1. Euler explícito y variados

1. Problema 1 de examen 23/01/2017. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función globalmente lipschitziana, y consideramos el problema de*

$$(PC)\begin{cases} y'(t)=f(y) \\ y(0)=y_0\end{cases} \quad t\in(0,T]$$

que pretendemos resolver mediante el método

$$y_{n+1}=y_n+\alpha hf(y_n+\beta hf(y_n))$$

Se pide:

a) *Demostrar dando todos los pasos necesarios que el método es* 0*-estable*

Sea

$$z_{n+1}=z_n+\alpha hf(z_n+\beta hf(z_n))$$
$$w_{n+1}=w_n+\alpha hf(w_n+\beta hf(w_n))$$

luego tenedremos que

$$|w_{n+1}-z_{n+1}|=|w_n+\alpha hf(w_n+\beta hf(w_n))-z_n-\alpha hf(z_n+\beta hf(z_n))|\leq$$

$$\leq |w_n-z_n|+\alpha h|f(w_n+\beta hf(w_n))-f(z_n+\beta hf(z_n))|\overset{f\text{ lips}}{\leq}$$
$$\leq |w_n-z_n|+\alpha hL_f|w_n+\beta hf(w_n)-z_n\beta hf(z_n)|\leq$$
$$\leq |w_n-z_n|+\alpha hL_f|w_n-z_n|+\beta\alpha h^2L_f|f(w_n)-f(z_n)|\overset{f\text{ lips}}{\leq}$$
$$\leq |w_n-z_n|+\alpha hL_f|w_n-z_n|+\beta\alpha h^2L_f^2|w_n-z_n|=|w_n-z_n|\left(1+\alpha hL_f+\beta\alpha h^2L_f^2\right)$$

Iterando el proceso llegamos a que

$$|w_n-z_n|\leq\left(1+\alpha hL_f+\beta\alpha h^2L_f^2\right)^n|w_0-z_0|$$

Si llamamos $M_{\phi_f}=\alpha L_f+\beta\alpha hL_f^2$, entonces

$$|w_n-z_n|\leq\left(1+hM_{\phi_f}\right)^n|w_0-z_0|\leq e^{TM_{\phi_f}}|w_0-z_0|$$

y por tanto el error solo depende del error inicial w_0-z_0 (para la acotación de la exponencial, mirar página 81, observación 44)

b) *Determinar α y β para obtener el orden de consistencia más alto posible, suponiendo que f tiene la suficiente regularidad, la cual se especificará*

El error de consistencia local viene dado por

$$l(y(t);h)=y(t+h)-\{y(t)+\alpha hf(y(t)+\beta hf(y(t)))\}$$

El desarrollo de taylor de $y(t+h)-y(t)$ será (fórmula para dos variables en páginas 181, cuidado con la notación que puede liar)

$$y(t+h)-y(t)=hy'+\frac{h^2}{2!}y''+\frac{h^3}{3!}y'''+O\left(h^4\right)$$

Por otro lado, el desarrollo de $f(y(t)+\beta hf(y(t)))$ será

$$f(y(t)+\beta hf(y(t)))=f+\beta hff_y+\frac{\beta^2h^2f^2}{2!}f_{yy}+\frac{\beta^3h^3f^3}{3!}f_{yyy}+O\left(h^4\right)$$

luego el error de consistencia, usando que $y'=f$, $y''=f_yf$ e $y'''=f_{yy}f^2+f_y^2f$, se tiene que

$$l(y;h)=hf+\frac{h^2}{2}f_yf+\frac{h^3}{6}\left(f_{yy}f^2+f_y^2f\right)-\alpha hf-\alpha\beta h^2ff_y-$$

$$-\frac{\alpha\beta^2h^3f^2}{2}f_{yy}+\frac{\alpha\beta^3h^4f^3}{6}f_{yyy}+O\left(h^4\right)=$$

$$=hf(1-\alpha)+h^2ff_y\left(\frac{1}{2}-\alpha\beta\right)+\frac{h^3}{2}\left(\frac{f_{yy}f^2+f_y^2f}{3}-\alpha\beta^2f^2f_{yy}\right)+O\left(h^4\right)$$

Observemos que el término de h^3 no podemos simplificarlo, no depende solo de α y β, luego basta con que f sea dos veces derivable con $\alpha=1$ y $\beta=\frac{1}{2}$, obtieniendo así orden de consistencia $O\left(h^3\right)$

c) *Demostrar la convergencia del método e indicar su orden respecto de h*

Hemos visto que el método es estable y consistente, luego por el Teorema de Lax (página 74) el método es convergente. Su orden de convergencia lo obtenemos observando la expresión calculada anteriormente. El término que queda sin simplificar con $\alpha=1$ y $\beta=\frac{1}{2}$ es una $O\left(h^3\right)$, luego el método converge con orden 2 (hay un teorema que dice "Si un método tiene orden de consistencia $p+1$, entonces el método converge con orden p")

2. Problema 1 parte 1 examen 13/07/2018. *Sea $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ globalmente lipschitziana respecto a su segunda variable. Dado el Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t)=f(y) \\ y(t_0)=\alpha \end{cases}$$

consderamos su resoluación mediante la siguiente variante del método de Euler

$$(M)\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(y_n+\theta hf(y_n)) \\ y_0=\alpha \end{cases}$$

donde $t_n=t_0+nh$, $h=T/N$ y $\theta\in[0,1]$ es un parámetro a elegir. Se pide:

a) *Interpretar geométricamente qué se está haciendo*

b) *Probar que* (M) *es estable cualquiera que sea* θ

Sea

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(z_n + \theta hf\left(z_n\right)\right)$$
$$w_{n+1} = w_n + hf\left(w_n + \theta hf\left(w_n\right)\right)$$

luego tenedremos que

$$|w_{n+1} - z_{n+1}| = |w_n + hf\left(w_n + \theta hf\left(w_n\right)\right) - z_n - hf\left(z_n + \theta hf\left(z_n\right)\right)| \leq$$

$$\leq |w_n - z_n| + h|f\left(w_n + \theta hf\left(w_n\right)\right) - f\left(z_n + \theta hf\left(z_n\right)\right)| \overset{f \text{ lips}}{\leq}$$
$$\leq |w_n - z_n| + hL_f|w_n + \theta hf\left(w_n\right) - z_n\theta hf\left(z_n\right)| \leq$$
$$\leq |w_n - z_n| + hL_f|w_n - z_n| + \theta h^2 L_f|f\left(w_n\right) - f\left(z_n\right)| \overset{f \text{ lips}}{\leq}$$
$$\leq |w_n - z_n| + hL_f|w_n - z_n| + \theta h^2 L_f^2|w_n - z_n| = |w_n - z_n|\left(1 + hL_f + \theta h^2 L_f^2\right)$$

