Universidad de Murcia

Teoría Ol 2023

Alonso Oma Alonso

13 de mayo de 2023

Índice

1. Teoría:

1.1. Tema 3:

Teorema. *3.3*

Sea $\bar{x}$ un punto de M. $\bar{x}$ es un punto extremo de M si se encuentra en n hiperplanos definitorios linealmente indendientes.

Demostración.

$"\Longleftarrow"$

$M = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$

- Supongamos $\bar{x}$ está en n hiperplanos definitorios linealmente indendientes. Sea $Gx = g$ el sistema definido por estos n hiperplanos. Como $rg(G) = n$, el sistema es **SCD**.

- Por reducción al absurdo, supongamos que x no es un punto extremo. $\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ con $x_1 \neq x_2 \in M, 0 < \lambda < 1$.

- En cada hiperplano donde $\bar{x}$ es conectante tambien lo son x_1 y x_2. Entonces x_1 y x_2 también son soluciones de $Gx = g \Longrightarrow$ **CONTRADICCIÓN**

$"\Longrightarrow"$

$M = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$

- Supongamos que $\bar{x}$ es punto extremos y es conectante a $h < n$ hiperplanos definitorios linealmente indendientes. Sea $Gx = g$ el sistema definido por los hiperplanos en los que $\bar{x}$ es conectante. $rg(G) = h$.

- El sistema $Gd = 0$ es **SCI**, pues $rg(G) = rg(G, 0) = h < n$. Sea $\bar{d} \neq 0$ solución de $Gd = 0$.

- $x_1 = \bar{x} + \epsilon\bar{d}, x_2 = \bar{x} - \epsilon\bar{d}$. x_1 y x_2 son conectantes en todos los hiperplanos donde los es $\bar{x}$ (son soluciones del sistema $Gx = g$).

- Considerenos una restricción $\alpha^t x \leq \beta$ en la que $\bar{x}$ no es conectante ($\alpha^t \bar{x} < \beta$).

$$\alpha^t x_1 = \alpha^t \bar{x} + \epsilon\alpha^t d < \beta + \epsilon\alpha^t d \qquad \alpha^t x_2 = \alpha^t \bar{x} - \epsilon\alpha^t d < \beta - \epsilon\alpha^t d$$

- Es decir, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, x_1 y x_2 también satisfacen las otras restricciones en las que $\bar{x}$ no es conectante. Luego, $x_!, x_2 \in M$ y $\bar{x} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema. *3.5*

Sea $M = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacío. Entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de puntos.

Demostración.

$M = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \varnothing$. Sea $\bar{x} \in M$. Supongamos que $\bar{x}$ no es un punto extremo:

- $\bar{x}$ está en $0 \leq h < n$ hiperplanos definitorios linealmente indendientes.
- $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $x_1 \neq x_2 \in M, 0 < \lambda < 1$.

Sea $d = x_2 - x_1 \neq 0 \rightarrow x_1 = \bar{x} - (1-\lambda)d$ y $x_2 = \bar{x} + \lambda d$. En al menos uno de los sentidos d o $-d$ no se puede avanzar indefinidamente a partir de $\bar{x}$, pues $M \subset \mathbb{R}^n$ (o el rayo toca en algún hiperplano $a_j^t x = b_j$ o en alguno de la forma $x_j = 0$). SIn perdida de generalidad, supongamos que eso ocurre en el sentido $-d$.

Sea $\bar{\epsilon} = max\{\epsilon \geq 0 : \bar{x} - \epsilon d \in M\}$ y sea $\bar{x}_1 = \bar{x} - \bar{\epsilon} d$. $\bar{x}$ está en el segmento dado por $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ lo que implica que $\bar{x}_1$ está en los hiperplanos definitorios en los que está $\bar{x}$. Además, por construcción $\bar{x}_1$ está en alg´n otro hiperplano definitorio $\alpha^t x = \beta$.

$\bar{x}_1$ está en $h+1$ hiperplanos linealmente indendientes. Si es punto extremo, **FIN**. En caso contrario, se repite el proceso.

Supongamos que los h hiperplanos en los que está $\bar{x}$ son $\{a_j^t x = b_j\}_{j=1}^h$ y supongamos que $\alpha^t x = \beta$ es combinación lineal de ellos $\longrightarrow \alpha = \sum_{j=1}^h \lambda_j a_j$. Entonces se tendría que $\alpha^t \bar{x}_1 = \beta = \sum_{j=1}^h \lambda_j a_j^t \bar{x}_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j b_j$. Por otro lado, $\alpha^t \bar{x} = \sum_{j=1}^h \lambda_j a_j^t \bar{x} = \sum_{j=1}^h \lambda_j b_j = \beta$. Es decir, si el nuevo hiperplano en el que $\bar{x}_1$ es conectante fuese linealmente dependiente de los anteriores, entonces $\bar{x}$ ya sería conectante sobre él, lo cuál es absurdo por construcción. $\square$