1. Trabajando con 5 dígitos en mantisa, tenemos los redondeos:

$$p = 6.13538 \longrightarrow fl(p) = 6.1354$$
$$q = 6.13524 \longrightarrow fl(q) = 6.1352$$

Entonces: $fl(p) - fl(q) = 2.0 \cdot 10^{-4}$, que es un número de nuestra máquina, es decir,

$$p \ominus q := fl\left(fl(p) - fl(q)\right) = 2.0000 \cdot 10^{-4}.$$

De acuerdo con la proposición 1.25, dada la base $b = 10$, tenemos:

$$1 - \frac{fl(q)}{fl(p)} = 3.2597\ldots \cdot 10^{-5}, \quad \text{es decir:}$$

$$10^{-5} < 1 - \frac{fl(q)}{fl(p)} < 10^{-4},$$

luego, según dicha proposición, al hacer la diferencia $p \ominus q$ se pierden al menos cuatro dígitos significativos (y como máximo se pierden cinco).

Calculando con toda la precisión: $p - q = 1.4 \cdot 10^{-4}$, luego el error relativo en el cálculo de $p - q$ será:

$$e_r = \frac{|p - q - (p \ominus q)|}{|p - q|} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{1.4 \cdot 10^{-4}} \approx 4.2857 \cdot 10^{-1} < 5 \cdot 10^{-1}$$

y $e_r > 5 \cdot 10^{-2}$, luego la aproximación tiene sólo una cifra significativa de precisión.

(2) Debemos calcular el polinomio interpolador de la función inversa $(f^{-1}(y))$ de f, en los puntos de la gráfica de f dados por:

$$(x_{n-2}, f(x_{n-2})), \ (x_{n-1}, f(x_{n-1})), \ (x_n, f(x_n)).$$

Así pues, nuestra tabla de valores será:

$$(y_{n-2}, x_{n-2}), \ (y_{n-1}, x_{n-1}), \ (y_n, x_n)$$

donde para simplificar (y evitar confusiones) hemos escrito: $y_i = f(x_i)$.

Procedemos con las diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|ccc}
y_{n-2} & x_{n-2} & & \\
 & & \dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}} & \\
y_{n-1} & x_{n-1} & & \dfrac{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} - \dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}}{y_n-y_{n-2}} \\
 & & \dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} & \\
y_n & x_n & &
\end{array}$$

Por tanto el polinomio interpolador será:

$$q(y) = x_{n-2} + \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}(y-y_{n-2}) + \frac{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} - \dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}}{y_n-y_{n-2}}(y-y_{n-2})(y-y_{n-1})$$

El proceso iterativo consiste entonces en tomar x_{n+1} como $q(0)$, pues es una forma de aproximar el cero $\bar{x}$ de f, pues $f(\bar{x})=0$ es equivalente a $f^{-1}(0)=\bar{x}$, y esperamos que $q(y)$ aproxime a $f^{-1}(y)$:

$$x_{n+1} := q(0) = x_{n-2} - \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}\, y_{n-2} + \frac{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} - \dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}}{y_n-y_{n-2}}\, y_{n-1}\, y_{n-2}$$

o bien, sustituyendo $f(x_i)$ por y_i:

$$x_{n+1} = x_{n-2} - f(x_{n-2})\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})} + f(x_{n-2})f(x_{n-1})\frac{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} - \dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}}{f(x_n)-f(x_{n-2})}$$

Para el ejemplo propuesto: $f(x) = x^3 - x - 1$, nos proponen los puntos iniciales

$x_0 = 2$, $x_1 = 1.7$, $x_2 = 1.4$.

Entonces:

$$f(x_0) = f(2) = 5$$
$$f(x_1) = f(1.7) = 2.213$$
$$f(x_2) = f(1.4) = 0.344$$

de donde (con la calculadora):

$$x_3 = 2 - 5\,\frac{(-0.3)}{2.213-5} + 5\cdot 2.213\,\frac{\dfrac{-0.3}{0.344-2.213} - \dfrac{(-0.3)}{2.213-5}}{0.344-5} =$$

$$= 2 - 5\,\frac{0.3}{2.787} + 11.065\,\frac{\dfrac{0.3}{1.869} - \dfrac{0.3}{2.787}}{(-4.656)} \approx$$

$$\approx 2 - 5\cdot 0.107643 + 11.065\,\frac{0.160514 - 0.107643}{(-4.656)} \approx$$

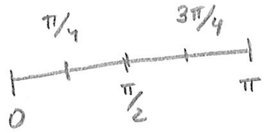
$$\approx 1.336139$$

(3) Recordamos la regla compuesta de Simpson: en $[a,b]$ consideramos los $2n+1$ puntos equidistribuidos
$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{2n}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n$$

entonces aproximamos:
$$\int_a^b f = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k}) + f(x_{2n})\right) + E_n$$
siendo $h = \frac{b-a}{2n}$ y el error E_n viene dado por:
$$E_n = -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi_n) = -\frac{(b-a)^5}{2880\, n^4} f^{(4)}(\xi_n)$$

para cierto punto $\xi_n \in (a,b)$.

