Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Ejercicio A. Fecha: 27/09/2022, 9:00

Nombre: **DNI:**

Total sobre 10 p.

1. **(1 p.)** Dada la ecuación de segundo orden

$$x''(t) + 2\,x'(t) - x(t) = \sin(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Escribirla como un sistema de ecuaciones de primer orden.

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ fijos con $a > 0$ se desea usar el método de Euler para aproximar la solución del problema

$$y(0) = 1,\ y'(t) = -a\,y(t) + b, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(2 p.) Obtener la la expresión de y_n^h y **(1 p.)** deducir la solución exacta a partir de su límite estacionario.

3. Suponer que las soluciones del problema de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)),\ t > 0$ con $y(0) = y_0$ tienen toda la regularidad que sea necesaria y considerar el siguiente método de Runge-Kutta de dos pasos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\,(k_1 + k_2), \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1). \end{aligned}$$

   a) **(1 p.)** Mostrar el tablero de Butcher asociado.

   b) **(2 p.)** Obtener el error de consistencia local del método con respecto a h.

   c) Aplicar el esquema al problema $y'(t) = t$ con $y(0) = 0$ y **(1 p.)** mostrar el error local cometido en este caso. **(2 p.)** Comprobar que el error global es el que indica el análisis realizado.