для точек a из $\complement\Sigma$. Следовательно, имеется не менее двух областей, а значит, точно две области. Из рассуждений, проведенных на стр. 171, следует, что существует область, содержащая дополнение к каждому замкнутому шару, содержащему Σ, или связная компонента бесконечности. Согласно следствию 4 теоремы 62, в этой области индекс равен 0. Другая область ограничена, и индекс в ней равен ± 1.

Мы доказали меньше того, что принималось ранее без доказательства. Сейчас мы предполагаем поверхность Σ компактной и ориентируемой, а ранее считали ее только замкнутой и *доказывали*, что она ориентируема. Делаем то, что можно!

Однако если гиперповерхность Σ не только замкнута, но и компактна, то можно говорить об индексах, и наш настоящий результат относительно индексов 0 и ± 1 двух областей приобретает интерес.

Классы вычетов коцикла с изолированными особенностями

Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечное множество из Ω и $\vec{\omega}$ — коцикл *степени* $N-1$ из $\Omega - A$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

Классом вычетов коцикла $\vec{\omega}$ в точке $a_i \in A$ называется интеграл от $\vec{\omega}$ по произвольному C^1-циклу класса C^1-гомологий $(a_i^{(1)})$ в $\Omega - A$ (так как все эти циклы C^1-гомологичны, то интеграл будет одним и тем же). Этот класс вычетов является некоторым вектором из $\vec{F}$ (скаляром, если форма $\vec{\omega}$ принимает скалярные значения). Он зависит от ориентации $\vec{E}$ и изменяет знак одновременно с этой ориентацией. Этот класс, естественно, зависит только от поведения формы $\vec{\omega}$ в окрестности точки a_i, поскольку всегда можно найти соответствующие циклы в сколь угодно малой окрестности точки a_i. В частности, можно убедиться, что если форма $\vec{\omega}$ ограничена в окрестности точки a_i или, более общо, если ее норма $\|\vec{\omega}(x)\|$ является величиной порядка $o\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{x-a_i}\|^{N-1}}\right)$ при x, стремящемся к a_i (относительно произвольной нормы в E), то класс вычетов в точке a_i заведомо равен нулю.

В самом деле, если мы возьмем сферу $\vec{\sigma}_i$ с центром в точке a_i радиуса ρ, снабженную канонической ориентацией, то для достаточно малых значений ρ (для того чтобы сфера $\vec{\sigma}_i$ принадлежала классу $(a^{(1)})$) имеет место оценка (VI, 6; 31):

$$\left\|\int\limits_{\vec{\sigma}_i} \vec{\omega}\right\| \leqslant \left(\max_{\|\overrightarrow{x-a}\|=\rho} \|\vec{\omega}(x)\|\right) S_N \rho^{N-1}. \qquad \text{(VI, 8; 66)}$$

В силу предположений, сделанных относительно поведения $\vec{\omega}$ в окрестности точки a_i, из этой формулы следует, что интеграл по сфере $\vec{\sigma}_i$ стремится к нулю, когда ρ стремится к нулю. Эта величина постоянна и равна классу вычетов, а значит, этот класс вычетов равен нулю. Если в качестве дифференциальной формы ω мы возьмем дифференциальную форму ω_a, определяющую телесные углы относительно точки a, то ее класс вычетов в точке a равен площади S_N-сфер радиуса 1 в E.

Теорема 64. *Пусть $\vec{E}$ есть N-мерное аффинное ориентированное пространство, Ω — открытое множество E и A — конечное множество точек из Ω. Пусть, кроме того, $\vec{\omega}$ — коцикл степени $N-1$ в $\Omega - A$, и пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^1-цикл из $\Omega - A$ или C^0-цикл конечной длины, если $N=2$ $(N-1=1)$, C^0-гомологичный 0 в Ω.*

Тогда, если обозначить через R_i класс вычетов формы $\vec{\omega}$ в точке a_i и через p_i — индекс цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точки a_i, имеет место формула

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{l} p_i R_i \,[1] \qquad \text{(VI, 8; 67)}$$

Доказательство. Согласно теореме 61, цикл $\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен комбинации $\Sigma p_i \vec{\sigma}_i$ в $\Omega - A$. Поскольку коцикл $\vec{\omega}$ замкнут, то его интеграл по $\vec{\Gamma}$ равен его интегралу по C^∞-циклу $\Sigma p_i \vec{\sigma}_i$ (согласно следствию 4 теоремы 54, если $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^1, и, согласно следствию 6, если $\vec{\Gamma}$ является C^0-циклом конечной длины и $N=2$), а в силу определения классов вычетов этот интеграл равен правой части формулы (VI, 8; 67).

Топологическая степень непрерывного отображения

Пусть $\vec{V} \subset \vec{\tilde{V}}$ есть *N-мерное* компактное ориентированное многообразие *с краем* класса C^1, и пусть H — непрерывное отображение V в аффинное ориентированное пространство $\vec{E}$ той же размерности N. *Топологической степенью отображения H в точке $a \in E$*, не принадлежащей образу $H(bV)$ границы bV многообразия V, называется индекс цикла $H \mid \overrightarrow{bV}$ относительно

[1] Если изменить ориентацию пространства E, то изменится знак чисел p_i и R_i. Это, конечно, не изменит интеграла $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega}$.

точки a[1]). Из теоремы 61 (1-й случай 1-й части доказательства) при условии, что прообраз точки a содержит только конечное число точек из $\overset{\circ}{V}$, в окрестности которых отображение H принадлежит классу C^1 и в каждой из которых производное отображение H имеет максимальный ранг, равный N, получается простая геометрическая интерпретация этой топологической степени. В самом деле, в этом случае топологическая степень отображения равна числу прообразов точки a, в окрестности которых отображение H сохраняет ориентацию, минус число прообразов точки a, в окрестности которых H изменяет ориентацию на противоположную. Интерпретации такого рода для других случаев не существует. Тем не менее эта топологическая степень постоянна, когда точка a непрерывно изменяется, не пересекая образ границы $H(bV)$. Согласно тому, что мы видели при доказательстве теоремы 61 (2-й случай 1-й части), если считать, что H принадлежит классу C^1, и если a — произвольная точка, не принадлежащая $H(bV)$, то для всех точек, достаточно близких к a, топологическая степень будет одинаковой и почти для всех этих точек допустима предыдущая геометрическая интерпретация. Если отображение H только непрерывно, то его можно приблизить некоторым отображением класса C^1, и мы приходим к предыдущему случаю. С другой стороны, всегда остается справедливым важный результат:

Теорема 65. *Если точка не покрывается образом $H(V)$, то топологическая степень отображения H в точке a равна нулю.*

В самом деле, в этом случае цикл $H|\overrightarrow{bV}$ является границей $H|\vec{V}$, и, следовательно, он C^0-гомологичен 0 в дополнении к точке a. Значит, его индекс в точке a равен нулю.

Обратное утверждение, очевидно, не верно. В самом деле, если точка a имеет два прообраза, в окрестности каждого из которых отображение H принадлежит классу C^1 и имеет производную порядка N, причем H сохраняет ориентацию в одной из этих окрестностей и меняет ее в другой, то топологическая степень отображения H в точке a равна нулю. Впрочем, если многообразие V не имеет границы ($bV = \emptyset$), топологическая степень равна 0 во всех точках a, если даже точка a лежит

---

[1]) Если изменится одна из двух ориентаций V или E, то топологическая степень также изменит знак. Если изменятся обе ориентации, то знак останется прежним.

Если V не имеет границы ($bV = \emptyset$), то топологическая степень равна нулю.

в $H(\overset{\circ}{V})$. Может оказаться, что при произвольной и, в частности, нулевой топологической степени точка a имеет континуум прообразов!

Напротив, согласно теореме, *если топологическая степень в точке a отлична от 0, то точка a имеет непустой прообраз*: уравнение $H(x)=a$ имеет *не менее одного* решения в $\overset{\circ}{V}$. (Если топологическая степень равна $m \neq \pm 1$ и $\neq 0$, то может случиться, что это уравнение имеет только одно решение α, имеющее своего рода «кратность». Это может быть тогда, когда отображение H в окрестности точки α принадлежит классу C^1 и $H'(\alpha)$ имеет ранг $< N$.)

Доказательство того факта, что топологическая степень $\neq 0$, является мощным средством для получения теорем существования решения уравнений. С подобными примерами мы встретимся позже.

Топологическая степень в точке a отображения H многообразия $\vec{V}$ в пространство $\vec{E}$ называется также в силу данной выше геометрической интерпретации *алгебраическим числом покрытий точки a образом $\vec{V}$ при отображении H*.

Теорема 66. *Если отображение H_λ зависит от параметра λ и в условиях, указанных в следствии* 1 *теоремы* 62, *изменяется непрерывно вместе с λ, если точка a_λ также зависит от этого параметра и непрерывно изменяется вместе с ним и если ни при каком значении λ точка a_λ не принадлежит образу границы bV при отображении H_λ, то топологическая степень отображения H_λ многообразия $\vec{V}$ в точке a_λ непрерывно зависит от λ. Она остается постоянной, если параметр λ меняется в некотором связном подмножестве.*

Эта теорема является очевидным следствием теоремы 62.

Посмотрим теперь, как при фиксированных H и a топологическая степень зависит от V. Будем при этом учитывать, что если изменять V в $\tilde{V}$ так, чтобы прообраз $H^{-1}\{a\}$ в V оставался неизменным, то топологическая степень меняться не будет.

Теорема 67. *Пусть H — непрерывное отображение N-мерного ориентированного многообразия $\vec{\tilde{V}}$ в N-мерное ориентированное пространство $\vec{E}$. Пусть V_1 и V_2 — два компактных многообразия с краем из $\tilde{V}$. Если прообразы $H^{-1}\{a\} \cap V_1$ и $H^{-1}\{a\} \cap V_2$ совпадают и не пересекаются с bV_1 и bV_2, то топологические степени в точке $a \in \vec{E}$ отображений H многообразий $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ в $\vec{E}$ равны.*

Доказательство. Положим $W = V_1 \cup V_2$, $K_1 = H(W - \overset{\circ}{V}_1)$ и $K_2 = H(W - \overset{\circ}{V}_2)$. Здесь W — компактное множество из $\tilde{V}$, а множества K_1 и K_2 компактны в E, поскольку они являются образами компактов при отображении H. Обозначим через δ наименьшее из расстояний (относительно некоторой нормы в E) от точки a до K_1 и K_2. Если отображение H компакта W в E заменить некоторым другим отображением H_0 и точку a — другой точкой a_0 так, что $|||\overrightarrow{H - H_0}||| < \delta/2$, $\|\overrightarrow{a - a_0}\| < \delta/2$, то $H_0(W - \overset{\circ}{V}_1)$ и $H_0(W - \overset{\circ}{V}_2)$ не будут содержать точки a_0. Следовательно, прообраз $H_0^{-1}(\{a_0\})$ в W останется в $\overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2$ или же *прообразы точки a_0 при отображении H_0 в $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ совпадут.*

Однако при этих условиях можно будет выбрать H_0 из класса C^1 на W (теорема 52) таким образом, чтобы $H_0^{-1}(\{a_0\})$ было конечным множеством и чтобы в каждой точке этого множества отображение H_0' имело ранг, равный N (2-й случай первой части доказательства теоремы 61). В силу 1-го случая первой части доказательства теоремы индексы $H_0 | \widehat{bV}_1$ и $H_0 | \widehat{bV}_2$ в точке a_0 равны числу точек прообразов точки a_0 при отображении H_0 в $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$, в которых H_0 сохраняет ориентацию, уменьшенному на число точек прообраза, в которых ориентация изменяется на противоположную. Отсюда следует, что оба этих индекса равны. Индексы $H_0 | \widehat{bV}_1$ и $H_0 | \widehat{bV}_2$ в точке a_0 те же самые, что и индексы $H | \widehat{bV}_1$ и $H | \widehat{bV}_2$ в точке a (теорема 62), и являются топологическими степенями $H | \vec{V}_1$ и $H | \vec{V}_2$ в точке a.

Теорема 68 (Руше). *Пусть H — непрерывное отображение ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ размерности N в открытое множество Ω из N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$. Пусть, кроме того, K — непрерывное отображение V в соответствующее векторное пространство $\vec{E}$. Если образ границы bV при отображении H не содержит точки a и если в каждой точке x границы bV имеет место неравенство*

$$\|\vec{K}(x)\| < \|\overrightarrow{H(x) - a}\|, \tag{VI, 8; 68}$$

то множество $(H + \vec{K})(bV)$ не содержит точки a и отображение $H + \vec{K}$ имеет в точке a ту же топологическую степень, что и отображение H.

Если неравенство (VI, 8; 68) *справедливо со знаком* $\leqslant$ *вместо* $<$, *то нельзя утверждать, что множество* $(H+\vec{K})(bV)$ *не содержит точки* a, *однако если это так, то заключение теоремы останется справедливым.*

Доказательство. Предположим сначала, что имеет место строгое неравенство. Согласно (VI, 8; 68), для любой точки $x \in bV$ отрезок $[H(x),\ H(x)+\vec{K}(x)]$ целиком лежит в $\complement a$. Из леммы к теореме 51 следует, что циклы $H \mid \widehat{bV}$ и $H+\vec{K} \mid \widehat{bV}$ гомотопны в $\complement a$, а значит, гомологичны и имеют один и тот же индекс в точке a, откуда и вытекает требуемый результат.

Предположим теперь, что справедливо неравенство со знаком $\leqslant$. Тогда $(H+\vec{K})(bV)$ может содержать точку a (например, если $\vec{E}$ является векторным пространством, $\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{K}=-\vec{H}$), и топологическая степень не имеет смысла. Однако если это множество точки a не содержит, то топологическая степень равна топологической степени отображения $H+(1-\varepsilon)\vec{K}$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ (теорема 66), и для отображения $(1-\varepsilon)\vec{K}$ справедливо строгое неравенство $<$, а значит, топологическая степень совпадает с топологической степенью отображения H.

Следствие 1 (теорема Даламбера). *Каждый полином комплексной переменной степени m с комплексными коэффициентами имеет m корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Как уже отмечалось выше, для доказательства существования корней некоторого уравнения мы используем теорию топологических степеней.

Доказательство. Как обычно, достаточно показать, что при $m \geqslant 1$ полином имеет хотя бы один корень. Выберем сначала число $R>0$ так, чтобы для $|z| \geqslant R$ было справедливо неравенство

$$|P(z)-a_0z^m| < |a_0z^m|. \tag{VI, 8; 69}$$

где a_0 — коэффициент при старшей степени полинома $P(z)$.

Теперь можно применить теорему Руше с $H(z)=a_0z^m$ и $K(z)=P(z)-a_0z^m$. Она показывает, что отображение, определенное полиномом P, круга $|z| \leqslant R$ в комплексную плоскость имеет ту же топологическую степень в точке 0, что и отображение $z \to a_0z^m$. Согласно определению, эта степень равна индексу относительно точки 0 цикла, определенного отображением H: $z \to Z = a_0 z^m$ окружности $\vec{\Gamma}$: $|z| = R$, снабженной канонической ориентацией, в $\mathbb{C}$. В силу (VI, 8; 57) этот индекс равен

$$\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{H|\vec{\Gamma}} \frac{dZ}{Z} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\vec{\Gamma}} m \frac{dz}{z}, \qquad \text{(VI, 8; 70)}$$

т. е. индексу $\vec{\Gamma}$, умноженному на m, или равен m.

Мы доказали, что *отображение круга* $|z| \leqslant R$ *в комплексную плоскость* $\mathbb{C}$, *определенное отображением* P, *имеет топологическую степень* m *в точке* 0. Поскольку $m \neq 0$, то в этом круге имеется *хотя бы один корень*. По индукции, исходя из существования корня, можно доказать существование m корней. *Однако, по-видимому, этот результат можно получить и прямо, используя тот факт, что топологическая степень равна* m.

В этом мы убедимся в теореме 25 гл. VII.

Следствие 2. *Пусть* E — *конечномерное нормированное аффинное пространство над полем вещественных чисел. Каждое непрерывное отображение замкнутого шара этого пространства в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Здесь мы снова имеем приложение понятия топологической степени к доказательству существования корней некоторого уравнения.

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что в пространстве E введена евклидова норма. Пусть f — данное непрерывное отображение шара B с центром a радиуса R в себя. Если как-нибудь ориентировать векторное пространство $\vec{E}$, то тем самым будут ориентированы пространство E и шар B. Обозначим через $\vec{H}$ отображение $x \to \overrightarrow{x - a}$ шара $\vec{B}$ в $\vec{\vec{E}}$, имеющее топологическую степень 1 в $\vec{0}$ (поскольку $\vec{0}$ имеет единственный прообраз — точку a, в котором якобиан отображения $\vec{H}$ равен $1 > 0$), и через $\vec{K}$ — отображение $x \to -\overrightarrow{(f(x) - a)}$ шара $\vec{B}$ в $\vec{\vec{E}}$[1]).

Так как f отображает B в B, то для H, $\vec{K}$ и $\vec{a} = \vec{0} \in \vec{\vec{E}}$ при $x \in bB$ имеет место неравенство (VI, 8; 68) со знаком $\leqslant$:

---

[1]) Топологические степени здесь не зависят от выбора ориентации векторного пространства $\vec{E}$, поскольку при изменении ориентации $\vec{E}$ одновременно меняется ориентация пространства E, а значит, и шара B.

$\|\overrightarrow{f(x)-a}\| \leqslant R = \|\overrightarrow{x-a}\|$. Здесь $(H+\vec{K})(x) = \overrightarrow{x-f(x)}$. Следовательно, согласно теореме Руше, имеем

a) либо образ bB при отображении $H+\vec{K}$ содержит $\vec{0}$ и существует точка x, принадлежащая границе bB, а значит, и шару B, такая, что $(H+\vec{K})(x)=\vec{0}$, откуда $x=f(x)$;

b) либо это не так; тогда топологическая степень отображения $(H+K)(\vec{x})$ в $\vec{0}$ равна $+1$ и существует точка x, принадлежащая $\mathring{B}$, а значит, и B, такая, что $x=f(x)$.

Следствие доказано в обоих случаях.

2°) Предположим теперь, что в пространстве E введена произвольная норма. Тогда предыдущий метод не применим, поскольку сфера не будет больше многообразием [1]).

Заметим, что доказанное свойство имеет чисто топологический характер. Будучи справедливым для некоторого евклидова шара, оно остается справедливым для любого топологического пространства, гомеоморфного евклидову шару. Далее, *шары относительно двух произвольных норм из E гомеоморфны.* Следовательно, каждый шар гомеоморфен евклидову шару. В самом деле, пусть $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ — две произвольные нормы в $\vec{E}$. Рассмотрим отображение $\vec{h}$ из $\vec{E}$ в $\vec{E}$, определенное по формуле

$$\vec{x} \to \vec{h}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\vec{x} \text{ при } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{h}(\vec{0}) = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 71)}$$

Это отображение непрерывно в каждой точке $\neq \vec{0}$, поскольку нормы непрерывны, а знаменатель не обращается в нуль. Это отображение непрерывно также и в нуле, так как две нормы в $\vec{E}$ эквивалентны (теорема 13 гл. II), и тогда отношение $\|\vec{x}\|_1/\|\vec{x}\|_2$ ограничено (теорема 12 гл. II) и $\vec{h}(\vec{x})$ стремится к $\vec{0}$ при $\vec{x}$, стремящемся к $\vec{0}$. Так как

$$\|\vec{h}(\vec{x})\|_2 = \|\vec{x}\|_1 \quad \left(\text{и } \|\vec{h}(\vec{x})\|_1 = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\right), \qquad \text{(VI, 8; 72)}$$

то $\vec{h}$ отображает единичный шар B_1 в норме $\|\ \|_1$ в единичный шар B_2 в норме $\|\ \|_2$.

---

[1]) При норме $\|(x_1, x_2, \ldots, x_N)\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} |x_i|$ в $\mathbb{R}^N$ шар является кубом. При других нормах он может быть устроен гораздо сложнее!

Кроме того, отображение $\vec{h}$ имеет обратное отображение $\vec{k}$:

$$\vec{y} \to \vec{k}(\vec{y}) = \frac{\|\vec{y}\|_2}{\|\vec{y}\|_1} \vec{y}\,[1]. \qquad \text{(VI, 8; 73)}$$

Это отображение $\vec{E}$ в $\vec{E}$ непрерывно и переводит B_2 в B_1. Следовательно, $\vec{h}$ является гомеоморфизмом шара B_1 на шар B_2, чем и заканчивается доказательство следствия.

Замечания. 1°) *В этом доказательстве предположение о конечномерности пространства E является существенным.* С одной стороны, оно позволяет применить теорию топологической степени, а, с другой стороны, в п. 2°) приводит к эквивалентным нормам. Можно показать, что аналогичные теоремы будут неверными, если E является бесконечномерным нормированным аффинным пространством. Однако имеет место замечательная теорема, которую мы примем без доказательства:

Теорема 68_2 (теорема Шаудера о неподвижной точке). *Пусть E — банахово пространство. Тогда любое непрерывное отображение выпуклого компакта K из E в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Если пространство E конечномерно, то все шары в нем компактны и выпуклы.

2°) Эта теорема о неподвижной точке не связана с теоремой 46 гл. II. Наложенные здесь условия значительно менее ограничительны, поскольку H не обязательно является сжатием. Однако здесь доказывается только существование неподвижной точки, а не ее единственность. Например, если H является тождественным отображением, то все точки сферы будут неподвижными точками такого преобразования.

Теорема 69. *Пусть X: $x \to \vec{X}(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к некоторой сфере N-мерного евклидова пространства E. Тогда, если число N нечетно, существует по крайней мере одна точка x сферы, в которой вектор $\vec{X}(x)$ обращается в нуль.*

Доказательство. Ориентируем каким-нибудь образом пространство $\vec{E}$. Можно всегда считать, что Σ — единичная сфера из $\vec{E}$. Поскольку сфера Σ является компактным много-

[1]) В самом деле, для доказательства достаточно показать, что $\vec{h} \circ \vec{k}$ и $\vec{k} \circ \vec{h}$ являются тождественными отображениями. Например,

$$\vec{k} \circ \vec{h}\,(x) = \vec{k}\left[\frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\vec{x}\right] = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\,\vec{k}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\,\frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_1}\,\vec{x} = \vec{x}.$$

образием из $\vec{E}$, которое мы можем снабдить его канонической ориентацией в $\overleftarrow{E}$, то поле $\vec{X}$ можно рассматривать как поле, определяющее некоторое непрерывное отображение этой сферы $\vec{\Sigma}$ в $\vec{E}$, т. е. некоторый цикл $\vec{X}\,|\,\vec{\Sigma}$ на $\vec{E}$.

Предположим, что поле $\vec{X}$ нигде в нуль не обращается. Тогда образ этого цикла не содержит нуля пространства и, следовательно, имеет некоторый индекс в $\vec{0}$. Обозначим через $\vec{Y}$ поле нормальных единичных векторов, выходящих из сферы. Это поле также определяет некоторый цикл $\vec{Y}\,|\,\vec{\Sigma}$ из $\vec{E}$, и в силу того, что $\vec{Y}$ является тождественным отображением Σ в $\vec{E}$, индекс этого цикла относительно начала равен $+1$. При любом t, $0 \leqslant t < 1$, вектор $t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Y}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Следовательно, если рассмотреть отображение $[0, 1] \times \Sigma$ в $\vec{E}$, заданное по формуле

$$(t, \vec{x}) \to t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Y}(\vec{x}), \qquad \text{(VI, 8; 74)}$$

то оно определит некоторую гомотопию между циклом $\vec{X}\,|\,\vec{\Sigma}$ и циклом $\vec{Y}\,|\,\vec{\Sigma}$ в $\complement\vec{0}$. Отсюда следует, что *индекс цикла $\vec{X}\,|\,\vec{\Sigma}$ относительно $\vec{0}$ также равен $+1$.*

Обозначим через $\vec{Z}$ непрерывное поле единичных векторов, нормально входящих в сферу. Отображение $\vec{Z}$ поверхности $\vec{\Sigma}$ в $\vec{E}$ определяет некоторый цикл. Его индекс можно вычислить с помощью интеграла от телесного угла ω_0 относительно точки 0:

$$I(\vec{Z}\,|\,\vec{\Sigma};\ 0) = \frac{1}{S_N} \int\limits_{\vec{Z}\,|\,\vec{\Sigma}} \omega_0 = \frac{1}{S_N} \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{Z}^* \omega_0. \qquad \text{(VI, 8; 75)}$$

Отображение $\vec{Z}$ является обычной симметрией $\vec{x} \to -\vec{x}$ относительно начала координат. Из формулы (VI, 8; 51) следует, что $\vec{Z}^*\omega = (-1)^N \omega$, и мы получаем такое соотношение:

$$I(\vec{Z}\,|\,\vec{\Sigma};\ \vec{0}) = \frac{(-1)^N}{S_N} \int\limits_{\vec{\Sigma}} \omega_0 = (-1)^N. \qquad \text{(VI, 8; 76)}$$

Если теперь воспользоваться гомотопией

$$(t, \vec{x}) \to t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Z}(\vec{x}), \qquad \text{(VI, 8; 77)}$$

то проведенное выше рассуждение показывает, что цикл $\vec{X}\,|\,\vec{\Sigma}$ имеет тот же индекс в точке $\vec{0}$, что и цикл $\vec{Z}\,|\,\Sigma$, т. е. $(-1)^N$.

Если N — нечетное число, то равенство $(-1)^N = 1$ невозможно. Значит, векторное поле обращается в нуль хотя бы в одной точке сферы, и мы пришли к противоречию с исходным предположением. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Это доказательство, очевидно, не пригодно при четном N, так как в этом случае поле выходящих векторов $\vec{Y}$ и поле входящих векторов $\vec{Z}$ определяют два цикла $\vec{Y}\,|\,\vec{\Sigma}$ и $\vec{Z}\,|\,\vec{\Sigma}$ одного и того же индекса $+1$ в точке $\vec{0}$. Впрочем, в этом случае теорема становится неверной, и существует поле непрерывных векторов, нигде не обращающееся в нуль на сфере. Если, например, рассматривается тригонометрическая окружность ($N=2$) и если в каждой точке окружности построен единичный вектор положительной полукасательной, то тем самым будет определено непрерывное векторное поле всюду $\neq \vec{0}$ на окружности. Значительно более сложными методами можно построить такие поля на сферах в евклидовых пространствах произвольной четной размерности.

Следствие. *Пусть f — непрерывное отображение сферы Σ N-мерного аффинного евклидова пространства E в себя. Тогда, если число N нечетно, найдется хотя бы одна точка $x \in \Sigma$, образ которой при отображении f будет совпадать с самой точкой x или будет точкой сферы Σ, диаметрально противоположной точке x.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное векторное поле $x \to \overrightarrow{f(x)-x}$. Это, конечно, не поле касательных векторов. Однако если в каждой точке сферы мы ортогонально спроектируем векторы поля на касательную плоскость, то тем самым будет определено непрерывное поле векторов, касательных к сфере. Поскольку N нечетно, существует хотя бы одна точка, проекция которой равна нулю, т. е. точка, в которой вектор $\overrightarrow{f(x)-x}$ является нормалью. Поскольку $f(x)$ является точкой сферы, то это случится только в том случае, когда эта точка совпадает с точкой x или является точкой, диаметрально противоположной точке x.

Обобщение теории топологической степени

Теория топологической степени допускает значительное обобщение.

Пусть $\vec{V}$ и $\vec{W}$ — ориентированные многообразия *одной и той же размерности* N, где V, быть может, является многообразием с краем, но всегда компактным, а многообразие W — есть многообразие без края. Пусть H — такое непрерывное отображение V в W, что образ bV при отображении H не содержит точки $a \in W$. Тогда можно определить топологическую степень отображения H в точке a. Эта топологическая степень обладает свойствами, аналогичными тем, какие мы отмечали выше. Представляет интерес случай, когда V является компактным многообразием без края. Тогда можно определить топологическую степень отображения H многообразия $\vec{V}$ в многообразие $\vec{W}$ в каждой точке a из W. Эта топологическая степень непрерывно изменяется вместе с изменением точки a и, следовательно, постоянна на каждой связной компоненте множества W.

Глава VII

Функции комплексных переменных

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЕЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Все изложенное в гл. III дифференциальное исчисление пригодно как для случая поля вещественных, так и для случая поля комплексных чисел, за исключением теории максимумов и минимумов (и, в частности, вариационного исчисления), где существенно предположение, что рассматриваемые функции принимают вещественные значения. С другой стороны, в гл. V о дифференциальных уравнениях всегда рассматривались только функции вещественной переменной, т. е. функции, определенные на некотором интервале *вещественной оси* $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве над полем вещественных или комплексных чисел.

Как мы отмечали в начале гл. III, если E и F — аффинные нормированные пространства над полем $\mathbb{C}$, то тем более их можно считать аффинными нормированными пространствами над полем $\mathbb{R}$, и всякое отображение открытого множества Ω из E в F, дифференцируемое относительно $\mathbb{C}$, и подавно дифференцируемо относительно $\mathbb{R}$. Однако в этом случае производное отображение $f'(a)$ в точке $a \in \Omega$ является не только $\mathbb{R}$-линейным, но также и $\mathbb{C}$-линейным отображением $\vec{E}$ в $\vec{F}$.

Обратно, если f — некоторое отображение Ω в F, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке a, и если его производная $f'(a)$ не только $\mathbb{R}$-линейна, но и $\mathbb{C}$-линейна, то оно $\mathbb{C}$-дифференцируемо и имеет ту же производную $f'(a)$. Это непосредственно вытекает из определения (III, 3; 13).

Теорема 1. *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства над полем комплексных чисел. Для того чтобы $\mathbb{R}$-линейное отображение L пространства $\vec{E}$ в пространство $\vec{F}$ было $\mathbb{C}$-линейным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$ имело место равенство*

$$L(i\vec{X}) = iL(\vec{X}). \qquad \text{(VII, 1; 1)}$$

Если пространство $\vec{E}$ конечномерно и $(\vec{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, есть $\mathbb{C}$-базис $\vec{E}$, то достаточно, чтобы для каждого элемента базиса *выполнялось соотношение*

$$L(i\vec{e}_j) = iL(\vec{e}_j). \qquad \text{(VII, 1; 2)}$$

Доказательство. Написанные условия очевидным образом необходимы, и поэтому нам надо доказать только их достаточность.

Если (VII, 1; 1) выполнено и если $\lambda + i\mu$ — произвольное комплексное число, то

$$L((\lambda + i\mu)\vec{X}) = \lambda L(\vec{X}) + \mu L(i\vec{X}) = (\lambda + i\mu) L(\vec{X}), \qquad \text{(VII, 1; 3)}$$

чем доказывается $\mathbb{C}$-линейность отображения L.

Далее, если пространство $\vec{E}$ конечномерно, то в силу $\mathbb{R}$-линейности L для выполнения соотношения (VII, 1; 1) достаточно, чтобы оно выполнялось для элементов $\mathbb{R}$-базиса $\vec{E}$. Но если это соотношение выполнено для элементов $\vec{e}_j$ некоторого $\mathbb{C}$-базиса, то оно также будет выполняться для элементов $i\vec{e}_j$, ибо

$$L(i\vec{e}_j) = iL(\vec{e}_j), \quad \text{или} \quad L(-\vec{e}_j) = iL(i\vec{e}_j), \quad \text{или} \quad L(i\cdot i\vec{e}_j) = iL(i\vec{e}_j),$$

а множество элементов $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ составляет $\mathbb{R}$-базис пространства $\vec{E}$.

Следствие 1. *Пусть E и F — $\mathbb{C}$-аффинные пространства и f — отображение открытого множества $\Omega \subset E$ в F, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке $a \in \Omega$. Для того чтобы f было $\mathbb{C}$-дифференцируемым в точке a, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение*

$$f'(a)\cdot(i\vec{X}) = if'(a)\cdot\vec{X} \quad \textit{для любого} \quad \vec{X} \in \vec{E}. \qquad \text{(VII, 1; 4)}$$

Замечание. Вернемся к случаю конечномерного пространства E. Пусть $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторая $\mathbb{C}$-система координат в E. Пусть вектор $\vec{X} \in \vec{E}$ и z_j — его (комплексные) координаты относительно базиса $\vec{e}_j$. Тогда $\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} z_j\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j\vec{e}_j + y_j(i\vec{e}_j))$. Отсюда следует, что $x_j = \operatorname{Re} z_j$ и $y_j = \operatorname{Im} z_j$ являются координатами вектора $\vec{X}$ относительно $\mathbb{R}$-базиса $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$. Можно сказать, что если через x_j и y_j обозначены координатные функции относительно $\mathbb{R}$-системы координат, образованной из 0 и векторов $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, то $z_j = x_j + iy_j$ — координатные функции относительно $\mathbb{C}$-системы координат, образованной из 0 и $\vec{e}_j$. Если отображение f $\mathbb{R}$-дифференцируемо, то оно имеет частные производные $f'(a)\cdot\vec{e}_j=\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j=\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y_j}(a)$ в вещественном смысле. Но если оно $\mathbb{C}$-дифференцируемо, то это отображение имеет производные $f'(a)\cdot\vec{e}_j=\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j=$ $=if'(a)\cdot\vec{e}_j=i\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}(a)$ также и в комплексном смысле. Другими словами, в силу (VII, 1; 2) имеет место

Следствие 2. *Если E конечномерно и если векторы $\vec{e}_j$ составляют $\mathbb{C}$-базис в $\vec{E}$, то отображение $f\colon \Omega\to F$, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке $a\in\Omega$, будет $\mathbb{C}$-дифференцируемым тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_j}(a)=i\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(a),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{VII, 1; 5}$$

В этом случае

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}(a)=\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(a)=-i\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_j}(a)=f'(a)\cdot\vec{e}_j. \tag{VII, 1; 6}$$

Замечание. Соотношения (VII, 1; 6) можно получить иначе: при фиксированных $x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots$ $\ldots, x_n, y_n$ отображение f можно рассматривать как сложную функцию x_j, y_j, образованную при помощи z_j, и можно применить теорему о сложных функциях:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}=\frac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_j}=\frac{\partial \vec{f}}{\partial z_j},\qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_j}=\frac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial y_j}=i\frac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}.$$

Этот способ очень прост, но одновременное присутствие производных в вещественном и в комплексном смысле требует некоторых предосторожностей, и давать его строгое обоснование менее удобно, чем применять предыдущий метод.

Следствие 3. *Пусть f — отображение некоторого открытого множества Ω аффинного $\mathbb{C}$-пространства E в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а P и Q — вещественная и мнимая части f, т. е. $f=P+iQ$. Тогда если P и Q являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми функциями на Ω, то для того чтобы функция f была $\mathbb{C}$-дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы для* *каждого* $\vec{X} \in \vec{E}$ *имело место равенство*

$$D_{i\vec{X}} P = -D_{\vec{X}} Q. \qquad \text{(VII, 1; } 6_2\text{)}$$

Если $E = \mathbb{C}^n$, *то это условие запишется (если последовательно положить* $\vec{X} = \vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$) *в виде условий Коши — Римана*

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial Q}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_j} = -\frac{\partial Q}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(VII, 1; 7)}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть вещественную и мнимую части соотношения (VII, 1; 5).

Следствие 4. *Если* Ω — *открытое связное множество* $\mathbb{C}$-*аффинного пространства* E, f — $\mathbb{C}$-*дифференцируемая комплекснозначная функция на* Ω *с постоянной вещественной частью в* Ω, *то и сама функция* f - *постоянна.*

В самом деле, мнимая часть Q отображения f имеет производную, которая в силу соотношения (VII, 1; 6_2) равна нулю. Поскольку множество Ω связно, то по теореме 22 гл. III функция Q постоянна.

Следствие 5. *Если комплекснозначная* $\mathbb{C}$-*дифференцируемая функция* f *определена на связном множестве* Ω *из* E *и если ее модуль* $|f|$ *постоянен в* Ω, *то и сама функция* f *постоянна.*

В самом деле, для каждого $\vec{X} \in \vec{E}$

$$\frac{1}{2} D_{\vec{X}} |f|^2 = \frac{1}{2} D_{\vec{X}} (P^2 + Q^2) = P D_{\vec{X}} P + Q D_{\vec{X}} Q = P D_{\vec{X}} P - Q D_{i\vec{X}} P = 0.$$

Заменяя $\vec{X}$ на $i\vec{X}$, получаем

$$Q D_{\vec{X}} P + P D_{i\vec{X}} P = 0.$$

В точке $a \in \Omega$ мы имеем два линейных уравнения с двумя неизвестными $D_{\vec{X}} P(a)$ и $D_{i\vec{X}} P(a)$ с определителем $P^2(a) + Q^2(a)$. Если постоянная $P^2 + Q^2 = |f|^2$ равна нулю, то следствие доказано. В противном случае $D_{\vec{X}} P(a) = 0$, $D_{i\vec{X}} P(a) = 0$ для каждой точки a и каждого $\vec{X}$. Но тогда производная P' равна нулю на Ω, и точно так же равна нулю производная Q', а значит, поскольку Ω связно, функция f постоянна.

Введение символов $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$

Пусть E — конечномерное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $(\vec{e}_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$, — некоторый $\mathbb{C}$-базис $\vec{E}$. Если, как в предыдущем случае, рассмотреть вещественные координатные функции x_j, y_j, то можно вычислить их дифференциалы dx_j, dy_j.

Точно так же комплексные координаты z_j являются комплекснозначными функциями на E и имеют дифференциалы dz_j. При этом справедливы формулы $dz_j = dx_j + i\,dy_j$. Переходя к комплексно сопряженным функциям $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, получим $d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$.

Пусть теперь f — отображение открытого множества Ω из E в аффинное пространство F над комплексным полем. Будем предполагать только, что f $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $a \in \Omega$. Тогда ее производная в дифференциальных обозначениях гл. III выразится в виде

$$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} dy_j. \qquad \text{(VII, 1; 8)}$$

Если мы запишем dx_j и dy_j как функции dz_j и $d\bar{z}_j$:

$$dx_j = \frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2}, \quad dy_j = \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i}, \qquad \text{(VII, 1; 9)}$$

то получим новое выражение

$$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} - i\, \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} \right) dz_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} + i\, \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} \right) d\bar{z}_j \right). \qquad \text{(VII, 1; 10)}$$

Тем самым мы получаем (напомним еще раз, что речь идет о функции, *лишь* $\mathbb{R}$-*дифференцируемой*):

$$\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} - i\, \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} + i\, \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} \right), \qquad \text{(VII, 1; 11)}$$

откуда

$$\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j} = \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j} + \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j} = i \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j} - \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j} \right), \qquad \text{(VII, 1; 11}_2\text{)}$$

так что производное отображение (еще раз в вещественном смысле) выражается в дифференциальных обозначениях особенно просто:

$$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j} dz_j + \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right), \qquad \text{(VII, 1; 12)}$$

Введенные символы $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ очень удобны на практике. Условия (VII, 1; 5) непосредственно дают

Следствие 6. *Для того чтобы $\mathbb{R}$-дифференцируемое отображение $\vec{f}$ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в F было $\mathbb{C}$-дифференцируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло уравнениям в частных производных*

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \bar{z}_j} = \vec{0}, \tag{VII, 1; 13}$$

и в этом случае частные производные $\partial\vec{f}/\partial z_j$ относительно комплексного поля, определенные по формуле (VII, 1; 6), *совпадают с величинами $\partial\vec{f}/\partial z_j$, определенными по формуле* (VII, 1; 11).

Теорема 2. *Пусть $\vec{\omega}$ — $\mathbb{R}$-дифференцируемая дифференциальная форма степени p, определенная на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}^n$, со значениями в $\vec{F}$. Тогда $d\vec{\omega}$ задается формулой, аналогичной второй формуле* (VI, 4; 1):

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right). \tag{VII, 1; 14}$$

Доказательство. В самом деле, с помощью формулы (VI, 4; 1) непосредственно получаем

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_j} + dy_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial y_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2} \wedge \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) + \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i} \wedge i \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right). \tag{VII, 1; 15}$$

Теорема 3. *Пусть $\vec{f}$ — дважды $\mathbb{R}$-дифференцируемое отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в F. Если это отображение один раз $\mathbb{C}$-дифференцируемо, то оно гармоническое, т. е. удовлетворяет соотношению*

$$\vec{\Delta f} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y_j^2} \right) = \vec{0}.$$

Если значения $\vec{f}$ лежат в комплексном поле $\mathbb{C}$, P и Q — вещественная и мнимая части f, то функции P и Q также гармонические.

Доказательство. Лапласиан Δ в обозначениях (VII, 1; 11) записывается в виде

$$\Delta = 4\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \qquad \text{(VII, 1; 16)}$$

откуда в силу предыдущего следствия и вытекает первое утверждение.

Так как при вещественных ΔP и ΔQ имеем $\Delta(P+iQ)=\Delta P + i\Delta Q$, то при $F=\mathbb{C}$ утверждение относительно P и Q очевидно.

Замечание. Для случая комплексной размерности $n=1$, как мы увидим ниже в теореме 10, каждая один раз $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция, действующая из $\Omega \subset \mathbb{C}$ в F, заведомо бесконечно дифференцируема, так что без каких-либо дополнительных предположений, кроме $\mathbb{C}$-дифференцируемости первого порядка, можно утверждать, что функция f, а в случае $F=\mathbb{C}$ функции P и Q — гармонические (следствие 1 теоремы 10).

Можно дать некоторое обращение предыдущей теоремы. Пусть P — вещественная функция, определенная на открытом множестве Ω из $\mathbb{C}$, дважды $\mathbb{R}$-дифференцируемая и гармоническая. Выясним, будет ли она тогда вещественной частью некоторой $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции с комплексными значениями, определенной на Ω.

Теорема 4. *Пусть Ω — односвязное открытое множество поля $\mathbb{C}$ и P — гармоническая вещественная функция класса C^2 на Ω, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta P=0$. Тогда существует бесконечное множество комплексно-значных функций f, $\mathbb{C}$-дифференцируемых на Ω, с вещественной частью P. Если множество Ω связно, то мнимая часть Q таких функций f определяется с точностью до аддитивной постоянной и, следовательно, сами функции f определяются с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной.*

Доказательство. Нам надо определить функцию Q так, чтобы выполнялись соотношения Коши (VII, 1; 7) для $n=1$. Поэтому, предполагая Q $\mathbb{R}$-дифференцируемой, мы видим, что ее частные производные первого порядка уже определены.

Как мы знаем из следствия 1 теоремы 59 гл. VI, при односвязном множестве Ω и величинах $-\frac{\partial P}{\partial y}$ и $+\frac{\partial P}{\partial x}$, принадлежащих классу C^1, для определения такой функции Q необходимо и достаточно выполнение равенства $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$

$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, т. е. $\Delta P=0$. Поскольку функция P принадлежит классу C^2 и гармоническая, то это условие выполняется. Значит, функцию Q определить можно. Если Ω связно, то решение с точностью до аддитивной постоянной единственно (поскольку разность между двумя решениями есть функция, имеющая нулевые первые производные и, следовательно, по теореме 22 гл. III постоянная).

Замечание. *Этот результат неверен для комплексной функции на* $\mathbb{C}^n$ *при* $n \geqslant 2$.

Вещественная и мнимая части $\mathbb{C}$-дифференцируемой комплекснозначной функции на $\Omega \subset \mathbb{C}$ называются *вещественными гармоническими сопряженными функциями*. Если в открытом односвязном множестве задана гармоническая функция, то для нее имеется бесконечное множество гармонических сопряженных функций. Если множество Ω связно, то сопряженные с данной гармонические функции определяются с точностью до аддитивной постоянной.

Заметим, что если Q — гармоническая функция, сопряженная с функцией P, то функция $-P$ будет гармонической функцией, сопряженной с функцией Q.

§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ КОШИ

Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$ (вообще нет нужды везде предполагать $\vec{F}$ векторным и полным, но в большинстве случаев это необходимо, так как надо будет *интегрировать* непрерывные функции со значениями в $\vec{F}$. Мы будем всюду считать его векторным и полным и не повторять этого без особой надобности в условиях теорем). Функция, определенная на открытом множестве $\Omega \subset E$, со значениями в $\vec{F}$ называется C^m-голоморфной, если она принадлежит классу C^m относительно поля комплексных чисел.

В теореме 10 мы увидим, что если E имеет комплексную размерность, равную 1, то C^1-голоморфность функции влечет за собой ее C^∞-голоморфность. Значительно позже мы распространим это свойство на произвольное пространство E. До теоремы 10 мы будем тщательно различать эти условия, далее же для любого E будем писать просто *голоморфизм, и это будет означать* C^∞*-голоморфизм.* Такое предположение в некоторых утверждениях будет, по-видимому, чрезмерным, однако это не имеет значения, поскольку позже окажется, что все голоморфизмы одинаковы. Пока же в теоремах мы снова будем пользоваться терминами C^1-голоморфизм и C^∞-голоморфизм.

Значительная часть результатов будет относиться только к случаю $E=\mathbb{C}$, но некоторые и к случаю произвольного пространства E.

Теорема 5. *Для того чтобы функция $\vec{f}$ на $\Omega \subset \mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$ класса C^1 относительно $\mathbb{R}$ была C^1-голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная форма $\vec{\omega}=\vec{f}(z)\,dz$ первой степени класса C^1 была замкнутой.*

Доказательство. Из (VII, 1; 14) непосредственно следует, что

$$d\vec{\omega}=\frac{\partial \vec{f}}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\wedge dz. \qquad \text{(VII, 2; 1)}$$

Поскольку $d\bar{z}\wedge dz=2i\,dx\wedge dy\neq 0$, то утверждения $d\vec{\omega}=0$ и $\partial\vec{f}/\partial\bar{z}=0$ равносильны. Справедливость теоремы теперь вытекает из следствия 6 теоремы 1.

Замечание. Если $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, где n произвольно, то функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна тогда и только тогда, когда n-форма $f\,dz_1\wedge dz_2\wedge\ldots\wedge dz_n$ замкнута. Это утверждение применяется редко.

Первая основная интегральная формула Коши

Теорема 6. *Для того чтобы отображение $\vec{f}$ из $\Omega\subset\mathbb{C}$ в $\vec{F}$ класса C^1 относительно вещественного поля $\mathbb{R}$ было C^1-голоморфным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой C^1-границы Γ размерности 1 в Ω имело место соотношение*

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz=\vec{0}\,[1]. \qquad \text{(VII, 2; 2)}$$

Доказательство. В самом деле, если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то $\vec{\omega}=\overrightarrow{f(z)}\,dz$ будет коциклом (теорема 5), и из теоремы

[1]) Каждый раз, когда мы будем пользоваться выражениями *цикл, граница, многообразие с краем*, это будет нужно для интегрирования некоторой дифференциальной формы и применения формулы Стокса. В соответствии с соглашениями, принятыми в § 8 гл. VI, *все они будут компактными. В дальнейшем мы этого повторять не будем.* Например, здесь Γ — компакт, граница многообразия с краем — компакт. Далее, многообразия с краем будут иметь вещественную размерность, равную 2, а циклы и границы — вещественную размерность, равную 1.

41 гл. VI (Стокса) вытекает, что его интеграл по каждой C^1-границе равен нулю.

Обратно, если $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма класса C^1, интеграл от которой по каждой C^1-границе равен нулю, то из теоремы 42 гл. VI следует, что $\vec{\omega}$ — некоторый коцикл, а это в силу теоремы 5 означает, что функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна.

Замечания. Можно значительно улучшить условия этой теоремы.

1°) Если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то, согласно следствию 6 теоремы 54 гл. III, снова имеет место соотношение

$$\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\, dz = 0,$$

даже если Γ — просто особое компактное ориентированное 1-мерное многообразие конечной длины, являющееся некоторой C^0-границей в Ω.

2°) Согласно теореме 42 гл. VI и ее доказательству, для того чтобы функция $\vec{f}$ была C^1-голоморфной, достаточно, чтобы равенство $\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\, dz = 0$ было верным для любой ориентированной окружности Γ, ограничивающей круг Δ, целиком лежащий в Ω, или даже, чтобы для любой точки $a \in \Omega$ оно было верным только для последовательности таких окружностей Γ_n с центрами в точке a, радиусы которых стремятся к 0.

Ниже (см. следствие 3 теоремы 10) мы даже докажем, что в своей достаточной части этот результат сохранится, если предполагать, что формула (VII, 2; 2) выполняется на таких окружностях Γ, а функция $\vec{f}$ *лишь непрерывна*, а не $\mathbb{R}$-дифференцируема.

3°) Напротив, в теореме 6 *весьма существенно, чтобы* Γ *была некоторой границей.*

Вот очевидный контрпример для случая, когда Γ не является границей:

Функция $f(z) = 1/z$ голоморфна в открытом множестве $\Omega = \complement 0$. Обозначим через Γ окружность с центром в 0 радиуса R, ориентированную в положительном направлении в $\mathbb{C}$. Эта окружность будет, очевидно, границей в $\mathbb{C}$, но, как мы уже указывали, не в $\complement 0$ (следствие 2 теоремы 58 гл. VI). Полагая $z = Re^{i\theta}$, сразу получаем формулу

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi. \qquad \text{(VII, 2; 3)}$$

Эта формула играет фундаментальную роль во всей теории голоморфных функций. На ней основывается теорема 19 *о вычетах. Из* (VII, 2; 3) *снова видно, что* Γ *не является границей в* $\mathbb{C}0$.

Следствие. *Если функция* $\vec{f}$ C^1-*голоморфна и если множество* Ω *односвязно, то формула* (VII, 2; 2) *справедлива для любого* C^1-*цикла* Γ (*и даже для любого* C^0-*цикла* Γ *конечной длины*).

В самом деле, поскольку множество Ω односвязно, то каждый цикл Γ является границей (следствие 2 теоремы 54 гл. VI). Можно было бы сказать и так: поскольку множество Ω односвязно, то коцикл $\vec{\omega}$ есть кограница (теорема 59 гл. VI), а следовательно, его интеграл по каждому циклу Γ равен нулю (теорема 39 или 41 гл. VI).

Первообразная голоморфной функции

Теорема 7. *Если* $\vec{f}$ — *голоморфная функция в односвязном множестве* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{G}$[1]), *то она имеет первообразные* $\vec{F}$, *т. е. такие* C^1-*голоморфные функции на* Ω *со значениями в* $\vec{G}$, *что* $\vec{F}' = \vec{f}$. *Если множество* Ω *односвязно, то эти первообразные определяются с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство. Если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то дифференциальная форма $\vec{f}\,dz$ является коциклом. Поскольку множество Ω по условию односвязно, то из теоремы 59 гл. VI следует, что оно является кограницей. Пусть $\vec{F}$ — внешняя первообразная функция для $\vec{\omega}$. Тогда имеет место формула

$$d\vec{F} = \vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz. \tag{VII, 2; 4}$$

Однако $d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, чем доказывается, с одной стороны, что $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}} = 0$, т. е. что функция $\vec{F}$ C^1-голоморфна, и, с другой стороны, что производная $\vec{F}$ относительно поля комплексных чисел равна $\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \vec{f}$.

---

[1]) Вместо обычного обозначения $\vec{F}$ для пространства Банаха мы пишем $\vec{G}$, чтобы иметь возможность обозначать через $\vec{F}$ первообразные функции для $\vec{f}$.

Поскольку функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^1, то из теоремы 59 гл. VI следует, что функция $\vec{F}$ принадлежит классу C^2. Если множество Ω односвязно, то из теоремы 22 гл. III следует, что $\vec{F}$ определяется с точностью до постоянной. Теорема 59 гл. VI одновременно дает нам практическое средство для вычисления функции $\vec{F}$. Если ее значение $\overrightarrow{F(a)}$ в точке $a \in \Omega$ выбрать произвольно, то эта функция определяется в точке z той же связной компоненты Ω (что и точка a) по интегральной формуле

$$\vec{F}(z) - \vec{F}(a) = \int_a^z \overrightarrow{f(\zeta)}\, d\zeta, \tag{VII, 2; 5}$$

где интеграл берется по произвольному пути конечной длины с началом в точке a и концом в точке z, целиком лежащему в Ω.

Замечание. Требование односвязности множества Ω здесь существенно. Если $\Omega = \mathbb{C}0$ и $f(z) = 1/z$, то функция f не допускает первообразной в Ω, поскольку в дополнении к началу координат нет определенного и непрерывного логарифма. (Это интуитивно ясно. Но это можно доказать и совершенно строго. Если бы такой логарифм существовал, то, обозначая через Γ тригонометрическую ориентированную окружность, мы бы получили $2i\pi = \int\limits_\Gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_\Gamma d(\ln z) = 0$.)

Мы приходим к необходимости рассматривать непрерывные значения логарифма. Непрерывным (соответственно голоморфным) значением логарифма в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ называется непрерывная (соответственно голоморфная) функция f, которая в каждой точке принимает одно из значений $\ln z$, т. е. такая, что $e^{f(z)} = z$.

Теорема 8. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}\{0\}$. Каждое непрерывное значение логарифма в Ω C^∞-голоморфно. Если такое значение существует и если множество Ω связно, то разность между двумя такими значениями кратна $2i\pi$ и фиксирование такого значения в какой-нибудь одной точке Ω фиксирует его во всем множестве Ω. Такое значение всегда существует, если Ω односвязно.*

Доказательство. Предположим сначала, что f является непрерывным значением логарифма в Ω. Полагая $Z = f(z)$, из теоремы об обратных функциях (следствие 4 теоремы 11 гл. III, пригодное для случая дифференцирования относительно поля комплексных чисел) получаем, что

$$f'(z)=\frac{1}{e^{f(z)}}=\frac{1}{z}. \tag{VII, 2; 6}$$

Отсюда следует, что функция f C^∞-голоморфна и имеет первообразную $1/z$ в Ω. Если множество Ω связно, то разность между двумя непрерывными значениями, имея нулевую производную, равна постоянной, необходимо кратной $2i\pi$.

Если множество Ω односвязно, то $1/z$ по теореме 7 имеет первообразные. Выберем одну из первообразных функции f в точке $a\in\Omega$ так, чтобы $f(a)$ равнялась одному из значений $\ln a$. Тогда из того, что производная f равна $1/z$, вытекает, что функции $e^{f(z)}$ и z имеют одну и ту же логарифмическую производную в Ω. Так как Ω связно, то отсюда следует, что их отношение постоянно (см. замечание 3°) на стр. 788 гл. IV). Это отношение, будучи равным 1 в точке a, равно 1 во всем множестве Ω, а значит, функция f действительно является голоморфным значением логарифма в Ω.

Замечания. 1°) Для того чтобы обеспечить существование голоморфного значения логарифма в Ω, мы предполагали множество Ω односвязным, но это условие, естественно, не является необходимым. Например, такое значение существует в кольце $r<|z-a|<R$ при $|a|>R$, поскольку оно существует в односвязном круге $|z-a|<R$. Согласно теореме 45 гл. VI, примененной к дифференциальной форме dz/z, для существования такого значения достаточно, чтобы $\int_\Gamma dz/z$ был равен нулю для любого C^∞-цикла Γ из Ω, или с учетом того, что было сказано на стр. 302 гл. VI, чтобы в Ω не существовало C^∞-цикла, «делающего оборот вокруг начала координат», т. е. цикла, индекс которого относительно начала координат отличен от нуля.

2°) Поскольку для $z=re^{i\theta}$ имеем $\ln z=\ln r+i\theta$, то существование непрерывного значения логарифма эквивалентно существованию непрерывного значения полярного угла.

Теорема 45 и следствие 2 теоремы 59 гл. VI дают для Ω как раз те условия, которые мы только что указали.

На практике для определения в Ω голоморфного значения логарифма, задаваемого его значением в точке $a\in\Omega$, определяют его значения в каждой точке $z\in\Omega$ пути, идущего от a к z, при условии непрерывного изменения логарифма. Если множество Ω односвязно, то полученное значение в точке z не зависит от выбранного пути.

Точно так же можно изучать непрерывные (и, следовательно, голоморфные) значения некоторых других «многозначных функций», таких, как $z \to z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$. Такую функцию можно определить, полагая снова $z = re^{i\theta}$, а затем $z^{\alpha} = r^{\alpha}e^{i\alpha\theta}$. При этом в каждом открытом множестве Ω, в котором можно определить непрерывное значение полярного угла, можно также определить голоморфные значения всех функций z^{α}.

Напротив, известно, что такие значения в неодносвязных областях Ω могут не существовать. В дополнении к началу координат в $\mathbb{C}$ даже для функции $\sqrt{z}$ невозможно выделить ее непрерывные ветви. В самом деле, если исходить из одного из двух значений этой функции в данной точке a, затем обойти вокруг начала и вернуться в эту точку, изменяя непрерывно значение квадратного корня, то мы придем к значению с противоположным знаком. (Это интуитивно ясно. Строго говоря, $\ln z$ при таком изменении увеличится на $\pm 2i\pi$, а следовательно, $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$ умножится на $e^{+i\pi} = -1$.)

Доказательство теоремы Пуанкаре о внешних первообразных дифференциальных форм для случая поля комплексных чисел. При доказательстве теоремы Пуанкаре (теорема 19 гл. VI) мы предполагали, что речь идет о дифференциальных формах над вещественным полем (это ограничение отмечено в процессе доказательства на стр. 146).

Предположим теперь, что рассматривается дифференциальная форма $\vec{\omega}$ класса C^1 относительно комплексного поля, определенная на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}^N$ со значениями в банаховом пространстве F.

Будем считать, что Ω обладает свойствами, указанными в условии теоремы 19, и что форма $\vec{\omega}$ замкнута и ее степень $\geqslant 1$. В действительности можно предполагать, что Ω удовлетворяет несколько более общим условиям, чем условия теоремы 19.

Обозначим через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ канонический базис $\mathbb{C}^N$. Предположим, что если через произвольную точку $a \in \Omega$ провести двумерную в вещественном смысле плоскость (аффинное подпространство, одномерное в комплексном смысле), параллельную векторам $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, то она пересечет множество Ω по некоторому одновременно связному и односвязному множеству $\Omega_j(a)$, которое, если оно непусто, необходимо содержит точку, лежащую в $(2n-2)$-мерном вещественном (или $(n-1)$-мерном комплексном) подпространстве, проходящем через начало параллельно векторам базиса и векторам, полученным умножением их на i.

Затем проводится то же самое доказательство по индукции, что и в теореме 19. Для этого надо, как это делалось в том доказательстве, найти первообразную форму Λ от L относительно z_1. С этой целью достаточно применить формулу, аналогичную (VI, 4; 44), а именно

$$\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \int_0^{z_1} L(\zeta_1, z_2, \ldots, z_N)\, d\zeta_1, \qquad \text{(VII, 2; 7)}$$

где интеграл берется в открытом связном и односвязном множестве $\Omega_1(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ по произвольному пути класса C^1, соединяющему точку $(0, z_2, \ldots, z_N)$ с точкой $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Интеграл не зависит от пути интегрирования, поскольку Ω_1 односвязно. Остальная часть доказательства проходит без изменений.

Вторая основная интегральная формула Коши

Теорема 9. *Пусть $\vec{f}$ — функция, C^1-голоморфная в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если V является многообразием с краем в Ω класса C^1, имеющим каноническую ориентацию комплексной плоскости, с границей $bV = \Gamma$, снабженной канонической ориентацией границы, то справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\, dz = \vec{0}, \qquad \text{(VII, 2; 8)}$$

если $a \notin V$, и

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\, dz = \overrightarrow{f(a)}, \qquad \text{(VII, 2; 9)}$$

если $a \in \mathring{V}$. (Интеграл не имеет смысла, если $a \in \Gamma$.)

Доказательство. 1°) Пусть $a \notin V$. Функция $z \to \dfrac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}$ C^1-голоморфна в $\complement_\Omega a$. Так как $V \subset \complement_\Omega a$, то Γ является границей в $\complement_\Omega a$, и из теоремы 6 вытекает соотношение (VII, 2; 8).

2°) Пусть теперь $a \in \mathring{V}$. Тогда предыдущее рассуждение не применимо. В самом деле, функция $z \to \dfrac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}$ C^1-голоморфна всюду в $\complement_\Omega a$, но $V \not\subset \complement_\Omega a$. Можно было бы учесть, что $\complement_V a \subset \complement_\Omega a$, и считать, что Γ является границей множества $\complement_V a$. Однако здесь $\complement_V a$ не компактно, так что в смысле § 8 гл. VI Γ не является границей в $\complement_\Omega a$. Соотношение (VII, 2; 8) не сохраняется.

Обозначим через γ окружность с центром в точке a, обходимую в положительном направлении и такую, что ограничиваемый ею круг Δ целиком содержится в $\mathring{V}$. Тогда $-\gamma$ будет той же окружностью, но обходимой в противоположном направлении.

В $\complement_\Omega a$ $\Gamma - \gamma$ является некоторой границей, а именно границей множества $\complement_V \mathring{\Delta}$. Следовательно, можно применить теорему 6, которая дает

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma-\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\vec{0},\quad \text{или}\quad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz. \tag{VII, 2; 10}$$

Этот результат не зависит от радиуса окружности γ.

Для доказательства теоремы нам будет достаточно показать, что интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$$

равен $\overrightarrow{f(a)}$ или даже, поскольку он не зависит от радиуса r окружности γ, что он стремится к $\overrightarrow{f(a)}$, когда радиус r окружности γ стремится к 0. Этот интеграл есть сумма двух слагаемых:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\frac{\overrightarrow{f(a)}}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-a}+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\,dz. \tag{VII, 2; 11}$$

Первое слагаемое, согласно формуле (VII, 2; 3), равно $\overrightarrow{f(a)}$. Поэтому нам будет достаточно показать, что второе слагаемое стремится к $\vec{0}$, когда радиус r окружности γ стремится к 0.

