Prof. S. Sánchez-Pedreño

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas

Teoría

1. **(1.5 puntos)** Explica qué son los polinomios de Chebyshev y sus propiedades, y cuál es su interés en la teoría de la interpolación polinomial. Demuestra la propiedad de minimización de la norma infinito de los polinomios mónicos en $[-1, 1]$.
2. **(1.5 puntos)** Deduce las reglas del trapecio simple y compuesta para aproximación de integrales, demostrando la expresión del error en la aproximación.

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas

1. **(1 punto)** Calcula con la mayor precisión posible la raíz de menor magnitud de la ecuación

$$x^2 + 4{,}002 \cdot 10^{-1}\, x + 0{,}8 \cdot 10^{-4} = 0$$

trabajando en coma flotante con cuatro dígitos en mantisa (y redondeo simétrico).

2. **(2 puntos)** Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y sea $a \in (0,1)$. Para cada n, sea $p_n(x)$ el polinomio que interpola a la función f en las abscisas $a^n, a^{n-1}, \ldots, a^2, a, 1$. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0) = 1.$$

3. **(2 puntos)** Un estudiante ha tenido la idea siguiente: considerando el polinomio interpolador de Hermite, $q_3(x)$, que interpola a la función $f(x)$ en los datos $\{(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c)), (c, f'(c))\}$ siendo $c = \frac{a+b}{2}$, aproximaremos la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ por la integral de $q_3(x)$.

   Pero el estudiante no está seguro de si su idea es buena o no... Obtén la regla de cuadratura a la que conduce este método y demuestra a este estudiante que su regla ya es bien conocida, ¿de qué regla se trata? ¿Te sugiere esto alguna idea sobre dicha regla?

   Indicación. Para simplificar la tarea, utiliza la notación $h = c - a = b - c$. Reflexiona antes de abordar el ejercicio: hay alguna idea que puede reducir los cálculos...

4. **(2 puntos)** Considera la función $f(x) = e^{-x^2}$:

   a) Demuestra que tiene un único punto fijo y encuentra un intervalo en el que se pueda recurrir al teorema del punto fijo de Banach para aproximarlo.

   b) Estima el número de iteraciones de la iterada funcional $x_n = f(x_{n-1})$, comenzando en $x_0 = 0{,}5$, que garantizarán un error en la aproximación al punto fijo menor que 10^{-5}. Con la ayuda de la calculadora aproxima el punto fijo (con la precisión anterior) indicando el número de iteraciones que han sido necesarias.

Prof. S. Sánchez-Pedreño

IMPORTANTE

1. Para entregar el examen deberás enviar en la tarea del Aula Virtual todo tu proyecto del curso comprimido.

2. **También debes entregar el enunciado del examen con las anotaciones manuscritas que se solicitan. Cualquier comentario, observación o justificación que desees añadir debes incluirla en estas hojas: se valorarán muy positivamente**

3. Durante la prueba sólo está permitido el uso en los ordenadores del administrador de archivos (incluyendo un programa de compresión de archivos que puede ser externo al propio administrador), el programa Octave y el navegador para acceder al Aula Virtual. No se podrá acceder a ninguna herramienta del Aula Virtual distinta de la herramienta «Tareas».

4. El uso de cualquier plataforma de mensajería o el acceso a nubes que permitan compartir ficheros supondrá la exclusión de la prueba.

5. Los estudiantes sólo podrán usar portátiles personales si previamente dan su consentimiento para que durante el examen se pueda acceder a la lista de tareas que se están ejecutando en su ordenador y al historial de navegación y no activan el modo de navegación privada.

Ejercicio 1 (2.5/7 puntos)

El objetivo de este ejercicio es implementar el método de Newton sustituyendo la evaluación de la derivada de la función por una aproximación numérica a dicha derivada, lo que evita tener que conocer a priori la expresión de la función derivada.

1. Construye en la carpeta `/Biblioteca` una función `newtonAprox5p.m` que implemente el método de Newton, sustituyendo en cada paso el valor de $f'(x)$ por la aproximación en cinco puntos a dicha derivada. Recuerda que esta aproximación es:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

   El valor del paso h deberá figurar entre los argumentos de la función.

