Prof. S. Sánchez-Pedreño

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas

Teoría

1. **(1.5 puntos)** Deduce las reglas del trapecio simple y compuesta para aproximación de integrales, demostrando la expresión del error en la aproximación.

2. **(1.5 puntos)** Desarrolla los aspectos que consideres más importantes acerca del uso del método de Newton para la aproximación de raíces de polinomios (sin incluir demostraciones). Enuncia y demuestra la propiedad que asegura que si x_k y x_{k+1} son iteradas sucesivas de Newton para el polinomio $p(x)$ de grado n, entonces $p(x)$ tiene una raíz en el disco de centro x_k y radio $n|x_{k+1} - x_k|$.

Comentario sencillo. La segunda pregunta de la teoría parece que ha sorprendido a muchos estudiantes. La mayor parte no han respondido a lo que se preguntaba, limitándose a escribir los enunciados de los teoremas de convergencia local y global del método de Newton, para funciones reales. No es eso lo que se preguntaba: se trataba de concentrarse en los distintos aspectos del método de Newton aplicado a los polinomios. Así, por ejemplo, se trataba de comentar: su funcionamiento correcto en el campo complejo, su «adaptabilidad» al método de Horner, los discos donde se sabe que se sitúan las raíces y lo que esa información proporciona sobre condiciones iniciales del método, el buen comportamiento para polinomios de coeficientes reales que permite localizar todas las raíces reales, los procesos numéricos cuidadosos (aproximación de una raíz, deflación, aproximación de una nueva raíz y refinamiento aplicando el método al polinomio inicial, no al deflacionado, con condición inicial la aproximación obtenida),... En general se comprueba que no estáis acostumbrados a «escribir un tema», es decir, a redactar una visión global de una materia más o menos amplia... debéis aprender a hacerlo y, de hecho, deberíais hacerlo al menos mentalmente: cuando uno estudia debe revisar lo estudiado, mirando un poco más de lejos, y «conservando una visión global». Todo esto es la causa de unas calificaciones bastante bajas en esta pregunta.

Calificación media por preguntas.

Teoría 1:	1,17
Teoría 2:	0,46
Ejercicio 1:	1,37
Ejercicio 2:	1, 60
Ejercicio 3:	1,27
Global:	5,58

Se valorará la redacción cuidada y las explicaciones detalladas y precisas. Mientras manipules números racionales intenta calcular de forma exacta.

1. **(1.7 puntos)** Queremos obtener una aproximación de $\log 2$ mediante la aproximación de la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

con la regla de Simpson compuesta. Calcula el número de subintervalos necesario para obtener dicha aproximación con un error absoluto inferior a 10^{-3}. Una vez establecido dicho número aplica la regla con esa subdivisión para obtener la aproximación buscada.

Solución. Recordemos que en el método de Simpson, subdividiendo el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, y considerando los puntos de la subdivisión, además de los puntos medios de cada subintervalo, tenemos los puntos $x_k = x_0 + h\cdot k$, con $h = \frac{b-a}{2n}$ y $k = 0,1,\dots,2n$ y, con estas notaciones, la aproximación de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{2n} := \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(x_{2n})\right),$$

y el error se puede expresar en las formas:

$$E_{2n} = \int_a^b f(x)dx - S_{2n} = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\theta) = -\frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}f^{(4)}(\theta)$$

para cierto valor $\theta\in(a,b)$ (asumiendo que f es una función de clase $\mathscr{C}^4$).

En nuestro caso tenemos: $a=1$, $b=2$ y $f(t)=\frac{1}{t}$ que es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $[1,2]$. Así, queremos calcular el valor de n (subdivisiones de $[a,b]$) para tener un error inferior a 10^{-3}. El cálculo de la derivada cuarta de f es elemental, obteniendo $f^{(4)}(t) = 24/t^5$, por tanto, tendremos la acotación $|f^{(4)}|\le 24$ para todo $t\in[1,2]$, y así impondremos la condición:

$$|E_{2n}| = \left|-\frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}f^{(4)}(\theta)\right| \le \frac{24}{2880\cdot n^4} < 10^{-3}$$

Por tanto, debemos tener $n^4 > \frac{24\cdot 10^3}{2880} = \frac{25}{3}$, de donde $n > (\frac{25}{3})^{1/4}\approx 1{,}699$, lo que significa que para obtener el error pedido es suficiente subdividir el intervalo en dos partes iguales, es decir, utilizar la regla de Simpson con $2n+1=5$ puntos.