Поскольку функция $\vec{f}$ по предположению $\mathbb{C}$-дифференцируема, то величина $\left|\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\right|$ при r, стремящемся к нулю, не превосходит некоторого фиксированного числа M. Следовательно, второй интеграл правой части в (VII, 2; 11) допускает оценку

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}M\cdot 2\pi r=Mr, \tag{VII, 2; 12}$$

из которой следует, что он стремится к 0, когда радиус r окружности γ стремится к 0, чем и завершается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) Часто бывает удобно изменить используемые буквы и записать

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{\overrightarrow{f(\zeta)\,d\zeta}}{\zeta - z} = \begin{cases}\overrightarrow{f(z)} & \text{для} \quad z \in \overset{\circ}{V}, \\ \vec{0} & \text{для} \quad z \notin V.\end{cases} \qquad \text{(VII, 2; 13)}$$

2°) Можно доказать значительно более общий результат: *Если Γ — некоторый особый C^0-цикл конечной длины в $\complement_{\Omega}a$ и если он является C^0-границей в Ω, то справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{\vec{f}(z)}{z-a}\,dz = \vec{f}(a)\cdot I(\Gamma;\, a), \qquad \text{(VII, 2; 14)}$$

где $I(\Gamma;\, a)$ — индекс Γ относительно точки a[1]) (стр. 302 гл. VI). Из этой формулы, в частности, получаются соотношения (VII, 2; 8) и (VII, 2; 9). В самом деле, если $a \notin V$, то кривая Γ является границей в $\complement_{\Omega}a$, а следовательно, ее индекс относительно a равен нулю. Если $a \in \overset{\circ}{V}$, то кривая Γ гомологична кривой γ в $\complement_{\Omega}a$, а следовательно, ее индекс равен $+1$.

Доказательство формулы (VII, 2; 13) вытекает непосредственно из теоремы 64 гл. VI. Из предыдущего рассуждения (когда радиус r окружности γ устремляется к нулю) следует, что класс вычетов для $\vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\vec{f}(z)}{z-a}\,dz$ есть $\vec{f}(a)$. Остается применить формулу (VI, 8; 67).

3°) Из теоремы 9 вытекает замечательное следствие: если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна в Ω и если ее значения известны на $\Gamma = bV$, то они известны и на всем многообразии V, поскольку эти значения определяются интегралом (VII, 2; 9), в который входят только значения функции $\vec{f}$ на Γ.

Может возникнуть вопрос: можно ли значения $\vec{f}$ на Γ выбирать произвольно (лишь бы только эти значения определяли некоторое непрерывное отображение Γ в $\vec{F}$)?

Легко видеть, что это не так. В самом деле, заметим, например, что тот же самый интеграл $\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$ должен равняться нулю для $a \notin V$ и что он при a, изменяющемся в $\complement_{\Omega}V$, налагает на функцию $\vec{f}$ бесконечное множество условий, которым она должна удовлетворять на Γ.

---

[1]) Напомним, что при вычислении индекса Γ предполагается ориентированным; Ω также ориентирована (каноническая ориентация пространства $\mathbb{C}$).

Будем исходить теперь из некоторой произвольной непрерывной функции $\vec{f}$ на Γ со значениями в $\vec{F}$. Легко видеть, что интеграл $z \to \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ определяет в $\overset{\circ}{V}$, ра́вно как и в $\complement_{\Omega} V$, C^∞-голоморфные функции переменной z. В самом деле, поскольку интегрирование проводится по компакту, а функция $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}$ непрерывна относительно (z, ζ) и дифференцируема относительно z при фиксированном ζ, причем ее производная определяет функцию $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$, непрерывную относительно (z, ζ), то из следствия теоремы 115 гл. IV вытекает, что интеграл является функцией класса C^1 относительно z в поле комплексных чисел. Из нашего доказательства следует, что эта функция принадлежит и классу C^∞ [1]).

Интеграл не определен для $z \in \Gamma$. Однако можно выяснить, имеет ли он предел при z, стремящемся к точке $z_0 \in \Gamma$.

В самом деле, если функция $\vec{f}$ взята *из класса* C^1 *на* Γ, то можно показать, что когда z стремится к точке z_0 контура, оставаясь в $\overset{\circ}{V}$, интеграл имеет некоторый предел $\vec{f}_1(z_0)$, а когда z стремится к z_0, оставаясь в $\complement_{\Omega} V$, этот интеграл стремится к некоторому пределу $\vec{f}_2(z_0)$ и что разность между этими двумя пределами равна $\vec{f}(z_0)$:

$$\vec{f}_1(z_0) - \vec{f}_2(z_0) = \vec{f}(z_0). \qquad \text{(VII, 2; 15)}$$

В частности, если исходить из функции $\vec{f}$, C^1-голоморфной в Ω, то значение $\vec{f}_2(z_0)$ будет равно нулю, а значение $\vec{f}_1(z_0)$ будет равно $\vec{f}(z)$. Если исходить из произвольной функции $\vec{f}$, то это, вообще говоря, не так. Напротив, если заранее известно, что функция $\vec{f}$ класса C^1 удовлетворяет бесконечному множеству условий $\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \vec{0}$ для $z \notin V$, то можно утверждать,

---

[1]) Следствие теоремы 115 было сформулировано для интегралов относительно некоторой меры $\geqslant 0$. Здесь мера dz на Γ комплексна. Но $dz = \frac{dz}{ds} ds$, где ds — криволинейная абсцисса на Γ — есть мера $\geqslant 0$, что позволяет провести рассуждения для функции $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{ds}$.

что интеграл, определенный по формуле $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$, $z\notin\mathring{V}$, является C^1-голоморфной функцией в $\mathring{V}$, принимающей значение $\vec{f}$ на Γ.

Пусть f — скалярная функция. Позже при изучении гармонических функций мы увидим, что гармоническая функция P, т. е. вещественная часть голоморфной функции f, определяется на V единственным образом, если в качестве ее значений на кривой Γ класса C^1 выбрать произвольную непрерывную на Γ вещественную функцию. Тогда функция P определяется в V единственным образом. После этого можно с точностью до аддитивной постоянной определить гармоническую сопряженную функцию Q в $\mathring{V}$, по крайней мере для случая, когда множество $\mathring{V}$ связно и односвязно. Тем самым с точностью до чисто мнимой постоянной будет определена функция f. По существу функции Q и f так могут быть определены только в $\mathring{V}$. Но можно показать, что если для кривой Γ, принадлежащей классу C^1, функция P принадлежит классу C^1 на Γ, то Q и f имеют пределы в точках Γ. Теперь становится яснее, почему нельзя было произвольно выбирать функцию f на Γ и продолжать ее на V до некоторой голоморфной функции в $\mathring{V}$. Можно выбирать вещественную часть P на Γ, и тогда ее мнимая часть при связном и односвязном множестве V будет определена с точностью до аддитивной постоянной.

§ 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ВТОРОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ

Интегральная формула Коши (VII, 2; 9) является центральной формулой теории голоморфных функций. С ее помощью выясняются основные свойства этих функций,

Теорема 10. *Каждая C^1-голоморфная функция в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ принадлежит классу C^∞ над комплексным полем. Если $V\subset\Omega$ есть некоторое компактное многообразие класса C^1 с краем, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$, и с границей $bV=\Gamma$ (снабженной канонической ориентацией границы), то производные функции $\vec{f}$ определяются в каждой точке $z\in\mathring{V}$, исходя из значений $\vec{f}$ на Γ, по формулам*

$$\overrightarrow{f^{(n)}}(z)=\frac{n!}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad \text{(VII, 3; 1)}$$

или

$$\frac{\overrightarrow{f^{(n)}}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \qquad \text{(VII, 3; 1)}$$

Для доказательства достаточно продифференцировать (VII, 2; 9) под знаком интеграла, а такое дифференцирование законно в силу доказательства, приведенного на стр. 342. Пусть теперь a — произвольная точка из Ω. Тогда в качестве V можно взять круг Δ с центром в точке a, содержащийся в Ω, а в качестве Γ — его границу, и убедиться, что $\vec{f}$ бесконечно дифференцируема в $\overset{\circ}{\Delta}$. Поскольку это справедливо в окрестности каждой точки a, то рассматриваемая функция бесконечно дифференцируема в Ω.

Эта теорема совершенно замечательна и полностью противоречит тому, что мы знали прежде по поводу функций вещественной переменной: отображение открытого множества из $\mathbb{R}$ в банахово пространство может принадлежать классу C^m над полем вещественных чисел и не принадлежать классу C^{m+1}. Однако достаточно отображению принадлежать классу C^1 в $\Omega \subset \mathbb{C}$ над полем комплексных чисел, как оно сразу же оказывается принадлежащим классу C^∞.

Следствие 1. *Каждая функция, C^1-голоморфная в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, является гармонической. Если она принимает комплексные значения, то ее вещественная и мнимая части — гармонические функции.*

В самом деле, ранее мы видели, что это справедливо для функций $\vec{f}$, принадлежащих классу C^2, а теперь мы видим, что это условие выполняется всегда.

Позже мы убедимся, что свойство, указанное в этом следствии, сохраняется и в случае пространства $\mathbb{C}^n$.

Следствие 2. *Каждая гармоническая функция на $\Omega \subset \mathbb{C}$ с вещественными или комплексными значениями принадлежит классу C^∞ относительно поля вещественных чисел.*

Достаточно, очевидно, доказать это утверждение для гармонической функции с вещественными значениями. Пусть P — такая функция. Пусть a — точка из Ω, Δ — круг с центром в точке a, содержащийся в Ω. Этот круг односвязен, и, следовательно, в нем можно найти такую гармоническую сопряженную функцию Q, что $P + iQ$ является C^1-голоморфной функцией в Δ. Эта функция принадлежит классу C^∞, а значит, этому же классу принадлежит и функция P.

Замечания. 1°) Мы видим, что если функция удовлетворяет некоторым уравнениям в частных производных, таким, как $\partial f/\partial \bar{z}=0$ или $\Delta f=0$, то для нее существуют последовательные производные всех порядков. Это не должно нас удивлять. Уравнения в частных производных являются обобщением на случай многих вещественных переменных обыкновенных дифференциальных уравнений. В гл. V мы видели, что каждая функция класса C^m, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения порядка m класса C^∞, необходимо принадлежит классу C^∞ (следствие теоремы 8 гл. V). Теперь мы видим, что некоторые функции класса C^1 или C^2, являющиеся решением уравнений в частных производных класса C^∞, необходимо принадлежат классу C^∞. Однако в теории уравнений в частных производных отмеченное свойство имеет иной характер, нежели в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно относится лишь к некоторым категориям уравнений в частных производных, а именно, к эллиптическим уравнениям, к которым принадлежат указанные уравнения в частных производных $\partial f/\partial \bar{z}=0$ и $\Delta f=0$, в то время как для других уравнений в частных производных, таких, как, например, волновое уравнение, с которым мы встречались ранее, это свойство не выполняется.

2°) Свойство гармонических функций класса C^2 принадлежать классу C^∞ здесь доказано только для функций на $\mathbb{R}^2$ и гармонических функций с вещественными или комплексными значениями. Позже мы увидим, что оно распространяется на гармонические функции на $\mathbb{R}^n$ со значениями в произвольном банаховом пространстве $\vec{F}$. Точно так же каждая функция класса C^1 на $\mathbb{C}^n$ принадлежит классу C^∞. В частности, каждое дифференцируемое многообразие класса C^1 на $\mathbb{C}$ принадлежит классу C^∞.

Следствие 3 (теорема Мореры). *Каждая функция $\vec{f}$, определенная в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{G}$, непрерывная и такая, что интеграл $\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz$ равен нулю для любой C^∞-границы, лежащей в Ω, необходимо голоморфна.*

В самом деле, из теоремы 45 гл. VI следует, что непрерывная дифференциальная форма $\vec{f}\,dz$ является кограницей некоторой функции $\vec{F}$ класса C^1, определенной в Ω, со значениями в $\vec{G}$. Но тогда справедлива формула $d\vec{F}=\vec{f}(z)\,dz$, а следовательно, имеют место равенства $\partial\vec{F}/\partial\bar{z}=0$ и $\partial\vec{F}/\partial z=\vec{f}$, которые означают, что функция $\vec{F}$ C^1-голоморфна и что функция $\vec{f}$ является производной функции $\vec{F}$ относительно поля комплексных чисел. Но тогда, согласно теореме, функция $\vec{F}$ принадлежит классу C^∞ и, следовательно, ее первая производная $\vec{f}$ сама принадлежит этому классу над комплексным полем, т. е. голоморфна.

Замечания. 1°) Это как раз та теорема, о которой мы говорили в замечании 2°) к теореме 6: для непрерывных функций можно определить свойство голоморфности, не предполагая заранее никакой дифференцируемости.

2°) Можно также показать, что каждая $\mathbb{C}$-дифференцируемая на $\Omega\subset\mathbb{C}$ функция, а priori не принадлежащая классу C^1, голоморфна.

Следствие 4. *Каждая голоморфная комплекснозначная функция, не имеющая нулей в открытом односвязном множестве $\Omega\subset\mathbb{C}$, может быть представлена в виде $f(z)=e^{g(z)}$, где g — некоторая комплексная голоморфная функция в Ω.*

Доказательство. Очевидно, можно считать множество Ω связным, так как в противном случае рассуждения можно вести отдельно для каждой из его компонент. Поскольку функция f в нуль нигде не обращается и принадлежит классу C^1, то вполне определена функция f'/f, принадлежащая классу C^1, т. е. голоморфная. Так как множество Ω односвязно, то эта функция по теореме 7 имеет первообразную g. Функции f и e^g имеют одну и ту же логарифмическую производную f'/f. Поскольку множество Ω связно, то их отношение в силу замечания на стр. 788 гл. IV постоянно. Эту постоянную можно внести в показатель экспоненты, чем и заканчивается доказательство следствия.

Замечание. Сказанное означает, что *если функция f голоморфна и не обращается в нуль в односвязном открытом множестве Ω, то существуют голоморфные значения $\ln f$ в Ω.*

Следствие 5 (неравенства Коши). *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция в $\Omega\subset\mathbb{C}$, и пусть $M(a,\rho)$ — максимум $\|\vec{f}\|$ на окружности $|z-a|=\rho$ при $\rho<d(a, \complement\Omega)$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{\|\overrightarrow{f^{(n)}}(a)\|}{n!}\rho^n\leqslant M(a,\rho),\quad \text{в частности}\quad \|\vec{f}(a)\|\leqslant M(a,\rho). \qquad \text{(VII, 3; 2)}$$

Доказательство. Достаточно к окружности Γ: $|z-a|=\rho$ применить формулу (VII, 3; 1):

$$\|\vec{f}^{(n)}(a)\| = \left\| \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} M(a, \rho) \int_{\Gamma} ds = \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} M(a, \rho) \cdot 2\pi\rho =$$

$$= \frac{n!}{\rho^n} M(a, \rho). \quad \text{(VII, 3; 3)}$$

Замечания. 1°) Если взять разложение функции $\vec{f}$ по формуле Тейлора, то норма члена $\frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ на окружности $|z-a|=\rho$ равна $\frac{\|\vec{f}^{(n)}(a)\|}{n!}\rho^n$. Поэтому следствие 5 можно было бы сформулировать следующим образом: *член* $\frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ *разложения Тейлора мажорируем по норме на окружности* $|z-a|=\rho$ *максимумом* $M(a, \rho)$ *функции* $\|\vec{f}\|$ *на этой окружности.*

2°) Не следует думать, что *в каждой точке* z окружности норма функции $\vec{f}(z)$ не меньше нормы каждого из членов разложения Тейлора! Если мы рассмотрим, например, голоморфную функцию e^z, определяемую по формуле

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{(VII, 3; 4)}$$

то для $z=-\rho<0$ соотношение $e^{-\rho} \geqslant \frac{\rho^n}{n!}$ не имеет места. Мы утверждаем только, что *максимум* нормы функции $\vec{f}$ на окружности превосходит норму каждого из членов формулы Тейлора.

Обобщение неравенств Коши

Как обобщаются формулы Коши (VII, 3; 1) на случай $E=\mathbb{C}^n$, мы увидим позже. Однако уже сейчас можно обобщить на E некоторые из неравенств (VII, 3; 2).

Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega \subset E$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Пусть $a \in \Omega$ и число $\rho>0$ таковы, что замкнутый шар $B(a, \rho)$ с центром в точке a радиуса ρ лежит в Ω.

Для $x \in B(a, \rho)$ можно написать формулу Тейлора (см. (III, 7; 2)), в которой член порядка m имеет вид $\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(\overrightarrow{x-a})^m$. Этот член порядка m полностью вычисляется в аффинном подпространстве $E_{a,x}$ комплексной размерности 1, проходящем через точки a и x. Он же является членом порядка m в разложении Тейлора голоморфной функции g: $z \to \vec{f}(a + z(\overrightarrow{x-a}))$ при $z = 1$. Следовательно, к нему применима оценка (VII, 3; 2), которая дает неравенство

$$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (\overrightarrow{x-a})^m \right\| \leqslant M(a, x, \rho), \qquad \text{(VII, 3; 4}_2\text{)}$$

где $M(a, x, \rho)$ — максимум $\|\vec{f}\|$ на окружности с центром в точке a радиуса ρ в $E_{a,x}$. Тем более

$$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (\overrightarrow{x-a})^m \right\| = M(a, \rho), \qquad \text{(VII, 3; 4}_3\text{)}$$

где $M(a, \rho)$ — точная верхняя грань $\|f\|$ на сфере с центром в точке a радиуса ρ в E. Мы говорим точная верхняя грань, а не максимум, поскольку эта сфера в случае бесконечномерного пространства E некомпактна. Поэтому норма $\|\vec{f}\|$ может не достигать на ней своей точной верхней грани; она может быть даже неограниченной, так что $M(a, \rho) \leqslant +\infty$.

Напомним, что $f^{(m)}(a)$ является m-линейным непрерывным симметричным отображением $\vec{E}^m$ в $\vec{F}$. Поэтому для каждого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$ с нормой ρ и, следовательно, в силу однородности, для любого $\vec{X}$ из $\vec{E}$ имеет место неравенство

$$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \vec{X}^m \right\| \leqslant M(a, \rho) \left(\frac{\|\vec{X}\|}{\rho} \right)^m. \qquad \text{(VII, 3; 4}_4\text{)}$$

Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ — m произвольных векторов из $\vec{E}$ с нормой $\leqslant 1$. Для комплексных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ с модулями $\leqslant 1$ вектор $t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \ldots t_m\vec{X}_m$ имеет норму $\leqslant m$. Мы знаем также, что $f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)$ является коэффициентом при $t_1t_2 \ldots t_m$ в разложении $\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \ldots + t_m\vec{X}_m)^m$ (см. гл. III, доказательство леммы к теореме 21_2).

Однако векторное пространство полиномов относительно $t_1, t_2, \ldots, t_m$ степени $\leqslant m$ конечномерно. В конечномерном векторном пространстве все линейные формы непрерывны (см. начало § 13 гл. II). Следовательно, если через $u(P)$ обозначить коэффициент при $t_1t_2 \ldots t_m$ в таком полиноме P, то u будет линейной формой и, следовательно, будет иметь место неравенство

$$|u(P)| \leqslant c \max_{|t_i| \leqslant 1} |P(t_1, t_2, \ldots, t_m)|, \qquad (\text{VII}, 3; 4_5)$$

где c — подходящим образом подобранная постоянная. Позже мы увидим, что эта постоянная равна 1. Поскольку она не будет играть в дальнейшем существенной роли, то мы ее примем сейчас равной 1. Мы получаем неравенство

$$\left\|\vec{f}^{(m)}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)\right\| \leqslant M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m. \quad (\text{VII}, 3; 4_6)$$

Переходя к точной верхней грани относительно $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ с нормами $\leqslant 1$, получим искомое обобщение неравенств Коши.

Следствие 5_2. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Если шар $B(a, \rho)$ лежит в Ω, то справедливы следующие неравенства:*

$$\left\|\vec{f}^{(m)}(a)\right\| \leqslant M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m,$$

или

$$\vec{f}^{(m)}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)\| \leqslant \|\vec{X}_1\| \ldots \|\vec{X}_m\| M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m, (\text{VII}, 3; 4_7)$$

где $M(a, \rho) \leqslant +\infty$ является точной верхней гранью $\|\vec{f}\|$ на сфере с центром в точке a и радиусом ρ.

Замечание. Эти неравенства хуже, чем соответствующие неравенства при $E = \mathbb{C}$, поскольку $m^m > m!$ при $m \geqslant 2$.

Следствие 6 (теорема о строгом максимуме). *Пусть E — аффинное нормированное пространство над $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть Ω — открытое множество в E и $\vec{f}$ — голоморфная функция на Ω со значениями в $\vec{F}$. Тогда $\|\vec{f}\|$ не может иметь в точке $a \in \Omega$ относительный строгий максимум.*

Доказательство. Если E является полем комплексных чисел, то это утверждение непосредственно вытекает из оценки (VII, 3; 2) при $n = 0$. Это неравенство показывает, что если $\rho < d(a, \complement\Omega)$, то на окружности $|z - a| = \rho$ найдется хотя бы одна точка z_0, такая, что $\|\vec{f}(z_0)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$.

В случае любого E достаточно рассмотреть произвольное аффинное подпространство E_1 из E комплексной размерности 1, содержащее a. Пусть $b \in E_1$, $b \neq a$. Тогда биекция $z \to a + z\overrightarrow{(b-a)}$ отождествляет E_1 с комплексным полем $\mathbb{C}$, точку $a \in E_1$ с точкой $0 \in \mathbb{C}$, множество $\Omega \cap E_1 = \Omega_1$ с открытым множеством $\tilde{\Omega}_1$ из $\mathbb{C}$, и, следовательно, можно рассматривать сужение $\vec{f}_1$ функции $\vec{f}$ на множество Ω_1 как некоторую функцию $\tilde{\vec{f}}_1$ на открытом множестве $\tilde{\Omega}_1$ из $\mathbb{C}$. Отсюда для каждого $\rho < d(0, \complement\tilde{\Omega}_1)$ вытекает существование такой точки z_0, $|z_0| = \rho$, что $\|\tilde{\vec{f}}_1(z_0)\| \geqslant \|\tilde{\vec{f}}_1(0)\|$, а следовательно, такой точки $c_0 = a + z_0\overrightarrow{(b-a)}$ из $\Omega_1 \subset \Omega$, $d(a, c_0) = \rho\, d(a, b)$, что $\|\vec{f}(c_0)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$, откуда и следует требуемый результат.

Замечание. Естественно поставить вопрос: будет ли справедливым это же следствие с «относительным максимумом в широком смысле» вместо «относительно строгого максимума», если исключить, конечно, постоянные функции? Если пространство $\vec{F}$ произвольно, то такое утверждение неверно. Пусть, например, пространство $\vec{F} = \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, снабжено нормой

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\| = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|). \quad \text{(VII, 3; 5)}$$

Пусть $\vec{f}$: $z \to (a, a, \ldots, a, z)$, $a \neq 0$, — функция, определенная на $\mathbb{C}$. Эта функция не постоянна, но ее норма постоянна и равна $|a|$ для $|z| \leqslant |a|$.

Однако если F является полем комплексных чисел (или, более общо, если оно имеет размерность 1), то возможно некоторое обобщение. Это мы увидим ниже после рассмотрения свойств аналитичности (следствие 1 теоремы 12).

Разложение в ряд Тейлора

Теорема 11. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, и пусть a — некоторая точка Ω. Обозначим через Δ наибольший открытый круг с центром в точке a, содержащийся в Ω. Пусть R — его радиус. Тогда $\vec{f}$ может быть разложена в ряд Тейлора*

$$\vec{f}(z) = \vec{f}(a) + (z-a)\vec{f}'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}\vec{f}^{(n)}(a) + \ldots, \quad \text{(VII, 3; 6)}$$

абсолютно сходящийся в Δ и нормально сходящийся в каждом круге с центром a радиуса $< R$.

Доказательство. В самом деле, имеет место разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \qquad \text{(VII, 3; 7)}$$

справедливое для $|z-a| < |\zeta - a|$.

Пусть теперь R' и R'' — два таких вещественных числа, что $0 < R' < R'' < R$. Напишем интегральную формулу Коши для $|z-a| \leqslant R'$ относительно окружности Γ с центром в точке a радиуса R''.

Формула (VII, 3; 7) наводит на мысль написать равенство

$$\vec{f}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \qquad \text{(VII, 3; 8)}$$

Остается лишь обосновать перестановку знаков $\sum$ и $\int$.

Для того чтобы получить интеграл относительно меры $ds \geqslant 0$, можно везде заменить $d\zeta$ на $\frac{d\zeta}{ds} ds$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right| = 1$. Тогда такая перестановка будет возможной, лишь бы только при замене всех входящих в соотношение функций на их нормы одна из двух частей имела конечное значение (теорема 37 гл. IV).

Если через $M(a, R'')$ мы обозначим максимум нормы $\vec{f}$ на окружности с центром в a радиуса R'', то будет справедлива оценка

$$\left\| (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right\| \leqslant \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \cdot \frac{M(a, R'')}{2\pi} \qquad \text{(VII, 3; 9)}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \frac{M(a, R'')}{2\pi} \int_{\Gamma} ds = M(a, R'') \frac{R''}{R'' - R'} < +\infty,$$

откуда следует, что в рассматриваемых нами условиях перестановка допустима. Соотношение (VII, 3; 1) теперь говорит о том, что равенство (VII, 3; 8) эквивалентно разложению (VII, 3; 6). Кроме того, полученный ряд нормально сходится для $|z-a| \leqslant R'$, так как он мажорируется сходящейся числовой геометрической прогрессией.

Аналитические функции. Мы знаем, что в поле вещественных чисел ряд Тейлора некоторой функции класса C^{∞} может расходиться в окрестности точки a и что, если даже он сходится, то не обязательно представляет функцию $\vec{f}$ (см., например, стр. 455 гл. IV).

Напротив, мы только что видели, что если E является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и если функция $\vec{f}$ $\mathbb{C}$-дифференцируема, то сходимость ее ряда Тейлора и представимость им функции гарантированы. Более того, *ряд Тейлора сходится во всяком круге, в котором функция голоморфна.*

Пусть f — функция на открытом множестве Ω аффинного нормированного пространства E со значениями в аффинном нормированном пространстве F над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Говорят, что функция f *$\mathbb{K}$-аналитична*, если она принадлежит классу C^∞ и если для любой точки a существует такая ее окрестность $\mathscr{V}$ в Ω, что в $\mathscr{V}$ функция f представима в виде ряда Тейлора

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(\overrightarrow{x-a})+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(\overrightarrow{x-a})^n+\ldots. \quad \text{(VII,3; 10)}$$

Любая $\mathbb{C}$-аналитическая функция тем более $\mathbb{R}$-аналитична.

Следствие 1. *Пусть E — нормированное аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\vec{F}$ — пространство Банаха над полем $\mathbb{C}$. Тогда каждая голоморфная функция f на $\Omega\subset E$ со значениями в $\vec{F}$ $\mathbb{C}$-аналитична.*

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{B}(a, \rho)$ — открытый шар с центром в a, содержащийся в Ω. Тогда для $x\in B(a, \rho)$ функция $\vec{g}$: $z\to\vec{f}(a+z(\overrightarrow{x-a}))-\vec{f}(a)$ со значениями в $\vec{F}$ определена для $|z|<\frac{\rho}{\|\overrightarrow{x-a}\|}$ (последняя величина >1) и принадлежит классу C^∞ относительно поля $\mathbb{C}$, т. е. голоморфна. Из теоремы 11 следует, что ее ряд Тейлора по степеням z сходится для $z=1$. Так как $\vec{g}^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)\cdot(\overrightarrow{x-a})^n$, то ряд Тейлора функции $\vec{f}$ сходится в точке $x\in B(a, \rho)$.

Следствие 2. *Каждая гармоническая вещественная или комплексная функция, определенная в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-аналитична.*

Достаточно в этом убедиться для случая вещественной функции. Но такая функция, согласно теореме 4, является вещественной частью некоторой голоморфной функции.

Замечание. Этот вывод справедлив для каждой гармонической функции в конечномерном евклидовом пространстве над полем $\mathbb{R}$ со значениями в произвольном банаховом пространстве.

Следствие 3. *Каждая голоморфная функция, заданная в открытом связном множестве Ω поля $\mathbb{C}$, со значениями в $\vec{F}$, равная нулю вместе со всеми своими производными в точке $a \in \Omega$, тождественно равна нулю в Ω.*

Доказательство. Поскольку функция $\vec{f}$ в окрестности точки $a \in \Omega$ представима в виде ряда Тейлора, то она равна нулю всюду в некоторой окрестности точки a. Обозначим через $\mathscr{E}$ множество точек, в которых функция $\vec{f}$ вместе со своими последовательными производными обращается в нуль. Это множество замкнуто как пересечение замкнутых множеств $\{z \in \Omega; \overrightarrow{f^{(n)}}(z) = \vec{0}\}$. Однако мы только что видели, что это множество также и открыто. Поскольку оно содержит по крайней мере одну точку $a \in \Omega$ и Ω связно, то оно совпадает со всем множеством Ω.

В частности, справедливо

Следствие 4. *Каждая функция, голоморфная в связном множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ и равная нулю в некотором открытом непустом подмножестве из Ω, равна нулю во всем множестве Ω.*

Следствия 3 и 4 допускают несколько обобщений. Например:

Следствие 5. 1°) *Пусть E и F — нормированные аффинные пространства над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω — открытое связное множество из E, f — $\mathbb{K}$-аналитическая функция на Ω со значениями в F. Если все последовательные производные функции f порядка $\geqslant 1$ равны нулю в некоторой точке $a \in \Omega$ или если функция f постоянна в непустом открытом подмножестве множества Ω, то функция f постоянна в Ω.*

2°) *Пусть E — нормированное пространство над $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$ и $\Omega \subset E$ — связное множество. Тогда каждое голоморфное отображение $\vec{f}$ множества Ω в $\vec{F}$, имеющее последовательные производные, равные нулю в некоторой точке $a \in \Omega$, или постоянное в некотором непустом открытом подмножестве множества Ω, постоянно в Ω.*

3°) *Пусть V — связное голоморфное многообразие комплексной размерности n. Тогда каждая голоморфная функция $\vec{f}$ на V со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, постоянная в некотором непустом открытом множестве $\omega \subset V$, постоянна на V.*

4°) *Пусть V и W — два голоморфных многообразия размерности m и n, причем многообразие V связно. Тогда каждое голоморфное отображение $\vec{f}$ из V в W, постоянное в некотором непустом открытом множестве $\omega \subset V$, постоянно на V.*

Доказательство. Доказательство утверждения 1°) совпадает с доказательством следствия 3: здесь мы используем только тот факт, что каждая функция, голоморфная на некотором открытом множестве Ω из $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-аналитична. Утверждение 2°) вытекает из 1°) и следствия 1. Утверждения 3°) и 4°) доказываются аналогичным способом. Рассмотрим, например, утверждение 4°). Пусть $\mathscr{E}$ — множество точек из V, каждая из которых имеет окрестность, в которой функция $\vec{f}$ постоянна и равна $\vec{f}(\omega)$. Тогда множество $\mathscr{E}$ открыто по определению и непусто по предположению. Докажем, что оно замкнуто. Пусть b_l — некоторая последовательность точек из $\mathscr{E}$, стремящихся к точке $b \in V$ при l, стремящемся к бесконечности. Выбирая карты окрестностей точек b в V и $\vec{f}(b)$ в W, мы сведем дело к случаю, когда V является открытым множеством Ω аффинного нормированного пространства E, а W является банаховым пространством $\vec{F}$, где E и $\vec{F}$ конечномерны.

Снимая теперь предположение о конечной размерности, можно одновременно доказать и утверждение 3°). Пусть $B(b, R)$ — шар с центром в точке b, содержащийся в Ω. Для достаточно больших значений l точка b_l лежит в шаре $B(b, R/3)$. Но тогда, поскольку функция $\vec{f}$ равна $\vec{f}(\omega)$ в окрестности точки b_l, она будет принимать, согласно следствию 1, то же значение в каждом шаре с центром в b_l, содержащемся в Ω, а следовательно, в шаре $B(b_l, 2R/3) \subset B(b, R) \subset \Omega$. То же значение эта функция примет также и в шаре $B(b, R/3) \subset B(b_l, 2R/3)$, а тогда $b \in \mathscr{E}$, что означает замкнутость $\mathscr{E}$. Поскольку V связно, то $\mathscr{E} = V$, чем и доказываются утверждения 3°) и 4°).

Замечание. Конечно, если заменить $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$, то ничего аналогичного утверждениям 2°), 3°), 4°) следствия 5 не получится. Например, в теореме 11 гл. IV мы построили бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Эти функции равны нулю на непустом открытом множестве из $\mathbb{R}^n$, но тождественно в нуль не обращаются.

Следствие 6. *Если $\vec{f}$ является голоморфной функцией в связном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ и если она обращается в нуль на некоторой последовательности различных точек $a_1, a_2, \ldots$, сходящейся при n, стремящемся к бесконечности, к некоторой точке $a \in \Omega$, то функция $\vec{f}$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Достаточно показать, что все последовательные производные функции $\vec{f}$ в точке a равны нулю, так как тогда мы окажемся в условиях следствия 3. Предположим, что это не так. Функция $\vec{f}$ в окрестности точки a имеет вид $\vec{c}_k (z-a)^k + O(|z-a|^{k+1})$ при $z \to a$, $\vec{c}_k \neq \vec{0}$; k есть порядок первой не обращающейся в нуль производной в a. Теперь видно, что $\frac{\vec{f}(z)}{(z-a)^k}$ стремится к $\vec{c}_k$ при z, стремящемся к a, а следовательно, для достаточно малых $|z-a|$ в нуль не обращается, что противоречит предположению.

Замечание. Тот же вывод сохранится, если предположить лишь, что $\vec{f}(a_i)=\vec{0}$ для некоторого бесконечного множества точек a_i связного множества Ω, содержащихся в компакте K из Ω. Действительно, в таком случае из этого множества можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Тот же результат получается в случае, когда $\vec{f}$ обращается в нуль на некоторой дуге кривой, содержащейся в Ω, например на отрезке вещественной оси.

В противоположность следствиям 3 и 4 настоящее утверждение не обобщается на случай, когда $\mathbb{C}$ заменяется на $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Например, функция $(z_1, z_2) \to z_1$, действующая из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}$, голоморфна, обращается в нуль на векторном подпространстве $z_1 = 0$, но тождественно нулю не равна.

Если $\vec{c}_k (z-a)^k$ есть первый ненулевой член ряда Тейлора для функции $\vec{f}$ в точке a, то говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a кратный нуль порядка k. Каждая голоморфная в открытом связном множестве Ω функция, равная нулю в точке a, имеет в этой точке кратный нуль порядка k, где k — целое число $\geqslant 1$, за исключением того случая, когда она тождественно равна нулю.

Теорема 12 (теорема о среднем). *Если $\vec{f}$ — определенная в $\Omega \subset \mathbb{C}$ голоморфная функция со значениями в $\vec{F}$ или гармоническая вещественная или комплексная функция, то ее значение в произвольной точке $a \in \Omega$ является средним из ее значений на произвольной окружности Γ с центром в точке a, такой, что ограничиваемый ею круг целиком содержится в Ω.*

Доказательство. Искомая формула для голоморфной функции есть просто интегральная формула Коши (VII, 2; 9), примененная к контуру Γ. В самом деле, если для точек z

из Ω положить $z = a + \rho e^{i\theta}$, то получается, что

$$\vec{f}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \overrightarrow{f(a + \rho e^{i\theta})} d\theta. \qquad \text{(VII, 3; 10}_2\text{)}$$

Считая $F = \mathbb{C}$ и отделяя вещественную и мнимую части P и Q, получаем

$$P(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} P(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad Q(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} Q(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta. \qquad \text{(VII, 3; 10}_3\text{)}$$

Это справедливо для любой функции P, являющейся в окрестности точки a вещественной частью некоторой голоморфной функции, т. е., согласно теореме 4, для произвольной гармонической вещественной функции на $\mathbb{R}^2$. Но тогда это же справедливо и для произвольной гармонической комплексной функции на $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Теорема остается в силе для произвольной гармонической функции, заданной на открытом множестве конечномерного аффинного евклидового пространства над $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ над $\mathbb{R}$. Надо только окружности и круги заменить на сферы и шары.

Можно доказать также, что эта теорема характеризует гармонические функции:

Если $\vec{f}$ — непрерывная функция на открытом множестве Ω конечномерного аффинного евклидова пространства со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ и если ее значение в каждой точке $a \in \Omega$ равно ее среднему значению на произвольной сфере Σ с центром в точке a достаточно малого радиуса, то $\vec{f}$ необходимо принадлежит классу C^∞ (относительно поля вещественных чисел) в Ω и является гармонической функцией: $\Delta\vec{f} = \vec{0}$.

Это свойство может быть принято за определение гармонических функций, не требующее существования ни одной производной.

Теорема о среднем дает возможность получить теорему об относительном максимуме в широком смысле.

Следствие 1. *Если P — вещественная гармоническая функция в открытом связном множестве Ω из $\mathbb{R}^2$, то эта функция P может иметь относительный максимум или минимум* *в широком смысле в некоторой точке a только тогда, когда она постоянна в Ω.*

Доказательство. Предположим, например, что функция P имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Это означает существование такого числа ρ, что для $|z-a| \leqslant \rho$ имеет место неравенство

$$P(z) \leqslant P(a). \qquad \text{(VII, 3; 11)}$$

Запишем теорему о среднем в виде

$$\int_0^{2\pi} (P(a) - P(a + re^{i\theta}))\, d\theta = 0, \quad r \leqslant \rho. \qquad \text{(VII, 3; 12)}$$

Мы имеем функцию $\geqslant 0$, интеграл от которой равен нулю. Из теоремы 26 гл. IV вытекает, что она $d\theta$-почти всюду равна нулю. Поскольку, однако, она непрерывна, она равна нулю для любого значения θ. Так как это справедливо при любом $r \leqslant \rho$, то функция P постоянна в окрестности точки a. Поскольку функция P $\mathbb{R}$-аналитична (следствие 2 теоремы 11), то она постоянна в Ω (следствие 5 теоремы 11).

Замечание. Это утверждение сохраняет силу и в случае $\mathbb{R}^n$.

Следствие 2. *Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если f — комплекснозначная голоморфная функция на связном множестве $\Omega \subset E$ и если в некоторой точке a ее вещественная или мнимая часть имеет относительный максимум или минимум в широком смысле, то эта функция f постоянна в Ω.*

В самом деле, если $E = \mathbb{C}$, то в силу следствия 1 мнимая или вещественная часть рассматриваемой функции постоянна. Согласно теореме 4, если одна из этих частей постоянна, то такой же будет и другая.

Если E — произвольное нормированное пространство, то следует рассмотреть аффинные подпространства комплексной размерности 1, содержащие точку a, как, например, в следствии 1 теоремы 11. При этом получится, что функция f постоянна в каждом шаре с центром в точке a, лежащем в Ω, а значит, в силу следствия 5 теоремы 11 во всем множестве Ω.

Если E — многообразие, то с помощью карты некоторой окрестности точки a можно перейти к случаю $E = \mathbb{C}^n$. После этого следует воспользоваться следствием 5 теоремы 11.

Следствие 3. *Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если f — комплекснозначная голоморфная функция в связном множестве Ω и если в точке a ее модуль имеет относительный максимум в широком смысле, то f постоянна.*

Доказательство. Пусть сначала $E = \mathbb{C}$. Предположим, что $|f|$ имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Если $f(a) = 0$, то отсюда следует, что f равна нулю в окрестности точки a, а значит, в силу следствия 4 теоремы 11 тождественно равна нулю. В противном случае можно было бы найти такой круг Δ с центром в точке a, содержащийся в Ω, в котором функция f нигде бы в нуль не обращалась.

Поскольку этот круг односвязен, то в нем можно найти некоторое голоморфное значение $\ln f(z)$ (следствие 4 теоремы 10)[1]. Из исходного предположения следует, что вещественная часть этой функции, равная $\ln|f(z)|$, имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Отсюда вытекает, что функция $\ln f$ постоянна в круге и, следовательно, рассматриваемая функция f постоянна в нем, а значит, в силу следствия 4 теоремы 11 постоянна во всем множестве Ω. К случаю произвольного пространства E можно перейти точно так же, как и выше.

Следствие 4. *Пусть E — нормированное аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если комплексная функция f голоморфна в связном множестве $\Omega \subset E$ и если ее модуль имеет в точке $a \in \Omega$ относительный минимум в широком смысле, то либо $f(a) = 0$, либо f постоянна в Ω.*

Доказательство. В самом деле, если $f(a) \neq 0$, то можно, как и в предыдущем следствии, рассмотреть функцию $\ln f(z)$ и с ее помощью получить тот же вывод, а именно что f постоянна в Ω.

Замечание. Возможность $f(a) = 0$ не исключается. В этом случае, очевидно, функция $|f|$ будет иметь минимум в широком смысле в точке a, а это не влечет за собой того, что функция f постоянна.

Следствие 5 (теорема Даламбера). *Любой полином степени m с комплексными коэффициентами от одной переменной имеет равно m корней в $\mathbb{C}$, если считать каждый корень с порядком его кратности.*

[1] Это, впрочем, очевидно и непосредственно, если только круг Δ достаточно мал!

Доказательство. Точно так же, как это делалось в теореме 30 гл. II, достаточно доказать, что существует при $m \geqslant 1$ хотя бы один корень. Так же, как и в гл. II, можно будет найти такую окружность с центром в точке 0 радиуса R, чтобы имело место неравенство $|P(z)| \geqslant |P(0)|$ для $|z| \geqslant R$. Тогда функция $|P|$ на компакте $|z| \leqslant R$ имеет минимум в некоторой точке a, который, как мы видели в гл. II, будет минимумом для всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Так как функция P не постоянна,то в силу следствия 4 $P(a) = 0$, чем и доказывается данная теорема.

Заметим, что приведенное здесь исключительно короткое доказательство очень близко к тому, которое мы давали в гл. II. Метод, с помощью которого мы сейчас доказали, что точка a не может давать минимум модулю, является вариантом доказательства следствия 4, основанным не на теореме о среднем, а на формуле Тейлора.

Следствие 6. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфное отображение $\Omega \subset E$ в $\vec{F}$, определенное и непрерывное на $\overline{\Omega}$. Будем считать, кроме того, множество Ω ограниченным. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{x \in \Omega} \|\vec{f}(x)\| = \sup_{x \in \dot{\Omega}} \|\vec{f}(x)\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(VII, 3; 12}_2\text{)}$$

Если E конечномерно, то функция f достигает своего максимума хотя бы в одной точке границы $\dot{\Omega}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $E = \mathbb{C}$. Тогда множество $\overline{\Omega}$ будет замкнутым и ограниченным, т. е. будет некоторым компактом. Но тогда функция $\|\vec{f}\|$ будет достигать своего максимума в $\overline{\Omega}$. Если этот максимум достигается в некоторой точке $\dot{\Omega}$, то следствие доказано. В противном случае точка, в которой $\|\vec{f}\|$ достигает максимума, принадлежит Ω. Согласно теореме 12 о среднем, для круга с центром в точке a радиуса ρ, содержащегося в Ω, имеет место соотношение

$$M = \|\vec{f}(a)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\| \, d\theta,$$

или $\qquad$ (VII, 3; 12$_3$)

$$\int_0^{2\pi} (\|\vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\| - M) \, d\theta \geqslant 0.$$

Здесь мы имеем функцию $\leqslant 0$, интеграл от которой $\geqslant 0$. Рассуждая точно так же, как в следствии 1, получаем, что $\|\vec{f}\| = M$ во всем круге с центром в точке a, содержащемся в Ω.

Пусть $\mathscr{E}$ — множество точек из Ω, в которых $\|\vec{f}(z)\| = M$. Это множество очевидным образом замкнуто, непусто и, как мы только что видели, открыто. Следовательно, оно содержит всю компоненту связности Ω_a точки a в Ω. Но тогда по непрерывности $\|\vec{f}\| = M$ на $\overline{\Omega}_a$. Множество $\dot{\Omega}_a$ непусто, так как в противном случае связное множество $\mathbb{C}$ было бы объединением двух открытых непустых непересекающихся множеств Ω_a и $\complement\overline{\Omega}_a$ ($\complement\overline{\Omega}_a$ непусто, так как множество Ω ограничено). Точка $b \in \dot{\Omega}_a$ лежит также в $\dot{\Omega}$, и $\|\vec{f}(b)\| = M$. Максимум функции $\|\vec{f}\|$ в $\overline{\Omega}$, если даже он достигается в точке $a \in \Omega$, будет также достигаться хотя бы в одной точке b границы $\dot{\Omega}$. Этим, очевидно, доказано равенство (VII, 3; 12_2). В самом деле, так как каждая точка границы $\dot{\Omega}$ является пределом точек Ω, то $\sup\limits_{z \in \dot{\Omega}} \leqslant \sup\limits_{z \in \Omega}$. Но так как максимум достигается в некоторой точке $\dot{\Omega}$, то $\sup\limits_{z \in \Omega} \leqslant \sup\limits_{z \in \dot{\Omega}}$, т. е. $\sup\limits_{z \in \Omega} = \sup\limits_{z \in \dot{\Omega}}$. В свою очередь $\sup\limits_{z \in \overline{\Omega}} \Omega$ равен наибольшему из двух других, т.е. равен этим же величинам.

Если пространство E конечномерно, то множество $\overline{\Omega}$ компактно, и тогда $\|\vec{f}\|$ достигает своего максимума в некоторой точке a. Если эта точка $a \in \Omega$, то можно будет провести всевозможные сечения аффинными подпространствами комплексной размерности 1, проходящие через точку a, и тогда норма $\|\vec{f}\|$ снова будет равна M на каждом шаре с центром в точке a, содержащемся в Ω, а следовательно, и в Ω_a, и то же самое рассуждение показывает, что максимум достигается по крайней мере в одной точке b из $\dot{\Omega}$.

Если E бесконечномерно, то положение будет совсем иным. Множество $\overline{\Omega}$ теперь не компактно, а sup больше не является максимумом. Более того, норма $\|\vec{f}\|$ может быть неограниченной и может принимать значение $+\infty$. Как всегда, имеем $\sup\limits_{x \in \dot{\Omega}} \leqslant \sup\limits_{x \in \Omega}$. Однако если $a \in \Omega$, то можно провести сечение с помощью аффинного подпространства комплексной размерности 1, проходящее через a, и внутри него найти такую точку $b \in \dot{\Omega}$, что $\|\vec{f}(b)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$. Таким образом, $\sup\limits_{x \in \Omega} \leqslant \sup\limits_{x \in \dot{\Omega}}$, чем и доказывается утверждение (VII, 3; 12_2) в общем случае.

Замечание 1. Из доказательства следует, что если множество Ω связно и норма $\|\vec{f}\|$ не постоянна (т. е. при $F=\mathbb{C}$ не постоянна функция f), то точная верхняя грань *не может достигаться* ни в одной точке Ω.

Замечание 2. Результат можно улучшить, а именно не предполагать, что $\vec{f}$ определена на $\overline{\Omega}$. Положим в каждой точке $\dot{\Omega}$

$$M(a)=\lim_{x\to a}\sup\|\vec{f}(x)\|=\lim_{\rho\to 0}\sup_{x\in\Omega\cap B(a,\rho)}\|\vec{f}(x)\|.$$

Тогда *для функции $\vec{f}$ класса C^1 в ограниченном множестве Ω имеем*

$$\sup_{x\in\Omega}\|\vec{f}(x)\|=\sup_{x\in\dot{\Omega}}M(x). \qquad \text{(VII, 3; 12}_4\text{)}$$

В самом деле, функция, равная $\|\vec{f}\|$ в Ω и M в $\dot{\Omega}$, очевидно, полунепрерывна сверху. Следовательно, для пространства $E=\mathbb{C}$ или для конечномерного пространства E она достигает максимума в $\overline{\Omega}$. Далее доказательство завершается, как и ранее. Если $\vec{f}$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то M равна $\|\vec{f}\|$ на $\dot{\Omega}$, и мы приходим к (VII, 3; 12_2) точно так же, как в частном случае (VII, 3; 12_4).

Замечание 3. Следствие существенно опирается на компактность множества $\overline{\Omega}$ для конечномерного пространства E. *Оно неверно, если множество Ω неограничено.* В самом деле, рассмотрим, например, в $\mathbb{C}$ открытое множество

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z>0\},\quad \text{где}\quad \overline{\Omega}=\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z\geqslant 0\}.$$

Функция e^z неограничена в Ω, и в то же время ее модуль на $\dot{\Omega}$ равен 1.

Вместо (VII, 3; 12_2) в этом случае можно получить другое соотношение. Если множество Ω неограничено, то можно ввести «бесконечно удаленную точку» $\omega\in\dot{\Omega}$ и положить

$$M(\omega)=\lim_{\|\overrightarrow{x-x_0}\|\to+\infty}\sup\|\vec{f}(x)\|=\lim_{\rho\to+\infty}\sup_{\|\overrightarrow{x-x_0}\|\geqslant\rho}\|\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(VII, 3; 12}_5\text{)}$$

Тогда будет иметь место равенство

$$\sup_{x\in\Omega}\|\vec{f}(x)\|=\max\left(\sup_{x\in\dot{\Omega}}M(x),\ M(\omega)\right). \qquad \text{(VII, 3; 12}_6\text{)}$$

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим снова $E=\mathbb{C}$. Множество $\dot{\Omega}\cup\{\omega\}$ в подходящей топологии будет компактным, и можно будет повторить то, что было сказано в замечании 2.

Так, в только что приведенном примере функции e^z имеем

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)|=+\infty,\quad \sup_{z\in\dot{\Omega}}|f(z)|=1,\quad M(\omega)=+\infty.$$

Замечание 4. Из предыдущего вытекает, что рассматривавшаяся уже много раз величина $M(a, \rho)$ — точная верхняя грань функции $\|\vec{f}\|$ на сфере с центром в точке a радиуса ρ — равна точной верхней грани функции $\|\vec{f}\|$ в шаре с центром в точке a радиуса ρ. Поэтому ясно, что она является возрастающей функцией ρ (даже строго возрастающей для конечномерного E и $F=\mathbb{C}$, кроме случая, когда f постоянна в связной компоненте точки a в Ω; в самом деле, если $M(a, \rho_1)=$ $=M(a, \rho_2)$, то в силу компактности сферы существует точка сферы радиуса ρ_2, являющаяся точкой относительного максимума в широком смысле для функции $|f|$, а значит, в силу следствия 3 функция f постоянна).

Следствие 6_2. *Если $F=\mathbb{C}$ и функция f нигде не обращается в нуль, то справедливы те же утверждения, что и в следствии* 6, *где* max *надо заменить на* min, *а* sup *на* inf.

В самом деле, достаточно провести рассуждение с функцией $1/f$.

Если функция f в некоторой точке $a\in\Omega$ обращается в нуль, то результат, очевидно, не сохранится, так как в этом случае $|f|$ достигает абсолютного максимума 0 в точке a, в то время как на множестве $\dot{\Omega}$ ее точная нижняя грань, вообще говоря, >0.

Если $\vec{F}\neq\mathbb{C}$, то даже в том случае, когда $\vec{f}$ нигде не обращается в нуль, утверждения этого следствия не сохраняются.

Рассмотрим, например, функцию $z\to(a, a, \ldots, a, z)$ (см. стр. 350) на множестве $\overline{\Omega}$, где Ω — круг $|z|<2|a|$. Ее норма достигает своего минимума $|a|$ во всех точках круга $|z|\leqslant a$, но не на границе $\dot{\Omega}$ (окружности $|z|=2|a|$), где она равна $2|a|$.

Следствие 7. *Пусть V — связное компактное голоморфное многообразие. Каждая голоморфная функция $\vec{f}$ на V со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ постоянна.*

Доказательство. Функция $\|\vec{f}\|$, непрерывная на компакте V, достигает своего максимума M. Множество $\mathscr{E}$ точек из V, в которых $\|\vec{f}\|$ равна M, непусто и замкнуто, а из доказательства предыдущего следствия с применением карт видно, что оно открыто. Поскольку множество V связно, то это значит, что $\mathscr{E}=V$ и $\|\vec{f}\|$ постоянна на V. То же самое имеет место для любой функции $\|\vec{f}-\vec{c}\|$, где $\vec{c}\in\vec{F}$. Если a и b — две различные точки V, то функция $\|\vec{f}-\vec{f}(a)\|$ постоянна на V и равна нулю в точке a, т. е. $f(b)=f(a)$. Другими словами, функция f постоянна на V.

Замечание. Этим показано, что каждое голоморфное компактное связное многообразие размерности >0 «абстрактно». Оно не может быть подмногообразием пространства $\mathbb{C}^N$. В противном случае каждая из координатных функций $z_1, z_2, \ldots, z_N$, голоморфная на V, была бы постоянной на V и множество V свелось бы к одной точке.

Следствие 8 (оценка производных функции f в Ω, использующая оценку функции $\|\vec{f}\|$ на $\dot{\Omega}$). *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega\subset E$ со значениями в $\vec{F}$, определенная и непрерывная на $\overline{\Omega}$. Будем считать множество Ω ограниченным. Тогда справедливы неравенства* (*для* $x\in\Omega$)

$$\|f^{(m)}(x)\|\leqslant M\left(\frac{m}{d(x)}\right)^m \quad \left(\text{или } M\frac{m!}{(d(x))^m}, \text{ если } E=\mathbb{C}\right), \quad (\text{VII}, 3; 13)$$

где $d(x)$ — расстояние от точки x до границы $\dot{\Omega}$ и $M=\sup\limits_{x\in\dot{\Omega}}\|\vec{f}(x)\|$.

Доказательство. Пусть $\rho<d(x)$. Тогда шар $B(a, \rho)$ лежит в Ω и справедливо неравенство (VII, 3; 4_7) или (VII, 3; 3), если $E=\mathbb{C}$ (где a заменено на x). Однако в силу следствия 6 $M(a, \rho)\leqslant M$. Поэтому, устремляя ρ к $d(x)$, получаем нужный результат.

Замечание 1. Как и в использованном нами следствии 6, множество Ω дожно быть ограниченным.

Замечание 2. Оценка $\|\vec{f}\|$ на границе $\dot{\Omega}$ дает хорошую оценку последовательных производных только для точек Ω, не слишком близких к границе ($d^m(x)$ находится в знаменателе!). *Равномерной оценки производных во всем множестве Ω не существует.*

Рассмотрим, например, функцию, определенную в круге $\overline{\Omega}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant 1\}$ по формуле $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Нормальная сходимость ряда обеспечивается непрерывностью функции $\vec{f}$ в $\overline{\Omega}$, а нормальная сходимость ряда из производных во всем круге $|z| \leqslant \rho < 1$ обеспечивается голоморфностью $\vec{f}$ в $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Однако $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = -\frac{1}{z}\ln(1-z)$ является функцией, неограниченной в Ω (ее модуль стремится к бесконечности при z, стремящемся к 1). Не следует быть слишком требовательным. Очень хорошо уже и то, что оценки для функции $\vec{f}$ позволяют оценить ее производные!

С л е д с т в и е 9. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ или гармоническая функция в Ω с вещественными или комплексными значениями. Пусть Δ — круг с центром в точке a радиуса R, содержащийся в Ω. Тогда $\vec{f}(a)$ равняется среднему значению $\vec{f}$ в Δ:*

$$\vec{f}(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{\Delta} \vec{f}(z)\, dx\, dy. \qquad \text{(VII, 3; 14)}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно, так как двойной интеграл равен

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_0^R \rho\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} \vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_0^R \rho\, d\rho\, 2\pi \vec{f}(a) = \vec{f}(a). \qquad \text{(VII, 3; 14}_2\text{)}$$

Это следствие представляется не столь интересным, как сама теорема, но иногда оно более полезно. Например (как и сама теорема 12), оно обобщается очевидным образом на гармонические функции на конечномерном евклидовом пространстве на $\mathbb{R}$ со значениями в произвольном банаховом пространстве $\vec{F}$. Там будет справедливым и обратное утверждение: каждая функция, обладающая в шарах этим свойством осреднения, будет гармонической. *Но существование среднего значения требует лишь локальной интегрируемости функции $\vec{f}$ относительно меры Лебега.* Следовательно, можно определить гармонические функции, исходя только из локальной интегрируемости. (Впрочем, теория распределений дает еще лучшие возможности.)

Вот другой непосредственный вывод из следствия 9:

Следствие 9_2. *Пусть выполнены условия следствия 9. Тогда справедлива оценка*

$$\|\vec{f}(a)\| \leqslant \left(\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{\Delta}\|\vec{f}(z)\|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}},\qquad 1\leqslant p\leqslant+\infty. \quad (\text{VII}, 3; 14_3)$$

Если для каждого компакта $K\subset\Omega$ некоторая последовательность функций $\vec{f}_n$ сходится к $\vec{0}$ локально в L^p, т. е. в $L^p(dx\,dy;\ K;\ \vec{F})$, то она сходится к $\vec{0}$ также и локально равномерно.

Доказательство. Неравенство получится, если рассмотреть интеграл от функции $\vec{f}=\vec{f}\times 1$ относительно меры $d\mu=\frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy$ с массой 1 и применить неравенство Гёльдера (IV, 4; 61) (следствие 3 теоремы 46).

Рассмотрим теперь последовательность функций $\vec{f}_n$ на Ω. Так как

$$\left(\iint\limits_{K}\|\vec{f}_n(z)\|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \max_{z\in K}\|\vec{f}_n(z)\|(\operatorname{mes}(K))^{\frac{1}{p}},$$

то, если эти функции сходятся локально равномерно к 0, они тем более будут сходиться к 0 локально в L^p. Нам надо доказать обратное утверждение для голоморфных или гармонических функций $\vec{f}_n$. Пусть K — компакт, а $R>0$ — число, строго меньшее кратчайшего расстояния от K до $\complement\Omega$ (см. гл. II, стр. 84). Обозначим через H множество точек, расстояние от которых до K не превосходит R. Множество H является компактом, содержащимся в Ω, причем в силу (VII, 3; 14_3)

$$\max_{z\in K}\|\vec{f}_n(z)\| \leqslant \left(\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{H}\|\vec{f}_n(z)\|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда и вытекает высказанное утверждение.

Замечание. Конечно, сходимость в $L^p(dx\,dy;\ \Omega;\ \vec{F})$ не влечет за собой равномерной сходимости *во всем* Ω. Из нее следует только равномерная *локальная* сходимость. Вплотную к границе подходить нельзя!

Целые функции. Теорема Лиувилля

Пусть E, F — аффинные нормированные пространства над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Целой* функцией на E со значениями в F называется $\mathbb{K}$-аналитическая функция f, разложение Тейлора которой в окрестности каждой точки $a \in E$ сходится и равно $f(x)$ в каждой точке $x \in E$. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ из следствия 1 теоремы 11 вытекает, что любая голоморфная функция на E со значениями в F целая. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ каждая функция, гармоническая на конечномерном евклидовом пространстве E, целая.

В дальнейшем слово целая будет всюду означать $\mathbb{C}$-целая.

Теорема 13 (теорема Лиувилля). 1°) *Каждая ограниченная целая функция $\vec{f}$ на E со значениями в $\vec{F}$ постоянна.*

2°) *Если существуют число $C \geqslant 0$, целое число $m \geqslant 0$ и точка $a \in E$, такие, что для достаточно большой нормы $\|\overrightarrow{x-a}\|$*

$$\|\vec{f}(x)\| \leqslant C \|\overrightarrow{x-a}\|^m, \tag{VII, 3; 15}$$

то $\vec{f}$ является полиномом степени $\leqslant m$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2°). Из неравенств (VII, 3; 4_7) непосредственно получаем

$$\left\| f^{(n)}(a) \right\| \leqslant M(a, \rho) \frac{n^n}{\rho^n} \leqslant C n^n \rho^{m-n}. \tag{VII, 3; 16}$$

Устремляя ρ к $+\infty$ при $n > m$, получаем $f^{(n)}(a) = 0$. Ряд Тейлора в окрестности точки a, представляющий функцию $\vec{f}(x)$ для всех x, свелся к некоторому полиному степени $\leqslant m$, чем утверждение 2°) и доказано.

Полагая теперь $m = 0$, получаем утверждение 1°).

Следствие 1 (теорема Даламбера). См. стр. 318.

(Чем дальше, тем доказательства короче!)

В самом деле, предположим, что полином P степени $m \geqslant 1$ не имеет нулей на $\mathbb{C}$. Тогда $1/P$ будет целой функцией. Однако $|P(z)|$ при $|z| \to \infty$ стремится к бесконечности, а следовательно, существует такое число R, что $|P(z)| \geqslant 1$ для всех $|z| \geqslant R$. Но тогда функция $|1/P|$ будет ограничена числом $\max\left(1, \max\limits_{|z| \leqslant R} \frac{1}{\|P(z)\|}\right)$, а значит, в силу теоремы Лиувилля будет постоянной, что невозможно.

Следствие 2. 1°) *Пусть P — гармоническая вещественная или комплексная функция на $\mathbb{R}^2$. Если функция $|P|$ ограничена или если функция P вещественна и ограничена сверху или снизу, то она постоянна.*

2°) *Каждая комплекснозначная целая функция f на E, вещественная или мнимая часть которой ограничена сверху или снизу, постоянна.*

Доказательство. Докажем сначала вторую часть следствия. Пусть f — целая функция на E с комплексными значениями, $f = P + iQ$, где функция P ограничена сверху: $P \leqslant M$. Тогда e^f также будет целой функцией с ограниченным модулем $|e^f| = e^P \leqslant e^M$. По теореме Лиувилля функция e^f постоянна, а значит, постоянна и функция f. Если функция P ограничена снизу: $P \geqslant -M$, то следует рассмотреть функцию e^{-f}. Если ограничена сверху или снизу функция Q, то следует в рассуждениях заменить f на if.

