MNEDs Tarea #4 (a subir al Aula Virtual el Lunes 27 de Noviembre)

Ejercicios sobre métodos multipaso

Instrucciones: Redactar un documento adjuntando gráficas detalladas. Enviar códigos comentados a la dirección de correo **eliseo@um.es**.

[**1**] Dados y_0, y_1, y_2 consideramos el esquema

$$\frac{1}{3}y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n - y_{n-1} + \frac{1}{6}y_{n-2} = hf(t_n, y_n), \quad n \geq 2$$

que tiene un error local de orden 4. Si lo aplicamos al ejemplo

$$y'(t) = 2\,t\,(1 + y(t)^2),\ y(0) = 0$$

cuya solución es $y(t) = tan(t^2)$ y empezamos con valores exactos nos econtramos con la situación de la Figura 1 y vemos que reducir el valor de h sólo empeora la situación por lo que a pesar de tener un error local de orden 4 no es un método convergente, nos falla la estabilidad a cero del método. No se cumple la condición de las raices sobre el primer polinomio característico del método.

```
t0=0;
T=1;
N=20;
h=T/N
t=t0:h:t0+T;
true=t0:0.00001:t0+T;
ztrue=tan(true.^2);
y=zeros(N+1,1);
%
% Datos iniciales
%
y(1)=tan(t(1)^2);
y(2)=tan(t(2)^2);
y(3)=tan(t(3)^2);

for n=3:N
    y(n+1)=-1.5*y(n)+3*y(n-1)-0.5*y(n-2)+3*h*2*t(n)*(1+y(n)^2);
end
figure
plot(t,y,'*-',true,ztrue);
```

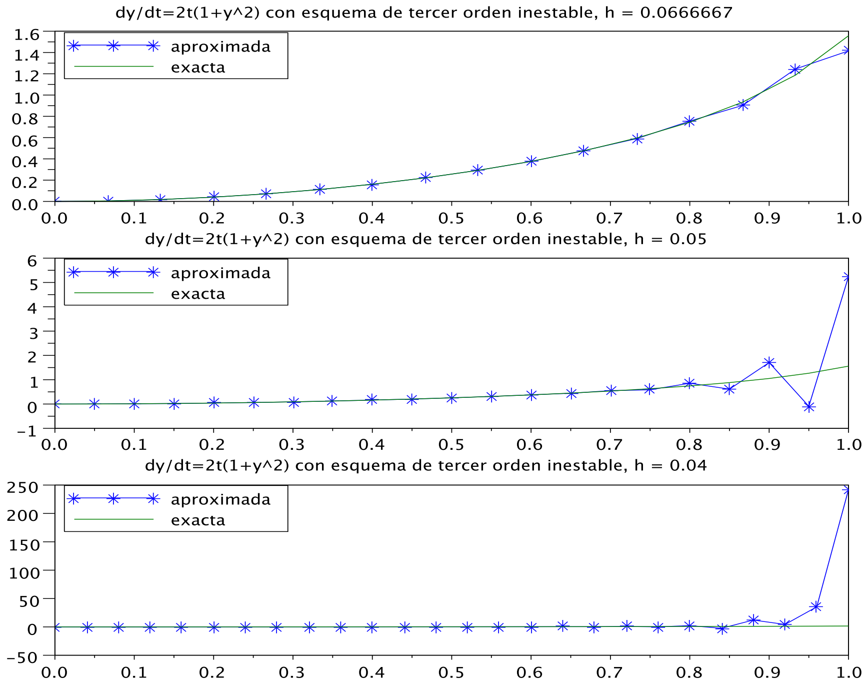

Figure 1: Método con error local de orden 3 pero inestable. Reducir h incrementa la inestabilidad numérica.

[2] (Griffiths et al.) Encontrar los valores de α para los que el método

$$y_{n+2} + 2\,\alpha\, y_{n+1} - (2\alpha + 1)\, y_n \quad = \quad h[(\alpha + 2)\, f_{n+1} + \alpha\, f_n],\ n \geq 0$$

es cero estable, consistente y determinar el orden mayor posible. Deducir que hay una elección del parámetro α que consigue que el método tenga orden 3. Estudiar la validez de ésta elección.

[3] Aplicar el esquema implícito BDF3 dado por

$$y_{n+1} - \frac{18}{11} y_n + \frac{9}{11} y_{n-1} - \frac{2}{11} y_{n-2} = \frac{6}{11} h\, f_{n+1}$$

a la **ecuación de Dahlquist-Bjorck** dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & 100\,(sin(t) - y(t)), \quad 0 < t \leq 3, \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{-a\,t} y_0 + \frac{sin(t) - a^{-1} cos(t) + a^{-1} e^{-a\,t}}{1 + a^{-2}} \ (a = 100).$$

Inciando el cómputo con los valores exactos, obtener la recta de pendiente que confirme el orden del método.

Nota: Como $f(t, y) = 100\,(sin(t) - y)$ es lineal en la variable y, se puede despejar y_{n+1} de la expresión $f_{n+1} = 100\,(sin(t_{n+1}) - y_{n+1}) = 100\, sin(t_{n+1}) - 100\, y_{n+1}$