Ahora calculamos el valor que nos proporciona dicha regla. En este caso $n=2$, luego $h=\frac{1}{4}$ y las abscisas donde evaluamos la función serán

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1+h = \frac{5}{4},\quad x_2 = 1+2h = \frac{3}{2},\quad x_3 = 1+3h = \frac{7}{4},\quad x_4 = 1+4h = 2,$$

y por tanto la aproximación a la integral será

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\big) \\ &= \frac{1}{12}\left(1+4\frac{4}{5}+2\frac{2}{3}+4\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1747}{2520} \approx 0{,}693\overline{253968} \end{aligned}$$

(los dos últimos cálculos realizados con Maxima). Observemos que el valor de $\log 2$ que proporciona Maxima es $0{,}6931471805599453$ y efectivamente el error absoluto está acotado por $1{,}07\cdot 10^{-4} < 10^{-3}$.

Comentarios. En general las respuestas han sido correctas. No obstante hay un buen número de estudiantes que no conocen bien la fórmula del error en la aproximación de Simpson, o no conocen bien la expresión de la misma regla, o no conocen bien ninguna de las dos. También es frecuente la confusión entre el número de subdivisiones del intervalo $[1, 2]$ que conduce a la regla compuesta y el número de subintervalos en los que las abscisas dividen al mismo intervalo, es decir, entre el número de nodos $(n + 1)$ y el número de abscisas $(2n + 1)$, lo que ha producido algunas incoherencias entre el cálculo del n necesario y la aproximación concreta pedida (y, en particular, en el valor $h = \frac{b-a}{2n}$). Finalmente resulta inaceptable no entender lo que se está haciendo y tomar la función $f(x)$ a la que se aplica la regla como $f(x) = \log x$.

Aunque no se pedía explícitamente, un mínimo de coherencia en la redacción de la respuesta casi obliga a mostrar al final el error real de la aproximación y verificar que, efectivamente, es inferior a 10^{-3}, algo que no todos habéis mostrado.

2. **(2.5 puntos)** Considera el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

   a) Demuestra que $p(x)$ tiene una única raíz real α.

   b) La raíz de $p(x)$ puede intentar aproximarse mediante iteraciones de punto fijo al menos a partir de las dos funciones siguientes:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

   Estudia para cuál de las dos funciones anteriores la sucesión de iteradas puede converger a α. Para aquella función que presenta convergencia, establece un intervalo $[a, b]$ de forma que para cualquier punto inicial en dicho intervalo las iteradas converjan.

   c) Con tu calculadora obtén una aproximación de α. Calcula además el número de iteraciones que serían necesarias para tener un error absoluto inferior a 10^{-15} a partir de cualquier condición inicial en $[a, b]$.

SOLUCIÓN.

Apartado a). Puesto que el polinomio es de grado 3 es claro que tendrá o única raíz real o tres raíces reales (contando multiplicidad,... pues podría haber dos raíces reales, una de ellas doble, por ejemplo). Es inmediato verificar las igualdades siguientes: $p(1) = -2 < 0$, $p(2) = 1 > 0$, lo que nos indica que existe una raíz real en el intervalo $[1, 2]$.

