(1) Consideramos la ecuación $x^2 + 4.002\cdot 10^{-1}x + 0.8\cdot 10^{-4} = 0$, denotemos $4.002\cdot 10^{-1}$ como b y $0.8\cdot 10^{-4}$ como c.

Las soluciones son $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$. De ellas la de menor magnitud (menor valor absoluto) será

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

donde claramente se observa que aparecerá el fenómeno de cancelación substractiva, pues $\sqrt{b^2-4c} \approx b$.

Para evitar este problema, la raíz la calcularemos en la forma

$$\bar{x} = \frac{4c}{2\left(b+\sqrt{b^2-4c}\right)}$$

que no plantea el problema de pérdida de dígitos significativos.

Así, calculando con cuatro dígitos en mantisa y redondeo simétrico:

$$fl(4c) = fl(3.2\cdot 10^{-4}) = 3.2\cdot 10^{-4}$$

$$fl(b^2) = fl(16.016004\cdot 10^{-2}) = 1.602\cdot 10^{-1}$$

$$fl(b^2-4c) = fl(1.602\cdot 10^{-1} - 3.2\cdot 10^{-4}) = fl(1.602\cdot 10^{-1} - 0.0032\cdot 10^{-1})$$
$$= fl(1.5988\cdot 10^{-1}) = 1.599\cdot 10^{-1}$$

$$fl\left(\sqrt{b^2-4c}\right) = fl(3.998749\ldots\cdot 10^{-1}) = 3.999\cdot 10^{-1}$$

$$fl\left(b+\sqrt{b^2-4c}\right) = fl(4.002\cdot 10^{-1} + 3.999\cdot 10^{-1}) = 8.001\cdot 10^{-1}$$

$$fl\left(\frac{4c}{2(b+\sqrt{b^2-4c})}\right) = fl\left(\frac{3.2\cdot 10^{-4}}{2\otimes 8.001\cdot 10^{-1}}\right) = fl\left(\frac{3.2\cdot 10^{-4}}{16.00\cdot 10^{-1}}\right)$$
$$= 2.000\cdot 10^{-4}$$

¡Es una solución exacta! (curioso... pero casualidad...)

(2) Según la fórmula del error de la interpolación polinomial, si $P_n(x)$ es el polinomio interpolador de f en los puntos de abscisas $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ para cada $x \in [a,b]$ existe $\xi_x \in (a,b)$ tal que:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

En este caso, tomando $x=0$, existe $\xi_0 \in [0,1]$

$$f(0) - p_n(0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} (-1)^{n+1} x_0 \cdot x_1 \cdots x_n$$

Teniendo en cuenta que las abscisas x_i son ahora $1, a, a^2, \dots, a^n \in [0,1]$, tenemos

$$f(0) - P_n(0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} (-1)^{n+1} a \cdot a^2 \cdots a^n =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} (-1)^{n+1} a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

donde hemos hecho uso de la conocida igualdad $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ahora, derivamos la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

Por tanto:

$$|f(0) - P_n(0)| = \frac{1}{(1+\xi_0)^{n+2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

y el límite de esta última cantidad, cuando n tiende a $+\infty$, es cero claramente, pues $a \in (0,1)$.

(3) Debemos calcular el polinomio interpolador de Hermite de una función f en los puntos

$$\{(a,f(a)),\ (b,f(b)),\ (c,f(c)),\ (c,f'(c))\}$$

Como dice la indicación, utilizaremos $h = c-a = b-c = \frac{b-a}{2}$, donde como dice el enunciado $c = \frac{a+b}{2}$.

El cálculo puede ser complicado si se eligen las abscisas en orden, es decir repitiéndolas convenientemente, si se toman los nodos en la forma a, c, c, b. Sin embargo el cálculo se simplifica si los tomamos en la forma a, b, c, c.
Veamos la tabla de diferencias divididas;

$$\begin{array}{c|cccc}
a & f(a) & & & \\
b & f(b) & \dfrac{f(b)-f(a)}{2h} & & \\
c & f(c) & \dfrac{f(c)-f(b)}{-h} & \dfrac{\frac{f(b)-f(c)}{h} - \frac{f(b)-f(a)}{2h}}{h} = & \dfrac{f(b)-2f(c)+f(a)}{2h^2} \\
c & f(c) & f'(c) & \dfrac{f'(c) - \frac{f(b)-f(c)}{h}}{-h} = & \dfrac{f(b)-f(c)-hf'(c)}{h^2}
\end{array}$$

y el último coeficiente (que no cabe en la tabla anterior):

$$p[a,b,c,c] = \frac{1}{2h^3}\left[f(b)-f(a)-2hf'(c)\right]$$

y el polinomio de Hermite es:

$$P_3(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2h}(x-a) + \frac{f(b)-2f(c)+f(a)}{2h^2}(x-a)(x-b) + \frac{f(b)-f(a)-2hf'(c)}{2h^3}(x-a)(x-b)(x-c)$$

