Prof. S. Sánchez-Pedreño

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas

TEORÍA

1. **(1.5 puntos)** Enuncia y demuestra el teorema que proporciona el error en la aproximación de una función por polinomios interpoladores de Lagrange.
2. **(1.5 puntos)** Enuncia y demuestra el teorema de convergencia local para el método de aproximación de raíces de Newton.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia. e-mail: pedreno@um.es

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas

1. **(0.75 puntos)** Consideremos los números $p = 6{,}13538$ y $q = 6{,}13524$. Trabajando en una máquina decimal con cinco dígitos en mantisa, deseamos calcular $p \ominus q := \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(p) - \mathrm{fl}(q))$ ¿qué nos dice la teoría acerca del número de dígitos significativos que se perderán por cancelación?

   Calcula $p \ominus q$ en dicha máquina: mide el error relativo cometido al aproximar $p - q$ por $p \ominus q$ e indica cuántas cifras significativas de precisión tiene la aproximación.

2. **(2 puntos)** Los métodos de interpolación inversos para aproximación de raíces de $f(x) = 0$ consisten en iterar el proceso siguiente: a partir de un conjunto de $k+1$ aproximaciones $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ de una raíz, se calcula $q_k(y)$, el polinomio interpolador de grado k de la función $f^{-1}(y)$ en los nodos correspondientes a dichos puntos, y se toma $x_{n+1} = q_k(0)$ como nueva aproximación de la raíz.

   Calcula la expresión de x_{n+1} en términos de x_{n-2}, x_{n-1} y x_n que se obtiene mediante este proceso a partir de tres puntos iniciales x_0, x_1 y x_2, es decir, en el caso $k = 2$ o, dicho de otra forma, de interpolación cuadrática (inversa).

   Dada $f(x) = x^3 - x - 1$ y los valores $x_0 = 2$, $x_1 = 1{,}7$ y $x_2 = 1{,}4$, calcula el valor de x_3 obtenido mediante el método anterior.

3. **(1.75 puntos)** Tratamos de aproximar la integral

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

   a) Utilizando la regla Simpson compuesta con 2 divisiones del intervalo $[0,\pi]$, calcula en primer lugar la estimación teórica del error en dicha aproximación.

   b) A continuación calcula la aproximación, ¿qué valor obtienes? ¿Podrías dar alguna intuición o cálculo que explique el resultado obtenido?

   c) Estima el número de divisiones necesarias para obtener una aproximación con dicha regla con un error inferior a $5 \cdot 10^{-7}$.

4. **(2.5 puntos)** Considera la ecuación $e^x - \operatorname{arc\,tg} x - 3/2 = 0$.

   a) Demuestra que tiene una única raíz positiva.

   b) Expresa dicha raíz como punto fijo de una función $g(x)$, a determinar, y establece un intervalo de definición de g, de modo que, para $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = g(x_n)$, la sucesión $(x_n)_n$ tienda a la raíz. Aproxima el valor de dicha raíz y establece un valor de n que asegure en la iteración n-ésima un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$. ¿Cuál es el orden de convergencia?

   c) Aproxima la misma raíz mediante el método de Newton, a partir del valor inicial $x_0 = 1$, justificando a priori que el método convergerá. ¿Cuál es el orden de convergencia?

IMPORTANTE

1. Para entregar el examen deberás enviar en la tarea del Aula Virtual todo tu proyecto del curso comprimido.

2. **También debes entregar el enunciado del examen con las anotaciones manuscritas que se solicitan. Cualquier comentario, observación o justificación que desees añadir debes incluirla en estas hojas: se valorarán muy positivamente**

3. Durante la prueba sólo está permitido el uso en los ordenadores del administrador de archivos (incluyendo un programa de compresión de archivos que puede ser externo al propio administrador), el programa Octave y el navegador para acceder al Aula Virtual. No se podrá acceder a ninguna herramienta del Aula Virtual distinta de la herramienta «Tareas».

4. El uso de cualquier plataforma de mensajería o el acceso a nubes que permitan compartir ficheros supondrá la exclusión de la prueba.

5. Los estudiantes sólo podrán usar portátiles personales si previamente dan su consentimiento para que durante el examen se pueda acceder a la lista de tareas que se están ejecutando en su ordenador y al historial de navegación y no activan el modo de navegación privada.