En nuestro caso: $n=2$, $[a,b] = [0,\pi]$, luego $h = \frac{\pi}{4}$ y la aproximación será:
$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen}^2 0 + 4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}^2\pi\right) =$$
$$= \frac{\pi}{12}\left(0 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$



¡que es el valor exacto de la integral!

Bueno, en realidad el ejercicio nos pedía calcular, en primer lugar, una estimación del error. Vamos a ello:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x$$
$$f'(x) = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}(2x)$$
$$f''(x) = 2\cos(2x)$$
$$f'''(x) = -4\operatorname{sen}(2x)$$
$$f^{(4)}(x) = -8\cos(2x)$$

Por tanto, $\forall x \in [0,\pi]$ $\quad |f^{(4)}(x)| \leq 8$ y tenemos:

$$|E_2| \le \left|-\frac{\pi^5}{2880\cdot 16}\right| \left|f^{(4)}(\xi_2)\right| \le \frac{\pi^5}{2880\cdot 16}\cdot 8 = \frac{\pi^5}{5760} \lessapprox 0.05313$$

Intuición (o explicación) de que la regla de Simpson proporcione en este caso un valor exacto.

La razón es fundamentalmente una cuestión de simetría.

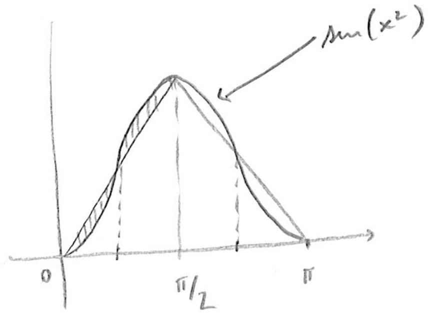
En primer lugar $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ es simétrica respecto al eje $x = \pi/2$. Pero, además, y esto es esencial, el polinomio interpolador en los puntos $(0, f(0))$, $(\pi/4, f(\pi/4))$ y $(\pi/2, f(\pi/2))$ es una recta (y también lo es en los otros tres puntos).

En efecto, calculemos este polinomio:

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\pi/4 & \frac{1}{2} & \frac{1/2}{\pi/4} = \frac{2}{\pi} & \\
\pi/2 & 1 & \frac{2}{\pi} & 0
\end{array}$$

e.d. $P_2(x) = \frac{2}{\pi}x$

Ahora hacemos un gráfico:



Así, tanto en el intervalo $[0, \pi/2]$, como en $[\pi/2, \pi]$ la regla de Simpson simple da un valor exacto, porque como vemos el área que excede la función respecto a la recta interpoladora en $[\pi/4, \pi/2]$ es la misma que excede la recta respecto a la función en $[0, \pi/4]$, es decir:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x \, dx = 0$$

Esto es fácil de comprobar:

De hecho vamos a verificar que:

$$\int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{2}{\pi}x\right) dx = -\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{2}{\pi}x\right) dx$$

pues haciendo el cambio $t = \pi/2 - x$:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{2}{\pi}x\right) dx = -\int_{\pi/4}^{0} \left(\operatorname{sen}^2(\pi/2 - t) - \frac{2}{\pi}(\pi/2 - t)\right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t - 1 + \frac{2}{\pi}t\right) dt = -\int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen}^2 t - \frac{2}{\pi}t\right) dt .$$

(c) $\quad |E_n| \leq \dfrac{8 \cdot \pi^5}{2880 \cdot n^4} \leq 5 \cdot 10^{-7}$

luego $\quad n^4 \geq \dfrac{10^7 \cdot \pi^5 \cdot 8}{5 \cdot 2880} = \dfrac{10^7 \cdot \pi^5}{360} \approx 1700109.359$

Así, debe ser $n \geq \sqrt[4]{\dfrac{10^7 \cdot \pi^5}{360}} \approx 36.10$

Luego deberíamos elegir $n \geq 37$.

(4) Sea $f(x)=e^x-\operatorname{arctg} x-3/2$.

(a) Tenemos $f(0)=1-3/2<0$

y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\operatorname{arctg} x-3/2\right)=+\infty$. $\left(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}\right)$

Por tanto f tiene algún cero en $(0,+\infty)$.

Para demostrar la unicidad del cero probaremos que f es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{1+x^2},$$ luego $f'(x)>0$ para todo $x>0$, pues

$e^x>1$ si $x>0$ y $0<\frac{1}{1+x^2}<1$ si $x>0$.