Перейдем теперь к первой части для случая пространства $\mathbb{R}^2$. Если P — гармоническая функция, то она является вещественной частью некоторой голоморфной функции f (теорема 4). Если функция P ограничена сверху или снизу, то, как мы только что видели, функция f, а вместе с ней и функция P постоянны.

Это следствие допускает различные обобщения на гармонические или голоморфные функции в пространствах произвольных размерностей. Мы с ними познакомимся позднее.

Теорема Лиувилля имеет важные применения в спектральной теории операторов в пространствах Банаха.

Пусть u — линейное непрерывное отображение банахова пространства F (над полем комплексных чисел) в себя. Говорят, что комплексное число λ принадлежит *спектру* отображения u, если оператор $u - \lambda I$ не обратим.

Точно так же определяется спектр элемента u банаховой алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ (гл. II, стр. 127).

Согласно теореме 62 гл. II, множество обратимых элементов $\mathcal{A}$ открыто, и, следовательно, для заданного элемента $u \in \mathcal{A}$ множество $\Omega(u)$ значений λ, для которых элемент $u - \lambda I$ обратим, является некоторым открытым множеством комплексной плоскости. Отсюда следует, что спектр элемента u замкнут. С другой стороны, мы видели (следствие 1 теоремы 31 гл. III), что отображение $u \to u^{-1}$ принадлежит классу C^∞ (относительно поля комплексных чисел). Отсюда вытекает, что отображение $\lambda \to (u - \lambda I)^{-1}$ принадлежит классу C^∞ (над полем комплексных чисел), т. е. является голоморфным отображением $\Omega(u)$ в $\mathcal{A}$.

Теорема 14 (Гельфанд). *Спектр элемента u банаховой алгебры над полем $\mathbb{C}$ является компактным непустым множеством комплексной плоскости.*

Доказательство. Так как спектр замкнут, то для обоснования его компактности достаточно будет доказать его ограниченность, иначе говоря, доказать, что для достаточно больших значений $|\lambda|$ элемент $u - \lambda I$ обратим. Мы знаем, что элементы, достаточно близкие к I, обратимы. Так как при $|\lambda| \to +\infty$ элемент $I - \frac{u}{\lambda}$ стремится к I, то для достаточно больших значений $|\lambda|$ этот элемент, а вместе с ним и элемент $u - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)$ будут обратимыми. Точнее, из теоремы 62 гл. II следует, что элемент $I - \frac{u}{\lambda}$, а вместе с ним и элемент $u - \lambda I$ будут обратимыми, если $\frac{\|u\|}{|\lambda|} < 1$, или $|\lambda| > \|u\|$. Таким образом, спектр элемента u содержится в круге $|\lambda| \leqslant \|u\|$.

Нам остается доказать, что спектр непуст. Предположим, что это не так, и покажем, что такое предположение противоречиво. Если спектр пуст, то функция $\lambda \to (u - \lambda I)^{-1}$ является целой функцией, определенной на $\mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\mathscr{A}$. Легко видеть, что при λ, стремящемся к бесконечности, $(u - \lambda I)^{-1}$ стремится к нулю. В самом деле,

$$\|(u - \lambda I)^{-1}\| = \left\|\left(-\lambda\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)^{-1}\right\|. \qquad \text{(VII, 3; 17)}$$

При λ, стремящемся к ∞, элемент $I - \frac{u}{\lambda}$ стремится к I, и, в силу непрерывности обращения, обратный к нему элемент также стремится к I, так что правая часть, а значит, и левая при $|\lambda|$, стремящемся к ∞, мажорируются произведением $\frac{1}{|\lambda|}$ на некоторую постоянную.

Из теоремы Лиувилля следует, что рассматриваемая функция будет постоянной, и, поскольку она стремится к 0 на бесконечности, она тождественно равна нулю. Однако для каждого λ ее значение является элементом, обратным к некоторому элементу, а обратный элемент не может быть равным нулю.

Замечание. Пусть E — конечномерное векторное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности > 0. Тогда пространство $\mathscr{L}(E; E) = \mathscr{A}$ есть банахова алгебра. Элемент $u \in \mathscr{A}$ обратим тогда и только тогда, когда u является инъекцией E в E, иначе говоря, когда у него нет собственного значения, равного нулю, т. е. когда его $\det u \neq 0$. Поэтому спектр отображения u состоит из множества его собственных значений. Это множество конечно, а значит, компактно. Оно непусто, поскольку собственные значения λ_i являются корнями алгебраического уравнения $\det(u - \lambda I) = 0$, а теорема Даламбера говорит о том, что это уравнение имеет хотя бы один корень.

Мы уже отмечали, что метод, позволивший доказать непустоту спектра, применим и для доказательства теоремы Даламбера!

Следствие (теорема Мазура — Улама). *Любое банахово поле канонически изоморфно полю комплексных чисел.*

Поле Банаха — это банахова алгебра $\mathscr{A}$, в которой обратим каждый элемент $\neq 0$.

Отображение $\lambda \to \lambda I$ является отображением поля $\mathbb{C}$ в $\mathscr{A}$, сохраняющим операции сложения и умножения, а также и нормы. Его образ является некоторым подполем поля $\mathscr{A}$, изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Таким образом, нам будет достаточно показать, что это подполе совпадает с самим полем $\mathscr{A}$. Это означает, что для любого элемента $u \in \mathscr{A}$ должен существовать такой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$, что $u = \lambda I$. Мы знаем, что спектр u непуст. Значит, существует такой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого элемент $u - \lambda I$ необратим. Поскольку $\mathscr{A}$ является полем, то необратимый элемент должен быть равен нулю, чем и доказано рассматриваемое следствие.

Теорема 15 (теорема Вейерштрасса о сходимости). *Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — последовательность голоморфных функций, заданных в ограниченном открытом множестве Ω пространства E, непрерывных в его замыкании $\overline{\Omega}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Если последовательность $\vec{f}_n$ равномерно сходится к некоторому пределу $\vec{f}$ на границе $\dot{\Omega}$, то она равномерно сходится к $\vec{f}$ во всем множестве $\overline{\Omega}$. Эта предельная функция $\vec{f}$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и голоморфна в Ω, и для каждого целого m производные $f_n^{(m)}$ сходятся к производной $f^{(m)}$ локально равномерно в Ω.

Доказательство. Точная верхняя грань норм $\||\vec{f}_l - \vec{f}_n|\|_{\overline{\Omega}}$ функций $\vec{f}_l - \vec{f}_n$ в $\overline{\Omega}$, согласно следствию 6 теоремы 12, равна точной верхней грани норм $\||\vec{f}_l - \vec{f}_n|\|_{\dot{\Omega}}$ на границе $\dot{\Omega}$. Так как функции $\vec{f}_n$ равномерно сходятся к некоторому пределу на границе $\dot{\Omega}$, то $\||\vec{f}_l - \vec{f}_n|\|_{\dot{\Omega}}$ сходится к 0 при l и n, стремящихся к бесконечности. Следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $n \geqslant n_0$ норма $\||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|\|_{\dot{\Omega}} \leqslant 1$, а значит, и $\||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|\|_{\overline{\Omega}} \leqslant 1$, т. е. функции $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ при $n \geqslant n_0$ ограничены на $\overline{\Omega}$. В нормированном пространстве $(\vec{F}^{\overline{\Omega}})_{cb}$ функции $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ образуют последовательность Коши. Так как пространство $\vec{F}$ по предположению полно (во всей главе), то это пространство является банаховым (следствие 2 теоремы 65 гл. II). Это означает, что разности $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$, а вместе с ними и функции $\vec{f}_n$ сходятся к некоторому пределу равномерно в $\overline{\Omega}$.

Пусть теперь задана точка $a \in \Omega$, и $d(a)$ — ее расстояние от $\dot{\Omega}$ или $\complement\Omega$. Для каждого x из шара $B = B(a, \rho)$, $\rho < d(a)$, имеем неравенство $d(x) \geqslant d(a) - \rho$. Из формулы (VII, 3; 13) следует, что производные $f_n^{(m)} - f_{n_0}^{(m)}$ образуют некоторую последовательность Коши в $(\mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F}))_{cb}^B$. Следовательно, как и ранее, функции $f_n^{(m)}$ сходятся к некоторому пределу g_m равномерно в шаре $B(a, \rho)$. Окончательно функции $f_n^{(m)}$ сходятся к g_m локально равномерно в Ω. Из теоремы 111 гл. IV следует, что функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^∞ (на $\mathbb{C}$) и что $f^{(m)} = g_m$ для всех m, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) Ограниченность множества Ω предполагать обязательно (поскольку применяются следствия 6 и 8 теоремы 12). Рассмотрим открытое множество $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$, приведенное в замечании 3 к следствию 6, и последовательность функций $f_n(z) = \dfrac{e^{nz}}{n}$. Эти функции сходятся к 0 равномерно на $\dot{\Omega}$, но не сходятся в Ω и стремятся к бесконечности в каждой положительной точке вещественной оси.

2°) В гл. IV мы указывали, что сходимость последовательности функций не влечет сходимости их производных. Дело в том, что мы проводили рассуждения, пригодные одновременно и для $\mathbb{R}$, и для $\mathbb{C}$. Теперь мы знаем, что сходимость функций класса C^1 на $\mathbb{C}$ влечет за собой сходимость их производных.

Следствие 1. *Если последовательность голоморфных функций $\vec{f}_n$ в множестве $\Omega \subset E$ (не обязательно ограниченном) со значениями в $\vec{F}$ при n, стремящемся к бесконечности, сходится локально равномерно в Ω к некоторой функции $\vec{f}$, то эта функция $\vec{f}$ голоморфна в Ω и производные $f_n^{(m)}$ сходятся локально равномерно в Ω к производной $f^{(m)}$.*

Доказательство. В самом деле, пусть a — произвольная точка Ω и $B(a, \rho)$ — шар с центром в a, содержащийся в Ω, на котором функции $\vec{f}_n$ равномерно сходятся. Тогда для доказательства остается только применить теорему 15.

Следствие 2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$, *составленный из голоморфных функций на* $\Omega \subset E$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{F}$, *сходится локально равномерно, то его сумма является голоморфной функцией в* Ω, *а сам ряд допускает почленное дифференцирование*:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n\right)^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(m)}, \qquad \text{(VII, 3; 18)}$$

где все ряды из производных сходятся локально равномерно в Ω.

Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, *составленное из голоморфных функций в* Ω *с комплексными значениями, сходится локально равномерно в* Ω *к некоторому пределу* Π, *то функция* Π *голоморфна и допустимо почленное логарифмическое дифференцирование*:

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}, \qquad \text{(VII, 3; 19)}$$

где ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'/u_n$ *сходится локально равномерно в* Ω.

Доказательство. Утверждения, относящиеся к рядам, непосредственно вытекают из предыдущего следствия.

Если рассмотреть бесконечное произведение и положить $\Pi_N = \prod\limits_{n=0}^{N} u_n$, то в силу предыдущего следствия функции Π_N' будут сходиться локально равномерно к Π', а функция Π будет голоморфной. С другой стороны, функции $1/\Pi_N$ локально равномерно сходятся к функции $1/\Pi$ (см. стр. 168 гл. II), и, следовательно, $\Pi_N'/\Pi_N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'/u_n$ сходится к Π'/Π локально равномерно.

Следствие 3. *Пусть* Ω — *открытое множество пространства* E *и* $\vec{F}$ — *банахово пространство. Тогда пространство голоморфных и ограниченных функций на* Ω *со значениями в* $\vec{F}$, *снабженное нормой* $\vec{f} \to \sup\limits_{x \in \Omega} \|\vec{f}(x)\| = \|\|\vec{f}\|\|_{\Omega, 0}$, *полно.*

В самом деле, пространство $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$ *непрерывных* и ограниченных на Ω функций со значениями в $\vec{F}$ полно (следствие 2 теоремы 65 гл. II), а пространство голоморфных ограниченных функций, согласно теореме 15, замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$.

Следствие 4. *Пусть Ω — открытое множество в E и $\vec{F}$ — пространство Банаха. Тогда пространство ограниченных непрерывных функций на $\overline{\Omega}$, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, снабженное нормой $|||\vec{f}\,|||_{\overline{\Omega},\,0}$, полно.*

В самом деле, это пространство также замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$. Аналогично, имеет место

Следствие 5. *Пространство функций, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных вместе с их производными порядков $\leqslant m$, снабженное нормой $|||\vec{f}\,|||_{\Omega,\,m}$, полно. Пространство функций, непрерывных на $\overline{\Omega}$, голоморфных на Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных на $\overline{\Omega}$ и ограниченных вместе со своими производными порядков $\leqslant m$ на Ω, снабженное нормой $|||\vec{f}\,|||_{\Omega,\,m}$, полно.*

§ 4. МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛЮСЫ И СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ВЫЧЕТОВ

В § 3 можно было доказать *равенство Коши* для голоморфных функций на открытых множествах из $\mathbb{C}$, исходя из имеющихся там *неравенств*, а эти неравенства можно распространить на функции классов C^1 или C^∞, ограниченные на открытых множествах произвольного аффинного нормированного пространства E (над полем $\mathbb{C}$). В настоящем § 4 такие обобщения невозможны. В самом деле, здесь будут изучаться функции, имеющие *изолированную* особую точку $a \in \mathbb{C}$, т. е. голоморфные в $\complement a$, например $1/(z-a)$. Позже мы увидим, что в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$ каждая голоморфная функция в $\complement a$ продолжается до некоторой голоморфной функции во всем пространстве. Следовательно, *функций с изолированными особенностями в таких пространствах не существует*. Поэтому во всем этом параграфе в качестве E мы будем брать поле комплексных чисел.

Теорема 16. *Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в кольце $\Omega \subset \mathbb{C}$, определенном неравенствами $R_1 < |z-a| < R_2$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда она может быть* *разложена в ряд, называемый рядом Лорана:*

$$\vec{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{c}_n (z-a)^n. \qquad \text{(VII, 4; 1)}$$

Это разложение абсолютно сходится в кольце Ω и нормально сходится во всяком кольце $R_1 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < R_2$.

Коэффициенты ряда Лорана определяются единственным образом и могут быть вычислены по формуле

$$\vec{c}_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad \text{(VII, 4; 2)}$$

где Γ — произвольный C^0-цикл конечной длины в Ω, обходящий один раз точку a в положительном направлении[1]).

Отметим то интересное, что имеется в этой формуле. Разложение Лорана служит обобщением разложения Тейлора. Однако оно пригодно не в окрестности точки a, а только в кольце на некотором расстоянии от точки a. В частности, выразить коэффициенты $\vec{c}_n$ через производные функции $\vec{f}$ в точке a невозможно, так как функция $\vec{f}$ не определена в окрестности точки a.

Доказательство. Обозначим через γ_1 (соответственно γ_2) окружность с центром в точке a радиуса R_1'' (соответственно R_2''), где $R_1 < R_1'' < R_1' < R_2' < R_2'' < R_2$, ориентированную в положительном направлении.

Тогда в открытом множестве Ω цикл $\gamma_2 - \gamma_1$ является ориентированной границей кольца $R_1'' \leqslant |z-a| \leqslant R_2''$, имеющей ориентацию пространства $\mathbb{C}$, и к нему можно применить интегральную формулу Коши

$$\vec{f}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1-\gamma_2} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \qquad \text{(VII, 4; 3)}$$

для $R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2'$.

Рассмотрим сначала первый интеграл. Его можно вычислить точно так же, как и в теореме 11, разлагая $1/(\zeta - z)$ по сте-

---

[1]) В дальнейшем $\sum_{-\infty}^{-1} \vec{c}_n (\zeta-a)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана, а $\sum_0^\infty \vec{c}_n (\zeta-a)^n$ — *правильной частью. — Прим. ред.*

пеням $z-a$. Так получается разложение

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad \text{(VII, 4; 4)}$$

где коэффициенты $\vec{c}_n$, $n\geqslant 0$, вычисляются по формуле (VII, 4; 2), в которой интеграл берется по γ_2. Как мы уже говорили, единственное различие состоит здесь в том, что коэффициент $\vec{c}_n$ теперь нельзя выразить через производные функции $\vec{f}$ в точке a. Радиус сходимости написанного ряда $\geqslant R_2''$. (Это следует из того, что $\|\vec{c}_m\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\|\vec{f}(\zeta)\|}{R_2''^{n+1}}\,ds\leqslant\frac{M\left(a,R_2''\right)}{R_2''}$, где $M(a,\rho)$ равняется максимуму нормы $\|\vec{f}\|$ на окружности $|z-a|=\rho$. Заметим, что здесь в противоположность § 3 величина $M(a,\rho)$ не равна более $\max\|\vec{f}\|$ в круге $|z-a|\leqslant\rho$, в котором функция $\vec{f}$ даже не определена.) В частности, ряд нормально сходится для $|z-a|\leqslant R_2'$.

Рассмотрим теперь второй интеграл. На этот раз мы произведем разложение по отрицательным степеням $z-a$. Имеем:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=-\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=$$

$$=-\frac{1}{z-a}-\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}-\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3}-\ \ldots\ =-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}, \qquad \text{(VII, 4; 5)}$$

где ряд нормально сходится для $|\zeta-a|=R_1''$, $|z-a|\geqslant R_1'$.

Если теперь переставить знаки $\sum$ и $\int$, то получится

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=-1}^{-\infty}\vec{c}_n(z-a)^n, \qquad \text{(VII, 4; 6)}$$

где $\vec{c}_n$ (при $n\leqslant-1$) снова определяются по формуле (VII, 4; 2), в которой интеграл берется по γ_1.

Произведенная перестановка возможна, если в тех же условиях, что и в доказательстве теоремы 11, при замене величин $\frac{\vec{f}(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ их нормами одна из двух частей формулы (VII, 4; 6) принимает конечное значение. Поскольку $R_1'/R_1''>1$ и суммирование ведется от $n = -1$ до $-\infty$, то имеет место оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\|\vec{f}(\zeta)\|\,|z-a|^n}{|\zeta-a|^{n+1}}\,ds \leqslant M(a,\ R_1'')\left(\frac{R_1'}{R_1''}\right)^n. \qquad \text{(VII, 4; 7)}$$

Отсюда следует законность перестановки. Получаемый ряд нормально сходится для $|z-a| \geqslant R_1'$.

Объединяя (VII, 4; 4) и (VII, 4; 6), мы получаем соотношение (VII, 4; 1) со значениями коэффициентов (VII, 4; 2), вычисляемыми с помощью интегралов, взятых по γ_1 или γ_2 в зависимости от знака n.

Один из полученных рядов нормально сходится для $|z-a| \leqslant R_2'$, а другой — для $|z-a| \geqslant R_1'$. Поэтому рассматриваемый ряд (VII, 4; 1) нормально сходится в кольце $R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2'$.

Для значений коэффициентов мы нашли интегралы, вычисляемые по некоторым окружностям γ_2 при $n \geqslant 0$ и γ_1 при $n \leqslant -1$ с центром в точке a, ориентированным в положительном направлении. Так как здесь речь идет об интегралах от голоморфных функций в кольце Ω, т. е. об интегралах от замкнутых дифференциальных форм степени 1, то любую из окружностей γ_1 или γ_2 можно заменить на произвольный C^0-цикл конечной длины, C^0-гомологичный этим окружностям в Ω (следствие 6 теоремы 54 гл. IV). Далее, если некоторый C^0-цикл конечной длины Γ в Ω делает один оборот вокруг точки a в положительном направлении, т. е. если точка a имеет относительно этого цикла индекс $+1$, то это означает (см. гл. VI, стр. 302), что этот цикл C^0-гомологичен некоторой окружности с центром в точке a, расположенной в Ω и пробегаемой в положительном направлении.

В случае ряда Тейлора ясно, что разложение единственно и его коэффициенты определяются по формуле $\vec{c}_n = \dfrac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}$. В самом деле, степенной ряд с показателями $\geqslant 0$ всегда почленно дифференцируем внутри его круга сходимости. Поэтому можно вычислить $\vec{f}^{(n)}(z)$ с помощью ряда, затем положить $z = a$ и получить $\vec{f}^{(n)}(a) = n!\vec{c}_n$.

Здесь же для доказательства единственности $\vec{c}_n$ можно поступить следующим образом. Поскольку ряд в кольце сходится равномерно, то можно почленно интегрировать $\dfrac{\vec{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}\,dz$ на окружности γ с центром в a, лежащей в кольце и пробегаемой в положительном направлении. Однако интеграл

$\int\limits_{\gamma} (z-a)^{n-m-1}\, dz$ при $n-m \neq 0$ равен 0, поскольку его можно записать как интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{d\,(z-a)^{n-m}}{n-m}$, т. е. как интеграл от некоторой кограницы на цикле. При $n-m=0$ этот интеграл записывается в виде $\int \frac{dz}{z-a}$ и равен $2i\pi$. Окончательно получается, что $\int\limits_{\gamma} \frac{\vec{f}(z)\, dz}{(z-a)^{m+1}} = 2i\pi\vec{c}_m$, что и дает искомую формулу.

Вычисляя $\vec{c}_n$ с помощью интегралов по окружности радиуса ρ, получаем

Следствие 1. *Коэффициенты ряда Лорана допускают оценку*

$$\|\vec{c}_n\|\rho^n \leqslant M(a, \rho), \quad R_1 < \rho < R_2. \tag{VII, 4; 8}$$

Другими словами, каждый член $\vec{c}_n(z-a)^n$ ряда Лорана на любой окружности с центром в точке a радиуса ρ, лежащей в кольце Ω, мажорируем по норме максимумом $M(a, \rho)$ нормы функции $\vec{f}$ на этой окружности.

Случай $R_1 = 0$. Ряд Тейлора есть частный случай ряда Лорана, в котором кольцо определяется неравенствами $0 < |z-a| < R_2$, а коэффициенты, соответствующие $n < 0$, равны нулю. Если функция голоморфна в $0 < |z-a| < R_2$, то заведомо известно, что она имеет разложение Лорана, нормально сходящееся в каждом кольце $0 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < R_2$.

Если окажется, что все коэффициенты $\vec{c}_n$ при $n < 0$ равны нулю, то, давая функции значение $\vec{c}_0$ в точке a, ее можно продолжить до функции, голоморфной в круге $|z-a| < R_2$, ибо она тогда представима в виде локально равномерно сходящегося ряда функций, голоморфных в $|z-a| < R_2$. В этом случае точку a называют *регулярной точкой*.

Точку a называют *полюсом порядка* m, если коэффициент $\vec{c}_{-m}$ не равен нулю, а все коэффициенты $\vec{c}_n$ для $n < -m$ нули. Если имеется бесконечное множество значений $n < 0$, для которых $\vec{c}_n$ не равны нулю, то говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a *существенную особенность*. Коэффициент $\vec{c}_{-1}$ называется *вычетом* функции $\vec{f}$ в точке a и обозначается через $\mathrm{Res}_a \vec{f}$.

Функция $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ называется *мероморфной* в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$, если существует такое конечное или бесконечное множество изолированных точек $\{a_i\}_{i \in I}$ в Ω, каждая из которых является полюсом для $\vec{f}$, что функция $\vec{f}$ голоморфна в $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$.

Следствие 2. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна в кольце $0 < |z-a| < R_2$ и при z, стремящемся к a, норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|$, то a является регулярной точкой функции $\vec{f}$.*

В самом деле, из оценок (VII,4; 8) при ρ, стремящемся к 0, следует, что все коэффициенты $\vec{c}_n$ равны нулю для $n < 0$.

Следствие 3. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $0 < |z-a| < R_2$ и при z, стремящемся к a, норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^{m+1}$, где m — целое число $\geqslant 1$, то точка a является или регулярной точкой, или полюсом порядка $\leqslant m$ функции $\vec{f}$.*

Доказательство то же, что и в предыдущем случае.

Следствие 4. *Для того чтобы голоморфная в $0 < |z-a| < R_2$ функция $\vec{f}$ имела в точке a при целом $m \geqslant 1$ полюс порядка m, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $\vec{c} \neq 0$ (равная коэффициенту $\vec{c}_{-m}$), для которой функция $\vec{f}$ была бы эквивалентной $\vec{c}/(z-a)^m$ при z, стремящемся к a.*

Это следствие означает, что если функция $\vec{f}$ в точке a имеет полюс, то ее разложение Лорана является асимптотическим, подобно разложению Тейлора в регулярной точке a.

Доказательство. Условие достаточно. В самом деле, если оно выполнено, то норма $\left\|\vec{f}(z) - \frac{\vec{c}}{(z-a)^m}\right\|$ при z, стремящемся к a, имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$, и потому, согласно следствию 3, справедливо разложение Лорана с показателями $\geqslant -m+1$, и $\vec{f}$ имеет полюс порядка m с $\vec{c}_{-m} = \vec{c}$.

Обратно, если $\vec{f}$ имеет в точке $\vec{a}$ полюс порядка m, то разность $\vec{f}(z) - \frac{\vec{c}_{-m}}{(z-a)^m}$ представляет собой сумму некоторого полинома относительно $1/(z-a)$ степени $\leqslant m-1$, а, значит, при $z \to a$, имеющего порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$, и некоторой голоморфной функции, остающейся ограниченной при $z \to a$. Тем самым указанное условие полностью выполнено.

Случай $R_2 = +\infty$. Предположим теперь, что функция $\vec{f}$ голоморфна для $R_1 < |z-a|$. Эта функция допускает разложение Лорана, справедливое вне окружности и нормально сходящееся во всяком кольце $R_1 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < +\infty$.

При этих условиях естественно говорить, что бесконечно удаленная точка является *регулярной точкой* функции $\vec{f}$, если все коэффициенты $\vec{c}_n$ равны нулю для $n > 0$; что бесконечно удаленная точка является *полюсом порядка* m функции $\vec{f}$, если коэффициент $\vec{c}_m$ отличен от нуля, а все коэффициенты $\vec{c}_n$ при $n > m$ равны нулю, и что бесконечно удаленная точка является для $\vec{f}$ *существенно особой точкой*, если существует бесконечное множество коэффициентов $\vec{c}_n$ при $n \geqslant 0$, не равных нулю.

Например, целая, т. е. голоморфная во всей комплексной плоскости функция, если она не есть полином, имеет бесконечно удаленную точку в качестве существенно особой точки.

По причинам, которые будут выяснены позже, коэффициент $-\vec{c}_{-1}$ называется *вычетом функции* $\vec{f}$ *на бесконечности* и обозначается через $\operatorname{Res}_\infty \vec{f}$.

Следствие 5. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $R_1 < |z-a|$ и если норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет при $|z|$, стремящемся к ∞, порядок меньший, чем $|z|$, то бесконечно удаленная точка является регулярной точкой. Если норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $|z|^{m+1}$, при целом $m \geqslant 1$, то бесконечно удаленная точка регулярна или является полюсом порядка $\leqslant m$, а если это полюс точно порядка m, то $\vec{f}(z)$ эквивалентна $\vec{c}_m z^m$ при $|z|$, стремящемся к бесконечности.*

Следствие 6. *Для того чтобы точка a была существенно особой для функции $\vec{f}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(a, \rho)$ возрастала быстрее любой степени $\frac{1}{\rho}$ при ρ, стремящемся к 0. Для того чтобы бесконечно удаленная точка была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(a, \rho)$ возрастала быстрее любой степени ρ при ρ, стремящемся к бесконечности.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки

Из следствия 6 вытекает, что в окрестности существенно особой точки a функция $\vec{f}$ может возрастать весьма быстро.

Если проэкстраполировать то, что мы знаем о полюсах, то казалось бы естественным ожидать, что при z, стремящемся к существенно особой точке a, норма функции $\vec{f}$ будет равномерно стремиться к бесконечности быстрее любой степени $\left|\frac{1}{z-a}\right|$. Однако *это совсем не так.*

Хотя максимум нормы $M(a, \rho)$ при ρ, стремящемся к 0, очень быстро стремится к бесконечности, норма $\|\vec{f}\|$ в случае $\vec{F}=\mathbb{C}$, как мы сейчас в этом убедимся, при z, стремящемся к a, к бесконечности не стремится.

Теорема 17 (Вейерштрасс). *Пусть f — голоморфная в $0<|z-a|<R$ комплекснозначная функция, для которой a является существенно особой точкой. Тогда при z, стремящемся к a, значение $f(z)$ можно сделать сколь угодно близким к любому комплексному числу; иначе говоря, образ при отображении f любого круга $0<|z-a|\leqslant\rho<R_2$ с (выброшенным) центром в точке a плотен в комплексной плоскости.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что это не так. Пусть существует такая точка c, которая не может быть приближена значениями функции f при $0<|z-a|\leqslant\rho$. Тогда функция $z\to\frac{1}{f(z)-c}$ голоморфна для $0<|z-a|<\rho$ и, кроме того, ограничена. Согласно следствию 2 теоремы 16, она может быть продолжена до некоторой голоморфной функции в круге $|z-a|<\rho$. Эта функция может обращаться в нуль в точке $z=a$, но она не равна нулю тождественно и, следовательно, имеет точку a в качестве нуля конечного порядка m. Поэтому можно написать:

$$\frac{1}{f(z)-c}=(z-a)^m h(z), \qquad \text{(VII, 4; 9)}$$

где h — голоморфная в $|z-a|<\rho$ функция, не равная нулю в точке a. Функция $|h|$ ограничена снизу некоторым числом $\alpha>0$ в некоторой окрестности точки a. В этой окрестности

$$|f(z)-c|\leqslant\frac{1}{\alpha|z-a|^m}, \qquad \text{(VII, 4; 10)}$$

а это говорит о том, что точка a для функции f будет или регулярной, или полюсом порядка $\leqslant m$, что противоречит сделанному предположению.

Замечание 1. Мы видим, что поведение функции в окрестности существенно особой точки в корне отличается от поведения ее в окрестности полюса и что существенно особой точке не подходит название полюс бесконечного порядка. (Разложение Лорана не имеет здесь больше ничего общего с асимптотическим разложением, в котором первый член выделяется как главная часть.) Естественно, тот же самый результат имеет место для бесконечно удаленной существенно особой точки. Он применим к каждой целой функции, не сводящейся к полиному.

Рассмотрим, например, целую функцию e^z и убедимся, что в открытом множестве $|z| > \rho$ она произвольно близко подходит к любому комплексному числу. Мы докажем даже большее: она принимает бесконечное множество раз любое значение, кроме 0. В самом деле, уравнение $e^z = b$ имеет бесчисленное множество решений $z = z_0 + 2ki\pi$, где z_0 — одно из значений $\ln b$. Вне рассматриваемого круга имеется бесчисленное множество таких решений.

Если рассмотреть такие целые функции, как $\sin z$ или $\cos z$, то можно увидеть, что вне любого круга они бесконечное число раз принимают все значения без исключения. В самом деле, уравнение $\sin z = b$ имеет при любом b бесконечное множество корней $z = z_0 + 2k\pi$ или $\pi - z_0 + 2k\pi$, где z_0 — одно из значений $\arcsin b$.

Теорема Вейерштрасса говорит лишь о том, что функция произвольно близко подходит к любому значению, но не о том, что она принимает все значения.

Значительно более сильная, но и более трудная *теорема Пикара* утверждает, что *в окрестности существенно особой точки функция f принимает бесконечное множество раз все значения (разумеется, конечные), за исключением, быть может, одного.* Такое исключительное значение существует, например, для экспоненциальной функции.

Замечание 2. Если пространство $\vec{F}$ не есть $\mathbb{C}$, то функция $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющая в точке $a \in \mathbb{C}$ существенную особенность, может по норме стремиться к бесконечности при z, стремящемся к a. Рассмотрим, например, $\vec{F} = \mathbb{C}^2$ и функцию $z \to \left(\frac{1}{z-a};\ e^{\frac{1}{z-a}}\right)$. Точка a для нее является существенно особой, поскольку это имеет место для второй составляющей. Однако $\|\vec{f}\|$ при z, стремящемся к a, стремится к бесконечности, поскольку первая составляющая функции стремится к бесконечности.

Теорема 18. *Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в Ω: $0 < |z - a| < R_2$. Класс вычетов замкнутой дифференциальной формы $\vec{f}(z)\,dz$ относительно точки a равен произведению $2i\pi$*

на «вычет» функции $\vec{f}$ в точке a, т. е. на коэффициент Лорана $\vec{c}_{-1}$.

Доказательство. Пусть γ — окружность с центром в точке a радиуса $\rho < R_2$, обходимая в положительном направлении. По самому определению (VII, 4; 2) коэффициентов Лорана $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2i\pi\vec{c}_{-1}$. Этот интеграл по определению является классом вычетов (теорема 64 гл. VI) для дифференциальной формы класса C^1 в $\complement_{\Omega} a$.

Теорема 19 (о вычетах). *Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — замкнутое*[1]) *множество изолированных*[2]) *точек открытого множества Ω пространства $\mathbb{C}$, и пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Пусть, далее, $V \subset \Omega$ — подмногообразие с краем класса C^1, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$, и его граница Γ не содержит ни одной из точек a_i. Тогда справедлива формула вычетов

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \mathring{V}} (\mathrm{Res}_{a_i}\vec{f})\,^{3}), \qquad \text{(VII, 4; 11)}$$

в которой Γ имеет ориентацию границы многообразия V, а сумма $\sum$ распространена на все точки a_i, содержащиеся в $\mathring{V}$[4]).

---

[1]) Мы выбираем множество точек a_i замкнутым, желая исключить случай последовательности, стремящейся к точке $a \in \Omega$. Можно заметить, что если a_i — особые точки, то точка a также будет особой, но не изолированной особой точкой. Предположение «изолированности» представляется поэтому достаточным для того, чтобы не иметь дела с этим случаем. Однако мы не хотим обязывать точки a_i быть особыми. Предполагая функцию f голоморфной в $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i \in I}$, мы считаем точки a_i лишь возможными особенностями. Не следует отбрасывать тот случай, когда некоторые из a_i окажутся регулярными. Мы всегда рассматриваем векторные пространства функций. В этих пространствах сумма двух функций, имеющих особенность в точке a, может оказаться регулярной в этой точке (например, $\vec{f} - \vec{f} = \vec{0}$). Вот почему налагается условие «замкнутости».

[2]) Это означает, что каждая точка a_i является центром круга, не содержащего ни одной точки a_j, $j \neq i$.

[3]) Символ i в этой формуле имеет два различных смысла: это индекс $i \in I$, но это и $\sqrt{-1}$ в выражении $2i\pi$.

[4]) Так как точки a_i изолированы в Ω, то их в компакте V конечное число. В противном случае можно было бы из множества этих точек выделить последовательность, сходящуюся к некоторому пределу a, принадлежащему множеству особых точек, но не являющемуся изолированной особой точкой.

Мы докажем даже более общее свойство.

А именно, заметим, что граница Γ имеет индекс $+1$ относительно точек $a_i \in \overset{\circ}{V}$ и индекс 0 относительно точек $a_i \in \complement V$ (теорема 60 гл. VI). Поэтому

Если Γ является особой C^0-границей Ω конечной длины и если ее образ не содержит ни одной из точек a_i, то имеет место формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{i \in I} I(a_i, \Gamma)\,\mathrm{Res}_{a_i}\vec{f}, \qquad \text{(VII. 4; 12)}$$

где $I(a_i, \Gamma)$ — индекс Γ относительно a_i.

Эта общая теорема непосредственно следует из теоремы 64 гл. VI и теоремы 18 о классе вычетов $\vec{f}(z)\,dz$ в точке a_i.

Однако, учитывая важность *частного* утверждения, сформулированного в теореме 19, мы дадим доказательство, *совпадающее с доказательством теоремы* 64 *гл.* VI, но приспособленное к нашим частным условиям.

Обозначим через γ_i для $a_i \in \overset{\circ}{V}$ границу круга Δ_i с центром в a_i, целиком лежащего в $\overset{\circ}{V}$. Поскольку точек a_i конечное число, то можно эти круги выбрать так, чтобы Δ_i попарно не пересекались. Тогда цикл $\Gamma - \sum_i \gamma_i$ является границей в $\complement_\Omega \{a_i\}_{i \in I}$, а именно границей множества $\complement_V \left(\bigcup_i \overset{c}{\Delta}_i\right)$. Из теоремы 6 Коши (первая интегральная формула) вытекает, что

$$\int_{\Gamma - \sum_i \gamma_i} \vec{f}(z)\,dz = \vec{0}, \qquad \text{(VII, 4; 13)}$$

или

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{f}(z)\,dz = \sum_{a_i \in \overset{\circ}{V}} 2i\pi\,\mathrm{Res}_{a_i}\vec{f}. \qquad \text{(VII, 4; 14)}$$

Замечание. Вторая основная интегральная формула Коши служит для обоснования всей теории, в частности для получения разложения Лорана, а следовательно, и для вычисления вычетов. Однако она a posteriori является следствием теоремы о вычетах. В самом деле, для голоморфной в Ω функции $\vec{f}$ функция $z \to \vec{f}(z)/(z-a)$ имеет точку a как возможную особенность. Ее вычет в ней равен $\vec{f}(a)$. Действительно, точка a является либо регулярной точкой, либо простым полюсом, и если искать разложение функции $\vec{f}(z)/(z-a)$, используя разложение Тейлора функции $\vec{f}(z)$ по степеням $z-a$: $\vec{f}(z)=\vec{f}(a)+(z-a)\vec{f}'(a)+\ldots$, то коэффициентом при $1/(z-a)$ будет $\vec{f}(a)$. При этом соотношение (VII, 4; 11), примененное к $\vec{f}(z)/(z-a)$, дает (VII, 2; 8) и (VII, 2; 9). Точно так же получаются формулы (VII, 3; 1).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы и множество* Ω, *кроме того, односвязно. Для того чтобы функция* $\vec{f}$ *имела голоморфные первообразные в* $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, *необходимо и достаточно, чтобы все ее вычеты были равны нулю* [1]).

Доказательство. Если функция $\vec{f}$ имеет голоморфную первообразную, то она является первообразной замкнутой 1-формы $\vec{f}(z)\,dz$ (см. рассуждение, примененное при доказательстве теоремы 7). Следовательно, она является когpаницей, а ее интеграл на каждом цикле из $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$ равен нулю. Выбирая в качестве цикла окружность, содержащую внутри себя единственную точку a_i, мы видим, что все вычеты функции $\vec{f}$ равны нулю. Обратно, покажем, что если последнее верно, то выполнено условие теоремы 45 гл. VI. Пусть $\Gamma=H\,|\,\gamma$ — отображение класса C^1 (в вещественном смысле) тригонометрической окружности γ из $\mathbb{R}^2$ в $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$. Поскольку множество Ω односвязно, отображение H продолжимо до некоторого непрерывного отображения единичного круга Δ из $\mathbb{R}^2$ в Ω (но, конечно, не в множество $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, не являющееся односвязным: окружность, содержащая точку a_i, не гомотопна нулю!). Так как все вычеты равны нулю, то из общей формулы о вычетах (VII, 4; 12) следует, что интеграл от $\vec{f}(z)\,dz$ по Γ равен нулю, что совпадает с рассматриваемым критерием. Таким образом, $\vec{f}(z)\,dz$ имеет первообразные в $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, а из рассуждения, проведенного в теореме 7, следует, что это голоморфные первообразные функции $\vec{f}$. Кроме того, если множество Ω связно, а значит, связно и множество $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, то эти первообразные отличаются только на некоторую постоянную.

Теорема 19 называется также *внутренней теоремой о вычетах*. Справедлива, кроме того, *внешняя теорема о вычетах*, имеющая практические приложения.

---

[1]) Отсюда не следует отсутствие особенностей: вычет равен $\vec{c}_{-1}$, но коэффициенты $\vec{c}_n$, $n\leqslant-2$, могут быть $\neq\vec{0}$.

Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $|z-a|>R_1$, то она допускает разложение Лорана. Коэффициент при $1/(z-a)$ с измененным знаком, т. е. $-\vec{c}_{-1}$, мы будем называть *вычетом функции* $\vec{f}$ *в бесконечности.*

Очевидно, имеет место следующее свойство, аналогичное теореме 18:

Если γ — *окружность, расположенная в кольце* $|z-a|>R_1$ *и обходимая в отрицательном направлении, то справедлива формула*

$$\int_\gamma \vec{f}(z)\,dz=-2i\pi\vec{c}_{-1}=2i\pi\operatorname{Res}_\infty\vec{f}. \qquad \text{(VII, 4; 15)}$$

Отметим еще раз, что обход γ *производится в отрицательном направлении.* Позже мы увидим причину, вынуждающую нас совершать такое трюкачество.

Замечание. Функция может иметь вычет $\neq 0$ в точке a, находящейся на конечном расстоянии, только в том случае, *когда* a — *действительно особая точка*, в то время как она может иметь ненулевой вычет в бесконечности даже в том случае, когда бесконечно удаленная точка регулярна. В самом деле, регулярность бесконечно удаленной точки означает, что разложение Лорана содержит только показатели $\leqslant 0$, что не исключает наличия показателя -1. Объяснение этому будет дано на странице 396. Если Γ — произвольный C^0-цикл конечной длины, содержащийся в $|z-a|>R_1$ и обходящий точку a один раз в отрицательном направлении, то интеграл $\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz$ равен вычету $\vec{f}(z)$ в бесконечности.

В самом деле, как мы видели при доказательстве теоремы 19, цикл Γ C^0-гомологичен в $|z-a|>R_1$ любой окружности с центром в точке a, пробегаемой в отрицательном направлении. Это означает, что вычет в бесконечности не зависит от выбора точки a для разложения Лорана, а зависит исключительно от поведения функции $\vec{f}$ в бесконечности. Другими словами, если $b\neq a$, то функция $\vec{f}$ также голоморфна и для $|z-b|>R_1+|a-b|$. Коэффициент при $1/(z-b)$ в разложении Лорана относительно точки b тот же, что и коэффициент при $1/(z-a)$ в разложении относительно a. *Внешняя теорема о вычетах* теперь может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 19_2. *Пусть* Ω — *открытое множество в* $\mathbb{C}$, *дополнительное к некоторому компакту. Пусть* $\{a_i\}_{i\in I}$ — *замкнутое* *ограниченное множество изолированных точек в Ω, и пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Пусть W — многообразие класса C^1 с краем, содержащееся в $\mathbb{C}$, снабженное ориентацией $\mathbb{C}$ и такое, что $V = \complement\mathring{W}$ лежит в Ω и граница Γ многообразия W не содержит ни одной из точек a_i. Придадим Γ ориентацию границы множества $V = \complement\mathring{W}$, т. е. ориентацию, противоположную ориентации границы W, иначе говоря, отрицательную ориентацию.

Тогда имеет место формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi\left(\sum_{a_i \in \mathring{V}} \operatorname{Res}_{a_i}\vec{f} + \operatorname{Res}_\infty \vec{f}\right)^{1)}. \quad \text{(VII, 4; 16)}$$

Следует подчеркнуть, что в этой формулировке фигурирует множество V, а компактность требуется от множества W. Само же множество V некомпактно, а значит, цикл Γ не является границей в Ω в рассматривавшемся ранее смысле! Во всей плоскости $\mathbb{C}$ кривая Γ есть граница W, поскольку в $\mathbb{C}$ любой цикл является некоторой границей (следствие 3 теоремы 54 гл. VI).

Доказательство. В самом деле, обозначим через $\mathring{\Delta}$ произвольный открытый круг, достаточно большой для того, чтобы содержать $\complement\Omega$, все точки a_i (образующие по предположению ограниченное множество) и множество Γ. Тогда можно применить внутреннюю теорему 19 о вычетах относительно цикла $b\Delta + \Gamma$ (круг Δ ориентирован как $\mathbb{C}$, $b\Delta$ — как граница, т. е. в положительном направлении, Γ — как граница множества $\complement\mathring{V}$, т. е. в отрицательном направлении), который является границей $\Delta \cap \complement\mathring{V}$. Получится формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz + \int_{b\Delta} \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \complement V} \operatorname{Res}_{a_i}\vec{f}. \quad \text{(VII, 4; 17)}$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \complement V} \operatorname{Res}_{a_i}\vec{f} - \int_{b\Delta} \vec{f}(z)\,dz, \quad \text{(VII, 4; 18)}$$

[1]) В этой формуле Res_{a_i} вычисляются, как всегда, с помощью интегралов по окружностям, пробегаемым в положительном направлении, в то время как $\operatorname{Res}_\infty$ вычисляется с помощью интеграла по окружности, пробегаемой в отрицательном направлении.

и тогда теорема будет доказана, если учесть тот факт, что последний интеграл равен вычету в бесконечности, умноженному на $2i\pi$.

Следствие. *Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — конечное множество точек $\mathbb{C}$. Пусть $\vec{f}$ — голоморфная на $\mathbb{C} \setminus \{a_i\}_{i \in I}$ функция со значениями в $\vec{F}$. Тогда сумма всех вычетов функции $\vec{f}$ в точках a_i и в бесконечно удаленной точке равна нулю.*

Доказательство. Пусть V — подмногообразие с краем из $\mathbb{C}$, граница которого не содержит ни одной из точек a_i. Интеграл от $\vec{f}(z)\,dz$ по этой границе, ориентированной как граница V, равен сумме вычетов точек $a_i \in \overset{\circ}{V}$, умноженной на $2i\pi$. Интеграл по этой же границе, ориентированной как граница множества $\complement\overset{\circ}{V}$, т. е. в обратном направлении, равен сумме вычетов в точках $a_i \in \complement V$ и в точке ∞, умноженной на $2i\pi$. Отсюда и вытекает требуемое утверждение. Выбор V произволен. Можно было бы взять V пустым, и тогда мы получили бы, что левая часть формулы (VII, 4; 16) равна $\vec{0}$, поскольку интеграл от 1-формы на 1-цикле равен нулю. Можно было бы, напротив, взять множество V настолько большим, чтобы оно содержало все a_i. Интеграл по его границе, пробегаемой в положительном направлении, дает сумму вычетов в a_i, умноженную на $2i\pi$, в то время как интеграл, вычисляемый в противоположном направлении, дает вычет в бесконечности, поскольку функция $\vec{f}$ при этом голоморфна в $\complement V$.

Пример. Пусть $\vec{f}$ — рациональная функция, т. е. функция вида $\frac{\vec{P}}{Q}$, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в $\vec{F}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Вычеты относительно различных полюсов a_i получаются при разложении на простые дроби. Из такого разложения непосредственно видно, что сумма вычетов равна коэффициенту при $1/z$ в разложении (Лорана) по степеням z в бесконечности. По самому определению этот коэффициент противоположен вычету в бесконечности (см. стр. 384). Это прямое рассуждение (не использующее теории функций комплексных переменных) будет обобщено позже (стр. 392) и даст другое доказательство предыдущего следствия.

Сохранение вычетов дифференциальных форм при C^1-диффеоморфизме

Пусть $\vec{f}_1$ — голоморфная функция в $\complement_{\Omega_1}\{a_1\}$, где Ω_1 — открытое множество, содержащее a_1.

Пусть H есть C^1-диффеоморфизм (относительно комплексного поля) множества Ω_1 на открытое множество Ω_2 комплексной плоскости: $z_1 \to z_2 = H(z_1)$. Пусть $H(a_1) = a_2$. Тогда образ $H(\vec{f}_1)$ или $(H^{-1})^* \vec{f}_1$ является функцией $\vec{f}_2 = \vec{f}_1 \circ H^{-1}$: $z_2 \to \vec{f}_1(H^{-1}(z_2))$, в то время как образ $H[\vec{f}_1(z_1)\,dz_1]$ представляет собой дифференциальную форму

$$\vec{g}_2(z_2)\,dz_2 = \vec{f}_2(z_2)\frac{dz_1}{dz_2}\,dz_2, \text{ где } \frac{dz_1}{dz_2} = (H^{-1})'(z_2).$$

Функции $\vec{f}_2$ и $\vec{g}_2$ совершенно различны. Обе они голоморфны в $\complement_{\Omega_2}\{a_2\}$, но имеют различные вычеты в точке a_2.

Теорема 20. *Вычет функции $\vec{f}_1$ в точке a_1 равен вычету функции $\vec{g}_2$ в точке a_2.*

Естественно сказать, что *вычет дифференциальной формы $\vec{f}_1(z_1)\,dz_1$ в точке a_1 равен вычету дифференциальной формы-образа $\vec{g}_2(z_2)\,dz_2$ в точке a_2.*

Доказательство. Пусть V_1 — подмногообразие с границей в Ω_1 класса C^1, снабженное канонической ориентацией плоскости $\mathbb{C}$ и такое, что $a_1 \in \mathring{V}$.

Кривая $\Gamma_1 = bV_1$ обходит один раз точку a_1 в положительном направлении и, согласно определению вычета функции $\vec{f}_1$, имеем

$$\int_{\Gamma} \vec{f}_1(z_1)\,dz_1 = 2i\pi \operatorname{Res}_{a_1}\vec{f}_1. \qquad \text{(VII, 4; 19)}$$

Множество $H(V_1) = V_2$ есть некоторое подмногообразие с краем класса C^1 в множестве Ω_2.

С другой стороны, в силу формулы (VI, 2; 7) якобиан отображения H необходимо > 0, т. е. отображение H сохраняет ориентацию. Ориентация множества $H(V_1)$, индуцированная ориентацией V_1 с помощью отображения H, является ориентацией V_2, определенной ориентацией плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что кривая $H(\Gamma_1) = \Gamma_2$ обходит один раз точку a_2 в положительном направлении. Отсюда следует также, что

$$\int_{\Gamma_2} \vec{g}_2(z_2)\,dz_2 = 2i\pi \operatorname{Res}_{a_2}\vec{g}_2. \qquad \text{(VII, 4; 20)}$$

Левые части соотношений (VII, 4; 19) и (VII, 4; 20), согласно теореме 34 гл. VI, выражающей инвариантность интеграла от дифференциальной формы при диффеоморфизме, равны, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Эта теорема остается верной, если рассматривать вычет в бесконечности. Рассмотрим, например, отображение H: $z_1 \to z_2 = \frac{1}{z_1}$ круга $|z_1| < 1$ в область $|z_2| > 1$. Это отображение преобразует множество V_1, определенное неравенством $|z_1| < \rho$, в множество $V_2 = H(V_1)$, определенное неравенством $|z_2| > \frac{1}{\rho}$. Как мы видели ранее, оно также сохраняет ориентацию. Далее, это отображение преобразует границу множества V_1, т. е. окружность γ_1 с центром в 0 радиуса ρ, пробегаемую в прямом направлении, в границу множества V_2, т. е. *в окружность γ_2 с центром в 0 радиуса $\frac{1}{\rho}$, пробегаемую в противоположном направлении.* Впрочем, это видно и непосредственно!

Пользуясь только что упоминавшейся теоремой об инвариантности из гл. VI, получаем равенство

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}_1(z_1)\, dz_1 = \int_{\gamma_2} \vec{g}_2(z_2)\, dz_2. \qquad \text{(VII, 4; 21)}$$

Этим доказано, что *вычет функции $\vec{f}_1$ в начале координат равен вычету функции $\vec{g}_2$ в бесконечности — именно потому, что вычет в бесконечности определялся с использованием окружностей, пробегаемых в отрицательном направлении.*

Замечание. Коэффициент $\vec{c}_{-1}$ разложения функции $\vec{f}$ в окрестности точки a мы назвали сначала вычетом функции $\vec{f}$, а затем, позже, вычетом дифференциальной формы $\vec{f}(z)\,dz$. *Настоящая теорема показывает, что здесь допускается вольность речи, опасная при замене переменной, поскольку в действительности при замене переменной сохраняется только вычет дифференциальной формы.* Только он имеет реальный смысл, как это уже было видно в теоремах о вычетах 18 и 19.

Это не должно нас удивлять. На стр. 313 мы определили класс вычетов в точке для некоторой дифференциальной формы *степени* $N-1$ в N-мерном аффинном пространстве над вещественным полем. Поскольку $\mathbb{C}$ — двумерное пространство над вещественным полем, то можно говорить только о вычетах дифференциальной формы 1-й степени, а не о вычетах функции. Биективное соответствие $\vec{f} \to \vec{f}\,dz$ между голоморфными функциями и голоморфными 1-формами может натолкнуть на ошибочные идеи.

Поверхности Римана, сфера Римана, вычеты дифференциальных форм с изолированной особенностью

Предыдущие результаты еще лучше интерпретируются в терминах голоморфных многообразий. Голоморфное многообразие W комплексной размерности 1 называется *поверхностью Римана* (поверхностью, поскольку ее вещественная размерность равна 2). Голоморфные функции на такой поверхности были нами определены как функции класса C^1 (а следовательно, C^∞) относительно $\mathbb{C}$. Функция $\vec{f}$ на W со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ голоморфна тогда и только тогда, когда для каждой локальной карты Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O}) \subset V$, где $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\mathbb{C}$, сложная функция $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$ голоморфна на $\mathcal{O}$.

Если открытое множество $\mathscr{V}$ из V является областью некоторой карты Φ_1: $\mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1) = \mathscr{V}$ и если функция $\vec{f}$ на $\mathscr{V}$ такова, что $f \circ \Phi_1$ голоморфна на $\mathcal{O}_1$, то это же будет справедливо для любой другой локальной карты Φ_2: $\mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2) = \mathscr{V}$ области $\mathscr{V}$ (теорема 33_3 гл. III), и потому $\vec{f}$ голоморфна на $\mathscr{V}$.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма 1-й степени на W со значениями в $\vec{F}$. Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — локальная карта и $\Phi^*\vec{\omega}$ — прообраз $\vec{\omega}$ при отображении Φ. Это некоторая 1-форма на $\mathcal{O}$, т. е. форма, имеющая вид $\vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy$, где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — функции на $\mathcal{O}$. Но тогда ее можно записать в виде $\vec{C}\,dz + \vec{D}\,d\bar{z}$, где $\vec{C} = \dfrac{\vec{A} - i\vec{B}}{2}$ и $\vec{D} = \dfrac{\vec{A} + i\vec{B}}{2}$, и обратно. Говорят, что форма $\vec{\omega}$ *голоморфна на* W, если для любой карты Φ прообраз $\Phi^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}(z)\,dz$, где функция $\vec{C}$ голоморфна на $\mathcal{O}$ (это означает, что функция $\vec{C}$ голоморфна, а функция $\vec{D}$ равна нулю). Если $\vec{\omega}$ является 1-формой на $\mathscr{V}$ — области определения карты Φ_1 — и если $\Phi_1^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}_1\,dz_1$ с голоморфной функцией $\vec{C}_1$, то для любой другой карты Φ_2 того же открытого множества $\mathscr{V}$ $\Phi_2^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}_2\,dz_2$, где функция $\vec{C}_2$ голоморфна в $\mathcal{O}_2$ и, следовательно, $\vec{\omega}$ есть 1-форма, голоморфная на $\mathscr{V}$. В самом деле, $\Phi_2^{-1}\Phi_1$ является диффеоморфизмом (относительно поля $\mathbb{C}$) множества $\mathcal{O}_1$ на множество $\mathcal{O}_2$ и $\Phi_2^*\vec{\omega}$

является преобразованием формы $\Phi_1^*\vec{\omega}$ при отображении $\Phi_2^{-1}\Phi_1$. Остается применить вычисления, проводившиеся на стр. 152.

Если $\vec{f}$ — голоморфная функция, то ее кограница $d\vec{f}$ является голоморфной 1-формой. Действительно, если на каждой локальной карте положить $\vec{g}=\Phi^*\vec{f}$, то мы получим $d\vec{g}=\vec{g}'(z)\,dz$. Поскольку рассматриваются локальные карты, то каждая голоморфная 1-форма замкнута. Следовательно, имеет место следующая модификация первой основной интегральной формулы Коши (это непосредственное применение теоремы Стокса из гл. VI):

Теорема 22a. *Интеграл от голоморфной 1-формы на каждой C^1-границе равен нулю.*

Ничего аналогичного для голоморфных функций нет. Пользуясь теоремой 19 гл. VI, можно обобщить теорему 7:

Теорема 22b. *Если многообразие W односвязно, то каждая голоморфная 1-форма $\vec{\omega}$ на W со значениями в $\vec{F}$ имеет первообразные, т. е. такие голоморфные функции $\vec{f}$, что $d\vec{f}=\vec{\omega}$. Если многообразие W связно, то любые две из этих первообразных отличаются друг от друга на постоянную.*

Непосредственного обобщения второй интегральной формулы Коши и теоремы о среднем не существует. Напротив, эти формулы можно рассматривать как частные случаи теоремы 19 о вычетах (см. следующее за ней замечание), которая сама обобщается следующим образом.

Пусть сначала $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\complement_{\mathscr{V}}\{a\}$, где $\mathscr{V}$ — некоторая открытая окрестность точки a на W, т. е. $\vec{f}$ — функция, имеющая точку a в качестве возможной изолированной особой точки. Если $\Phi(\alpha)=a$, то на карте образ $\vec{g}=\Phi^*\vec{f}$ функции $\vec{f}$ имеет разложение Лорана в точке α. Коэффициенты Лорана полностью зависят от выбранной карты и не имеют никакого самостоятельного смысла. Однако непосредственно видно, что если точка a является регулярной точкой для $\vec{g}$ на некоторой карте, то то же самое будет и для всякой другой карты, и поэтому номер первого отличного от нуля коэффициента Тейлора, т. е. порядок нуля функции $\vec{g}$ в точке α, не зависит от карты. Его называют *порядком нуля* функции $\vec{f}$ в точке a. Если α является полюсом порядка m функции $\vec{g}$, то это верно и для любой другой карты и в этом случае говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a *полюс порядка* m. То же самое будет и для существенно особой точки. Можно, наконец, точно так же действовать с 1-формой $\vec{\omega}$ на $\mathscr{V}$, голоморфной на $\complement_{\mathscr{V}}\{a\}$. На некоторой карте она запишется в виде $\vec{C}(z)\,dz$, и если функция $\vec{C}$ регулярна и имеет нуль порядка k или если функция $\vec{C}$ имеет полюс порядка m или существенно особую точку, то это же будет выполняться для каждой карты и в этом случае говорят, что форма $\vec{\omega}$ обладает рассматриваемым свойством в точке a на W.

Не существует понятия вычета функции на W, имеющей изолированную особую точку. Пусть, однако, $\vec{\omega}$ — 1-форма, голоморфная в $\complement_{\mathscr{V}} a$, где $\mathscr{V}$ — окрестность точки a, т. е. область некоторой локальной карты. Точка a является (возможной) изолированной особой точкой для формы $\vec{\omega}$. В произвольной карте $\mathscr{V}$, Φ: $\mathscr{O} \to \mathscr{V}$, $\Phi(\alpha) = a$, форма $\vec{\omega}$ записывается в виде $\vec{C}\,dz$, и, как показывает теорема 20, коэффициент $\vec{c}_{-1}$ разложения Лорана функции $\vec{C}$ в изолированной особой точке α не зависит от выбранной локальной карты. Его называют *вычетом* формы $\vec{\omega}$ в особой точке a. Имеется и интегральная интерпретация: если V — подмногообразие размерности 2 с границей класса C^1 множества $\mathscr{V}$ (рассматриваемого как многообразие размерности 2 над $\mathbb{R}$), такое, что $a \in \overset{\circ}{V}$, и если V имеет ориентацию, определенную множеством $\mathscr{V}$, а его граница Γ имеет ориентацию границы, то $\int_\Gamma \vec{\omega}$ равен вычету $\vec{\omega}$ в точке a, умноженному на $2i\pi$.

Таким образом, справедлива

Теорема 22с. *Пусть W — поверхность Римана; $\{a_i\}_{i \in I}$ — замкнутое множество изолированных точек W; $\vec{\omega}$ — голоморфная 1-форма в $\complement_W \{a_i\}_{i \in I}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$; V — подмногообразие с краем класса C^1 в W вещественной размерности 2*[1]*, снабженное ориентацией, определяемой поверхностью W; Γ — его граница, снабженная ориентацией границы и не содержащая ни одной из точек a_i. Тогда*

$$\int_\Gamma \vec{\omega} = 2i\pi \sum_{a_i \in \overset{\circ}{V}} \mathrm{Res}_{a_i} \vec{\omega}. \qquad \text{(VII, 4; 22)}$$

[1]) Как всегда, подмногообразие V компактно.

Можно было бы попытаться обобщить формулу (VII, 4; 12). Однако *понятие индекса в гл.* VI *определялось, и оно может быть определено только для открытых множеств конечномерных векторных пространств, а не для общих многообразий.* Это понятие существенно опирается на тот факт, что в векторных пространствах конечной вещественной размерности N группа гомологий области, дополнительной к точке, в случае размерности $N-1$ изоморфна множеству $\mathbb{Z}$ — факт, никоим образом не сохраняющийся для общих многообразий. Однако существует обобщение, использующее понятие *топологической степени*, которое мы здесь рассматривать не будем. Доказательство этой теоремы о вычетах на поверхности Римана совершенно аналогично доказательству теоремы 19. Из теоремы 22c и критерия, приведенного в теореме 45 гл. VI, теми же самыми рассуждениями, что и в следствии теоремы 19, получается

Теорема 22d. *Если в условиях теоремы* 22c *поверхность* W *односвязна, то* 1-*форма* $\vec{\omega}$ *тогда и только тогда имеет в* $\complement_W \{a_i\}_{i \in I}$ *голоморфные первообразные, т. е. такие голоморфные функции* $\vec{f}$, *что* $d\vec{f} = \vec{\omega}$, *когда ее вычеты во всех точках* a_i *равны нулю.*

Здесь уже нет внутренней и внешней теорем о вычетах, имеется лишь теорема, указанная выше. Если предполагать поверхность W компактной, а следовательно, абстрактным многообразием (см. замечание после следствия 7 теоремы 12), то не только множество V, но также и множество $\complement\mathring{V}$ будет подмногообразием с краем, и к нему можно будет применить ту же теорему. Однако Γ как граница $\complement\mathring{V}$ имеет ориентацию, противоположную ориентации границы V. В этой новой ориентации интеграл от $\vec{\omega}$ дает $\sum\limits_{a_i \in \complement V} \mathrm{Res}_{a_i} \vec{\omega}$. Здесь мы имеем не две различные теоремы, именовавшиеся ранее внутренней и внешней, а два применения одной и той же теоремы к V и $\complement\mathring{V}$ соответственно! Их комбинация, естественно, дает обобщение следствия теоремы 19_2.

