UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2021/22

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Control, 8 de noviembre de 2021

1. **(1.5 puntos)** Considera una máquina binaria en miniatura que trabaja en coma flotante, con redondeo simétrico, y con las características siguientes: cuatro dígitos en mantisa normalizada (el dígito normalizado se incluye en los cuatro), tres dígitos en el exponente, más un dígito para el signo de la mantisa y otro para el signo del exponente (el exponente se guarda sin ningún tipo de sesgo o codificación especial). Considera los números

$$x = 1.011_{(2)} \cdot 2^{-1}, \quad y = 1.100_{(2)} \cdot 2^{-1}$$

Indica en la tabla siguiente con una marca si la operación realizada (con el resultado siempre normalizado) es exacto, está redondeado, o produce overflow o underflow.

Operación	**Exacto**	**Redondeado**	**Overflow**	**Underflow**
$\mathrm{fl}(x-y)$				
$\mathrm{fl}((y-x)^{10})$				
$\mathrm{fl}(x+y)$				
$\mathrm{fl}(y+(x/4))$				
$\mathrm{fl}(x+(y/4))$				

Explica tus respuestas.

Solución. La representación de los números en coma flotante en esta máquina es muy sencilla. Un número se representará (independientemente del orden en que coloquemos los bits) en la forma:

$$s_1 \; e_1 e_2 e_3 \; s_2 \; b_1 b_2 b_3 b_4$$

donde todos los dígitos están en $\{0, 1\}$. Los bits s_1 y s_2 representan el signo del exponente y la mantisa respectivamente. El grupo $e_1e_2e_3$ es el exponente escrito en binario, así pues, el exponente varía entre $-7 = -111_{(2)}$ y $t = +111_{(2)}$. El grupo $b_1b_2b_3b_4$ representa la mantisa; puesto que ésta debe estar normalizada, b_1 es necesariamente igual a 1.

Vamos con las operaciones.

2. $x - y = -(y - x) = -(1.100 - 1.011) \cdot 2^{-1}$ (puesto que todos los cálculos los haré en binario, evito incluir en cada caso el subíndice que lo indica). Ahora, hagamos la operación (en tamaño pequeño y entre paréntesis indico en la fila superior la cantidad «que nos llevamos»...)

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1.100 \\ -1.011 \\ \hline 0.001 \end{array}$$

Luego $x - y = -0.001 \cdot 2^{-1} = -1.000 \cdot 2^{-4}$ que es un número de máquina. Así pues $\mathrm{fl}(x - y) = x - y$ y el cálculo es exacto.

3. Según el cálculo anterior $(y - x)^{10} = (1.000 \cdot 2^{-4})^{10} = 1.000 \cdot 2^{-40}$, por tanto se produce un Underflow, puesto que el exponente -40 se sale, por abajo, del rango $[-7, 7]$ para el exponente.

4. Calculamos $x+y=(1.100+1.011)\cdot 2^{-1}$:

$$\begin{array}{r} 1.100 \\ +\ 1.011 \\ \hline 10.111 \end{array}$$

por lo que $x+y=10.111\cdot 2^{-1}$ que debemos redondear, mediante redondeo simétrico, pues tiene cinco dígitos en mantisa. Entonces

$$\mathrm{fl}(x+y)=\mathrm{fl}(1.0111\cdot 2^{0})=1.100\cdot 2^{0}\neq x+y$$

que es el resultado después del redondeo simétrico.

5. De acuerdo con la expresión para x se tiene $x/4=1.011\cdot 2^{-3}$; entonces para sumar x e $y/4$ escribimos ambos con exponente -1, el mayor de los dos exponentes, es decir: $x+y/4=(0.01011+1.100)\cdot 2^{-1}$, lo que nos conduce a la operación:

$$\begin{array}{r} 1.100 \\ +0.01011 \\ \hline 1.11011 \end{array}$$

de manera que $y+x/4=1.11011\cdot 2^{-1}$ que, de nuevo, habrá que redondear, obteniendo mediante redondeo simétrico el valor $\mathrm{fl}(y+x/4)=1.111\cdot 2^{-1}$.

6. Procediendo como antes, tenemos $y/4=1.100\cdot 2^{-3}=0.011\cdot 2^{-1}$, de donde

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1.011 \\ +0.011 \\ \hline 1.110 \end{array}$$

Por tanto $\mathrm{fl}(x+y/4)=\mathrm{fl}(1.110\cdot 2^{-1})=1.110\cdot 2^{-1}=x+y/4$, es decir, este cálculo es exacto.

