Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2019-2020.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Control Teórico 2. Fecha: 13/12/2019

Nombre: **DNI:**

Tiempo: 1 hora

1. Consideramos la ecuación de transporte lineal con $a < 0$

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad (1)\\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Para la notación $v_m^n \sim u(t_n, x_m)$ cuando $t_n = n\,\Delta t,\ (n \geq 0)$ y $x_m = m\,\Delta x,\ (m \in \mathbb{Z})$ y siendo $v_m^0 = u_0(x_m)$ un dato, considerar el esquema numérico:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a\frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad n \geq 0,\ m \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

a) (**2.5 puntos**) Obtener explícitamente el error de truncatura para (3).

b) (**3 puntos**) Usando como medida de los valores calculados en cada nivel de tiempo t_n el valor

$$\max_{m\in\mathbb{Z}} |v_m^n|$$

obtener explícitamente la condición de estabilidad para (3).

c) (**3 puntos**) Usando como medida del error en cada nivel de tiempo t_n el valor

$$\max_{m\in\mathbb{Z}} |v_m^n - u(t_n, x_m)|$$

obtener razonadamente la convergencia del esquema (3).

d) (**1.5 puntos**) De forma razonada indicar la validez o no del siguiente esquema para el mismo problema (1)-(2)

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a\frac{v_m^n - v_{m+1}^n}{\Delta x} = 0, \quad n \geq 0,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Observación: Todos los resultados que se usen hay que demostrarlos.