Si llamamos $M_{\phi_f} = L_f + \theta h L_f^2$, entonces

$$|w_n - z_n| \leq \left(1 + hM_{\phi_f}\right)^n |w_0 - z_0| \leq e^{TM_{\phi_f}}|w_0 - z_0|$$

y por tanto el error solo depende del error inicial $w_0 - z_0$ (para la acotación de la exponencial, mirar página 81, observación 44)

c) *Determinar el orden de consistencia en función de* θ

El error de consistencia local viene dado por

$$l\left(y\left(t\right);h\right) = y\left(t+h\right) - \left\{y\left(t\right) + hf\left(y\left(t\right) + \theta hf\left(y\left(t\right)\right)\right)\right\}$$

El desarrollo de taylor de $y\left(t+h\right) - y\left(t\right)$ será

$$y\left(t+h\right) - y\left(t\right) = hy' + \frac{h^2}{2!}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + O\left(h^4\right)$$

por otro lado, el desarrollo de $f\left(y\left(t\right) + \theta hf\left(y\left(t\right)\right)\right)$ es

$$f\left(y + \theta hf\left(y\right)\right) = f + \theta hff_y + \frac{\theta^2h^2f^2}{2!}f_{yy} + \frac{\theta^3h^3f^3}{3!}f_{yyy} + O\left(h^4\right)$$

luego el error nos queda usando que $y' = f$, $y'' = f_yf$, $y''' = f_{yy}f^2 + f_y^2f$

$$l\left(y\left(t\right);h\right) = hf + \frac{h^2}{2!}f_yf + \frac{h^3}{3!}\left(f_{yy}f^2 + f_y^2f\right) - hf - \theta h^2ff_y - \frac{\theta^2h^3f^2}{2!}f_{yy} -$$

$$-\frac{\theta^3h^4f^3}{3!}f_{yyy} + O\left(h^4\right) = h^2ff_y\left(\frac{1}{2} - \theta\right) + \frac{h^3}{2!}\left(\frac{1}{3}f_{yy}f^2 + \frac{1}{3}f_y^2f - \theta^2f^2f_{yy}\right) + O\left(h^4\right)$$

Si $\theta \neq \frac{1}{2}$ entonces el orden es de $O\left(h^2\right)$, si $\theta = \frac{1}{2}$ entonces es $O\left(h^3\right)$

d) *Obtener estimaciones del error de discretización para la mejor elección posible de θ*

Se trataría de estudiar el error global. Si utilizamos el trm de Lax (recordar que le profesor no quiere que usemos esto), como el método es estable y consistente, entonces el método es convergente. El máximo orden de convergencia se obtiene cuando $\theta = \frac{1}{2}$, pues en este caso es cuando obtenemos un máximo orden en la consistencia (apartado anterior) y tendríamos que converge con orden $O\left(h^2\right)$ (recordemos que el orden de convergencia siempre es uno menos que el de consistencia)

3. Ejercicio 2 examen 13/07/2018. *Probar que el método de Euler explícito aplicado a*

$$w'(t) = 1 + t^2 \; w(0) = 0$$

con $y_0 = 0$ *y con* $t_n = nh$ *es de orden* 1 *con respecto a* h *pero no puede ser de orden* 2 *con respecto a* h

Vamos a tratar de encontrar una recurrencia, para ello calculamos los primeros y_n (recordar que el método de Euler es $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, con $f(t, y) = 1 + t^2$ en este caso)

$$\begin{gathered} y_0 = 0 \\ y_1 = 0 + h\left(1 + t_0^2\right) = h \\ y_2 = h + h\left(1 + t_1^2\right) = h\left(2 + t_1^2\right) \\ y_3 = h\left(2 + t_1^2\right) + h\left(1 + t_2^2\right) = h\left(3 + t_1^2 + t_2^2\right) \end{gathered}$$

podemos observar que tendremos

$$y_n = h\left(n + \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2\right) \overset{t_i = ih}{=} h\left(n + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right) = hn + h^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= hn + \frac{h^3}{6}\left(2n^3 - n^2 - 2n^2 + n\right) = hn + \frac{h^3}{6}\left(2n^3 - 3n^2 + n\right)$$

Si hacemos el límite estacionario tendremos que

$$\lim_{n\to\infty\, h\to 0\, t=nh} hn + \frac{h^3}{6}\left(2n^3 - 3n^2 + n\right) = \lim_{n\to\infty\, h\to 0\, t=nh} t + \frac{(nh)^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = t + \frac{t^3}{3}$$

Por tanto, el error global será

$$y(nh) - y_n = y(t_n) - y_n = t_n + \frac{t_n^3}{3} - hn - \frac{h^3}{6}\left(2n^3 - 3n^2 + n\right) =$$

$$= t_n + \frac{t_n^3}{3} - t_n - \frac{1}{3}t_n^3 + \frac{1}{2}t_n^2 h - \frac{1}{6}t_n h^2 = \frac{1}{2}t_n^2 h - \frac{1}{6}t_n h^2 = h\left(\frac{1}{2}t_n^2 - \frac{1}{6}t_n h\right) \leq h\left(\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{6}Th\right)$$

y por tanto el error es una $O(h)$

4. Ejercicio 1 examen Enero 2019. *Sea $f \in C^0([a,b]\times\mathbb{R})$ globalmente lipschitziana respecto a su segunda variable, con constante de Lipschitz L_f y consideremos el siguiente método de un paso*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \theta h, (1-\theta)\, y_n + \theta y_{n+1}\right) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

donde $t_n = a + nh$, $h = \frac{b-a}{N}$ y $\theta \in [0,1]$. Se pide:

   a) *Interpretación geométrica*

   b) *Probar que (M) está bien definido si $h < \frac{1}{\theta L_f}$*
   Podemos verlo como un problema de punto fijo, donde $z = y_{n+1}$ y $g(z) = y_n + hf\left(t_n + \theta h, (1-\theta)\, y_n + \theta y_{n+1}\right)$, teniendo que

$$z = g(z)$$

   Sabemos que tendrá solución si g es contractiva, luego veamos cuando lo es

$$|g(z_1) - g(z_2)| = |y_n + hf\left(t_n + \theta h, (1-\theta)\, y_n + \theta z_1\right) - y_n - hf\left(t_n + \theta h, (1-\theta)\, y_n + \theta z_2\right)| \leq$$
$$\leq hL_f |(1-\theta)\, y_n + \theta z_1 - (1-\theta)\, y_n - \theta z_2| = hL_f \theta |z_1 - z_2|$$

   con constante de contractividad $hL_f\theta$. Para que g sea2 contractiva, dicha constante debe ser menor que 1, es decir

$$hL_f\theta < 1 \Leftrightarrow h < \frac{1}{L_f \theta}$$

   c) *Demostrar que el método es 0-estable para cualquier valor de θ*
   Procedemos igual que siempre