Теорема 22e. *Если множество* W *компактно, а* $\vec{\omega}$ *является голоморфной* 1-*формой всюду, кроме конечного числа особых точек, то сумма ее вычетов равна нулю.*

Эта теорема получается непосредственным применением теоремы о вычетах к множеству $V=W$ с пустой границей. Можно было бы попытаться обобщить теорему 19_2, но для многообразий нет хорошего понятия вычета в бесконечности.

Напротив, сама *теорема* 19_2 *является (в завуалированном виде) простым и прямым следствием единой общей теоремы о вычетах*. Для того чтобы это увидеть, следует ввести понятие сферы Римана.

Сферой Римана называется множество, образованное из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ и «бесконечно удаленной» точки, обозначаемой через ∞. Сферу Римана обозначают через $\hat{\mathbb{C}}$. Это уже не поле; лишь его подмножество $\mathbb{C}$ является полем. Однако для каждой точки $a \in \mathbb{C}$ отображение $z \to \frac{1}{z-a}$, определенное обычным образом в $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}\{a\}$, может быть продолжено до некоторой биекции множества $\hat{\mathbb{C}}$ на себя, если положить $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$. Эта биекция отображает точку a в ∞ и ∞ в точку 0. Снабдим теперь сферу $\hat{\mathbb{C}}$ топологией (точно так же, как это делалось для пополненной прямой на стр. 60 гл. I). Множество $\mathcal{O}$, не содержащее точки ∞, назовем *открытым в* $\hat{\mathbb{C}}$, если оно открыто в $\mathbb{C}$. Если же множество $\mathcal{O}$ содержит точку ∞, то оно считается открытым в $\hat{\mathbb{C}}$, если его дополнение есть компакт в $\mathbb{C}$.

Непосредственно видно, что так определенные открытые множества удовлетворяют аксиомам открытых множеств некоторой топологии. Это утверждение останется верным, если заменить $\mathbb{C}$ на произвольное топологическое пространство X.

Справедлива также аксиома отделимости Хаусдорфа: если a и b — две различные точки, лежащие в $\mathbb{C}$, то существуют непересекающиеся окрестности каждой из них. Если одна из них, например a, лежит в $\mathbb{C}$, а другая есть ∞, то в качестве непересекающихся окрестностей можно взять компактную окрестность точки a в $\mathbb{C}$ и дополнение a в $\hat{\mathbb{C}}$, являющееся (открытой) окрестностью точки ∞. Это справедливо не только для $\mathbb{C}$, но и *для любого локально компактного пространства* X.

В пространстве $\hat{X}$, полученном добавлением бесконечной точки к X, фундаментальную систему окрестностей точки ∞ образуют дополнения к компактам пространства X. Пространство $\hat{X}$ всегда *компактно* и называется *компактификацией по Александрову* пространства X. В самом деле, если $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ представляет собой покрытие $\hat{X}$ открытыми множествами, то одно из множеств $\mathcal{O}_i$ содержит точку ∞, а его дополнение является некоторым компактом K в X, и достаточно конечного числа множеств $\mathcal{O}_i$, чтобы покрыть K, а тем самым существует конечное подпокрытие всего $\hat{X}$.

Последовательности из $\hat{\mathbb{C}}$, сходящиеся к точкам из $\mathbb{C}$, — это просто обычные последовательности (лишь конечное число их элементов может равняться ∞). Последовательность $z_n \in \hat{\mathbb{C}}$ сходится к ∞, если $|z_n|$ (мы считаем $|\infty| = +\infty$) стремится к $+\infty$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Наконец, биекция $z \to \frac{1}{z-a}$, очевидно, является гомеоморфизмом пространства $\hat{\mathbb{C}}$ на себя.

Введем теперь на сфере $\hat{\mathbb{C}}$ структуру поверхности Римана, или голоморфного многообразия комплексной размерности 1. Первой картой будет тождественное отображение Φ: $z \to z$, отображающее $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Другой картой будет отображение Ψ_a: $z \to \frac{1}{z-a}$ из $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Для того чтобы убедиться, что мы определили голоморфную структуру на $\hat{\mathbb{C}}$, нам следует, согласно сказанному на стр. 335 гл. III, проверить, что гомеоморфизмы $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$, $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$, $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$ голоморфны. Здесь $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$ является отображением $z \to \frac{1}{z-a}$ множества $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$, $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$ — отображение $z \to a + \frac{1}{z}$ множества $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$, $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$ — отображение $z \to z + b - a$ множества $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. Все отображения голоморфны.

Теорема 23. *Сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$ является поверхностью Римана, или голоморфным компактным многообразием комплексной размерности* 1. *Стереографическая проекция H устанавливает C^∞-диффеоморфизм относительно поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ между $\hat{\mathbb{C}}$ и единичной сферой в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. О том, что такое стереографическая проекция, мы уже говорили. Рассмотрим единичную сферу Σ в $\mathbb{R}^3$, определяемую уравнением $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, и обозначим два ее полюса через $N(0, 0, 1)$ и $S(0, 0, -1)$. Стереографической проекцией P_N из полюса N является отображение H сферы Σ на $\hat{\mathbb{C}}$, определяемое следующими формулами (u, v, w — координаты в $\mathbb{R}^3$; x, y — в $\mathbb{R}^2$):

$$x = \frac{u}{1-w}, \qquad u = \frac{2x}{x^2+y^2+1},$$
$$y = \frac{v}{1-w}, \qquad v = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \qquad \text{(VII, 4; 23)}$$
$$w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Легко проверяется, что это гомеоморфизм Σ на $\widehat{\mathbb{C}}$ [1]. Нам нужно показать, что это отображение есть C^∞-диффеоморфизм (относительно поля $\mathbb{R}$). Для этого нам следует воспользоваться критерием, указанным на стр. 336 гл. III. Возьмем две карты Φ и $\Psi = \Psi_0$: $z \to 1/z$ для множества $\widehat{\mathbb{C}}$ и две $\Phi_N = P_N^{-1}$ и $\Phi_S = P_S^{-1}$ для множества Σ. Этих карт достаточно, поскольку в каждом случае эти две карты покрывают все многообразие и карты одного многообразия содержат области, в точности соответствующие областям карт другого многообразия; это соответствие дается отображением H. Остается показать, что отображения $\Phi_N \circ H \circ \Phi^{-1}$ и $\Phi_S \circ H \circ \Psi^{-1}$ являются отображениями $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ класса C^∞. Первое из них — это тождество $P_N^{-1} \circ P_N \circ I = I$, второе же есть отображение $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$. Однако отображение $P_S^{-1} \circ P_N$ представляет собой инверсию относительно тригонометрической окружности, а Ψ является симметрией относительно оси $0x$ с последующей инверсией, так что окончательно отображение $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$ есть симметрия. Оба эти преобразования, очевидно, являются отображениями $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$ класса C^∞.

Замечание. Напротив, стереографическая проекция не есть диффеоморфизм относительно поля $\mathbb{C}$, поскольку $\mathbb{R}^3$ не является комплексным векторным пространством, а следовательно, Σ не имеет комплексной структуры. Впрочем, пространство $\widehat{\mathbb{C}}$, будучи компактным, «абстрактно» и потому не может быть погружено в векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (замечание к следствию 7 теоремы 12). Однако с помощью стереографической проекции можно перенести комплексную структуру $\widehat{\mathbb{C}}$ на Σ и превратить таким образом Σ в голоморфное многообразие (но не в качестве подмногообразия $\mathbb{R}^3$, не являющегося комплексным).

---

[1] То, что точка (u, v, w) непрерывно зависит от (x, y) и стремится к $(0, 0, 1)$ при (x, y), стремящемся к бесконечности в $\widehat{\mathbb{C}}$, очевидным образом следует из этих формул. Ясно также и обратное: отображение $(u, v, w) \to (x, y)$ непрерывно всюду, кроме, быть может, точек, где $w = 1$. С первого взгляда не видно, будет ли точка (x, y) стремиться к бесконечности в $\widehat{\mathbb{C}}$, когда точка (u, v, w) стремится к $(0, 0, 1)$ [не следует забывать, что u, v, w не независимы $(u^2 + v^2 + w^2 = 1)$, а следовательно, возможны другие формулы для того же отображения $\Sigma \to \widehat{\mathbb{C}}$]. Однако касательная плоскость к Σ в точке N горизонтальна. Следовательно, $1 - w$ является бесконечно малой 2-го порядка относительно (u, v) (формула Тейлора), что и делает нужный результат геометрически очевидным. Во всяком случае, поскольку $\widehat{\mathbb{C}}$ — компакт и отображение $\widehat{\mathbb{C}} \to \Sigma$ непрерывно и биективно, то это гомеоморфизм!

Теперь мы можем интерпретировать понятие вычета в бесконечности, рассмотренное на стр. 378, в терминах вычетов на поверхности Римана $\hat{\mathbb{C}}$ в точке ∞. Пусть $\hat{\mathscr{V}}$ — открытая окрестность точки ∞ в $\hat{\mathbb{C}}$, т. е. дополнение некоторого компакта в $\mathbb{C}$. Положим $\mathscr{V} = \complement_{\hat{\mathscr{V}}} \{\infty\} = \hat{\mathscr{V}} \cap \mathbb{C}$. Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная на $\mathscr{V}$, а следовательно, имеющая на $\hat{\mathscr{V}}$ точку ∞ в качестве возможной изолированной точки.

Согласно сказанному выше, выяснить, будет ли точка ∞ регулярной для $\vec{f}$, или же полюсом порядка m, или же существенно особой точкой, можно с помощью некоторой карты окрестности бесконечно удаленной точки, например $z \to 1/z$. Затем следует рассмотреть поведение преобразованной функции $\vec{g}$: $z \to \vec{f}(1/z)$ в точке 0.

Коэффициенты Лорана функции $\vec{g}$ в точке 0 связаны с коэффициентами Лорана функции $\vec{f}$ в бесконечности соотношениями $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{c}_{-n}(\vec{g})$. Следовательно, точка ∞ будет регулярной точкой функции $\vec{f}$ тогда и только тогда, когда $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -1$, т. е. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant 1$, и регулярной точкой или полюсом порядка $\leqslant m$, если $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -m-1$, т. е. при $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant m+1$. Это как раз то, о чем мы говорили на стр. 384.

Совсем иначе обстоит дело для 1-формы $\vec{\omega}$, голоморфной в $\mathscr{V}$. Здесь $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$ под действием карты $z \to \frac{1}{z}$ переходит в форму $\vec{C}(z)\,dz = -\vec{f}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}$, которую следует изучать в окрестности точки 0. Коэффициенты Лорана функции $\vec{f}$ в бесконечности и функции $\vec{C}$ в начале координат связаны на этот раз соотношениями $\vec{c}_n(\vec{f}) = c_{-(n+2)}(\vec{C})$. Следовательно, по определению форма $\vec{\omega}$ будет регулярной в точке ∞ сферы Римана $\hat{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда функция $\vec{C}$ будет регулярной в точке 0, т. е. при $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -1$, или $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant -1$. Точно так же точка ∞ из $\hat{\mathbb{C}}$ будет регулярной или полюсом порядка $\leqslant m$ для формы $\vec{\omega}$, если $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -m-1$, т. е. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant m-1$.

Таким образом, *в точке ∞ форма dz имеет полюс 2-го порядка, форма dz/z имеет там полюс 1-го порядка, а форма $z^k\,dz$*

при $k \geqslant -1$ — *полюс порядка* $k+2$. Как это видно из карты, если функция $\vec{f}$ имеет в точке a поверхности Римана W полюс порядка m, то ее дифференциал имеет там полюс порядка $m+1$ $\left[\vec{g} = \frac{\vec{c}_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots \text{ дает } d\vec{g} = \vec{g}'(z)\,dz = dz\left(-\frac{m\vec{c}_{-m}}{(z-a)^{m+1}} + \ldots\right)\right]$. *Функция* $z \to z$ *имеет в бесконечности полюс* 1*-го порядка, а следовательно, ее дифференциал — полюс* 2*-го порядка.*

Отождествление $\vec{f}$ и $\vec{f}\,dz$ в $\mathbb{C}$ приводит в $\widehat{\mathbb{C}}$ к грубым ошибкам, *поскольку* dz *имеет в бесконечности полюс.* Тщательное различение функций и 1-форм помогает избежать многих ошибок. Однако на самой плоскости $\mathbb{C}$ в этом нет необходимости, и в теории функций комплексных переменных предпочитают проводить рассуждения в $\mathbb{C}$, например пользуясь второй основной интегральной формулой, не обобщающейся на многообразия.

Если теперь мы будем искать вычет формы $\vec{\omega}$ в точке ∞, то, согласно определению (стр. 391), получим коэффициент $\vec{c}_{-1}(\vec{C})$, т. е. $-\vec{c}_{-1}(\vec{f})$, а это совпадает с определением, данным на стр. 378. Форма dz/z имеет полюс 1-го порядка, поэтому не удивительно, что ее вычет равен -1. Вычет имеет следующую интегральную интерпретацию. По определению $\mathrm{Res}_\infty \vec{\omega}$ равен $\mathrm{Res}_0(\vec{C}(z)\,dz) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'} \vec{C}(z)\,dz$ (где γ' — малая окружность с центром 0, пробегаемая в положительном направлении) $= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} \vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} \vec{f}(z)\,dz$ (где γ — большая окружность, полученная из γ' преобразованием $z \to 1/z$ и пробегаемая в противоположном направлении). Мы снова возвращаемся к определению, принятому для $\mathrm{Res}_\infty \vec{f}$ на стр. 384 (строго говоря, надо было бы писать $\mathrm{Res}_\infty(\vec{f}\,dz)$, а не $\mathrm{Res}_\infty \vec{f}$, так как последнее выражение не имеет смысла).

Дадим, наконец, интерпретацию внешней теоремы о вычетах — теоремы 19_2. Согласуем сначала наши обозначения с обозначениями, принятыми в этой теореме. Положим $\widehat{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$, а значит, $\Omega = \complement_{\widehat{\Omega}} \infty = \widehat{\Omega} \cap \mathbb{C}$. Множество Ω является дополнением в $\mathbb{C}$ к некоторому компакту, а следовательно, является открытым множеством в $\widehat{\mathbb{C}}$, содержащим ∞. Поскольку функция $\vec{f}$ голоморфна в $\complement_\Omega \{a_i\}_{i \in I}$, форма $\vec{\omega} = \vec{f}\,dz$ голоморфна в $\complement_\Omega \left\{\{a_i\}_{i \in I} \cup \{\infty\}\right\}$. Следовательно, к ней можно применить теорему 22с о вычетах относительно множества $\hat{V} = \complement_{\hat{\mathbb{C}}} \mathring{W}$ (для возможности применения теоремы 22с надо, чтобы оно было компактным) и его границы Г. Кривая Г как граница $\hat{V}$ должна обходиться в отрицательном направлении. Возможными особыми точками формы $\vec{\omega}$ в $\hat{\Omega}$ будут только a_i и ∞. Для каждой из них надо будет вычислить вычет формы $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$, который мы называем (нестрого) вычетом $\vec{f}$ соответственно в точке a_i (по определению, данному на стр. 376), и в точке ∞ (по определению на стр. 378). Применение теоремы 22с дает тот же результат, что и теорема 19_2. Если рассмотрение вести на сфере Римана, то справедлива лишь одна теорема о вычетах — теорема 22с, а точка ∞ сферы $\hat{\mathbb{C}}$ ничем не отличается от остальных ее точек.

Итак, все удается объяснить, если как следует пошевелить мозгами. Если мы действительно хотим никогда не ошибаться, то — подчеркнем это еще раз — разрешать себе смешивать функцию $\vec{f}$ с формой $\vec{f}dz$ можно только в $\mathbb{C}$ и только тогда, когда нет речи о бесконечно удаленных точках и диффеоморфизмах. Во всех остальных случаях их надо тщательно отличать друг от друга и говорить о вычете (а именно о вычете в бесконечности) только для формы $\vec{f}dz$. Вычет 1-формы имеет смысл, в то время как вычет функции — нет. В дальнейшем мы будем допускать вольность речи, но с этим надо быть настороже.

Уместно заметить, что Риман ввел свою сферу именно для того, чтобы избежать затруднений, возникающих из-за появления бесконечно удаленной точки. Это и другие обстоятельства, аналогичные рассмотренным прежде, приводят к необходимости различать функции и голоморфные 1-формы, а затем к необходимости вообще вводить и изучать поверхности Римана. Впервые по-настоящему корректное определение поверхностей Римана было дано Германом Вейлем (Die Idee der Riemannschen Fläche, 1923) с помощью систематического применения введенного им понятия локальных карт. Отсюда и берет начало *современное определение* общих дифференцируемых многообразий. Из затруднений, связанных с точкой ∞, после ряда исследований родились некоторые наиболее важные понятия современной математики.

Теорема 24. *Для того чтобы функция (или 1-форма) была мероморфной на всей комплексной плоскости, включая бесконечность, т. е. на сфере Римана $\hat{\mathbb{C}}$, необходимо и достаточно, чтобы она была рациональной.*

Доказательство. Если $\vec{f}$ — рациональная функция, т. е. $\vec{f}=\vec{P}/Q$, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в $\vec{F}$, а Q — комплексный полином, то, очевидно, такая функция мероморфна на $\hat{\mathbb{C}}$. Нам надо доказать обратное утверждение. Пусть $\vec{f}$ — мероморфная функция на $\hat{\mathbb{C}}$. Особенности $\vec{f}$ на $\hat{\mathbb{C}}$ образуют замкнутое множество изолированных точек. Так как $\hat{\mathbb{C}}$ компактно, то таких точек имеется лишь конечное число. Пусть a_i — особые точки в конечной части плоскости. Для каждой из точек a_i отделим «полярную часть» $\vec{f}$, т. е. сумму $\vec{f}_i$ членов разложения Лорана в окрестности a_i с показателями <0. Разность $\vec{g}=\vec{f}-\left(\sum\limits_i \vec{f}_i\right)$ есть целая функция на $\mathbb{C}$, поскольку ее единственные возможные особые точки a_i являются регулярными точками. На бесконечности функция $\vec{f}$ имеет полюс, но полярные части $\vec{f}_i$ там регулярны и даже равны нулю, а значит, функция $\vec{g}$ также имеет полюс. Согласно теореме 13 Лиувилля, функция $\vec{g}$ является полиномом, а значит, функция $\vec{f}$ — рациональной дробью, полученной, кстати, в форме разложения на простые дроби.

Если же речь идет об 1-форме, то ее следует записать в виде $\vec{f}(z)\,dz$ и провести рассуждения с функцией $\vec{f}$.

Формула для нулей и полюсов мероморфной функции

Теорема 25. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$ и f — мероморфная комплекснозначная функция в Ω. Пусть $V\subset\Omega$ — компактное многообразие с краем класса C^1 вещественной размерности 2, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$.*

Пусть c — комплексное число, и пусть граница Γ многообразия V не проходит ни через один из корней уравнения $f(z)=c$ и ни через один из полюсов f. Тогда, если Γ обходится в направлении границы V, справедлива формула

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=N(f;V;c)-N(f;V;\infty), \quad \text{(VII, 4; 24)}$$

в которой $N(f;V;c)$ — число корней уравнения $f(z)=c$, содержащихся в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность, а $N(f;V;\infty)$ — число полюсов f в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, каков его порядок. Если, в частности, функция f голоморфна в Ω, то правая часть равна $N(f;V;c)$.

Доказательство. Функция $\frac{f'}{f-c}: z \to \frac{f'(z)}{f(z)-c}$ голоморфна в открытом множестве, полученном удалением из Ω корней уравнения $f=c$ и полюсов функции f.

Пусть a — корень уравнения $f(z)=c$ кратности k. Тогда в окрестности точки a имеет место разложение вида

$$f(z)-c=(z-a)^k g(z), \qquad \text{(VII, 4; 25)}$$

где g — голоморфная функция, отличная от нуля в окрестности точки a. Отсюда следует, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)-c}=\frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{(VII, 4; 26)}$$

(логарифмическая производная функции $f-c$) и что, следовательно, функция $f'/(f-c)$ имеет в точке a простой полюс с вычетом k, где k — кратность корня a уравнения $f(z)=c$. Если теперь функция f имеет полюс в точке a порядка m, то справедлива формула

$$f(z)-c=\left(\frac{1}{z-a}\right)^m h(z), \qquad \text{(VII, 4; 27)}$$

где $h(z)$ — голоморфная функция, не имеющая нулей в окрестности точки a.

Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)-c}=-\frac{m}{z-a}+\frac{h'(z)}{h(z)}, \qquad \text{(VII, 4; 28)}$$

а это означает, что вычет функции $f'/(f-c)$ в точке a равен $-m$, где m — порядок полюса a функции f. Нужный результат теперь непосредственно вытекает из теоремы 19.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Пусть, кроме того, функция f голоморфна в Ω. Тогда отображение f компактного ориентированного многообразия $V \subset \mathbb{C}$ с краем имеет в точке $c \in \mathbb{C}$, не принадлежащей образу $f(\Gamma)$ границы, топологическую степень, равную числу корней уравнения $f(z)=c$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность, и*

$$d(f\,|V;\, c)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=N(f;\, V;\, c). \qquad \text{(VII, 4; 29)}$$

Доказательство. Согласно определению, приведенному на стр. 314 гл. VI, топологическая степень равна индексу цикла $f\,|\,\Gamma$ относительно точки c. Этот индекс вычисляется (стр. 303 гл. VI) с помощью интеграла

$$I(f\,|\,\Gamma;\, c)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{f\,|\,\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-c}. \qquad \text{(VII, 4; 30)}$$

По определению интеграла по особому циклу (формула (VI, 6; 60)) этот интеграл совпадает с интегралом (VII, 4; 29), и следствие доказано.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что топологическая степень функции f относительно компактного ориентированного многообразия V с краем в предположении голоморфности функции f вычисляется очень просто даже при наличии кратных корней.

Вернемся к вычислению топологической степени, проводившемуся на стр. 315 гл. VI. Там дело сводилось к рассмотрению прообразов точки c, т. е. в данной ситуации корней уравнения $f(z)=c$. Если эти корни изолированы и если в каждом из них якобиан $\neq 0$, то топологическая степень равна разности числа корней с якобианом >0 и числа корней с якобианом <0 (якобиан *вычислялся относительно поля* $\mathbb{R}$). Мы знаем, что якобиан голоморфного отображения (относительно $\mathbb{R}$) всегда $\geqslant 0$ [по формуле (VI, 2; 7) якобиан функции f равен $|f'(z)|^2$], откуда видно, почему теперь вычисление топологической степени свелось просто к подсчету числа корней. Однако метод гл. VI неприменим к точкам, в которых якобиан равен нулю. Мы видим, что для голоморфного отображения f, если в некоторых точках его производная f' обращается в нуль, т. е. если корни кратны, при вычислении топологической степени надо учитывать кратность таких корней. Для $\mathbb{R}$-дифференцируемых отображений столь же простых результатов нет. Полученные выводы позволяют дать новую интерпретацию доказательства теоремы Даламбера, приведенного в следствии 1 теоремы гл. VI. Там мы установили, что топологическая степень полинома P в точке 0 равна m. Тот факт, что $m \neq 0$, обеспечивал существование *не менее* одного корня. Теперь этому факту можно дать более точное истолкование, а именно: полином имеет в точности m корней, если считать каждый его корень столько раз, какова его кратность.

Следствие 2. *Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — последовательность комплексных голоморфных функций, определенных на открытом множестве Ω плоскости $\mathbb{C}$, локально равномерно сходящаяся при n, стремящемся к бесконечности, к голоморфной функции f.*

Если $V \subset \Omega$ есть многообразие с краем вещественной размерности 2 класса C^1 и если уравнение $f(z)=0$ не имеет корней на $\dot{V}$, то для достаточно больших n уравнение $f_n(z)=c$ тем более не имеет корней на $\dot{V}$ и число корней уравнений $f_n(z)=c$ в $\dot{V}$ равно числу корней уравнения $f(z)=c$ в $\dot{V}$, если считать каждый корень с его порядком кратности.

Доказательство. Утверждение, относящееся к контуру, получается сразу. В самом деле, если уравнение $f(z)=c$ не имеет корней на $\dot{V}$, то величина $|f(z)-c|$ имеет минимум $\delta>0$ на компактном множестве $\dot{V}$. Если взять n настолько большим, чтобы разность $|f-f_n|$ была $\leqslant \delta/2$ на $\dot{V}$, то уравнение $f_n(z)=c$ не будет иметь корней на $\dot{V}$. Для завершения доказательства достаточно вычислить интегральное выражение $N(f_n; V; c)$, определяемое по формуле (VII, 4; 29), и выполнить в этом интеграле переход к пределу (простейший случай равномерной сходимости на компакте).

Замечание. С учетом предыдущего следствия полученный результат совпадает с теоремой 66 гл. VI.

Пусть f — комплекснозначная голоморфная функция, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$. Говорят, что функция f *p-листна*, если для каждой точки $c \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z)=c$ имеет не более p корней в Ω (считая каждый корень с его кратностью) и ровно p корней хотя бы для одной точки c. Отсюда следует, что f отлична от постоянной.

Следствие 3. *Если голоморфные комплекснозначные функции f_n, заданные в связном множестве Ω, сходятся локально равномерно в Ω к некоторому пределу f и если все функции f_n p-листны, то либо этот предел f есть постоянная функция, либо функция f сама p-листна.*

Доказательство. Заметим сначала, что постоянная функция, очевидно, не p-листна, поскольку существует значение, которое она принимает бесконечное число раз.

Предположим поэтому, что предельная функция f не постоянна. Тогда корни уравнения $f(z)=c$ будут изолированными точками множества Ω. Если бы там имелось $q>p$ $(q \leqslant +\infty)$ корней этого уравнения, то можно было бы найти такое компактное многообразие V с краем, содержащееся в Ω, что его граница не содержала бы этих корней, а $\overset{\circ}{V}$ содержала бы $q_1>p$ корней (причем $q_1=q$, если q конечно). Тогда из следствия 2 вытекало бы, что для достаточно больших n уравнение $f_n(z)=c$ имело бы не менее q_1 корней, лежащих в $\overset{\circ}{V}$, что противоречит предположению о том, что функции f_n p-листны. Этим и доказано следствие.

Замечание. Естественно, что случай, когда предельная функция f постоянна, вполне возможен. Достаточно рассмотреть последовательность функций $f_n(z)=z/n$. Функции эти однолистны и равномерно сходятся к 0 на каждом компакте из $\mathbb{C}$. Их предел 0 не является однолистной функцией.

Следствие 4. *Пусть f — комплексная голоморфная функция, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$. Предположим, что для функции f в точке a производные порядка $1, 2, \ldots, m-1$ равны нулю, а производная порядка m не равна нулю. Тогда существуют такие окрестности $\mathscr{A}$ точки a и $\mathscr{B}$ точки $b = f(a)$, что f отображает $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$, причем $f(\mathscr{A})$ покрывает $\mathscr{B}$ точно m раз.*

Когда мы говорим, что $f(\mathscr{A})$ покрывает $\mathscr{B}$ (точно) m раз, то это означает, что для каждой точки $c \in \mathscr{B}$ уравнение $f(z) = c$ имеет точно m корней в $\mathscr{A}$ (считая каждый с его кратностью).

Доказательство. Обозначим через Δ круг с центром в точке a, в котором уравнение $f(z) = b$ не имеет других корней, кроме a, являющегося корнем кратности m. Тогда топологическая степень отображения f круга Δ в $\mathbb{C}$ в точке b равна m. Однако топологическая степень в точке c, непрерывно движущейся так, чтобы не пересекать образа границы γ области Δ при отображении f, постоянна (теорема 66 гл. VI или предыдущее следствие 2). Значит, существует такое открытое множество $\mathscr{B}$, содержащее точку b, что для $c \in \mathscr{B}$ топологическая степень $f|\Delta$ в точке c везде равна m. Если теперь через $\mathscr{A}$ обозначить пересечение $\mathring{\Delta} \cap f^{-1}(\mathscr{B})$, то мы получим, что $f(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$ и что для каждой точки $c \in \mathscr{B}$ уравнение $f(z) = c$ имеет m корней в $\mathscr{A}$, чем и доказано следствие 4.

Следствие 5. *Пусть f — комплексная голоморфная функция, заданная на открытом множестве Ω плоскости $\mathbb{C}$ и не постоянная ни в какой связной компоненте Ω. Тогда отображение f множества Ω в $\mathbb{C}$ открыто и, в частности, образ $f(\Omega)$ открыт. Если функция f инъективна, то она является $\mathbb{C}$-диффеоморфизмом Ω на $f(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$. Поскольку функция f не постоянна в связной компоненте множества Ω, содержащей точку a, то из следствия 3 теоремы 11 вытекает, что хотя бы одна из ее производных не обращается в нуль в точке a. Применяя предыдущее следствие к сужению f на произвольную открытую окрестность точки a, можно убедиться, что образ при отображении f этой окрестности является некоторой окрестностью точки $b = f(a)$. Следовательно (см. таблицу на стр. 312 гл. III), отображение f открыто. Далее, если функция f инъективна, то она должна быть гомеоморфизмом Ω на $f(\Omega)$. Кроме того, ее производная в каждой точке $\neq 0$. Значит, в силу теоремы об обратных функциях (в самой простой форме, поскольку речь идет о комплексной функции от комплексной переменной) это отображение является диффеоморфизмом.

Замечание 0. Следствие, очевидно, несправедливо, если функция постоянна.

Замечание 1. Из сказанного, вообще говоря, вовсе не следует, как мы это уже видели в гл. III, что f есть локальный гомеоморфизм. Впрочем, это совершенно ясно, поскольку если мы находимся в условиях предыдущего следствия с $m \geqslant 2$, то f заведомо не будет локальным гомеоморфизмом.

Замечание 2. Можно уточнить следствие и обобщить теорему 29 гл. III об обратных функциях. Пусть f — комплексная голоморфная функция в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $f(a) = b$. Применим теорему 29 гл. III к полю $\mathbb{C}$. Легко видеть, что если $f'(a) \neq 0$, то существуют такая окрестность $\mathscr{A}$ точки a и такая окрестность $\mathscr{B}$ точки b, что f есть $\mathbb{C}$-диффеоморфизм (класса C^∞) окрестности $\mathscr{A}$ на окрестность $\mathscr{B}$[1]). Если же $f'(a) = 0$, то с помощью результатов гл. III ничего заключить нельзя (если исключить такие специальные методы, как метод, изложенный на стр. 341). Здесь же, поскольку скалярным полем является $\mathbb{C}$ и размерность равна 1, всегда можно сделать определенный вывод. Предположим, что в точке a производные функции f порядков $1, 2, \ldots, m-1$ равны нулю, а производная порядка m отлична от нуля. Тогда можно записать

$$f(z) - b = (z-a)^m h(z), \tag{VII, 4; 31}$$

где функция h в точке a в нуль не обращается. Поэтому существует такая открытая окрестность $\mathscr{A}_1$ точки a, в которой можно выбрать голоморфное значение функции $\ln h$, а значит, $h^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\ln h}$. Можно даже получить почленно разложение Тейлора функции $h^{\frac{1}{m}}$ в точке a, пользуясь разложением h и разложением бинома: если $h(z) = h(a)(1 + \ldots)$, то $(h(z))^{\frac{1}{m}} = k(1 + \ldots)^{\frac{1}{m}}$, где k — какое-либо значение $(h(a))^{\frac{1}{m}}$, а $(1 + \ldots)^{\frac{1}{m}}$ разлагается по формуле бинома. Функция $(f-b)^{\frac{1}{m}}$ имеет в $\mathscr{A}_1$ некоторое голоморфное значение $g(z) = (z-a)(h(z))^{\frac{1}{m}}$. Кроме того, так как производная этой функции в точке a не равна нулю (она равна k), то функция g, принимающая значение 0 в точке a, удовлетворяет условиям применимости теоремы об обратной функции. Следовательно, существуют открытая окрестность $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1$ точки a и открытая окрестность $\mathscr{K}$ точки 0, такие, что g является $\mathbb{C}$-диффеоморфизмом $\mathscr{A}$ на $\mathscr{K}$. Уменьшая

[1]) Это было еще раз установлено в следствии 5.

эти открытые множества, можно всегда считать, что $\mathscr{K}$ является кругом с центром в точке 0.

Пусть g^{-1} — обратный диффеоморфизм $\mathscr{K}$ на $\mathscr{A}$, и пусть мы хотим решить уравнение $f(z)=c$. Будем предполагать, что $c \in b+\mathscr{K}^m$ (где $\mathscr{K}^m$ — множество значений ζ^m при $\zeta \in \mathscr{K}$; это снова круг с центром в 0). Мы приходим к необходимости искать решение уравнения $(f(z)-b)^{1/m}=(c-b)^{1/m}$, содержащего выражения, имеющие m различных значений в $\mathscr{K}$. Решениями в $\mathscr{A}$ будут $z=g^{-1}\left((c-b)^{1/m}\right)$. Все m решений различны всюду, кроме точки $c=b$, в которой они совпадают с a. Можно сказать, что обращение функции $u=f(z)$ в окрестности точки a дается «многозначной функцией» с m значениями $z=$ $=g^{-1}\left((u-b)^{1/m}\right)$. Если $u=f(z)$ — голоморфная функция от z и если $f-b$ в точке a имеет нуль кратности m, то локально z является голоморфной функцией от $(u-b)^{1/m}$. Положив для простоты $a=b=0$, получим, что если $u=f(z)$ голоморфна в окрестности точки 0 и в точке 0 имеет нуль кратности m, то z в окрестности 0 является голоморфной функцией от $u^{1/m}$ (а следовательно, «многозначной» функцией аргумента u).

Теорема 26. *Если в условиях теоремы 25 функция Φ голоморфна в Ω, то имеет место формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\Phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=\sum\Phi(\alpha_i)-\sum\Phi(\beta_j), \qquad \text{(VII, 4; 32)}$$

где α_i — корни уравнения $f(z)=c$ в $\mathring{V}$ и β_j — полюсы f в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность.

Доказательство. При доказательстве теоремы 25 мы видели, что функция $f'/(f-c)$ имеет в каждой точке α_i простой полюс с вычетом k, равным порядку нуля α_i функции $f-c$. Функция $\Phi\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $k\Phi(\alpha_i)$. Точно так же если β_j — полюс функции f порядка m, то $\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $-m$. Следовательно, $\Phi\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $-m\Phi(\beta_j)$, что и дает нужный результат в силу теоремы о вычетах.

Обобщение на поверхности Римана

Некоторые из предыдущих утверждений обобщаются на поверхности Римана.

Теорема 27. *Пусть W — поверхность Римана, f — комплексная мероморфная функция на W и V — компактное подмногообра-*

зие класса C^1 вещественной размерности 2 с границей Γ. Пусть Γ снабжена ориентацией границы компакта V, имеющего в свою очередь ориентацию, определяемую ориентацией поверхности W. Будем предполагать, что функция $f - c$ не имеет ни нулей, ни полюсов на Γ и не постоянна ни в одной связной компоненте поверхности W. Пусть, кроме того, на W задана комплексная голоморфная функция Φ. Тогда справедливы равенства

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{df}{f-c} = N(f;\ V;\ c) - N(f;\ V;\ \infty),$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \Phi\frac{df}{f-c} = \sum \Phi(\alpha_i) - \sum \Phi(\beta_j), \qquad \text{(VII, 4; 33)}$$

где $N(f;\ V;\ c)$ — число корней α_i уравнения $f(z) = c$ в $\mathring{V}$, а $N(f;\ V;\ \infty)$ — число полюсов β_j функции f в $\mathring{V}$, каждый из которых считается со своим порядком кратности.

Доказательство. Написанные формулы являются результатом применения формулы вычетов (теорема 22c) к мероморфным 1-формам $df/(f-c)$ и $\Phi\, df/(f-c)$. Вычисление вычетов — локальная операция и может производиться с помощью карт, а на карте $df = f'(z)\,dz$, так что вычеты совпадают с вычетами, получаемыми по теоремам 25 и 26.

Следствия. Следствия будут такие же, как и у предыдущих теорем. Наиболее интересным будет тот случай, когда W является связным компактом и когда можно брать $V = W$, т. е. когда граница Γ — пустое множество [1]). Тогда получается, что $N(f;\ W;\ c) = N(f;\ W;\ \infty)$, а следовательно, число $N(f;\ W;\ c)$ не зависит от выбора c.

Следствие 1. *Мероморфная непостоянная комплексная функция, определенная на связном компакте W, принимает все свои значения одно и то же конечное число раз.*

Этому факту легко дать истолкование.

Мероморфная функция f на W определяет отображение W в $\hat{\mathbb{C}}$, принимающее значение ∞ в каждом полюсе a функции f. Поэтому она *голоморфно* отображает W в $\hat{\mathbb{C}}$. В самом деле, если точка a является полюсом, то $1/f$ в окрестности точки a есть голоморфная функция со значениями в $\mathbb{C}$ (например, согласно следствию 2 теоремы 16), равная нулю в точке a, и для проверки сказанного остается лишь рассмотреть карту $\zeta \to 1/\zeta$, отображающую множество $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на множество

[1]) В этом случае вторая формула не представляет никакого интереса, поскольку функция Φ, голоморфная на W, постоянна (следствие 7 теоремы 12).

$\mathbf{C}_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ (теорема 33_3 гл. III). В частности, в качестве непрерывного отображения W в $\hat{\mathbb{C}}$ отображение $1/f$ имеет одну и ту же топологическую степень для всех точек множества $\hat{\mathbb{C}}$ (см. последнюю фразу гл. VI). Из следствия 1 теоремы 25 вытекает, что эта топологическая степень есть в точности число раз, которое функция f принимает каждое свое значение: $d(f;\ W;\ c) = N(f;\ W;\ c)$. Это число будем записывать проще в виде $d(f)$ или $N(f)$ и называть *степенью функции* f. Впрочем, особой необходимости рассматривать именно $\hat{\mathbb{C}}$ нет:

Следствие 2. *Непостоянное голоморфное отображение связной компактной поверхности Римана W на другую такую же поверхность W' открыто и имеет во всех точках W' одну и ту же топологическую степень $d(f) > 0$, равную числу $N(f)$ принимаемых ею в W' значений.*

Предположим, в частности, что f — непостоянная рациональная дробь — мероморфная функция на $\mathbb{C}$ или голоморфное отображение $\hat{\mathbb{C}}$ в $\hat{\mathbb{C}}$. Пусть сначала $f = P$ — полином степени $m > 0$. Полином P принимает значение ∞ только в точке ∞. Пользуясь для независимой переменной и функции одной и той же картой $\zeta \to 1/\zeta$, отображающей $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $\mathbf{C}_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\}$, и учитывая, что $1/P(z) \sim 1/(a_0 z^m)$, получаем, что уравнение $P(z) = \infty$ имеет корень кратности m в точке ∞. Следовательно, степень функции $f = P$ равна m и P принимает каждое значение m раз. Мы снова получаем теорему Даламбера. Если теперь взять $f = P/Q$, где P и Q — полиномы степени p и q, не имеющие общих нулей, то функция f значение ∞ принимает q раз в нулях полинома Q и, кроме того, при $p > q$ в точке ∞ с кратностью $p - q$. Ее степень равна, следовательно, $q + (p - q) = p$ при $p > q$ и q при $p \leqslant q$; во всех случаях $d = \max(p,\ q)$. Поэтому если нужно решить уравнение $f = c \in \mathbb{C}$, то следует решить уравнение $P - cQ = 0$, имеющее $d = \max(p,\ q)$ корней в $\hat{\mathbb{C}}$ (если $p = q$ и если число c таково, что $P - cQ$ имеет меньшую степень, то функция f принимает значение c в точке ∞).

Первая проблема Кузена в комплексной плоскости

Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — замкнутое множество изолированных точек $\mathbb{C}$. Для каждой из точек a_i определим функцию P_i — полином относительно $1/(z - a_i)$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$:

$$\vec{P}_i(z) = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{c}_{-k,\,i} \left(\frac{1}{z - a_i}\right)^k. \qquad \text{(VII, 4; 34)}$$

Первая проблема Кузена в комплексной плоскости заключается в определении мероморфной функции $\vec{f}$ в $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющей точки a_i в качестве полюсов, и с главными частями P_i в этих полюсах: функция $\vec{f} - \vec{P}_i$ должна быть регулярной в точке a_i.

Если ряд $\sum \vec{P}_i$ равномерно сходится на каждом компакте, не содержащем полюсов, то задача, очевидно, разрешима, так как искомая функция есть сумма этого ряда. В самом деле, она представляет собой некоторую голоморфную функцию в открытом множестве, дополнительном к множеству точек a_i (следствие 1 теоремы 15 Вейерштрасса). С другой стороны, если рассмотреть произвольную точку a_k, то ряд $\sum\limits_{i \neq k} P_i$ равномерно сходится на окружности с центром в a_k и, следовательно, по теореме Вейерштрасса во всем круге, ограниченном этой окружностью, а значит, на любом компакте, не содержащем ни одной из точек $a_i \neq a_k$.

Полученная сумма представляет собой голоморфную функцию в $\complement \{a_i\}_{i \neq k}$, а это значит, что $\vec{P}_k$ есть главная часть функции $\vec{f}$ в точке a_k. Однако, вообще говоря, ряд $\sum \vec{P}_i$ не сходится и заранее не ясно, имеет ли поставленная задача решение.

Теорема 28 (Миттаг-Леффлер). *Какова бы ни была последовательность точек a_i и главных частей $\vec{P}_i$, существует мероморфная функция $\vec{f}$ в $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющая полюсы a_i и заданные главные части $\vec{P}_i$. Общее решение этой задачи получается прибавлением к частному решению произвольной целой функции со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Пусть b — произвольная[1]) точка, не принадлежащая множеству точек a_i. Пусть задана такая последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, что ряд $\sum \varepsilon_i$ сходится. Функция $\vec{P}_i$ голоморфна в круге $|z - b| < |a_i - b|$, а следовательно, имеет разложение Тейлора, нормально сходящееся в любом круге строго меньшего радиуса с центром в точке b. Значит, существует полином $\vec{Q}_i$, являющийся конечной суммой сте-

[1]) Вообще говоря, берут $b = 0$. Однако может случиться, что 0 совпадает с одной из точек a_i! Даже в этом случае задачу Миттаг-Леффлера решают сначала относительно системы точек $a_i \neq 0$ при $b = 0$, а затем к полученному результату добавляют главную часть, заданную для точки 0.

пеней $z-b$, такой, что $|\vec{P}_i(z)-\vec{Q}_i(z)|\leqslant\varepsilon_i$ для $|z-b|\leqslant$ $\leqslant\frac{|a_i-b|}{2}$.

Рассмотрим ряд

$$\vec{f}(z)=\sum_i(\vec{P}_i(z)-\vec{Q}_i(z)). \qquad \text{(VII, 4; 35)}$$

Этот ряд нормально сходится на каждом компакте K, не содержащем ни одного из полюсов a_i. В самом деле, такое множество K содержится в некотором круге $|z-b|\leqslant R$. Если выбрать целое число p так, чтобы $|a_n-b|\geqslant 2R$ для $n\geqslant p$, то при $n\geqslant p$ будет иметь место неравенство $|\vec{P}_n(z)-\vec{Q}_n(z)|\leqslant\varepsilon_n$ для $z\in K$. Сумма этого ряда $\vec{f}$, согласно теореме Вейерштрасса, является голоморфной функцией в открытом дополнении к точкам a_i. Функция $\vec{f}-(\vec{P}_k-\vec{Q}_k)$ есть сумма некоторого ряда, который в силу рассуждений, аналогичных предыдущим, сходится равномерно в дополнении к множеству точек $a_i\neq a_k$, а следовательно, является голоморфной функцией в окрестности точки a_k. Так как $\vec{Q}_k$ — полином, то это означает, что $\vec{f}$ имеет полюс в точке a_k с главной частью $\vec{P}_k$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема сохраняет силу, если заменить $\mathbb{C}$ на произвольное открытое множество $\Omega\subset\mathbb{C}$. Однако доказательство, хотя и основано на тех же идеях, требует гораздо более тонких рассуждений.

Замечание 2. Предыдущую задачу можно значительно обобщить.

Зададимся точками a_i и для каждой из них разложением Лорана с ограниченными в обоих направлениях показателями:

$$\vec{P}_i(z)=\sum_{n=p_i}^{q_i}\vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n,\ p_i\in\mathbb{Z},\ q_i\in\mathbb{Z},\ q_i\geqslant p_i. \qquad \text{(VII, 4; 35}_2\text{)}$$

Будем теперь искать такую мероморфную функцию $\vec{f}$ на $\mathbb{C}$, чтобы ее разложение Лорана в окрестности точки a_i для каждого i имело вид $\sum\limits_{n=p_i}^{+\infty}\vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n$, где $\vec{c}_{n,i}$ — коэффициенты $\vec{P}$ для каждого $n\leqslant q_i$. Тогда функция $\dfrac{\vec{P}_i}{(z-a_i)^{q_i+1}}$ голоморфна в круге $|z|<|a_i|$ и, следовательно, можно найти такой полином $\vec{Q}_i$, что

$$\left\|\frac{\vec{P}_i(z)}{(z-a_i)^{q_i+1}}-\vec{Q}_i(z)\right\|<\varepsilon_i\left(\frac{2}{3|a_i|}\right)^{q_i+1} \quad \text{для } |z|\leqslant\frac{|a_i|}{2}, \qquad \text{(VII, 4; 35}_3\text{)}$$

а потому

$$\|\vec{P}_i(z)-(z-a_i)^{q_i+1}\vec{Q}_i(z)\|\leqslant\varepsilon_i \quad \text{для} \quad |z|\leqslant\frac{|a_i|}{2}.$$

Сходящийся ряд $\vec{f}(z)=\sum\limits_i\left(\vec{P}_i(z)-(z-a_i)^{q_i+1}\vec{Q}_i(z)\right)$ является решением поставленной задачи.

В частности, если каждое разложение $\vec{P}_i$ сводится к постоянной $\vec{c}_i\in\vec{F}$, то получается целая голоморфная функция на $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, принимающая значения $\vec{c}_i$ в точках a_i.

Важные частные случаи

Если все точки a_i заданы как *простые полюсы* и для каждой из них заданы главные части $\vec{P}_i(z)=\vec{c}_i/(z-a_i)$, причем ряд $\sum\|\vec{c}_i\|/|a_i|$ сходится, то в качестве решения задачи Миттаг-Леффлера можно взять $\sum\vec{P}_i$. В самом деле, для $|z|\leqslant|a_i|/2$ имеет место оценка

$$\frac{\|\vec{c}_i\|}{|z-a_i|}\leqslant 2\,\frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|}, \qquad \text{(VII, 4; 36)}$$

из которой следует, что рассматриваемый ряд нормально сходится на каждом компакте из открытого дополнения к множеству точек a_i (см. рассуждение, проведенное выше).

Если в случае простых полюсов ряд $\sum\|\vec{c}_i\|/|a_i|$ не сходится, а ряд $\sum\|\vec{c}_i\|/|a_i|^{r+1}$ при некотором r сходится, то в качестве решения можно взять функцию

$$\vec{f}(z)=\sum_i\vec{c}_i\left(\frac{1}{z-a_i}+\frac{1}{a_i}+\frac{z}{a_i^2}+\ldots+\frac{z^{r-1}}{a_i^r}\right). \qquad \text{(VII, 4; 37)}$$

(Здесь мы положили $b=0$. Затем рассматривается полином $-\vec{c}_i\left(\frac{1}{a_i}+\frac{z}{a_i^2}+\ldots+\frac{z^{r-1}}{a_i^r}\right)=\vec{Q}_i(z)$, являющийся началом разложения функции $\vec{c}_i/(z-a_i)$ по степеням z в круге $|z|<|a_i|$, и составляется разность $\vec{P}_i-\vec{Q}_i$.)

В самом деле, при $|z| \leqslant |a_i|/2$ справедливо неравенство

$$\left\| \vec{c}_i \left(\frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{a_i} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r} \right) \right\| =$$

$$= \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \sum_{n=r}^{\infty} \left| \frac{z}{a_i} \right|^n \leqslant \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \frac{\left| \frac{z}{a_i} \right|^r}{1 - \left| \frac{z}{a_i} \right|} \leqslant 2 \frac{\|\vec{c}_i\| |z|^r}{|a_i|^{r+1}}, \qquad \text{(VII, 4; 38)}$$

так что рассматриваемый ряд нормально сходится в каждом компакте из дополнения к множеству точек a_i. Если такого целого r, при котором имело бы место неравенство $\sum \|\vec{c}_i\| / |a_i|^{r+1} < +\infty$, не существует, то надо брать переменное r_i, изменяющееся вместе с i и стремящееся к $+\infty$ при $|a_i|$, стремящемся к $+\infty$.

Результат легко обобщается на кратные полюсы.

Пример. Выберем в качестве полюсов целые числа ($n \in \mathbb{Z}$) и в качестве главной части в окрестности точки $z = n$ — функцию $\left(\frac{1}{z - n} \right)^2$. Тогда в силу неравенства

$$\left| \frac{1}{z - n} \right|^2 \leqslant \frac{4}{n^2} \quad \text{для} \quad |z| \leqslant \frac{n}{2} \qquad \text{(VII, 4; 39)}$$

ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} \right)^2$ нормально сходится в каждом компакте из дополнения к полюсам. Более того, ряд будет нормально сходиться в каждой полосе $|x| \leqslant A$ $(z = x + iy)$, если выбросить члены, соответствующие полюсам, содержащимся в этой полосе; действительно, неравенство (VII, 4; 39) сохранится для $|x| \leqslant \frac{n}{2}$ $(|z - n| = |x + iy - n| \geqslant |x - n|)$.

Отметим, что функция f периодична с периодом 1.

Но функция $z \to \pi^2/\sin^2 \pi z$ имеет те же полюсы и те же главные части. (Так как она периодична, то достаточно это проверить для $n = 0$. Поскольку при z, стремящемся к 0, эта функция эквивалентна $1/z^2$ и четна, то ее главной частью будет функция $1/z^2$.) Поэтому разность

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n} \right)^2 - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = g(z) \qquad \text{(VII, 4; 40)}$$

является целой голоморфной функцией.

Если мы, сохраняя координату x ограниченной по абсолютной величине, устремим y к $\pm\infty$, то получим, что функция f будет стремиться к 0. В самом деле, мы видели, что ряд для f равномерно сходится в полосе $|x| \leqslant A$, а каждый из его членов в отдельности стремится к 0, так что наше утверждение относительно f вытекает из теоремы 66 гл. II.

С другой стороны, функция sin удовлетворяет условию

$$|\sin \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \sim \frac{e^{\pi |y|}}{2}, \qquad \text{(VII, 4; 41)}$$

так что $\pi^2/\sin^2 \pi z$ при тех же условиях также стремится к 0.

Следовательно, при заданном A можно найти такое B, чтобы из соотношений $|x| \leqslant A$, $|y| \geqslant B$ следовало неравенство $|g(z)| \leqslant 1$. Поскольку функция g в компакте $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$ ограничена, она ограничена в полосе $|x| \leqslant A$, а так как она периодична (с периодом 1), то она ограничена во всей комплексной плоскости.

Из теоремы Лиувилля следует, что эта функция постоянна, а так как она при фиксированных x и y, стремящихся к бесконечности, стремится к нулю, то она должна быть тождественно равной нулю.

Если теперь заменить z на $z - \frac{1}{2}$, то мы получим следующее утверждение:

Теорема 29. *Имеют место тождества*

$$\begin{gathered} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} \right)^2, \\ \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n - \frac{1}{2}} \right)^2. \end{gathered} \qquad \text{(VII, 4; 42)}$$

Вычисляя теперь первообразные, получаем

Следствие 1. *Имеют место тождества*

$$\begin{gathered} \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \\ \pi \operatorname{tg} \pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n - \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right). \end{gathered} \qquad \text{(VII, 4; 43)}$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty}$ в правой части первой из формул (VII, 4; 43) очевидным образом сходится при $z = 0$ (его сумма равна 0), а ряд, составленный из производных, $-\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ сходится локально равномерно в открытом *связном* множестве $\Omega=\complement_{\mathbb{C}}\{n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\}$. Из теоремы 111 гл. IV следует, что этот ряд сходится локально равномерно в Ω и что его сумма равна первообразной для функции $-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}+\frac{1}{z^2}$, а следовательно, с точностью до аддитивной постоянной равна $\pi\operatorname{ctg}\pi z-1/z$. Так как обе эти функции равны нулю в начале координат (мы это видели выше для ряда, функция же $\pi\operatorname{ctg}\pi z-1/z$ нечетна), то они тождественно совпадают. Заметим, что мы взяли не первую попавшуюся первообразную для функции $-\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$. Например, если бы мы взяли в качестве первообразной $\frac{1}{z-n}$, то получили бы расходящийся ряд. Мы выбрали первообразные $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}$, равные нулю в начале координат, с тем, чтобы получить сходимость хотя бы в одной точке (начале координат) и иметь возможность применить теорему 111 гл. IV. Вот почему пришлось выделить из первого ряда (VII, 4; 42) член $1/z^2$, имеющий особенность в начале координат. Окончательно полученный результат вполне согласуется с формулой (VII, 4; 37) при $r=1$ и со сказанным в примечании на стр. 408.

Тот же самый метод доказательства применим ко второй формуле (VII, 4; 43). Так как 0 больше не является полюсом, то все члены рассматриваются равноправно. Обе части равенства снова совпадают в начале координат, где они, очевидно, равны нулю.

З а м е ч а н и е. Группируя члены с номерами n и $-n$, часто пишут

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z}{z^2-n^2}\right),$$

$$\pi\operatorname{tg}\pi z=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}. \qquad \text{(VII, 4; 44)}$$

Ни для одной из формул (VII, 4; 43) или (VII, 4; 44) непосредственно не видно, что правые части периодичны с периодом 1. Проверку этого факта мы предоставим читателю в качестве легкого упражнения.

Функция $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$ голоморфна для $|z| < 1$ и задается в виде локально равномерно сходящегося ряда из голоморфных функций. Следовательно, имеет место локально равномерная сходимость ряда из производных (следствие 1 теоремы 15 Вейерштрасса); в частности, допустим переход к пределу в коэффициентах Тейлора в начале координат.

Таким образом, k-й коэффициент Тейлора функции $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$ совпадает с суммой k-х коэффициентов Тейлора функций $2z/(z^2 - n^2)$. Из разложения

$$\frac{2z}{z^2-n^2} = -\frac{2z}{n^2} - \frac{2z^3}{n^4} - \ldots - \frac{2z^{2p-1}}{n^{2p}} - \ldots \qquad \text{(VII, 4; 45)}$$

вытекает формула

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi^2}\zeta(2)\,z - \ldots - \frac{2}{\pi^{2p}}\zeta(2p)\,z^{2p-1} - \ldots, \qquad \text{(VII, 4; 46)}$$

где ζ есть ζ-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{(VII, 4; 47)}$$

определенная формулой (II, 16; 4) гл. II.

Разложение Лорана функции $\operatorname{ctg} z$ по степеням z получается непосредственно делением разложения $\cos z$ на разложение $\sin z$. Это будет разложение, все коэффициенты которого рациональны; первые члены имеют такой вид:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \ldots. \qquad \text{(VII, 4; 48)}$$

Отсюда следует, что числа $\dfrac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}$ рациональны и что их можно последовательно вычислять по формулам

$$\left.\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\\
\zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},\\
\zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},\\
\zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 4; 49)}$$

Известно, что $\zeta(s)$ стремится к 1, когда $\operatorname{Re} s$ стремится к $+\infty$. В самом деле, для $\operatorname{Re} s \geqslant 1+\varepsilon > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится равномерно, а каждый его член $\frac{1}{n^s}$ стремится к 0 при $\operatorname{Re} s \to +\infty$, кроме первого члена, равного 1 (еще одно применение теоремы 66 гл. II). Следовательно, числовая последовательность $\pi^2/6$, $\pi^4/90$, $\pi^6/945$, $\pi^8/9450$ стремится к 1.

Значения $\zeta(2p+1)$ для нечетных чисел $2p+1$ неизвестны.

Учитывая сказанное по поводу формулы (II, 16; 19) для знакочередующихся рядов $\zeta_a(2p)$, получаем формулы

$$\begin{aligned} \zeta_a(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \\ \zeta_a(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \ \ldots . \end{aligned} \tag{VII, 4; 50}$$

Следствие 2. *Имеют место разложение*

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+2ni\pi} - \frac{1}{2ni\pi} \right) \tag{VII, 4; 51}$$

и, кроме того, в окрестности точки $z=0$ разложение

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p z^{2p-1} \quad \textit{для } |z| < 2\pi, \tag{VII, 4; 52}$$

где

$$B_p = \frac{2(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \zeta(2p), \ \textit{или}^{1)} \ \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p = \frac{(-1)^{p+1}\zeta(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}. \tag{VII, 4; 53}$$

Для доказательства достаточно, исходя из функции ctg, записать функцию $\frac{1}{e^z-1}$ в виде

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{iz}{2} \tag{VII, 4; 54}$$

и воспользоваться формулами (VII, 4; 43) и (VII, 4; 46). Можно также дать прямое доказательство, аналогичное предыдущим.

Рациональные числа B_p называются *числами Бернулли.*

---

1) Здесь довольно искусственно введен член $(2p)!$, полезный в некоторых приложениях.

Они применяются при решении ряда задач анализа и теории чисел. Первые из них таковы:

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\ \dots \qquad \text{(VII, 4; 55)}$$

Замечание. Формулы (VII, 4; 42), (VII, 4; 43) и (VII, 4; 51) можно рассматривать как своего рода «разложение на простые дроби» функций, стоящих слева. Однако в разложении рациональных дробей на простые дроби таких членов, как $\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$, не бывает. Слагаемое $\frac{1}{n}$ введено здесь для обеспечения сходимости. С другой стороны, «целая часть» разложения, которая в принципе могла бы быть произвольной целой функцией, сведена здесь к своему простейшему виду с помощью рассуждений, основанных на теореме Лиувилля (см. стр. 412).

Первая проблема Кузена на поверхности Римана

То, что было сделано для комплексной плоскости $\mathbb{C}$, можно повторить для произвольной римановой поверхности W. Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$—замкнутое множество изолированных точек W. В окрестности точки a_i нельзя уже задать полином от $\frac{1}{z-a_i}$, так как последнее выражение не имеет смысла. Однако в окрестности точки a_i можно задать мероморфную функцию $\vec{P}_i$ и искать такую мероморфную функцию $\vec{f}$ на W, чтобы для каждого i функция $\vec{f}-\vec{P}_i$ была голоморфной в этой окрестности. Эта задача и называется *первой проблемой Кузена* на W. Можно считать, что в окрестности каждой точки a_i задана локальная карта Φ_i: $\mathcal{O}_i\subset\mathbb{C}\to\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, $\Phi_i(\alpha_i)=a_i$, а потому функция $\vec{P}_i$ задана в окрестности точки α_i в $\mathcal{O}_i$ в виде некоторого полинома от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ или же в виде суммы такого полинома и некоторой голоморфной функции, не играющей здесь никакой роли. Изменение карты, т. е. $\mathbb{C}$-диффеоморфизм $\zeta\to\zeta'$, $\mathcal{O}_i\to\mathcal{O}'_i$ хотя и не переводит полином от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ в полином от $\frac{1}{\zeta'-\alpha'_i}$, но преобразует сумму полинома от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ и голоморфной функции в аналогичную сумму. Можно ту же задачу поставить не только для функций, но и для мероморфных 1-форм. *Однако все результаты будут сильно отличаться от тех, которые были* *получены для случая $\mathbb{C}$ или открытого множества из $\mathbb{C}$: задача не всегда имеет решение.* Мы сейчас подробно проанализируем, что происходит на компактной поверхности Римана W. В этом случае имеется конечное число точек a_i. Предположим для простоты, что речь идет о скалярных формах и функциях: $\vec{F}=\mathbb{C}$.

1°) Решим сначала проблему Кузена для 1-формы ω. Для каждой точки a_i пусть P_i — мероморфная 1-форма, заданная в окрестности a_i. Эга форма определяет некоторый вычет. Если 1-форма ω существует, то форма $\omega - P_i$ голоморфна в точке a_i, а следовательно, 1-форма ω имеет тот же вычет, что и P_i. Для того чтобы задача была разрешимой, необходимо по меньшей мере, чтобы сумма этих вычетов была равна нулю (теорема 22е). Можно доказать (но это очень трудно), что это условие и достаточно: если оно выполнено, то существует решение проблемы Кузена — форму ω найти можно. Выясним теперь степень неопределенности задачи. Все решения получаются прибавлением к одному из них производной голоморфной 1-формы на W. Задача свелась к выяснению размерности $\mathbb{C}$-векторного пространства H голоморфных 1-форм на W. Рассмотрим группу гомологий W в размерности 1 (гл. VI, стр. 266). Можно доказать, что она изоморфна $\mathbb{Z}^{2g}$, где g — некоторое целое число, называемое *родом поверхности Римана* и являющееся *комплексной размерностью пространства* H. Этот род связан с одним понятием, обычно нечетко определяемым в математических курсах. Когда рассматривается «алгебраическая кривая» в проективном пространстве, то множество ее комплексных точек (включая бесконечно удаленные точки) имеет структуру римановой поверхности W (в случае уникурсальной кривой это будет сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$). То,что называют родом кривой, и есть как раз указанный здесь род g.