Resumiendo, en la tabla inicial:

Operación	**Exacto**	**Redondeado**	**Overflow**	**Underflow**
$\mathrm{fl}(x-y)$	$\times$			
$\mathrm{fl}((y-x)^{10})$				$\times$
$\mathrm{fl}(x+y)$		$\times$		
$\mathrm{fl}(y+(x/4))$		$\times$		
$\mathrm{fl}(x+(y/4))$	$\times$			

Comentarios. Muchas de las respuestas incluyen el proceso de convertir los valores x e y a base decimal, operar con la conversión y volver a base binaria. Esto es completamente innecesario, con la consiguiente pérdida de tiempo, basta saber operar de forma elemental «llevándose» en binario, como hemos hecho más arriba... Pero, además, es preciso llevar mucho cuidado... no vale redondear en decimal y luego volver a la base 2, esto conduce a errores.

Varias respuestas incluyen un cálculo extraño en el caso de $(y-x)^{10}$, obteniendo una incomprensible expresión que incluye un factor de 2^{-6} en lugar de 2^{-40}... realmente sorprendente.

También es significativo que algunas respuestas afirmen que el máximo exponente es 8 en lugar de 7, siendo, como todos sabemos, $8=1000_{(2)}$ que, por tanto, necesita 4 dígitos binarios.

7. **(1.5 puntos)** Las siguientes operaciones pueden presentar problemas de precisión en su cálculo para valores de ε mucho menores que los de x. ¿Qué problemas son? Encuentra expresiones alternativas para el cálculo de las mismas expresiones que no planteen dichos problemas.

$$a)\quad \frac{1}{x+\varepsilon}+\frac{1}{x-\varepsilon}-\frac{2}{x} \qquad b)\quad \mathrm{tg}(x+\varepsilon)-\mathrm{tg}(x).$$

Solución. En ambos casos se trata claramente de un problema de posible pérdida de dígitos significativos o de cancelación por substracción, puesto que estamos pretendiendo hacer la diferencia de dos cantidades próximas:

$$\left(\frac{1}{x+\varepsilon}+\frac{1}{x-\varepsilon}\right)\approx\frac{2}{x}\quad \text{y}\quad \operatorname{tg}(x+\varepsilon)\approx\operatorname{tg}(x).$$

En el primer caso es muy sencillo encontrar una expresión alternativa que no presenta este problema de cancelación, basta reducir a común denominador:

$$\frac{1}{x+\varepsilon}+\frac{1}{x-\varepsilon}-\frac{2}{x}=\frac{2x}{x^2-\varepsilon^2}-\frac{2}{x}=\frac{2\varepsilon^2}{x(x^2-\varepsilon^2)}$$

que ya no tiene problemas de cancelación (la diferencia en el denominador no presenta el problema pues estamos suponiendo que $|\varepsilon|$ es «mucho menor» que $|x|$).

Para el segundo caso, lo ideal es escribir:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x+\varepsilon)-\operatorname{tg}(x)&=\frac{\operatorname{sen}(x+\varepsilon)}{\cos(x+\varepsilon)}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\operatorname{sen}(x+\varepsilon)\cos x-\cos(x+\varepsilon)\operatorname{sen}x}{\cos(x+\varepsilon)\cos x}=\\&=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos(x+\varepsilon)\cos x}\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a\cos(-b)+\cos a\operatorname{sen}(-b)=\operatorname{sen}a\cos b-\operatorname{sen}a\cos b$$

que es (o debería ser) muy bien conocida. Obviamente la expresión encontrada ya no plantea problemas de cancelación.

Comentarios. La mayor parte de las respuestas para el segundo caso proponen utilizar un desarrollo de Taylor de la tangente. La idea es correcta, aunque lo que se trataba era de encontrar un expresión alternativa y no «una forma de aproximación» al resultado. Desde el punto de vista computacional las dos cosas pueden ser la misma, pero el significado de la pregunta del enunciado era claro...

Aún con todo, algunas respuestas proponían hacer el desarrollo de Taylor de la tangente en el punto 0, lo que no tiene mucho sentido si quiero aproximar $\operatorname{tg}(x+\varepsilon)$ para $\varepsilon\approx 0$, pues en ese caso lo naural es desarrollar en x. A pesar de ello... he valorado parcialmente estos casos...