Obsérvese que $f(1)=e-\operatorname{arctg} 1-3/2>0$ (calculadora), lo que muestra que el único cero de f está en $(0,1)$, y esto puede ser útil en lo que sigue.

(b) Hay al menos dos formas de encontrar el cero de f como punto fijo de una función $g(x)$. Veamos dos:

$$f(x)=0 \iff x=\log\left(\operatorname{arctg} x+3/2\right) \iff x=\operatorname{tg}\left(e^x-3/2\right)$$

Sean $g_1(x)=\log\left(\operatorname{arctg} x+3/2\right)$ y $g_2(x)=\operatorname{tg}\left(e^x-3/2\right)$

Sabemos que el cero de f (por tanto el punto fijo de g_1 o g_2) está en $(0,1)$.

Veamos si alguna de estas funciones tiene como dicho punto fijo a un atractor.

$$g_1'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\left(\operatorname{arctg} x+3/2\right)}$$ así $g_1'(x)>0$ para todo $x\geq 0$.

Pero además $g_1'(x)$ es claramente decreciente en $(0,+\infty)$ (pues ambos factores en el denominador son crecientes).

Así, si $x\in[0,1]$ se verifica $g'(1)\leq g'(x)\leq g'(0)$

Con la calculadora tenemos $g'(1)\approx 0.218$ y $g'(0)=\frac{2}{3}=0,\hat{6}$, por tanto, g_1 es una aplicación contractiva en $[0,1]$.

Sin embargo $g_2(x)$ no lo es. En efecto,

$$g_2'(x) = e^x\left(1 + tg^2\left(e^x - 3/2\right)\right),$$

luego $g_2'(x) > 1 \quad \forall x \in [0,1]$ $\left(1 + tg^2(e^x - 3/2) > 1\right.$ salvo cuando $x = c = \log 3/2$, pero en ese caso $\left.e^c > 1\right)$.

Por tanto el punto fijo de g_2 en $(0,1)$ no puede ser un atractor.

Así pues nos quedamos con $g_1(x)$. Ya hemos probado que:

$$0.218 \simeq g_1'(1) \leq g_1'(x) \leq \frac{2}{3} \quad \text{y que } g_1(x) \text{ es creciente.}$$

Ahora, por ser creciente $g_1([0,1]) \subset [g_1(0), g_1(1)]$, y

$g_1(0) = \log\frac{3}{2} \gtrapprox 0.405$ y $g_1(1) = \log\left(\pi/4 + 3/2\right) \lessapprox 0.8266$, luego

$g_1([0,1]) \subset [0,1]$ y $|g_1'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1$ para todo $x \in [0,1]$, es decir,

g_1 verifica las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach.

Utilizando la calculadora, con punto inicial $x_0 = 0$:

$0 \boxed{=}$

$\log\left(\text{arctg}\boxed{\text{ANS}} + \frac{3}{2}\right), \boxed{=}$

e iterando, se obtiene un valor que se estabiliza en

$$\bar{x} = 0.7676532662$$

después de 17 iteraciones

Para obtener un error inferior a $5 \cdot 10^{-5}$ utilizamos la estimación conocida y demostrada en el teorema del punto fijo:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_0 - x_1|$$

En este caso:

$$x_1 = g_1(0) = \log(\operatorname{arctg} 0 + 3/2) \lessapprox 0.4055 \quad \text{y} \quad c = 2/3.$$

luego $$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{(2/3)^n}{1 - 2/3} 0.4055 < 5 \cdot 10^{-5}$$

luego, $$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0.4055}$$ o bien:

$$n \cdot \log\left(\frac{2}{3}\right) < \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0.4055}\right) \approx -10.0995$$

e.d. $$n > \frac{1}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0.4055}\right) \approx 24.9$$

Así n debe ser mayor o igual que 25 (según la predicción teórica), aunque ya hemos visto que con $n = 17$ se alcanza mayor precisión.

El orden de convergencia es 1 (pues $g_1'(\bar{x}) \neq 0$, teorema 4.32).

(c) Apliquemos el algoritmo de Newton:

$$f(x) = e^x - \operatorname{arctg} x - 3/2$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para } x \in (0, +\infty).$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - \operatorname{arctg} x_n - 3/2}{e^{x_n} - \frac{1}{1+x_n^2}} \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Observemos que $f''(x) = e^x + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

Así, f cambia de signo en $[0,1]$, f es creciente y $f''(x) > 0$ $\forall x \in [0,1]$

Además $f(x_0) f''(x_0) > 0$, luego el teorema global (4.14) nos garantiza la convergencia del método.

Con la calculadora obtenemos:

$x_1 = 0.80485\ldots$

$x_2 = 0.76884\ldots$

$x_3 = 0.767654\ldots$

$x_4 = 0.7676532662$

El orden de convergencia es 2 pues $f''(\bar{x}) > 0$.