2°) Рассмотрим теперь проблему Кузена для функций. Можно указать условия, необходимые для того, чтобы эта проблема имела решение. В самом деле, если ϖ — голоморфная 1-форма, $\varpi \in H$, и P_i — мероморфная функция, заданная в окрестности точки a_i, то $P_i\varpi$ будет мероморфной 1-формой в окрестности a_i. Если существует такая мероморфная функция f на W, что для каждого i функция $f - P_i$ голоморфна в окрестности точки a_i, то $f\varpi$ является такой мероморфной 1-формой на W, что $f\varpi - P_i\varpi$ голоморфна в окрестности точки a_i. Следовательно, сумма вычетов форм $P_i\varpi$ должна быть равна нулю. Так должно быть для каждой формы $\varpi \in H$. Поскольку имеется g независимых голоморфных форм $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_g$, это даст g условий, которым должна удовлетворять система функций P_i. Здесь также можно доказать (доказательство очень сложно), что эти условия и достаточны для того, чтобы задача имела решение. Какова же при этом будет степень неопределенности? Ответ в нашем случае прост: каждая голоморфная функция постоянна (следствие 7 теоремы 12), а значит, решение определено с точностью до аддитивной постоянной. Эти результаты и аналогичные им были доказаны в предыдущем веке Риманом, Вейерштрассом и Абелем. Заметим, что для 1-форм имеется одно условие разрешимости и g степеней неопределенности, а для функций имеется g условий разрешимости и одна степень неопределенности. Между этими задачами имеет место своего рода двойственность.

Существует обобщение такого рода двойственности, что составляет содержание теоремы Римана — Роха, современные обобщения которой относятся к наиболее глубоким теоремам математики.

Рассмотрим в качестве частного случая сферу Римана $\hat{\mathbb{C}}$.

1°) Так как сфера в $\mathbb{R}^3$ односвязна (теорема 57 гл. VI), то ее род g равен нулю, а значит, ее группа гомологий сводится к $\{0\}$ (каждый 1-мерный цикл гомологичен 0 и даже гомотопен 0). Следовательно, пространство H голоморфных 1-форм сводится к $\{0\}$. Здесь это, впрочем, очевидно. Голоморфная 1-форма на $\hat{\mathbb{C}}$ является целой на $\mathbb{C}$. Но тогда если она не равна тождественно нулю, то в точке ∞ у нее обязательно полюс порядка $\geqslant 2$ (напомним, что $z^k\,dz$ имеет полюс порядка $k+2$ — см. стр. 396). Поэтому проблема Кузена для 1-форм будет разрешимой, если только сумма вычетов равна нулю, и ее решение единственно. Это решение можно получить непосредственно следующим образом. Для каждой точки $a_i \neq \infty$ в качестве главной части можно взять $P_i = A_i\,dz$, где A_i — полином относительно $\frac{1}{z-a_i}$ без свободного члена. Положим $c_{-1,i} = \operatorname{Res}_{a_i} P_i$. Для точки ∞ главную часть выберем в виде $P_\infty = c_{-1,\infty}\frac{dz}{z} + B\,dz$, где B — некоторый полином (напомним, что формы $\frac{dz}{z}$ и dz особые). Имеем $c_{-1,\infty} = \operatorname{Res}_\infty P_\infty$. Если $A = \sum\limits_{a_i \neq \infty} A_i$, то искомая форма ω необходимо имеет вид $\omega = A\,dz + R\,dz$, где R — полином. Если взять точку ∞, то должно иметь место равенство

$$c_{-1,\infty}\frac{dz}{z} + B\,dz = \sum_{a_i \neq \infty} c_{-1,i}\frac{dz}{z} + R\,dz.$$

Это дает, во-первых, условие $\sum\limits_{a_i \neq \infty} c_{-1,i} + (-c_{-1,\infty}) = 0$ — сумма вычетов должна равняться нулю; во-вторых, равенство $B = R$, чем единственным образом определяется R. Имеется одно условие разрешимости и нет никакой неопределенности.

2°) Перейдем к проблеме Кузена на $\hat{\mathbb{C}}$ для функций. Для каждой точки $a_i \neq \infty$ главной частью будет полином P_i от $\frac{1}{z-a_i}$ без свободного члена. Для точки ∞ это будет полином P_∞ от z без свободного члена. Положим $P = \sum\limits_{a_i \neq \infty} P_i$. Тогда должно выполняться равенство $f = P + R$, где R — полином. Пусть c_0 — свободный член полинома R. Записывая условие на бесконечности, получаем $P_\infty = R - c_0$, что определяет полином R с точностью до постоянной. Здесь нет никаких условий разрешимости, а степень неопределенности равна 1.

Вторая проблема Кузена в комплексной плоскости

Пусть задано замкнутое множество $\{a_i\}_{i \in I}$ изолированных точек из $\mathbb{C}$ и для каждого i целое число $p_i \geqslant 1$. Вторая проблема Кузена заключается в определении *комплексной* целой функции на $\mathbb{C}$, имеющей точки a_i в качестве нулей кратности p_i.

Теорема 30 (Вейерштрасс). *Каковы бы ни были последовательности точек a_i и чисел p_i, вторая проблема Кузена имеет решение. Все ее решения получаются умножением одного из них на произвольную целую функцию, не имеющую нулей, т. е. на функцию вида e^g, где g — произвольная целая функция.*

Доказательство. Пусть h — комплексная мероморфная функция в $\mathbb{C}$, имеющая простые полюсы a_i с вычетами p_i. По теореме 28 Миттаг-Леффлера такая функция существует. Пусть z_0 — фиксированная точка $\mathbb{C}$, отличная от a_i.

Рассмотрим интеграл $H(z) = \int\limits_{z_0}^{z} h(\zeta)\,d\zeta$ вдоль пути C^0 конечной длины, соединяющего точку z_0 с точкой z и не проходящего через точки a_i. При изменении пути в открытом односвязном множестве Ω из $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i \in I}$ интеграл не меняется и представляет собой некоторую голоморфную первообразную h_0 функции h в Ω (теорема 7). Однако так как окружность, охватывающая одну из точек a_i, не гомотопна нулю, то множество $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i \in I}$ не будет односвязным и, следовательно, предыдущий интеграл a priori имеет бесконечное множество возможных значений в зависимости от выбранного пути. Здесь разность между двумя этими значениями равна интегралу от $h(\zeta)\,d\zeta$ вдоль

C^0-цикла Γ конечной длины (замкнутого пути, идущего от z_0 до z_0). Поскольку плоскость односвязна, цикл Γ гомотопен 0, а значит, гомологичен 0 в $\mathbb{C}$, и к нему можно применить теорему 19 о вычетах: этот интеграл равен произведению $2i\pi$ на сумму вычетов функции h. *Однако все вычеты h — целые числа.* Следовательно, разность между двумя значениями H в точке z равна целому кратному $2i\pi$, а значит, $e^{H(z)}$ *имеет вполне определенное значение.*

Так определенная функция e^H голоморфна и не имеет нулей в $\complement\{a_i\}_{i \in I}$. В самом деле, пусть z_1 — точка этого открытого множества и Δ — круг с центром в z_1, содержащийся в этом открытом множестве. Для каждого $z \in \Delta$ можно выбрать значение H по формуле $H(z) = \int\limits_{z_0}^{z_1} + \int\limits_{z_1}^{z}$, где первый интеграл вычисляется по некоторому раз навсегда фиксированному пути, а второй — по пути, лежащему в Δ. Поскольку круг Δ односвязен, то этот второй интеграл является голоморфной функцией от z (первообразная для h в Δ) и, следовательно, является также соответствующим значением H, а значит, функция e^H голоморфна и не имеет нулей. В точке z_0 она принимает значение, равное 1.

Рассмотрим теперь одну из точек a_i. Имеем $h = \dfrac{p_i}{z - a_i} + k$, где функция k голоморфна в окрестности точки a_i. Если взять различные значения логарифма и $K(z) = \int\limits_{z_0}^{z} k(\zeta)\,d\zeta$, то различные значения $H(z)$ можно записать в виде $\int\limits_{z_0}^{z} \dfrac{p_i\,d\zeta}{\zeta - a_i} + \int\limits_{z_0}^{z} k(\zeta)\,d\zeta$, или же $p_i \ln\left(\dfrac{z - a_i}{z_0 - a_i}\right) + K(z)$, откуда $e^{H(z)} = \left(\dfrac{z - a_i}{z_0 - a_i}\right)^{p_i} e^{K(z)}$. В силу проведенного выше доказательства для окрестности точки z_1 функция e^K голоморфна и не имеет нулей в окрестности точки a_i, так что e^H имеет точку a_i нулем кратности p_i. Значит, эта функция $f = e^H$ является решением проблемы Кузена. Поскольку множество $\complement\{a_i\}_{i \in H}$ связно, то функция в этом открытом множестве определена с точностью до ее логарифмической производной. Таким образом, f — единственная голоморфная функция с логарифмической производной, равной h, такая, что $f(z_0) = 1$.

Пользуясь методом Миттаг-Леффлера определения h, исследуем подробнее вид функции f.

Исходя из точки $b=z_0$, отличной от всех точек a_i, определим ряд (VII, 4; 35):

$$h(z)=\sum_i\left(\frac{p_i}{z-a_i}-Q_i(z)\right), \qquad \text{(VII, 4; 56)}$$

равномерно сходящийся в дополнении к точкам a_i.

Здесь Q_i—некоторый полином. Обозначим через R_i единственную первообразную этого полинома, равную нулю в точке z_0. Тогда

$$f(z)=e^{H(z)}=\prod_i\left(\left(\frac{z-a_i}{z_0-a_i}\right)^{p_i}e^{-R_i(z)}\right). \qquad \text{(VII, 4; 57)}$$

[Непосредственно видно, что мы имеем здесь бесконечное произведение, принимающее значение 1 в точке z_0, логарифмическая производная которого локально равномерно сходится к h в связном открытом множестве $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in I}$, а значит, в силу теоремы 112 гл. IV сходится локально равномерно в том же открытом множестве и, очевидно, обладает требуемыми свойствами.]

Обычно берут $z_0=b=0$ (если окажется, что эта точка совпадает с одной из точек a_i, например a_0, то надо сначала выделить член z^{p_0}, соответствующий кратности этого нуля, а затем заняться поисками функции, имеющей другие нули с заданными кратностями). Если учесть (VII, 4; 37), то получится функция вида

$$f(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{p_i}e^{p_i\left(\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\dots+\frac{z^{r_i}}{r_ia_i^{r_i}}\right)}\right). \qquad \text{(VII, 4; 58)}$$

Совершенно ясно, что отношение двух решений является произвольной целой функцией без нулей. Согласно следствию 4 теоремы 10, она представляет собой экспоненту некоторой произвольной целой функции.

Замечание 1. Тот факт, что $\mathbb{C}$ односвязно, сыграл существенную роль при доказательстве теоремы. Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$. Как мы уже видели (замечание 1 на стр. 409), первая проблема Кузена всегда имеет решения в Ω. Значит, можно построить функцию h, фигурирующую в предыдущем доказательстве. Но величина $H(z)$ не будет более определена с точностью до целого кратного $2i\pi$, поскольку теорема о вычетах применима лишь тогда, когда кривая Γ гомологична 0, а это возможно только тогда, когда множество Ω

односвязно. Однако мы располагаем некоторой свободой, поскольку выбор функции h не единствен. Можно показать, что для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ задача всегда имеет решение. Не так будет обстоять дело для поверхностей Римана даже тогда, когда первая проблема Кузена разрешима. Соответствующий пример мы приведем позже.

Замечание 2. Можно было бы искать функцию $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, удовлетворяющую тем же условиям. Но такое обобщение тривиально: достаточно умножить скалярную функцию, имеющую заданные нули, на фиксированный ненулевой вектор из $\vec{F}$.

Замечание 3. Функцию f мы строили так, чтобы она имела нули только в точках a_i и только порядка p_i. Можно потребовать, чтобы она имела нули *по крайней мере* в точках a_i (но, возможно, и в других точках) порядков *по крайней мере* p_i, т. е. чтобы в кольце целых функций функция f делилась бы на каждую из функций $(z-a_i)^{p_i}$. Тогда функция, построенная при доказательстве, снова является решением задачи, а все другие функции можно получить умножением ее на произвольную целую функцию (с нулями или без них).

Важные частные случаи. Предположим, что ряд $\sum_i p_i/|a_i|$ сходится. Тогда можно написать следующее решение:

$$f(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{p_i}. \qquad \text{(VII, 4; 59)}$$

В самом деле, согласно теореме 70 гл. II, написанное произведение локально равномерно сходится в области, дополнительной к нулям.

Если написанный выше ряд не сходится, но сходится ряд $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|^{r+1}}$, то решение можно записать в виде

$$f(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\ldots+\frac{z^r}{ra_i^r}}\right)^{p_i}. \qquad \text{(VII, 4; 60)}$$

Это получается предыдущим способом, если учесть (VII, 4; 37).

Если $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|^{r+1}}=+\infty$ при любом r, то будет иметь место формула (VII, 4; 58), где r_i стремится к бесконечности при a_i, стремящемся к бесконечности.

Следствие 1. *Справедлива формула*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \qquad \text{(VII, 4; 61)}$$

где бесконечные произведения локально сходятся в $\mathbb{C}\mathbb{Z}$.

В самом деле, $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ является единственной голоморфной функцией с логарифмической производной $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$, равной 1 в начале координат. Остается применить (VII, 4; 43).

Замечание. Подобно тому как на стр. 416 мы сравнивали полученные разложения с разложениями рациональных дробей на простые дроби, можно сравнить соотношение (VII, 4; 61) с разложением полинома на простые сомножители. Для обеспечения сходимости мы пишем здесь $\prod \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right)$, а не $\prod (z-n)$. С другой стороны, так как полином без нулей есть постоянная (теорема Даламбера), то в случае полиномов сохраняется только произвольный постоянный множитель. Сохраняется и произвольная целая функция без нулей. Интересно отметить, что для функции sin она постоянна.

Следствие 2. *Пусть* $\{a_i\}_{i \in I}$, $\{b_j\}_{j \in J}$ — *два замкнутых непересекающихся множества изолированных точек из* $\mathbb{C}$ *и* $i \to p_i$, $j \to q_j$ — *два отображения множеств* I, J *в множество целых чисел* > 0. *Тогда на* $\mathbb{C}$ *существует мероморфная комплекснозначная функция* f, *имеющая точки* a_i *нулями кратности* p_i, *а точки* b_j — *полюсами порядков* q_j (*вторая общая проблема Кузена*). *Если* f — *одна из таких функций, то все другие функции, обладающие этими же свойствами, получаются умножением ее на произвольную целую функцию без нулей.*

Доказательство. Пусть g (соответственно h) — целая функция, имеющая нулями кратности p_i (соответственно q_j) точки a_i (соответственно b_j). Тогда g/h и будет функцией, удовлетворяющей условиям следствия.

Следствие 3. *Каждая мероморфная на* $\mathbb{C}$ *функция* $\vec{f}$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{F}$ *является отношением целой функции со значениями в* $\vec{F}$ *и целой комплекснозначной функции.*

Доказательство. Пусть b_i — полюсы функции $\vec{f}$ порядков q_i. Мы знаем, что существует целая скалярная функция h, имеющая точки b_l нулями кратности q_l. Тогда $\vec{f}h$ будет целой функцией $\vec{g}$ со значениями в $\vec{F}$ и, следовательно, $\vec{f}=\frac{\vec{g}}{h}$.

Следствие 4. *Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — замкнутое множество изолированных точек $\mathbb{C}$, и пусть $i\to\vec{c}_i$ — отображение I в банахово пространство $\vec{F}$. Тогда на $\mathbb{C}$ существует целая функция $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$, принимающая в точках a_i значение $\vec{c}_i$. Если $\vec{f}$ — такая функция, то все другие функции получаются прибавлением к ней произвольной целой функции, обращающейся в нуль во всех точках a_i.*

Доказательство. Пусть h — скалярная функция, имеющая точки a_i в качестве простых нулей (вторая проблема Кузена). Тогда если функция $\vec{f}$ существует, то $\vec{f}/h$ является мероморфной функцией, имеющей в качестве простых полюсов точки a_i, в которых $\vec{c}_i\neq\vec{0}$, а вычеты равны $\vec{c}_i/h'(a_i)$. Обратно, пусть $\vec{g}$—функция, удовлетворяющая этим условиям (первая проблема Кузена). Тогда функция $\vec{f}=\vec{g}h$ — искомая. Очевидно, все остальные функции получаются прибавлением к $\vec{f}$ целой функции, обращающейся в нуль во всех точках a_i, т. е. умножением произведения h на произвольную целую функцию.

Пример. Найдем функцию $\vec{f}$, принимающую такие значения $\vec{c}_n$ в точках $n\in\mathbb{Z}$, что $\sum\limits_{n\neq 0}\|\vec{c}_n\|/n<+\infty$. Здесь $h(z)$ может быть равной $\frac{\sin\pi z}{\pi}$. Функция $\vec{g}$ должна иметь вычет $\vec{c}_n$ в точке n. Поскольку ряд $\sum\limits_{n\neq 0}\frac{\|\vec{c}_n\|}{n}$ сходится, можно взять

$$\vec{g}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\vec{c}_n}{z-n},\quad \vec{f}(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\vec{c}_n}{z-n}.$$

Замечание 1. Предыдущая и даже более общая задача уже была решена в замечании 2, следующем за теоремой 28.

Замечание 2. В случае, когда имеется конечное число точек, мы получаем интерполяционную формулу Лагранжа. В самом деле, в качестве h можно взять функцию $(z-a_0)(z-a_1)\ldots$

$\ldots (z - a_n)$. Тогда

$$h'(z) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{z - a_i}\right) h(z), \quad h'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j), \qquad \text{(VII, 4; 61}_2\text{)}$$

откуда

$$\begin{aligned} \vec{g}(z) &= \sum_i \frac{\vec{c}_i}{\prod\limits_{j \neq i} (a_i - a_j)} \frac{1}{z - a_i}, \\ \vec{f}(z) &= \sum_i \vec{c}_i \prod_{j \neq i} \frac{z - a_j}{a_i - a_j}. \end{aligned} \qquad \text{(VII, 4; 61}_3\text{)}$$

Теорема 32 (Адамар). *Пусть f — комплексная целая функция на $\mathbb{C}$, допускающая для достаточно больших значений $|z|$ оценку*

$$|f(z)| \leqslant Ce^{|z|^\rho}. \qquad \text{(VII, 4; 62)}$$

Тогда если a_i — ее нули кратности p_i, то ряд $\sum\limits_{a_i \neq 0} \frac{p_i}{|a_i|^k}$ сходится для любого вещественного числа $\rho > 0$. Если $\rho < r + 1$, где r — целое число $\geqslant 0$, то функцию f можно выразить в виде произведения множителей Вейерштрасса

$$f(z) = e^{P(z)} z^{p_0} \sum_{a_i \neq 0} \left(\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\left(\frac{z}{a_i} + \frac{z}{2a_i^2} + \ldots + \frac{z^r}{ra_i^r}\right)}\right)^{p_i}, \qquad \text{(VII, 4; 63)}$$

локально равномерно сходящегося в $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i \in I}$, где $p_0 \geqslant 0$ — кратность нуля в начале координат, а P — полином степени $\leqslant r$.

Доказательство этой теоремы очень сложно, и мы его приводить не будем. Это одна из первых теорем, доказанных Адамаром (1892 г.; ему тогда было 27 лет), и притом одна из наиболее впечатляющих. (Мемуар, в котором содержалась эта теорема, и ряд других столь же замечательных теорем были удостоены Большой премии Французской Академии наук.)

Продемонстрируем силу этой теоремы. Рассмотрим, например, функцию $\sin \pi z$. Согласно неравенству

$$|\sin \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \leqslant e^{\pi |z|}, \qquad \text{(VII, 4; 64)}$$

эта функция допускает указанную в теореме оценку с показателем $\rho=1$. Отсюда следует, что для $k>1$ имеет место неравенство $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^k}<\infty$ (которое мы уже знаем) и что при $r=1$

$$\sin \pi z = e^{\alpha z+\beta} z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right), \qquad \text{(VII, 4; 65)}$$

где α и β — некоторые постоянные. Функция $\sin \pi z$ нечетна. Функция z в правой части нечетна, а бесконечное произведение четно. Значит, $e^{\alpha z+\beta}$ должна быть четной функцией, а это означает, что $\alpha=0$. Остается заметить, что $\frac{\sin \pi z}{z}$ стремится к π при z, стремящемся к 0, и что все члены бесконечного произведения при $z=0$ равны 1, откуда следует, что $e^{\beta}=\pi$. Отсюда снова вытекает тождество (VII, 4; 61). Таким образом, *формула* (VII, 4; 61) *непосредственно получается из теоремы Адамара без использования каких-либо предварительных формул.*

Теорема Адамара говорит о том, что если мы знаем нули функции и их кратности, причем выполнено некоторое условие на ее рост (VII, 4; 62), то тем самым мы почти знаем саму функцию, поскольку она определяется с точностью до множителя e^P, где P — некоторый полином степени $\leqslant r$.

Предположим, в частности, что неравенство (VII, 4; 62) имеет место с $\rho<1$. Тогда можно взять $r=0$, и множитель e^P сведется к постоянной. Именно так и получается, когда f—полином. Таким образом, теорема 32 содержит как частный случай такое существенное обобщение теоремы Даламбера:

Следствие. *Если целая скалярная функция на $\mathbb{C}$ допускает оценку* (VII, 4; 62) *с $\rho<r+1$ и не имеет нулей, то она имеет вид e^P, где P — полином степени $\leqslant r$. В частности, если $\rho<1$, то она постоянна.*

Можно сказать еще и так: *функция f, удовлетворяющая соотношению* (VII, 4; 62) *с $\rho<1$ и не являющаяся полиномом, имеет бесконечное множество нулей* (если бы она имела их только конечное число, то она имела бы вид произведения $C\prod\limits_{i}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)$, т. е. была бы полиномом), *а следовательно, бесконечное множество раз принимает любое значение c* (вместо f следует рассмотреть функцию $f-c$). Как показывает пример нигде не обращающейся в нуль функции e^z, это утверждение неверно для $\rho\geqslant 1$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 19 о вычетах позволяет сводить вычисление некоторых определенных интегралов в комплексной плоскости к вычислению вычетов, т. е. коэффициентов разложений в окрестности некоторых особых точек. Однако и многие интегралы на вещественной оси, не содержащие никаких функций комплексной переменной, с помощью подходящих преобразований могут быть вычислены тем же самым способом. Это один из наиболее сильных методов вычисления определенных интегралов, для которых соответствующие неопределенные интегралы в конечном виде не берутся.

Пример 1. *Интеграл от 0 до 2π дробно-рациональной функции от тригонометрических функций.* Пусть $\vec{R} = \dfrac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь от двух комплексных переменных, $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в банаховом пространстве $\vec{F}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Предположим, что нам надо вычислить

$$\int_0^{2\pi} \vec{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)\, d\theta. \tag{VII, 5; 1}$$

Совершим замену переменной $e^{i\theta} = z$. Тогда формально получим

$$\int_\Gamma \vec{R}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{i}\,\frac{dz}{z}, \tag{VII, 5; 2}$$

где Γ — тригонометрическая окружность, пробегаемая в положительном направлении. Для того чтобы обосновать такую замену, заметим, что для вычисления последнего интеграла от дифференциальной формы можно параметризовать кривую Γ с помощью функции $z = e^{i\theta}$. В силу (VI, 6; 69) мы получим интеграл (VII, 5; 1), а теперь интеграл (VII, 5; 2) можно вычислить по внутренней теореме 19 или внешней теореме 19_2 о вычетах.

Предположим, например, что надо вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta},\ \text{где}\ a \in \mathbb{C},\ a \notin [-1,\ +1]. \tag{VII, 5; 3}$$

Согласно сказанному выше, имеем

$$\int_\Gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{1}{i}\,\frac{dz}{z} = \int_\Gamma \frac{2}{i}\,\frac{dz}{z^2+2az+1}, \tag{VII, 5; 4}$$

где трехчлен $z^2+2az+1$ имеет два корня, произведение которых равно 1. Один из них лежит в тригонометрическом круге Δ, ограниченном кривой Γ. Обозначим его через $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$, считая, что корень выбирается соответствующим образом: если, например, a вещественно и >1, то выбирается корень >0, если же $a<-1$, то берется корень <0. Вычет в точке α равен $\frac{2}{i}\frac{1}{2\alpha+2a}$, что дает

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \qquad \text{(VII, 5; 5)}$$

Можно было бы в качестве упражнения применить обычный метод, положив $\operatorname{tg}\theta/2=t$. Подчеркнем, что по нашему методу мы вычисляли вычет в точке α, а не искали первообразную функции $\frac{1}{a+\cos\theta}$. В порядке контроля отметим, что при a, стремящемся к ∞, наш интеграл очевидным образом эквивалентен интегралу $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$.

Пример. 2. *Интегралы по вещественной оси.* Пусть $\vec{R}=\frac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в банаховом пространстве $\vec{F}$ над полем $\mathbb{C}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Ставится задача вычисления интеграла $\int_{\mathbb{R}}\frac{\vec{P}}{Q}dx$. Этот интеграл существует, если, с одной стороны, Q не имеет вещественных нулей и если, с другой стороны, (степень Q)$\geqslant$(степень $\vec{P}$)$+2$ (интегрируемость на бесконечности).

Можно рассмотреть и несколько более общий случай, считая, что Q имеет, возможно, вещественные нули кратности 1. В этом случае для каждого из таких нулей a_i надо будет вычислять главное значение интеграла по Коши: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-a_i|\geqslant\varepsilon}$ (гл. IV, стр. 736). Точно так же можно предполагать, что (степень Q)$\geqslant$(степень $\vec{P}$) $+1$, если ограничиться рассмотрением главного значения Коши $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A}$ на бесконечности. Последнее возможно потому, что $\vec{P}/Q$ является суммой нечетной рациональной дроби, интегрирование которой по Коши дает 0, и четной рациональной дроби $\vec{P}_0/Q_0$, для которой (степень Q_0) $\geqslant$ (степень P_0) $+ 2$, поскольку разность степеней $\geqslant 1$ и четна. Окончательно задача сводится к вычислению

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\substack{|x-a_i|\geqslant\varepsilon \\ |x|\leqslant A}} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx, \quad \text{(VII, 5; 6)}$$

где a_i — вещественные нули полинома Q.

Сначала, разлагая $\vec{P}/Q$ на простые дроби, можно вычислить v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx$. В силу условий, налагаемых на степени, полиномиальная часть равна нулю. Поэтому

$$\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} = \sum_i \left(\frac{c_{i,-1}}{x-a_i} + \frac{c_{i,-2}}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{c_{i,-k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} \right), \quad \text{(VII, 5; 7)}$$

где a_i — нули полинома Q (вещественные или комплексные).

При $k \geqslant 2$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-a_i)^k} = \left[\frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a_i)^{k-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Остается вычислить v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a_i}$. Предположим сначала, что $\operatorname{Im} a_i > 0$. Выбирая $-\pi < \arg(z - a_i) < 0$, можно для $\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} a_i$ или $\operatorname{Im}(z - a_i) < 0$ рассмотреть непрерывное значение функции $z \to \ln(z - a_i)$. Этот логарифм $\mathbb{C}$-дифференцируем, а его производная равна $z \to \frac{1}{z-a_i}$ (теорема 8). Следовательно, функция $x \to \ln(x - a_i)$, определенная на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-дифференцируема и ее производная равна $\frac{1}{x-a_i}$. Значит,

$$\int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x-a_i} = \ln(A - a_i) - \ln(-A - a_i) =$$

$$= \ln\left|\frac{A-a_i}{-A-a_i}\right| + i(\arg(A - a_i) - \arg(-A - a_i)). \quad \text{(VII, 5; 8)}$$

Поскольку $\left|\frac{A-a_i}{-A-a_i}\right|$ стремится к 1 при A, стремящемся к бесконечности, первый член правой части стремится к нулю, а второй член, очевидно, стремится к $i\pi$. Проводя аналогичные вычисления для $\operatorname{Im} a_i < 0$ и тривиальное вычисление для $\operatorname{Im} a_i = 0$ (см. формулу (IV, 9; 119)), получим

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - a_i} = \begin{cases} i\pi, & \text{если } \operatorname{Im} a_i > 0, \\ 0, & \text{если } \operatorname{Im} a_i = 0, \\ -i\pi, & \text{если } \operatorname{Im} a_i < 0, \end{cases} \tag{VII, 5; 9}$$

откуда и вытекает требуемый результат:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} \right). \tag{VII, 5; 10}$$

Здесь мы воспользовались функцией ln комплексной переменной, что естественно, поскольку числа a_i комплексны. Однако мы вовсе не пользовались криволинейным интегралом $\int \vec{f}(z)\,dz$ в комплексной плоскости. Нами был использован только интеграл от комплекснозначной функции или функции со значениями в банаховом пространстве над $\mathbb{R}$ относительно меры dx, укладывающийся в рамки гл. IV. Вычетов не было, а вычисления велись с помощью первообразных. Теперь мы получим тот же результат, вычисляя интегралы в комплексной плоскости с помощью вычетов. Предположим сначала, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 2$ и все a_i невещественны. Интеграл $\int \frac{\vec{P}}{Q}\,dz$ вдоль полуокружности γ_A: $|z| = A$, $0 < \arg z < \pi$, при A, стремящемся к бесконечности, стремится к 0, поскольку на этой полуокружности норма $\|\vec{P}/Q\|$ мажорируема постоянной $1/A^2$, а длина полуокружности равна πA. Поэтому можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(\int_{[-A,\, +A]} \frac{\vec{P}}{Q}\,dz + \int_{\gamma_A} \frac{\vec{P}}{Q}\,dz \right), \tag{VII, 5; 11}$$

где γ_A обходится в направлении от A к $-A$. Но тогда $\Gamma_A = [-A, +A] \cup \gamma_A$ есть кривая, кусочно принадлежащая классу C^∞, являющаяся псевдограницей некоторого многообразия с псевдограницей, а именно полукруга Δ_A: $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Поскольку полукруг Δ_A ориентирован с помощью $\mathbb{C}$, то Γ_A обходится в положительном направлении. Из общей теоремы

Стокса 38 гл. VI следует, что в этом случае применима формула Стокса (упр. 2°) на стр. 232), а следовательно, применима и теорема 19 о вычетах. Соответствующий интеграл равен сумме вычетов в полюсах, содержащихся в этом полукруге, умноженной на $2i\pi$ (лишь бы только не было полюсов на γ_A). При достаточно больших A эта сумма не зависит от A и равна сумме вычетов в полюсах, содержащихся в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = 2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}. \qquad \text{(VII, 5; 12)}$$

Отсюда a posteriori вытекает, что особая форма контура в $\mathbb{C}$, а именно Γ_A, роли не играла и что произвольный контур C^0 конечной длины, обходящий один раз в положительном направлении все полюсы функции $\vec{R}$ в верхней полуплоскости, дал бы тот же результат! Однако мы должны были исходить из $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{R}(x)\,dx$ и перейти к $\int_{\Gamma_A}$ для того, чтобы быть уверенными, что $\lim_{A\to\infty} \int_{\Gamma_A} = \int_{\mathbb{R}}$.

Можно было также воспользоваться другой полуокружностью γ'_A: $|z| = A$, $-\pi < \arg z < 0$, проходимой, как всегда, в направлении от $+A$ к $-A$, и получить на этот раз, что $\Gamma'_A = [-A, +A] \cup \gamma'_A$ обходится в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном обходу границы полукруга Δ'_A: $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированного плоскостью $\mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}. \qquad \text{(VII, 5; 13)}$$

Все три результата (VII, 5; 10), (VII, 5; 12) и (VII, 5; 13) совпадают. В самом деле, сумма вычетов, включая вычет на бесконечности, согласно следствию из теоремы 19_2, равна нулю, а в силу неравенства (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 2$ вычет на бесконечности равен нулю.

Предположим теперь, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 1$, причем, как и ранее, a_i невещественны. Интегралом по кривой γ_A пренебрегать уже нельзя. Имеем:

$$\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} = \frac{\vec{c}_{\infty,-1}}{z} + \vec{g}_\infty(z), \qquad \text{(VII, 5; 14)}$$

где $-\vec{c}_{\infty,\,-1} = \operatorname{Res}_\infty \dfrac{\vec{P}}{Q}$ и $\|\vec{g}(z)\| \leqslant \operatorname{const}\dfrac{1}{|z|^2}$ для достаточно больших $|z|$. Поэтому $\displaystyle\int\limits_{\gamma_A}$ стремится к $\vec{c}_{\infty,\,-1}\displaystyle\int\limits_{\gamma_A}\frac{dz}{z} = i\pi\vec{c}_{\infty,\,-1}$, что дает

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} = \lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_{[-A,\,A]}\frac{\vec{P}}{Q}\,dz + \int\limits_{\gamma_A}\frac{\vec{P}}{Q}\,dz\right) - i\pi\vec{c}_{\infty,\,-1} =$$

$$= 2i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q} + i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}. \quad \text{(VII, 5; 15)}$$

Применение другой полуокружности дало бы

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx = -2i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q} - i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}. \quad \text{(VII, 5; 16)}$$

Снова здесь все три результата (VII, 5; 10), (VII, 5; 15) и (VII, 5; 16) совпадают, так как сумма вычетов (включая $\operatorname{Res}_\infty$) равна нулю.

Предположим теперь, что имеется единственный нуль a_i полинома Q, лежащий на $\mathbb{R}$. Главное значение равно пределу интеграла по дополнению при ε, стремящемся к 0, к симметричному интервалу $[a_i - \varepsilon,\ a_i + \varepsilon]$. Присоединим полуокружность $\gamma_{i,\,\varepsilon}$: $|z - a_i| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, пробегаемую в направлении от $a_i - \varepsilon$ к $a_i + \varepsilon$. Если учесть разложение $\dfrac{\vec{P}(z)}{Q(z)} = \dfrac{\vec{c}_{i,\,-1}}{z - a_i} + \vec{g}_i(z)$, где величина $\|\vec{g}_i(z)\|$ ограничена при z, стремящемся к a_i, то интеграл по этой полуокружности будет при ε, стремящемся к 0, стремиться к $-i\pi\vec{c}_{i,\,-1} = -i\pi\operatorname{Res}_{a_i}\dfrac{\vec{P}}{Q}$. Если на оси $\mathbb{R}$ имеется несколько полюсов, то то же самое построение следует провести для каждого из них, так что окончательно получаем

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx = \lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\substack{|x|\leqslant A\\ |x-a_i|\geqslant\varepsilon,\ a_i\in\mathbb{R}}}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx =$$

$$= \left(\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Gamma_{A,\,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}\,dz\right) + i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q} + \sum_{a_i\in\mathbb{R}} i\pi\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q} =$$

$$= 2i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q} + i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i = 0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q} + i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}, \quad \text{(VII, 5; 17)}$$

где $\Gamma_{A,\varepsilon}$ — кривая, пробегаемая в положительном направлении, к которой применяется теорема о вычетах:

$$\gamma_A\colon\ |z|=A,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Применение нижних полуокружностей дало бы

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i<0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \\ - i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i=0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - i\pi \operatorname{Res}_\infty \frac{\vec{P}}{Q}. \qquad \text{(VII, 5; 18)}$$

Так как сумма вычетов равна нулю, то все три результата совпадают.

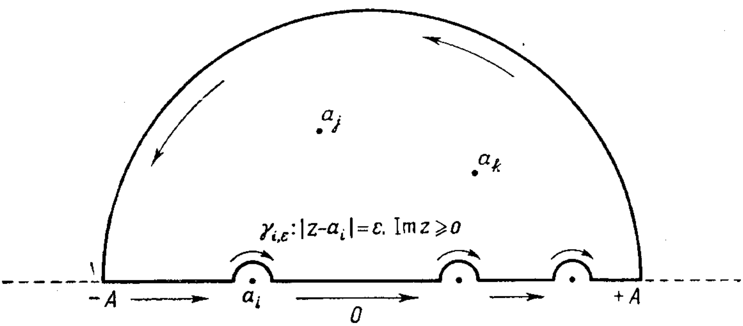

Рис. 14.

Из этих формул видно, что вычет на бесконечности играет ту же роль, что и вычеты в полюсах, расположенных на $\mathbb{R}$. Каждый из полюсов делится как бы на две половины, относящиеся к верхней и нижней полуплоскостям.

Во всех рассуждениях существенную роль играла следующая лемма:

Лемма. *Если на некоторой дуге S окружности радиуса R функция $\vec{f}(z)$ по норме мажорируема $\frac{\text{const}}{R^\alpha}$, то норма $\left\| \int_S \vec{f}(z)\,dz \right\|$ будет мажорируема $\frac{\text{const}}{R^{\alpha-1}}$. Следовательно, для $\alpha > 1$ этот интеграл стремится к 0 при R, стремящемся к бесконечности, а для $\alpha < 1$ стремится к 0 при R, стремящемся к нулю.*

Нам часто придется иметь дело с этой оценкой.

Полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы:

Теорема 32. *Пусть $\vec{P}/Q$ — рациональная дробь, где полином $\vec{P}$ имеет коэффициенты, принадлежащие банахову пространству $\vec{F}$, а Q имеет комплексные коэффициенты, причем нули a_i полинома Q невещественны или же вещественны и порядка* 1, *а* (*степень* Q) $\geqslant$ (*степень* $\vec{P}$) $+ 1$. *Тогда*

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\, dx =$$

$$= 2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\vec{P}}{Q} \right) =$$

$$= -2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\vec{P}}{Q} \right) =$$

$$= i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} \right). \qquad \text{(VII, 5; 19)}$$

Приложение к вычислению сверток [1])

Сверткой двух функций f и g вещественной переменной x называется функция h, определенная формулой

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt \equiv f * g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Естественно, что для сходимости интегралов на функции f и g приходится налагать некоторые ограничения. Если, например, $f \in L^\infty$, $g \in L^\infty$, то

$$|h(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt \leqslant \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

и свертка определена при всех x. Аналогично, она определена для всех x при $f \in L^2$ и $g \in L^2$, причем

$$|h(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|^2\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt \leqslant \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

---

[1]) В этом пункте автор часто ссылается на раздел «Распределения, свертка, интеграл Фурье», который он предполагал добавить к книге в окончательной редакции.

В связи с отсутствием этого раздела в текст внесен ряд добавлений и изменений. — *Прим. ред.*

Нетрудно проверить, что в обоих случаях свертка $f * g(x)$ является непрерывной ограниченной функцией.

Если $f,\ g \in L^1$, то, пользуясь теоремой Фубини, можно показать, что свертка $f * g(x)$ определена почти всюду и также принадлежит L^1.

Если μ — мера Радона на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, то для любой непрерывной функции определена свертка

$$f * \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, d\mu(t).$$

Если, например, $\mu = \delta_{(a)}$, то $f * \delta_{(a)} = \tau_{(a)} f(x) = f(x-a)$. Отметим еще, что операция свертки коммутативна [1]).

Перейдем теперь к вычислениям. Пусть a и b невещественны. Вычислим $\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b}$. Обе эти функции принадлежат L^2, поэтому их свертка

$$\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)(x-t-b)} \qquad \text{(VII, 5; 20)}$$

будет непрерывной и ограниченной функцией. Мы приходим к интегралу по $\mathbb{R}$ от рациональной дроби. Она имеет полюсы при $t = a$, $t = x - b$; соответствующие вычеты равны

$$\operatorname{Res}_a = \frac{1}{x-a-b}, \quad \operatorname{Res}_{x-b} = -\frac{1}{x-a-b}. \qquad \text{(VII, 5; 21)}$$

Сумма этих вычетов равна нулю, как это и должно было быть, поскольку вычет в бесконечности равен нулю. Поэтому получаем следующий результат:

Теорема 33. *Если числа a и b невещественны, то*

$$\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b} = \begin{cases} \dfrac{2i\pi}{x-a-b}, & \textit{если } \operatorname{Im} a > 0,\ \operatorname{Im} b > 0, \\ -\dfrac{2i\pi}{x-a-b}, & \textit{если } \operatorname{Im} a < 0,\ \operatorname{Im} b < 0, \\ 0, & \textit{если } \operatorname{Im} a \textit{ и } \operatorname{Im} b \textit{ различных знаков.} \end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 22)}$$

---

[1]) О более общем определении свертки см., например, книгу Л. Шварца «Математические методы для физических наук», «Мир», М., 1965. — *Прим. ред.*

Отсюда дифференцированием по a и b можно получить

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{m!}{(x-a)^{m+1}} * \frac{n!}{(x-b)^{n+1}} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} 2i\pi \frac{(m+n)!}{(x-a-b)^{m+n+1}} \qquad \text{(VII, 5; 23)}$$

($+1$, -1 *или* 0 *в зависимости от знаков* $\operatorname{Im} a$ *и* $\operatorname{Im} b$).

Если теперь понадобится вычислить свертку двух рациональных дробей, равных нулю на бесконечности и не имеющих вещественных полюсов, то можно либо непосредственно применить теорему 32, либо произвести разложение на простые дроби, а затем применить формулы (VII, 5; 22) и (VII, 5; 23), вычисляя свертки почленно.

В теории вероятностей встречается (в связи с законом Коши) свертка $\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2}$, где a и b вещественны и >0. В этом случае, применяя формулу (VII, 5; 22), получаем

$$\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right) * \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-bi} - \frac{1}{x+bi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2i\pi}{x-ai-bi} - \frac{1}{4\pi^2}\frac{-2i\pi}{x+ai+bi} = \frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} \qquad \text{(VII, 5; 24)}$$

(из четырех сверток две равны нулю). Таким образом, имеет место

Следствие 2. *Для вещественных положительных чисел a и b справедлива формула*

$$\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{a+b}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+(a+b)^2}. \qquad \text{(VII, 5; 24}_2\text{)}$$

Если теперь a — вещественное число, то функция $1/(x-a)$ не является локально интегрируемой и поэтому для нее свертка непосредственно не определена. Однако существует ряд косвенных путей, использующих главное значение по Коши, для введения понятия свертки и в этом случае. Вот один из них. Воспользуемся формулой (IV, 9; 98), согласно которой

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a+i\varepsilon} = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a} - i\pi\varphi(a) \qquad \text{(VII, 5; 25)}$$

для достаточно гладких функций $\varphi(x)$. Сокращенно можно записать

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} \frac{1}{x-a+i\varepsilon} = \text{v. p.}\,\frac{1}{x-a} - i\pi\delta_{(a)}. \qquad \text{(VII, 5; 26)}$$

Как отмечалось в начале § 9 гл. IV, предел слева нельзя понимать в смысле сходимости мер Радона; его надо понимать в смысле теории распределений. Из (VII, 5; 26) получаем

$$\text{v. p.}\frac{1}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{1}{x-a+i\varepsilon}+i\pi\delta_{(a)}. \qquad \text{(VII, 5; 27)}$$

Свертки $\frac{1}{x-a+i\varepsilon}*\frac{1}{x-b}$ и $\delta_{(a)}*\frac{1}{x-b}$ существуют, поэтому можно по определению положить

$$\left(\text{v. p.}\frac{1}{x-a}\right)*\frac{1}{x-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\left(\frac{1}{x-a+i\varepsilon}*\frac{1}{x-b}\right)+i\pi\delta_{(a)}*\frac{1}{x-b}. \qquad \text{(VII, 5; 28)}$$

Если $\operatorname{Im} b>0$, то, согласно (VII, 5; 22), это дает

$$0+i\pi\tau_{(a)}\frac{1}{x-b}=\frac{i\pi}{x-a-b},$$

где $\tau_{(a)}$ — параллельный перенос на a. Если $\operatorname{Im} b<0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{-2i\pi}{x-a-b+i\varepsilon}+i\pi\tau_{(a)}\frac{1}{x-b}=$$
$$=-\frac{2i\pi}{x-a-b}+i\pi\frac{1}{x-a-b}=-\frac{i\pi}{x-a-b}.$$

Полученные пределы являются функциями класса $C^\infty (a+b\notin\mathbb{R})$.

Точно так же можно действовать и в том случае, когда оба числа a и b вещественны. Так, например, по определению

$$\text{v. p.}\frac{1}{x-a}*\text{v. p.}\frac{1}{x-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\left(\text{v. p.}\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b+i\varepsilon}\right)+i\pi\,\text{v. p.}\frac{1}{x-a-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{-i\pi}{x-a-b+i\varepsilon}+i\pi\,\text{v. p.}\frac{1}{x-a-b}=-\pi^2\delta_{(a+b)}$$

Поэтому теорему 33 можно дополнить:

Следствие 3. *Если число a вещественно, а число b невещественно, то*

$$\text{v. p.}\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b}=\begin{cases}\dfrac{\pi i}{x-a-b}, & \text{если}\quad \operatorname{Im} b>0,\\[2mm] -\dfrac{\pi i}{x-a-b}, & \text{если}\quad \operatorname{Im} b<0.\end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 29)}$$

Если числа a и b вещественны, то

$$\text{v. p.}\frac{1}{x-a}*\text{v. p.}\frac{1}{x-b}=-\pi^2\delta_{(a+b)}. \qquad \text{(VII, 5; 30)}$$

В частности,

$$\text{v. p.}\,\frac{1}{x} * \text{v. p.}\,\frac{1}{x} = -\pi^2\delta. \qquad \text{(VII, 5; 31)}$$

Замечание. Для вещественного числа a и невещественного числа b полученное значение совпадает с значением $\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-a)(x-t-b)}$, даваемым теоремой 32 (см. вычисления, проведенные при доказательстве теоремы 33).

Введение экспоненциальных множителей

Вычисление вычетов в теореме 32 было удобным способом доказательства, но без него можно было обойтись. Заметим, что прямой метод вычисления интегралов был бы даже короче. Однако не следует думать, что при применении вычетов можно иметь дело только с рациональной дробью. *Легко указать случаи, когда интеграл может быть вычислен только с помощью вычетов или аналогичных ухищрений, а не непосредственно, т. е. случаи, когда определенный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ *может быть вычислен, в то время как первообразная или неопределенный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{x}$ *неизвестны.* Рассмотрим, например, интеграл (Фурье)

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx, \qquad \alpha \text{ вещественно}, \qquad \text{(VII, 5; 32)}$$

где $\frac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь, причем полином Q имеет невещественные нули или же вещественные нули порядка 1 и (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 1$. Поскольку условия, указанные в теореме 101 гл. IV, очевидным образом выполняются, то главное значение интеграла имеет смысл для каждого вещественного полюса. При $\alpha = 0$ интеграл на бесконечности следует понимать в смысле главного значения по Коши. В случае $\alpha \neq 0$ как для $x \to +\infty$, так и для $x \to -\infty$ интеграл будет, согласно критерию Абеля, условно сходящимся (следствие теоремы 98 гл. IV): отношение $\frac{\vec{P}}{Q}$ имеет на бесконечности ограниченную вариацию (поскольку его производная, мажорируемая по норме $\text{const}\,\frac{1}{x^2}$, интегрируема на бесконечности) и стремится к $\vec{0}$ на бесконечности, а $\left|\int\limits_A^\beta e^{i\alpha x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}$; см. пример (IV, 9; 83). Здесь прямое вычисление уже невозможно.

Воспользуемся методом вычетов с применением верхних полуокружностей. Снова рассмотрим контур $\Gamma_{A,\varepsilon}$ (см. стр. 433). Так же как и ранее, интеграл по полуокружности $\gamma_{i,\varepsilon}$ стремится к $-i\pi\,\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right)$. Что же касается интеграла по большой полуокружности γ_A: $|z|=A$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, то при условии, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 2$ и $\alpha \geqslant 0$, он стремится к нулю; действительно,

$$\left\|\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right\| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{1}{A^2}$$

(поскольку $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z} \leqslant 1$ для $\operatorname{Im} z \geqslant 0$). Если же имеет место лишь равенство (степень Q) = (степень $\vec{P}$) + 1, то $\frac{\vec{P}}{Q} = \frac{\vec{c}_{\infty,-1}}{z} + \vec{g}$, где $\|\vec{g}(z)\| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{1}{|z|^2}$, и для $\alpha \neq 0$ имеем

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\gamma_A}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\,dz = \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz\,^{1)} =$$

$$= \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-i\alpha A}+e^{i\alpha A}}{-i\alpha A} + \int\limits_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{i\alpha z^2}\,dz\right) = 0. \qquad \text{(VII, 5; 33)}$$

Таким образом, для $\alpha > 0$ имеет место следующая формула:

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\,dz + i\pi\sum_{a_i\in\mathbb{R}}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right) =$$

$$= 2i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i>0}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right) + i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i=0}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right).$$

(VII, 5; 34)

Мы видим, что в противоположность случаю $\alpha = 0$ при $\alpha \neq 0$ *для получения нужного результата нет необходимости во вве-*

[1]) Мы воспользовались здесь интегрированием по частям и формулой Стокса, имеющей для дифференциальных форм степеней 0 и 1 тривиальный вид: $\int\limits_{\Gamma_A} dF = F(-A) - F(+A)$.

дении вычета на бесконечности. Заметим, что для функции $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ точка ∞ является не полюсом, а существенно особой точкой (что не мешает ей иметь вычет в бесконечности). Следует в особенности отметить тот факт, что для $\alpha > 0$ нельзя пользоваться нижними полуокружностями, а значит, a priori нет формулы вида (VII, 5; 18). В самом деле, на Γ'_A: $|z| = A$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ функция $e^{i\alpha z}$ неограничена, она возрастает по экспоненциальному закону, поскольку $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z}$. С другой стороны, остается справедливым тот факт, что сумма вычетов (считая и вычет в бесконечности) функции $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ равна нулю. Следовательно, из (VII, 5; 39) можно получить формулу вида (VII, 5; 18) (к этому же можно прийти, если к контуру $\Gamma_{A,\varepsilon}$ применить внешнюю теорему 19_2 о вычетах):

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - $$

$$- i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - 2i\pi \operatorname{Res}_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right), \quad \text{(VII, 5; 35)}$$

откуда, беря среднее арифметическое, получаем формулу вида (VII, 5; 10):

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - $$

$$- i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - i\pi \operatorname{Res}_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right). \quad \text{(VII, 5; 36)}$$

Все происходит так, как будто в силу поведения функции $e^{i\alpha z}$ при $\alpha > 0$ на бесконечности точка ∞ считается лежащей в области $\operatorname{Im} z < 0$, тогда как при $\alpha = 0$ она считается лежащей на прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Для $\alpha < 0$ следует воспользоваться нижними полуокружностями; получаем

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) =$$

$$= 2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) =$$

$$= -2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right), \quad \text{(VII, 5; 37)}$$

где вычет в бесконечности считается так, как будто ∞ находится в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема 34. *Пусть $\vec{P}/Q$ — рациональная дробь на $\mathbb{C}$, где $\vec{P}$ — полином со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, а полином Q принимает комплексные значения, причем нули a_i полинома Q невещественны или же вещественны и просты, и, кроме того, (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 1$. Тогда для вещественного значения α имеют место следующие формулы, в которых* Res *являются вычетами функции* $\dfrac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx =$$

$$= \begin{cases} = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_\infty + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \operatorname{Res}_\infty\right) \text{ для } \alpha > 0; \\ = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_\infty + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_\infty - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) \text{ для } \alpha < 0; \\ = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_\infty\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_\infty\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) \text{ для } \alpha = 0. \end{cases} \tag{VII, 5; 38}$$

Следствие 1. *Если $a \in \mathbb{C}$ и α вещественно, то*

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}\,dx}{x-a} =$$

$$= \begin{cases} = 2i\pi \operatorname{Res}_a\left(\dfrac{e^{i\alpha z}}{z-a}\right) = -2i\pi \operatorname{Res}_\infty\left(\dfrac{e^{i\alpha z}}{z-a}\right) = 2i\pi e^{i\alpha a} \\ \qquad\qquad \textit{для } \operatorname{Im} a > 0,\ \alpha > 0; \\ = 2i\pi \operatorname{Res}_\infty = -2i\pi \operatorname{Res}_a = -2i\pi e^{i\alpha a} \\ \qquad\qquad \textit{для } \operatorname{Im} a < 0,\ \alpha < 0; \\ = 0 \quad \textit{для } \operatorname{Im} a \textit{ и } \alpha\textit{, имеющих противоположные знаки;} \\ = i\pi \operatorname{Res}_a = -i\pi \operatorname{Res}_\infty = i\pi e^{i\alpha a} \\ \qquad \textit{для } \alpha > 0,\ \operatorname{Im} a = 0 \textit{ или } \alpha = 0,\ \operatorname{Im} a > 0; \\ = -i\pi \operatorname{Res}_a = +i\pi \operatorname{Res}_\infty = -i\pi e^{i\alpha a} \\ \qquad \textit{для } \alpha < 0,\ \operatorname{Im} a = 0 \textit{ или } \alpha = 0,\ \operatorname{Im} a < 0; \\ = 0 \quad \text{для } \alpha = \operatorname{Im} a = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 39)}$$

(Символ v. p. необходим только при $\alpha = 0$ или $\operatorname{Im} a = 0$.)

Следствие 2. *При $a \notin \mathbb{R}$ имеют место равенства*

$$m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}dx}{(x-a)^{m+1}} = \begin{cases} 2i\pi (i\alpha)^m e^{i\alpha a} \quad \textit{для } \operatorname{Im} a > 0,\ \alpha > 0; \\ -2i\pi (i\alpha)^m e^{i\alpha a} \quad \textit{для } \operatorname{Im} a < 0,\ \alpha < 0; \\ 0 \quad \textit{для } \operatorname{Im} a \textit{ и } \alpha \textit{ противоположных знаков или для } \alpha = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 40)}$$

Доказательство. Очевидно, эти формулы получаются из предыдущих формул дифференцированием по a под знаком $\int$. Надо лишь обосновать это дифференцирование. Так как $a \notin \mathbb{R}$, то на конечном расстоянии здесь особенностей не имеется. Заметим, далее, что в силу следствия теоремы 115 гл. IV для интеграла по ограниченному интервалу дифференцирование под знаком $\int$ возможно:

$$\frac{d}{da}\left(\int_{-A}^{B} \frac{e^{i\alpha x}}{x-a}\,dx\right) = \int_{-A}^{B} \frac{e^{i\alpha x}}{(x-a)^2}\,dx. \qquad \text{(VII, 5; 41)}$$

Устремим A и B к бесконечности. Интегралы в левой и правой частях (VII, 5; 46) будут сходиться соответственно к $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x-a}\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{(x-a)^2}\,dx$ равномерно относительно a, пробегающего любой компакт области $\operatorname{Im} z \neq 0$: первый по теореме Абеля, а второй просто в силу абсолютной сходимости. Из теоремы 111 гл. IV следует теперь, что второй предел является производной первого предела по a. То же справедливо и для следующих производных, поскольку абсолютная сходимость для всех них сохраняется. Впрочем, все это получается непосредственным применением теоремы 117 гл. IV. Можно было бы воспользоваться также формулой $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-a}\right) = -\frac{1}{(x-a)^2}$ и проинтегрировать (VII, 5; 39) по частям (сначала по ограниченному интервалу, а затем, переходя к пределу, по $\mathbb{R}$, что сводится к применению теоремы 98 гл. IV).

Наконец, *можно было бы доказать формулы* (VII, 5; 40) *непосредственно*, как были доказаны формулы (VII, 5; 39) с помощью формулы (VII, 5; 38).

Замечание. Для вычисления v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{iax}dx$ можно либо непосредственно воспользоваться теоремой 34, либо разложить $\frac{\vec{P}}{Q}$ на простые дроби и применить следствия 1 и 2.

Следствие 3. *Для $a > 0$ и вещественного λ*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm 2i\pi\lambda x} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = e^{-2\pi a|\lambda|}; \qquad \text{(VII, 5; 42)}$$

следовательно, для вещественного s

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm isx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|s|}. \qquad \text{(VII, 5; 43)}$$

Для доказательства достаточно применить (VII, 5; 38), где α заменено на $2\pi\lambda$, и рассмотреть последовательно $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$. В действительности, как только нужная формула получена для $\lambda > 0$, остается заметить, что при замене λ на $-\lambda$ она должна перейти в комплексно сопряженную форму, т. е. должна остаться в силу вещественности неизменной. В силу же непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$, применяя очевидным образом теорему о сходимости Лебега, можно убедиться в справедливости нашей формулы и при $\lambda = 0$. Таким образом, теорема верна при всех значениях λ. Можно было бы также написать равенство

$$\frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}=\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-ia}-\frac{1}{x+ia}\right)$$

и применить следствие 1. Напомним, что соотношение (VII, 5; 42) было указано без доказательства в гл. IV (формула (IV, 11; 50)).

Следствие 4. *Имеет место равенство* (*теорема* 118 *гл.* IV)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(VII, 5; 44)}$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{4i}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx-$$
$$-\frac{1}{4i}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx=\frac{i\pi-(-i\pi)}{4i}=\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(VII, 5; 45)}$$

Замечание. При доказательстве мы использовали v. p. относительно особенности в начале координат, в то время как в саму доказываемую формулу v. p. не входит.

Пример 3. *Интегрирование по полуоси от* 0 *до* $+\infty$. Некоторые интегралы от 0 до $+\infty$ тривиально сводятся к интегралам по всей прямой $\mathbb{R}$ в силу четности подинтегральной функции:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^m}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^m};\quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Нас интересует не этот случай.

Пусть $\vec{R}=\vec{P}/Q$ — рациональная дробь и α — комплексное число. Рассмотрим интеграл

$$I=I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\,dx \qquad \text{(VII, 5; 46)}$$

в предположении, что $\vec{R}$ не имеет вещественных полюсов $\geqslant 0$ и $\vec{R}(0)\neq\vec{0}$. Имеем $|x^{\alpha}|=|e^{\alpha\ln x}|=e^{\operatorname{Re}\alpha\ln x}=x^{\operatorname{Re}\alpha}$, так что интеграл I имеет смысл, если $\operatorname{Re}\alpha>-1$ (интегрируемость в начале координат) и $\operatorname{Re}\alpha+(\text{степень }\vec{P})-(\text{степень }Q)<-1$ (интегрируемость на бесконечности).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\, z^{\alpha}\, dz$ по следующему контуру $\Gamma_{A,\varepsilon}$:

часть (1) — отрезок $[\varepsilon + i\varepsilon,\ A + i\varepsilon]$;
часть (2) — отрезок $[A - i\varepsilon,\ \varepsilon - i\varepsilon]$;
часть (3) — дуга окружности $|z| = \sqrt{A^2 + \varepsilon^2}$, $\operatorname{Re} z \leqslant A$;
часть (4) — дуга окружности $|z| = \sqrt{2}\,\varepsilon$, $\operatorname{Re} z \leqslant \varepsilon$.

Направление обхода указано стрелками (положительное направление). В подинтегральной функции для многозначного

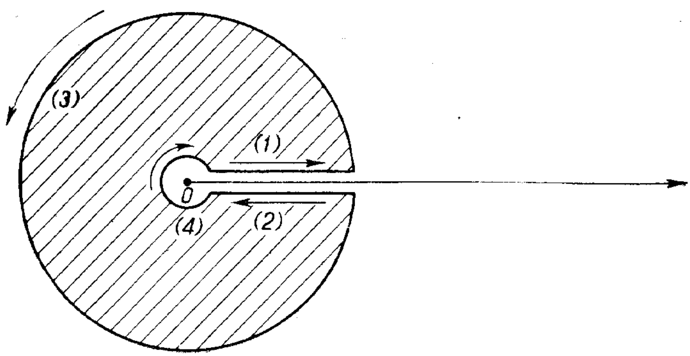

Рис. 15.

множителя $z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z} = |z|^{\alpha} e^{i\alpha \arg z}$ выбрана ветвь $0 < \arg z < 2\pi$. Эта функция z^{α} голоморфна в комплексной плоскости с удаленной полупрямой $\mathbb{R}_+$, и, следовательно, функция $\vec{R}(z)\, z^{\alpha}$ мероморфна.

Имеют место следующие оценки. При $|z|$, стремящемся к 0,

$$\|\vec{R}(z)\, z^{\alpha}\| \leqslant \text{const}\, |z^{\alpha}| = \text{const}\, |e^{\alpha \ln z}| = \text{const}\, e^{\operatorname{Re}(\alpha \ln z)} =$$
$$= \text{const}\, |z|^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\operatorname{Im}\alpha \arg z} \leqslant \text{const}\, |z|^{\alpha}$$

(поскольку $0 < \arg z < 2\pi$). При $|z|$, стремящемся к бесконечности,

$$\|\vec{R}(z)\, z^{\alpha}\| \leqslant \text{const}\, |z|^{\operatorname{Re}\alpha + (\text{степень } \vec{P}) - (\text{степень } Q)}.$$

Если учесть предположения относительно $\operatorname{Re}\alpha$, то получается, что интегралы по контурам (4) и (3) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $A \to +\infty$ (см. лемму на стр. 433).

Интеграл по отрезку (1) стремится к искомому интегралу I. В самом деле, его можно записать в виде

$$\int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\chi_{\varepsilon,A}(x)\,dx, \tag{VII, 5; 47}$$

где $\chi_{\varepsilon,A}(x)=1$ для $\varepsilon \leqslant x \leqslant A$ и $\chi_{\varepsilon,A}(x)=0$ для $x<\varepsilon$ или $x>A$.

