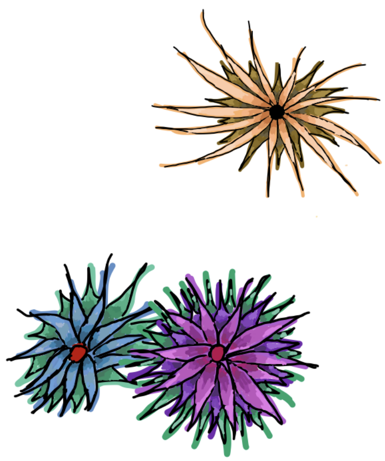
COMPLEJA

Universidad de Murcia



Author

Alonso Oma Alonso

Murcia

September 12, 2023

Contents

1 Tema 1:

1.1 El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Historicamente, un número complejo es $a + i \cdot b$, donde a, b $\in \mathbb{R}$, y donde el símbolo i cumple $i^2 = -1$.

Usando esta regla se define un producto formal

$$(a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot(c+id) + ib\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Definición 1.1. Llamamos $\mathbb{C}$ al conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ dotado con las reglas de composición

- **Suma:** $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$
- **Producto:** $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Denotaremos $i \equiv (0,1) \in \mathbb{C}$, y si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \equiv (a,0)$.

En Particular,

$$a + ib = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0) \overbrace{=}^{PROD} (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

Así los elementos $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ se identifican con $a + ib$.

Teorema 1.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo tal que

- contiene a $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\}$ como subcuerpo
- $z^2 = -1$ tiene solución

Además, es el menor cuerpo con esas dos propiedades.

Proof. Ejercicio sencillo de álgebra:

- $(\mathbb{C}, +)$ es grupo abeliano.
- $(\mathbb{C}/\{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano.
- Propiedad distributiva.

La única propiedad no trivial es $z \in \mathbb{C}/\{0\} \Longrightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} | z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Para probarlo hallamos $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ formalmente: $z^{-1} = (a+ib)(a-ib) = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$.

Con esta expresión explícita se comprueba que $z \cdot z^{-1} = 1$.

- Claramente $\mathbb{C}$ contiene a $\mathbb{R} = \{(a,0) | a \in \mathbb{R}\}$, y la ecuación $z^2 = -1$ tiene solución en $\mathbb{C}:\ z = \pm i = (0, \pm 1) \in \mathbb{C}$

- Además, cualquier otro cuerpo con esas propiedades debe contener $a + bi, \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{K}$.

$\square$

Ejercicio 1.3. Si $w \in \mathbb{C}$, probar que $\exists\ z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = w$.
Sugerencia: Escribir $w = a + ib$, buscar $z = x + iy$ tal que $(x + iy)^2 = a + ib$.

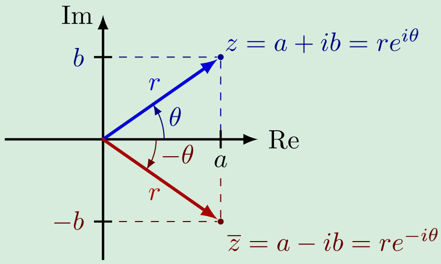
Ejercicio 1.4.

- Operar $\frac{1}{4+4i}$, $\sqrt{3 + 4i}$, $(1 + i)^4$
- Probar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ no admite ningún orden total.

Definición 1.5. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definimos

- **Parte real:** $Re(z) = a$
- **Parte imaginaria:** $Im(z) = b$
- **Módulo:** $|z|^2 := \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Conjugado:** $\overline{z} := a - ib$

Notar que $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Además, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.



Proposición 1.6. Propiedades: Si $z,\ w \in \mathbb{C}$ entonces

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
2. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$