UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2022/23

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Práctica 5

21 y 22 de noviembre de 2022

Para realizar esta práctica necesitas descargar algunos script de Octave que he subido al Aula Virtual. Si no lo has hecho ya, descarga el archivo `Practica5Anadir_Biblioteca.zip`, situado en la carpeta `CodigoPracticas` de los Recursos del AV. Descomprímelo y guarda su contenido en la carpeta `Biblioteca` que debe estar contenida en tu carpeta de trabajo con Octave de tu ordenador personal.

El objetivo general de esta práctica es experimentar en la aproximación de derivadas e integrales, en casos sencillos. Para ello, en `Biblioteca` dispones de las funciones siguientes

- `aproxDeriv3(f,x,h,pos)` devuelve la aproximación de la derivada de una función en un punto mediante el método de evaluación en tres puntos, es decir, mediante el método de interpolación en tres puntos (véase la página 83 de las notas de clase). Requiere cuatro argumentos: la función `f` a derivar, el punto `x` donde aproximar $f'(x)$, el paso `h` que determina los puntos donde interpolar y, finalmente una cadena de caracteres `pos`: si `pos='i'` se aproxima la derivada evaluando en x, $x+h$ y $x+2h$; si `pos='d'` se aproxima evaluando en $x-2h$, $x-h$ y x; en cualquier otro caso se utilizan las diferencias centrales (evaluando en $x-h$ y $x+h$).
- `aproxDeriv3Vect(x,y)`. El vector `y` debe ser el vector de imágenes, es decir `y=f(x)` (o una simple tabla de puntos, lo que permite aproximar la derivada de una función desconocida). La función devuelve la aproximación de la derivada de f en los puntos del vector `x`. En la primera y última componentes utiliza la aproximación en tres puntos (como en la función anterior, a izquierda o derecha), en el resto de componentes utiliza la diferencia central. Las componentes de `x` no tiene que estar equiespaciadas (aunque si no lo están el cálculo puede no tener sentido).
- `aproxSegundaDeriv3(f,x,h)` devuelve la aproximación a la derivada segunda $f''(x)$ utilizando la fórmula $(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))/h^2$ (`x` puede ser un vector, evaluando simultáneamente en sus componentes).
- `trapecio(f,a,b,N)`, devuelve la aproximación a la integral de una función en un intervalo calculada mediante la regla compuesta del trapecio. Sus argumentos son: la función `f` a integrar, los extremos del intervalo `a` y `b` donde se integra y el número de subintervalos `N` de la regla compuesta.
- `trapecioVect(x,y)`, devuelve la aproximación a la integral mediante la regla del trapecio compuesta. Los argumentos son dos vectores `x` e `y`. El vector `y` debe ser `f(x)` donde f es la función a integrar. Los extremos de integración serán la primera y la última de las componentes de `x`, y se espera que estas componentes esté equiespaciadas.
- `simpson(f,a,b,n)`, es lo análogo a `trapecio.m` pero para la regla compuesta de Simpson.
- `simpsonVect(x,y)`, es lo análogo a `trapecioVect.m` pero para la regla compuesta de Simpson: el vector de abscisas `x` debe tener longitud impar y deben ser abscisas equiespaciadas.
- `gaussLegendreSimple(g,nG)`, calcula una aproximación a la integral de la función `g` en el intervalo $[-1,1]$ mediante la regla de Gauss-Legendre en un número de puntos de Gauss dado por el segundo argumento `nG`. Los valores posibles para `nG` son 1, 2, 3, 4, 5 o 10 (aquellos para los que he incluido los puntos y pesos de la regla). No es una función para utilizar directamente, en su lugar utiliza la siguiente.
- `gaussLegendre(f,a,b,N,nG)`, calcula una aproximación a la integral de la función `f` en el intervalo de extremos `a` y `b` mediante la regla compuesta de Gauss-Legendre en `N` subintervalos. El último argumento, `nG`, tiene el mismo significado que el último argumento de `gaussLegendreSimple.m`, que es utilizada por `gaussLegendre.m`.

Antes de utilizar cualquiera de estas funciones, asegúrate de entender qué argumentos espera, su tipo y significado, así como qué salidas produce, su significado, orden y formato.

1. En este ejercicio estudiamos la inestabilidad del proceso de aproximación de derivadas en un ejemplo concreto. En la sección 3.1.3 de las notas de clase ya indicábamos que para valores muy pequeños del paso h el método comienza a mostrar una gran inestabilidad, debido a los errores de redondeo. Aquí vamos a experimentar con el método de aproximación de derivadas más simple:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

Sabemos que el error en esta aproximación es $-\frac{f''(\xi)}{2}h$, siendo ξ un punto entre x y $x+h$.

El ejemplo consistirá en aproximar la derivada de la función seno en el punto $x = 1.2$ y tomaremos como «valor real» de esta derivada el valor que proporciona Octave para $\cos(1.2)$, que es $\cos(1.2) = 0.362\,357\,754\,476\,674$.