Подинтегральная функция в каждой точке стремится к $\vec{R}(x)x^{\alpha}$. Для того чтобы применить теперь теорему сходимости Лебега, надо показать, что интегрируемая функция мажорируется некоторой фиксированной интегрируемой неотрицательной функцией. Выберем $\varepsilon_0>0$, $A_0>0$ так, чтобы при $x \geqslant A_0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ имели место неравенства

$$\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leqslant \mathrm{const}\,|x+i\varepsilon|^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}$$

и чтобы при $x \leqslant A_0$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ величина $\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\|$ была ограниченной. Тогда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будет справедливым неравенство

$$\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leqslant \mathrm{const}\left(1+x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}\right).$$

Одновременно при $x \geqslant \varepsilon$, $x \leqslant |x+i\varepsilon| = \sqrt{x^2+\varepsilon^2} \leqslant \sqrt{2}\,x$, а следовательно, при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\chi_{\varepsilon,A}(x)\left|(x+i\varepsilon)^{\alpha}\right| \leqslant \mathrm{const}\, x^{\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\chi_{\varepsilon,A}(x)\|\vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\| \leqslant \mathrm{const}\, x^{\operatorname{Re}\alpha}\left(1+x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}\right)$$

— интегрируемая функция, поскольку $\operatorname{Re}\alpha>-1$ и $\operatorname{Re}\alpha+$(степень $\vec{P}$) — (степень Q) <-1. Таким образом, интеграл по отрезку (1) действительно стремится к I.

Рассмотрим теперь интеграл по отрезку (2). Его можно записать в виде

$$-\int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}dx = -\int_{0}^{+\infty} \chi_{\varepsilon,A}(x)\vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}\,dx. \tag{VII, 5; 48}$$

Поскольку при ε, стремящемся к 0, и A, стремящемся к $+\infty$, аргумент $x-i\varepsilon$ стремится к 2π, то $\chi_{\varepsilon,A}(x)\vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}$ в каждой точке сходится к $\vec{R}(x)x^{\alpha}e^{2i\pi\alpha}$. Эта функция мажорируется функцией $x^{\operatorname{Re}\alpha}\left(1+x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}\right)$. Поэтому из теоремы сходимости Лебега следует, что интеграл по отрезку (2) стремится к $-e^{2\pi i\alpha}I$ [1]). Окончательно получаем

$$\lim_{A\to+\infty,\ \varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\,dz=(1-e^{2i\pi\alpha})\,I. \qquad \text{(VII, 5; 49)}$$

Отсюда следует, что при нецелом α (для того чтобы $1-e^{2i\pi\alpha}\neq 0$) можно вычислить интеграл I, исходя из интеграла $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$. Но $\Gamma_{A,\varepsilon}$ является путем, кусочно принадлежащим классу C^{∞}, а кроме того, псевдограницей заштрихованной области — многообразия с псевдограницей. Тем самым мы находимся в условиях применимости общей теоремы 38 Стокса из гл. VI, упр. 2°), стр. 232. Из теоремы 19 о вычетах следует, что $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ равен умноженной на $2i\pi$ сумме вычетов функции $R(z)\,z^{\alpha}$ в полюсах, содержащихся в этой области, т. е. при достаточно больших A и достаточно малых ε, во всех полюсах a_i функции $\vec{R}(z)$.

Эти полюсы — нули a_i полинома Q. При подсчете вычетов в каждом из них следует учитывать значение функции z^{α}, т. е. $e^{\alpha \ln z}$.

Сказанное выше можно резюмировать в виде теоремы:

Теорема 35. *Если* $\vec{R}=\frac{\vec{P}}{Q}$ — *рациональная дробь от одной переменной, не имеющая неотрицательных вещественных полю-*

---

[1]) Зачастую это доказательство «упрощают», считая отрезки (1) и (2) путями с нулевыми ординатами», «один из которых лежит на верхней, а другой — на нижней стороне прямой $\mathbb{R}$». Контур $\Gamma_{A,\varepsilon}$ при этом имеет вид

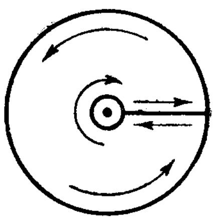

Рис. 16.

Но такое толкование предполагает применение функций, «принимающих различные значения на двух сторонах прямой $\mathbb{R}$», т. е. применение более сложных топологических средств.

сов a_i, *и* α — *такое нецелое комплексное число, что* $\operatorname{Re}\alpha > -1$ *и* $\operatorname{Re}\alpha +$ (*степень* $\vec{P}$) — (*степень* Q) < -1, *то*

$$I = I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\, x^\alpha\, dx = \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\, z^\alpha), \qquad \text{(VII, 5; 50)}$$

где функция z^α *определена по формуле* $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Следствие. *Для* Г-*функции Эйлера*[1]) *имеет место «формула дополнения»*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \qquad \text{(VII, 5; 51)}$$

Доказательство. Как известно,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx \quad \text{для} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \qquad \text{(VII, 5; 52)}$$

Это интеграл предыдущего типа с $\alpha = z - 1$ и $R(x) = 1/(1+x)$. Подинтегральная функция имеет единственный полюс -1, в котором ее вычет равен $(-1)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}$. Для $0 < \operatorname{Re} z < 1$ по формуле (VII, 5; 50) получаем

$$\frac{2i\pi e^{i\pi(z-1)}}{1 - e^{2i\pi(z-1)}} = \frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1 - e^{2i\pi z}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Тот же результат получается для произвольного z либо из соображений периодичности (обе функции $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)$ и $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ антипериодичны[2]) с антипериодом 1), либо с помощью аналитического продолжения (обе части мероморфны по z и могут совпадать между собой при $0 < \operatorname{Re} z < 1$ только тогда, когда они совпадают всюду).

Случай целого α не подходит под условия предыдущей теоремы. В этом случае $1 - e^{2i\pi\alpha} = 0$ и одновременно равен нулю интеграл $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ (поскольку функция $\vec{R}(z)\, z^\alpha$ является рациональной дробью, сумма ее вычетов, считая и вычет в бесконечности, равна нулю) и потому $I = \vec{0}/0$. Так как речь идет о рациональной дроби, то в этом случае вычисления можно проводить обычными методами. То же самое можно сделать для нецелого α, а затем перейти к пределу. Это возможно, поскольку при $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant \alpha_2$, где вещественные числа α_1 и α_2 удовлетворяют указанным условиям, функция $I(\alpha)$ непрерывна по α.

[1]) Определение Г-функции см. ниже, формула (VII, 5; 65). — *Прим. ред.*

[2]) Функция называется антипериодичной с антипериодом T, если $f(x+T) = -f(x)$. — *Прим. ред.*

В самом деле, $\vec{R}(x)x^{\alpha}$ непрерывна по α для любого $x \neq 0$ и имеет место оценка $\| \vec{R}(x)x^{\alpha} \| \leqslant \| \vec{R}(x) \| (x^{\alpha_1} + x^{\alpha_2})$, откуда в силу теоремы сходимости Лебега (теорема 114 гл. IV) следует непрерывность I.

Далее, для нецелых α можно вычислить

$$\frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha})$$

и совершить предельный переход к целым α, раскрывая неопределенность $\vec{0}/0$. Это легко сделать с помощью правила Лопиталя. Для целых α

$$I(\alpha) = \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta\ \text{нецелое}}} I(\beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\beta}) =$$

$$= \lim_{\beta \to \alpha} \frac{2i\pi}{-2i\pi e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\beta}\ln z) =$$

$$= -\sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln z). \qquad \text{(VII, 5; 53)}$$

Существует и другой метод. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln^{m+1}(z)\,dz, \qquad \text{(VII, 5; 54)}$$

где α (целое или нецелое) удовлетворяет все тем же условиям и m — целое число $\geqslant 0$. Интегралы по контурам (3) и (4) при A, стремящемся к бесконечности, и ε, стремящемся к 0, стремятся к нулю. Интеграл по отрезку (1) стремится к

$$\int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln^{m+1}(x)\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 55)}$$

в то время как интеграл по отрезку (2) стремится к

$$\int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\,x^{\alpha}e^{2i\pi\alpha}(\ln x + 2i\pi)^{m+1}\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 56)}$$

так что

$$2i\pi \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln^{m+1}z) = \lim_{A \to \infty,\ \varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln^{m+1}(z)\,dz =$$

$$= \int_0^{\infty} \vec{R}(x)\,x^{\alpha}\left(\ln^{m+1}x - e^{2i\pi\alpha}(\ln x + 2i\pi)^{m+1}\right)dx. \qquad \text{(VII, 5; 57)}$$

Для целых α и $m=0$ получаем

$$2i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln z)=-2i\pi\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\,dx,\qquad \text{(VII, 5; 58)}$$

чем и решается поставленная задача. Для $m=1$

$$2i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln^2 z)=$$

$$=-4i\pi\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln x\,dx+4\pi^2\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\,dx.\qquad \text{(VII, 5; 59)}$$

Таким образом, теорему 35 можно дополнить:

Теорема 36. *В условиях теоремы* 35 *при целом* α

$$\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\,dx=-\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln z),\quad \int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln^2 z)-i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\ln z).\qquad \text{(VII, 5; 60)}$$

Заметим еще, что *интеграл* I *дифференцируем по* α *под знаком* $\int$ (при целых и нецелых α). В самом деле, формальное дифференцирование дает

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln x\,dx.\qquad \text{(VII, 5; 61)}$$

Полученный интеграл по тем же критериям и аналогичным оценкам сходится, так что законность выполненного формально дифференцирования вытекает из теоремы 115 гл. IV. Более общо,

$$\frac{d^m I}{d\alpha^m}=\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln^m x\,dx.\qquad \text{(VII, 5; 62)}$$

Производную $\dfrac{d^m I}{d\alpha^m}$ можно вычислить с помощью теоремы 35, что даст для вычисления правой части соотношения (VII, 5; 62) при целых $m\geqslant 0$ формулу

$$\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\ln^m x\,dx=\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{2i\pi}{1-2^{2i\pi\alpha}}\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^{\alpha})\right)\qquad \text{(VII, 5; 63)}$$

(для нецелых α результат получается непосредственно, а для целых α — раскрытием неопределенности $\vec{0}/0$).

Например, для $0 < \operatorname{Re} z < 1$ имеем

$$I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1} \ln x}{1+x}\, dx = \frac{d}{dz}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx\right) =$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right) = -\frac{\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z}. \qquad \text{(VII, 5; 64)}$$

Пример 4. *Применение к функциям Эйлера.* Можно указать большое число случаев применения вычетов в теории специальных функций. Мы ограничимся здесь примером интересной формулы, относящейся к эйлеровым интегралам и являющейся скорее примером применения первой интегральной формулы Коши, чем теоремы о вычетах.

Как известно, Г-функция Эйлера определяется для $\operatorname{Re} \alpha > 0$ формулой

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx. \qquad \text{(VII, 5; 65)}$$

Оказывается, можно заменить путь интегрирования — вещественную полупрямую $\geqslant 0$ — полупрямой с аргументом θ в комплексной плоскости:

$$\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz, \quad z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z}, \quad \arg z = \theta. \qquad \text{(VII, 5; 66)}$$

Для того чтобы в этом убедиться, надо доказать, что разность

$$\int_0^{+\infty} - \int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} \qquad \text{(VII, 5; 67)}$$

равна нулю. Второй интеграл $\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} = \int_0^{\infty} e^{-re^{i\theta}} (re^{i\theta})^{\alpha-1} e^{i\theta}\, dr$ имеет смысл, если функция $|e^{-z} z^{\alpha-1}| = e^{-r\cos\theta} r^{\operatorname{Re}\alpha-1} e^{-\theta \operatorname{Im}\alpha}$ интегрируема на бесконечности, т. е. если $\cos\theta > 0$ (интегрируемость в начале координат требует выполнения упоминавшегося выше условия $\operatorname{Re}\alpha > 0$). Возьмем, например, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. При этих условиях разность (VII, 5; 67) можно записать в виде

$$\lim_{A\to+\infty,\ \varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^{A} - \int_{e^{i\theta}\varepsilon}^{e^{i\theta}A}\right). \qquad \text{(VII, 5; 68)}$$

Добавим путь по дуге $|z|=A$ с аргументом, изменяющимся от 0 до θ, и путь по дуге $|z|=\varepsilon$ с аргументом, изменяющимся от θ до 0. Поскольку функция $|e^{-z}z^{\alpha-1}|$ на большой окружности ограничена величиной $\mathrm{const}\, e^{-A\cos\theta}A^{\mathrm{Re}\,\alpha-1}$, а на малой — величиной $\mathrm{const}\, \varepsilon^{\mathrm{Re}\,\alpha-1}$, то интегралы по этим путям стремятся к 0, когда A стремится к бесконечности и ε стремится к 0. Следовательно, разность равна пределу интеграла $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$, где $\Gamma_{A,\varepsilon}$ — контур, указанный на рис. 17.

Но этот контур является ориентированной псевдограницей ориентированного многообразия с псевдограницей $D_{A,\varepsilon}$ (заштрихованная область на рисунке), ориентированного согласно

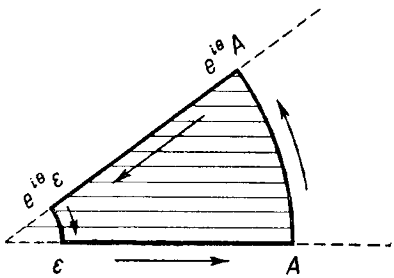

Рис. 17.

ориентации плоскости $\mathbb{C}$. Мы находимся в условиях применимости теоремы Стокса (общая теорема 38 гл. IV, упр. 2°), стр. 232), а следовательно, первой основной интегральной формулы Коши.

Подинтегральная функция голоморфна в некотором открытом множестве, содержащем $D_{A,\varepsilon}$, а именно в открытом множестве $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, $z \neq 0$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ равен нулю, чем и доказано равенство функций (VII, 5; 65) и (VII, 5; 66). Таким образом,

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz=\int\limits_0^{+\infty} e^{-re^{i\theta}}r^{\alpha-1}e^{i\theta\alpha}\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 69)}$$

Положим теперь $\theta=\frac{\pi}{2}$, а следовательно $e^{-re^{i\theta}}=e^{-ir}$. В силу критерия Абеля при $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ записанный интеграл является полусходящимся на бесконечности (интегрируемость в начале координат при $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ обеспечена). В самом деле, вариация функции $r^{\alpha-1}$ ограничена на бесконечности (поскольку в силу теоремы 87 гл. IV ее производная $(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ интегрируема на бесконечности) и стремится к нулю при r, стремящемся к бесконечности, а $\left|\int\limits_A^B e^{-ir}\,dr\right| \leqslant 2$.

Кроме того, при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ интеграл равномерно сходится на бесконечности. Это вытекает из теоремы Абеля при $0<\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. В самом деле,

$$|(e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1})'| \leqslant |\alpha-1|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-2}+|(e^{-r\cos\theta})'|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-1}, \qquad \text{(VII, 5; 70)}$$

откуда в силу (IV, 9; 23)

$$V([A,+\infty[;\ e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_A^{+\infty} (|\alpha-1|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-2}+|(e^{-r\cos\theta})'|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-1})\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\alpha-1}{\operatorname{Re}\alpha-1}\right| A^{\operatorname{Re}\alpha-1}+A^{\operatorname{Re}\alpha-1}=\text{const}\,A^{\operatorname{Re}\alpha-1}. \qquad \text{(VII, 5; 71)}$$

Согласно (IV, 9; 102),

$$\left|\int\limits_A^{\infty}(e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1})(e^{-ir\sin\theta})\,dr\right| \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\,A^{\operatorname{Re}\alpha-1}\sup_{\substack{B\geqslant A\\ \theta\geqslant\theta_0}}\left|\int\limits_A^B e^{-ir\sin\theta}\,dr\right| \leqslant \text{const}\,A^{\operatorname{Re}\alpha-1}\frac{2}{\sin\theta_0}. \qquad \text{(VII, 5; 72)}$$

Но для $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$ в силу оценки $\left|e^{-re^{i\theta}}r^{\alpha-1}\right| \leqslant e^{-r\cos\theta_0}r^{\operatorname{Re}\alpha-1}$ *абсолютная* сходимость на бесконечности равномерна, и, значит, для $\operatorname{Re}\alpha<1$ и $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ имеет место указанная равномерная сходимость на бесконечности.

Следовательно, из теоремы 116 гл. IV вытекает, что наш интеграл является непрерывной функцией от θ, а поскольку эта функция постоянна при $0\leqslant\theta<\pi/2$, она постоянна и при $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. Поэтому для $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ можно написать

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ir}r^{\alpha-1}e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\,dr, \qquad \text{(VII, 5; 73)}$$

или

$$e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ir}r^{\alpha-1}\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 74)}$$

Проводя те же рассуждения с $\theta=-\frac{\pi}{2}$, получим тот же результат с заменой $-i$ на i; комбинируя эти результаты, находим

$$\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}=\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\cos r\,dr,$$
$$\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}=\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\sin r\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 75)}$$

В том, что касается второго интеграла, можно пойти дальше. В самом деле, как в первом, так и во втором интегралах для сходимости на бесконечности по Абелю требуется выполнение неравенства $\operatorname{Re}\alpha<1$, а для интегрируемости в начале координат необходимо выполнение неравенства $\operatorname{Re}\alpha>0$. Однако ввиду наличия синуса второй интеграл имеет смысл в начале координат даже при $\operatorname{Re}\alpha>-1$, так что окончательно он имеет смысл в полосе $-1<\operatorname{Re}\alpha<+1$. Этот интеграл определяет функцию от α, голоморфную в указанной полосе (формальное дифференцирование по α под знаком $\int$ дает $\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\ln r\sin r\,dr$, и остается применить к $\int_0^A$ теорему 115 гл. IV и теорему 117 гл. IV для перехода к пределу при A, стремящемся к бесконечности), а поскольку то же самое имеет место для $\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ ($\alpha=0$ является полюсом $\Gamma(\alpha)$ и одновременно нулем синуса, а следовательно, регулярной точкой), обе функции при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ совпадают во всей этой полосе. Итак, имеет место

Теорема 37. *Формулы* (VII, 5; 75) *справедливы: первая для* $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, *а вторая для* $-1<\operatorname{Re}\alpha<+1$.

Следствие.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm ix}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\pi}\,e^{\pm\frac{i\pi}{4}},\qquad \int_0^{+\infty}\cos x\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^{+\infty}\sin x\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm it^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pm\frac{i\pi}{4}},\qquad \int_0^{+\infty}\cos t^2\,dt=\int_0^{+\infty}\sin t^2\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

(VII, 5; 76)

Доказательство. Полагая во второй формуле (VII, 5; 75) $\alpha=0$, получаем $\left(\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)_{\alpha=0}$. Эта величина равна $\frac{\pi}{2}$, поскольку $\Gamma(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$ и $\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sim\frac{\alpha\pi}{2}$ при α, стремящемся к 0.

Формулы второй строки получаются, если в (VII, 5; 73) и (VII, 5; 75) положить $\alpha=\frac{1}{2}$ и учесть, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Третья строка получается из второй заменой переменной $x=t^2$. Эти формулы называются формулами Френеля (они применяются в теории дифракции). См. гл. IV, формулы (IV, 9; 110_2) и (IV, 9; 113).

§ 6. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. ТЕОРЕМЫ АСКОЛИ И МОНТЕЛЯ

Полуметрические пространства

Во второй главе мы ввели сначала метрические, а затем топологические пространства. Каждое метрическое пространство является топологическим, но метрическая структура богаче, чем топологическая, и позволяет рассматривать дополнительные свойства и понятия (последовательности Коши и полные пространства, ограниченные множества, равномерно непрерывные отображения и т. д.). Топологическое пространство, топологию которого можно определить с помощью некоторой метрики, называется метризуемым. Различные метрики, определяющие его топологию, называются эквивалентными, но они не «идентичны»: может оказаться, например, что пространство полно в одной из метрик, но не полно в другой.

Существуют и не метризуемые топологические пространства.

Понятие метрического пространства можно несколько обобщить. Введем следующее определение:

Полурасстоянием на множестве E называется отображение d множества $E\times E$ в вещественную полуось $\mathbb{R}_+$, обладающее следующими свойствами:

1) симметричность: $d(x, y)=d(y, x)$;
2) полуположительность: $d(x, y)\geqslant 0$ и $d(x, x)=0$;
3) неравенство треугольника: (VII, 6; 1)

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

Возможно, что $d(x, y)=0$ даже в том случае, когда $x\neq y$.

Рассматривать множества, снабженные одним-единственным полурасстоянием, не очень интересно: такие топологические пространства неотделимы. (Таковы, например, пространства $\mathscr{L}^p$; см. гл. IV, стр. 567.)

Множество E будем называть *полуметрическим пространством*, если оно снабжено семейством $(d_i)_{i \in I}$ полурасстояний (где множество индексов I имеет произвольную мощность), удовлетворяющих следующему условию:

Семейство $(d_i)_{i \in I}$ является направленным (фильтрующимся), т. е. для каждой конечной части J множества I существует такое $k \in I$, что $d_k \geqslant d_j$ для всех $j \in J$. (VII, 6; 1_2)

Множество $x \in E$, таких, что $d_i(a, x) < R$ (соответственно $\leqslant R$), называется *открытым шаром* $B_{i, 0}(a, R)$ (соответственно *замкнутым шаром* $B_i(a, R)$) с центром в точке $a \in E$, радиусом $R > 0$ и индексом $i \in I$.

Полуметрическое пространство мы наделим следующей топологией: подмножество $\mathcal{O}$ из E будем называть открытым, если вместе с каждой точкой оно содержит также некоторый шар с центром в этой точке, т. е. если

$$\forall a \subset \mathcal{O} \quad \exists i \in I \text{ и } \varepsilon > 0, \text{ такие, что } B_i(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}. \qquad \text{(VII, 6; 2)}$$

Можно убедиться, что аксиомы (II, 2; 1) открытых множеств при этом удовлетворяются. Не совсем тривиальна лишь проверка аксиомы b) о конечном пересечении: пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Пусть $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ — открытые множества, $\mathcal{O}$ — их пересечение, и пусть $a \in \mathcal{O}$. Тогда существуют такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$, что каждый шар $B_{i_\nu}(a, \varepsilon_\nu)$ лежит в $\mathcal{O}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Если k — такой индекс, что d_k мажорирует $d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_n}$ (аксиома направленности), если $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, то шар $B_k(a, \varepsilon)$ лежит в $\mathcal{O}$, а значит, $\mathcal{O}$ открыто. Можно сказать, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых шаров. Шары $B_i(a, \varepsilon)$ с центром в точке a (при переменных ε и i) образуют фундаментальную систему окрестностей точки a.

Введенная топология отделима (т. е. удовлетворяет аксиоме d) Хаусдорфа) тогда и только тогда, когда,

каковы бы ни были различные точки x и y из E, существует такой индекс $i \in I$, что $d_i(x, y) > 0$. (VII, 6; 2_2)

Полуметрическое пространство называется отделимым, если его топология отделима. *Даже если это не будет указано явно, мы всегда будем считать, что полуметрическое пространство имеет отделимую структуру.*

Полурасстояния d_i, очевидно, являются непрерывными функциями, действующими из $E \times E$ в $\mathbb{R}_+$.

Может случиться, что все полурасстояния d_i будут в действительности расстояниями. *Однако даже в этом случае, если* *только семейство расстояний содержит более, чем один элемент, пространство будет называться полуметрическим, а не метрическим.*

Говорят, что топологическое пространство *полуметризуемо*, если его топология может быть определена с помощью некоторого семейства полурасстояний.

Теорема 38. *Для того чтобы топологическое пространство E было полуметризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством:*

каковы бы ни были точка $a \in E$ и открытая окрестность Ω точки a, существует непрерывная функция γ на E с вещественными значениями $\geqslant 0$, положительная в точке a и равная нулю в $C\Omega$.

Доказательство. 1) Пусть пространство E — полуметрическое и $(d_i)_{i \in I}$—его семейство полурасстояний. Если Ω является окрестностью точки a, то существуют $i \in I$ и $\varepsilon > 0$, такие, что шар $B_i(a, \varepsilon)$ лежит в Ω. Искомая функция равна $x \to \varepsilon - d(x, a)$ в множесте B и равна 0 вне его. Эта конструкция уже встречалась в лемме 1 к теореме 11 гл. IV (о разложении единицы). Там предполагалось, что пространство метрическое и локально компактное, в чем для рассматриваемого результата необходимости нет.

2) Обратно, предположим, что E — топологическое пространство, обладающее указанным свойством. Каждой непрерывной функции γ на E с неотрицательными значениями поставим в соответствие функцию на $E \times E$, определенную по формуле, $(x, y) \to |\gamma(x) - \gamma(y)|$. Полученная функция, очевидно, будет полурасстоянием. Мы будем ее обозначать через d_γ.

Меняя γ, мы получаем семейство полурасстояний, а следовательно, некоторую полуметрическую структуру. Эта структура определяет некоторую топологию $\mathcal{T}'$. Покажем, что эта топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{T}$. В самом деле, открытые шары $B_{\gamma, 0}(a, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки a в топологии $\mathcal{T}'$. Однако, поскольку каждая функция γ непрерывна в топологии $\mathcal{T}$, эти шары открыты, а значит, являются окрестностями точки a в топологии $\mathcal{T}$. Следовательно, каждая $\mathcal{T}'$-окрестность точки a является и ее $\mathcal{T}$-окрестностью. Обратно, если Ω—открытая окрестность точки a в топологии $\mathcal{T}$, то существует такая функция γ, которая > 0 в точке a и равна нулю в дополнении $C\Omega$. Тогда шар $B_\gamma\left(a, \frac{\gamma(a)}{2}\right)$ как множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|\gamma(x) - \gamma(a)| \leqslant \frac{\gamma(a)}{2}$ $\left(\text{а значит, } \gamma(x) \geqslant \frac{\gamma(a)}{2} > 0\right)$, лежит в Ω и является некоторой окрестностью точки a в топологии $\mathcal{T}'$. Таким образом, в $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ каждая точка имеет одни и те же окрестности, поэтому $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$.

Замечание. Эта теорема не дает практического критерия для выяснения того, полуметризуемо ли данное пространство. Как бы то ни было, если и верно, что многие часто применяемые в анализе пространства неметризуемы, то почти все *они полуметризуемы*. В частности, каждое компактное или локально компактное пространство полуметризуемо [1]).

Непрерывность и равномерная непрерывность

Пусть E и F — два полуметрических пространства с семействами полурасстояний $(d_i)_{i\in I}$ и $(\delta_j)_{j\in J}$. Отображение f пространства E в пространство F непрерывно (понятие чисто топологическое), если

$$\forall a\in E,\quad \forall\varepsilon>0,\quad \forall j\in J,\quad \exists\eta>0,\quad \exists i\in I:$$
$$(d_i(x-a)\leqslant\eta\Rightarrow\delta_j(f(x),\ f(a))\leqslant\varepsilon). \qquad \text{(VII, 6; 3)}$$

Кроме того, оно может быть и *равномерно непрерывно* (ввести это понятие, имея в своем распоряжении лишь топологические структуры, невозможно). А именно оно таково, если

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall j\in J,\quad \exists\eta>0,\quad \exists i\in I:$$
$$(d_i(x',\ x'')\leqslant\eta\Rightarrow\delta_j(f(x'),\ f(x''))\leqslant\varepsilon). \qquad \text{(VII, 6; 4)}$$

Теорема 39. *Непрерывное отображение полуметрического компактного пространства E в полуметрическое пространство F равномерно непрерывно.*

Доказательство. Эта теорема является обобщением теоремы 31 гл. II на полуметрические пространства. Однако приведенное там доказательство здесь не подходит, так как оно основывалось на теореме Больцано — Вейерштрасса, в которой предполагается метризуемость. Мы дадим новое доказательство, которое, конечно, будет годиться и для частного случая метрического пространства.

Предположим, что утверждение теоремы несправедливо, и покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

---

[1]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно применить лемму 1 теоремы 11 гл. IV, из которой видно, что условия теоремы 38 выполнены. Заметим, однако, что мы эту лемму в общем случае не доказывали, а провели доказательство только для метрического или полуметрического случая!

Пусть существуют $j \in J$ и $\varepsilon > 0$, такие, что для любого $i \in I$ и любого $\eta > 0$ найдется пара $(x', x'') \in E \times E$, удовлетворяющая неравенствам

$$d_i(x', x'') \leqslant \eta, \quad \delta_j(f(x'), f(x'')) \geqslant \varepsilon. \qquad \text{(VII, 6; 4}_2\text{)}$$

Зафиксируем такие j и ε. Для каждого i и каждого η множество $E_{i,\eta}$ пар $(x', x'') \in E \times E$, удовлетворяющих соотношениям (VII, 6; 4_2), замкнуто в компактном множестве $E \times E$ (поскольку f, d_i, δ_j непрерывны) и непусто.

Поскольку семейство полурасстояний направлено, то пересечение конечного числа множеств $E_{i,\eta}$ содержит множество, обладающее теми же свойствами, а следовательно, непусто. Значит, пересечение всех $E_{i,\eta}$ непусто.

Если пара (x', x'') лежит в этом пересечении, то для каждого $i \in I$ имеем $d_i(x', x'') = 0$, а так как пространство E отделимо, то $x' = x''$. В то же время $\delta_j(f(x'), f(x'')) \geqslant \varepsilon$ — противоречие.

Говорят, что отображение f пространства E в пространство F *удовлетворяет условию Липшица* (или, короче, *липшицево*), если, каков бы ни был индекс $j \in J$, существуют $i \in I$ и $k \geqslant 0$, такие, что для любых $x', x'' \in E$

$$\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k d_i(x', x''). \qquad \text{(VII, 6; 4}_3\text{)}$$

Всякое липщицево отображение равномерно непрерывно.

Равномерная структура. Липшицева структура

Две полуметрические структуры на одном и том же множестве называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же топологию, т. е. если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих двух структур, в множество E, снабженное другой структурой, непрерывно. Говорят, что они *равномерно эквивалентны* или что они *определяют одну и ту же равномерную структуру* на E, если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих двух структур, в множество E, снабженное другой структурой, равномерно непрерывно. Две равномерно эквивалентные полуметрические структуры, разумеется, эквивалентны.

Говорят, что две полуметрические структуры *эквивалентны по Липшицу* (*липшиц-эквивалентны*), или определяют одну и ту же липшицеву структуру, если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих структур, в множество E, снабженное другой структурой, липшицево. Две структуры, эквивалентные по Липшицу, тем более равномерно эквивалентны. Например, если к семейству полурасстояний в E добавить все точные верхние грани или суммы конечного числа этих полурасстояний, то получится структура, липшиц-эквивалентная исходной.

Непрерывность (соответственно равномерная непрерывность, соответственно липшицевость) отображений E в F не нарушается, если полуметрические структуры в E и в F заменить на эквивалентные (соответственно на равномерно эквивалентные, соответственно на эквивалентные по Липшицу) структуры.

Если E — компактное топологическое пространство, то, как мы видели (см. замечание после теоремы 38), его топологию можно задать полуметрической структурой. Согласно теореме 39, все такие структуры равномерно эквивалентны; иначе говоря, компактное топологическое пространство имеет единственную равномерную структуру.

Определение равномерной структуры можно дать более общим образом, непосредственно, как это было сделано для топологических структур. А именно поступают следующим образом.

Равномерная структура на множестве E определяется заданием семейства подмножеств в $E \times E$, называемых *окружениями*, удовлетворяющего следующим условиям:

1°) всякое подмножество в $E \times E$, содержащее окружение, является окружением;

2°) пересечение любого конечного числа окружений является окружением;

3°) если $\mathcal{U} \subset E \times E$—окружение, то существует такое окружение $\mathcal{V}$, что $(x, y) \in \mathcal{V}$ влечет за собой $(y, x) \in \mathcal{U}$ (симметричность);

4°) если $\mathcal{U} \subset E \times E$—окружение, то существует такое окружение $\mathcal{V}$, что $(x, y) \in \mathcal{V}$, $(y, z) \in \mathcal{V}$ влекут за собой $(x, z) \in \mathcal{U}$ (неравенство треугольника); (VII, 6; 4_4)

5°) для всякого окружения $\mathcal{U}$ и всякой точки $x \in E$ пара (x, x) принадлежит $\mathcal{U}$;

6°) аксиома отделимости: пересечение всех окружений совпадает с диагональю $E \times E$, т. е. множеством всех пар (x, x), где $x \in E$.

Окружения служат своего рода мерой близости; если $(x, y) \in \mathcal{U}$, то говорят, что точки x и y *близки порядка* $\mathcal{U}$, или $\mathcal{U}$-близки.

Равномерная структура естественным образом определяет топологию: множество $\mathcal{O}$ в E открыто в этой топологии, если для всякого $a \in \mathcal{O}$ существует такое окружение $\mathcal{U} \subset E \times E$, что из $(a, x) \in \mathcal{U}$ следует $x \in \mathcal{O}$. Топологическое пространство называется *равномеризуемым*, если его топология может быть определена с помощью некоторой равномерной структуры.

Пусть теперь E и F — два равномерных пространства. Отображение f пространства E в пространство F называется *равномерно непрерывным*, если, каково бы ни было окружение $\mathscr{V}$ в $F \times F$, существует такое окружение $\mathscr{U}$ в $E \times E$, что из $(x, y) \in \mathscr{U}$ следует $(f(x), f(y)) \in \mathscr{V}$. В этом случае f и подавно непрерывно.

Если E — полуметрическое пространство с полурасстояниями d_i, $i \in I$, то множество $\mathscr{U} \subset E \times E$ назовем окружением, если существуют такие $i \in I$ и $\varepsilon > 0$, что из неравенства $d_i(x, y) \leqslant \varepsilon$ следует включение $(x, y) \in \mathscr{U}$. Тем самым полуметрическая структура определяет равномерную структуру. Оказывается, что хотя топологическая структура не всегда может быть определена с помощью семейства полурасстояний (см. теорему 38), но каждую равномерную структуру (в смысле только что данного нами общего определения) с помощью некоторого семейства полурасстояний определить можно. Поэтому для топологических пространств понятия равномеризуемости и полуметризуемости равносильны. Это значит, что мы ничего не потеряем, если будем рассматривать лишь равномерные структуры, определенные исходя из полуметрических структур.

Что же касается липшицевых структур, то вряд ли будет интересным определять их без помощи полурасстояний.

Если E и F — полуметрические пространства, то, следуя способу, указанному в гл. II, стр. 63, на $E \times F$ можно определить различные полуметрические структуры. Все они эквивалентны по Липшицу. При этом все функции расстояния d_i из $E \times E$ в $\mathbb{R}_+$ будут липшицевыми.

Последовательности Коши. Секвенциально полные пространства

Пусть E — полуметрическое пространство.

Сходимость последовательности зависит только от топологии. Последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из E *сходится* к $a \in E$, если, каковы бы ни были $i \in I$ и $\varepsilon > 0$, найдется такое целое число p, что при $n \geqslant p$ выполняются неравенства $d_i(x_n, a) \leqslant \varepsilon$.

Однако в нашем случае можно определить и понятие последовательности Коши, чего нельзя сделать, если иметь дело лишь с топологической структурой. Последовательность x_n называется *последовательностью Коши*, если при любом $i \in I$ последовательность $d_i(x_m, x_n)$ сходится к 0 при m и n, стремящихся к бесконечности, иначе говоря, если

$$\forall i \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}: (m \geqslant p, n \geqslant p \Rightarrow d_i(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon). \quad \text{(VII, 6; 5)}$$

Это свойство последовательности не нарушается, если имеющуюся структуру заменить на равномерно ей эквивалентную (но оно может нарушиться, если ее заменить на просто эквивалентную структуру). Впрочем, последовательности Коши можно определить непосредственно с помощью окружений равномерных структур. Последовательность x_n будет *последовательностью Коши*, если для любого окружения $\mathcal{U}$ найдется такое число $p \geqslant 0$, что для $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$ имеет место соотношение $(x_m, x_n) \in \mathcal{U}$.

Полуметрическое пространство называется *секвенциально полным* (или *полуполным*), если в нем каждая последовательность Коши сходится. Мы говорим «секвенциально полным», а не «полным», поскольку в случае, когда выходят за пределы метрических пространств, рассмотрение последовательностей может оказаться недостаточным. Существует более сильное понятие полноты пространства, о котором мы здесь не говорим, совпадающее с понятием секвенциальной полноты для метрических пространств или пространств, равномерно эквивалентных метрическим.

Метризуемые полуметрические пространства

Теорема 40. *Пусть E — полуметрическое пространство, определенное с помощью конечного или счетного множества полурасстояний $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$. Тогда на E существует метрическая структура, равномерно эквивалентная данной. В частности, рассматриваемое топологическое пространство E метризуемо.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что семейство полурасстояний $d_0, d_0+d_1, \ldots, d_0+d_1+\ldots+d_n, \ldots$ равномерно эквивалентно данному семейству. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что семейство полурасстояний возрастающее: $d_n \geqslant d_{n-1}$ для любого n.

Если заменить теперь каждое d_n на $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, т. е. положить

$$\delta_n(x, y) = \min(d_n(x, y), 1), \qquad \text{(VII, 6; 6)}$$

то мы снова получим равномерно эквивалентное семейство. Следовательно, можно считать, что задана возрастающая последовательность расстояний $\delta_n \leqslant 1$. Положим теперь

$$\delta = \sup_{n \geqslant 0}\left(\frac{\delta_n}{2^n}\right), \quad \text{где} \quad \delta_n(x, y) = \max_{n \geqslant 0}\left(\frac{\delta_n(x, y)}{2^n}\right). \qquad \text{(VII, 6; 7)}$$

Этот максимум существует, поскольку для x и $y \in E$ последовательность $\delta_n(x, y)/2^n$ стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Функция δ, очевидно, представляет собой некоторое полурасстояние. Она даже является просто расстоянием, поскольку в силу предположения отделимости существует такое число n, что $\delta_n(x, y) > 0$, а значит, и $\delta(x, y) > 0$.

Покажем, что метрическая структура, определяемая расстоянием δ, равномерно эквивалентна данной структуре. Пусть сначала $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $\delta \leqslant \varepsilon/2^n$ очевидным образом следует $\delta_n/2^n \leqslant \varepsilon/2^n$ или $\delta_n \leqslant \varepsilon$. Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Найдем такое n, для которого $1/2^n \leqslant \varepsilon$. Тогда из $\delta_n \leqslant \varepsilon$ следует $\delta_i/2^i \leqslant \varepsilon$: при $i \leqslant n$, поскольку $\delta_i/2^i \leqslant \delta_n/2^i \leqslant \varepsilon/2^i \leqslant \varepsilon$, а при $i \geqslant n$ потому, что $\delta_i \leqslant 1$ и $1/2^i \leqslant 1/2^n \leqslant \varepsilon$. Следовательно, структуры $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и δ равномерно эквивалентны. Тем более они просто эквивалентны, а значит, топологическая структура, определенная первой из них, метризуема.

Замечание. Напротив, из самого способа, по которому мы образовывали $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, видно, что полученная метрическая структура, вообще говоря, не является эквивалентной по Липшицу исходной структуре.

Ограниченные подмножества полуметрического пространства

Множество A полуметрического пространства E называется *ограниченным*, если для любого $i \in I$ оно содержится в некотором шаре относительно полурасстояния d_i. Свойство ограниченности зависит только от липшицевой структуры. В то же время множество может быть ограниченным в некоторой полуметрике и не быть ограниченным в другой, ей равномерно эквивалентной. Например, если вернуться к доказательству теоремы 39, то в структурах $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, совокупности ограниченных множеств не совпадают: скажем, во второй структуре все пространство ограничено.

Поскольку функции расстояния непрерывны, то *замыкание ограниченного подмножества ограничено.*

Полунормированные векторные пространства

Мы уже определяли понятие полунормы в векторном пространстве $\vec{E}$. К понятию нормы оно относится так же, как относится понятие полурасстояния к понятию расстояния. Это некоторая функция p, определенная на $\vec{E}$, со значениями в $\mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

1°) *полуположительность*: $p(\vec{x}) \geqslant 0$, $p(\vec{0}) = 0$;

2°) *однородность*: $p(\lambda\vec{x}) = |\lambda| \, p(\vec{x})$, где λ — скаляр; (VII, 6; 7_2)

3°) *неравенство выпуклости*: $p(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant p(\vec{x}) + p(\vec{y})$.

Векторное пространство $\vec{E}$ называется *полунормированным* [1]), если оно снабжено некоторым семейством полунорм $(p_i)_{i \in I}$ (которые мы будем обозначать также через $\| \quad \|_i$, несмотря на то что часто обозначение $\| \quad \|$ резервируют лишь для обычных норм), причем это семейство является направленным (фильтрующимся): *каково бы ни было конечное множество $J \subset I$, существует такое k, что норма $\| \quad \|_k$ мажорирует все нормы $\| \quad \|_j$, $j \in J$.*

Кроме того, даже в тех случаях, когда это явно не будет сказано, считается, что структура отделима, т. е.

$$\text{каково бы ни было } \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ существует такое } i \in I, \text{ что } \|\vec{x}\|_i \neq 0. \tag{VII, 6; 7$_4$}$$

Если p — полунорма, то функция $(x, y) \to p(x-y)$ есть полурасстояние, и притом согласующееся с векторной структурой: оно инвариантно относительно сдвига и при гомотетии умножается на модуль коэффициента гомотетии. Следовательно, векторное полунормированное пространство является также и топологическим пространством. Более того,

Теорема 41. *Векторное полунормированное пространство является топологическим векторным пространством: отображения $(\vec{x}, \vec{y}) \to (\vec{x} + \vec{y})$ множества $\vec{E} \times \vec{E}$ в $\vec{E}$ и $(\lambda, \vec{x}) \to \lambda\vec{x}$ множества $\mathbb{K} \times \vec{E}$ в $\vec{E}$ непрерывны.*

Доказательство. В самом деле, пусть заданы $a \in E$, $b \in E$, $i \in I$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенств $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ и $\|\vec{y} - \vec{b}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ будет вытекать неравенство $\|(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{a} + \vec{b})\|_i \leqslant \varepsilon$, доказывающее непрерывность (и даже равномерную непрерывность) сложения. Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\lambda\vec{x} - \alpha\vec{a}\|_i \leqslant |\lambda - \alpha| \|\vec{x}\|_i + |\alpha| \|\vec{x} - \vec{a}\|_i. \tag{VII, 6; 7$_5$}$$

При $|\lambda - \alpha| \|\vec{x}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ и $|\alpha| \|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ будет выполняться неравенство $\|\lambda\vec{x} - \alpha\vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon$. Второе из неравенств выполняется при $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/|2\alpha|$, а первое — при $|\lambda - \alpha| \leqslant \varepsilon/2\|x\|_i$, т. е. если считать $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant 1$ при $|\lambda - \alpha| \leqslant \varepsilon/2(\|\vec{a}\|_i + 1)$. Таким образом, из неравенств

$$|\lambda - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\|\vec{a}\|_i + 1)}, \quad \|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right) \tag{VII, 6; 7$_6$}$$

---

[1]) Чаще полунормированным пространством называют пространство, наделенное *одной* полунормой. — *Прим. ред.*

следует неравенство $\| \lambda \vec{x} - \alpha \vec{a} \|_i \leqslant \varepsilon$, доказывающее непрерывность умножения на скаляр в точке (α, a) произведения $\mathbb{K} \times \vec{E}$. Однако умножение не равномерно непрерывно (см. гл. II, стр. 24).

Теорема 42. *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства, полунормированные с помощью семейств полунорм $(p_i)_{i \in I}$ на $\vec{E}$ и $(q_j)_{j \in J}$ на $\vec{F}$.*

Для того чтобы линейное отображение u пространства $\vec{E}$ в пространство $\vec{F}$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным в нуле, и в этом случае оно будет равномерно непрерывным и даже липшицевым. Для того чтобы u было непрерывно в нуле, необходимо и достаточно, чтобы для каждого индекса $j \in J$ нашлись такой индекс $i \in I$ и такая постоянная $k \geqslant 0$, что

$$q_j(u(\vec{x})) \leqslant k p_i(\vec{x}) \text{ для любого } \vec{x} \in \vec{E}, \text{ или } q_j \circ u \leqslant k p_i. \quad \text{(VII, 6; 8)}$$

Доказательство. Эта теорема является обобщением теоремы 47 гл. II и доказывается почти тем же способом.

Предположим, что отображение u непрерывно в начале. При $j \in J$ шар $B_j = B_j(\vec{0}, 1)$ является окрестностью точки $\vec{0}$ в $\vec{F}$. Следовательно, существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что $u(\mathcal{U}) \subset B_j$. Далее, существуют такой индекс i и такое число $k > 0$, что шар $B_i(\vec{0}, 1/k)$ лежит в $\mathcal{U}$, так что из $p_i(\vec{x}) \leqslant 1/k$ вытекает $q_j(u(\vec{x})) \leqslant 1$. В силу однородности из $p_i(\vec{x}) \leqslant \lambda/k$ следует $q_j(u(\vec{x})) \leqslant \lambda$. Полагая теперь $\lambda = k p_i(\vec{x})$, получаем $q_j(u(\vec{x})) \leqslant k p_i(\vec{x})$.

Обратно, если указанное условие выполнено, то отображение u очевидным образом непрерывно на E и даже липшицево.

Следствие. *Пусть $(p_i)_{i \in I}$ и $(q_j)_{j \in J}$ — два семейства полунорм на векторном пространстве $\vec{E}$. Для того чтобы они определяли одну и ту же топологию, необходимо и достаточно, чтобы для любого $j \in J$ существовали такие $i \in I$ и $k \geqslant 0$, что*

$$q_j \leqslant k p_i, \quad \text{(VII, 6; 9)}$$

и чтобы для любого $i' \in I$ существовали такие $j' \in J$ и $k' \geqslant 0$, что $p_{i'} \leqslant k' q_{j'}$.

При выполнении этих условий два семейства полунорм определяют одну и ту же равномерную и одну и ту же липшицеву структуры.

Для доказательства достаточно применить теорему к тождественному отображению пространства $\vec{E}$, снабженного одной из двух структур, в пространство $\vec{E}$, снабженное другой структурой. Это следствие обобщает теорему 12 гл. II, являющуюся, как мы указывали в замечании после теоремы 47 гл. II, следствием последней теоремы.

Из этого следствия вытекает, в частности, что для векторного полунормированного пространства $\vec{E}$ равномерные и липшицевы структуры зависят не от полунорм, а только от топологии. Можно убедиться, что, например, равномерная непрерывность отображения f пространства $\vec{E}$ в полуметрическое пространство F с полурасстояниями $(\delta_j)_{j \in J}$ определяется исключительно топологией пространства $\vec{E}$, а не задающими эту топологию полунормами: каковы бы ни были $j \in J$ и $\varepsilon > 0$, существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что из $\vec{x}'' - \vec{x}' \in \mathcal{U}$ следует, что $d_j(f(\vec{x}'), f(\vec{x}'')) \leqslant \varepsilon$.

Впрочем, каждое топологическое векторное пространство, независимо от того, определяется его топология полунормами или нет, равномеризуемо, а именно равномерную структуру можно определить следующим образом: подмножество $\mathcal{U} \subset \vec{E} \times \vec{E}$ является окружением, если существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что из $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$ следует $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{U}$. Если $\vec{E}$ полунормировано, то эта структура равномерна и определяется с помощью полунорм. Согласно сказанному на стр. 461, отсюда следует, что всякое векторное топологическое пространство полуметризуемо, но это вовсе не означает, что оно полунормируемо. Однако почти все векторные топологические пространства анализа полунормируемы, и их топология обычно определяется как раз заданием полунорм.

Понятие полунормированного пространства, немногим более сложное, чем понятие нормированного пространства, оказывается очень полезным. Оно нам сейчас послужит для определения некоторых топологий, которые мы не могли изучать до настоящего момента, и даст нам возможность привести простые примеры неметризуемых топологических пространств или ненормируемых векторных топологических пространств.

Пример 1. *Топология простой сходимости.* Пусть E — произвольное множество и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями δ_j, $j \in J$. Напомним, что через F^E мы обозначили множество всевозможных отображений E в F. Функция $\delta_{j,x}$, определенная на множестве $F^E \times F^E$ равенством

$$\delta_{j,x}(f, g) = \delta_j(f(x), g(x)), \quad j \in J, \ x \in E, \quad \text{(VII, 6; 10)}$$

является некоторым полурасстоянием. При переменных j и x семейство этих полурасстояний не фильтрующееся. Поэтому целесообразно рассмотреть также точные верхние грани

$$\delta_{j,A}(f, g) = \sup_{x \in A} \delta_j(f(x), g(x)) \qquad \text{(VII, 6; 11)}$$

по всем конечным подмножествам A множества E. Тем самым определяется полуметрическая, а значит, и топологическая структура на F^E. Ее называют *полуметрической структурой простой сходимости*. Последовательность f_n отображений E в F сходится к отображению f в этой топологии тогда и только тогда, когда для любой конечной части A множества E и любого $j \in J$ последовательность $\delta_{j,A}(f_n, f)$ сходится к нулю, а также тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ и любого $j \in J$ последовательность $\delta_{j,x}(f_n, f)$ сходится к нулю. Последнее можно выразить, сказав, что для каждого $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ или что f_n просто сходится к f.

Заметим, что окрестности точек в этой топологии «громадные»; другими словами, эта топология очень слабая и сходимость в ней слабая (простая сходимость). В самом деле, если $j \in J$ и A — конечное подмножество E, то шар $B_{j,A}(f, \varepsilon)$ является множеством отображений g пространства E в пространство F, для которых $\delta_j(g(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$ при $x \in A$ *и совершенно произвольно для* $x \in \complement A$.

Введенная топология зависит, очевидно, только от топологии пространства F, а не от его полуметрики. В самом деле, фундаментальную систему окрестностей точки $f \in F^E$ образуют множества

$$[x_1, \ldots, x_n, \mathscr{V}_1, \ldots, \mathscr{V}_n] = [g \in F^E, \ g(x_1) \in \mathscr{V}_1, \ \ldots, \ g(x_n) \in \mathscr{V}_n], \qquad \text{(VII, 6; 12)}$$

где x_i — произвольные точки из E и $\mathscr{V}_i$ — произвольные окрестности точек $f(x_i)$ из F. Здесь F^E рассматривается как произведение E экземпляров пространства F. В гл. II мы определяли топологию произведения только для конечных произведений, но можно ее определить и для произвольных произведений, и предыдущая топология как раз и будет топологией произведения. Тем не менее часто удобно исходить именно из полуметрического пространства F и рассматривать F^E как полуметрическое пространство.

Пусть $a \in E$. Отображение $f \to f(a)$, ставящее в соответствие каждой функции f на E со значениями в F ее значение в точке a, является липшицевым отображением E^F в F. В самом деле, для каждого $j \in J$ имеем равенство $\delta_{j,a}(f, g) = \delta_j(f(a), g(a))$ и тем более неравенство $\leqslant$. Это отображение, следовательно, равномерно непрерывно. Если рассматривать F^E как бесконечное произведение, то мы тем самым обобщили утверждение, высказанное в § 6 гл. II: в топологии произведения все отображения проектирования непрерывны.

В частности, если $\vec{F}$ — векторное полунормированное пространство с полунормами $\| \ \|_j$, $j \in J$, то $\vec{F}^E$ становится также полунормированным векторным пространством с полунормами $||| \ |||_{j,A}$, определенными формулой

$$||| \vec{f} |||_{j,A} = \max_{x \in A} \| \vec{f}(x) \|_j. \qquad \text{(VII, 6; 12}_2\text{)}$$

Даже если F — метрическое или $\vec{F}$ — нормированное пространство, пространства F^E или $\vec{F}^E$ будут лишь соответственно полуметрическим или полунормированным. Если $F = \mathbb{C}$, то пространство $\mathbb{C}^E$ комплексных функций на множестве E является полунормированным топологическим векторным пространством с полунормами $\| \ \|_A$, определенными формулой

$$\| f \|_A = \max_{x \in A} | f(x) |. \qquad \text{(VII, 6; 13)}$$

Напомним, что в пространстве $\mathscr{C}'(X)$ мер Радона на локально компактном пространстве X мы вводили широкую топологию (гл. IV, § 7). Это не что иное, как топология простой сходимости на $\mathscr{C}(X)$, определенная с помощью полунорм

$$\| \mu \|_A = \sup_{\varphi \in A} | \mu(\varphi) |, \text{ где } A \text{ — конечная часть } \mathscr{C}(X). \qquad \text{(VII, 6; 13}_2\text{)}$$

Если множество E несчетно, то таким образом определенная топология на $\mathbb{C}^E$ неметризуема.

В самом деле, каждое счетное пересечение окрестностей точки 0 содержит некоторое бесконечномерное векторное подпространство. [Действительно, пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — последовательность конечных подмножеств в E. Какова бы ни была последовательность $\varepsilon_n > 0$, пересечение шаров $B_{A_n}(0, \varepsilon_n) = \{f \in \mathbb{C}^E; |f(x)| \leqslant \varepsilon_n$ для $x \in A\}$ содержит множество $\mathfrak{N}_A$ комплексных функций f на E, равных нулю на объединении A множеств A_n и принимающих произвольные значения вне его. Поскольку множество A счетно, а E несчетно, множество $\mathfrak{N}_A$ есть бесконечномерное векторное подпространство пространства $\mathbb{C}^E$.] Но в любом метрическом пространстве каждая точка обладает последовательностью окрестностей, пересечение которых сводится к этой точке; такова, скажем, последовательность шаров с центром в этой точке радиуса $1/2^n$.

Если множество E счетно, то в силу теоремы 40, пространство $\mathbb{C}^E$ метризуемо (то же самое верно и для пространства F^E, если структура F определена счетным множеством полурасстояний). *Однако это пространство ненормируемо, если только множество E не конечно*[1]).

В самом деле, каждая окрестность точки 0 содержит некоторое бесконечномерное векторное подпространство. [Шар $B_A(0, \varepsilon)$ содержит подпространство $\mathfrak{N}_A$ функций, равных нулю на множестве A и принимающих произвольные значения вне его. Поскольку множество A конечно, а множество E бесконечно, $\mathfrak{N}_A$ является бесконечномерным векторным подпространством $\mathbb{C}^E$.] Но в любом нормированном векторном пространстве начало обладает окрестностью, не содержащей ни одного отличного от $\{0\}$ векторного подпространства; таков, скажем, единичный шар.

Таким образом, *полунормированное топологическое векторное пространство может быть метризуемым, но не ненормируемым*. Это и не удивительно — норма является расстоянием весьма специального вида.

Рассмотрим последовательность полунорм p_n. Как и при доказательстве теоремы 40, их можно считать возрастающими.

Следуя этому доказательству, мы должны положить $q_n = \inf(p_n, 1)$, а затем $q = \sup\limits_{n \geqslant 0}(q_n/2^n)$, и тогда расстояние δ на E определится как $\delta(x, y) = q(x - y)$. *Однако q — не норма. Не будут нормами уже q_n*, поскольку $q_n \leqslant 1$ и для скаляра λ равенство $q_n(\lambda x) = |\lambda| q_n(x)$ не выполняется. Из сказанного вытекает, что шары относительно расстояния δ, образуя фундаментальную систему окрестностей нуля, содержат бесконечномерные векторные подпространства. Поэтому они весьма отличаются от шаров, определяемых с помощью норм. Метризуемость $\mathbb{C}^E$ для счетного множества E или, более общо, метризуемость F^E для счетного E и полуметрического F со счетным множеством расстояний весьма полезны для приложений теорем общей топологии, требующих метризуемости (например, теоремы 16 гл. II или теоремы Больцано — Вейерштрасса той же главы, характеризующей компактные подмножества в F^E). Однако в большинстве случаев в пространстве $\mathbb{C}^E$

---

[1]) Если E состоит из n элементов, то $\mathbb{C}^E$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ и, значит, нормируемо.

предпочитают использовать счетное семейство полунорм, связанных с векторной структурой, а не с определенным выше расстоянием.

Пример 2. *Топология равномерной сходимости.* Во второй главе мы определили *равномерную* сходимость последовательности функций f_n, определенных на E, со значениями в F, к некоторому пределу f только для метрического пространства F. Теперь это можно сделать для полуметрического пространства F: последовательность f_n сходится к f при n, стремящемся к бесконечности, тогда и только тогда, когда для каждого j последовательность $\delta_j(f_n, f) = \sup\limits_{x \in E} \delta_j(f_n(x), f(x)) \leqslant \leqslant +\infty$ сходится к нулю. Иначе говоря, на пространстве $(F^E)_b$ *ограниченных* отображений E в F вводится полуметрическая структура, называемая *структурой равномерной сходимости*, с помощью полурасстояний

$$\delta_j(f, g) = \sup_{x \in E} \delta_j(f(x), g(x)) < +\infty. \qquad \text{(VII, 6; 14)}$$

Если F — метрическое пространство, то мы возвращаемся к расстоянию (II, 15; 3), введенному в гл. II.

Равномерная сходимость последовательности отображений E в F зависит не только от топологии пространства F, а также и от его равномерной структуры. Однако если заменить полуметрическую структуру F на другую, равномерно ей эквивалентную, то изменятся ограниченные множества в F, а следовательно, изменится пространство $(F^E)_b$. Поэтому, если мы интересуемся только топологическими и равномерными структурами, а не полуметрическими, то полурасстояния δ_j в F можно всегда заменить на равномерно эквивалентные им $\inf(\delta_j, 1)$. Тогда пространство F станет ограниченным, пространство $(F^E)_b$ совпадет с пространством F^E, также ограниченным, а топологические равномерные структуры равномерной сходимости на F^E будут определяться полурасстояниями $\inf(\delta_j(f, g), 1)$, зависящими только от равномерной структуры F[1]). Впрочем, равномерную структуру в F^E можно определить непосредственно исходя из равномерной структуры в F: $\mathscr{V} \subset F^E \times \times F^E$ будет окружением, если существует такое окружение $\mathscr{U} \subset F \times F$, что «$\forall x \in E \ (f(x), g(x)) \in \mathscr{U}$» влечет за собой включение «$(f, g) \in \mathscr{V}$».

[1]) Конечно, при этом теряется всякая возможность изучать ограниченные подмножества, и если δ_j определены исходя из полунорм на векторном пространстве $\vec{F}$, то $\inf(\delta_j, 1)$ этим свойством больше не обладает, так что теряется связь с векторной структурой.

Пример 3. *Топология компактной сходимости.* Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями δ_j, $j \in J$. Рассмотрим пространство $(F^E)_c$ *непрерывных* отображений E в F. Так как каждая непрерывная функция на компакте достигает своего максимума, то для любого компакта K и любого $j \in J$ функция

$$\delta_{j,K}(f, g) = \max_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)) \qquad \text{(VII, 6; 15)}$$

конечна и является полурасстоянием на $(F^E)_c$. При переменных j и K эти полурасстояния определяют на $(F^E)_c$ некоторую полуметрическую структуру. Последовательность непрерывных отображений f_n пространства E в F сходится в соответствующей топологии к отображению f тогда и только тогда, когда для каждого $j \in J$ и каждого компакта K из E последовательность $\delta_{j,K}(f_n, f)$ сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности, т. е. тогда и только тогда, когда для любого компакта K последовательность f_n сходится к f равномерно на K. Эта структура называется *полуметрической структурой равномерной сходимости на каждом компакте*, или *структурой компактной сходимости*. Соответствующая топология зависит только от топологии E и равномерной структуры F. Если $\vec{F}$ — полунормированное топологическое векторное пространство, то $(\vec{F}^E)_c$ будет также полунормированным топологическим векторным пространством с полунормами

$$|||\vec{f}|||_{j,K} = \max_{x \in K} \|\vec{f}(x)\|_j. \qquad \text{(VII, 6; 16)}$$

Например, пространство $(\mathbb{C}^E)_c$ непрерывных комплексных функций на E будет иметь полунормы, определяемые формулой

$$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|. \qquad \text{(VII, 6; 16}_2\text{)}$$

Если E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, а F — полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний, то топологическое пространство $(F^E)_c$ метризуемо. В самом деле, пусть A_n — последовательность компактов, объединение которых равно E, и B_n — последовательность компактных окрестностей компактов A_n. Тогда каждый компакт K из E для достаточно больших n содержится в B_n [1]), а счетное множество полурасстояний δ_{j,B_n} эквивалентно по Липшицу семейству всех $\delta_{j,K}$, где K — ком-

[1]) Смотри доказательство теоремы 11 гл. IV (о разложении единицы) — стр. 457 т. I.

пакты из E, так что для доказательства остается лишь воспользоваться теоремой 40. Если локально компактное пространство E некомпактно, то из рассуждений, проведенных в примере 1, следует, что метризуемое векторное пространство $(\mathbb{C}^E)_c$ ненормируемо, поскольку каждая окрестность нуля содержит некоторый шар $B_K(0, \varepsilon)$, а следовательно, и векторное бесконечномерное подпространство $\mathfrak{N}_K$ функций, равных нулю на компакте K и принимающих произвольные значения вне его[1]).

