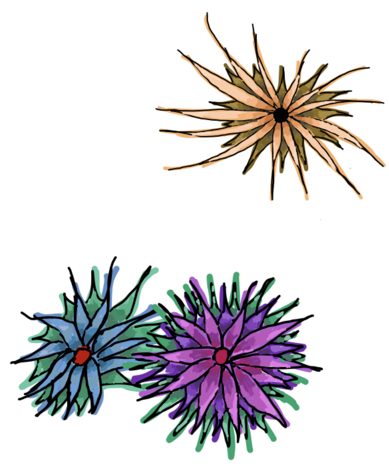
Universidad de Murcia

EDO



Teresa
Alonso Oma Alonso

23 de febrero de 2023

Índice

1. Tema 1: Introducción. Existencia y unicidad de soluciones.

1.1. Introducción y definiciones

Las ecuaciones diferenciales son muy importantes por su aplicación en las ciencias experimentales y en las técnicas, y también, por supuesto, son muy importantes en Matemáticas. Son muchas las leyes de la naturaleza que se explican mediante las ecuaciones diferenciales, ya que estas expresan una relación entre una función y sus derivadas. No debemos olvidar que la derivada de una función expresa la variación de esta respecto de la variable de la que depende. En primer lugar veremos un ejemplo:

Caída retarada de un objeto: Supongamos que tenemos un objeto de masa **m** que cae libremente por la acción de la gravedad y que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad . La 2ª Ley de Newton dice *"La fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa y a la aceleración con que se mueve"* es decir, $\sum \mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$

$$\overbrace{m \cdot a}^{F_1} = \overbrace{mg - k \cdot v}^{F_2}$$

Supongamos que el cuerpo se encuentra a una cierta altura "**h**". Si denotamos por $y(t)$ a la función que nos da la posición del objeto en el instante "**t**.ºbtenemos la ecuación:

$$m \cdot y''(t) = mg - k \cdot y'(t) \quad \textit{Ecuación diferencial de segundo orden.}$$

Si nos preguntamos cuál es la posición del objeto después de por ejemplo, 2 segundos, tendriamos que resolver"la ecuación diferencial.

Movimiento pendular: Supongamos que tenemos una varita de masa despreciable de longitud "**l**z con un objeto de masa "**m**.ᵉⁿ el extremo. Si impulsamos el péndulo hasta un ángulo "θ_0"se tendrá que en la posición extrema $\theta = \theta_0$ sólo tiene energía potencial:

$$E = mg(l - l\cos\theta_0)$$

En la posición $\theta(t)$ la energía del péndulo es parte cinética y parte potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(l - l\cos\theta(t))$$

El ***"Principio de conservación de la energía"*** dice que la energía se conserva y por lo tanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 \ = mg(l\cos\theta(t) - l\cos\theta_0)$$

Si denotamos por $s(t)$ a la longitud del arco correspondiente al ángulo $\theta(t)$ entonces $s(t) = l \cdot \theta(t)$ y $v(t) = l \cdot \theta'(t)$.

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos :

$$\frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 = mgl(\cos\theta(t) - \cos\theta_0) \Rightarrow (\theta'(t))^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)$$

es decir,

$$\theta'(t) \ = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)} \quad \textit{Ecuación diferencial de primer orden.}$$

Nota: Se toma el valor negativo pues $\theta(t)$ disminuye en función del tiempo.

Definición 1.1. *Ecuación diferencial: Una ecuación diferenciales una ecuación en la que la incógnita es una función/funciones y en la que aparacen las derivadas ó derivadas parciales de la función/funciones con respecto a su variable /variables independientes.*

- ***Ecuación diferencial ordinaria*** $\longrightarrow$ *e.d. con una sola variable independiente.*
- ***Ecuaciones en Derivadas Parciales*** $\longrightarrow$ *e.d. con dos o más variables independientes.*

En este curso estudiaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.2. *EDO escalar*
Una ecuación diferencial ordinaria 'escalar' de orden n es una expresión de la forma:

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

donde

- $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- *t es la variable independiente,*
- *$y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}$ es la variable dependiente o **función desconocida** $y : I \to \mathbb{R}$ y sus derivadas sucesivas respectode t.*

*La forma anterior se llama **forma explícita** de la EDO de orden n.*
*La forma **normal o explícita** de una EDO de orden n es cuando se encuentra resuelta con respecto de la derivada de orden n de la función, es decir,*

$$y^{(n)}(t)0f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

donde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Nota: *El orden de una ED es el de su derivada de mayor orden.*

Ahora se plantean las cuestiones: ¿cómo se resuelve una ED. Ordinaria? ¿Qué se considera una solución?

Definición 1.3. *Sea* $\otimes$ $F(t, y, y', \ldots, y^n) = 0$ *una EDO de orden* n*.*

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se dice que $\phi : I \to \mathbb{R}$ *es solución de* $\otimes$ *en* I *(*I *intervalo de* $\mathbb{R}$*) si cumple:*

- ϕ *es derivable* n *veces en* I*.*
- $(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in I.$
- $F(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}) = 0, \quad \forall t \in I.$

Hay EDOs que no tienen solución, las hay que tienen infinitas soluciones y las hay que sólo tienen una.

Lo más usual es que la EDO tenga ∞ soluciones que dependen de parámetros.

