Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Fecha: 22/06/2022, 09:30 a 13:45

Observación: Leer todo el examen antes de empezar. A partir de las 10:00 se cuenta convocatoria.

Calificación total: $0.7\times T + 0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría, sobre 10 puntos

1. Sea $f \in C^0(\mathbb{R})$ globalmente lipschitziana. Dado el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)) \text{ en } [t_0, t_0+T], \\ y(t_0) &= \alpha, \end{cases}$$

consideramos su resolución mediante el método

$$M_\theta \equiv \begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h\, f\,(y_n + \theta h f(y_n)\,) \\ y_0 &= \alpha \end{cases}$$

donde $t_n = t_0 + nh$, $h = T/N$ y $\theta \in [0,1]$ es un parámetro a elegir.

Se pide:

a) **(0.5 puntos)** Interpretar geométricamente M_θ.

b) **(0.5 punto)** Probar que M_θ es 0-estable cualquiera que sea θ.

c) **(1 punto)** Determinar el orden de consistencia de M_θ en función de θ.

d) **(1 punto)** Estimar el error global para la mejor elección posible de θ. Para esta elección el esquema se denomina **método de Euler Modificado**.

2. **(2 puntos)** Probar que el método de Euler explícito aplicado a

$$w'(t) = 1 + t^2,\ w(0) = 0$$

con $y_0 = 0$ y con $t_n = n\,h$ es de orden 1 con respecto a h pero no puede ser de orden 2 con respecto a h.

3. **(3 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 3/6 \end{array}$$

y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema.

(sigue)

4. **(2 puntos)** Encontrar los valores de α para los que el método

$$y_{n+2} + 2\,\alpha\, y_{n+1} - (2\alpha + 1)\, y_n \quad = \quad h[(\alpha + 2)\, f_{n+1} + \alpha\, f_n],\ n \geq 0$$

es cero estable, consistente y determinar el orden mayor posible.

(sigue)

Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Fecha: 22/06/2022, 09:30 a 13:45

Computación, sobre 10 puntos: Tiempo: de 12:15 a 13:45

Instrucciones:

- Envie los códigos y las gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos o imágenes deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.**
- No utilizar tildes, $\tilde{n}$ u otros caracteres latinos en los comentarios.
- Si el código enviado no compila el problema se puntuará a cero.

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{7}\,(k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3)\\
k_1 &= f(t_n, y_n)\\
k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1)\\
k_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}h,\, y_n + \frac{1}{3}h\,k_1 + \frac{1}{3}h\,k_2)
\end{aligned}
$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial

$$
\begin{cases}
y'(t) = -4t^3\,y(t)^2, & t \in (-10, 0],\\
y(-10) = 1/10001. &
\end{cases}
$$

cuya solución exacta es $y(t) = 1/(t^4 + 1)$. **Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente** del método junto con una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **SuNombre: Ejercicio 1, orden p**

(sigue a continuación)

2. **(4 puntos)** Dado $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ la ecuación de un péndulo viene dada por

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0.$$

Usando un método Runge-Kutta explícito de su elección aproximar la solución de la ecuación (escribirla primero como una ecuación de primer orden). En Mecánica se conoce que el primer valor conocido donde $y'(t) = 0$ (el semiperiodo) viene dado con gran aproximación por la fórmula

$$\pi\,(1 + \frac{1}{4}\sin^2(\frac{\alpha}{2}) + \frac{9}{64}\sin^4(\frac{\alpha}{2})).$$

Usar este resultado para comprobar la precisión del método escogido conforme se cambia la longitud del paso para el valor $\alpha = \pi/4$.
Generar y enviar por correo el código y la gráfica del plano de fases (y,y').
Como título de la figura usar el formato: **SuNombre: Ejercicio 2, plano de fases**

3. **(3 puntos)** Comprobar computacionalmente el efecto de la 0-estabilidad usando el método

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a\,y_n \quad = \quad \frac{h}{2}[(3-a)f(t_{n+1}, y_{n+1}) - (1+a)f(t_n, y_n)]$$

para aproximar la solución $y(t) = (t^2+1)^2$ en el intervalo $[0,1]$ de la ecuación $y' = 4ty^{1/2}$ con $y(0) = 1$. Usar los valores $a = 0$ y $a = -5$ con pasos $h = 0.1, 0.05, 0.025$.
Generar y enviar por correo el código usado junto con las gráficas que ilustren los resultados. Como título de las figuras use el siguiente formato (en el caso $a = 0, h = 0.1$):
Formato: **SuNombre: Ejercicio 3, a=0, h=0.1**