שאלה 1:

~~A[[a₁]]~~

ⓐ הכללת שגיאות:

$$A[[a_1 \text{ div } a_2]] = A[[a_1]]_s \,/\, A[[a_2]]_s$$

$$A[[a_1 \text{ mod } a_2]] = A[[a_1]]_s \text{ mod } A[[a_2]]_s$$

↗ %

הגדר איך מתבצעת החלוקה.
קורה בשלמים גם %,

שאלה 2:

(*) $\langle (S_1 ; S_2) ; S_3 , s_0 \rangle \to s_0^3$

comp:
- $\langle (S_1 ; S_2) , s_0 \rangle \to s_0^2$
  - comp: $\langle S_1 , s_0 \rangle \to s_0^1$
  - $\langle S_2 , s_0^1 \rangle \to s_0^2$
- comp: $\langle S_3 , s_0^2 \rangle \to s_0^3$

(*) $\langle S_1 ; (S_2 ; S_3) , s_0 \rangle \to s_0^3$

- comp: $\langle S_1 , s_0 \rangle \to s_0^1$
- comp: $\langle (S_2 ; S_3) , s_0^1 \rangle \to s_0^3$
  - comp: $\langle S_2 , s_0^1 \rangle \to s_0^2$
  - comp: $\langle S_3 , s_0^2 \rangle \to s_0^3$

ב-2 המקרים הגענו ל- s_0^3 כלומר כל פעם
הפעלנו statement מסוים על מצב מסוים (בנפרד)
(בנפרד) - כלומר ההפעלה של כל סטייטמנט
הייתה על מצב **זהה**.

שאלה 3

repeat S until b

@ הוספת כללים ל- nos:

(*) $[\text{repeat}^{tt}_{nos}] = \langle S, s\rangle \to s'$ iff $B[\![b]\!]s' = tt$

(*) $[\text{repeat}^{ff}_{nos}] = \dfrac{\langle S, s\rangle \to s', \ \langle \text{repeat } S \text{ until } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s\rangle \to s''}$ if $B[\![b]\!]s' = ff$

ⓑ להוכיח את השקילות:

repeat S until b ~ S; if b then skip else (repeat S until b)

נוכיח כיוון ראשון:

repeat S until b → S; if b then skip else (repeat S until b)

מקרה א': $B[\![b]\!] = tt$

$[\text{repeat}^{tt}_{ns}] \quad \dfrac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s\rangle \to s'}$

נוכיח: במקרה שלנו: $\langle \text{skip}, s'\rangle \to s'$ לכן:

נפעיל $[\text{if}^{tt}_{ns}]$:

$$\frac{\langle \text{skip}, s'\rangle \to s'}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat S until b)}, s'\rangle \to s'}$$

נפעיל $[\text{comp}_{ns}]$:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s', \ \langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat S until b)}, s'\rangle \to s'}{\langle S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat S until b)}, s\rangle \to s'}$$

~~der~~

מקרה ב': $B[\![b]\!] = ff$

$[\text{repeat}^{ff}_{ns}] = \dfrac{\langle S, s\rangle \to s', \ \langle \text{repeat } S \text{ until } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s\rangle \to s''}$

נניח:

נפעיל:

$$\frac{\langle \text{(repeat S until b)}, s'\rangle \to s''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat S until b)}, s'\rangle \to s''}$$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s',\ \langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } \ldots),s'\rangle \to s''}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots),s\rangle \to s''}$$

כלל גזירה:

$S;$ if b then skip else (repeat ...) $\longrightarrow$ repeat S until b

מקרה 1: נניח שקיים s' כך שמתקיים $B[\![b]\!]s' = tt$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s',\ \langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots),s'\rangle \to s''}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots),s\rangle \to s''}$$

נפעיל את הכלל על:

$$\frac{\langle \text{skip},s'\rangle \to s''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots),s'\rangle \to s''} \quad \text{if } B[\![b]\!]s' = tt$$

נשים לב כי $\langle \text{skip},s'\rangle \to s'$ מתקיים

ולכן מהדטרמיניזם של $s' = s''$!

נפעיל על [repeat S until b] ונקבל:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s'}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,s\rangle \to s' = s''}$$

כי $B[\![b]\!]s' = tt$

מקרה ב':

נניח שרצף s' כך שמתקיים $B[|b|]s' = ff$:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \quad \langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \ldots), s'\rangle \to s''}{\langle S; \text{ if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots), s\rangle \to s''}$$

לפי $[comp_{ns}]$.

וכלל על repeat מהתנאים:

$$\frac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat} \ldots), s'\rangle \to s''} \quad \text{if } B[|b|]s' = ff$$

וכלל:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \quad \langle \text{repeat } S \text{ until } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s\rangle \to s''}$$

וזה נכון כי $B[|b|]s' = ff$!

מש"ל.

(d.) הוספת כלל ל- SOS 8

[repeat sos] = <repeat S until b , S> ⇒ <S; if b then skip else (repeat S until b) , S>

מהרצאה ראינו שהוכחנו מסתיים $\underline{b}$.