Пример 4. *Пространства дифференцируемых функций.* Пусть Ω — некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$[2]) и $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство. Рассмотрим пространство $(F^\Omega)_{c,m}$ функций класса C^m на Ω со значениями в $\vec{F}$. Его обозначают также через $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ или через $\mathscr{E}^m(\Omega)$, если $\vec{F} = \mathbb{C}$. Это пространство можно снабдить полунормами

$$|||\vec{f}|||_{m,K} = \max_{\substack{x \in K \\ |p| \leqslant m}} \|D^p\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(VII, 6; 17)}$$

Последовательность функций $\vec{f}_j$ из $\mathscr{E}^m(\Omega; F)$ сходится к $\vec{f}$ в соответствующей топологии при j, стремящемся к бесконечности, тогда и только тогда, когда для любого индекса дифференцирования p порядка $|p| \leqslant m$ функции $D^p\vec{f}_j$ сходятся к функции $D^p\vec{f}$ равномерно на каждом компакте из Ω. Эта топология называется *топологией компактной сходимости относительно производных порядка* $\leqslant m$. Можно также рассмотреть пространство $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F}) = \mathscr{E}^\infty(\Omega; \vec{F})$ ($\mathscr{E}(\Omega)$, если $\vec{F} = \mathbb{C}$) отображений класса C^∞ множества Ω в $\vec{F}$ и для каждого целого $m \geqslant 0$ и каждого компакта K из Ω определить в нем полунорму $|||\ |||_{m,K}$. Поскольку Ω представляет собой объединение счетного множества компактов [если оно ограничено, то можно взять последовательность $K_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, \complement\Omega) \geqslant 1/\nu\}$, в противном случае — последовательность $K_\nu = \{x \in \Omega;\ d(x, \complement\Omega) \geqslant 1/\nu,\ d(x, 0) \leqslant \nu\}$], то эти полунормированные векторные пространства метризуемы, хотя и ненормируемы. Если для каждого компакта $K \subset \Omega$ через $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ (соответственно через $\mathscr{D}_K(\Omega)$) обозначить подпространство пространства $\mathscr{E}^m(\Omega)$ (соответ-

---

[1]) Если пространство E компактно, то $(\mathbb{C}^E)_{cb} = \mathscr{C}(E)$ — банахово пространство.

[2]) Для простоты мы берем $\mathbb{R}^n$. Можно было бы взять произвольное конечномерное векторное пространство.

ственно $\mathscr{E}(\Omega)$) функций с носителем в K, то его можно снабдить индуцированной топологией. Она определяется нормой $\| \ \|_{m,K}$ (соответственно нормами $\| \ \|_{m,K}$ при целых $m \geqslant 0$). Норма $\| \ \|_{m,K}$ на $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ также индуцируется нормой $\| \ \|_m$ банахова пространства $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;\,m}$ (следствие 2 теоремы 111 гл. IV). Поскольку подпространство $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ очевидным образом замкнуто в $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;\,m}$, оно также является банаховым пространством. Напротив, можно показать, что пространство $\mathscr{D}_K(\Omega)$ метризуемое и полунормированное, но ненормируемое (это не очевидно; доказательство из примера 1 непригодно, поскольку $\| \ \|_{m,K}$ являются нормами на $\mathscr{D}_K(\Omega)$ и шар не содержит ни одного векторного пространства, кроме $\{0\}$). Мы в этом убедимся ниже (см. замечание к следствию 6 теоремы 47).

Пример 5. *Пространство голоморфных функций.* Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$, т. е. из $\mathbb{R}^{2n}$. Пользуясь одной вещественной структурой, т. е. считая $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, определим пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ и $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$. Обозначим через $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ пространство голоморфных функций на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ (над полем комплексных чисел). Это замкнутое подпространство пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ для всех m и, согласно теореме 15 Вейерштрасса, подпространство пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$. Кроме того, топологии в $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$, индуцированные топологиями пространств $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ и $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, совпадают. Пространство это метризуемое и полунормируемое, но ненормируемое. Здесь снова его ненормируемость не очевидна. (В самом деле, для множества K, имеющего внутренние точки, и связного множества Ω все полунормы $\| \ \|_{m,K}$ являются нормами в $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$. Действительно, если голоморфная функция $\vec{f}$ равна нулю на K, то, согласно следствию 5 теоремы 11, она равна нулю на связном множестве Ω. Но тогда соответствующие шары не содержат других векторных подпространств, кроме $\{0\}$, и проводимые в примере 1 рассуждения непригодны.) Мы установим это в замечании к следствию 6 теоремы 47.

Замечание. Имеют место включения:

$$(F^E)_c \subset F^E, \quad (F^E)_b \subset F^E,$$

$$\mathscr{E}(\Omega; \vec{F}) \subset \mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F}) \subset (\vec{F}^\Omega)_c \subset \vec{F}^\Omega,$$

$$\mathscr{H}(\Omega; \vec{F}) \subset \mathscr{E}(\Omega; \vec{F}),$$

и соответствующие канонические инъекции непрерывны.

Теорема 43. *Если пространство F или $\vec{F}$ секвенциально полно, то пространства F^E (E — множество), $(F^E)_b$ (E — множество), $(F^E)_c$ (E — локально компактное топологическое пространство), $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ (Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$), $\mathscr{E}(\Omega; F)$ и $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ (Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$) секвенциально полны.*

Доказательство. 1) Пусть f_n — последовательность Коши из F^E (простая сходимость). Тогда для любого $x \in E$ точки $f_n(x)$ образуют последовательность Коши в пространстве F, по предположению секвенциально полном, а следовательно, сходятся к некоторому пределу $f(x)$. В этом случае f_n просто сходятся к f, а значит, F^E секвенциально полно.

2) Пусть f_n — последовательность Коши из $(F^E)_b$ (равномерная сходимость). Согласно 1), функции f_n просто сходятся к пределу f. Кроме того, для $j \in J$ и $\varepsilon > 0$ существует такое целое число p, что $\delta_j(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon$ при $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$, а следовательно, $\delta_j(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in E$. Переходя к пределу при m, стремящемся к бесконечности, получаем отсюда $\delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, т. е. $\delta_j(f, f_n) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, функции f_n при n, стремящемся к бесконечности, равномерно сходятся к f. Далее, поскольку f_n ограничены, из написанного выше неравенства следует, что функция f ограничена и, значит, $f \in (F^E)_b$, а функции f_n сходятся к f в пространстве $(F^E)_b$, что и означает секвенциальную полноту этого пространства.

3) Пусть f_n — последовательность Коши в $(F^E)_c$ (равномерная сходимость на каждом компакте). Из 1) следует, что f_n просто сходятся к некоторому пределу f. Если применить 2) к некоторому компакту $K \subset E$ вместо самого пространства E, то получим, что f_n равномерно сходятся к f на K. Из теоремы 65 гл. II (хотя и доказанной лишь для метрического пространства F, но, очевидно, также справедливой и для полуметрического пространства F) следует, что сужение f на K непрерывно. Поскольку каждая точка E имеет компактную окрестность, то f непрерывна на E, т. е. $f \in (F^E)_c$. Но тогда f_n сходится к f в пространстве $(F^E)_c$, которое тем самым оказывается секвенциально полным.

4) Пусть f_n — последовательность Коши в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, где $\vec{F}$ — пространство Банаха. При $m = 0$ искомый результат вытекает из 3). При $m \geqslant 1$ и $|p| \leqslant m$ точки $D^p \vec{f}_n$ образуют последовательность Коши в $(\vec{F}^\Omega)_c$, которая, следовательно, равномерно сходится на каждом компакте из Ω к некоторой функ-

ции $\vec{f}_p$ на Ω со значениями в $\vec{F}$. Из следствия 1 теоремы 111 гл. IV вытекает, что $\vec{f}$ принадлежит классу C^m и что $\vec{f}_p = D^p\vec{f}$ при $|p| \leqslant m$. Значит, $\vec{f} \in \mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, а $\vec{f}_n$ сходятся к $\vec{f}$ в пространстве $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, которое тем самым оказывается секвенциально полным. То же самое справедливо для $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$.

5) Мы знаем, что $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ — замкнутое, а следовательно, секвенциально замкнутое подпространство секвенциально полного пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$. Значит, оно само секвенциально полно (очевидное обобщение теоремы 43 гл. II на полуметрические пространства).

Замечание. Как отмечалось на странице 462, в случае пространств со счетным множеством полурасстояний секвенциально полные пространства можно называть просто полными. Так будет в случае 1), если множество E конечно или счетно; в случае 2); в случае 3), если E счетно в бесконечности, при условии, что в каждом из этих случаев полуметрическая структура F определена счетным множеством полурасстояний. Так будет всегда в случаях 4) и 5) при том же самом условии на $\vec{F}$, поскольку Ω — объединение счетного множества компактов. Кроме того, можно доказать, что если пространство F полно (понятие, здесь не определявшееся), то во всех случаях 1)—5) рассматриваемые пространства также полны.

Ограниченные множества в топологическом векторном пространстве

На стр. 463 мы дали определение ограниченных множеств в полуметрическом пространстве. Для полунормированного векторного пространства с полунормами p_i, $i \in I$, это означает следующее: множество B ограничено, если для любого i полунорма p_i ограничена на B. Хотя, вообще говоря, ограниченные множества зависят от липшицевой структуры, в полунормированном векторном пространстве в силу следствия теоремы 42 они вполне определяются топологией. А именно, множество B ограничено в топологическом векторном пространстве $\vec{E}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $\mathscr{V}$ точки $\vec{0}$ найдется такое число $\eta > 0$, что $\eta B \subset \mathscr{V}$. Укажем ограниченные множества в предыдущих примерах.

Пример 1. Множество B ограничено в $\vec{F}^E$ (E — множество, $\vec{F}$ — векторное полунормированное пространство) тогда только тогда, когда множество $B(x)=\{\vec{f}(x),\ \vec{f}\in B\}$ при любом $x\in E$ ограничено в $\vec{F}$. (Говорят еще, что функции $\vec{f}$ из B ограничены в совокупности в каждой точке E.) В частности, $B\subset\mathbb{C}^E$ ограничено тогда и только тогда, когда в каждой точке $x\in E$ функции $|f(x)|$ при $f\in B$ ограничены в совокупности (граница, конечно, зависит от x).

Пример 2. В пространстве $(\vec{F}^E)_b$ ограниченных функций, определенных на множестве E, со значениями в полунормированном векторном пространстве $\vec{F}$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда множество $\vec{f}(x)$, где $x\in E$, $\vec{f}\in B$, ограничено в $\vec{F}$ (снова говорят, что функции $\vec{f}\in B$ ограничены в совокупности на E). В частности, множество B ограничено в $(\mathbb{C}^E)_b$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x\in E,\ f\in B}|f(x)|$ конечен.

Пример 3. В пространстве $(\vec{F}^E)_c$ непрерывных отображений топологического пространства E в векторное полунормированное пространство $\vec{F}$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда для любого компакта K из E множество значений $\vec{f}(x)$, где $x\in K$, $\vec{f}\in B$, ограничено в $\vec{F}$ (говорят еще, что функции $\vec{f}\in B$ ограничены в совокупности на каждом компакте K из E). В частности, множество B ограничено в $(\mathbb{C}^E)_c$ тогда и только тогда, когда для любого компакта K из E величина $\sup\limits_{x\in K,\ f\in B}|f(x)|$ конечна, т. е. если для любого компакта K найдется такое число $M_K\geqslant 0$, что

$$|f(x)|\leqslant M_K \quad \text{для} \quad x\in K,\ f\in B. \qquad \text{(VII, 6; 18)}$$

Пример 4. В пространстве $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$, где $\vec{F}$ — банахово пространство, множество B ограничено тогда и только тогда, когда для каждого компакта K из Ω конечна величина $\sup\limits_{x\in K,\ |p|\leqslant m,\ f\in B}\|D^p\vec{f}(x)\|$, т. е. когда для каждого K существует такое число $M_K\geqslant 0$, что

$$\|D^p\vec{f}(x)\|\leqslant M_K \quad \text{для} \quad x\in K, \quad |p|\leqslant m, \quad \vec{f}\in B. \qquad \text{(VII, 6; 19)}$$

В пространстве $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})=\mathscr{E}^\infty(\Omega;\ \vec{F})$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда для каждого компакта K из Ω и каждого целого $m\geqslant 0$ конечна величина $\sup\limits_{x\in K,\ |p|\leqslant m,\ \vec{f}\in B}\|D^p\vec{f}(x)\|$, т. е. когда для каждого компакта K и каждого m найдется такое число $M_{K,m} \geqslant 0$, что

$$\| D^p \vec{f}(x) \| \leqslant M_{K,m} \quad \text{для} \quad x \in K, \quad |p| \leqslant m, \quad \vec{f} \in B. \qquad \text{(VII, 6; 19}_2\text{)}$$

Пример 5. Поскольку $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ является топологическим векторным подпространством пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ или $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, этот пример сводится к примеру 4.

Эти примеры указывают на существенное различие между нормированными векторными пространствами и полунормированными пространствами. В нормированном пространстве *шары с центром в $\vec{0}$ являются одновременно окрестностями нуля и ограниченными множествами.* Множество ограничено, если оно лежит в некотором шаре. Оно будет окрестностью нуля, если содержит некоторый шар с центром в $\vec{0}$. В полунормированном же пространстве E множество является окрестностью нуля, если *существует* такое $i \in I$, что это множество содержит шар относительно полунормы $\| \ \|_i$, а ограничено оно, если для *каждого* $i \in I$ это множество содержится в некотором шаре относительно полунормы $\| \ \|_i$. В предыдущих примерах 1—5 окрестности нуля не ограничены (кроме случаев вырождения: в примере 1, если E конечно и $\vec{F}$ нормировано; в примере 2, если F нормировано, и в примере 3, если E компактно и $\vec{F}$ нормировано). Можно доказать, что, *если в полунормированном векторном пространстве существует ограниченная окрестность $\vec{0}$, то это пространство нормируемо.*

Множества равностепенно непрерывных отображений и теоремы Асколи

Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями $(\delta_j)_{j \in J}$. Напомним, что отображение f пространства E в пространство F непрерывно в точке $a \in E$, если для каждого индекса $j \in J$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E, что для всех x из $\mathscr{U}$ справедливы неравенства $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим теперь некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций и предположим, что для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать *одну и ту же окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E*, такую, что для всех $x \in \mathscr{U}$ и всех $f \in \mathscr{F}$ имеет место неравенство $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$. В этом случае говорят, что функции $f \in \mathscr{F}$ *равностепенно непрерывны в точке $a \in E$* или что множество $\mathscr{F}$ *равностепенно непрерывно в точке a*. Говорят, что функции $f \in \mathscr{F}$ *равностепенно непрерывны* или что множество $\mathscr{F}$ *равностепенно непрерывно*, если указанное выше свойство имеет место для каждой точки $a \in E$. Каждое конечное множество непрерывных функций равностепенно непрерывно. Объединение двух равностепенно непрерывных множеств равностепенно непрерывно.

Если пространство E, кроме того, полуметрическое с полурасстояниями $(d_i)_{i \in I}$, то множество $\mathscr{F}$ мы будем называть *равномерно равностепенно непрерывным*, если для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $i \in I$ и $\eta > 0$, что для всех $f \in \mathscr{F}$ из $d_i(x', x'') \leqslant \eta$ следует $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$.

Например, если все функции $f \in \mathscr{F}$ липшицевы и если для всех $j \in J$ найдутся один и тот же индекс $i \in I$ и одно и то же число $k \geqslant 0$, такие, что $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k d_i(x', x'')$ для любой функции $f \in \mathscr{F}$, то множество $\mathscr{F}$ равномерно равностепенно непрерывно, и можно даже сказать, что оно *равностепенно липшицево*. Так, если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — нормированные векторные пространства, то множество отображений $u \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, таких, что $\| u \| \leqslant M$ (шар радиуса M в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$), будет равностепенн) липшицевым (поскольку $\| u(\vec{x}) - u(\vec{y}) \| \leqslant M \| \vec{x} - \vec{y} \|$), а следовательно, равномерно равностепенно непрерывным на $\vec{E}$. Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — полунормированные пространства, то множество $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно равностепенно непрерывно в начале, и в этом случае $\mathscr{F}$ равностепенно липшицево, а значит, и равномерно равностепенно непрерывно. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы для всех $j \in J$ существовали такой индекс $i \in I$ и такое число $k \geqslant 0$, что $q_j(u) \leqslant k p_i$ для всех функций $u \in \mathscr{F}$ (обобщение теоремы 42).

Пусть E и F — аффинные нормированные пространства, Ω — открытое множество в E и $\mathscr{F}$ — множество таких *дифференцируемых* отображений f множества Ω в F, у которых нормы $\| f'(x) \|$ производных $f'(x) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ при $x \in \Omega$ и $f \in \mathscr{F}$ ограничены одним и тем же числом $M \geqslant 0$. Тогда множество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно. В самом деле, из формулы конечных приращений следует, что $\| \overrightarrow{f(x'') - f(x')} \| \leqslant M \| \overrightarrow{x'' - x'} \|$ для каждой функции $f \in \mathscr{F}$, лишь бы только отрезок $[x', x'']$ лежал в Ω. Следовательно, если $a \in \Omega$ и задано $\varepsilon > 0$, то, для того чтобы при всех $x \in \mathscr{U}$ и $f \in \mathscr{F}$ выполнялось неравенство $\| \overrightarrow{f(x) - f(a)} \| \leqslant \varepsilon$, достаточно в качестве $\mathscr{U}$ выбрать шар с центром в точке a радиуса $\leqslant \varepsilon / M$, целиком лежащий в Ω. В действительности достаточно предполагать еще меньше. Если для каждой точки $a \in \Omega$ найдутся такая ее открытая окрестность ω и такое число $M \geqslant 0$, что $\|f'(x)\| \leqslant M$ для всех $x \in \omega$ и $f \in \mathscr{F}$, то результат сохранится, поскольку в этом случае можно в качестве $\mathscr{U}$ взять шар, лежащий в ω.

В частности, возвращаясь к сказанному об ограниченных множествах в примере 4 при $m=1$ и учитывая, что ограниченные множества в примере 5 — те же самые, что и в примере 4, мы видим, что каждая ограниченная часть из $\mathscr{E}^1(\Omega; \vec{F})$ или из $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ является равностепенно непрерывным множеством отображений Ω в $\vec{F}$.

Теорема 44 (первая теорема Асколи). *Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство. Пусть $\mathscr{F}$ — множество отображений E в F, равностепенно непрерывное в точке $a \in E$. Тогда замыкание $\overline{\mathscr{F}}$ множества $\mathscr{F}$ в F^E (F^E — пространство всех отображений E в F, снабженное топологией простой сходимости) также равностепенно непрерывно в точке a.*

Доказательство. Зададимся одним из полурасстояний δ_j на F и $\varepsilon > 0$. Поскольку множество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно в точке a, существует такая окрестность $\mathscr{U}_{j,\varepsilon} = \mathscr{U}$ точки a в E, что для $x \in \mathscr{U}$, $g \in \mathscr{F}$ выполняется неравенство

$$\delta_j(g(a), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(VII, 6; 20)}$$

Пусть теперь x — произвольная точка $\mathscr{U}$, а f — произвольная функция из множества $\overline{\mathscr{F}}$. Среди полурасстояний на F^E имеется полурасстояние $\delta_{j,\{a,x\}}$, определяемое равенством $\delta_{j,\{a,x\}}(u, v) = \sup[\delta_j(u(a), v(a)), \delta_j(u(x), v(x))]$. Следовательно, для функции f, принадлежащей замыканию $\overline{\mathscr{F}}$, найдется такая функция $g \in \mathscr{F}$ (g зависит от f, a, x, j, ε), что

$$\delta_j(f(a), g(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta_j(f(x), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(VII, 6; 21)}$$

Ясно, что для $x \in \mathscr{U}$ и $f \in \overline{\mathscr{F}}$ справедливо неравенство

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \delta_j(f(a), g(a)) + \delta_j(g(a), g(x)) + \\ + \delta_j(g(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon; \qquad \text{(VII, 6; 22)}$$

следовательно, для каждого $j \in J$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E, что для $x \in \mathscr{U}$, $f \in \overline{\mathscr{F}}$ имеет место неравенство $\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$, чем и доказана равностепенная непрерывность множества $\overline{\mathscr{F}}$ в точке a.

Следствие 1. *В условиях теоремы все функции f из $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывны в точке a. Каждый простой предел*[1]) *f последовательности функций f_n из $\mathcal{F}$ непрерывен в точке a.*

Замечание. Это следствие существенно дополняет теорему 65 гл. II. Теорема эта утверждает, что *локально равномерный* предел последовательности непрерывных функций f_n непрерывен. Мы видим, что непрерывным может быть и *простой* предел последовательности непрерывных функций f_n, если эти функции f_n не только непрерывны в отдельности, но и *равностепенно* непрерывны.

В действительности теорема 65 гл. II и предыдущая теорема очень близки.

1) *Если последовательность функций f_n, непрерывных в точке a, локально равномерно сходится к пределу f (необходимо также непрерывному в этой точке), то функции f_n равностепенно непрерывны в точке a.*

В самом деле, пусть заданы $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. В силу равномерной локальной сходимости можно найти такую окрестность $\mathcal{U}_1$ точки a в E и такое целое число $p \geqslant 0$, что при $n \geqslant p$ и $x \in \mathcal{U}_1$ выполняется неравенство $\delta_j(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon/3$. Для конечного числа функций $f, f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$, непрерывных в точке a, можно найти такую окрестность $\mathcal{U}_2$ точки a, что для всех $x \in \mathcal{U}_2$ выполняются неравенства $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon/3$ и $\delta_j(f_n(x), f_n(a)) \leqslant \varepsilon$ для $n < p$. Но тогда для $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ выполняются неравенства

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n < p \qquad \text{(VII, 6; 23)}$$

и

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant (\delta_j(f_n(a), f(a)) + \delta_j(f(a), f(x)) + \\ + \delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant p, \qquad \text{(VII, 6; 24)}$$

чем и доказана равностепенная непрерывность множества функций f_n в точке a.

Обратно, мы увидим ниже (следствие 1 следующей теоремы), что

2) *Если E локально компактно, то любая просто сходящаяся последовательность равностепенно непрерывных на E функций сходится локально равномерно.*

Таким образом, если непрерывные на локально компактном пространстве E функции f_n просто сходятся к f, то предположение, что они локально равномерно сходятся, равносильно предположению, что они равностепенно непрерывны на E, и в этом случае их предел f непрерывен. Но хотя теорема 65 гл. II и предыдущая теорема 44, таким образом, «теоретически» эквивалентны, *практически* они дают два сугубо различных критерия непрерывности предельной функции f.

Следствие 2. *Аналогичные результаты имеют место для равностепенной непрерывности на всем пространстве E или равномерной равностепенной непрерывности в случае, когда пространство E полуметрическое.*

Теорема 45 (вторая теорема Асколи). *Пусть E — топологическое и F — полуметрическое пространства. На равностепенно непрерывном множестве $\mathcal{F}$ отображений E в F полуметрические структуры простой сходимости на плотном подмножестве E_0 пространства E, простой сходимости на E и равномерной сходимости на каждой компактной части из E равномерно эквивалентны* (*иначе говоря, соответствующие равномерные структуры тождественны и, в частности, соответствующие топологии совпадают*).

Доказательство. Полуметрическая структура простой сходимости на E_0 определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, A_0}(f, g) = \max_{x \in A_0} \delta_j(f(x), g(x)), \qquad \text{(VII, 6; 25)}$$

где A_0 — конечная часть E_0. Структура простой сходимости на E определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, A}(f, g) = \max_{x \in A} \delta_j(f(x), g(x)), \qquad \text{(VII, 6; 26)}$$

где A — конечная часть E.

Наконец, структура равномерной сходимости на компактных частях E определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, K}(f, g) = \max_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)), \qquad \text{(VII, 6; 27)}$$

где K — компактная часть E.

Поскольку вторая из этих равномерных структур является промежуточной между первой и третьей, достаточно показать, что эти последние равномерно эквивалентны. Впрочем, поскольку каждое из полурасстояний первой структуры является также полурасстоянием в третьей (можно взять $K = A_0 \subset E_0$), то достаточно установить лишь обратное утверждение. Это утверждение, очевидно, неверно для множества $(F^E)_c$ всех непрерывных отображений E в F. Однако речь идет лишь о структурах, индуцированных на равностепенно непрерывной части $\mathcal{F}$ множества $(F^E)_c$.

Итак, пусть K — некоторый компакт из E, $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. Докажем, что тогда существуют такая конечная часть A_0 множества E_0 и такое число $\eta > 0$, что при $\delta_{j, A_0}(f, g) \leqslant \eta$ *для* f *и* g *из* $\mathcal{F}$ выполняется неравенство $\delta_{j, K}(f, g) \leqslant \varepsilon$. Доказать это очень просто. В силу равностепенной непрерывности множества $\mathcal{F}$ для каждой точки a из K можно указать такую окрестность $\mathcal{U}_a$ точки a в E, что при $x \in \mathcal{U}_a$ и $h \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство $\delta_j(h(a), h(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Для покрытия компакта K достаточно конечного числа окрестностей $\mathcal{U}_a$. Пусть это будут $\mathcal{U}_{a_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Так как множество E_0 по предположению плотно, каждая из окрестностей $\mathcal{U}_{a_\nu}$ содержит некоторую точку b_ν из E_0. Поэтому для f и g из $\mathcal{F}$ и $x \in \mathcal{U}_{a_\nu}$ имеем

$$\delta_j(f(x), g(x)) \leqslant \delta_j(f(x), f(a_\nu)) + \delta_j(f(a_\nu), f(b_\nu)) + \\ + \delta_j(f(b_\nu), g(b_\nu)) + \delta_j(g(b_\nu), g(a_\nu)) + \delta_j(g(a_\nu), g(x)). \quad \text{(VII, 6; 28)}$$

Если теперь положить $A_0 = \{b_\nu\}_{\nu=1, 2, \ldots, n}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, то, поскольку каждая из точек $x \in K$ лежит в одном из $\mathcal{U}_{a_\nu}$, из неравенства $\delta_{j, A_0}(f, g) \leqslant \eta$ будет следовать неравенство $\delta_{j, K}(f, g) \leqslant \varepsilon$.

Следствие 1. *Если последовательность равностепенно непрерывных функций f_n на E со значениями в F сходится к некоторой непрерывной функции f на E в каждой точке некоторого плотного в E подмножества E_0, то функции f_n сходятся к f во всех точках E и сходимость эта равномерна на каждом компакте из E.*

В самом деле, множество $\mathcal{F}$ функций f_n и f равностепенно непрерывно на E. Поэтому для обоснования утверждения достаточно применить теорему 45.

Заметим, что для того чтобы применить теорему 45 для доказательства этого следствия, нам пришлось рассмотреть *множество функций f_n и f*. Предположим, однако, что нам известно лишь, что для каждого x из плотного множества E_0 функции $f_n(x)$ сходятся к некоторому пределу $f(x)$. Согласно теореме 44, функция f непрерывна на E_0, но, вообще говоря, не может быть продолжена до непрерывной функции на E. Поэтому заключение следствия не имеет места, и мы не можем утверждать, что $f_n(x)$ *сходятся к пределу в каждой точке x из E*. Имеются, впрочем, два случая, когда такое заключение справедливо. Прежде всего это будет при $E_0 = E$, так как тогда, как мы это только что видели, f непрерывна на всем E_0 и применимо следствие 1. Далее, это верно, если F секвенциально полно, или, более общо, если для любого $x \in E$ множество $\mathscr{F}(x)=\{f_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ содержится в секвенциально полной части F. В самом деле, для m и n, стремящихся к бесконечности, и конечного множества $A_0\subset E_0$ расстояние $\delta_{j,A_0}(f_m, f_n)$ стремится к 0, а следовательно, в силу тождественности равномерных структур, индуцированных на $\mathscr{F}$ множествами F^E и F^{E_0}, стремится к 0 величина $\delta_{j,A}(f_m, f_n)$ для каждой конечной части A множества E. Следовательно, для каждого $x\in E$ функции $f_n(x)$ образуют последовательность Коши, которая, согласно нашему предположению, сходится, и ее предел непрерывен на E, что позволяет применить следствие 1. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Если функции f_n равностепенно непрерывны и просто сходятся к f на E, то функция f непрерывна, а сходимость равномерна на каждом компакте из E.*

Следствие 3. *Если равностепенно непрерывная последовательность отображений f_n топологического пространства E в полуметрическое пространство F сходится в каждой точке некоторого подмножества E_0, плотного в E, и если в каждой точке x из E множество $\mathscr{F}(x)=\{f_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ содержится в некоторой секвенциально полной части F, то последовательность f_n сходится в каждой точке E и ее предел непрерывен на E, а сходимость равномерна на каждом компакте из E.*

Топологические дополнения. Теоремы Бэра и Банаха — Штейнгауза

В гл. IV были приведены теоремы Бэра и Банаха — Штейнгауза. Установим здесь некоторые дополнения к этим теоремам.

Пространством Бэра (или *бэровским пространством*) называется такое топологическое пространство E, в котором любое пересечение счетного множества плотных открытых множеств плотно. Если перейти к дополнениям, то это будет означать, что любое объединение счетного множества замкнутых множеств, не содержащих внутренних точек, является множеством без внутренних точек. Из леммы к теореме 65 гл. IV следует, что любое полное метрическое пространство является пространством Бэра. Следует заметить, что здесь смешивается чисто топологическое свойство быть пространством Бэра со свойством, относящимся к метрической структуре. Вернее будет сказать: если топологическое пространство E таково, что его топология может быть определена метрикой, в которой оно полно, то это пространство является пространством Бэра. Например, если E — полное полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний, то оно бэровское. Действительно, согласно теореме 40, его структура равномерно эквивалентна некоторой метрической структуре, относительно которой это пространство полно, поскольку последовательности Коши, определяемые равномерной структурой, у них одни и те же. Каждое банахово пространство является пространством Бэра. Пространства $(F^E)_c$, где F — полное полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний и E — объединение счетного множества компактов; пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, где F — полное полунормированное пространство со счетным множеством полунорм; пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$ и $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ при тех же условиях — все являются бэровскими. Можно также доказать, но мы этим пользоваться не будем, что каждое локально компактное пространство есть пространство Бэра. Напротив, поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в топологии, индуцированной из $\mathbb{R}$, не является бэровским, поскольку оно представляет собой объединение счетного множества замкнутых множеств без внутренних точек, каждое из которых состоит из одной точки. Неполное векторное нормированное пространство, вообще говоря, не является бэровским. [Рассмотрим, например, пространство $E = C[0, 1]$, снабженное нормой, индуцированной из $\mathscr{L}^1([0, 1], dx)$ [1]). Это пространство неполно, поскольку оно плотно в $\mathscr{L}^1$. Докажем, что оно не является пространством Бэра. Обозначим через B единичный шар относительно обычной нормы пространства $C[0, 1]$ ($\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$). Пусть $\overline{B}$ — его замыкание в $\mathscr{L}^1$. Поскольку из любой сходящейся в $\mathscr{L}^1$ последовательности можно извлечь dx-почти всюду сходящуюся подпоследовательность (теореме 38 гл. IV), то множество $\overline{B}$ все состоит из функций, dx-почти всюду, а значит, в силу непрерывности и всюду, ограниченных по модулю числом 1. Это значит, что $\overline{B} = B$, т. е. что шар B замкнут в E. Однако B не имеет внутренней части. В самом деле, если бы B содержало некоторый шар (по норме $\mathscr{L}^1$) с центром $g \in C[0, 1]$ радиуса R, то из неравенства $\int\limits_0^1 |f - g|\, dx \leqslant R$ следовало бы неравенство $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1$, что невозможно. Точно так же при любом целом n множество nB замкнуто в E и не имеет внутренних точек. Однако из того, что множество B является единичным шаром в $C[0, 1]$ в обычной норме, следует, что объединение всех nB совпадает со всем пространством $C[0, 1]$, а значит, E не является пространством Бэра (в норме $\mathscr{L}^1$).]

---

[1]) Пространство $\mathscr{L}^1$ лишь полунормировано и не отделимо. Однако его полунорма индуцирует на C норму, поскольку непрерывная функция, dx-почти всюду равная нулю, равна нулю всюду.

Пусть E — бэровское пространство. Часть $A \subset E$ называется *тощей*, если она содержится в объединении счетного множества замкнутых подмножеств без внутренних точек. Объединение счетного множества тощих частей является тощим множеством. Тот факт, что пространство бэровское, означает, что каждая тощая его часть не имеет внутренних точек. Напротив, в небэровском пространстве тощая часть может быть всем пространством, и это понятие интереса не представляет. Говорят, что некоторое свойство P точек из E выполняется B-почти всюду (B — от Baire (Бэр)), если множество тех точек E, в которых оно не выполняется, тощее. Тощие множества относятся к категории «пренебрежимых» множеств аналогично множествам нулевой меры относительно некоторой неотрицательной меры. Однако это свойство чисто топологическое, не связанное с теорией меры. (Впрочем, чаще всего E будет не локально компактным банаховым пространством, которое вообще не может нести меры Радона.) Между понятиями «B-почти всюду» и «μ-почти всюду» (для некоторой меры μ) непосредственной связи нет. Рассмотрим, например, вещественную ось $\mathbb{R}$. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — счетное множество, плотное в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{O}_{n, \varepsilon}$ открытый интервал с центром a_n длины $\varepsilon/2^n$ и через $\mathcal{O}_\varepsilon$ объединение по $n = 0, 1, 2, \ldots$ интервалов $\mathcal{O}_{n, \varepsilon}$ при заданном ε. Тогда $\mathcal{O}_\varepsilon$ будет открытым плотным множеством с мерой $\leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$ ($\leqslant$, а не $=$ потому, что интервалы $\mathcal{O}_{n, \varepsilon}$ могут пересекаться). Пересечение A множеств $\mathcal{O}_\varepsilon$ $\left(\text{можно взять } \varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ является пересечением счетного множества плотных открытых множеств, а значит, его дополнение является тощим множеством. Тем не менее A имеет нулевую dx-меру. Таким образом, точки множества A расположены «почти всюду» в смысле Бэра, а точки его дополнения — «почти всюду» в смысле меры dx. Или еще: A является множеством «B-почти всех» точек, но имеет нулевую dx-меру; его дополнение $\complement A$ есть множество «dx-почти всех» точек, но тощее. Объединение счетного множества тощих частей является тощим, равно как объединение счетного множества множеств нулевой dx-меры имеет нулевую dx-меру, но объединение тощего множества $\complement A$ и множества A нулевой dx-меры может совпадать со всей прямой $\mathbb{R}$. Никогда не следует смешивать эти понятия! Впрочем, можно доказать, что всякое множество «B-почти всех» точек на $\mathbb{R}$, заведомо не являющееся счетным, имеет в точности мощность континуума.

Теорема 46 (Банаха — Штейнгауза). *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные топологические пространства, причем $\vec{E}$ — бэровское,* *а $\vec{F}$ — секвенциально полное. Пусть u_n — последовательность линейных непрерывных отображений $\vec{E}$ в $\vec{F}$, сходящаяся к некоторому пределу при n, стремящемся к бесконечности, в каждой точке подпространства $\vec{E}_0$, плотного в $\vec{E}$. Тогда:*

1) *или последовательность u_n расходится B-почти всюду на $\vec{E}$ и даже B-почти всюду неограничена,*

2) *или она всюду сходится на $\vec{E}$, ее предел и есть непрерывное линейное отображение, функции u_n равностепенно непрерывны, а сходимость равномерна на каждом компакте из $\vec{E}$*[1]*).*

Доказательство. Для простоты будем считать пространство $\vec{F}$ полунормированным с полунормами q_j, $j \in J$. Пусть $A_{j,k}$ при $k \in \mathbb{N}$ — подмножество в $\vec{E}$, определенное соотношением $A_{j,k} = \{\vec{x} \in \vec{E};\ \forall n,\ q_j(u_n(x)) \leqslant k\}$. Поскольку функции u_n непрерывны, множество $A_{j,k}$ замкнуто. Значит, если в некоторой точке $\vec{x}$ образы $u_n(\vec{x})$ имеют предел, то они ограничены, и, следовательно, для каждого j точка $\vec{x}$ лежит в объединении $A_j = \bigcup\limits_k A_{j,k}$. Следовательно, если *хотя бы для одного* j все множества $A_{j,k}$ имеют пустую внутреннюю часть, то множество A_j тощее и реализуется возможность 1): для $\vec{x} \notin A_j$, т. е. для B-почти каждого $\vec{x}$, последовательность $u_n(\vec{x})$ не сходится и даже не ограничена. В противном случае это означало бы, что *для каждого* j найдется такое k, что множество $A_{j,k}$ имеет непустую внутреннюю часть. Однако если множество $A_{j,k}$ является окрестностью точки $\vec{a}$, то множество $(A_{j,k} - \vec{a})$[2]) будет окрестностью точки $\vec{0}$. Но множество $A_{j,k} - \vec{a}$ содержится в множестве $A_{j,2k}$ поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого вектора $\vec{x} \in (A_{j,k} - \vec{a})$ выполняются неравенства $q_j(u_n(\vec{x} + \vec{a})) \leqslant k$, $q_j(u_n(\vec{a})) \leqslant k$, а значит, $q_j(u_n(\vec{x})) \leqslant 2k$. Следовательно, множество $A_{j,2k}$ также является окрестностью точки $\vec{0}$. Для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что для каждого вектора $\vec{x}$ из $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ и каждого n выполняется неравенство $q_j(u_n(\vec{x})) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, функции u_n равностепенно непрерывны в на-

---

[1]) Обобщение теоремы 65 гл. IV; доказательство, впрочем, то же.

[2]) $(A_{j,k} - \vec{a}) = \{\vec{x} - \vec{a};\ \vec{x} \in A_{j,k}\}$.

чале, а значит, в силу линейности всюду. Из следствия 3 теоремы 45 вытекают теперь все заключения случая 2) (поскольку пространство $\vec{F}$ секвенциально полно, линейность предела u очевидна). Теорема доказана.

Мы видим, что теорема Банаха — Штейнгауза получается сопоставлением теорем Бэра и Асколи.

Приведем некоторые приложения полученных результатов к теории мер и распределений[1]).

Рассмотрим приложения, в которых реализуется возможность 1) теоремы 46. Пусть задана последовательность линейных непрерывных форм $u_{n,a}$ на $C[0, 1]$:

$$u_{n,a}(\varphi) = \frac{\varphi(a + 1/n) - \varphi(a)}{1/n}, \quad u_{n,a} = n(\delta_{(a+1/n)} - \delta_{(a)}). \qquad \text{(VII, 6; 29)}$$

Формы $u_{n,a}$ сходятся к $\delta'_{(a)}$: $\varphi \to \varphi'(a)$ на плотном подмножестве функций, дифференцируемых в точке a. Однако норма $u_{n,a}$, равная $2n$ (формула (IV, 2; 7)), стремится вместе с n к $+\infty$. Следовательно, множество функций $\varphi \in C[0, 1]$, для которых u_n сходятся, тощее. Другими словами, не только не каждая непрерывная функция дифференцируема в точке a — это мы уже знали, — но и *В-почти все непрерывные функции не дифференцируемы в точке a*. Этот результат дает нашей интуиции достаточное моральное право считать, что, *вообще говоря*, непрерывная функция не дифференцируема. Пусть теперь R_1 — плотная счетная часть отрезка $[0, 1]$. Множество функций, дифференцируемых в точке $a \in R_1$, тощее. Объединение таких множеств снова тощее. Поэтому B-почти каждая непрерывная функция не дифференцируема в каждой точке R_1. (На самом деле имеет место даже большее: для B-почти всех функций $\varphi \in C[0, 1]$ последовательность $u_{n,a}(\varphi)$ не ограничена ни в одной точке a из R_1.) Напротив, по-видимому, неверно и, во всяком случае, не очевидно, что B-почти каждая непрерывная функция нигде не дифференцируема.

Отметим, однако, другое. При доказательстве теоремы 46 *линейность функций u_n и сходимость их на плотном множестве E_0 не фигурировали в первой возможности: даже без этих предположений, если хотя бы для одного j все множества $A_{j,k}$ не имеют внутренних точек, то множество точек сходимости функций u_n всегда тощее. Это как раз будет иметь место, если в каждой точке x некоторого множества E_1, плотного в $\vec{E}$, функции $u_n(\vec{x})$ неограничены и если пространство $\vec{F}$ нормиро-*

[1]) Приложения, касающиеся распределений (обобщенных функций) при переводе опущены (см. примечание на стр. 434). — *Прим. ред.*

вано. В этом случае имеется только одна норма q_j; мы будем обозначать ее через $\| \ \|$ и соответственно будем вместо $A_{j,k}$ и A_j писать просто A_k и A. Для каждого $\vec{x}$ из E_1 функции $u_n(\vec{x})$ неограничены, а значит, $\vec{x} \notin A$. Следовательно, множество A не содержит ни одной точки из E_1 и, значит, не имеет внутренней части. Но тогда не имеет внутренней части ни одно из множеств A_k и, значит, множество A тощее: последовательность функций u_n расходится и даже неограничена в B-почти каждой точке $\vec{E}$.

Пусть R_1 — счетное плотное подмножество отрезка $[0, 1]$. Пусть φ — такая функция, для которой в каждой точке $a \in R_1$ последовательность $u_{n,a}(\varphi)$ неограничена. Мы уже видели (теорема 46, возможность 1), что такие функции φ исчерпывают «B-почти все» пространство $C[0, 1]$. Зафиксировав функцию φ, образуем последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x + 1/n) - \varphi(x)}{1/n}.$$

Это последовательность непрерывных (не линейных!) функций на бэровском пространстве $[0, 1]$, не ограниченная ни в одной точке счетного плотного множества R_1. Снова реализуется возможность 1) теоремы 46, и мы получаем, что эта последовательность неограничена в B-почти каждой точке x отрезка $[0, 1]$. В частности, функция φ B-почти всюду не дифференцируема. Таким образом, *B-почти все непрерывные функции B-почти всюду не дифференцируемы.* На языке кванторов: «$(\exists L$, тощее в $C[0, 1])$ $(\forall \varphi \notin L)$ $(\exists M$, тощее в $[0, 1])$ $(\forall x \notin M)$: (φ не дифференцируема в x)». Здесь M зависит от φ; пространство $C[0, 1]$ можно заменить на $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_c$.

Укажем другое применение теоремы 46. В теории тригонометрических рядов доказывается, что если f — непрерывная периодическая функция с периодом T, то ее ряд Фурье не обязательно сходится. С помощью той же цепочки рассуждений, использующих последовательно теорему 46 для бэровского пространства функций, непрерывных на окружности Γ, и для бэровского пространства Γ, можно показать, что для B-почти всех непрерывных периодических функций ряд Фурье B-почти всюду расходится (см. «Дополнение о ряде и интеграле Фурье»). Имеется множество других аналогичных приложений теоремы 46. Вот теорема, которую читатель может рассматривать как упражнение:

Пусть E — пространство Бэра и u_n — последовательность непрерывных отображений E в метрическое пространство F, *просто сходящаяся к некоторому пределу u. Тогда множество точек разрыва функции u тощее.*

Пусть, например, φ — вещественная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. Тогда последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x+1/n)-\varphi(x)}{1/n}$ просто сходится на $\mathbb{R}$ к φ'. Следовательно, *производная φ' непрерывна в B-почти всех точках* $\mathbb{R}$. Так что производная функция имеет «очень мало» точек разрыва!

Теорема 47 (третья теорема Асколи). *Пусть E — некоторое топологическое пространство, F — полуметрическое пространство, $\mathcal{F}$ — множество непрерывных отображений E в F. Для того чтобы $\mathcal{F}$ было относительно компактным*[1]) *в пространстве $(F^E)_c$ (непрерывных отображений E в F, снабженном топологией компактной сходимости), достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *множество $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого $x \in E$ множество $\mathcal{F}(x) = \{f(x); f \in \mathcal{F}\}$ относительно компактно в F.*

Если E локально компактно, то эти условия также и необходимы.

Доказательство. 1°) Докажем достаточность условий 1) и 2). Предположим, что эти условия выполнены. Существует весьма общее и очень короткое доказательство достаточности, но, к сожалению, использующее теорему Тихонова, которой нет в нашем распоряжении. Согласно теореме Тихонова (конечное или бесконечное), произведение компактов является компактом. Ее доказательство опирается на понятие ультрафильтра и теорему Цорна. Для каждого $x \in E$ замыкание $\overline{\mathcal{F}(x)}$ множества $\mathcal{F}(x)$ в F по предположению компактно. Поэтому в силу теоремы Тихонова произведение $\prod_{x \in E} \overline{\mathcal{F}(x)}$ компактно. Это означает, что множество функций $f \in F^E$, таких, что $f(x)$ при любом $x \in E$ лежит в $\overline{\mathcal{F}(x)}$, компактно в F^E. Следовательно, наше множество $\mathcal{F}$, содержащееся в компакте, относительно компактно в F^E (без каких-либо предположений о равностепенной непрерывности), а его замыкание $\overline{\mathcal{F}}$ в F^E компактно. Однако множество $\overline{\mathcal{F}}$ равностепенно непрерывно (первая теорема

[1]) Напомним (определение из общей топологии), что часть A топологического пространства X называется относительно компактной в X, если ее замыкание $\overline{A}$ в X компактно. Это равносильно тому, что A содержится в некоторой компактной части B пространства X, поскольку в этом случае множество $\overline{A}$ замкнуто в компакте B, а значит, компактно.

Асколи). Поэтому на $\overline{\mathscr{F}}$ топологии F^E и $(F^E)_c$ совпадают; значит, $\overline{\mathscr{F}}$ компактно в пространстве $(F^E)_c$, и, следовательно, множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$.

Поскольку мы хотим при доказательстве пользоваться только ранее доказанными теоремами, мы вынуждены дать другое, несколько более сложное доказательство, причем нам придется наложить на E и F дополнительные (но весьма общие) условия. Мы будем предполагать, что структура пространства F определена счетным множеством полурасстояний δ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и что пространство E сепарабельно, т. е. содержит счетное плотное множество $E_0 = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$.

Даже не прибегая к теореме Тихонова, мы видим, что множество функций F^E, принимающих для каждого $x \in E$ значения в $\overline{\mathscr{F}(x)}$, замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Оно содержит $\mathscr{F}$, а значит, и замыкание $\overline{\mathscr{F}}$ множества $\mathscr{F}$ в F^E. Следовательно, множество $\overline{\mathscr{F}}(x) = \{f(x);\ f \in \overline{\mathscr{F}}\}$ содержится в $\overline{\mathscr{F}(x)}$, а потому также относительно компактно в F. С другой стороны, множество $\overline{\mathscr{F}}$ равностепенно непрерывно. Следовательно, $\overline{\mathscr{F}}$ обладает теми же свойствами, что и $\mathscr{F}$, и, кроме того, замкнуто в F^E, а тем более в $(F^E)_c$. Мы сейчас докажем, что $\overline{\mathscr{F}}$ компактно в $(F^E)_c$; тем самым $\mathscr{F}$ будет относительно компактным.

Согласно теореме 45, топология, индуцированная на $\overline{\mathscr{F}}$ из $(F^E)_c$, совпадает с топологией, индуцированной из F^{E_0}, т. е. с топологией простой сходимости на множестве E_0, полурасстояния в которой задаются формулами (VII, 6; 25). Можно считать, что множество этих полурасстояний счетно (E_0 счетно, а потому счетным будет и множество его конечных частей). Следовательно, согласно теореме 40, *топология множества $\overline{\mathscr{F}}$ метризуема*. Для доказательства компактности $\overline{\mathscr{F}}$ можно теперь применить теорему Больцано — Вейерштрасса. Мы сейчас покажем, что из любой последовательности $f_0, f_1, f_2, \ldots$ в $\overline{\mathscr{F}}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Множество $\overline{\mathscr{F}(a_0)}$ компактно в метризуемом пространстве F. Следовательно, из последовательности f_n можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в точке a_0. Обозначим ее через S_0: $f_{(0,0)}, f_{(0,1)}, \ldots, f_{(0,n)}, \ldots$. Здесь $(0, n)$ означает некоторое целое число $\geqslant 0$, причем $(0, n) > (0, n-1)$. Множество $\overline{\mathscr{F}(a_1)}$ также компактно в метризуемом пространстве F. Следовательно, из построенной подпоследовательности можно извлечь новую подпоследовательность, сходящуюся в некоторой точке a_1, а значит, одновременно в точках a_0 и a_1. Обозначим эту последовательность через S_1: $f_{(1,0)}, f_{(1,1)}, \ldots, f_{(1,n)}, \ldots$. (Здесь снова

$, n)$ — целое число $\geqslant 0$ и $(1, n) > (1, n-1)$, а поскольку
вляется подпоследовательностью S_0, то для любого n найдет
акое $n' \geqslant n$, что $(0, n') = (1, n) \geqslant (0, n)$.) Это рассуждение мож
родолжать далее шаг за шагом. Через S_m будем обознача
оследовательность $f_{(m, 0)}, f_{(m, 1)}, \ldots, f_{(m, n)}, \ldots$, где (m, n) — ц
ое число $> (m, n-1)$; S_m является подпоследовательность
оследовательности S_{m-1}, т. е. для каждого n можно най
акое $n' \geqslant n$, что $(m-1, n') = (m, n) \geqslant (m-1, n)$. Последов
ельность S_m сходится в каждой из точек $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Э
оследовательности, если угодно, можно расположить друг п
ругом:

$$
\begin{array}{l}
f_{(0, 0)}, \ f_{(0, 1)}, \ f_{(0, 2)}, \ \ldots, \ f_{(0, n)}, \ \ldots, \\
f_{(1, 0)}, \ f_{(1, 1)}, \ f_{(1, 2)}, \ \ldots, \ f_{(1, n)}, \ \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{(m, 0)}, \ f_{(m, 1)}, \ f_{(m, 2)}, \ \ldots, \ f_{(m, n)}, \ \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Рассмотрим теперь диагональную последовательнос
: $f_{(0,0)}, f_{(1,1)}, \ldots, f_{(n, n)}, \ldots$. Каждая из написанных вы
оследовательностей является подпоследовательностью пред
ущей. Поэтому при заданном m для любого $n \geqslant m$ мож
айти такое число $n' \geqslant n$, что $(m, n') = (n, n) \geqslant (m, n)$ и, кро
ого, $(n, n) > (n, n-1) \geqslant (n-1, n-1)$, т. е. *начиная с* $n \geqslant$
ункции $f_{(n, n)}$ *образуют некоторую подпоследовательнос
оследовательности* S_m, так что диагональная последовате
ость S сходится в точке a_m. Следовательно, последовате
ость S сходится в каждой точке множества E_0.

Пусть f_0 — ее предел, отображение E_0 в F. Тогда отобра
ие f_0 продолжимо до непрерывного отображения f простра
тва E в F, а последовательность S сходится к f в кажд
очке E и притом равномерно на каждом компакте из E. Э
ытекает из следствия 3 теоремы 45. Оно применимо, посколь
аждая часть $\overline{\mathscr{F}}(x)$ содержится в компактном, а следователь
еквенциально полном множестве $\overline{\mathscr{F}(x)}$. В теореме 41 гл.
ы доказали, что каждый метрический компакт секвенциаль
олон. С помощью такого же рассуждения можно установи
от же результат для любого компактного полуметрическо
ространства со счетным множеством полурасстояний. В сам
еле, это пространство метризуемо (теорема 40), и ес
$_n$ — последовательность Коши, то, согласно теореме Больцано
ейерштрасса, из нее можно извлечь сходящуюся подпослед
ательность, а значит, по теореме 40 гл. II и сама последов
ельность сходится. Поскольку $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ замкнуто в F^E, предел
оследовательности S из $\overline{\mathscr{F}}$ необходимо лежит в $\overline{\mathscr{F}}$. Из зада

ной последовательности f_n в $\overline{\mathscr{F}}$ мы извлекли подпоследовательность S, сходящуюся в $(F^E)_c$ к элементу f из $\overline{\mathscr{F}}$. Следовательно, $\overline{\mathscr{F}}$ компактно в топологии, индуцированной пространством $(F^E)_c$, а $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$.

2°) Обратно, предположим, что множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$, а следовательно, его замыкание $\overline{\mathscr{F}}_c$[1]) компактно. Его образ $\overline{\mathscr{F}}_c(x)$ при непрерывном отображении $\delta_{(x)}$: $f \to f(x)$ пространства $(F^E)_c$ (или F^E) в F будет также компактным, а следовательно, $\mathscr{F}(x)$ $(\subset \overline{\mathscr{F}}_c(x))$ относительно компактно в F. Для этого не нужны никакие специальные условия на E или F. Пусть теперь K — некоторый компакт из E. Обозначим через f_K сужение функции f на компакт K. Отображение $f \to f_K$ множества $(F^E)_c$ в $(F^K)_c$, очевидно, непрерывно (и даже липшицево). [Полурасстояния в $(F^K)_c$ обозначим через $\delta_{j,K}$, $j \in J$.] Образ $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$ множества $\overline{\mathscr{F}}_c$ при этом отображении является компактной частью $(F^K)_c$. Зададим теперь $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. Имеется конечное множество таких элементов $f_{\nu,K}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, из $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$, что шары $B_{j,K}\left(f_{\nu,K}; \frac{\varepsilon}{3}\right)$ покрывают $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$. Другими словами, для каждой функции $f_K \in \overline{\mathscr{F}}_{c,K}$ найдется такое ν, что $\delta_{j,K}(f_{\nu,K}; f_K) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Однако конечное множество непрерывных функций $f_{\nu,K}$ всегда равностепенно непрерывно. Следовательно, для каждой точки $a \in E$ найдется такая ее окрестность $\mathscr{U}$ в K, что для любой точки $x \in \mathscr{U}$ и любого ν будет выполняться неравенство $\delta_j(f_{\nu,K}(a), f_{\nu,K}(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathscr{U}$ и каждой функции $f \in \overline{\mathscr{F}}_c$ имеем

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant$$
$$\leqslant \delta_j(f(a), f_\nu(a)) + \delta_j(f_\nu(a), f_\nu(x)) + \delta_j(f_\nu(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \quad \text{(VII, 6; 30)}$$

[1]) Мы пишем $\overline{\mathscr{F}}_c$, а не $\overline{\mathscr{F}}$, как выше; $\overline{\mathscr{F}}$ — это замыкание множества $\mathscr{F}$ в F^E, а $\overline{\mathscr{F}}_c$ — его замыкание в $(F^E)_c$. A priori они различны. Однако, с одной стороны, очевидно, $\overline{\mathscr{F}} \supset \overline{\mathscr{F}}_c$; с другой стороны, инъекция $(F^E)_c$ в F^E непрерывна, так что множество $\overline{\mathscr{F}}_c$, компактное в $(F^E)_c$, является также компактным в топологии F^E (теорема 28 гл. II) и, следовательно, замкнуто в F^E, а значит, $\overline{\mathscr{F}}_c \supset \overline{\mathscr{F}}$. Мы получили, что $\overline{\mathscr{F}}_c = \overline{\mathscr{F}}$, так что новое обозначение можно было и не вводить.

Мы видим, кроме того, что множества $\overline{\mathscr{F}}(x)$ и $\overline{\mathscr{F}(x)}$, которые мы ранее различали, совпадают. Действительно, $\overline{\mathscr{F}}(x) \subset \overline{\mathscr{F}(x)}$. Однако множество $\overline{\mathscr{F}}(x)$ должно быть компактным, а следовательно, замкнутым в F и содержать $\mathscr{F}(x)$, а значит, и $\overline{\mathscr{F}(x)}$. Отсюда и следует высказанное утверждение.

Этим доказано, что множество $\overline{\mathscr{F}}_{K,c}$ непрерывных функций на K равностепенно непрерывно. Однако это вовсе не означает, что множество $\overline{\mathscr{F}}_c$ равностепенно непрерывно на E. Если же мы предположим, что пространство E локально компактно, то для любой точки $a \in E$ найдется компактная ее окрестность K в E. Поэтому найденная выше окрестность $\mathscr{U}$ точки a в K является окрестностью этой точки и в E (теорема 6 гл. II), и из неравенства (VII, 6; 30) вытекает, что $\overline{\mathscr{F}}_c$, а следовательно, и $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывны в точке a. Следовательно, условия 1) и 2) действительно необходимы в случае, когда пространство E локально компактно.

Следствие 1. *Пусть E — локально компактное пространство (например, конечномерное топологическое векторное пространство), и пусть $\vec{F}$ — конечномерное топологическое векторное пространство (например, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Для того чтобы часть $\mathscr{F}$ пространства $(\vec{F}^E)_c$ была относительно компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *подмножество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого $x \in E$ множество $\mathscr{F}(x) = \{f(x);\ f \in \mathscr{F}\}$ ограничено в $\vec{F}$.*

В самом деле, относительно компактные части пространства $\vec{F}$ — это его ограниченные части. Это условие уже не выполняется, если $\vec{F}$ бесконечномерно.

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$ и $\vec{F}$ — конечномерное банахово пространство. Для того чтобы часть $\mathscr{F}$ множества $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ была относительно компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *для каждого индекса дифференцирования p порядка $|p| \leqslant m$ множество $\mathscr{F}_p$ производных $D^p\vec{f}$, где $\vec{f} \in \mathscr{F}$ — множество функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, — равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m$ и любой точки $x \in \Omega$ множество $\mathscr{F}_p(x) = \{D^p\vec{f}(x);\ \vec{f} \in \mathscr{F}\}$ ограничено в $\vec{F}$.*

Доказательство. При $m = 0$ это частный случай предыдущего следствия. Пусть m произвольно. Предположим сначала, что множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$. Линейное отображение D^p: $\vec{f} \to D^p\vec{f}$ из $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ в $\mathscr{E}^0(\Omega;\ \vec{F})$ непрерывно. В самом деле, если рассмотреть полунорму $\|\ \|_{0,K}$

в $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$ и ввести полунорму $|||\ |||_{m, K}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, то будет справедливым неравенство

$$|||D^p\vec{f}|||_{0, K} \leqslant |||\vec{f}|||_{m, K}.$$

Образ $D^p\overline{\mathscr{F}}$ компакта $\overline{\mathscr{F}}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ является поэтому компактом $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$. Этот образ содержит множество $D^p\mathscr{F} = \mathscr{F}_p$, которое тем самым оказывается относительно компактным. Следовательно, оно должно удовлетворять условиям следствия 1, чем доказаны утверждения 1) и 2) относительно p. Таким образом, эти условия необходимы.

Обратно, предположим, что условия 1) и 2) выполнены. Пусть $\overline{\mathscr{F}}$ — замыкание $\mathscr{F}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Множество $\overline{\mathscr{F}}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). В самом деле, множество функций $\vec{f}$, для которых $D^p\vec{f} \in \vec{\overline{\mathscr{F}}}_p$ при всех p порядка $|p| \leqslant m$, замкнуто и содержит $\mathscr{F}$. Тем самым оно содержит $\overline{\mathscr{F}}$, и, следовательно, $D^p\overline{\mathscr{F}} \subset \overline{\mathscr{F}}_p$, или $(\overline{\mathscr{F}})_p \subset \overline{\mathscr{F}}_p$. Если множество $\mathscr{F}_p$ равностепенно непрерывно, то таким же будет по теореме 44 множество $\overline{\mathscr{F}}_p$ и тем более $(\overline{\mathscr{F}})_p$. С другой стороны, если множество $\mathscr{F}_p(x)$ ограничено, то ограничено и его замыкание $\overline{\mathscr{F}_p(x)}$; тем более ограничено множество $\overline{\mathscr{F}}_p(x)$, а следовательно, и $(\overline{\mathscr{F}})_p(x)$.

Докажем теперь, что множество $\overline{\mathscr{F}}$ является компактом в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Поскольку это множество метризуемо, достаточно проверить выполнение условий Больцано—Вейерштрасса. Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ — последовательность в $\overline{\mathscr{F}}$. Для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m$ множество $\overline{\mathscr{F}}_p$ удовлетворяет условиям следствия 1, а потому относительно компактно в $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$. Значит, из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность S_p, что соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ сходятся равномерно на каждом компакте, т. е. локально равномерно, к некоторому непрерывному пределу $\vec{g}_p$. Пусть $\vec{g}$ соответствует $p = 0$. С помощью того же способа, который был применен при доказательстве теоремы, можно при произвольном фиксированном упорядочении индексов p, $|p| \leqslant m$, выбрать последовательности S_p так, чтобы каждая из них была подпоследовательностью предыдущей. Тогда последняя из этих подпоследовательностей (их имеется лишь конечное число) является подпоследовательностью S, для которой при всех p порядка $|p| \leqslant m$ соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ имеют локально равномерный предел $\vec{g}_p$. Согласно следствию 1 теоремы 111 гл. IV, функция $\vec{g}$ принадлежит классу C^m и $\vec{g}_p = D^p\vec{g}$. Поэтому последовательность S сходится к $\vec{g}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Поскольку множество $\overline{\mathscr{F}}$ замкнуто в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, функция $\vec{g}$ лежит в $\overline{\mathscr{F}}$. Таким образом, множество $\overline{\mathscr{F}}$ компактно, а следовательно, множество $\mathscr{F}$ относительно компактно.

Следствие 3. *Если пространство $\vec{F}$ конечномерно, то каждая ограниченная часть из $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ относительно компактна в $\mathscr{E}^{m-1}(\Omega; \vec{F})$.*

В самом деле, эта часть ограничена в $\mathscr{E}^{m-1}(\Omega; \vec{F})$, а следовательно, условие 2) выполнено. В силу свойств ограниченных частей (VII, 6; 19), $\mathscr{F}_p$ для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m-1$ есть множество функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, ограниченное в $\mathscr{E}^1(\Omega; \vec{F})$, а следовательно, равностепенно непрерывное (см. стр. 479); тем самым условие 1) также выполнено.