$$|w_{n+1} - z_{n+1}| \leq |w_n - z_n| + hL_f |(1-\theta)\, w_n + \theta w_{n+1} - (1-\theta)\, z_n - \theta z_{n+1}| \leq$$
$$\leq |w_n - z_n| + hL_f (1-\theta)\, |w_n - z_n| + hL_f \theta |w_{n+1} - z_{n+1}|$$

   despejando el último término tenemos que

$$|w_{n+1} - z_{n+1}|\,(1 - hL_f\theta) \leq |w_n - z_n|\,(1 + hL_f(1-\theta)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |w_{n+1} - z_{n+1}| \leq \frac{1 + hL_f(1-\theta)}{1 - hL_f\theta} |w_n - z_n|$$

   e iterando el proceso concluimos que

$$|w_n - z_n| \leq \left(\frac{1 + hL_f(1-\theta)}{1 - hL_f\theta}\right)^n |w_0 - z_0| = \left(1 + \frac{hL_f}{1 - hL_f\theta}\right)^n |w_0 - z_0|$$

   (esto que viene a continuación no estoy seguro de si es correcto) ahora bien, llamando $M_f = \frac{hL_f}{1 - hL_f\theta}$ tenemos

$$|w_n - z_n| \leq (1 + M_f)^n\, |w_0 - z_0| \leq e^{TM_f} |w_0 - z_0|$$

   y el método es 0-consistente para cualquier θ.

d) *Determinar el orden del error local de consistencia de* (M) *en función de* θ

Vamos a añadir la hipótesis adicional de que f es derivable, y al final indicaremos el grado de derivabilidad de la función necesario. Así pues, aplicamos Taylor en la expresión de siempre

$$l\left(y\left(t\right);h\right)=y\left(t+h\right)-y\left(t\right)-hf\left(t+\theta h,\left(1-\theta\right)y\left(t\right)+\theta y\left(t+h\right)\right)$$

primero tenemos que

$$y\left(t+h\right)-y\left(t\right)=hy'+\frac{h^2}{2}y''+O\left(h^3\right)$$

$$f\left(t+\theta h,\left(1-\theta\right)y\left(t\right)+\theta y\left(t+h\right)\right)=f\left(t+\theta h,y\left(t\right)+\theta\left(y\left(t+h\right)-y\left(t\right)\right)\right)$$

y usando que $y\left(t+h\right)-y\left(t\right)=hy'+O\left(h^2\right)=hf+O\left(h^2\right)$ llegamos a que

$$f\left(t+\theta h,y\left(t\right)+\theta\left(hf+O\left(h^2\right)\right)\right)=f\left(t+\theta h,y+\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]\right)$$

y ya podemos aplicar Taylor de una manera más clara a este término

$$f\left(t+\theta h,y+\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]\right)=f+\theta hf_t+\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]f_y+O\left(h^2\right)$$

Ahora bien, la expresión que queremos calcular es $hf\left(t+\theta h,y+\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]\right)$, luego

$$hf\left(t+\theta h,y+\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]\right)=hf+\theta h^2f_t+h\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]f_y+O\left(h^3\right)$$

por ende, usando que $y'=f,y''=f_t+ff_y$ llegamos a

$$l\left(y\left(t\right);h\right)=hf+\frac{h^2}{2}\left(f_t+ff_y\right)-hf-\theta h^2f_t-h\left[\theta hf+O\left(h^2\right)\right]f_y+O\left(h^3\right)=$$

$$=\frac{h^2}{2}\left(f_t+ff_y\right)-\theta h^2\left(f_t+ff_y\right)+O\left(h^3\right)$$

luego si $\theta\neq\frac{1}{2}$, entonces el método es de orden de consistencia 2. Si $\theta=\frac{1}{2}$, es de orden de consistencia 3.

e) *Obtener la estimación de error global y dar el orden de convergencia en función de* θ

Realizamos el proceso de siempre

$$y\left(t_{n+1}\right)-y_{n+1}=y\left(t_{n+1}\right)-y^*_{n+1}+y^*_{n+1}-y_{n+1}=l\left(t;h\right)+y^*_{n+1}-y_{n+1}$$

luego usando que $y^*_{n+1}=y\left(t_n\right)+hf\left(t_n+\theta h,\left(1-\theta\right)y_n+\theta y_{n+1}\right)$ (basicamente es el método aplicado con la solución real en t_n) llegamos a que

$$\left|y\left(t_{n+1}\right)-y_{n+1}\right|\leq l\left(t;h\right)+\left|y^*_{n+1}-y_{n+1}\right|$$

Usando ahora el apartado de estabilidad, lo aplicamos a $|y^*_{n+1} - y_{n+1}|$ para obtener

$$|y^*_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 + \frac{hL_f}{1 - hL_f\theta}\right) |y(t_n) - y_n|$$

y sustituyendo al principio tenemos

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq l(t;h) + \left(1 + \frac{hL_f}{1 - hL_f\theta}\right) |y(t_n) - y_n| = l(t;h) + (1 + hM_f)|y(t_n) - y_n|$$

donde $M_f = \frac{L_f}{1 - hL_f\theta}$. Luego

$$\begin{aligned}
&|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq l(t;h) + (1 + hM_f)|y(t_n) - y_n| \leq ... \\
&\leq l(t;h) \sum_{m=0}^{n} (1 + hM_f)^m + (1 + hM_f)^{n+1} |y(t_0) - y_0| = \\
&= \frac{(1 + hM_f)^{n+1} - 1}{hM_f} l(t;h) + |y(t_0) - y_0| (1 + hM_f)^{n+1}
\end{aligned}$$

es decir que, usando lo obtenido en el apartado de consistencia, tenemos

$$\begin{aligned}
|y(t_n) - y_n| &\leq \frac{(1 + hM_f)^n - 1}{hM_f} \left[h^2 (f_t + ff_y) \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + O\left(h^3\right)\right] + C_1 h (1 + hM_f)^n \leq \\
&\leq \frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} \left[h (f_t + ff_y) \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + O\left(h^2\right)\right] + |y(t_0) - y_0| e^{TM_f}
\end{aligned}$$

El error dependerá del inicial (esto es un poco raro, en el único ejemplo que ha hecho suyo, supone que el error inicial es una $O(h)$, pero al hacer esto ya estamos condicionando el orden de convergencia... No estoy muy seguro de como hacerlo. No obstante, los razonaminetos siguientes creo que son correctos). Si $\theta = \frac{1}{2}$ tenemos

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} O\left(h^2\right) + |y(t_0) - y_0| e^{TM_f}$$

si el error inicial fuese $O(h)$ como supuso el profe en otro ejemplo, entonces $|y(t_n) - y_n| \sim O(h)$, pero si el error inicial es una $O(h^p)$ con $p > 1$, tenemos que el método tiene orden 2 (que es lo que se esperaría). Si $\theta \neq \frac{1}{2}$, se ve claro que siempre es de orden 1, independientemente del error inicial.

