UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2022/23

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Entrega de prácticas 2
18 de diciembre de 2022

Para poder corregir de forma adecuada las entregas de prácticas, seguiremos el siguiente proceso.

- Se creará una «Tarea» en el Aula Virtual correspondiente a esta entrega.
- Todos los programas de Octave que crees debes colocarlos en la carpeta `Biblioteca`, si son de propósito general, o bien en una carpeta denominada `Entrega2` si corresponden a programas que utilizan las funciones incluidas en `Biblioteca` y que resuelven distintos apartados concretos de la práctica.
- Una vez hayas terminado tu trabajo, debes crear un archivo `zip` de tu carpeta de trabajo con Octave y de forma que contenga al menos las dos carpetas anteriores. Si quieres incluir algún archivo de texto o pdf con comentarios u otras cuestiones puedes hacerlo en el mismo `zip`, pero fuera de la carpeta de trabajo de Octave.
- Finalmente debes subir este archivo `zip` a la Tarea del Aula Virtual.

Fecha de inicio: 19 de diciembre de 2022
Fecha de entrega: 12 de enero de 2023 (último plazo 15 de enero)
Se valorarán positivamente cualquier tipo de comentarios y observaciones acerca de los ejercicios realizados y de los resultados numéricos.

Ejercicio 1

Consideramos un péndulo, de longitud 1, que oscila sin rozamiento por la acción de la gravedad. La ecuación diferencial modelo para la dinámica del péndulo es

$$x''(t) = -g \cdot \operatorname{sen} x(t)$$

donde $x(t)$ denota el ángulo que forma la posición del péndulo en el instante t con la posición inferior de reposo y g es el valor de la aceleración gravitatoria. Una ecuación mucho más simple para las llamadas «pequeñas oscilaciones del péndulo» es

$$x''(t) = -g \cdot x(t)$$

que se obtiene simplemente aproximando $\operatorname{sen} x \approx x$, cuando $x \approx 0$, es decir cuando el ángulo de oscilación es pequeño (el péndulo oscila muy poco alrededor de la posición de equilibrio inferior).

Una característica esencial que distingue las dos ecuaciones es el periodo de las oscilaciones: en el caso de las pequeñas oscilaciones el periodo es el mismo para todas las soluciones (la ecuación es lineal) y este periodo es igual a

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}.$$

Para la ecuación del péndulo, el periodo de cada oscilación depende de la posición inicial, y viene dado por

$$T(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, siendo α el ángulo inicial del péndulo. Así el periodo viene dada como una integral de las denominadas integrales elípticas, que no son calculables en términos de funciones elementales.

Las tareas a realizar en este ejercicio son las siguientes.

1. Sea $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$. Dibuja en un panel la gráfica de la función $T(\alpha)/T_0$, es decir: el valor de $T(\alpha)/T_0$ en ordenadas y el de la amplitud inicial α en abscisas, en el intervalo $[0, 3]$.

2. Ahora debes aproximar mediante el método de la secante el valor $\overline{\alpha}$ tal que $T(\overline{\alpha}) = 1.5 \cdot T_0$. Incluye una marca en el gráfico anterior sobre el punto de la gráfica obtenido.

3. Comenta lo que consideres oportuno, en particular en torno a la razón de las posibles ventajas del método de la secante en este ejemplo.

Observaciones importantes

- La función $T(\alpha)$ está definida como una integral dependiente del parámetro α. Podríamos definir el integrando como una función de dos variables en Octave, pero eso impediría enviarla como argumento a cualquiera de los métodos de aproximación de integrales de los que disponemos. Para solventar este problema implementa el método de la secante para este caso directamente en el script `Ejercicio1.m`.
- Puedes utilizar el método de aproximación de la integral que prefieras, indicando el método elegido y las razones para dicha elección, si es que tienes alguna en particular.
- La función $T(\alpha)$ tiene una asíntota en $\alpha = \pi$ (es decir, la integral para $k = 1$ es divergente). Para que el método de la secante funcione elige condiciones iniciales que no conduzcan a valores mayores que π: comenta por escrito lo que consideres para explicar las razones de tu elección.

Ejercicio 2

Entre todos los métodos de aproximación de ceros de funciones disponemos de un método lento pero fiable y con convergencia global (el método de bisección) y de otros rápidos pero potencialmente poco fiables ya que pueden detenerse y presentan convergencia local (métodos de Newton y la secante, entre otros). Podemos preguntarnos si existe un método fiable y rápido. La realidad es compleja y puede decirse que no existe ese «algoritmo universal y perfecto». Sin embargo, se pueden crear algoritmos de tipo híbrido, que combinan dos o más algoritmos, resultando en un nuevo método más fiable y rápido que los métodos puros que lo componen. El más famoso de estos algoritmos híbridos es el conocido como algoritmo de Brent o de Brent-Dekker (1969, 1973) que combina los métodos de bisección, secante e interpolación cuadrática inversa (es el algoritmo que utiliza la función `fzero` de OCTAVE/MATLAB).

