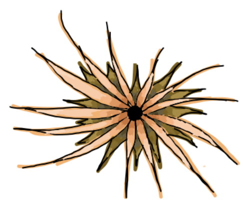
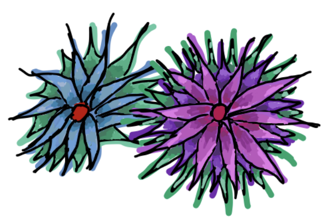
Universidad de Murcia

EDO





Teresa
Alonso Oma Alonso

28 de febrero de 2023

Índice

1. Tema 1: Introducción. Existencia y unicidad de soluciones.

1.1. Introducción y definiciones

Las ecuaciones diferenciales son muy importantes por su aplicación en las ciencias experimentales y en las técnicas, y también, por supuesto, son muy importantes en Matemáticas. Son muchas las leyes de la naturaleza que se explican mediante las ecuaciones diferenciales, ya que estas expresan una relación entre una función y sus derivadas. No debemos olvidar que la derivada de una función expresa la variación de esta respecto de la variable de la que depende. En primer lugar veremos un ejemplo:

Caída retarada de un objeto: Supongamos que tenemos un objeto de masa **m** que cae libremente por la acción de la gravedad y que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad . La 2^{a} Ley de Newton dice *"La fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa y a la aceleración con que se mueve"* es decir, $\sum \mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$

$$\overbrace{m \cdot a}^{F_1} = \overbrace{mg - k \cdot v}^{F_2}$$

Supongamos que el cuerpo se encuentra a una cierta altura "**h**". Si denotamos por $y(t)$ a la función que nos da la posición del objeto en el instante "**t**.^{o}btenemos la ecuación:

$$m \cdot y''(t) = mg - k \cdot y'(t) \quad \textit{Ecuación diferencial de segundo orden.}$$

Si nos preguntamos cuál es la posición del objeto después de por ejemplo, 2 segundos, tendriamos que resolver"la ecuación diferencial.

Movimiento pendular: Supongamos que tenemos una varita de masa despreciable de longitud "**l**z con un objeto de masa "**m**.^{en} el extremo. Si impulsamos el péndulo hasta un ángulo "θ_0"se tendrá que en la posición extrema $\theta = \theta_0$ sólo tiene energía potencial:

$$E = mg(l - l\cos\theta_0)$$

En la posición $\theta(t)$ la energía del péndulo es parte cinética y parte potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(l - l\cos\theta(t))$$

El ***"Principio de conservación de la energía"*** dice que la energía se conserva y por lo tanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 \;= mg(l\cos\theta(t) - l\cos\theta_0)$$

Si denotamos por $s(t)$ a la longitud del arco correspondiente al ángulo $\theta(t)$ entonces $s(t) = l \cdot \theta(t)$ y $v(t) = l \cdot \theta'(t)$.

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos :

$$\frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 = mgl(\cos\theta(t) - \cos\theta_0) \Rightarrow (\theta'(t))^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)$$

es decir,

$$\theta'(t) \;\; = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)} \quad \textit{Ecuación diferencial de primer orden.}$$

Nota: Se toma el valor negativo pues $\theta(t)$ disminuye en función del tiempo.

Definición 1.1. *Ecuación diferencial: Una ecuación diferenciales una ecuación en la que la incógnita es una función/funciones y en la que aparacen las derivadas ó derivadas parciales de la función/funciones con respecto a su variable /variables independientes.*

- ***Ecuación diferencial ordinaria*** $\longrightarrow$ *e.d. con una sola variable independiente.*
- ***Ecuaciones en Derivadas Parciales*** $\longrightarrow$ *e.d. con dos o más variables independientes.*

En este curso estudiaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.2. *EDO escalar*

Una ecuación diferencial ordinaria 'escalar' de orden n es una expresión de la forma:

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

donde

- $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- *t es la variable independiente,*
- *$y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}$ es la variable dependiente o **función desconocida** $y : I \to \mathbb{R}$ y sus derivadas sucesivas respectode t.*

*La forma anterior se llama **forma explícita** de la EDO de orden n.*

*La forma **normal o explícita** de una EDO de orden n es cuando se encuentra resuelta con respecto de la derivada de orden n de la función, es decir,*

$$y^{(n)}(t)0f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

donde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nota: *El orden de una ED es el de su derivada de mayor orden.*

Ahora se plantean las cuestiones: ¿cómo se resuelve una ED. Ordinaria? ¿Qué se considera una solución?