Lo que creo que es inadmisible es que no todos conozcáis perfectamente las igualdades

$$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\\ \operatorname{sen}(a+b)&=\operatorname{sen}a\cos b+\cos a\operatorname{sen}b\end{aligned}$$

Varias respuestas muestran que no se conocen estas fórmulas de forma correcta y hay quien admite desconocerla... e intuye que una buena expresión para el seno o coseno de una suma daría una buena respuesta... Insisto, ¡es inadmisible!

8. **(1 punto)** Supongamos que disponemos del valor de e^x con precisión suficiente. Escribe un algoritmo que permita calcular

$$5e^{3x}+7e^{2x}+9e^x+11$$

de la forma más eficiente que puedas.

Solución. Este es un ejercicio muy sencillo. Basta observar que la expresión $5e^{3x}+7e^{2x}+9e^x+11$ se puede escribir como $p(t)$, siendo $t=e^x$ y $p(z)=5z^3+7z^2+9z+11$, de forma que, disponiendo del valor de $t=e^x$, como dice el enunciado, sólo queda evaluar de forma eficiente el valor de $p(t)$. Siendo $p(z)$ un polinomio basta recordar el método de Horner para una evaluación eficiente.

Así, podemos poner en forma de algoritmo:

```
a←[5,7,9,11]
t←exp(x)
v←a(1)
for k=2:length(a)
{  v←v*t+a(k)  }
```

Obtenemos el valor buscado (v) con seis operaciones básicas (tres sumas y tres productos).

El ejercicio era muy sencillo y tan solo pretendía que se reconociera «a la vista» una expresión de tipo polinomial susceptible de evaluar de forma eficiente mediante el algoritmo de Horner. La calificación ha sido en este sentido contundente: las respuestas que no utilizaban este método de Horner y que buscaban alguna combinación extraña (por ejemplo, el hecho de que los coeficientes van de dos en dos) o ninguna de ellas y simplemente escribían el cálculo directo, se han valorado con 0 puntos.

9. **(3 puntos)** Disponemos de la siguiente tabla de valores para una función $f(x)$ desconocida:

x	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
$f(x)$	1.1076	1.1898	1.2495	1.2920	1.3263	1.3516	1.3739	1.3904

La tabla de diferencias divididas correspondiente es:

2.0	1.10760							
2.5	1.18980	0.16440						
3.0	1.24950	0.11940	−0.04500					
3.5	1.29200	0.08500	−0.03440	0.00707				
4.0	1.32630	0.06860	−0.01640	0.01200	0.00247			
4.5	1.35160	0.05060	−0.01800	−0.00107	−0.00653	−0.00360		
5.0	1.37390	0.04460	−0.00600	0.00800	0.00453	[?]	[?]	
5.5	1.39040	0.03300	−0.01160	−0.00373	−0.00587	−0.00416	[?]	[?]

a) Completa los huecos que faltan en la tabla.

b) Escribe, sin realizar ningún cálculo adicional, los polinomios interpoladores en los conjuntos de abscisas: $\{2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5\}$, $\{3.0, 3.5, 4.0\}$ y $\{5.0, 5.5\}$.

c) Intentamos aproximar $f(3.15)$ mediante un polinomio de grado 3 y tenemos dudas entre dos conjuntos de nodos. ¿Qué dos conjuntos tomarías para interpolar de forma que preveas mejores aproximaciones? Explica tu elección.

d) Calcula la aproximación de $f(3.15)$ para los dos conjuntos de nodos elegidos en el apartado anterior y da una estimación del error en cada caso.

Solución. Para entendernos fácilmente, numeraremos las columnas de la tabla de diferencias divididas desde el 0 (la primera columna, de abscisas) hasta la columna 8.

Apartado *a*). Los valores que faltan en la tabla de diferencias divididas son:

- $f[2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5]$, en la columna 6;
- $f[2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5]$ y $f[2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5]$ en la 7,
- $f[2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5]$ en la última columna.

Utilizando el algoritmo de las diferencias divididas, para el primer valor desconocido tenemos:

$$f[2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5] = \frac{f[3, 3.5, 4, 4.5, 5] - f[2.5, 3, 3.5, 4, 4.5]}{5 - 2.5} = \frac{0.00453 - (-0.00653)}{2.5} \approx 4.4240 \cdot 10^{-3}x$$

(observa que es inútil escribir más cifras significativas, pues los datos ya vienen dados con 5 cifras significativas).