5. Ejercicio 1 examen junio 2019. *Sea $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times \mathbb{R})$ globalmente lipschitziana respecto a su segunda variable, con constante de Lipschitz L_f y consideremos el siguiente método de un paso*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4} f(t_n, y_n)\right) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

a) *Interpreta geométricamente el método*

b) *Determinar el orden del error local de consistencia*

$$y(t+h) - y(t) = hf + \frac{h^2}{2}(f_t + ff_y) + O(h^3)$$

$$hf\left(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}f(t_n, y_n)\right) = hf + \frac{h^2}{4}f_t + \frac{h^2}{4}ff_y + O(h^3)$$

$$l(y(t);h) = \frac{h^2}{2}(f_t + ff_y) + O(h^3) - \frac{h^2}{4}(f_t + ff_y) + O(h^3)$$

$$= (f_t + ff_y)\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4}\right) + O(h^3) = O(h^2)$$

luego el método tiene orden de consistencia 2.

c) *Obtener la estimación de error global y dar el orden de convergencia.*

Realizamos el proceso de siempre

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n+1}) - y^*_{n+1} + y^*_{n+1} - y_{n+1} = l(t;h) + y^*_{n+1} - y_{n+1}$$

luego usando que $y^*_{n+1} = y(t_n) + hf\left(t_n + \frac{h}{4}, y(t_n) + \frac{h}{4}f(t_n, y(t_n))\right)$ (basicamente es el método aplicado con la solución real en t_n) llegamos a que

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq l(t;h) + |y^*_{n+1} - y_{n+1}|$$

desarrollando el último término (lo que vamos a hacer ahora es similar al estudio de la estabilidad, solo que sin hacer la recurrencia)

$$|y^*_{n+1} - y_{n+1}| \leq |y(t_n) - y_n| + hL_f|y(t_n) + \frac{1}{4}hf(t_n, y(t_n)) - y_n - \frac{1}{4}hf(t_n, y_n)| \leq$$

$$\leq |y(t_n) - y_n| + hL_f|y(t_n) - y_n| + \frac{1}{4}h^2L_f^2|y(t_n) - y_n| =$$

$$= |y(t_n) - y_n|(1 + hM_f)$$

donde $M_f = L_f + \frac{1}{4}hL_f^2$. Volviendo al principio, tenemos

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq l(t;h) + |y(t_n) - y_n|(1 + hM_f) \leq$$

$$\leq l(t;h) + l(t;h)(1 + hM_f) + |y(t_{n-1}) - y_{n-1}|(1 + hM_f)^2 \overset{\text{iterando}}{\leq}$$

$$\leq l(t;h)\sum_{m=0}^{n} l(t;h)(1 + hM_f)^m + |y(t_0) - y_0|(1 + hM_f)^{n+1} \overset{\text{progresión geométrica}}{=}$$

$$= \frac{1 - (1 + hM_f)^{n+1}}{1 - 1 - hM_f}l(t;h) + |y(t_0) - y_0|(1 + hM_f)^{n+1} =$$

$$= \frac{(1 + hM_f)^{n+1} - 1}{hM_f}l(t;h) + |y(t_0) - y_0|(1 + hM_f)^{n+1}$$

es decir, concluimos que

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{(1+hM_f)^n - 1}{hM_f} l(t;h) + |y(t_0) - y_0| (1+hM_f)^n \leq$$

$$\leq \frac{e^{TM_f} - 1}{hM_f} l(t;h) + e^{TM_f} |y(t_0) - y_0|$$

Ahora, como $l(t;h) \leq C_1 h^2$, si suponemos que el error inicial es una $O(h)$, tenemos

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} C_1 h + e^{TM_f} C_2 h = h \left(\frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} C_1 + e^{TM_f} C_2 \right) = O(h)$$

luego el orden de convergencia es 1 (obsevar que coincide con el hecho de que el orden de convergencia es uno menos que el de consistencia)

d) *Buscar algún contraejemplo que demuestre que el orden del método no es dos.*
Que no sea de orden dos significa que debe tener como máximo orden de consistencia 2. Esto se conseguirá si observamos la expresión calculada en b) que es

$$l(t;h) = (f_t + f f_y) \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} \right) + O\left(h^3\right)$$

para no anular el término de h^2, debemos encontrar una edo cuya f asociada cumpla que $f_t + f f_y \neq 0$. Basta tomar por ejemplo $f(t,y) = t$, cuya edo sería

$$y' = t$$

que obviamente cumple lo pedido.

e) *¿Qué modificación simple puedes sugerir para que mejor el orden del método?*
Observando de nuevo la expresión de $l(t;h)$, vemos que si el término $\frac{h^2}{4}$ fuese un $\frac{h^2}{2}$, anulariamos siempre (indep de f) el término de h^2 y tendriamos que $l(t;h) \sim O(h^3)$, y por ende el método tendría orden de convergencia 2. La forma de conseguir eso es considerar el método

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

6. *Explora la solución del test círculo $z' = iz$ con $z(0) = 1$ donde $z(t) = u(t) + iv(t)$. Comprueba que las soluciones cumplen (si $u_0^2 + v_0^2 = 1$)*

   a) *Para Euler explícito: $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = (1+h^2)^{n+1}$*
   Calculamos euler explícito para la ecuación $z' = zi$

$$z_{n+1} = z_n + ihz_n = z_n(1+hi)$$

iterando este proceso es obvio que

$$z_{n+1} = (u_0 + v_0 i)\,(1 + hi)^{n+1}$$

tomando módulo en ambas expresiones

$$\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2} = \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)}\,\left(1 + h^2\right)^{\frac{n+1}{2}} = \left(1 + h^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

es decir que

$$u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = \left(1 + h^2\right)^{n+1}$$

b) *Para Euler implícito:* $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = (1 + h^2)^{-(n+1)}$
Aplicamos euler implícito

$$z_{n+1} = z_n + hiz_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} = \frac{1}{1 - ih} z_n$$

iterando el proceso

$$z_{n+1} = (1 - ih)^{-(n+1)}$$

e igual que antes, basta con tomar módulos y usar que $u_0^2 + v_0^2 = 1$

$$\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2} = \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)}\,\left(1 + h^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left(1 + h^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

es decir que

$$u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = \left(1 + h^2\right)^{-n-1}$$

c) *Para Crank-Nicolson:* $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = 1$
Aplicamos Crank-Nicolson