De acuerdo con el teorema de Rolle, si existieran tres raíces reales, éstas deberían encerrar los dos ceros del polinomio derivado. Calcular los ceros de $p'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ es bien sencillo: se obtienen los valores $x_1 = -1/3$ y $x_2 = 1$. Ahora es claro que x_1 es un máximo relativo de $p(x)$ y evaluando directamente se tiene que $p(x_1) = -\frac{22}{27} < 0$. Por tanto $p(x)$ no puede tener dos ceros entre los cuales se sitúe x_1 (pues en ese caso debería ser $p(x_1) > 0$, dado que $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$). Obviamente también se puede razonar estudiando los intervalos de monotonía de p, es decir, los signos de p': $p(x)$ es creciente en $(-\infty, x_1)$ y decreciente en (x_1, x_2) y como $p(x_1) < 0$, se tiene $p(x) < 0$ para todo x en $(-\infty, x_2]$. Así pues $p(x)$ tiene una única raíz real que denominaremos α y que se sitúa en el intervalo $(1, 2)$.

Apartado b). Para dilucidar cuál de las dos funciones dadas permite aproximar la raíz α mediante iteraciones de punto fijo, intentaremos determinar si α puede ser un atractor para alguna de dichas funciones.

Considerando $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ que es claramente una función estrictamente creciente en $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Además $f'(1) = 1$, lo que indica que para $x > 1$ se tendrá $f'(x) > 1$. Como la raíz α sabemos que está situada en $(1, 2)$ concluimos que α será un punto fijo repulsor de $f(x)$, lo que debe impedir aproximar α iterando la función (pues disponemos de un resultado que afirma que, en este caso, en ningún intervalo centrado en α se cumplen las hipótesis del teorema del punto fijo).

En cuanto a la función $g(x)$ tenemos $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Claramente $|g'(x)|$ es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ y puesto que $|g'(2)| = \frac{1}{2} < 1$ podemos esperar que α sea un atractor para $g(x)$ (ciertamente $|g'(1)| = 3 > 1$, lo que muestra que el intervalo $[1, 2]$ es demasiado «grande» para aplicar el teorema del punto fijo de Banach).

A partir de aquí debemos buscar el intervalo donde aplicar el teorema de Banach (que obviamente no es único). Debemos buscar un intervalo $[a, b]$ con $a > 1$ puesto que ya hemos visto que $|g'(1)| > 1$. Una idea puede ser considerar el punto medio del intervalo anterior, es decir $a = \frac{3}{2}$. Entonces tenemos:

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{9} > 2, \quad g(2) = \frac{7}{4} \quad \text{y} \quad g'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{28}{27} < -1$$

Así pues ni g es contractiva en $[\frac{3}{2}, 2]$ ni la imagen de este intervalo se queda dentro del mismo (es evidente que $g(x)$ es decreciente en los reales positivos, así que si $0 < a < b$, se tiene $g([a, b]) = [g(b), g(a)]$). Debemos refinar un poco más. Tomando de nuevo el punto medio, o bien observando el valor de $g(2)$ anterior, llegamos al valor de $\frac{7}{4}$. Tenemos entonces

$$g\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{93}{49} < 2 \quad \text{y} \quad \left|g'\left(\frac{7}{4}\right)\right| = \frac{240}{343} < 1$$

Así, tenemos $g([\frac{7}{4}, 2]) = [\frac{7}{4}, \frac{93}{49}] \subset [\frac{7}{4}, 2]$ y puesto que $|g'|$ es decreciente en $(0, +\infty)$ y $|g'(\frac{7}{4})| = \frac{240}{343} < 1$, se tiene $|g'(x)| \leq \frac{240}{343} < 1$ para todo $x \in [\frac{7}{4}, 2]$. El intervalo $[\frac{7}{4}, 2]$ es pues válido para utilizar el teorema de Banach: en dicho intervalo la función g tiene constante de contractividad $\frac{240}{343}$.

Apartado c). De acuerdo con la acotación general del teorema del punto fijo de Banach, si $x_n = g(x_{n-1})$ tenemos

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0|$$

siendo c la constante de contractividad de $g(x)$. Puesto que se nos pide un valor de n que valga para una condición inicial x_0 arbitraria en el intervalo, debemos acotar la distancia $|x_1 - x_0|$. Aunque podríamos buscar cotas más finas, basta aquí tener en cuenta que el hecho de que g lleve el intervalo $[\frac{7}{4}, 2]$ en sí mismo significa que tanto x_0 como $x_1 = g(x_0)$ están en dicho intervalo, luego la distancia entre ambos puntos la podemos acotar por la longitud del intervalo.