1.2. EDO's escalares y EDO's vectoriales

Definición 1.4. *EDO escalar (*$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*):*

$$\begin{array}{cc} F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 & \qquad y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} & \qquad f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}$$

Definición 1.5. *EDO vectorial (*$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*):*

$$\begin{array}{cc} F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 & \qquad y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{(n+1)-veces} \to \mathbb{R} & \qquad f : D \subseteq \mathbb{R} \times \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{(n)-veces} \to \mathbb{R} \end{array}$$

Definición 1.6. ***Sistemas de ecuaciones diferenciales*** *(*$Y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*)*
Considerando las funciones componentes, toda función vectorial se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciles y al revés.

Importante: ***Toda EDO escalar de orden 'n' se puede transformar mediante un 'cambio de variable' en una ecuación vectorial de orden 1.***
"To do: terminar de hacer esta parte y escribir el ejemplo."
Por lo tanto, de ahora en adelante (si no se dice lo contrario) estudiaremos las ***EDO's vectoriales de primer orden****:*

$$y' = f(t, y(t)) \qquad \textit{con} \qquad y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Generalmente a esta ecuación se le añade una condición inicial $y(t_0) = y_o$ *para un* $(t_0, y_o) \in I \times \mathbb{R}^n$ *fijo.*

1.3. Problema de Cauchy (o de valores inciales):

$$(P) = \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ t_0 \in \mathbb{R}, \ y_0 \in \mathbb{R}$$

.El motivo de las condiciones iniciales" viene de las aplicaciones físicas en que $t_0 = y_0 = 0$, es decir, $y(0) = 0$.

Objetivo: Estudiar existencia, unicidad y prolongación de soluciones de un problema de Cauchy (P).

Definición 1.7. *Sea un problema de Cauchy*

$$(P) = \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ t_0 \in \mathbb{R}, \ y_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de (P) en I (I intervalo de $\mathbb{R}$) si cumple:

1. *ϕ es derivable en I.*
2. *$(t, \phi(t)) \in D \quad \forall t \in I$.*
3. *$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I$.*
4. *$\phi(t_0) = y_0$.*

Ejemplo 1.1.

$$(P) = \begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Vimos que $\phi(t) = \mathcal{C} \cdot e^{3t}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, es la solución general de $y' = 3y$. Ahora tenemos una condición inicial $y(0) = 2$, luego la solución ϕ debe cumplir que $\phi(0) = 2 \Rightarrow \mathcal{C} \cdot e^0 = 2 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{C} = 2$. Por lo tanto, $\phi(t) = 2e^{3t}$ es la solución de (P) y además es única.

1.4. Equivalencia entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales.

Muchas veces para estudiar la existencia y unicidad de la solución de un problema de Cauchy $y' = f(t, y), y(t_0) = y_o$ es conveniente transformar el problema en una **ecuación integral**. Eso lo podemos hacer gracias al siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Equivalen:*

1. *ϕ es solución del problema de Cauchy (P) en I.*
2. - *i) $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.*

- *ii)* $(t, \phi(t)) \in D \quad \forall t \in I.$
- *iii)* $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \quad \forall t \in I.$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si ϕ es solución del problema de Cauchy en I entonces se cumple i), ii) y además:

$$(P) = \left\{ \begin{array}{c} \phi' = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t_0) = y_0 \end{array} \right. \qquad \phi \in \mathcal{C}(I), f \in \mathcal{C} \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}(I)$$

Observar que $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), (t, \phi(t)) \in D, f \in \mathcal{C}(D), \phi'(t) = f(t, \phi(t)) \Rightarrow \underline{\phi'(t) \in \mathcal{C}(I)}$. Entonces existe $\int_{t_0}^{t} \phi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \quad \forall t \in I.$

Aplicando la regla de Barrow se obtiene que

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds \implies \phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds \quad \forall t \in I$$

($\Longleftarrow$) Por hipótesis, $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds$ es evidente que $\phi(t_0) = y_0$. Además, como $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $(s, \phi(s)) \in D \ \forall s \in I$ y $f \in \mathcal{C}(D)$, entonces la función $s \rightsquigarrow f(s, \phi(s))$ es continua en I. Por lo tanto, aplicando el **Teorema Fundamental del Cálculo**, se tine:

$$\phi'(t) = 0 + (\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) \cdot ds)' = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Acabamos de demostrar que ϕ es solución de (P) en I. □

<u>Nota:</u> Si f es continua $\rightarrow \phi \in \mathcal{C}^1$

En general no es fácil encontrar de forma exacta la solución/soluciones de una EDO $y' = f(x, y)$ aunque f tenga una expresión sencilla. Por esa razón es muy Importante el cálculo aproximado de soluciones y los procedimientos teóricos que sirven para conocer las propiedades de las soluciones (*existencia, unicidad, prolongación,...*) sin obtener la expresión explícita de estas.

*Los **métodos elementales** de resolución de EDO's son métodos **excepcionales** que proporcionan el cálculo exacto de las soluciones.*

1.5. Interpretación geométrica. Isoclinas, campo de pendientes.

Las ecuaciones **escalares** de primer orden en forma normal tienen la siguiente Interpretación geométrica. Supongamos que tenemos la EDO

$$y' = f(t, y) \qquad con f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

y que $\exists \ \phi$ solución en I, entonces $\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \ \forall t \in I.$

Sea $(t_0, \phi(t_0))$ fijo $\longrightarrow \phi'(t_0) = (t_0, \phi(t_0)) = K_0$ un número real concreto. Entonces