UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2022/23

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Práctica 6. Integración impropias y ceros de funciones
2 y 5 de diciembre de 2022

Integrales impropias

1. La integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$
(conocida como integral de Dirichlet) es convergente (aunque no absolutamente convergente), y su convergencia se puede comparar con la de la serie armónica $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es muy, muy lenta. Vamos a presentar y experimentar en este ejercicio con un método de aproximación eficaz.

   a) Utiliza el método de integración por partes dos veces para tener las identidades
   $$\int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{1}{\pi} - 2\int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$$

   b) Haz el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ en la última de las integrales anteriores para calcularla $[0, \frac{1}{\pi}]$.

   c) Utilizando la descomposición
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$
   y las ideas de los apartados anteriores, utiliza las reglas compuestas de Simpson y de Gauss-Legendre (con 5 y 10 puntos de Gauss) para aproximar la integral de Dirichlet. Puedes hacer una tabla con las aproximaciones para distinto número de subdivisiones en cada método. ¿En cuál de las dos integrales anteriores crees que habrá que utilizar más divisiones en las reglas compuestas?

2. La función de Octave para aproximar integrales nos proporciona la aproximación:
$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2(1+x^2)}\right) dx \approx 2.636675573213231$$
Acotando la cola de la integral, intenta obtener al menos cuatro cifras exactas del valor anterior (2.636). Puedes hacer varias experiencias con la cota de la cola y el método de aproximación de integrales.

   Indicación: recuerda que $0 \leq \operatorname{sen} t \leq t$, si $t \geq 0$.

Buscando ceros

Para realizar esta parte de la práctica necesitas descargar algunos script de Octave que he subido al Aula Virtual. Si no lo has hecho ya, descarga el archivo `Practica6Anadir_Biblioteca.zip`, situado en la carpeta `CodigoPracticas` de los Recursos del AV. Descomprímelo y guarda su contenido en la carpeta `Biblioteca` que debe estar contenida en tu carpeta de trabajo con Octave de tu ordenador personal.

Una vez realizada la tarea anterior, en `Biblioteca` dispones de las funciones siguientes.

- `biseccion.m`, para utilizar el método de la bisección. La función requiere los siguientes argumentos: `f`, la función $f(x)$, `a`, `b` los extremos del intervalo inicial para el método; una precisión o tolerancia `tol` y una argumento final `imprime`. Si la llamada se realiza asignando valor `1` al argumento `imprime`, la función irá imprimiendo los extremos de los intervalos de bisección sucesivos y los valores de la función en dichos extremos. La función devuelve una terna `[x,fx,npasos]`, donde `x` es la aproximación buscada a la raíz, `fx` es el valor de la función evaluada en `x` y `npasos` es el número de iteraciones del método que se han realizado antes de que se cumplan los criterios de parada. La función calcula internamente el número máximo de iteraciones (`maxit`) que garantizan la longitud del intervalo inferior a `tol` y se detiene una vez realizado dicho número de iteraciones.
- `regulaFalsi.m`, devuelve los mismos valores que `biseccion.m`. Sus argumentos son `f`, `a`, `b`, `tol`, `maxit`, `imprime` con el mismo significado que en el caso anterior, salvo `maxit` que es el número máximo de iteraciones que permitimos.
- `newton.m`, devuelve la misma terna que los casos anteriores. Los argumentos son `f`, `df`, `x0`, `tol`, `maxit`, `imprime`, donde `df` es la función derivada $f'(x)$ y `x0` es el punto inicial donde comienza el método de Newton. El resto de argumentos tienen el mismo significado que en los casos anteriores.
- `newtonTabla.m`, es una función que utiliza el método de Newton, de la misma forma que `newton.m` pero que nos devuelve un vector con las abscisas calculadas en todas las iteraciones realizadas. El objetivo es poder manipular dichas abscisas en caso necesario. La función devuelve el vector `[x,fx,npasos,valores]`, los tres primeros son los de los casos anteriores y `valores` es el vector de abscisas. Sus argumentos son los mismos que los de `newton.m` excepto `imprime`, que ya no tiene realmente sentido.
- `secante.m`, devuelve la misma terna y sus argumentos son `f`, `x0`, `x1`, `tol`, `maxit`, `imprime`, todos con el mismo significado, excepto `x0` y `x1` que son los dos puntos iniciales para el método de la secante.
- `secanteTabla.m`, es lo análogo a `newtonTabla.m` pero para el método de la secante.
- `muller.m`, devuelve la misma terna que el resto de funciones (excepto las versiones que devuelven una tabla). Sus argumentos son `f`, `x0`, `x1`, `x2`, `tol`, `maxit`, `imprime`, donde `x0`, `x1` y `x2` son los tres puntos iniciales para el método de Muller.

Antes de utilizar cualquiera de estas funciones, asegúrate de entender qué argumentos espera, su tipo y significado, así como qué salidas produce, su significado, orden y formato.

3. Considera las funciones $f(x) = e^{-x/60}$ y $g(x) = \cos(\pi x)$. Queremos encontrar los puntos donde las gráficas de ambas funciones se cortan.

   a) Dibuja en una ventana las gráficas de ambas funciones en el intervalo $[1, 4]$.

   b) Pensando en el método de Newton y el teorema global de convergencia de este método, ¿eres capaz de detectar una cierta regularidad en los puntos de corte que te permita intuir cómo elegir los puntos iniciales para el método de Newton? Si no lo ves claro, dibuja en otra ventana la gráfica de $f(x) - g(x)$.

   c) Con la intuición obtenida en el apartado anterior aproxima, usando el método de Newton, los 100 primeros puntos positivos de corte de las gráficas. Una vez determinados, incluye en el gráfico de las dos funciones una marca en dichos puntos de corte.

4. La distribución normal estándar está definida por

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

   Recuerda que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

   a) Aproxima el valor de $\overline{x}$ tal que $\Phi(\overline{x}) = 0.9757$. Si tienes tiempo, realiza la aproximación al menos con dos métodos distintos. Compara los resultados y el tiempo de ejecución (`tic`...`toc`).

b) Tal y como están programados nuestros algoritmos de búsqueda de raíces, en el apartado anterior habrás tenido que realizar muchos cálculos innecesarios, pues para aproximar por ejemplo $\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)$ debes haber calculado la integral desde 0 hasta x_{n+1} y también desde 0 hasta x_n, mientras que teniendo en cuenta que

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-t^2/2} dt$$

hubiera bastado con calcular sólo la integral de x_n a x_{n+1}.

Programa en este mismo ejercicio el método de Newton para este caso particular directamente, utilizando los incrementos en el valor de la integral que acabamos de comentar. Utilízalo para aproximar $\overline{x}$.

5. Realiza el ejercicio 4.17 de las notas de clase: aproximar la única raíz positiva de $x^6 - x - 1$ mediante el método de Muller, con los datos iniciales $x_0 = 2$, $x_1 = 1.5$ y $x_2 = 1$. Vuelve a realizar la misma tarea con las condiciones iniciales $x_0 = 2$, $x_1 = 1.7$ y $x_2 = 1.5$ comprobando que en este último caso los cálculos intermedios se realizan en el campo complejo.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es