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\left(iz_n + iz_{n+1}\right) = z_n + \frac{hi}{2} z_n + \frac{hi}{2} z_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} = z_n \frac{1 + \frac{hi}{2}}{1 - \frac{hi}{2}}$$

iterando y tomando módulos

$$\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{hi}{2}}{1 - \frac{hi}{2}}\right)^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{2 + hi}{2 - hi}\right)^{n+1}} = 1$$

donde en el último término hemos usado que el módulo del cociente, es el cociente de los módulos, y el cociente del numerador es el mismo que el del denominador. De esta forma

$$u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = 1$$

2. Runge-Kutta

1. *Dada la ecuación diferencial* $y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = \alpha$ *y la familia de métodos de Runge-Kutta explícitos de tres etapas*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{3} b_i k_i \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\ k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h\{a_{31}k_1 + a_{32}k_2\}) \end{cases}$$

se tiene las siguientes condiciones para garantizar un orden 3*:*

$$\begin{gathered} b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2 \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3 \\ b_3 c_2 a_{32} = 1/6 \end{gathered}$$

El método de Nystrom es el resultado de encontrar una solución a estas restricciones con $c_2 = c_3$ *y* $b_2 = b_3$*. Calculas los coeficientes, escribir el método, aplicarlo al problema* $y'(t) = \lambda y(t), y(0) = 1$ *calculando la solución al esquema y comprobar el error global cometido.*

Imponiendo las condiciones $c_2 = c_3$ y $b_2 = b_3$ el sistema nos queda

$$\begin{gathered} b_1 + 2b_2 = 1 \\ 2b_2 c_2 = 1/2 \\ 2b_2 c_2^2 = 1/3 \\ b_2 c_2 a_{32} = 1/6 \end{gathered}$$

que resolviendlo obtenemos que $b_2 = b_3 = 3/8$, $c_2 = c_3 = 2/3$, $b_1 = 1/4$ y $a_{32} = 2/3$. Nos falta por determinar a_{31} y a_{21}, para ello construimos la matriz de butcher asociada

$$\begin{array}{ccccc} 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & | & a_{21} & 0 & 0 \\ 2/3 & | & a_{31} & 2/3 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ & | & 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{array}$$

obteniendo que $a_{21} = 2/3$ y $a_{31} = 2/3 - 2/3 = 0$ (recordemos que $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = c_i$, por ejemplo $a_{31} + a_{32} = c_3$), luego el método queda

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3\right) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + h\frac{2}{3}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + h\frac{2}{3}k_2\right) \end{cases}$$

Ahora vamos a aplicarlo a $y' = \lambda y$, para ello obervamos que en este caso $f(t, y(t)) = \lambda y$, luego tendremos que

$$k_1 = \lambda y_n$$

$$k_2 = \lambda \left(y_n + h\frac{2}{3}k_1 \right) = \lambda \left(y_n + h\frac{2}{3}\lambda y_n \right) = \lambda y_n \left(1 + \frac{2}{3}h\lambda \right)$$

$$k_3 = \lambda \left(y_n + h\frac{2}{3}k_2 \right) = \lambda \left(y_n + h\frac{2}{3} \left(\lambda y_n \left(1 + \frac{2}{3}h\lambda \right) \right) \right) = \lambda y_n \left(1 + \frac{2}{3}h\lambda + \frac{4}{9}h^2\lambda^2 \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{4}\lambda y_n + \frac{3}{8}\lambda y_n \left(1 + \frac{2}{3}h\lambda \right) + \frac{3}{8}\lambda y_n \left(1 + \frac{2}{3}h\lambda + \frac{4}{9}h^2\lambda^2 \right) \right) =$$

$$= y_n \left(1 + \frac{h\lambda}{4} + \frac{3h\lambda}{8} + \frac{3h\lambda}{8} + \frac{6}{24}h^2\lambda^2 + \frac{6}{24}h^2\lambda^2 + \frac{12}{72}h^3\lambda^3 \right) =$$

$$= y_n \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} \right)$$

luego iterando el proceso (esto siempre es así en el caso de la exponencial) llegamos a que

$$y_n = \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} \right)^n$$

Ahora nos piden el error global. Sabiendo que la solución real es $e^{\lambda t}$, entonces el rror global se calcula como

$$e^{\lambda t} - y_n^h = e^{\lambda t} - \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} \right)^n$$

pero por un resultado técnico que vimos en clase, sabemos que $1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} = T_3(\lambda h)$ y $T_3(\lambda h)^n = e^{\lambda t} + O(h^3)$, luego

$$e^{\lambda t} - \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} \right)^n = e^{\lambda t} - T_3(\lambda h)^3 = e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda t} + O\left(h^3\right) \right) = O\left(h^3\right)$$

Esto casi siempre resultará así en esta clase de ejercicios, aunque hay casos donde no (consultar últimos ejercicios de esta secció). Recordemos que

$$T_p(\lambda h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\lambda h)^i}{i!}$$

es decir, $T_p(\lambda h)$ es el desarrollo de orden p de la exponencial evaluado en λh.

2. *Construir el método de Runge-Kutta de tres etapas que tiene la siguiente matriz de Butcher*

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 3/6 & 1/6 & 2/6 \end{array}$$

Comprobar que el método es de orden 2 y no es tres en general. Comprobar que si es de orden 3 cuando se aplica al problema $y' = \lambda y$ con $y(0) = 1$. Explicar esta aparente contradicción.

El método quedaría de la forma

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3\right) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ k_3 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\right) \end{cases}$$

Para ver que no es de orden 3 nos basta con comprobar que no satisface las condiciones de la página 184

$$3/6 + 1/6 + 2/6 = 1$$
$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot 1 = 1/2$$
$$\frac{1}{6}\cdot 1^2 + \frac{2}{6}\cdot 1^2 \neq 1/3$$

luego no satisfacen la tercera condición y el método no es de orden 3. Si lo aplicamos al problema dado, tenemos que $f(t, y(t)) = \lambda y$, luego

$$k_1 = \lambda y_n$$

$$k_2 = \lambda(y_n + h\lambda y_n) = \lambda y_n(1 + h\lambda)$$

$$k_3 = \lambda\left(y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_n(1 + h\lambda))\right) = \lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{h\lambda}{2} + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right) = \lambda y_n\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{6}\lambda y_n + \frac{1}{6}\lambda y_n(1 + h\lambda) + \frac{2}{6}\lambda y_n\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right)\right) =$$

$$= y_n\left(1 + \frac{3h\lambda}{6} + \frac{h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{2h\lambda}{6} + \frac{2h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^3\lambda^3}{6}\right) = y_n\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \frac{h^3\lambda^3}{3!}\right) = y_n T_3(h\lambda)$$

luego iterando el proceso tenemos que

$$y_n = T_3(h\lambda)^n$$

que igual que en el ejercicio anterior, tendremos que

$$e^{\lambda t} - y_n^h = e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda t} + O\left(h^3\right)\right) = O\left(h^3\right)$$