2. Vamos a comprobar el método buscando ceros de la función $f(x) = x^2 e^x - \cos(x)$. Dibuja la gráfica de esta función. A la vista de dicha gráfica deduce condiciones iniciales adecuadas para aproximar los tres ceros de $f(x)$ más próximos a cero, mediante el método antes programado. Calcula también la aproximación a esos tres ceros mediante el método original de Newton, utilizando las mismas condiciones iniciales y la misma tolerancia. Haz una tabla final en que se indique el número de iteraciones y la aproximación obtenida para cada uno de los tres ceros y cada uno de dos métodos

3. Repite el ejercicio anterior para aproximar el cero $x = 1$ de la función $g(x) = 1 - xe^{1-x}$, que es un cero doble. Utiliza la condición inicial $x_0 = 3$ y baja la tolerancia respecto al caso anterior.

4. Comenta por escrito lo que consideres oportuno acerca de los resultados obtenidos, de las ventajas, inconvenientes o eficiencia de la variante del método de Newton que hemos utilizado.

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Ejercicio 2 (2.5/7 puntos)

Consideramos un péndulo, de longitud 1, que oscila sin rozamiento por la acción de la gravedad y con un ángulo inicial α, respecto a la posición inferior de reposo. El periodo de la oscilación es:

$$T(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ y $g = 9{,}807\,\mathrm{m/seg}^2$ es el valor considerado de la aceleración gravitatoria. Se trata de aproximar numéricamente la integral anterior, que es un ejemplo de integral elíptica.

1. Sea $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$. Dibuja en un panel la gráfica de la función $T(\alpha)/T_0$, es decir: el valor de $T(\alpha)/T_0$ en ordenadas y el de la amplitud inicial α en abscisas, en el intervalo $[0, 3]$.

2. Ahora tratamos de aproximar el valor $\overline{\alpha}$ tal que $T(\overline{\alpha}) = 1{,}5 \cdot T_0$. Lo haremos mediante el método de la secante. Muestra el valor obtenido en la forma $\overline{\alpha} = r\pi$. Incluye una marca en el gráfico sobre el punto de la gráfica obtenido.

3. Comenta lo que consideres, en particular, en torno a la razón de haber elegido el método de la secante, y no el de Newton, por ejemplo.

Observaciones importantes

La función $T(\alpha)$ está definida como una integral dependiente del parámetro α. Podríamos definirla como una función anónima de dos variables en Octave, pero eso impediría enviarla como argumento a cualquiera de los métodos de aproximación de integrales de los que disponemos. Por tanto, **el trabajo debemos hacerlo en la forma siguiente**:

1. Copiaremos y pegaremos el código de `secante.m` en el script `Ejercicio2.m`, definiéndola como función internas en dicho script (cambiando su nombre para evitar posibles conflictos).
2. Esta función interna ya no necesitará la función a integrar como variable. Debemos modificar el código copiado en la forma adecuada.
3. Para evaluar la función T en un punto arbitrario α_i, tendremos que establecer el valor de dicho α_i y utilizar este valor para definir una función anónima mediante la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{sen}^2 x}}$$

   Para esta función anónima podremos entonces aproximar la integral necesaria mediante el método elegido. Esta misma estrategia habrá que seguirla para dibujar la gráfica de $T(\alpha)/T_0$.
4. La función $T(\alpha)$ tiene una asíntota en $\alpha = \pi$. Para que la aproximación funcione elige condiciones iniciales que no conduzcan a iteraciones mayores que π (con una idea geométrica del método y la gráfica de T puedes deducir fácilmente cómo elegir estas condiciones iniciales).

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Ejercicio 3 (2/7 puntos)

La función de Octave para aproximar integrales nos proporciona la aproximación:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2(1+x^2)}\right) dx \approx 2{,}636675573213231$$

Acotando la cola de la integral, intenta obtener al menos cuatro cifras exactas del valor anterior (2,636). Puedes hacer varias experiencias con la cota de la cola y el método de aproximación de integrales.

Indicación: recuerda que $0 \leq \operatorname{sen} t \leq t$, si $t \geq 0$.