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es

De forma análoga, y sin escribir ya todos los detalles:

$$\begin{aligned}
f[2,2.5,3,3.5,4,4.5,5] &= \frac{0.004424-(-0.0036)}{5-2} \approx 2.6747\cdot 10^{-3}\\
f[2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5] &= \frac{-0.00416-0.004424}{5.5-2.5} \approx 2.8613\cdot 10^{-3}\\
f[2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5] &= \frac{-0.0028613-0.0026747}{5.5-2} \approx 1.5817\cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

Apartado b). Para escribir los polinomios que nos pide el enunciado no necesitamos calcular nada, ninguna diferencia dividida: basta seleccionar la parte de la tabla que nos interese según los nodos donde se quiera interpolar. Así, para interpolar en los puntos de abscisas $\{2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5\}$ basta que nos quedemos con la parte de la tabla que indico a continuación en color intenso (en gris la parte no necesaria):

2.0	1.10760							
2.5	1.18980	0.16440						
3.0	1.24950	0.11940	−0.04500					
3.5	1.29200	0.08500	−0.03440	0.00707				
4.0	1.32630	0.06860	−0.01640	0.01200	0.00247			
4.5	1.35160	0.05060	−0.01800	−0.00107	−0.00653	−0.00360		
5.0	1.37390	0.04460	−0.00600	0.00800	0.00453	[?]	[?]	
5.5	1.39040	0.03300	−0.01160	−0.00373	−0.00587	−0.00416	[?]	[?]

Así, el polinomio interpolador en los puntos de abscisas en $A = \{2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5\}$ es, en la forma de Newton:

$$\begin{aligned}
p_A(x) = 1.1898 + 0.1194(x-2.5) - 0.0344(x-2.5)(x-3) + 0.012(x-2.5)(x-3)(x-3.5) -\\
- 0.00653(x-2.5)(x-3)(x-3.5)(x-4).
\end{aligned}$$

Para los conjuntos de abscisas $B = \{3.0, 3.5, 4.0\}$ y $C = \{5.0, 5.5\}$ los polinomios interpoladores son:

$$\begin{aligned}
p_B(x) &= 1.2495 + 0.085(x-3) - 0.0164(x-3)(x-3.5)\\
p_C(x) &= 1.3739 + 0.033(x-5)
\end{aligned}$$

basta seleccionar los valores adecuados de la tabla (indicados en naranja y verde para B y C respetivamente):

2.0	1.10760							
2.5	1.18980	0.16440						
3.0	1.24950	0.11940	−0.04500					
3.5	1.29200	0.08500	−0.03440	0.00707				
4.0	1.32630	0.06860	−0.01640	0.01200	0.00247			
4.5	1.35160	0.05060	−0.01800	−0.00107	−0.00653	−0.00360		
5.0	1.37390	0.04460	−0.00600	0.00800	0.00453	[?]	[?]	
5.5	1.39040	0.03300	−0.01160	−0.00373	−0.00587	−0.00416	[?]	[?]

Apartados c) y d). Para dilucidar qué grupo de cuatro nodos elegir con el objetivo de aproximar el valor de $f(3.15)$ debemos tener en cuenta la fórmula del error de aproximación por un polinomio interpolador de grado tres:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\prod_{j=0}^{3}(x-x_j)$$

donde ξ es algún punto intermedio entre los x_j y x.

Debemos recordar que, dado que ignoramos las derivadas de cualquier orden de la función, podemos estimar el valor del coeficiente $f^{(4)}(\xi)/4!$ mediante una diferencia dividida de orden cinco, es decir

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es

unos de los valores en la columna número cinco de nuestra tabla. La cuestión es si elegimos una diferencia dividida concreta y cuál de ellas.

En realidad lo prudente es elegir el máximo de las diferencias divididas, en valor absoluto, de la columna número cinco. De esto ya hablamos en algún ejercicio. Podemos argumentar que si eligiéramos los nodos $\{2, 2.5, 3, 3.5\}$, el valor de ξ estaría en el intervalo $(2, 3.5)$ y, eligiendo el punto adicional como 4, para utilizar la diferencia dividida $f[2, 2.5, 3, 3.5, 4] = 0.00247$ como estimación de $f^{(4)}(\xi)/4!$, estaríamos aproximándonos mejor al problema, pues el valor de η tal que $f[2, 2.5, 3, 3.5, 4] = f^{(4)}(\eta)/4!$ está en el intervalo $(2, 4)$, no muy alejado pues del que buscamos. Pero lo cierto es que la información sobre la derivada cuarta de f aquí es muy escasa y es un tanto atrevido razonar como antes (me parece a mí...)