Supongamos que el método fuera de orden 2 (sería igual si fuera de orden 1), entonces no habría ninguna contradicción, pues $O(h^3) < O(h^2)$. El hecho de que el método sea de orden 2 (u orden 1) significa que existirá´un problema que tenga orden 2, pero eso no implica que no pueda existir alguno con un orden menor. Si dibujamos las gráficas de los errores, se ve claramente que en $(0, 1)$ la gráfica de $E(h) = O(h^2)$ pasa por encima de $O(h^3)$ (recordemos que el hecho de que $E(h) = O(h^2)$ es que $\exists C$ tal que $E(h) = Ch^2$)

3. Problema 2 parte 1 de examen 23/01/2017. *Dada la ecuación diferencial* $y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = \alpha$ *y la familia de métodos de Runge-Kutta explícitos de tres etapas*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{3} b_i k_i \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\ k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h\{a_{31}k_1 + a_{32}k_2\}) \end{cases}$$

se tiene las siguientes condiciones para garantizar un orden 3*:*

$$\begin{gathered} b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2 \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3 \\ b_3 c_2 a_{32} = 1/6 \end{gathered}$$

Consideramos el método de Runge-Kutta que tiene la siguiente matriz de Butcher

$$\begin{array}{ccccc} 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & | & 0 & 1/3 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ & | & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}$$

a) *Comprobar que, a pesar de usar tres estapas, NO es de orden* 3.

Basta con comprobar que falla algunas de las condiciones

$$-1/3 + 1/3 + 1 = 1$$

$$1/3 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/3 = 1/2$$

$$1/3 \cdot (1/2)^2 + 1 \cdot (1/3)^2 = 7/36 \neq 1/3$$

luego en efecto el método no es de orden 3

b) *Aplicarlo al problema* $y' = \lambda y$ *con* $y(0) = 1$ *y comprobar que el problema concreto disminuye la acotación de error en el sentido de que es* $O(h^3)$.

Primero construyamos el esquema numérico para esta matriz

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + k_3\right) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_2\right) \end{cases}$$

En nuestro caso $f(t, y(t)) = \lambda y$, luego nos queda que

$$k_1 = \lambda y_n$$

$$k_2 = \lambda\left(y_n + \frac{h}{2}\lambda y_n\right) = \lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)$$

$$k_3 = \lambda\left(y_n + \frac{h}{3}\left(\lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)\right)\right) = \lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{3} + \frac{h^2\lambda^2}{6}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{1}{3}\lambda y_n + \frac{1}{3}\left(\lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)\right) + \lambda y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{3} + \frac{h^2\lambda^2}{6}\right)\right) =$$

$$= y_n\left(1 - \frac{h\lambda}{3} + \frac{h\lambda}{3} + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{3} + \frac{h^3\lambda^3}{6}\right) = y_n\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \frac{h^3\lambda^3}{3!}\right) =$$

$$= y_n T_3(h\lambda)$$

Iterando el proceso llegamos a que

$$y_n = T_3(h\lambda)^n$$

Por tanto el error global cometio será

$$e^{\lambda t} - y_n^h = e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda t} + O\left(h^3\right)\right) = O\left(h^3\right)$$

c) *¿Qué explicación se puede dar a este resultado?*

Supongamos que el método converge con orden 2, este hecho no contradice que pueda haber problemas para los cuales el error converja con un orden 3, pues $O(h^2) > O(h^3)$. Recordemos que converja con orden 2 significa que EXISTE algún problema para el cual el error es justamente una $O(h^2)$ (dibujar las gráficas para verlo más claro)

4. *Suponer que las soluciones del problema de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $t > 0$ con $y(0) = y_0$ tienen toda la regularidad que sea necesaria y considerar el siguiente método de Runge-Kutta de dos pasos*

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right) \end{gathered}$$

Demostrando todos los pasos que se realizan:

a) *Obtener el error de consistencia local del método con respecto de h*

Para el error de consistencia utilizamos

$$l(t;h) = y(t+h) - y(t) - \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

Primero calculamos el desarrollo de Taylor de $y(t+h)$

$$y(t+h) = y + hy' + \frac{h^2}{2!}y'' + O\left(h^3\right)$$

Por otro lado, el desarrollo de las k_i será (vamos a obviar los argumentos al igual que antes)

$$k_1 = f(t, y)$$

$$k_2 = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{4 \cdot 2!}\left(f_{tt} + f_{yy} f^2 + f_y^2 f\right) + O\left(h^3\right)$$

por tanto tenemos que ($y' = f, y'' = f_t + f_y f$)

$$l(t; h) = hf + \frac{h^2}{2!}(f_t + f_y f) - \frac{h}{2}f - \frac{h}{2}f - \frac{h^2}{4}(f_t + f_y f) + O\left(h^3\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{4}(f_t + f_y f) + O\left(h^3\right) = O\left(h^2\right)$$

luego el error de consistecia es una $O(h^2)$ y el método es de orden 1

b) *Comprobar la estabilidad del método*

Usaremos el hecho de que f es lips respecto de la segunda variable

$$|w_{n+1} - z_{n+1}| \leq |w_n - z_n| + \frac{h}{2}|f(t_n, w_n) - f(t_n, z_n)$$

$$+ f\left(t_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{h}{2}k_1\right) - f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_1\right)| \leq$$

$$\leq |w_n - z_n| + \frac{h}{2}L_f|w_n - z_n| + \frac{h}{2}L_f|w_n + \frac{h}{2}f(t_n, w_n) - z_n + \frac{h}{2}f(t_n, z_n)| \leq$$

$$\leq |w_n - z_n| + \frac{h}{2}L_f|w_n - z_n| + \frac{h}{2}L_f|w_n - z_n| + \frac{h^2}{4}L_f^2|w_n - z_n|$$

luego iterando tenemos que

$$|w_n - z_n| \leq \left(1 + h\left(L_f + \frac{h}{4}L_f^2\right)\right)^n |w_0 - z_0|$$

Si llamamos $M_f = L_f + \frac{1}{4}L_f^2$, entonces $\forall h < 1$ tenemos que

$$|w_n - z_n| \leq (1 + hM_f)^n |w_0 - z_0| \leq e^{TM_f}|w_0 - z_0|$$

y por tanto el método es estable para $h < 1$

c) *Comprobar la convergencia del mismo hacia la solución del problema de Cauchy indicando su orden de convergencia con respecto a h*

Para la convergencia procedemos de la siguiente forma (creo que siempre se hace lo mismo)

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n+1}) - y^*_{n+1} + y^*_{n+1} - y_{n+1} = l(t; h) + y^*_{n+1} - y_{n+1}$$

donde $y^*_{n+1} = y(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$. Usando la acotación encontrada en el apartado anterior

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq l(t; h) + (1 + hM_f)|y(t_n) - y_n|$$

Si iteramos con $h < 1$ llegamos a que (las siguientes acotaciones salen de una progresión geométrica. Cnsultar últimos ejercicios de la primera sección de esta hoja)

