Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2016-2017.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Control Teórico 1. Fecha: 29/11/2016, 10:00 am

**Nombre:** **DNI:**

**Tiempo: 2 horas**

1. Dada la ecuación de segundo orden

$$x''(t) + 2\,x'(t) - x(t) = \sin(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Usando notación matricial se pide:

*a*) **(0.5 puntos)** Escribirla como un sistema de ecuaciones de primer orden

*b*) **(1.5 puntos)** Escoger de los apuntes un método de Runge-Kutta de dos etapas y segundo orden cualquiera y describir el proceso iterativo que se genera cuando se aplica a este sistema.

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ fijos con $a > 0$ se desea usar el método de Crank-Nicolson para aproximar la solución del problema

$$y(0) = 1,\ y'(t) = -a\,y(t) + b, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

*a*) **(1 punto)** Deducir la solución exacta a partir de la expresión de $y_n^h$ y de su límite estacionario.

*b*) **(2 puntos)** Deducir la expresión más exacta posible del error global y comprobar que el orden con respecto a $h$ predicho por la teoría coincide con el orden obtenido.

3. Suponer que las soluciones del problema de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)),\ t > 0$ con $y(0) = y_0$ tienen toda la regularidad que sea necesaria y considerar el siguiente método de Runge-Kutta de dos pasos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\,(k_1 + k_2), \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1). \end{aligned}$$

Demostrando todos los pasos que se realizan:

*a*) **(1.5 puntos)** Obtener el error de consistencia local del método con respecto a $h$.

*b*) **(1 punto)** Comprobar la estabilidad del método.

*c*) **(1.5 punto)** Comprobar la convergencia del mismo hacia la solución del problema de Cauchy indicando su orden de convergencia con respecto a $h$.

*d*) **(1 punto)** Aplicarlo al problema $y'(t) = t$ con $y(0) = 0$ y comprobar que el error global cometido es el que indica el análisis realizado.