En este ejercicio vamos a implementar una versión simplista del algoritmo de Brent que combina únicamente los métodos de bisección y de la secante. El algoritmo tiene como objetivo determinar intervalos que van encajándose y encierran un cero, de forma análoga al método de la bisección, y procede de la siguiente forma. Partimos de un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, de manera que sabemos de la existencia de un cero de f en el intervalo (a, b). Se inicia entonces el método de la secante con puntos iniciales a y b y se reitera dicho método mientras las iteradas que proporciona se encuentren dentro del intervalo que encierra el cero, y, al mismo tiempo, las iteradas del método de la secante se utilizan para ir reduciendo dicho intervalo. Si en algún momento la iterada del método de la secante se sale del intervalo determinado en ese momento, entonces se realiza un paso de bisección antes de reiniciar el intento de la secante.

Con más detalle: en el algoritmo mantenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_k, b_k]$ tales que $f(a_k)f(b_k) < 0$ y una sucesión de aproximaciones x_k a un cero de f, siendo, en cada iteración, x_{k-1} y x_k los puntos utilizados para el cálculo de la secante. Los pasos del algoritmo son los siguientes:

- Partimos de $[a, b] = [a_1, b_1]$ con $f(a_1)f(b_1) < 0$ y tomamos $x_0 = a_1$, $x_1 = b_1$. Entonces se inicia con el proceso recursivo siguiente.
- Suponiendo establecidos el intervalo $[a_k, b_k]$ y los puntos x_{k-1} y x_k, sea c el valor que proporciona el método de la secante a partir de x_{k-1} y x_k.

  1. Si $c < a_k$ o $c > b_k$ se rechaza el valor de c y se toma como nuevo valor el punto medio de $[a_k, b_k]$, es decir, $c = a_k + \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ y

   a) si $f(a_k)f(c) < 0$ se toma el nuevo intervalo como $[a_k, c]$ y $x_k = a_k$, $x_{k+1} = c$;
   b) si $f(b_k)f(c) < 0$ se toma el nuevo intervalo como $[c, b_k]$ y $x_k = b_k$, $x_{k+1} = c$.

2. Si por el contrario $a_k \leq c \leq b_k$, se mantiene el valor de x_k y
   a) si $f(a_k)f(c) < 0$ se toma el nuevo intervalo como $[a_k, c]$ y $x_{k+1} = c$;
   b) si $f(b_k)f(c) < 0$ se toma el nuevo intervalo como $[c, b_k]$ y $x_{k+1} = c$;
3. Se incrementa el número de pasos a $k + 1$ y se reinicia el proceso.

Tareas a realizar:

1. Implementa el método anterior en la función `zeroshybrid.m` (que debes guardar en `/Biblioteca`):

   `[x,fx,npasos]=zeroshybrid(f,a,b,tol,maxit,imprime)`

   donde `f` es la función, `a` y `b` los extremos del intervalo inicial, `tol`, `maxit` e `imprime` tienen el significado habitual. Las variables de salida `x`, `fx` y `npasos` serán, naturalmente, la aproximación obtenida después del criterio de parada (`x`) el valor de la función `f` en dicha aproximación (`fx`) y el número de iteraciones realizadas. La función `zeroshybrid.m` debe realizar, además de implementar el algoritmo anterior, las siguientes tareas:

   a) Dibujar en un panel la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y en cada valor x_k se deben dibujar marcas en los puntos $(x_k, 0)$ y $(x_k, f(x_k))$. Estas marcas deben ser de un tipo y color diferente según se haya obtenido el punto mediante la aplicación del método de la secante o de la bisección.

   b) Cuando la variable `imprime` sea igual a `1` (o `true`) la tabla que imprima debe contener a cada paso: los valores de x_k, $f(x_k)$, a_k y b_k (véase la notación en la descripción anterior del algoritmo), así como la cadena `B` si x_k se ha obtenido mediante la bisección o `S` si se ha obtenido mediante la secante.

2. A continuación vamos a comparar este algoritmo con otros ya implementados. En todos los casos utiliza la tolerancia 10^{-12} y los mismos puntos iniciales indicados como intervalo inicial. Indica por escrito lo que consideres oportuno: qué métodos funcionan mejor, qué diferencias hay entre unos y otros, etc.

   a) Para la función $f(x) = \frac{20x-1}{19x}$, con intervalo inicial $[0.01, 1]$, compara con el método de la secante.

   b) Para la función $f(x) = x^2 - (x-1)^{20} + \frac{1}{2}$, con intervalo inicial $[0, 1]$, compara con los métodos de bisección y de la secante.

   c) Para la función $f(x) = e^{-4x} - \frac{1}{10}$, con intervalo inicial $[0, 5]$, compara con los métodos de la falsa posición y de la secante. En particular, a partir de los intervalos que encierran a la raíz, comenta lo que consideres acerca de la diferencia entre el método híbrido y el de la falsa posición.