La condición es entonces

$$|x_n - \alpha| \leq \left(2 - \frac{7}{4}\right)\frac{\left(\frac{240}{343}\right)^n}{1 - \frac{240}{343}} = \frac{343}{412}\left(\frac{240}{343}\right)^n < 10^{-15}$$

de donde se obtiene

$$n > \log\left(\frac{412}{343}10^{-15}\right)\left(\log\frac{240}{343}\right)^{-1} \approx 96{,}21$$

por lo que necesitamos al menos 97 iteraciones.

Con mi calculadora, eligiendo el punto inicial como $x_0 = \frac{7}{4}$ obtengo un punto fijo $\alpha \approx 1{,}839\,286\,755$ en 40 iteraciones.

Comentarios. Las respuestas a este ejercicio han sido muy variadas, como podía esperarse.

Respecto al primer apartado en general han sido correctas. Pero un buen número de estudiantes no ha respondido de forma completa y correcta, o bien se ha limitado a argumentos vagos (incluyendo afirmaciones falsas); unos pocos han utilizado la regla de Descartes, limitándose a demostrar la unicidad del cero en los reales positivos.

Respecto al resto del ejercicio el número de respuestas correctas (y completas) baja drásticamente respecto al apartado anterior. Aún hay muchos estudiantes que estiman que la contractividad de una función g en un intervalo I viene dada por la condición $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, y no, como debe ser, $|g'(x)| \leq c < 1$ (al margen de que si I es compacto y g' continua puedan ser equivalentes). Aún así muchas respuestas adolecen de rigor: por ejemplo para comprobar la condición anterior evalúan g' en los extremos de un intervalo $[a, b]$, sin comprobar (o al menos sin citar) nada respecto al crecimiento de $|g'|$. Por cierto, muchos han caído en la trampa de, dado que g' es creciente, acotar el valor absoluto de g' en $[\frac{7}{4}, 2]$por $|g'(2)|$, sin darse cuenta de que g' es negativa, luego $|g'|$ es decreciente. Muchos olvidan que para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach se debe tener $g([a, b]) \subset [a, b]$ y, por tanto, eligen un intervalo inadecuado (aunque g sea contractiva en el intervalo elegido).

3. **(2.8 puntos)** Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^3$.

a) Determina el polinomio interpolador de Hermite en los datos $f(0)$, $f'(0)$ y $f(1)$, y la expresión del error en la aproximación, es decir, de la diferencia entre $f(x)$ y el polinomio.

b) Basándote en el polinomio calculado deduce una regla de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 f(x)\,dx = a_0 f(0) + a_1 f'(0) + b_0 f(1) + \mathrm{Err}(f)$$

determinando los coeficientes a_0, a_1 y b_0, así como el error $\mathrm{Err}(f)$ (puedes suponer que las funciones que aparecen en el error de aproximación por el polinomio son continuas). ¿Cuál es el grado de exactitud de este regla de cuadratura?

c) Deduce de la forma anterior, sin realizar el mismo cálculo de nuevo, una regla de integración para $\int_c^{c+h} f(t)\,dt$, incluyendo el error (f definida en $[c, c+h]$, $\mathscr{C}^3$).

d) Escribe la expresión que adopta la forma compuesta de la regla anterior para $\int_a^b f(x)\,dx$ con n subdivisiones iguales de $[a,b]$. Si $h = \frac{b-a}{n}$, ¿de qué orden $O(h^p)$ es esta regla?

Solución.

