Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Fecha: 19/01/2023.

Calificación total: $0.7\times T + 0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría: Tiempo de 16:00 a 18:30.

1. **(2 puntos)** Obtener la expresión de w_n en función de t_n y de h cuando se aplica el método de Crank-Nicolson (también llamado del trapecio) a

$$w'(t) = t^2,\ w(0) = 0.$$

La solución exacta es $w(t) = t^3/3$ y va a ser útil la fórmula de la suma de los cuadrados de números enteros

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obtener el error de convergencia global en este caso.

¿Qué conclusión se puede extraer de esta información con respecto al orden de convergencia del método de Crank-Nicolson?

2. **(3 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 3/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema. ¿Qué se puede decir con respecto a su orden?

3. **(2 puntos)** Encontrar los valores de α para los que el método

$$y_{n+2} + 2\,\alpha\, y_{n+1} - (2\alpha+1)\, y_n \quad = \quad h[(\alpha+2)\, f_{n+1} + \alpha\, f_n],\ n \geq 0$$

es cero estable, consistente y determinar el orden mayor posible. Deducir que hay una elección del parámetro a que consigue que el método tenga orden 3. Estudiar la validez de ésta elección.

(sigue)

4. **(3 puntos)** Siendo $\varepsilon > 0$ y $b > 0$ consideramos la ecuación de convección difusión

$$u_t(t,x) \quad = \quad \varepsilon\, u_{xx}(t,x) - b\, u_x(t,x) \quad x \in (0,1), \quad t > 0$$

y el siguiente esquema en diferencias finitas

$$u_l^{n+1} = u_l^n + \varepsilon\,\mu\,(u_{l-1}^n - 2\,u_l^n + u_{l+1}^n) - \frac{1}{2} b\mu\,\Delta x\,(u_{l-1}^n - u_{l+1}^n)$$

donde $\mu = \Delta t\,(\Delta x)^{-2}$.

a) Deducir razonadamente el esquema introduciendo toda la notación conveniente y explicar lo que se está haciendo **(1 p.)**.

b) Obtener el error de consistencia que se obtiene usando este esquema con respecto a los parámetros Δt y Δx **(1 p.)**.

c) Comprobar que este esquema es estable **(1 p.)** .

Computación: Tiempo de 18:45 a 20:00

Instrucciones:

- Poner **todos los códigos que sean necesarios, programas principales y subprogramas** así como cualquier gráfica generada en un único archivo comprimido con el nombre `Apellido_DNI.zip` y subirlo a la tarea generada en el aula virtual o enviarlo a la dirección **eliseo@um.es**.

- **Si el código enviado no compila o faltan subprogramas el problema puntuará cero.**

- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.** No utilizar caracteres latinos, tildes o $\tilde{n}$ en los comentarios.

Ejercicios:

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}\,(2\,k_1 + 3\,k_2 + 4\,k_3)\\
k_1 &= f(t_n, y_n)\\
k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1)\\
k_3 &= f(t_n + \frac{3}{4}h,\, y_n + \frac{3}{4}h\,k_2)
\end{aligned}
$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial

$$
\left\{\begin{aligned}
y'(t) &= t^3 - 2t\,y(t), \quad t \in [1,5],\\
y(1) &= 1.
\end{aligned}\right.
$$

cuya solución exacta es $y(t) = 0.5\,(t^2-1) + e^{1-t^2}$ **Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente** del método junto con una **recta adicional que sirva de contraste** para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **Nombre: Ejercicio 1, orden p=**

(sigue a continuación)

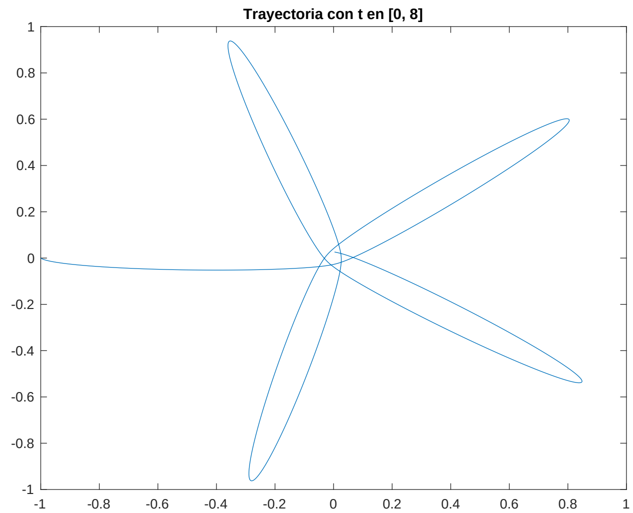

Figura 1: Trayectoria de una partícula cargada en $t \in [0, 8]$.

2. **(4 puntos)** Usar el método clásico de Runge-Kutta de orden 4 para describir el movimiento de una partícula con posición $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ y velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) \in \mathbb{R}^2$ en un campo de fuerzas conservativo generado por un cable que transporta corriente y está centrado en el origen $0 \in \mathbb{R}^2$. El movimiento viene determinado por:

$$\mathbf{x}''(t) = -\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathbf{x}(0) = (-1, 0)^T, \quad \mathbf{x}'(0) = (0.1, -0.1)^T$$

donde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $\mathbf{x} = (x, y)$.

a) Convertir la ecuación de segundo orden en una ecuación de primer orden y aproximar la solución en el intervalo de tiempo $[0, 8]$.

b) Reproducir la gráfica de la trayectoria $\mathbf{x}$ en el espacio $\mathbb{R}^2$ dada por la Figura 1.

Generar y enviar por correo el código y la gráfica de la trayectoria (x,y) indicando el valor de h usado. Como título de la figura usar el siguiente formato:
Nombre: trayectoria (x,y) en [0,8] con h=...

3. **(3 puntos)** Comprobar computacionalmente el efecto de la 0-estabilidad usando el método

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a\, y_n \quad = \quad \frac{h}{2}[(3-a)f(t_{n+1}, y_{n+1}) - (1+a)f(t_n, y_n)]$$

para aproximar la solución $y(t) = 0.5\,(t^2 - 1) + e^{1-t^2}$ en el intervalo $[1, 5]$ de la ecuación $y' = t^3 - 2ty$ con $y(1) = 1$. Usar los valores $a = 0$ y $a = -5$ con pasos $h = 0.1, 0.05, 0.025$.
Generar y enviar el código usado junto con las gráficas que ilustren los resultados.
Como título de las figuras usar el siguiente formato (en el caso $a = 0, h = 0.1$):
Nombre: Ejercicio 3, a=0, h=0.1