Definición 1.3. *Sea* $\bigotimes$ $F(t, y, y', \ldots, y^n) = 0$ *una EDO de orden* n.

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se dice que $\phi : I \to \mathbb{R}$ *es solución de* $\bigotimes$ *en* I *(*I *intervalo de* $\mathbb{R}$*) si cumple:*

- ϕ *es derivable* n *veces en* I.
- $(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in I.$
- $F(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}) = 0, \quad \forall t \in I.$

Hay EDOs que no tienen solución, las hay que tienen infinitas soluciones y las hay que sólo tienen una.

Lo más usual es que la EDO tenga ∞ soluciones que dependen de parámetros.

1.2. EDO's escalares y EDO's vectoriales

Definición 1.4. *EDO escalar (*$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*):*

$$\begin{array}{cc} F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 & \qquad y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} & \qquad f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}$$

Definición 1.5. *EDO vectorial (*$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*):*

$$\begin{array}{cc} F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 & \qquad y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{(n+1)-veces} \to \mathbb{R} & \qquad f : D \subseteq \mathbb{R} \times \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{(n)-veces} \to \mathbb{R} \end{array}$$

Definición 1.6. ***Sistemas de ecuaciones diferenciales*** *(*$Y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*)*
Considerando las funciones componentes, toda función vectorial se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciles y al revés.

Importante: ***Toda EDO escalar de orden 'n' se puede transformar mediante un 'cambio de variable' en una ecuación vectorial de orden 1.***

"To do: terminar de hacer esta parte y escribir el ejemplo."

Por lo tanto, de ahora en adelante (si no se dice lo contrario) estudiaremos las ***EDO's vectoriales de primer orden****:*

$$y' = f(t, y(t)) \quad \text{con} \quad y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Generalmente a esta ecuación se le añade una condición inicial $y(t_0) = y_o$ *para un* $(t_0, y_o) \in I \times \mathbb{R}^n$ *fijo.*

1.3. Problema de Cauchy (o de valores inciales):

$$(P) = \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ t_0 \in \mathbb{R}, \ y_0 \in \mathbb{R}$$

."El motivo de las condiciones iniciales" viene de las aplicaciones físicas en que $t_0 = y_0 = 0$, es decir, $y(0) = 0$.

Objetivo: Estudiar existencia, unicidad y prolongación de soluciones de un problema de Cauchy (P).

Definición 1.7. *Sea un problema de Cauchy*

$$(P) = \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ t_0 \in \mathbb{R}, \ y_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de (P) en I (I intervalo de $\mathbb{R}$) si cumple:

1. *ϕ es derivable en I.*
2. *$(t, \phi(t)) \in D \quad \forall t \in I$.*
3. *$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I$.*
4. *$\phi(t_0) = y_0$.*

Ejemplo 1.1.

$$(P) = \begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Vimos que $\phi(t) = \mathcal{C} \cdot e^{3t}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, es la solución general de $y' = 3y$. Ahora tenemos una condición inicial $y(0) = 2$, luego la solución ϕ debe cumplir que $\phi(0) = 2 \Rightarrow \mathcal{C} \cdot e^0 = 2 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{C} = 2$. Por lo tanto, $\phi(t) = 2e^{3t}$ es la solución de (P) y además es única.