שאלה 4:

ב: אם $\langle S_1,s\rangle \to^k s'$ אז מתקיים $\langle S_1;S_2,s\rangle \to^k \langle S_2,s'\rangle$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $k=0$:

מכיוון שאין אף גזירה באורך $k=0$ זה נכון באופן ריק.

צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור m כלשהו ונראה שהיא נכונה עבור $m+1$

כלומר:

נניח: $\langle S_1,s\rangle \to^m s' \Rightarrow \langle S_1;S_2,s\rangle \to^m \langle S_2,s'\rangle$

$\langle S_1,s\rangle \to^{m+1} s'$

נתייחס אליו בדרך שקולה:

$\langle S_1,s\rangle \to^1 \gamma \to^m s'$

כאשר γ היא קונפיגורציה שהושגה ע"י צעד אחד ממעבר $\langle S_1,s\rangle \to s'$ או ע"י השמת הצעד הראשון של S_1. כלומר:

מקרה א': $n=0$, $\gamma=s'$ כלומר: $\langle S_1,s\rangle \to s'$

ואז ניתן לבנות את גזירה כך:

$\langle S_1;S_2,s\rangle \to \langle S_2,s'\rangle$

מקרה ב': $\langle S_1,s\rangle \to^1 \langle S_1',s^*\rangle \to^m s'$

עבור S_1' כלשהו ומצב s^*.

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים כי

$\langle S_1';S_2,s^*\rangle \to^m \langle S_2,s'\rangle$

ולכן:

$\langle S_1;S_2,s\rangle \to^1 \langle S_1';S_2,s^*\rangle \to^m \langle S_2,s'\rangle$

$\left[\dfrac{\langle S_1,s\rangle \to^1 \langle S_1',s^*\rangle}{\langle S_1;S_2,s\rangle \to^1 \langle S_1';S_2,s^*\rangle}\right]$ ע"פ

משך!

שאלה 5:

אם $\langle S_1;S_2, s\rangle \xrightarrow{k} \langle S_2, s'\rangle$ אז לא בהכרח $\langle S_1, s\rangle \xrightarrow{k} s'$

דוגמא נגדית:

$$\underbrace{skip}_{S_1};\ \underbrace{while\ True\ do\ x=x+1}_{S_2}$$

נסתכל על הגזירה הבאה:

$\langle skip;\ while\ True\ do\ x=x+1,\ s_0\rangle$

$\downarrow k=1$

$\langle while\ True\ do\ x=x+1,\ s_0\rangle$

$\downarrow k=2$

$\langle while\ True\ do\ x=x+1,\ s_0[x\to 1]\rangle$

לסיכום:

$\langle S_1;S_2, s_0\rangle \xrightarrow{k=2} \langle S_2, s_0[x\to 1]\rangle$

אבל: אין גזירה חוקית ל:

$\langle S_1, s_0\rangle \xrightarrow{k=2}$

כי:

$\langle skip, s_0\rangle \rightarrow s_0$

ואז אפשר לעצור הלולאה!

ואז לעולם לא נקבל:

$\langle skip, s_0\rangle \not\rightarrow \underline{s_0}$!

שאלה 6:

$$\underbrace{\text{repeat } S \text{ until } b}_{S_1} \leftrightarrow \underbrace{S; \text{while } \neg b \text{ do } S;}_{S_2}$$

נוכיח:

$$\langle S_1, s\rangle \to s' \Leftrightarrow \langle S_2, s\rangle \to s'$$

מקרה ראשון: (1) $B[[b]]=tt$, $\langle S,s\rangle \to s'$

(2) $B[[b]]=ff$ נקבל לפי כלל $[\text{Repeat}]$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \quad \langle \text{repeat } S \text{ until } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, s\rangle \to s''}$$

מהצד השני!

עבור while נקבל עם s', s'' (נכונה כללית:
נפעיל [comp ns] ולאחר מכן [while]: (tt או ff).

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \quad \langle \text{while } \neg b \text{ do } S, s'\rangle \to s'}{\langle S; \text{while } \neg b \text{ do } S, s\rangle \to s''} \quad B[[\neg b]]=ff \quad (2)$$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \quad \dfrac{\langle S,s'\rangle \to s'', \quad \langle \text{while } \neg b \text{ do } S, s''\rangle \to s''}{\langle \text{while } \neg b \text{ do } S, s'\rangle \to s''}(1)}{\langle S; \text{while } \neg b \text{ do } S, s\rangle \to s''} \quad B[[\neg b]]=tt$$

נוכל לראות לפי ההוכחה שאנחנו מקבלים שקילות ולכן

$$\langle \text{reapet } S \text{ untib } b, s\rangle \to s' \leftrightarrow \langle S; \text{while } \neg b \text{ do } S, s\rangle$$

כה ממשיכים באינדוקציה.

נניח שעבור $n>1$ הפעלות.

עבור n הפעלות של כלל repeat ונפעיל n

הפעלות של כלל while + הפעלות כלל ה [comp]