Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2019-2020.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Convocatoria de Junio, tipo A. Fecha: 8/06/2020, 09:30 a 14:00

Observación: Leer todo el examen antes de empezar. A partir de las 10:00 se cuenta convocatoria.

Calificación total: $0.7\times T+0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría, sobre 10 puntos: Tiempo de 9:30 a 12:30

Parte 1 (6 puntos):

1. Para a y b constantes considerar el esquema

$$\text{Dado } y_0, \text{ obtener} \quad y_{n+1} = y_n + h\,\{b\,k_1 + (1-b)\,k_2\}, \quad n \geq 0.$$

donde

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + a\,h, y_n + a\,h\,k_1).$$

Existe una relación entre los valores de a y b para obtener error local de orden 3 (no confundir con el global que será 2).

a) **(1.25 p.)** Obtener esta relación imponiendo la regularidad que se vaya necesitando.

b) **(0.25 p.)** Para estos valores comprobar la estabilidad del esquema.

c) **(1. p.)** Demostrar la convergencia del mismo hacia la solución del problema de Cauchy.

2. **(1.5 puntos)** Probar que el método de Euler explícito aplicado a

$$w'(t) = 1 + t^2,\ 0 \leq t \leq 1,\ w(0) = 0$$

con $y_0 = 0$ y con $t_n = n\,h$ es de orden 1 con respecto a h pero no puede ser de orden 2 con respecto a h.

3. **(2 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 4 etapas

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8}\,(k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}\,k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h\,k_3). \end{aligned}$$

y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema.

(sigue)

Parte 2 (4 puntos):

1. Responder a las siguientes cuestiones:

   - (**0.5 p.**) Comprobar que se tiene

     $$u_{xxx}(x) = \frac{H_{xxx}u(x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2)$$

     donde

     $$H_{xxx}u(x) = u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 2[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)].$$

   - (**1.5 p.**) Usando esta información, generar un esquema de diferencias finitas para la ecuación

     $$\begin{aligned} u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) &= 0 \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(t,0) &= 0, \quad t > 0 \\ u(t,1) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

     Construir y detallar todo lo que se necesita para plantear este esquema. En los extremos del intervalo realizar las hipótesis necesarias y más razonables para obtener un esquema válido.

2. Siendo $\varepsilon > 0$ y $\kappa > 0$ consideramos la ecuación de convección difusión

   $$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \varepsilon\, u_{xx}(t,x) - \kappa\, u_x(t,x) \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad x \in (0,1), \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

   y el siguiente esquema en diferencias finitas

   $$u_l^{n+1} = u_l^n + \varepsilon\, \mu\, (u_{l+1}^n - 2\, u_l^n + u_{l-1}^n) - \frac{1}{2}\kappa\mu\, \Delta x\, (u_{l+1}^n - u_{l-1}^n)$$

   donde $\mu = \Delta t\, (\Delta x)^{-2}$.

   a) **(0.5 p.)** Deducir razonadamente el esquema introduciendo toda la notación conveniente y explicar lo que se está haciendo.

   b) **(0.75 p.)** Obtener el error de truncatura e indicar el orden del método con respecto a los parámetros Δt y Δx.

   c) **(0.75 p.)** Comprobar la estabilidad del esquema y demostrar la convergencia

(sigue a continuación)

Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2019-2020.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Convocatoria de Junio, tipo A. Fecha: 8/06/2020, 09:30 a 14:00

Computación, sobre 10 puntos: Tiempo: de 12:30 a 14:00

Instrucciones:

- Envie los códigos o gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos o imágenes deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.**

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8}\,(k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}h,\, y_n + \frac{1}{3}h\,k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}h,\, y_n - \frac{1}{3}h\,k_1) \\ k_4 &= f(t_n + h,\, y_n + h\,k_1 - h\,k_2 + h\,k_3) \end{aligned}$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial (solución exacta $y(t) = 2\,e^{\cos(8\,t)}$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& -8\sin(8\,t)\,y(t), \quad t \in (0, 20], \\ y(0) &=& 2\,e. \end{array} \right.$$

Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente del método junto con una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **SuNombre: Ejercicio 1, orden p**

(sigue a continuación)

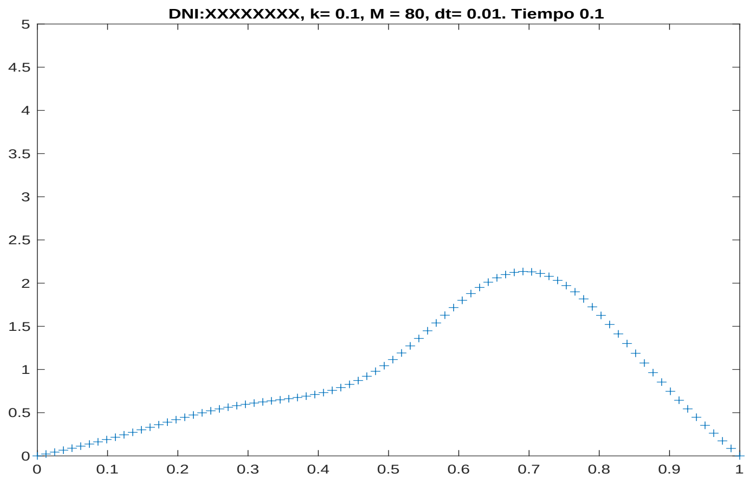

Figura 1: Ejercicio 3, solución en tiempo $T = 0.1$

2. **(3.5 puntos)** Expresar en términos de una ecuación de primer orden el sistema

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{v(t)}{1+t^2} - sin(r(t)) \\ v''(t) &= \frac{-u(t)}{1+t^2} + cos(r(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}$. Resolverlo en $[0, 5]$ usando un método de Runge-Kutta explícito de segundo orden cualquiera y con las condiciones iniciales

$$u(0) = 1, v(0) = u'(0) = v'(0) = 0.$$

Generar y enviar por correo el código y la gráfica del plano de fases (u,v)
Formato: **SuNombre: Ejercicio 2, plano de fases**

3. **(3.5 puntos)** Se considera la ecuación de difusión para un dato inicial irregular

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - k\, u_{xx}(t,x) &= 0, \quad \forall x \in (0,1),\ t \in [0, 0.1], \quad (k = 0.1) \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0,x) &= 1, \quad \forall x \in [0.2, 0.4], \\ u(0,x) &= 4, \quad \forall x \in [0.6, 0.8], \\ u(0,x) &= 0, \quad \forall x \notin [0.2, 0.4] \cup [0.6, 0.8], \end{aligned}$$

Usa Euler implícito y ajusta convenientemente los parámetros Δx y Δt para reproducir la gráfica de la Figura 1. **Generar y enviar por correo el código y la gráfica obtenida con el título que se observa y reemplazando las XX por su DNI.**