1.4. Equivalencia entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales.

Muchas veces para estudiar la existencia y unicidad de la solución de un problema de Cauchy $y' = f(t, y), y(t_0) = y_o$ es conveniente transformar el problema en una **ecuación integral**. Eso lo podemos hacer gracias al siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Equivalen:*

1. *ϕ es solución del problema de Cauchy (P) en I.*
2. - *i) $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.*

- *ii)* $(t, \phi(t)) \in D \quad \forall t \in I$.
- *iii)* $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \quad \forall t \in I$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si ϕ es solución del problema de Cauchy en I entonces se cumple i), ii) y además:

$$(P) = \left\{ \begin{array}{c} \phi' = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t_0) = y_0 \end{array} \right. \qquad \phi \in \mathcal{C}(I), f \in \mathcal{C} \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}(I)$$

Observar que $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), (t, \phi(t)) \in D, f \in \mathcal{C}(D), \phi'(t) = f(t, \phi(t)) \Rightarrow \underline{\phi'(t) \in \mathcal{C}(I)}$. Entonces existe $\int_{t_0}^{t} \phi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \quad \forall t \in I$.

Aplicando la regla de Barrow se obtiene que

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds \implies \phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds \quad \forall t \in I$$

($\Longleftarrow$) Por hipótesis, $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds$ es evidente que $\phi(t_0) = y_0$. Además, como $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $(s, \phi(s)) \in D \ \forall s \in I$ y $f \in \mathcal{C}(D)$, entonces la función $s \rightsquigarrow f(s, \phi(s))$ es continua en I. Por lo tanto, aplicando el **Teorema Fundamental del Cálculo**, se tine:

$$\phi'(t) = 0 + (\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds)' = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Acabamos de demostrar que ϕ es solución de (P) en I. □

<u>Nota:</u> Si f es continua $\rightarrow \phi \in \mathcal{C}^1$

En general no es fácil encontrar de forma exacta la solución/soluciones de una EDO $y' = f(x, y)$ aunque f tenga una expresión sencilla. Por esa razón es muy Importante el cálculo aproximado de soluciones y los procedimientos teóricos que sirven para conocer las propiedades de las soluciones (*existencia, unicidad, prolongación,...*) sin obtener la expresión explícita de estas.

Los ***métodos elementales*** *de resolución de EDO's son métodos* ***excepcionales*** *que proporcionan el cálculo exacto de las soluciones.*

1.5. Interpretación geométrica. Isoclinas, campo de pendientes.

Las ecuaciones **escalares** de primer orden en forma normal tienen la siguiente Interpretación geométrica. Supongamos que tenemos la EDO

$$y' = f(t, y) \qquad con f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

y que $\exists \ \phi$ solución en I, entonces $\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \ \forall t \in I$.

Sea $(t_0, \phi(t_0))$ fijo $\longrightarrow \phi'(t_0) = (t_0, \phi(t_0)) = K_0$ un número real concreto. Entonces si tomamos K_0 la pendiente de la recta que pasa por (t_0, y_0) será la recta tangente a la gráfica de la función solución (si existe) ϕ en en $(t_0, \phi(t_0))$.

Se pueden dibujar todos los puntos que tienen la misma pendiente K_0 y dibujar en ellos un segmento pequeño de pendiente K_0. Análogamente se puede hacer con otras constantes $K_1, K_2, K_3, \ldots$ Construyendo así el *campo de pendientes de la EDO escalar de primer orden*.

A partir de un campo de pendientes uno se puede hacer una idea de la gráfica de las soluciones. Para dibujar más facilmente el campo de pendientes nos podemos ayudar de las isoclinas.

Definición 1.8. *A las curvas que se corresponden con los puntos del plano tales que $f(t, y) = K$ se les llama* ***isoclinas****.*

$$C_K = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / f(t, y) = K\}$$

1.6. Obtención de una EDO escalar a partir de una familia de curvas:

Dada una familia de curvas que depender de una parámetro $y = h(t, \mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Si $h \in C(\Omega)$, Ω abierto de $\mathbb{R}^2$, y $\exists \frac{\partial h}{\partial t} \in C(\Omega)$, entonces todas las curvas de la familia son solución de la EDO que se obtiene, si se puede eliminar el parámetro $\mathcal{C}$ del sistema.