Observación: Leer todo el examen antes de empezar. A partir de las 10:00 se cuenta convocatoria.

Calificación total: $0.7 \times T + 0.3 \times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría, sobre 10 puntos: Tiempo de 9:30 a 12:00

1. Dado un método numérico para aproximar el problema de Cauchy:

   a) **(1 punto)** Explicar la diferencia entre error local y error global

   b) **(1 punto)** Explicar la diferencia entre 0-estabilidad y A-estabilidad

   c) **(1 punto)** Explicar las diferencias fundamentales entre un método de un paso y un método multipaso.

2. **(0.5 puntos)** Consideremos el problema $y'(t) = a\,y(t)$ con $y(0) = 1$ y $a \in \mathbb{R}$. Indicar cual de las siguientes afirmaciones es correcta:

   a) Si $a < 0$ cualquier método numérico estable da una aproximación que decae a cero para cualquier elección de $h > 0$.

   b) Si $a < 0$ cualquier método numérico consistente da una aproximación que decae a cero para cualquier elección de $h > 0$.

   c) Si $a < 0$ cualquier método numérico consistente da una aproximación que decae a cero para cualquier elección de $ah < 0$ dentro de una región que depende del método.

3. **(1 punto)** Explicar las diferencias y similitudes entre el método de Euler explícito y el método de Euler implícito.

(sigue)

4. Dada la siguiente variante del método de Euler

$$\begin{cases} y_{n+1} & = & y_n + h\, f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)\right) \\ y_0 & = & \alpha \end{cases}$$

   a) **(0.5 puntos)** Calcular su error local de consistencia.

   b) **(1 punto)** Basado en este cálculo, encontrar un ejemplo que demuestre que el orden de convergencia del método no puede ser mayor que dos.

5. *a*) **(0.5 puntos)** Razona tu respuesta Cierto o Falso: Un método de Runge-Kutta explicito de S-etapas tiene orden S.

   b) **(1.5 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline & 0 & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

   y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema.

6. **(2 puntos)** Dado el esquema

$$y_n - 3y_{n-1} + 2\,y_{n-2} \;=\; -\frac{h}{2}[f_n + f_{n-1}],\ n \geq 2$$

estudiar su consistencia y su estabilidad y orden.

Computación, sobre 10 puntos: Tiempo: de 12:30 a 14:00

Instrucciones:

- Envie los códigos y las gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos o imágenes deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.**
- No utilizar tildes, $\tilde{n}$ u otros caracteres latinos en los comentarios.
- Si el código enviado no compila el problema se puntuará a cero.

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{7}\,(k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3)\\
k_1 &= f(t_n, y_n)\\
k_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}h,\, y_n + \frac{1}{3}h\,k_1)\\
k_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}h,\, y_n - \frac{1}{3}h\,k_1 + h\,k_2)
\end{aligned}
$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial (solución exacta $y(t) = 2\,e^{\cos(8\,t)}$)

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
y'(t) &=& -8\sin(8\,t)\,y(t), \quad t \in (0,5],\\
y(0) &=& 2\,e.
\end{array}
\right.
$$

Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente del método junto con una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **SuNombre: Ejercicio 1, orden p**

(sigue a continuación)

2. **(3.5 puntos)** Expresar en términos de una ecuación de primer orden el sistema

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{v(t)}{1+t^2} - sin(r(t)) \\ v''(t) &= \frac{-u(t)}{1+t^2} + cos(r(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}$. Resolverlo en $[0,5]$ usando un método de Runge-Kutta explícito de segundo orden cualquiera y con las condiciones iniciales

$$u(0) = 1, v(0) = u'(0) = v'(0) = 0.$$

Generar y enviar por correo el código y la gráfica del plano de fases (u,v).
Como título de la figura use el siguiente formato:
Formato: **SuNombre: Ejercicio 2, plano de fases**

3. **(3.5 puntos)** Comprobar computacionalmente el efecto de la 0-estabilidad usando el método

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a\, y_n = \frac{h}{2}[(3-a)f(t_{n+1}, y_{n+1}) - (1+a)f(t_n, y_n)]$$

para aproximar la solución $y(t) = (t^2+1)^2$ en el intervalo $[0,1]$ de la ecuación $y' = 4ty^{1/2}$ con $y(0) = 1$. Usar los valores $a = 0$ y $a = -5$ con pasos $h = 0.1, 0.05, 0.025$.
Generar y enviar por correo el código usado junto con las gráficas que ilustren los resultados. Como título de las figuras use el siguiente formato (en el caso $a = 0, h = 0.1$):
Formato: **SuNombre: Ejercicio 3, a=0, h=0.1**