Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Examen Computacional tipo A. Fecha: 16/12/2021, 12:00 a 14:00

Nombre: **DNI:**

Instruciones:

- Tiempo 2 horas
- Los nombres de los códigos deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$. Lo mismo para los archivos que contengan imágenes. No se aceptarán otros nombres.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido.
- Envie los códigos o gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es** y responda a las preguntas que se plantean en este documento.
- **Si un código no funciona no se valorará el ejercicio.**

Ejercicios: (puntuaciones: $3 + 4 + 3 = 10$)

1. Dados y_0, y_1, y_2 se calcula

$$y_{n+1} \quad = \quad y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(7f(t_n, y_n) - f(t_{n-2}, y_{n-2})\right), \quad n \geq 2.$$

Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia de este método lineal multipaso. Usando para ello la ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & 5y(t) - 4\cos(t) - 6\sin(t) \quad t \in [0, 5], \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $y(t) = sin(t) + cos(t)$. Se pide:

- **(1 puntos)** Generar la recta de pendiente del método.
- **(1 punto)** Generar una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente.
- **(1 punto)** Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **Nombre. Ejercicio 1, orden ...**

2. Para $t \in [0,3]$ consideramos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x'(t) & = & -298\,x(t) + 99\,y(t), & x(0) = -1/2, \\ y'(t) & = & -594\,x(t) + 197\,y(t), & y(0) = 1/2 \end{array} \right.$$

que tiene por solución

$$x(t) = \frac{3}{2}\,e^{-t} - 2\,e^{-100t},$$
$$y(t) = \frac{9}{2}\,e^{-t} - 4\,e^{-100t}.$$

a) **(2 puntos)** Aproximar la solución en una partición uniforme del intervalo $[0,3]$ mediante el siguiente método de Runge-Kutta

$$y_{n+1} \;\; = \;\; y_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3)$$

donde

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t_n, y_n), \\ k_2 & = & f(t_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1), \\ k_3 & = & f(t_n + h,\, y_n + h\,(-k_1 + 2\,k_2)). \end{array}$$

b) **(2 puntos)** Usando como medida del error

$$e(h) = \max_n \{ |x_n - x(t_n)| + |y_n - y(t_n)| \}$$

completar las siguientes tablas e indicar el orden de precisión aproximado del método

N	800	1600	3200	6400
Error	…………	…………	…………	…………

N vs. 2N	800 vs. 1600	1600 vs. 3200	3200 vs. 64000
Orden			

3. **(3 puntos)** Considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & 100\,y(t) - 101e^{-t}, & t \in [0,1], \\ y(0) & = & 1 & \end{array} \right.$$

cuya solución general es $y(t) = e^{-t} + (y(0) - 1)e^{100\,t}$ y tiene como solución particular $y(t) = e^{-t}$.

a) **(2 puntos)** Aplicar Runge-Kutta Fehlberg 4(5) para aproximar la solución. Obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada.

b) **(0.5 punto)** Usando una partición uniforme con el mismo número de puntos obtenidos anteriormente usar el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden y obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada en este caso.

c) **(0.5 punto)** Obtener una gráfica comparando los errores puntuales de ambos métodos en todo el intervalo.