Ahora, el método de aproximación propuesto es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_3(x)\,dx$$

Aquí es donde una reflexión teórica sencilla nos aclara todo: el polinomio $p_3(x)$ lo escribimos como:

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{f(b) - f(a) - 2f'(c)}{2h^3}(x-a)(x-b)(x-c).$$

Pero, ¿qué polinomio es $p_2(x)$? Es el polinomio interpolador en las abscisas a, c y b, por tanto la integral

$$\int_a^b p_2(x)\,dx$$

nos dará la regla (simple) de Simpson. Así la regla propuesta por el estudiante es una modificación de la regla de Simpson:

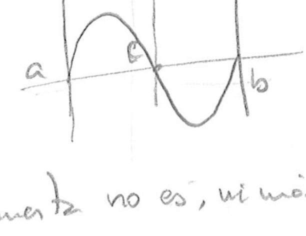
$$\int_a^b f \approx \int_a^b p_3(x)\,dx = \int_a^b p_2(x)\,dx + \int_a^b R\,(x-a)(x-b)(x-c)\,dx$$

c.d.
$$\int_a^b f \approx S_2(f) + R\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx$$

siendo $S_2(f)$ la regla de Simpson, $S_2(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)$, y R dando el coeficiente, $\frac{f(b)-f(a)-2f'(c)}{2h^2}$.

Ahora bien,
$$\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx = 0,$$

para comprobarlo no hace falta hacer cálculos (sí se quiere un cambio de variable), pues la función $(x-a)(x-b)(x-c)$ es impar en $x-c$, e.d. es simétrica respecto al punto $(c,0)$.



Por tanto, la regla propuesta no es, ni más ni menos, que la regla simple de Simpson. Esto da una nueva luz sobre el hecho de que la regla de Simpson tenga mayor precisión de la que cabría esperar: es un método de interpolación sobre polinomios de grado 3, (aunque inicialmente se defina sobre polinomios de grado 2)

(4) Consideremos la función $g(x) = f(x) - x = e^{-x^2} - x$.

Probar que f tiene un único punto fijo equivale a probar que $g(x)$ tiene un único cero.

Ahora $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ luego g tiene un cero en $(0,1)$.

Además, si $x < 0$, $g(x) > 0$, por tanto no puede tener más ceros en $(-\infty, 0)$.

Ahora, $g'(x) = -2x e^{-x^2} - 1 < 0$ para todo $x > 0$. luego $g(x)$ es estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Así pues el punto fijo de $f(x)$ es único.

Veamos si el intervalo $[0.1]$ es adecuado.

$f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente en $[0, +\infty)$, así basta evaluar f en los extremos de $[0,1]$:

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 1/e \in (0,1) \quad , \text{luego} \quad f([0,1]) = [f(1), f(0)] \subset [0,1].$$

Ahora estudiamos si f es contractiva en $[0,1]$:

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \leq 0 \quad \text{si } x \in [0,1].$$

Para estudiar los valores extremos de f' calculamos su derivada:

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1) e^{-x^2}$$

Así $f''(x) = 0$ si y solo si $x = \pm 1/\sqrt{2}$; restringiéndonos al intervalo que nos interesa el único punto crítico de f' es $1/\sqrt{2} \in (0,1)$, y tenemos que $f'(x)$ decrece en $[0, 1/\sqrt{2}]$ y crece en $[1/\sqrt{2}, 1]$, por tanto:

$$|f'(1/\sqrt{2})| = \max\{|f'(x)| : x \in [0,1]\}$$

y $$|f'(1/\sqrt{2})| = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \approx 0.8577\ldots$$

Así f es contractiva en $[0,1]$, y tomamos como constante de Lipschitz el valor $c = 0.8578$.

(b) Para estimar el número de iteraciones, recurrimos a la estimación teórica que nos da el teorema del punto fijo de Banach:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{c^n}{1-c} |x_1 - x_0| .$$

En este caso, $x_0 = 1/2$, $x_1 = f(1/2) = e^{-1/4} \approx 0.7788007\ldots$

luego $|x_1 - x_0| \leq |0.7789 - 0.5| = 0.2789$.

Y debemos tener

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{0.8578^n}{1-0.8578} \cdot 0.2789 \leq 10^{-5} .$$

e.d.

$$n \log(0.8578) \leq \log\left(\frac{10^{-5} \cdot 0.1422}{0.2789}\right)$$

o bien,

$$n \geq \log\left(\frac{10^{-5} \cdot 0.1422}{0.2789}\right) \frac{1}{\log(0.8578)} \approx 79.45$$

luego n debe ser mayor o igual que 80.

Usando la calculadora:

$0.5 \ \boxed{=}$

$\exp(-\boxed{ANS}^2) \ \boxed{=}$

obtenemos, p.ej. $x_{76} = 0.65291930\ldots$

$x_{77} = 0.6529180$

por tanto el nº de iteraciones para obtener el punto fijo con un error inferior a 10^{-5} es en la práctica del orden de 76.