Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Convocatoria de Junio. Examen Final: parte computacional.
Fecha: 25/05/2023, hora: 12:00, tiempo 1 hora y 30 mins

Calificación total: $0.7\times T+0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Instrucciones:

- Enviar códigos, funciones y gráficas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos principales deben seguir el formato `PrimerApelllidoNombreEjercicioX.m` donde $X = 1, 2, 3, 4$ y no se aceptarán otros nombres. Los códigos debe indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales.
- Códigos que no funcionen no puntuarán. Revisar que las funciones se incluyan también en vuestro envio.
- Plantear por escrito, en folios identificados con nombre y dni, lo que se considere necesario para responder al trabajo computacional que se pide.

Ejercicios:

1. Para $t \in [0, 3]$ consideramos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}x'(t) & = & 9\,x + 24\,y, \quad x(0) = 1, \\ \dfrac{d}{dt}y'(t) & = & -24\,x - 51\,y, \quad y(0) = 1, \end{array}\right.$$

que tiene por solución

$$x(t) = 2\,e^{-3t} - e^{-39t},$$
$$y(t) = -e^{-3t} + 2\,e^{-39t}.$$

a) **(2 puntos)** Aproximar la solución en particiones uniformes del intervalo $[0, 3]$ mediante el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden y realizar un estudio del orden de convergencia del método.

b) **(2 puntos)** Usando el método multipaso

$$y_{n+1} - y_n \;=\; \frac{h}{12}[23\,f_n - 16\,f_{n-1} + 5\,f_{n-2}],\ n \geq 0$$

Aproximar la solución del sistema del problema anterior en las mismas particiones uniformes del intervalo $[0, 3]$ y realizar un estudio del orden de convergencia del método. Para iniciar el cálculo usar los valores exactos correspondientes.

c) **(2 puntos)** Comparar las propiedades de estabilidad de ámbos métodos sobre este problema comentando lo que se considere oportuno.

(sigue a continuación)

Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Convocatoria de Junio. Examen Final: parte computacional.
Fecha: 25/05/2023, hora: 12:00, tiempo 1 hora y 30 mins

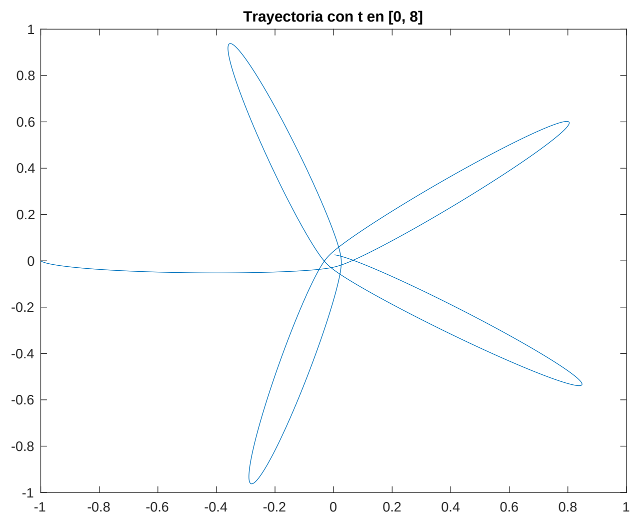

Figura 1: Trayectoria de una partícula cargada en $t \in [0, 8]$.

2. **(3 puntos)** Usar el método clásico de Runge-Kutta de orden 4 para describir el movimiento de una partícula con posición $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ y velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) \in \mathbb{R}^2$ en un campo de fuerzas conservativo generado por un cable que transporta corriente y está centrado en el origen $0 \in \mathbb{R}^2$. El movimiento viene determinado por:

$$\mathbf{x}''(t) = -\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathbf{x}(0) = (-1, 0)^T, \quad \mathbf{x}'(0) = (0.1, -0.1)^T$$

donde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $\mathbf{x} = (x, y)$.

a) Convertir la ecuación de segundo orden en una ecuación de primer orden y aproximar la solución en el intervalo de tiempo $[0, 8]$.

b) Reproducir la gráfica de la trayectoria $\mathbf{x}$ en el espacio $\mathbb{R}^2$ dada por la Figura 1.

Generar y enviar por correo el código y la gráfica de la trayectoria (x,y) indicando el valor de h usado. Como título de la figura usar el siguiente formato:
PrimerApellidoNombre: trayectoria (x,y) en [0,8] con h=...