Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Examen Computacional tipo A. Fecha: 16/12/2021, 12:00 a 14:00

Nombre: **DNI:**

Instruciones:

- Tiempo 2 horas
- Los nombres de los códigos deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$. Lo mismo para los archivos que contengan imágenes. No se aceptarán otros nombres.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido.
- Envie los códigos o gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es** y responda a las preguntas que se plantean en este documento.
- **Si un código no funciona no se valorará el ejercicio.**

Ejercicios: (puntuaciones: $3 + 4 + 3 = 10$)

1. Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}h,\, y_n + \frac{1}{3}h\,k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}h,\, y_n - \frac{1}{3}h\,k_1 + h\,k_2) \\ k_4 &= f(t_n + h,\, y_n + h\,k_1 - h\,k_2 + h\,k_3) \end{aligned}$$

usando para ello la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y'(t) = (1+t^2)^{-1} - 2\,y(t)^2, & t \in [0,3], \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $y(t) = t\,(1+t^2)^{-1}$. Se pide:

- **(1.5 puntos)** Generar la recta de pendiente del método.
- **(0.5 puntos)** Generar una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente.
- **(1 punto)** Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **Nombre. Ejercicio 1, orden ...**

(continua detrás...)

2. Para $t \in [0,3]$ consideramos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}x'(t) & = & 9\,x + 24\,y, \quad x(0) = 1, \\ \dfrac{d}{dt}y'(t) & = & -24\,x - 51\,y, \quad y(0) = 1, \end{array} \right.$$

que tiene por solución

$$x(t) = 2\,e^{-3t} - e^{-39t},$$
$$y(t) = -e^{-3t} + 2\,e^{-39t}.$$

- **(2 puntos)** Aproximar numéricamente la solución exacta usando Euler explícito y Euler implícito en el intervalo temporal $[0,3]$.
- **(1 punto)** Comparar los dos métodos en términos de estabilidad absoluta y generar una gráfica con subplots que ilustren su comportamiento en este aspecto. Poner los títulos adecuados para que las gráficas se expliquen por sí mismas.
- (Usar la notación matricial de Matlab u Octave aportará **1 punto** a este ejercicio)

3. Considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & -300\,t^2\,y(t)^2, \quad t \in [0,3], \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $y(t) = (100t^3 + 1)^{-1}$.

a) **(2 puntos)** Aplicar Runge-Kutta Fehlberg 4(5) para aproximar la solución. Obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada.

b) **(0.5 puntos)** Usando una partición uniforme con el mismo número de puntos obtenidos anteriormente usar el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden y obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada en este caso.

c) **(0.5 puntos)** Obtener una gráfica comparando los errores puntuales de ambos métodos en todo el intervalo.