Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2019-2020.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Control Teórico 1. Fecha: 19/11/2019, 09:00

Nombre: **DNI:**

Tiempo: 2 horas

1. Sea $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R})$ globalmente lipschitziana respecto a su segunda variable, con constante de Lipschitz L_f. Dado el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \text{ en } [0,T], \\ y(0) &= \alpha, \end{cases}$$

consideramos su resolución mediante el siguiente método de un paso:

$$(M) \quad \begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h\, f\left(t_n + \theta\, h, (1-\theta) y_n + \theta y_{n+1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y_0 &= \alpha \end{cases}$$

donde $t_n = nh$, $h = \dfrac{T}{N}$ y $\theta \in [0,1]$.

   a) **(1.5 puntos)** Probar que si $h < \dfrac{1}{|\theta|\, L_f}$, entonces (M) está bien definido y es 0-estable.

   b) **(3 puntos)** Determinar el orden de consistencia de (M) en función de θ.

2. Consideramos el método de Runge-Kutta que tiene la siguiente matriz de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}$$

   a) **(1 punto)** Construir el método asociado al tablero y comprobar su orden.

   b) **(2 puntos)** Aplicarlo al problema $y'(t) = \lambda\, y(t),\ y(0) = 1$ y comprobar el orden sobre este problema.

   c) **(1.5 puntos)** Comparar y comentar los resultados obtenidos en el apartado anterior con respecto a la afirmación del apartado a).

3. **(1 punto)** Definir el concepto de estabilidad absoluta o A-estabilidad y calcular la región de estabilidad absoluta del método

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, k_2, \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}\, h, y_n + \frac{1}{2}\, h\, k_1). \end{aligned}$$