Apartado a). Calculamos la tabla de diferencias divididas correspondiente a la interpolación del enunciado:

$$\begin{array}{c|lll} 0 & f(0) & & \\ 0 & f(0) & \quad f'(0) & \\ 0 & f(1) & f(1)-f(0) & f(1)-f(0)-f'(0) \end{array}$$

Así, el polinomio de Hermite es

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + (f(1) - f(0) - f'(0))x^2$$

y para cada $x \in [0,1]$ existe $\xi_x \in (0,1)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!} x^2(x-1).$$

Apartado b). Ahora calculamos la integral de $p(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x)\,dx &= f(0)\int_0^1 dx + f'(0)\int_0^1 x\,dx + \big(f(1) - f(0) - f'(0)\big)\int_0^1 x^2\,dx = \\ &= f(0) + f'(0)\frac{1}{2} + \big(f(1) - f(0) - f'(0)\big)\frac{1}{6} = \\ &= \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0). \end{aligned}$$

Ya tenemos la regla de cuadratura buscada: $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$ y $b_0 = \frac{1}{6}$, es decir

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0).$$

En cuanto al error tendremos:

$$\mathrm{Err}(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f'''(\xi_x)}{3!} x^2(x-1)\,dx$$

El enunciado nos dice que podemos suponer que la función $h(x) := f(\xi_x)$ es continua (esto lo sabemos para la interpolación de Lagrange, pero no lo hemos demostrado para la interpolación de Hermite,... ¿alguien se atreve?). Entonces, utilizando dicha continuidad y el hecho de que el polinomio $x^2(x-1)$ tiene signo constante en $[0,1]$ (es no positivo en todo el intervalo) podemos utilizar el teorema del valor medio de la integral, por lo que existe un valor $\eta \in (0,1)$ tal que

$$\mathrm{Err}(f) = \frac{f'''(\eta)}{6}\int_0^1 x^2(x-1)\,dx = \frac{f'''(\eta)}{6}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{f'''(\eta)}{72}.$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia. e-mail: pedreno@um.es

El grado de exactitud de esta regla es al menos 2, pues el polinomio interpolador de Hermite, para los datos fijados, cuando la función f es un polinomio de grado menor o igual que 2, coincide con la propia f. Pero esto no excluye que la regla pudiera tener grado de exactitud 3 (recuérdese la sorpresa de la regla de Simpson). Ahora bien, es casi inmediato comprobar que no tiene grado de exactitud 3: basta verificar que para el polinomio $f(x) = x^3$ la regla no es exacta:

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}\Big(\frac{2}{3}0^3 + \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{6}3 \cdot 0^2\Big) = \frac{1}{3}$$

Apartado c). Para deducir la regla de cuadratura aplicada a la integral de una función en el intervalo $[c, c+h]$ basta proceder, como hemos hecho en el curso, a aplicar un cambio de variable afín que transforma el intervalo $[0,1]$ en el intervalo $[c, c+h]$. Así, definiendo $t = \tau(x) := c + hx$, tenemos $\tau'(x) = h$ y podemos escribir

$$\int_c^{c+h} f(t)\,dt = \int_0^1 f(\tau(x))\tau'(x)\,dx = \int_0^1 f(\tau(x))h\,dx = h\int_0^1 f(c+hx)\,dx$$

Ahora basta aplicar la regla de cuadratura anterior a la función $g(x) := f(c+hx)$, lo que nos dará, incluyendo el error:

$$\int_c^{c+h} f(t)\,dt = h\Big(\frac{2}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) + \frac{1}{6}g'(0) - \frac{g'''(\eta)}{72}\Big) \quad (\eta \in (0,1))$$

que en términos de f se escribe

$$\int_c^{c+h} f(t)\,dt = h\Big(\frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{3}f(c+h) + \frac{h}{6}f'(c) - \frac{f'''(\xi)}{72}h^3\Big) \quad (\xi \in (c, c+h))$$

dado que $g'(0) = hf'(c)$, $g''(x) = h^2 f''(c+hx)$ y $g'''(x) = h^3 f'''(c+hx)$. Finalmente, para que quede bonita:

$$\int_c^{c+h} f(t)\,dt = h\Big(\frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{3}f(c+h) + \frac{h}{6}f'(c)\Big) - \frac{f'''(\xi)}{72}h^4 \quad (\xi \in (c, c+h))$$

Apartado d). Para obtener la regla compuesta en un intervalo arbitrario $[a,b]$, consideramos los puntos $x_0 = a$ y $x_k = x_0 + kh$, para $k = 1, \ldots, n$ siendo $h = \frac{b-a}{n}$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_k+h} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} h\Big(\frac{2}{3}f(x_k) + \frac{1}{3}f(x_k+h) + \frac{h}{6}f'(x_k) - \frac{f'''(\xi_k)}{72}h^3\Big)$$

donde cada ξ_k pertenece al intervalo (x_k, x_k+h).