Свойство Монтеля

В конечномерном топологическом векторном пространстве понятия компактной части и замкнутой ограниченной части или (поскольку замыкание ограниченной части ограничено) понятия относительно компактной части и ограниченной части (теорема 23, гл. II) совпадают. В произвольном топологическом векторном пространстве компактные части всегда замкнуты и ограничены. [Замкнутость здесь обуславливается теоремой 23 гл. II. Ограниченность очевидна в случае полунормированных пространств, так как каждая полунорма, определяющая структуру, непрерывна, а значит, и ограничена на компакте. Это же справедливо и для не полунормированных топологических векторных пространств.] Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Мы уже видели, что оно неверно в бесконечномерном нормированном векторном пространстве, единичный шар которого не компактен (теорема 45_2 гл. II). Тем не менее в *не нормированном* топологическом векторном пространстве может случиться, что обратное утверждение окажется и справедливым, поскольку это не противоречит теореме 45_2 гл. II, ибо ни одна из окрестностей 0 не ограничена (см. стр. 477). Говорят, что топологическое векторное пространство обладает *свойством Монтеля*, если в нем понятия компактной части и замкнутой ограниченной части, или, что то же самое, относительно компактной части и ограниченной части совпадают.

Следствие 4. *Если* Ω — *открытое множество из* $\mathbb{R}^n$ *и* $\vec{F}$ — *конечномерное банахово пространство, то пространство* $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})=\mathscr{E}^\infty(\Omega;\ \vec{F})$ *обладает свойством Монтеля.*

Доказательство. Нам надо доказать, что каждая *замкнутая* ограниченная часть $\mathscr{F}$ пространства $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$ компактна. Поскольку это пространство метризуемо, мы можем применить теорему Больцано — Вейерштрасса. Итак, пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — некоторая последовательность в $\mathscr{F}$. Для каждого индекса p множество $\mathscr{F}_p=D^p\mathscr{F}$ ограничено в $\mathscr{E}^1(\Omega;\ \vec{F})$. Следовательно, выполняются условия 1) и 2) следствия 1, а значит, согласно следствию 1, это множество относительно компактно в $\mathscr{E}^0(\Omega;\ \vec{F})$. Из рассматриваемой последовательности можно извлечь подпоследовательность S_p, локально равномерно сходящуюся к некоторой функции $\vec{g}_p$. Обозначим через $\vec{g}$ функцию, соответствующую $p=0$. Как и в следствии 2, множество индексов p есть $\mathbb{N}^n$ и, значит, счетно. Следовательно, мы можем его вполне упорядочить, поставив в биективное соответствие с $\mathbb{N}$. Далее можно каждую последовательность S_p выбрать как подпоследовательность предыдущей и точно так же, как при доказательстве теоремы, взять диагональную последовательность S. Тогда S будет такой подпоследовательностью исходной последовательности, что соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ локально равномерно сходятся к $\vec{g}_p$. Из теоремы 111 гл. IV следует, что $\vec{g}$ принадлежит классу C^∞ и что $D^p\vec{g}=\vec{g}_p$. Последовательность S сходится поэтому к $\vec{g}$ в $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$, и, поскольку множество $\mathscr{F}$ замкнуто в $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$, $\vec{g}$ лежит в множестве $\mathscr{F}$, которое тем самым оказывается компактным.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия следствия* 4. *Тогда если множество* K *является компактом в* Ω, *то пространство* $\mathscr{D}_K(\Omega;\ \vec{F})$ *обладает свойством Монтеля.*

В самом деле, множество $\mathscr{D}_K(\Omega;\ \vec{F})$ является замкнутым подпространством в $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$; следовательно, любая замкнутая ограниченная часть множества $\mathscr{D}_K(\Omega;\ \vec{F})$ замкнута и ограничена в $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$, а значит, компактна.

Следствие 6 (теорема Монтеля). *Если Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$ и если $\vec{F}$ — конечномерное комплексное банахово пространство, то пространство $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ голоморфных функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, снабженное топологией компактной сходимости (или топологией компактной сходимости для всех производных), обладает свойством Монтеля: понятия компактной части и замкнутой ограниченной части совпадают, или, что то же самое, совпадают понятия относительно компактной части и ограниченной части.*

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса и следствию 1 теоремы 15, $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$, так что это утверждение столь же тривиально, как и следствие 5.

Замечание. Как мы отмечали на стр. 473, из доказанного следует, что пространства $\mathscr{D}_K(\Omega;\ \vec{F})$ и $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ ненормируемы, ибо нормируемое пространство обладает свойством Монтеля только тогда, когда оно конечномерно.

Следствие 6 — основное в теории функций комплексных переменных. В предыдущем доказательстве оно получилось как результат целой цепи следствий. Небесполезно убедиться непосредственно, что оно является тривиальным следствием теорем Асколи. Пусть $\mathscr{F}$ — ограниченная часть множества $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$. Для любого $\vec{x} \in \Omega$ множество $\mathscr{F}(\vec{x})$ ограничено, а следовательно, относительно компактно в конечномерном пространстве $\vec{F}$. С другой стороны, так как множество $\mathscr{F}$ ограничено, то для шара $B(\vec{a},\ R)$ с центром $\vec{a}$, содержащегося в замкнутом, а значит, компактном множестве Ω, можно найти такое число $M \geqslant 0$, для которого выполняется неравенство

$$\|\vec{f}(\vec{x})\| \leqslant M \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B(\vec{a},\ R),\ \vec{f} \in \mathscr{F}. \qquad \text{(VII, 6; 31)}$$

Согласно неравенству Коши,

$$\|\vec{f}'(\vec{x})\| \leqslant \frac{2}{R} nM \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B\left(\vec{a},\ \frac{R}{2}\right),\ \vec{f} \in \mathscr{F}, \qquad \text{(VII, 6; 32)}$$

откуда по формуле конечных приращений вытекает неравенство

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\| \leqslant nM \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B\left(\vec{a},\ \frac{R}{2}\right),\ \vec{f} \in \mathscr{F}.$$

Этим доказана равностепенная непрерывность в точке a множества $\mathscr{F}$ функций на Ω. Множество $\mathscr{F}$ удовлетворяет условиям третьей теоремы Асколи 44, а значит, относительно компактно в $(\vec{F}^{\Omega})_c$. Однако поскольку по теореме Вейерштрасса (следствие 1 теоремы 15) множество $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_c$, то (компактное) замыкание $\overline{\mathscr{F}}$ множества $\mathscr{F}$ в $(\vec{F}^{\Omega})_c$ лежит в $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ и, следовательно, $\mathscr{F}$ относительно компактно в $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$.

Последнее следствие можно обобщить:

Следствие 7. *Если V — голоморфное многообразие, а $\vec{F}$ — конечномерное банахово пространство, то пространство $\mathscr{H}(V;\ \vec{F})$ голоморфных функций на V со значениями в $\vec{F}$, снабженное топологией компактной сходимости (индуцированной из $(\vec{F}^V)_c$), обладает свойством Монтеля.*

Доказательство. Пусть множество $\mathscr{F}$ ограничено в $\mathscr{H}(V;\ \vec{F})$. Тогда для каждой точки $x \in V$ множество $\mathscr{F}(x)$ ограничено в $\vec{F}$, а следовательно, относительно компактно. Пусть далее $a \in V$ и $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность точки a в V, представляющая собой область карты $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{\Phi} \mathscr{V} = \Phi(\mathscr{O}) \subset V$. Пусть $\Phi(\alpha) = a$.

Для функции $\vec{f} \in \mathscr{F}$ обозначим через $\vec{f}^*$ ее прообраз $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$ — голоморфную функцию на $\mathscr{O}$ со значениями в $\vec{F}$, а через $\mathscr{F}^*$ обозначим множество функций f^*, где $f \in \mathscr{F}$.

Проведенные выше рассуждения [неравенства (VII, 6; 31) и (VII, 6; 32)] показывают, что множество $\mathscr{F}^*$ равностепенно непрерывно на $\mathscr{O}$ в точке α. Следовательно, множество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно на Ω в точке a. Значит, множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(\vec{F}^V)_c$, а следовательно, в подпространстве $\mathscr{H}(V;\ \vec{F})$, замкнутом в $(\vec{F}^V)_c$.

Замечание. Во всех предыдущих следствиях предположение конечномерности $\vec{F}$ было, очевидно, существенным. Пусть $\vec{F}$ — бесконечномерное банахово пространство. Мы знаем, что в нем единичный шар некомпактен. Поэтому можно найти последовательность $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ векторов единичной нормы, не содержащую никакой сходящейся подпоследовательности. Последовательность голоморфных функций на $\mathbb{C}$: $z \to z\vec{f}_n$ ограничена в $\mathscr{H}(\mathbb{C}; \vec{F})$, но не содержит никакой сходящейся подпоследовательности; $\mathscr{H}(\mathbb{C}; \vec{F})$ свойством Монтеля не обладает.

Приложения теоремы Монтеля. Эта теорема служит для доказательства ограниченности некоторых величин, связанных с функциями комплексных переменных. Приведем один постоянно используемый пример.

Теорема 48. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$ и K — некоторый компакт из Ω. Если каждой голоморфный комплексной функции f на Ω поставить в соответствие число $N(f; K) \leqslant +\infty$ ее нулей на компакте K с учетом их кратности, то функция $f \to N(f; K)$ (со значениями в $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup (+\infty)$) будет полунепрерывна сверху на пространстве $\mathscr{H}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Если число ее нулей на компакте K бесконечно (в этом случае она тождественно равна нулю на некоторой связной компоненте Ω), то доказывать нечего. Предположим поэтому, что на K она имеет $p < +\infty$ нулей с учетом их кратности. Пусть a_i, $i \in I$, — нули f на K, и пусть Δ_{a_i} — такие открытые круги с центрами a_i, что круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются. Их объединение, вообще говоря, компакт K не покрывает. Однако если для каждой точки b из K, не являющейся нулем функции f, мы рассмотрим такой открытый круг Δ_b с центром в точке b, что $\overline{\Delta}_b$ не содержит нулей функции f, то компакт K будет покрыт кругами Δ_{a_i} и Δ_b и можно выбрать конечное число кругов Δ_{a_i} и Δ_{b_j}, $j \in J$ (конечное множество), покрывающих K. Пусть H — объединение кругов $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$, и, $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$. Это компактная окрестность K. По следствию 2 теоремы 25 можно найти такое $\eta > 0$, что при выполнении неравенства $\sup\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$

1) функция g не имеет нулей в кругах $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$;

2) в каждом круге $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$, число нулей функции g равно числу нулей функции f, т. е. кратности p_{a_i} нуля a_i функции f.

Поскольку круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются, число нулей функции g на H равно $\sum\limits_i p_{a_i} = p$ и, следовательно, число нулей функции g на $K \subset H$ не больше p. Поскольку множество $\{g;\ \sup\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta\}$ является окрестностью точки f в пространстве $\mathscr{H}(\Omega) \subset (\mathbb{C}^{\Omega})_c$, то тем самым доказана полунепрерывность сверху функции $f \to N(f; K)$.

Замечание. Непосредственно видно, что если H — такая произвольная компактная окрестность K, что функция f имеет в H только нули, принадлежащие K, то найдется такое число $\eta > 0$, для которого неравенство $\max\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$ влечет за собой равенство $N(g;\ H) = N(f;\ H) = N(f;\ K)$. Отсюда вытекает, что $N(g;\ K) \leqslant N(f;\ K)$. Это означает, что имеет место именно полунепрерывность сверху, а не непрерывность. Предположим, например, что K сводится к единственной точке a и что эта точка a является простым нулем функции f: $N(f;\ \{a\}) = 1$. Если H — произвольный замкнутый круг с центром в точке a, не содержащий, кроме a, никаких других нулей функции f, то для функции g, достаточно близкой на H к функции f, $N(g;\ H) = 1$. Однако нуль функции g в круге H вовсе не обязан совпадать с самой точкой a, так что мы имеем лишь $N(f;\ \{a\}) \leqslant 1$.

Приведем другой, быть может, более показательный пример. Пусть K — круг. Предположим сначала, что все нули функции f в K лежат во внутренней части $\mathring{K}$ круга K. Тогда найдется строго меньший круг K', такой, что $N(f;\ K') = N(f;\ K)$. Далее рассуждения можно вести на круге K' и для него положить $H' = K$. Для функции g, достаточно близкой к функции f на K, будут справедливы равенства $N(g;\ K) = N(f;\ K') = N(f;\ K)$, а следовательно, будет иметь место непрерывность рассматриваемого отображения в точке f пространства $\mathscr{H}(\Omega)$. Однако если некоторые из нулей функции f на K лежат на границе $\dot{K}$ круга K, то положение изменится. В этом случае приходится вернуться к общим рассуждениям, с помощью которых можно получить соотношения $N(g;\ K) \leqslant N(g;\ H) = N(f;\ K)$. И действительно, функции, близкие к f, могут иметь некоторые из своих нулей в H возле границы $\dot{K}$ круга K, но вне этого круга.

Если F является всего лишь замкнутым множеством, то функция $f \to N(f;\ F)$ никакими свойствами полунепрерывности уже не обладает.

Пусть теперь $\mathcal{O}$ — открытое множество $\subset \Omega$. Предположим, что функция f имеет в $\mathcal{O}$ только изолированные нули в конечном или бесконечном числе p. Пусть q — произвольное конечное число, если $p = +\infty$, и $q = p$, если p конечно. Пусть a_i, $i \in I$, где I конечно, — нули функции f в $\mathcal{O}$, сумма кратностей которых p_{a_i} не менее q; Δ_{a_i} — такие открытые круги с центрами в точках a_i, что замкнутые круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются, и H — компакт $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{\Delta}_{a_i}$. Для достаточно малых $\eta > 0$ из $\max\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$ следует, что функция g имеет в точности

p_{a_i} нулей в $\overline{\Delta}_{a_i}$, так что $N(g;\ \mathcal{O}) \geqslant q$. Значит, функция $q \to N(g;\ \mathcal{O})$ полунепрерывна снизу на $\mathscr{H}(\Omega)$ в точке f. Предположим, что функция f тождественно равна нулю на некоторой связной компоненте $\mathcal{O}_1$ множества $\mathcal{O}$. Среди функций, близких к функции f в $\mathcal{O}_1$, имеются постоянные $\neq 0$. Они не имеют нулей в $\mathcal{O}_1$. Поэтому в такой точке f функция $g \to N(g;\ \mathcal{O})$ не является более полунепрерывной снизу на $\mathscr{H}(\mathcal{O})$. Можно лишь сказать, что функция $f \to N(f;\ \mathcal{O})$ полунепрерывна снизу на подмножестве в $\mathscr{H}(\Omega)$, состоящем из функций, не постоянных ни на какой связной компоненте множества $\mathcal{O}$.

Следствие (Монтель). *Пусть Ω — открытое связное множество из $\mathbb{C}$, M — некоторое число $\geqslant 0$, K — компакт множества Ω, a — точка из Ω, α — некоторое вещественное число > 0. Тогда существует целое конечное число $N(\Omega,\ M,\ K,\ a,\ \alpha)$, такое, что для любой голоморфной функции на Ω, ограниченной по модулю числом M и удовлетворяющей условию $|f'(a)| \geqslant \alpha$, выполняется неравенство $N(f;\ K) \leqslant N(\Omega,\ M,\ K,\ a,\ \alpha)$.*

Доказательство. Множество голоморфных функций на Ω, ограниченных по модулю числом M и удовлетворяющих условию $|f'(a)| \geqslant \alpha$, замкнуто и ограничено в $\mathscr{H}(\Omega)$, а значит, компактно (следствие 6 теоремы 47). Следовательно, функция $f \to N(f;\ K)$ на этом множестве имеет максимум. Этот максимум конечен. В самом деле, если этот максимум достигается на функции f и эта функция имеет бесконечное множество нулей на K, то из этого множества можно извлечь сходящуюся последовательность, а тогда функция f окажется тождественно равной нулю на связном множестве Ω (следствие 6 теоремы 11), что невозможно, поскольку $|f'(a)| \geqslant \alpha > 0$.

ДОПОЛНЕНИЕ О ПРОСТОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Каждая из приводимых ниже теорем состоит из двух частей: первая относится к одной функции и сходимости в точке, вторая — к множествам функций и равномерной сходимости на множествах точек. Последняя носит значительно более тонкий характер, и при первом чтении ее можно опускать, если она не связана с первой. Например, если читателя интересует лишь простая сходимость ряда Фурье (теорема 3), то достаточно прочитать часть теоремы 1, относящуюся только к одной функции $\vec{f}$, и так же поступить со следствием этой теоремы и с теоремой 2. Затем он может рассмотреть следствие теоремы 2 для случая одной функции $\vec{f}=\vec{g}$ при $\lambda=\mu$. После этого достаточно будет перейти к первой части доказательства теоремы 3 и завершить чтение следствием 1.

Сходимость интеграла Фурье

Теорема 1. *Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда интеграл Фурье*

$$\vec{C}(\lambda;\vec{f})=\vec{C}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\vec{f}(x)\,e^{-2i\pi\lambda x}\,dx \tag{1}$$

представляет собой непрерывную функцию λ, стремящуюся к $\vec{0}$ при $\lambda\to\pm\infty$ (Лебег). Кроме того, эта сходимость к $\vec{0}$ равномерна, когда $\vec{f}$ пробегает относительно компактную часть пространства $L^1(\mathbb{R},\ dx;\ \vec{F})$.

Доказательство. Непрерывность функции $\vec{C}$ очевидна (она вытекает из известной теоремы Лебега).

С другой стороны, так как $\|\vec{C}(\lambda)\|\leqslant\|\vec{f}\|_{L^1}$, то функция $\vec{C}$ ограничена. Покажем, что она стремится к $\vec{0}$ при $\lambda\to\infty$.

Если функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^1 и интегрируема вместе со своей производной, то $\vec{C}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\vec{f}'(x)\frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{2i\pi\lambda}dx$, а значит, $\|\vec{C}(\lambda)\|\leqslant\mathrm{const}\frac{1}{|\lambda|}$, и утверждение доказано.

Согласно теореме 49 гл. IV, непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Далее, согласно теореме об аппроксимации, каждая непрерывная функция с компактным носителем и значениями в $\vec{F}$ является равномерным пределом [а следовательно, и пределом в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$] последовательности бесконечно дифференцируемых функций с носителем в некотором фиксированном компакте, а следовательно, пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $\vec{F}$ и компактными носителями в $\mathbb{R}$ плотно в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Поэтому линейные отображения u_λ: $\vec{f} \to \vec{C}(\lambda; \vec{f})$ из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в $\vec{F}$, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ при λ, стремящемся к бесконечности, сходятся к нулевому отображению на плотном подмножестве $\mathscr{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ пространства $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Поскольку их норма $\leqslant 1$, то при λ, изменяющемся в $\mathbb{R}$, они равностепенно непрерывны. Из 2-й теоремы Асколи следует, что отображения u_λ сходятся просто к 0 на всем пространстве $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, т. е. интеграл $\vec{C}(\lambda; \vec{f})$ сходится к $\vec{0}$ при λ, стремящемся к бесконечности, для каждого $\vec{f} \in L(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, и сходимость равномерна на каждом компакте.

Следствие. *Если функция $\vec{f}$ периодична с периодом T на $\mathbb{R}$ и локально интегрируема, то ее коэффициенты Фурье $\vec{c}_k(\vec{f})$ при $|k|$, стремящемся к бесконечности, стремятся к $\vec{0}$, и сходимость равномерна, когда $\vec{f}$ пробегает относительно компактную часть пространства $L^1(\Gamma, dx; \vec{F})$* [1]).

В самом деле, обозначим через $\vec{g}$ функцию на $\mathbb{R}$, совпадающую с $\vec{f}$ на некотором отрезке длины T и равную нулю вне его. Тогда $\vec{c}_k(\vec{f}) = \vec{C}(\lambda; \vec{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \vec{g}(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$ при $2\pi\lambda = k\omega$ (где $\omega = 2\pi/T$), и наше утверждение теперь вытекает из теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\vec{f}$ — функция, интегрируемая на $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{F}$ и $\vec{\sigma} \in \vec{F}$. Тогда интеграл Дирихле*

$$\vec{J}(\lambda; \vec{f}) = \vec{J}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \vec{f}(x)\, \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx, \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{2}$$

[1]) См. примечание на стр. 512.

при $\lambda \to +\infty$[1]) *сходится к* $J\vec{\sigma}$, *где* $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, *если выполнено одно из двух следующих условий:*

Условие 1). *Функция* $\frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x}$ *интегрируема в окрестности начала координат*[2]).

Это имеет место, в частности, если функция $\vec{f}$ *имеет в нуле предел справа* $\vec{f}(0+0)$ *и удовлетворяет в окрестности нуля условию Гёльдера* $|\vec{f}(x) - \vec{f}(0+0)| \leqslant Cx^{\alpha}$, C *и* $\alpha > 0$, *в частности, если* $\vec{f}$ *дифференцируема в начале координат.*

При этом сходимость интеграла $\vec{J}(\lambda; \vec{f})$ *к* $J\vec{\sigma}$ *будет равномерной при* $\lambda \to +\infty$, *если* $\vec{f}$ *и* $\vec{\sigma}$ *изменяются так, что условие* 1) *выполняется для каждой пары* $(\vec{f}, \vec{\sigma})$, *когда функция* $\vec{f}$ *пробегает относительно компактную часть из* $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, *а* $\vec{\sigma}$ — *ограниченную часть из* $\vec{F}$ *и интеграл* $\int\limits_0^{\delta} \left\| \frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x} \right\| dx$ *сходится к* 0 *при* δ, *стремящемся к* 0, *равномерно относительно* $\vec{f}$, $\vec{\sigma}$.

Условие 2). *Функция* $\vec{f}$ *имеет ограниченную вариацию в окрестности начала координат, пространство* $\vec{F}$ *конечномерно, а* $\vec{\sigma} = \vec{f}(0+0)$.

Это имеет место, в частности, если функция $\vec{f}$ *вещественна, монотонна и ограничена в окрестности* 0. *При этом сходимость интеграла* $\vec{J}(\lambda; \vec{f})$ *к* $J\vec{\sigma}$ *равномерна, если* $\vec{f}$ *и* $\vec{\sigma}$ *изменяются так, что* $\vec{f}$ *пробегает относительно компактную часть из* $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, $\vec{f}(0+0)$ — *ограниченную часть* $\vec{F}$, *а полная вариация* $V(\vec{f};]0; \delta[)$ *функции* $\vec{f}$ *в* $]0, \delta[$ *стремится к* 0 *при* δ, *стремящемся к* 0, *равномерно относительно* $\vec{f}$.

---

[1]) Мы берем $\lambda \geqslant 0$. При $\lambda \to -\infty$ интеграл стремится к $-J\vec{\sigma}$. Известно, что $J = \pi/2$ (формула (VI, 11; 51)), однако мы здесь докажем это заново.

[2]) Отсюда не следует, что функция $\vec{f}$ стремится к $\vec{\sigma}$ при $x \to 0$. Однако если функция $\vec{f}$ имеет предел, то им может быть только $\vec{\sigma}$. Поскольку функция $1/x$ не интегрируема в окрестности 0, то $\vec{f}$ определяет $\vec{\sigma}$.

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие 1). Имеем

$$J(\lambda; \vec{f}) - J\vec{\sigma} = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin\lambda x\, dx + \\ + \left(\int_0^{\delta} \frac{\sin\lambda x}{x}\, dx - J\right)\vec{\sigma} + \int_0^{\delta} \frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x} \sin\lambda x\, dx. \quad (3)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$; выберем δ так, чтобы третье слагаемое в (3) при всех $\vec{f}$ и $\vec{\sigma}$, удовлетворяющих заданным условиям, было равномерно ограничено по норме числом $\varepsilon/3$. Зафиксировав такое δ, запишем второе слагаемое в виде

$$\left(\int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin x}{x}\, dx - J\right)\vec{\sigma} = \vec{\sigma}\int_{\lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Поскольку вектор $\vec{\sigma}$ ограничен в $\vec{F}$, можно выбрать λ настолько большим, чтобы это слагаемое было по норме ограничено числом $\varepsilon/3$. Поскольку отношение $\vec{f}(x)/x$ интегрируемо на $[\delta, +\infty[$, к нему можно применить теорему 1 $\left(\text{положив } \sin\lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}\right)$. Кроме того, отображение ($\vec{f}$ на $[0, +\infty[) \to$ $\to (\vec{f}(x)/x$ на $[\delta, +\infty[)$ является линейным непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в $L^1([\delta, +\infty[\,, dx; \vec{F})$ (с нормой $\leqslant 1/\delta$). Следовательно, если $\vec{f}$ пробегает компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, то функция $\vec{f}(x)/x$ пробегает компакт в $L^1([\delta, +\infty[\,, dx; \vec{F})$, и для достаточно больших значений λ и всех функций $\vec{f}$, удовлетворяющих указанным условиям, первое слагаемое будет равномерно ограничено по норме числом $\varepsilon/3$. Этим доказывается утверждение теоремы для случая, когда выполнено условие 1).

Перейдем теперь к случаю, когда выполнено условие 2). Пусть функция $\vec{f}$ имеет ограниченную вариацию в $[0, \delta]$, пространство $\vec{F}$ конечномерно, а $\vec{\sigma} = \vec{f}(0+0)$. Можно считать, что функция $\vec{f}$ непрерывна в нуле, так что $\vec{f}(0) = \vec{f}(0+0)$. (Значение $\vec{f}(0)$ не играет в доказательстве никакой роли.) Можно предполагать также, что функция $\vec{f}$ непрерывна слева, заменяя $\vec{f}(x)$ на $\vec{f}(x-0)$ там, где эти значения различаются.

Это касается только не более чем счетного множества точек, что не меняет значений интегралов и может только уменьшить полную вариацию функции $\vec{f}$.

Согласно теореме 88 гл. IV, при этих условиях функция $\vec{f}$ является неопределенным интегралом некоторой меры $\vec{\mu}$ с базой $\geqslant 0$. Кроме того, возможно интегрирование по частям (теорема 92 гл. IV).

Положим $T_\lambda(x) = \int\limits_0^\delta \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx = \int\limits_0^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Тогда $T_\lambda(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то при $\lambda \to +\infty$ интеграл $T_\lambda(x)$ стремится к J, оставаясь ограниченным. Имеем

$$J(\lambda; \vec{f}) - J\vec{f}(0) = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + \int\limits_0^\delta \vec{f}(x) \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx - J\vec{f}(0) =$$

$$= \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + T_\lambda(\delta)\vec{f}(\delta) - J\vec{f}(0) - \int\limits_0^\delta T_\lambda(x)\, d\vec{\mu}(x) =$$

$$= \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + T_\lambda(\delta)(\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)) +$$

$$+ (T_\lambda(\delta) - J)\vec{f}(0) - \int\limits_0^\delta T_\lambda(x)\, d\vec{\mu}(x). \qquad (3_2)$$

Полная вариация функции $\vec{f}$ в $[0, \delta[$ (или в $]0, \delta[$, поскольку она предполагалась непрерывной) равна $\int\limits_0^\delta d|\vec{\mu}|$ и $\geqslant \|\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)\|$. Поскольку функция T_λ ограничена, то $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы второе и четвертое слагаемые в последней части формулы (3_2) были по норме ограничены числом $\varepsilon/4$ равномерно для всех функций $\vec{f}$, удовлетворяющих указанным выше условиям. Далее, поскольку все значения $\vec{f}(0)$ ограничены, то можно выбрать λ настолько большим, чтобы третье слагаемое было $\leqslant \varepsilon/4$ равномерно относительно $\vec{f}$. Если воспользоваться теоремой 1, то же самое можно утверждать и для первого слагаемого. Тем самым теорема доказана и при выполнении условия 2).

Следствие. *Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции, совпадающие в некоторой окрестности 0. Пусть α — комплекс-*

ная функция на $\mathbb{R}$, измеримая, ограниченная снизу вне любой окрестности 0, *дважды дифференцируемая в окрестности* 0 *и такая, что* $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=1$. *Положим*

$$\vec{K}(\mu;\vec{g})=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\frac{\sin\mu x}{\alpha(x)}\,dx,\qquad \mu\geqslant 0. \tag{3_3}$$

Тогда всякий раз, когда $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ *имеет предел* $\vec{Js}$ *при* $\lambda\to+\infty$, *интеграл* $\vec{K}(\mu;\vec{g})$ *имеет тот же предел* $\vec{Js}$ *при* $\mu\to+\infty$. *Более того, независимо от существования этих пределов, если функции* $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ *пробегают относительно компактные части из* $L^1(\mathbb{R}, dx;\vec{F})$, *совпадая в одной и той же окрестности точки* 0, *то при* λ *и* μ, *стремящихся к* $+\infty$, *разность* $\vec{K}(\mu;\vec{f})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ *стремится к* $\vec{0}$ *равномерно относительно* $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ *при условии, что остается ограниченной величина* $|\lambda-\mu|$.

Доказательство. По существу речь идет, собственно, о следствии из теоремы 1, а не теоремы 2. Однако мы его помещаем здесь потому, что теорема 2 с помощью условий вида 1) или 2) позволяет найти предел $\vec{Js}$ интеграла $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$, а настоящее следствие дает предел функции $\vec{K}(\mu;\vec{g})$, также равный $\vec{Js}$. Достаточно доказать лишь второе утверждение следствия.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\vec{K}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})=\\
&=(\vec{K}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\mu;\vec{g}))+(\vec{J}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\mu;\vec{f}))+(\vec{J}(\mu;\vec{f})-\vec{J}(\lambda;\vec{f}))=\\
&=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}\right)\sin\mu x\,dx+\int_0^{\infty}\frac{\vec{g}(x)-\vec{f}(x)}{x}\sin\mu x\,dx+\\
&\qquad+2\int_0^{+\infty}\frac{\vec{f}(x)\sin\frac{\mu-\lambda}{2}x}{x}\cos\frac{\mu+\lambda}{2}x\,dx.
\end{aligned}\tag{3_4}$$

Функция $\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}$ измерима и ограничена на $\mathbb{R}$. В самом деле, эта функция ограничена вне любой окрестности 0. В окрестности начала координат, согласно формуле Тейлора, $\alpha(x)-x=\alpha(x)-\alpha(0)-x\alpha'(0)\sim\frac{x^2}{2}\alpha''(0)$ при $x\to 0$ (теорема 21 гл. II), так что $\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\alpha(x)}{x\alpha(x)}$ стремится к $-\frac{1}{2}\alpha''(0)$ при $x\to 0$. Следовательно, эта функция ограничена и в окрестности 0. Согласно теореме 1, первый интеграл стремится к $\vec{0}$ при $\mu\to+\infty$. Кроме того, если $\vec{f}$ пробегает компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, то же самое верно и для функции $\vec{f}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}\right)$, поскольку $\vec{f}\to\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}\right)\vec{f}$ является непрерывным отображением пространства $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в себя. Следовательно, сходимость равномерна относительно $\vec{f}$. Этим доказательство следствия заканчивается, если ограничиться случаем $\vec{f}=\vec{g}$ и $\lambda=\mu$.

Так как разность $\vec{g}-\vec{f}$ обращается в нуль в некоторой окрестности 0, то отношение $\frac{\vec{g}(x)-\vec{f}(x)}{x}$ интегрируемо. Поэтому по теореме 1 при $\mu\to\infty$ второй интеграл стремится к $\vec{0}$. Кроме того, когда $\vec{f}$ и $\vec{g}$ пробегают компакты из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, функция $\frac{\vec{g}-\vec{f}}{x}$ пробегает некоторый компакт из $L^1([\delta, +\infty[, dx; \vec{F})$, и, поскольку $\vec{f}$ и $\vec{g}$ совпадают в $[0, \delta]$, второе слагаемое сводится к интегралу по $[\delta, +\infty[$. Следовательно, при $\mu\to+\infty$ второе слагаемое стремится к нулю равномерно относительно $\vec{f}$ и $\vec{g}$, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Если ограничиться случаем $\lambda=\mu$, то на этом доказательство заканчивается. Предположим теперь, что величина $|\mu-\lambda|$ всего лишь ограничена. Отображение $(\vec{f}, g)\to\vec{f}g$ является билинейным непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})\times(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{cb}$ в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ с нормой $\leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin\tau''x}{x}-\frac{\sin\tau'x}{x}\right|=\sup_{x\in\mathbb{R}}2\left|\frac{\sin\frac{\tau''-\tau'}{2}x}{x}\cos\frac{\tau''+\tau'}{2}x\right|\leqslant|\tau''-\tau'|,$$

отображение $\tau\to\left(\text{функция }\frac{\sin\tau x}{x}\right)$ пространства $\mathbb{R}$ в пространство $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{cb}$ непрерывно и даже удовлетворяет условию Липшица, а следовательно, $(\vec{f}, \tau)\to\left(\text{функция }\vec{f}(x)\frac{\sin\tau x}{x}\right)$ является непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})\times\mathbb{R}$ в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Если теперь функция $\vec{f}$ пробегает относительный компакт из

$L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, а τ — относительный компакт из $\mathbb{R}$, то функция $\vec{f}(x)\frac{\sin \tau x}{x}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Следовательно, если функция $\vec{f}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ и если разность $\lambda - \mu$ остается ограниченной, то функция $f(x)\frac{\sin \frac{\mu-\lambda}{2} x}{x}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. В силу теоремы 2 при $\mu + \lambda \to +\infty$ последний интеграл в (3_4) равномерно сходится к $\vec{0}$, чем и заканчивается доказательство следствия.

Сходимость ряда Фурье

Теорема 3. *Пусть $\vec{f}$ — периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом T и $\omega = 2\pi/T$. Предположим, что функция $\vec{f}$ интегрируема на некотором интервале длины T.*

Пусть $\vec{s} \in \vec{F}$ и выполняется одно из следующих двух условий:

1) *четная функция $t \to \frac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)-2\vec{s}}{t}$ интегрируема в некоторой окрестности* 0;

2) *четная функция $t \to \frac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)}{2}$ имеет в окрестности* 0 *ограниченную вариацию, ее предел справа (и слева) при $t = 0$ равен $\vec{s}$, а пространство $\vec{F}$ конечномерно.*

Тогда ряд Фурье функции $\vec{f}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{c}_k(\vec{f})\, e^{ik\omega x}, \quad \text{где} \quad \vec{c}_k(\vec{f}) = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} \vec{f}(\xi)\, e^{-ik\omega\xi}\, \frac{d\xi}{T}, \tag{4}$$

при $x = a$ сходится в смысле главного значения Коши к $\vec{s}$:

$$\lim_{N\to+\infty} \vec{S}_N(a; \vec{f}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \vec{c}_k(\vec{f})\, e^{ik\omega a} = \vec{s}. \tag{5}$$

Кроме того, интеграл $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ равен $\pi/2$ [1]).

[1]) Это будет новым доказательством формулы (IV, 11; 51).

Пусть A — замкнутое множество из $\mathbb{R}$, функция $\vec{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в каждой точке A[1]) *и выполнено одно из двух следующих условий:*

Условие 1′). *Функция $\vec{f}$ в некоторой окрестности A' множества A удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\|\vec{f}(x)-\vec{f}(y)\|\leqslant C|x-y|^{\alpha} \quad \text{при} \quad x\in A; \quad y\in A',$$

где C и $\alpha>0$.

Условие 2′). *Функция $\vec{f}$ имеет локально ограниченную вариацию в некоторой окрестности A' множества A, и пространство $\vec{F}$ конечномерно.*

Тогда сходимость $\vec{S}_N(\vec{f})$ к $\vec{f}$ при N, стремящемся к бесконечности, равномерна на A.

Доказательство. Так как

$$\vec{c}_k(\vec{f})\,e^{ik\omega a}=\int\limits_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}}\vec{f}(\xi)\,e^{ik\omega(a-\xi)}\frac{d\xi}{T}, \tag{6}$$

то

$$\vec{S}_N(a;\,\vec{f})=\int\limits_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}}\vec{f}(\xi)\,R_N(a-\xi)\frac{d\xi}{T}, \quad \text{где} \quad R_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}e^{ik\omega t}. \tag{7}$$

Функцию R_N можно вычислить как сумму членов геометрической прогрессии:

$$R_N(t)=\frac{e^{i(N+1)\omega t}-e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t}-1}=\frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}-e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}}{e^{\frac{i\omega t}{2}}-e^{-\frac{i\omega t}{2}}}=$$

$$=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}. \tag{8}$$

---

[1]) Это условие предполагает большее, чем непрерывность сужения $\vec{f}$ на A. С другой стороны, оно не предполагает непрерывности $\vec{f}$ в окрестности множества A.

Поэтому

$$\vec{S}_N(a;\ \vec{f}) = \int_{-T/2}^{T/2} \vec{f}(a-t)\, R_N(t)\, \frac{dt}{T} = \int_{-T/2}^{T/2} \vec{f}(a-t)\, \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}\, \frac{dt}{T} =$$

$$= \int_0^{T/2} \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t) - \vec{f}(a-t)\right) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)\Big/\frac{\omega}{2}}\, dt. \qquad (9)$$

Введем функцию $\vec{\Phi}_a(t)$, равную

$$\vec{\Phi}_a(t) = \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)\right) \qquad (9_2)$$

в $[0,\ T/2]$ и нулю вне этого отрезка. Положим $\mu = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$ и введем функцию $\alpha(t)$, равную $\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)\Big/\frac{\omega}{2}$ на отрезке $[0,\ T/2]$ и любому постоянному числу $\neq 0$ вне его. Функция α ограничена снизу вне любой окрестности нуля и $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$. Тогда из (9) мы получим интеграл (3_3).

Так как при $\vec{\sigma} = \frac{2}{\pi}\vec{s}$

$$\vec{\Phi}_a(t) - \vec{\sigma} = \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t) - 2\vec{s}\right) \qquad (9_3)$$

и

$$\Phi_a(0+0) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{f}(a+0) + \vec{f}(a-0)\right) = \frac{2}{\pi}\vec{s},$$

то, если функция $\vec{f}$ удовлетворяет условию 1) или 2) теоремы 3, функция $\vec{\Phi}_a$ удовлетворяет условию 1) или 2) теоремы 2 $\left(\text{где } \vec{\sigma} = \frac{2}{\pi}\vec{s}\right)$.

Из теоремы 2 и ее следствия вытекает, что $\vec{S}_N(a;\ \vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к $J\vec{\sigma} = J\frac{2}{\pi}\vec{s}$, где $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Поэтому если мы покажем, что $J = \pi/2$, то будет доказан результат, относящийся к сходимости в точке a. Но для этого достаточно применить полученное выше к постоянной функции $f = 1$. Тогда все $c_k(f)$ будут равны 0, кроме $c_0(f) = 1$, и сумма $S_N(a;\ 1) = 1$ заведомо будет стремиться к 1. Но так как она должна стремиться к $J\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 1$, то получаем, что $J = \pi/2$.

Прежде чем доказывать ту часть, которая относится к равномерной сходимости, приведем очевидное следствие утверждения, относящегося к простой сходимости.

Следствие 1. *Пусть функция $\vec{f}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1′) *Функция $\vec{f}$ имеет предел справа $\vec{f}(a+0)$ и предел слева $\vec{f}(a-0)$ в точке a, а функции $t \to \frac{\vec{f}(a+t)-\vec{f}(a+0)}{t}$ и $t \to \frac{\vec{f}(a-t)-\vec{f}(a-0)}{t}$ интегрируемы на $\mathbb{R}_+$ в окрестности точки 0. Так будет, в частности, в том случае, когда функция $\vec{f}$ удовлетворяет условиям Гёльдера $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a+0)\| \leqslant C|x-a|^\alpha$ при $x \geqslant a$ и $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a-0)\| \leqslant C|x-a|^\alpha$ при $x \leqslant a$. Последнее справедливо, например, если функция $\vec{f}$ дифференцируема в точке a.*

2′) *Функция $\vec{f}$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки a, а пространство $\vec{F}$ конечномерно. Так будет, в частности, тогда, когда функция $\vec{f}$ вещественна, монотонна и ограничена в окрестности точки a.*

Тогда ряд Фурье функции $\vec{f}$ при $x=a$ сходится в смысле главного значения Коши к $\frac{1}{2}(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0))$.

Перейдем теперь к случаю равномерной сходимости. При рассматриваемых условиях сумма $\vec{S}_N(a; \vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к $\vec{f}(a)$ в каждой точке $a \in A$, и нам нужно показать, что эта сходимость равномерна относительно $a \in A$. Для этого достаточно показать, что функция $\vec{\Phi}_a$ удовлетворяет условиям теоремы 2, позволяющим утверждать, что сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \vec{\Phi}_a(t)\frac{\sin \mu t}{\alpha(t)}\,dt$ к $J\vec{\sigma}=\vec{f}(a)$ при $\lambda \to +\infty$ равномерна относительно $a \in A$.

Покажем сначала, что при фиксированной функции $\vec{f}$ и переменной точке a на Γ[1]) функции $\vec{\Phi}_a$ образуют некоторый компакт в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Обозначим через u_a непрерывное линей-

[1]) Мы систематически отождествляем функции на окружности с периодическими функциями на $\mathbb{R}$ периода T. Это приводит к некоторой вольности изложения, однако не мешает пониманию.

ное отображение $\vec{f} \to \vec{\Phi}_a$ пространства $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$ в пространство $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Норма этого отображения ограничена числом $1/\pi$. Если $\vec{f}$ — непрерывная функция, то при a, стремящемся к a_0, функция $u_a\vec{f}$ стремится к $u_{a_0}\vec{f}$ в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$, поскольку она сходится к $u_{a_0}\vec{f}$ равномерно на отрезке $[0, T/2]$ и остается равной нулю вне этого отрезка. Значит, u_a сходится просто к u_{a_0} на плотном подмножестве $\mathscr{C}(\Gamma; \vec{F})$ из $L^1(\Gamma; dt; \vec{F})$. Согласно 2-й теоремы Асколи, $u_a\vec{f}$ также сходится к $u_{a_0}f$ для любой функции $\vec{f}$ из $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$. Это означает, что отображение $a \to u_a\vec{f} = \vec{\Phi}_a$ для фиксированной функции $\vec{f}$ в $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$ является непрерывным отображением Γ в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Следовательно, образ компакта Γ является снова компактом в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Это вытекает из одной только интегрируемости $\vec{f}$ на Γ.

Допустим теперь, что выполнено условие 1′). Пусть δ_0 — наименьшее расстояние от A до $\complement A'$ (см. гл. II, стр. 83). Для $\delta \leqslant \delta_0$ при $a \in A$ имеет место следующая оценка:

$$\int_0^\delta \left\| \frac{\vec{\Phi}_a(t) - \frac{2}{\pi}\vec{f}(a)}{t} \right\| dt \leqslant \frac{1}{\pi} 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}, \tag{10}$$

так что при δ, стремящемся к 0, левая часть будет стремиться к 0 равномерно относительно $a \in A$. Из следствия теоремы 2 теперь вытекает, что последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ сходится к $\vec{f}$ равномерно на A.

Предположим, наконец, что выполнено условие 2′). Покажем, что если условие 2) теоремы 2 считать не выполняющимся, то мы придем к противоречию. В самом деле, в этом случае нашлись бы такая последовательность точек a_n из A и такое число $\varepsilon > 0$, при которых

$$V(\vec{\Phi}_{a_n};\ ]0, 1/n[) \geqslant \varepsilon. \tag{10$_2$}$$

Однако, поскольку множество A является компактом на Γ, из последовательности a_n можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке a в A. Точки $a_n \pm 1/n$ при этом будут также стремиться к a. Функция $\vec{f}$ по предположению имеет ограниченную вариацию в окрестности точки a и непрерывна в этой точке. Следовательно, вариация функции $\vec{f}$ в отрезке $[a-\eta, a+\eta]$ стремится к 0 вместе с η (теорема 84_2

гл. IV), а значит, ее вариация в отрезке $[a_n - 1/n,\ a_n + 1/n]$ стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Отсюда $V(\vec{\Phi}_{a_n};\ [0;\ 1/n])$ при n, стремящемся к бесконечности, стремится к 0, что противоречит неравенству (10_2).

Таким образом, вариация функции $\vec{\Phi}_a$ в отрезке $|0, \delta|$ при δ, стремящемся к 0, стремится к 0 равномерно относительно $a \in A$. Тем самым выполняется условие 2) теоремы 2, и последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ сходится к $\vec{f}$ равномерно на A при N, стремящемся к бесконечности.

Из этой равномерной сходимости вытекает

Следствие 2. *Если функция $\vec{f}$ имеет локально ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и пространство $\vec{F}$ конечномерно, то сходимость последовательности $\vec{S}_N(\vec{f})$ к функции $\vec{f}$ при N, стремящемся к бесконечности, равномерна на множестве A точек непрерывности функции $\vec{f}$. Если функция $\vec{f}$ удовлетворяет условию Гёльдера (а следовательно, непрерывна) на $\mathbb{R}$, т. е. выполняется неравенство*

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| \leqslant C|x-y|^{\alpha}, \quad C \text{ и } \alpha > 0, \tag{10_3}$$

или если она имеет локально ограниченную вариацию и всюду непрерывна, а пространство $\vec{F}$ конечномерно, то последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к функции $\vec{f}$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Замечания. 1°) Условия 1) и 2) относительно $\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)$ не так ограничительны, как раздельные условия для $\vec{f}(a+t)$ и $\vec{f}(a-t)$, указанные в следствии 1. Возьмем, к примеру, $a=0$ и нечетную функцию $\vec{f}$. Тогда $\vec{f}(t)+\vec{f}(-t)$ тождественно равна нулю, а следовательно, 1) и 2) выполняются и $\vec{s}=\vec{0}$. Ряд Фурье состоит из синусов, все суммы $\vec{S}_N(0;\ \vec{f})$ равны нулю, и сходимость к $\vec{0}$ очевидна. Было бы смешно налагать на $\vec{f}$ такие условия, как интегрируемость $\vec{f}(t)/t$ или ограниченность вариации функции $\vec{f}$.

2°) Мы подчеркивали, что ряд сходится в смысле *главного значения Коши*, т. е. к $\vec{s}$ сходится $\sum\limits_{k=-N}^{N}$, в то время как ряды

$\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ могут расходиться. Выберем, например, в качестве $\vec{f}$ нечетную функцию, равную -1 в $]-T/2,\ 0[$ и равую $+1$ в $]0,\ +T/2[$. Ее коэффициенты равны

$$c_k(\vec{f})=0 \quad \text{для четных } k, \quad c_{2l+1}(\vec{f})=+\frac{2}{(2l+1)\,i\pi}. \tag{11}$$

Ряд Фурье представляет собой ряд из синусов

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin(2l+1)\,\omega x}{2l+1}. \tag{11_2}$$

Как и в замечании 1°), сходимость к 0 при $x=0$ очевидна. Однако сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\vec{f})\,e^{ik\omega x}$ равна $\dfrac{2}{i\pi}\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\dfrac{e^{(2l+1)\,i\omega x}}{2l+1}$ и оба ряда $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ при $x=0$ расходятся.

3°) Рассмотрим последовательность функций $\frac{1}{T}R_N(x)$ на окружности Γ.

Посмотрим, будет ли эта последовательность $\frac{1}{T}R_N$ широко сходиться к δ-функции? И вообще, всегда ли ряд Фурье непрерывной функции просто сходится к этой функции?

Покажем, что *непрерывность функции $\vec{f}$ не является ни необходимым, ни достаточным условием для того, чтобы ряд Фурье этой функции сходился просто к функции $\vec{f}$.*

Прежде всего если на отрезке, длина которого равна периоду, функция $\vec{f}$ имеет ограниченную вариацию и $\vec{f}(a)=\frac{1}{2}(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0))$ в каждой точке a, то ряд Фурье функции $\vec{f}$, несмотря на наличие разрывов, просто сходится к этой функции $\vec{f}$. Поэтому непрерывность функции $\vec{f}$ не является необходимым условием такой сходимости.

Она не является также и достаточным условием. Привести пример непрерывной функции, ряд Фурье которой не сходится, не легко. Однако теорема Банаха — Штейнгауза позволяет установить этот результат, не прибегая к построению контрпримера.

Предположим, что для любой непрерывной на Γ функции φ ряд Фурье этой функции сходится в точке 0, т. е. что $\frac{1}{T}R_N$ *широко* сходится к δ-функции при N, стремящемся к бесконечности. Тогда из теоремы Банаха — Штейнгауза следовало бы, что нормы мер $\frac{1}{T} R_N\, dx$ были бы ограничены некоторым фиксированным числом $M > 0$:

$$\left\| \frac{1}{T} R_N\, dx \right\| = \int_{-T/2}^{T/2} | R_N(x) | \frac{dx}{T} \leqslant M. \tag{12}$$

Имеем

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left| R_N(x) \frac{dx}{T} \right| = \int_{-T/2}^{T/2} \left| \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega x}{\sin \omega x/2} \right| \frac{dx}{T} =$$

$$= \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}}^{+\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}} \left| \frac{\sin \omega\xi}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \sin \dfrac{\omega\xi}{2\left(N + \frac{1}{2}\right)}} \right| \frac{d\xi}{T}. \tag{13}$$

Подинтегральную функцию f_N можно рассматривать на $\mathbb{R}$ как произведение функции $\frac{1}{T} \left| \dfrac{\sin \omega\xi}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \sin \dfrac{\omega\xi}{2\left(N + \frac{1}{2}\right)}} \right|$ на характеристическую функцию интервала $\left[-\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2},\ +\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}\right]$. При N, стремящемся к бесконечности, она стремится к функции $\frac{2}{T} \left| \frac{\sin \omega\xi}{\omega\xi} \right|$, *интеграл от которой на* $\mathbb{R}$ *равен* $+\infty$. Положим $g_{m,n} = \inf(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)$, $n \geqslant m$, и $g_m = \lim\limits_{n \to \infty} g_{m,n}$ (предел убывающей последовательности). Тогда $\lim\limits_{m \to \infty} g_m = \frac{2}{T} \left| \frac{\sin \omega\xi}{\omega\xi} \right|$ — предел возрастающей последовательности. Согласно теореме Фату (теорема 36 гл. VI), интеграл $\int g_m$ при m, стремящемся к бесконечности, стремится к $+\infty$. Поскольку $f_n \geqslant g_m$ при $n \geqslant m$, то $\int f_n$ также стремится к $+\infty$, что противоречит неравенству (12). Таким образом, непрерывность функции φ не достаточна для обеспечения простой сходимости ряда Фурье.

С помощью теоремы Банаха — Штейнгауза в ее общей форме, приведенной в § 6 гл. VII (теорема 46), можно углубить этот результат. Теорема утверждает, что для B-почти каждой непрерывной комплексной функции f на Γ частные суммы $S_N(0; f)$ ряда Фурье неограничены. То же самое верно и для любой другой точки a из Γ. Но тогда, поскольку объединение счетного множества тощих множеств является тощим множеством, для счетного множества A из Γ для B-почти каждой непрерывной функции f на Γ суммы $S_N(a;\ f)$ не ограничены ни в одной точке a из A. A fortiori B-почти все функции f имеют расходящиеся ряды Фурье в каждой точке a множества A. Однако *вовсе не так просто привести пример функции f, обладающей этим свойством.* Если множество A плотно, то метод, указанный после теоремы 46 гл. VII, позволяет проверить, что каждая функция f, для которой суммы $S_N(a;\ f)$ не ограничены ни в одной точке a из A, будет также иметь неограниченные суммы $S_N(a;\ f)$ в B-почти каждой точке a из Γ: *B-почти все непрерывные функции имеют B-почти всюду расходящиеся ряды Фурье.* Запишем этот факт через кванторы: ($\exists\mathscr{F}$ — тощее множество в $C(\Gamma)$) ($\forall f \notin \mathscr{F}$) ($\exists B$ — тощее множество из $\mathbb{R}$): (ряд Фурье функции f расходится в каждой точке $\complement B$).

Поскольку каждое «B-почти всюду» множество из Γ имеет мощность континуума, существуют непрерывные периодические функции, множество точек расходимости ряда Фурье которых имеет мощность континуума. Однако это не означает, что множество точек расходимости имеет меру Лебега > 0, поскольку «B-почти всюду» множество может иметь меру Лебега, равную нулю.

Неизвестно, существует ли непрерывная функция, ряд Фурье которой был бы всюду или почти всюду расходящимся.

Тот факт, что $\frac{1}{T} R_N$ сходятся к δ-функции, но не сходятся широко, является своего рода математической «осечкой» — более слабым результатом, чем можно было ожидать. Однако он явился источником многочисленных работ, способствовавших развитию многих ветвей анализа.

4°) Имеются примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых сходятся всюду, но не равномерно.

5°) Мы видели, что если $f \in L^2(\Gamma;\ dx)$, то ряд Фурье функции f сходится к f в L^2 [1]). Этот же результат сохраняется и для $f \in L^p$, $1 < p < +\infty$, но его доказательство не просто. Напротив, это утверждение не верно, если $p = 1$ или $+\infty$. Это следует из предыдущего для $p = \infty$ (поскольку если функция f непрерывна, то она принадлежит пространству L^∞, а суммы $S_N(f)$ не сходятся к f равномерно и, следовательно, не сходятся к f в L^∞).

Покажем это для случая $p = 1$. Согласно теореме Банаха—Штейнгауза, если для всякой функции $f \in L^1(\Gamma)$ суммы $S_N(f) = \frac{1}{T} R_N * f$ сходятся в L^1 к f, то операторы $\frac{1}{T} R_N *$, действую-

[1]) Это утверждение можно распространить на случай функций $\vec{f} \in L^2(\Gamma,\ dx;\ \vec{F})$, если только пространство $\vec{F}$ конечномерно. Для произвольного пространства $\vec{F}$ этого сделать нельзя.

щие из L^1 в L^1: $f \to \frac{1}{T} R_N * f$, имеют ограниченные в совокупности нормы $\left\| \frac{1}{T} R_N * \right\|$. Фиксируем N. Пусть ρ_j — последовательность непрерывных функций $\geqslant 0$ на Γ, носители которых стягиваются к началу и интегралы от которых равны 1. Согласно примеру 1, приведенному после теоремы 67 гл. IV, меры $\rho_j\,dx$ широко сходятся при $j \to \infty$ к δ-функции на Γ. Поэтому в силу следствия 3 теоремы 66 гл. IV, функции $\frac{1}{T} R_N * \rho_j$, определенные по формуле $x \to \frac{1}{T} \int\limits_\Gamma R_N(x-\xi)\,\rho_j(\xi)\,d\xi$, сходятся при $j \to \infty$ к $\frac{1}{T} R_N$ равномерно на Γ. Тогда интеграл $\int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right|$ сходится к интегралу $\int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N \right|$. Далее,

$$\left\| \frac{1}{T} R_N * \right\| \geqslant \frac{\left\| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right\|_{L^1}}{\|\rho_j\|_{L^1}} = \int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right| \geqslant \int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N \right|. \tag{13_2}$$

Так как, согласно рассуждениям, приведенным после формулы (13), интегралы $\int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N \right|$ стремятся к $+\infty$ при $N \to \infty$, то мы приходим к противоречию. Здесь также, пользуясь понятием тощих множеств, можно показать, что B-почти все функции из $L^1(\Gamma)$ имеют ряд Фурье, расходящийся в L^1. Известен пример функции из $L^1(\Gamma)$, для которой ряд Фурье расходится в каждой точке.

Однако если функция $|f| \ln(1+|f|)$ интегрируема на Γ, то можно показать, что ряд Фурье функции f сходится к f в $L^1(\Gamma;\, dx)$.

Локальное поведение функции и сравнение сходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Ее интеграл Фурье определяется по формуле (1). Вопрос о сходимости ряда Фурье к функции $\vec{f}$ заменяется здесь вопросом о справедливости формулы обращения Фурье в смысле главного значения Коши:

$$\vec{f}(a) = \lim_{L \to \infty} \int\limits_{-L}^{L} \vec{C}(\lambda;\, \vec{f})\, e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda. \tag{14}$$

Функция $\vec{C}$ непрерывна и, согласно теореме 1, на бесконечности стремится к $\vec{0}$, так что правая часть, вообще говоря, не обязательно имеет смысл. Если же она имеет смысл, то речь идет, вообще говоря, о неабсолютной сходимости. Здесь имеет место лишь сходимость в смысле главного значения Коши, поскольку мы рассматриваем $\lim\limits_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^{+L}$, а не $\lim\limits_{A,\,B\to+\infty}\int\limits_{-A}^{+B}$. [Возможно, что равенство (14) справедливо, в то время как интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{+\infty}$ расходятся.]

Вычисление правой части (14) несложно:

$$\sum_L(a;\vec{f})=\int\limits_{-L}^{+L}\vec{C}(\lambda;\vec{f})\,e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda=\int\limits_{-L}^{+L}e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(x)\,e^{-2i\pi\lambda x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(x)\,dx\int\limits_{-L}^{+L}e^{2i\pi\lambda(a-x)}\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi L\,(a-x)}{a-x}\vec{f}(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi Lt}{t}\vec{f}(a-t)\,dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\,[\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)]\,\frac{\sin 2\pi Lt}{t}\,dt\,^{1)}. \tag{15}$$

Таким образом, мы пришли к интегралу Дирихле и теореме 2, но при условиях, еще более простых, чем в случае ряда Фурье, поскольку здесь нет множителя $\alpha(t)=\dfrac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2}$, обязывавшего в формуле (9) применять вместо самой теоремы 2 следствие этой теоремы. Отсюда сразу вытекают следующие аналоги предыдущих теорем:

Теорема 4. *Если функция $\vec{f}$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то сохраняется теорема 3 и оба ее следствия, где следует лишь заменить сходимость $\vec{S}_N$ сходимостью $\vec{\Sigma}_L$, равномерную сходи-*

---

[1]) Перестановка интегралов допустима, поскольку норма $\|\vec{f}(x)\|$ $(dx\otimes d\lambda)$-интегрируема на $\mathbb{R}\times[-L,+L]$ (теорема Фубини). (Напротив, эта норма не интегрируема на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Поэтому для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2i\pi\lambda(a-x)}\,d\lambda$ перестановка была бы необоснованной, и в общем случае, как мы уже говорили, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{C}(\lambda)\,e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda$ как интеграл Лебега не имеет смысла, поскольку функция $\vec{C}$ не является $d\lambda$-интегрируемой.)

мость на A или $\mathbb{R}$ равномерной сходимостью на каждом компакте из A или из $\mathbb{R}$[1]).

Кроме того, следствие теоремы 2 позволяет сравнивать ряды и интегралы Фурье от различных функций, совпадающих на некотором открытом множестве.

Теорема 5. *Пусть $\vec{f}$ — локально интегрируемая периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом 1, и пусть $\vec{g}$ — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$. Предположим, что функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ совпадают на окрестности A' некоторого компакта A из $\mathbb{R}$. Тогда разность $\vec{S}_N(\vec{f}) - \vec{\Sigma}_L(\vec{g})$ сходится к $\vec{0}$ равномерно на A при L и N, стремящихся к $+\infty$ так, что разность $|L-N|$ остается ограниченной.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \vec{S}_N(a; \vec{f}) &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi} (\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)2\pi t}{(\sin \pi t)/\pi}\, dt, \\ \vec{\Sigma}_L(a; \vec{g}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} (\vec{g}(a+t) + \vec{g}(a-t)) \frac{\sin 2\pi L t}{t}\, dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Мы уже видели, что при a, изменяющемся на компакте, произведение функции $\frac{1}{\pi}(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t))$ на характеристическую функцию отрезка $[0, 1/2]$ и функция $(\vec{g}(a+t)+\vec{g}(a-t))/\pi$ пробегают компакты из $L^1(\mathbb{R}, dt;\ \vec{F})$. Если δ_0 — наименьшее расстояние между множествами A и $\complement A'$, то для каждого $a \in A$ они совпадают на отрезке $[0, \delta_0]$. Теперь достаточно применить следствие теоремы 2 при $\lambda = 2\pi L$, $\mu = 2\pi(N+1/2)$ и функции $\alpha(t) = (\sin \pi t)/\pi$ на отрезке $[0, 1/2]$ и $\alpha(t) = \mathrm{const} \neq 0$ вне этого отрезка.

Замечание 1. Мы взяли функцию $\vec{f}$ периодической с периодом 1 потому, что в определении $\vec{\mathscr{C}}(\lambda; \vec{f})$ брались функ-

---

[1]) Это небольшое различие между рядом и интегралом Фурье вполне понятно. Если замкнутое множество A компактно на Γ или если замкнутое множество A периодически повторяется на $\mathbb{R}$, то равномерная сходимость периодических функций на каждом компакте из A влечет за собой их равномерную сходимость на A.

ции $e^{-2\pi i\lambda x}$ или $e^{-i\lambda\omega x}$ при $\omega=2\pi$, $2\pi/\omega=1$. Если же взять $\vec{f}$ с произвольным периодом T, то надо будет или изменить интеграл Фурье для функции $\vec{g}$, или же сохранить все по-прежнему, но считать, что разность $N-TL$ ограничена так, чтобы оставалась ограниченной величина $|\lambda-\mu|$ при $\lambda=\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$ и $\mu=2\pi L$.

З а м е ч а н и е 2. Поскольку простая сходимость ряда или интеграла Фурье получалась из теоремы с не простым доказательством, то из нее почти всегда вытекают очень интересные формулы.

Например, формула $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$, играющая всюду весьма существенную роль, была получена в ходе доказательства теоремы 3 с использованием очевидной сходимости ряда Фурье для постоянной функции $f=1$. Теперь эту формулу можно рассматривать как формулу обращения Фурье, когда f представляет собой характеристическую функцию отрезка $\left[-\frac{1}{2\pi},\ +\frac{1}{2\pi}\right]$:

$$C(\lambda)=\int\limits_{-1/2\pi}^{+1/2\pi}e^{-2i\pi\lambda x}\,dx=\frac{\sin\lambda}{\pi\lambda}. \tag{17}$$

Формула обращения (14) при $a=0$ дает

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\pi\lambda}\,d\lambda \quad \text{или} \quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».