En cualquier caso, en la fórmula del error hay otro factor sobre el que sí tenemos todo el control: podemos minimizar el valor de $|\prod_{j=0}^{3}(x - x_j)|$ eligiendo adecuadamente los nodos.

Así, tenemos:

$$|3.15 - 3| < |3.15 - 3.5| < |3.15 - 2.5| < |3.15 - 4| < |3.15 - 2| < |3.15 - 4.5|.$$

Por tanto, los conjuntos de nodos más adecuados, porque minimizan el producto anterior para $x = 3.15$ son $M = \{2, 2.5, 3, 3.5\}$ y $N = \{2.5, 3, 3.5, 4\}$. Aunque, volviendo a la discusión anterior, si elegimos una diferencia dividida concreta para estimar el factor de la derivada cuarta, los conjuntos que hacen más pequeño el total de la estimación del error pueden cambiar según la diferencia dividida elegida.

Por ahora yo elijo el máximo de los valores absolutos de la columna número cinco: 0.00653.

Así el error con el conjunto M será

$$e_M \approx 0.00653 \cdot 1.15 \cdot 0.65 \cdot 0.15 \cdot 0.35 \approx 2.563 \cdot 10^{-4}.$$

En este caso el polinomio interpolador en M es

$$p_M(x) = 1.1076 + 0.1644(x - 2) - 0.045(x - 2)(x - 2.5) + 0.00707(x - 2)(x - 2.5)(x - 3)$$

cuyo valor en 3.15 es:

$$p_M(3.15) = \big((0.00707 \cdot 0.15 - 0.045) \cdot 0.65 + 0.1644\big) \cdot 1.15 + 1.1076 \approx 1.2638$$

Para el polinomio N tenemos una estimación del error dada por:

$$e_N \approx 0.00653 \cdot 0.65 \cdot 0.15 \cdot 0.35 \cdot 0.85 \approx 1.8941 \cdot 10^{-4}$$

El polinomio será en este caso:

$$p_N(x) = 1.1898 + 0.1194(x - 2.5) - 0.0344(x - 2.5)(x - 3) + 0.012(x - 2.5)(x - 3)(x - 3.5)$$

cuyo valor en 3.15 es

$$p_N(3.15) = \big((-0.012 \cdot 0.35 - 0.0344) \cdot 0.15 + 0.1194\big) \cdot 0.65 + 1.898 \approx 1.2636.$$

Comentarios. En general, las respuestas a este ejercicio han sido bastante buenas. Quizás lo más llamativo es que algunos estudiantes no han sabido responder al apartado *b*), es decir, no han observado cómo «extraer» una parte de la tabla para obtener los coeficientes de los polinomios en ciertos subconjuntos de nodos... que es una de las grandes ventajas del método de las diferencias divididas.

En cuanto al apartado *c*), una buena parte de respuestas no incluyen un argumento para elegir dos conjuntos de cuatro nodos. Es cierto que la separación en dos apartados, *b*) y *c*), del enunciado creo que despistaba un poco, o dificultaba el análisis general necesario. En todo caso, tal y como he tratado de explicar en la solución anterior, es mejor mejor considerar ambos apartados conjuntamente.

Llama la atención, finalmente, que algunas respuestas muestran poca comprensión de lo que se está haciendo: si quiere estimar un valor desconocido ($f^{(4)}(\xi)/4!$) no es lógico decir: «voy a elegir la diferencia dividida más pequeña para estimar este valor, porque así el error será más pequeño».

10. **(3 puntos)** Considera para cada $c > 0$ la función

$$f_c(x) = \frac{1}{1 + c(x+1)}$$

Sea $p_n(x)$ el polinomio interpolador de $f_c(x)$ en $n+1$ nodos $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Estudia para qué valores de c se verifica que $p_n(x)$ tiende uniformemente a $f_c(x)$ en el intervalo $[a, b]$, cuando n tiende a infinito, en los casos siguientes:

a) el intervalo es $[a, b] = [0, 1]$ y los nodos son arbitrarios;

b) el intervalo es $[a, b] = [-1, 1]$ y los nodos son arbitrarios;

c) el intervalo es $[a, b] = [-1, 1]$ y los nodos son los nodos de Chebyshev.

