Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Convocatoria de Febrero. Fecha: 24/01/2022

Observación: Leer todo el examen antes de empezar. A partir de las 10:00 se cuenta convocatoria.

Calificación total: $0.7\times T + 0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría, sobre 10 puntos: Tiempo de 9:30 a 12:00

1. **(1.5 puntos)** Obtener el error de convergencia global que el método del trapecio o de Crank-Nicolson posee cuando se aplica a
$$w'(t) = t^2,\ w(0) = 0.$$
La solución exacta es $w(t) = t^3/3$ y va a ser útil la fórmula de la suma de los cuadrados de números enteros
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Que conclusión se puede extraer de esta información con respecto al orden de convergencia de este método.

2. **(1.5 punto)** Definir el concepto de estabilidad absoluta o A-estabilidad y calcular la región de estabilidad absoluta del método
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,k_2, \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}\,h, y_n + \frac{1}{3}\,h\,k_1). \end{aligned}$$

3. Dada la siguiente variante del método de Euler
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,f\left(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)\right) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$
   a) **(0.5 puntos)** Calcular su error local de consistencia.
   b) **(1 punto)** Basado en este cálculo, encontrar un ejemplo que demuestre el orden de convergencia del método.

4. *a)* **(1 puntos)** Razona tu respuesta Cierto o Falso: Un método de Runge-Kutta explicito de S-etapas tiene orden S.
   b) **(2 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\,(k_1 + 3\,k_3), \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}\,h, y_n + \frac{1}{3}\,h\,k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}\,h, y_n + \frac{2}{3}\,h\,k_2). \end{aligned}$$

y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema.

5. **(2.5 puntos)** Encontrar los valores de α para los que el método

$$y_{n+2} - 2\,\alpha\, y_{n+1} + (2\alpha - 1)\, y_n \quad = \quad h[\alpha\, f(t_{n+2}, y_{n+2}) + (2 - 3\alpha)\, f(t_{n+1}, y_{n+1})],\ n \geq 0$$

es cero estable, consistente y determinar el orden mayor posible.

(sigue a continuación)

Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Convocatoria de Febrero. Fecha: 24/01/2022

Computación, sobre 10 puntos: Tiempo: de 12:30 a 14:00

Instrucciones:

- Envie los códigos y las gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos o imágenes deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.**
- No utilizar tildes, $\tilde{n}$ u otros caracteres latinos en los comentarios.
- Si el código enviado no compila el problema se puntuará a cero.

1. **(3 puntos)** Dada la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & (1-2\,t)\,y(t), \quad 0 < t < 3, \\ y(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

   a) Aproximar la solución en una partición uniforme del intervalo $[0, 3]$ mediante el siguiente método de Runge-Kutta

$$y_{n+1} \;=\; y_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3)$$

   donde

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t_n, y_n), \\ k_2 & = & f(t_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1), \\ k_3 & = & f(t_n + h,\, y_n + h\,(-k_1 + 2\,k_2)). \end{array}$$

   b) Sabiendo que la curva $y(t) = \exp(0.25 - (0.5 - t)^2)$ es la solución exacta del problema realizar un estudio del error y del orden de convergencia del método usando como medida del error

$$e(h) = \max_n \{|y_n - y(t_n)|\}.$$

(sigue a continuación)

2. **(3.5 puntos)** La ecuación de segundo orden

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) \;=\; e^{2t}\,\sin(t), \quad y(0) = -0.4,\; y'(0) = 0.6$$

tiene por solución

$$y(t) = \frac{1}{5}\,e^{2t}(\sin(t) - 2\,\cos(t))$$

   a) Transformar esta ecuación en un problema de primer orden.

   b) Aproximar la solución a este problema en el intervalo $[0,3]$ usando el método de Adams-Bashforth de dos pasos (AB2):
   Dados w_0, w_1 calcular para $n \geq 0$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}[3\,f(t_n, w_n) - f(t_{n-1}, w_{n-1})]$$

   tomando como valores iniciales los valores exactos dados por la solución.
   Generar y enviar por correo el código y la gráfica de la aproximación. Como título de la figura use el siguiente formato: **SuNombre: Ejercicio 2**

3. **(3.5 puntos)** Consideremos el problema

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 100\,(sin(t) - y(t)), \quad 0 < t \leq 3, \\ y(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

cuya solución es

$$y(t) = \frac{sin(t) - 0.01\,cos(t) + 0.01\,e^{-100\,t}}{1.0001}.$$

Aproximar la solución a este problema usando el método Adams-Moulton implícito (AM3) de tres pasos: Dados y_0, y_1, y_2 calcular para $n \geq 0$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}\{9f(t_{n+3}, y_{n+3}) + 19\,f(t_{n+2}, y_{n+2}) - 5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\}$$

tomando como valores iniciales los valores exactos dados por la solución. Estudiar el orden de convergencia del método de acuerdo a los resultados obtenidos con este ejemplo. **Generar y enviar por correo el código usado junto con las gráficas que ilustren los resultados**. Formato: **SuNombre: Ejercicio 3**