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{(1+hM_f)^n - 1}{1+hM_f - 1} l(h) + (1+hM_f)^n |y(t_0) - y_0| \leq$$

$$\leq e^{TM_f} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} \frac{l(h)}{h}$$

pero como $l(h) \leq C_1 h^2$, si el error inicial $|y(t_0) - y_0| \leq C_2 h$, entonces

$$|y(t_n) - y_n| \leq e^{TM_f} C_2 h + \frac{e^{TM_f} - 1}{M_f} C_1 h$$

y por tanto el método es de orden 1.

d) *Aplicarlo a $y' = t$ con $y(0) = 0$ y comprobar que el error global cometido es el que indica el analisis realizado*

En este caso $f(t, y) = t$, luego tenemos que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(t_n + t_n + \frac{h}{2}\right) = y_n + ht_n + \frac{h^2}{4} \overset{t_n = nh}{=} y_n + h^2\left(n + \frac{1}{4}\right)$$

Busquemos una recurrencia

$$y_1 = y_0 + h^2\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{h^2}{4}$$

$$y_2 = \frac{h^2}{4} + h^2\left(1 + \frac{1}{4}\right) = h^2\left(1 + \frac{2}{4}\right)$$

$$y_3 = h^2\left(1 + \frac{2}{4}\right) + h^2\left(2 + \frac{1}{4}\right) = h^2\left(1 + 2 + \frac{3}{4}\right)$$

Podemos observar que

$$y_n = h^2\left(\sum_{i=1}^{n-1} n + \frac{n}{4}\right) = h^2\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4}\right) = \frac{h^2 n^2 - h^2 n}{2} + \frac{h^2 n}{4} = \frac{t^2 - th}{2} + \frac{th}{4} =$$

$$= \frac{t^2}{3} - \frac{ht}{4}$$

Como la solución real del problema es $y = \frac{t^2}{2}$, entonces el error global es

$$y - y_n^h = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{3} - \frac{ht}{4} = \frac{t}{4} h$$

es decir, que es de orden 1 respecto de h

5. Apartado e) del control de 2021 (solo el cálculo de la región). *Calcula la región de estabilidad absoluta del método*

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \end{gathered}$$

La región de estabilidad absoluta se calcula aplicando el método al problema modelo $y' = \lambda y$ con $\lambda \ll 0$. Así pues, calculemos la solución para dicho problema

$$\begin{gathered} k_1 = \lambda y_n \\ k_2 = \lambda\left(y_n + \tfrac{h}{2}\lambda y_n\right) = \lambda y_n\left(1\,\acute{}+\tfrac{h}{2}\right) \\ y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n\left(1 + \tfrac{h}{2}\right) = y_n\left(1 + h\lambda + \tfrac{h^2\lambda^2}{2!}\right) \end{gathered}$$

iterando el proceso, llegamos a que $y_n = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!}\right)^n$. Ahora bien, sabemos que la solución real del problema es $e^{\lambda t}$, función que decrece muy rápido, por lo que buscamos también que nuestra y_n presente dicho comportamiento para que se aproxime lo mejor posible a la solución real. ¿Cómo conseguimos esto? Si la base de la potencia es menor que 1, luego

$$|1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} < 1$$

Sea $p(z) = \frac{z^2}{2} + z + 1$, ¿cúando se da que $0 < p(z) < 1$? Como $p(z) > 0$, solo deberemos ver cuando es menor que 1, luego calculando $p(z) = 1$ nos da el valor

$$z\left(\frac{z}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \text{ ó } \ z = -2$$

con $p(-1) = \frac{1}{2} < 1$ luego si $0 < z < -2$, entonces $p(z) < 1$. Tomando $z = h\lambda$ con $\lambda < 0$ llegamos a que

$$-2 < h\lambda < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda} > h$$

y la región de estabilidad absoluta es $h \in \left(0, -\frac{2}{\lambda}\right)$.

6. Ejercicio 3 examen enero 2019. *Interpreta geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas*

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{9}\left(2k_1 + 3k_2 + 4k_3\right) \\ k_1 = f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(t_n + \tfrac{h}{3}, y_n + \tfrac{h}{3}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{3}hk_2\right) \end{gathered}$$

y aplicarlo al problema $y' = \lambda y$ obteniendo una estimación del error global cometido.

Solo haremos la última parte.

$$\begin{gathered}
k_1 = \lambda y_n \\
k_2 = \lambda\left(y_n + \tfrac{h}{3}\lambda y_n\right) = \lambda y_n\left(1 + \tfrac{\lambda h}{3}\right) \\
k_3 = \lambda\left(y_n + \tfrac{2}{3}h\lambda y_n\left(1+\tfrac{\lambda h}{3}\right)\right) = \lambda y_n\left(1 + \tfrac{2}{3}h\lambda\left(1+\tfrac{\lambda h}{3}\right)\right) = \lambda y_n\left(1 + \tfrac{2}{3}h\lambda + \tfrac{2\lambda^2h^2}{9}\right) \\
y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{9}\left(2\lambda y_n + 3\lambda y_n\left(1+\tfrac{\lambda h}{3}\right) + 4\lambda y_n\left(1 + \tfrac{2}{3}h\lambda + \tfrac{2\lambda^2h^2}{9}\right)\right) = \\
= y_n\left(1 + h\lambda + \tfrac{11}{27}h^2\lambda^2 + \tfrac{8}{81}h^3\lambda^3\right)
\end{gathered}$$

luego iterando este proceso, llegamos a que $y_n = \left(1 + h\lambda + \frac{11}{27}h^2\lambda^2 + \frac{8}{81}h^3\lambda^3\right)^n$. Observemos que no obtenemos el término $T_3(h\lambda)$, luego tenemos que ingeniarnosla para que aparezca. Bastará con hacer

$$1 + h\lambda + \frac{11}{27}h^2\lambda^2 + \frac{8}{81}h^3\lambda^3 = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{3!} - \frac{5}{54}h^2\lambda^2 - \frac{11}{162}h^3\lambda^3$$

y por tanto llegamos a que

$$y_n = \left(T_3(h\lambda) - h^2\left(\frac{5}{54}\lambda^2 + \frac{11}{162}h\lambda^3\right)\right)^n = \left(T_3(h\lambda) + O\left(h^2\right)\right)^n$$

Nos queda calcular el error global, que es

$$e^{\lambda t} - y_n^h = e^{\lambda t} - \left(T_3(h\lambda) + O\left(h^2\right)\right)^n$$

ahora bien, podemos usar el hecho de que

$$T_3(h\lambda) = e^{h\lambda} + O\left(h^4\right)$$

luego

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t} - y_n^h &= e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda h} + O\left(h^4\right) + O\left(h^2\right)\right)^n = e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda h} + O\left(h^2\right)\right)^n \\
&= e^{\lambda t} - e^{n\lambda h}\left(1 + O\left(h^2\right)\right)^n \underset{\text{limite estacionario}}{=} e^{\lambda t} - e^{\lambda t}\left(1 + O(h)\right) = O(h)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(1 + O(h^p))^n \underset{n\to\infty}{\to} (1 + O(h^{p-1}))$.