Solución. De acuerdo con los resultados sobre aproximación de los polinomios interpoladores, tenemos las acotaciones siguientes. Si los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ son arbitrarios en $[a, b]$:

$$\|f_c - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f_c^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|q_n\|_\infty$$

donde $q_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ y la norma del supremo se toma en el intervalo $[a, b]$.

Si $[a, b] = [-1, 1]$ y los nodos son los puntos de Chebyshev, entonces

$$\|f_c - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f_c^{(n+1)}\|_\infty}{2^n (n+1)!}.$$

Para simplificar la notación, indico el intervalo $[a, b]$ en el que estoy calculando $\|g\|_\infty$, en lugar de utilizar la notación más complicada $\|g\|_{\infty,[a,b]}$.

En cualquier caso, la primera tarea será calcular $f_c^{(n)}(x)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y obtener una mayoración de $\|f_c^{(n)}\|_\infty$ según sea el intervalo $[a, b]$.

La primera tarea es bien sencilla... con un «poco de inducción» se tiene:

$$f_c^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n c^n \, n!}{(1 + c + cx)^{n+1}}$$

Ahora, para mayorar $\|f_c^{(n)}\|_\infty$ basta darse cuenta de que hay que estudiar los valores extremos del denominador, puesto que

$$|f^{(n)}(x)| = \frac{c^n \, n!}{(1 + c + cx)^{n+1}}$$

Ahora el denominador es una función afín, creciente y positiva en $[-1, 1]$ (pues $c > 0$), por tanto su valor mínimo en el intervalo $[a, b]$ (con $[a, b] = [0, 1]$ o $[a, b] = [-1, 1]$) se alcanza en $x = a$, lo que nos indica que el máximo de $|f^{(n)}(x)|$ se alcanza también en $x = a$. Así, tenemos

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(0)| = \left(\frac{c}{c+1}\right)^n n! \quad \text{si } x \in [0, 1]$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(-1)| = c^n \, n! \quad \text{si } x \in [-1, 1]$$

Por tanto,

$$\frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)} \leq \left(\frac{c}{c+1}\right)^{n+1} \quad \text{en } [0,1]$$
$$\frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)} \leq c^{n+1} \quad \text{en } [-1,1]$$

Y finalmente podemos concluir.

a) En el caso de nodos arbitrarios en $[0,1]$ tenemos $\|q_n(x)\|_\infty \leq 1$, de donde

$$\|f_c - p_n\|_\infty \leq \left(\frac{c}{c+1}\right)^{n+1}$$

y, por tanto, hay convergencia uniforme para cualquier $c > 0$, ya que $0 < \frac{c}{c+1} < 1$ para cualquier $c > 0$, luego $\left(\frac{c}{c+1}\right)^{n+1}$ tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$ (para cualquier $c > 0$).

b) Si $[a,b] = [-1,1]$ y los nodos son arbitrarios, tenemos $\|q_n(x)\|_\infty \leq 2^{n+1}$ y, por tanto

$$\|f_c - p_n\|_\infty \leq c^{n+1}2^{n+1} = (2c)^{n+1}$$

así, necesitamos que $|2c|$ sea menor que 1 para garantizar que la cota anterior tienda a 0; por tanto, hay convergencia uniforme para $0 < c < \frac{1}{2}$.

c) Finalmente, si los nodos son los de Chebyshev y $[a,b] = [-1,1]$, utilizando la acotación de $\|f_c - p_n\|$ para este caso, dada al inicio de esta solución, tenemos:

$$\|f_c - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f_c^{(n+1)}\|_\infty}{2^n(n+1)!} = \frac{c^{n+1}}{2^n} = c\left(\frac{c}{2}\right)^n$$

y basta tener $0 < c < 2$ para garantizar la convergencia uniforme.

COMENTARIOS. Muchas respuestas a este ejercicio han sido correctas. Aunque hay algunos casos llamativos. Sin duda, el más llamativo es el de los que no han sabido calcular la derivada de orden arbitrario de f_c... ¡a estas alturas!

Otra situación que llama la atención es la de aquellos que no han leído con atención el enunciado y, o bien escriben mal la función, $1/(1 + c(x-1))$, o bien toman c no necesariamente positivo, o bien ambas cosas.

La mayor dificultad encontrada ha sido en la mayoración de $|f^{(n+1)}(x)|$. Esto era realmente simple: es una constante dividida por una función, así que basta «minorar» la función de denominador que, para mayor simplicidad, es de la forma $ax + b$ con $a > 0$. Imperdonable es que todavía haya quien utiliza que ¡$a < b$ implica $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$!