Observando la expresión anterior es fácil convencerse de que para $k = 1, \ldots, n-1$ los valores de $f(x_k)$ se repiten en dos sumandos consecutivos, una vez afectados del factor $\frac{1}{3}$ y otra afectados del factor $\frac{2}{3}$. Sumando esos valores resulta exactamente el valor de $f(x_k)$ (naturalmente $x_{k+1} = x_k + h$ y los valores extremos, x_0 y x_n sólo aparecen en un sumando). Así pues, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{2}{3}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{1}{3}f(b)\right) + \frac{h^2}{6}\sum_{k=0}^{n-1} f'(a+kh) - \frac{h^4}{72}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\xi_k)$$

Ahora razonamos de la forma habitual con el término del error:

$$\frac{h^4}{72}\sum_{k=0}^{n-1} f'''(\xi_k) = \frac{1}{72}\frac{(b-a)^4}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f'''(\xi_k)}{n}$$

y puesto que la última suma es una media aritmética de las derivadas terceras (y f es de clase $\mathscr{C}^3$), existe un punto $\xi \in (a,b)$ (realmente en $(a, b-h)$) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{2}{3}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{1}{3}f(b)\right) + \frac{h^2}{6}\sum_{k=0}^{n-1} f'(a+kh) - \frac{b-a}{72}h^3 f'''(\xi)$$

lo que indica con claridad que la regla compuesta es de orden $O(h^3)$ (como cabía esperar).

Comentarios. En general las respuestas a los dos primeros apartados han sido buenas (con matices), no así las de los dos últimos.

Aún hay quien tiene dificultades para calcular un polinomio de Hermite tan sencillo como el que se pedía, o no sabe la fórmula del error... dicho sea de paso, la fórmula del error nos da una igualdad, no necesariamente una acotación (otra cosa es que queramos acotar o estimar el error). El paso al apartado b) ha sido realizado en general bien... salvo aquellos que cometen errores de cálculo tontos, al evaluar la integral de x^2 o x^3. En general se ha «repetido» un argumento dado en las notas para expresar el error, utilizando el teorema del valor medio de la integral, pero lo menos que se debe hacer es enunciar las hipótesis del mismo, verificarlas,... en fin, redactar matemáticas (y evitar esquemas, flechas y otros «artificios» tipográficos). Algunos estudiantes han intentado determinar los coeficientes a_0, a_1 y b_0 identificándolos con las integrales de los factores de Lagrange, basándose en los resultados teóricos que hemos estudiado; pero no es correcto, no han entendido la teoría... porque esa identificación de los pesos como las integrales de los factores de Lagrange es válida para las reglas de cuadratura de interpolación mediante polinomios interpoladores de Lagrange, que no es el caso que nos ocupa, pues se trata de polinomios interpoladores de Hermite.

Para el apartado c) ya hemos visto que bastaba un sencillo cambio de variable. Lo que es inaceptable es que ¡muchos no han sabido aplicarlo! Quiero decir que conocen el cambio de variable adecuado pero no saben usarlo en la integral; esto ha dado lugar a expresiones donde el paso h estaba dividiendo, y conclusiones subsiguientes como un orden de precisión del método de $O(h^{-1})$, es decir, que ¡cuanto mayor sea el valor de h mejor es la aproximación! Todo esto es inadmisible y no debería ocurrir en estos niveles.

Finalmente muchas respuestas en el apartado d) se han limitado a escribir una expresión formal (y un lío en el error)... no hay muchas que se hayan dado cuenta de que los coeficientes $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ aparecían en dos términos, lo que daba el peso $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ en los puntos intermedios.