3. Multipasos

1. *Encontrar los valores de α para los que el método*

$$y_{n+2} + 2\alpha y_{n+1} - (2\alpha+1)y_n = h\left[(\alpha+2)f_{n+1} + \alpha f_n\right]$$

es cero estable, consistente y determinar el orden mayor posible. Deducir que hay una elección del parámetro a que consigue que el método tenga orden 3. Estudiar la validez de esta elección.

- **0-estabilidad.** Para que un método multipaso sea 0-estable se debe de verificar la condición de Dahlquist (página 243). Para ello, necesitaremos calcular cual es el primer polinomio característico que lo sacamos fijanodnos en la ecuación

  $$y_{n+2} + 2\alpha y_{n+1} - (2\alpha + 1)\, y_n = 0$$

  en este caso el polinomio es

  $$\rho(z) = z^2 + 2\alpha z - (2\alpha + 1)$$

  La condición de Dahlquist nos dice que 1 debe ser raiz de $\rho(z)$, y las demás raices deben de ser módulo menor que 1. En caso de que una de las raíces sea de módulo 1, deberá de tener multiplicidad 1. Veamos que $\rho(1) = 0$

  $$\rho(1) = 1 + 2\alpha - (2\alpha + 1) = 0$$

  y por otro lado

  $$\rho(z) = (z - 1)(z + (2\alpha + 1))$$

  y entonces obtenemos que

  $$|2\alpha + 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2\alpha + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 0]$$

  y observemos que $\alpha \neq 0$, pues en ese caso 1 sería una raiz de módulo 1 y doble, contradiciendo la condición de Dahlquist (también se podría dar que $\alpha = e^{i\theta}$).

- **Consistencia.** Utilizaremos las condiciones dadas en la página 255 Teorema 152. Para ello, necesitaremos $\sigma(z)$, que es el segundo polinomio característico y es el asociado a

  $$(\alpha + 2)\, f_{n+1} + \alpha f_n$$

  que en este caso da

  $$\sigma(z) = (\alpha + 2)\, z + \alpha$$
  $$C_0 = \rho(1) = 0$$
  $$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$$
  $$C_2 = \sum_{j=0}^{2} \left[j^2 a_j - 2j b_j\right] = a_1 - 2b_1 + 4a_2 - 4b_2$$

  donde los a_j son los coeficientes del término z^j del polinomio $\rho(z)$, mientras que los de b_j son los de $\sigma(z)$. En este caso, $a_0 = -2\alpha - 1, a_1 = 2\alpha, a_2 = 1, b_0 = \alpha, b_1 = \alpha + 2, b_2 = 0$ luego

  $$C_2 = 2\alpha - 2\alpha - 4 + 4 = 0 \Rightarrow$$
  $$\text{El método tiene al menos orden de consistencia 3}$$

  .

  $$C_3 = \sum_{j=0}^{2} \left[j^3 a_j - 3j^2 b_j\right] = a_1 - 3b_1 + 8a_2 - 12b_2 = 2\alpha - 3\alpha - 6 + 8 = -\alpha + 2 = 0$$
  $$\Leftrightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \text{El método tiene al menos orden de consistencia 4}$$

  Ahora bien, como en el caso $\alpha = 2$ (que es la elección que nos da una concergencia de orden 3) tendríamos que $2 \cdot 2 + 1 = 5$ sería raiz, y obviamente esta tiene módulo mayor que 1, luego no tendríamos 0-estabilidad y por tanto el método no convergería, luega esta opción no es válida. Así pues, la única posibilidad es que $\alpha \in (-1, 0]$ o $\alpha = e^{i\theta}$, con orden de convergencia 2.

2. *Comprobar que el orden de consistencia del método*

$$y_{n+2} + (\alpha - 1)\, y_{n+1} - \alpha y_n = \frac{h}{4}\left[(\alpha + 3)\, f_{n+2} + (3\alpha + 1)\, f_n\right]$$

es 2 si $\alpha \neq 1$ y 3 si $\alpha = -1$. Aplicar el método cuando $\alpha = -1$ al problema $y'(t) = 0, t > 0$ con $y(0) = 0, y_1 = h$ como valores iniciales y explicar el comportamiento resultante de la solución numérica.

- **0-estabilidad.** Vamos a ver que se verifique la condición de Dahlquist

$$\rho(z) = z^2 + (\alpha - 1)\, z - \alpha$$

$$\rho(1) = 1 + \alpha - 1 - \alpha = 0$$

luego tenemos que

$$\rho(z) = (z - 1)(z + \alpha)$$

En este caso tenemos que $|\alpha| < 1$, y como α debe ser distinto de -1, entonces tenemos que $\alpha = 1$ o $\alpha = e^{i\theta}$, en cuyo caso será 0-estable el método.

- **Consistencia.** Calculamos el segundo polinomio característico

$$\sigma(z) = \frac{\alpha + 3}{4} z^2 + \frac{3\alpha + 1}{4}$$

luego

$$\begin{gathered} C_0 = \rho(1) = 0 \\ C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 2 + \alpha - 1 - \tfrac{\alpha+3}{4} - \tfrac{3\alpha+1}{4} = 0 \\ C_2 = \textstyle\sum_{j=0}^{2} \left[j^2 a_j - 2 j b_j\right] = a_1 - 2b_1 + 4a_2 - 4b_2 = \alpha - 1 + 4 - \alpha - 3 = 0 \\ C_3 = \textstyle\sum_{j=0}^{2} \left[j^3 a_j - 3 j^2 b_j\right] = a_1 - 3b_1 + 8a_2 - 12b_2 = \alpha - 1 + 8 - 3\alpha - 9 = -2\alpha - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha = -1 \end{gathered}$$

si calculais C_4 veréis que el α que sale tiene módulo mayor que 1, luego no nos serviría. Así pues, tenemos que si $\alpha = -1$, entonces el método tiene orden de consistencia 4, pero sin embargo no sería convergente por no ser 0-estable, y si $\alpha \neq -1$ tiene consistencia 3 y por ende convergenrcia de orden 2.

Vamos a aplicarlo ahora el problema que nos dan. En este caso $f = 0$, luego el esquema queda

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$$

Si vamos calculando los términos con $y_0 = 0, y_1 = h$, llegamos a que $y_n = nh$, que converge a la solución $y = t$ (esto lo obtenemos tomando límite estacionario) que obviamente no es la solución real de nuestro problema. Esto se debe a que el método planteado no es estable, pues ρ tiene a 1 como raíz doble.