El mayor valor de h que utilizaremos será 10^{-1}, por tanto acotaremos el error por $\frac{h}{2}\operatorname{sen}(1.21)$ (el seno es creciente en $[1.2, 1.21]$).

   a) Calcula para valores de $h = 10^{-k}$, con $k = 1, 2, \dots, 20$, el cociente (1) (para $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ y $x = 1.2$) y el error absoluto respecto al «valor «real». Escribe los valores de salida en forma de tabla ordenada, añadiendo una tercera columna que sea el valor de $\frac{h}{2}\operatorname{sen}(1.2)$. A la vista de los resultados ¿coincide el error esperado con el real? ¿Cómo se comporta el error real?

   b) Ahora vamos a comprobar visualmente cómo evoluciona el error. Para ello realizamos un gráfico con escala logarítmica tanto en las abscisas como en las ordenadas. Para realizar este tipo de gráficos Octave dispone del comando

   `loglog(x,y,...)`

   que sigue una sintaxis idéntica a la de `plot`, con los posibles argumentos de forma idéntica.

   Realiza entonces un gráfico con escalas logarítmicas que muestre las gráficas, como funciones de h, de los errores:

$$e_1(h) := \left|\frac{\operatorname{sen}(1.2+h)-\operatorname{sen}(1.2)}{h} - \cos(1.2)\right| \quad \text{y} \quad e_2(h) = \frac{\operatorname{sen}(1.2)}{2}h$$

   (debes enviar al gráfico sólo las coordenadas en los valores utilizados de h).

   c) En el apartado 3.1.3 ya citado habíamos realizado un estudio teórico de estos errores en el método de aproximación de las diferencias centrales, encontrando un valor h_* donde se espera que el error total (por aproximación y redondeo) sea óptimo. Se puede realizar el mismo estudio para el método más simple que nos ocupa (estás invitado a hacerlo...), obteninedo que el error óptimo en este caso se obtiene para $h_* = \sqrt{M_2\varepsilon}$, siendo M_2 el máximo de $|f''|$ y ε una cota del error de redondeo en la evaluación de f. Tomando $M_2 = \operatorname{sen}(1.21)$ y ε igual al epsilon de la máquina, dibuja sobre el gráfico anterior una línea vertical en la abscisa h_*, ¿se aproxima visualmente a la zona de los menores errores?

   d) Finalmente: representa en una ventana gráfica las funciones $\cos(x)$ y $\varphi_h(x)$, para distintos valores de $h = 10^{-1}, 10^{-3}, \dots, 10^{-20}$, ambas en el intervalo $[0, \pi]$. La función $\varphi_h(x)$ es el valor aproximado a la derivada de $\operatorname{sen}(x)$ mediante el cociente anterior, es decir:

$$\varphi_h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}.$$

2. Dibuja en una misma ventana las gráficas de $f(x) = x\cos(x^2)$ en el intervalo $[0, 10]$ y de su derivada $f'(x)$ aproximada mediante el método de los tres puntos.

   Añade una segunda ventana que dibuje la gráfica de la aproximación de $\int_0^x f(t)\,dt$, para $x \in [0, 10]$. Utiliza distintas reglas de cuadratura para aproximar esta función primitiva. También hay al menos dos estrategias para hacerlo, no distintos métodos de aproximación... sino estrategias para aproximar numéricamente: la integral es aditiva en el intervalo, ¿qué te sugiere esta propiedad? Utiliza ambas estrategias y compara los resultados calculando la máxima diferencia en $[0, 10]$ y gráficamente.

Para comparar los resultados de la aproximación de integrales con «los valores reales» puedes utilizar las funciones de Octave: `integral(f,a,b)` y `quad(f,a,b)`. Ambas aproximan la integral de `f` en el intervalo `[a,b]` utilizando métodos más sofisticados que los que nosotros hemos aprendido hasta ahora.

3. Programa una función `trapecioCorr(f,a,b,N,pi,pf)` que devuelva la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla (compuesta) del trapecio corregida del ejercicio 3.8. La función debe tener como argumentos: la función a integrar `f`; los extremos del intervalo donde integrar `a` y `b`; el número de subdivisiones del intervalo `N`; y las derivadas de `f` en el extremo izquierdo, `pi`, y en el derecho, `pf`. Puedes utilizar, si lo crees conveniente, la función `trapecio.m`.

   Guarda la función en la carpeta `Biblioteca`.

   a) Vamos a aproximar mediante la regla del trapecio compuesta corregida anterior la integral $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{1+x^2}\,dx = \pi$. Muestra en una tabla de salida los errores en la regla del trapecio y del trapecio corregida al tomar el número de subintervalos `N` igual a $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{12}$. Realiza también una tabla que muestre los cocientes de los errores sucesivos, en ambos métodos, para intentar aproximar el orden de precisión del método (algo similar a lo que hicimos en el ejemplo 3.10 de las notas del curso).

   b) Realiza la misma tarea del apartado anterior para las reglas de Simpson y de Gauss-Legendre con 3 puntos de Gauss. ¿Cómo se comportan en uno y otro caso los cocientes de los errores? ¿Se aproximan a lo esperado?

   c) Realiza la tarea del primer apartado anterior para la integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \pi$.
   Claramente los resultados son idénticos para ambas reglas, ¿comprendes por qué? Los errores en este caso son sorprendentemente pequeños con la regla del trapecio usual, ¿alguna conjetura sobre el porqué?

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es