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Ejercicio 1 (2.5/7 puntos)

Dados tres puntos iniciales x_0, x_1 y x_2, la fórmula recurrente

$$x_{n+1} = x_{n-2} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-2}) + \frac{\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}{f(x_n) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}) f(x_{n-2})$$

proporciona el método de aproximación de ceros de $f(x)$ mediante la interpolación inversa en tres puntos.

1. Implementa en `/Biblioteca` la función

   `interpInv3ptos(f,x0,x1,x2,tol,maxit)`

   que devuelva la aproximación de un cero de `f`, a partir de los puntos iniciales `x0`, `x1` y `x2`, así como el número de pasos de la iteración realizados. El significado de `tol` y `maxit` es el habitual: tolerancia para un criterio de parada y número máximo de iteraciones.

2. Aproxima, con una tolerancia de 10^{-15}, el cero de la función $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x - \frac{1}{4}$, a partir de las aproximaciones iniciales $x_0 = 4$, $x_1 = 3{,}5$ y $x_2 = 3$. Anota el número de iteraciones y el valor obtenido de la aproximación.

3. Aplica el mismo método para aproximar el cero $x = 2$ de la función $g(x) = (x-2)^2 \log(2 + x^2)$, con valores iniciales $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$ y $x_2 = 0{,}4$. Utiliza una tolerancia de 10^{-12}. Anota el número de iteraciones y el valor obtenido de la aproximación.

4. Comenta lo que consideres oportuno, en torno al caso del apartado anterior y, en particular, acerca del número de iteraciones en cada uno de los ejemplos.

Ejercicio 2 (2.5/7 puntos)

Queremos aproximar, mediante el método de Newton, las soluciones de una ecuación del tipo

$$F(x) = 0,$$

cuando $F(x)$ es una primitiva de cierta función $f(x)$, es decir, para

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

La implementación del método que ya tenemos no es eficiente, ni preciso, puesto que una vez calculada una iteración x_n, para calcular x_{n+1} debe aproximar el valor de

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\,dt$$

en lugar de aproximar dicha integral de forma incremental, mediante

$$\int_a^{x_n} f(t)\,dt = \int_a^{x_{n-1}} f(t)\,dt + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt = F(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$$

1. Modifica el script `newton.m`, guardando las modificaciones en el nuevo script `newtonPrimitiva.m` en `/Biblioteca`. El nuevo script debe ser de la forma

   `newtonPrimitiva(G,f,x0,F0,tol,maxit,imprime)`

   donde

   - `f` es la función considerada antes;
   - la función `G` debe ser una función de dos variables dada por
     $$G(x, y) = \int_x^y f(t)\,dt.$$
   - `x0` es el punto inicial para la iteración de Newton y `F0` será el valor de la primitiva en `x0`, es decir, $\mathtt{F0} = \int_a^{\mathtt{x0}} f(t)\,dt$.
   - El resto de las variables tienen el significado habitual.

   Las aproximaciones de todas las integrales se realizarán con la regla de cuadratura compuesta que tu elijas.

2. Considera las funciones
   $$f(t) = \operatorname{sen}(t^2) \quad \text{y} \quad F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$
   Representa en una única ventana las gráficas de $f(x)$ y $F(x)$ en el intervalo $[0, 5]$. Añade al panel gráfico una recta horizontal $y = \frac{1}{2}$.

3. Sobre la gráfica observa las soluciones de la ecuación $F(x) = \frac{1}{2}$ y trata de predecir cómo elegir condiciones iniciales del método de Newton que permitan aproximar todas esas soluciones. Explica por escrito la idea.

4. Obtén una aproximación de las raíces anteriores utilizando `newtonPrimitiva`: anota los valores obtenidos y el número de iteraciones para cada uno de ellos. Dibuja una marca en cada uno de los puntos de la gráfica de F de abscisas iguales a las aproximaciones.

Ejercicio 3 (2/7 puntos)

La integral impropia

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^{2/3}}$$

es convergente. Intentamos aproximar su valor.

1. Utiliza un método de aproximación que evite el problema de la singularidad en $x = 0$ del integrando. Anota el método utilizado y la aproximación obtenida.

2. Realiza un cambio de variable adecuado para eliminar la singularidad y aproxima el valor de la integral resultante, indicando todo por escrito.

3. Podemos escribir el integrando en la forma

$$\frac{e^x}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} + \frac{e^x - 1}{x^{2/3}}.$$

   Indica por escrito qué ventaja crees que tiene esta forma. Utiliza esta descomposición para obtener un nuevo valor aproximado de la integral inicial.