Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Convocatoria de Julio. Examen Final: parte teórica.
Fecha: 21/06/2023, hora: 9:30, tiempo 2 horas y 15 mins

**Calificación total:** $0.7\times T+0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

**Nombre:** **DNI:**

1. Aproximamos $y(t_n)$ por los valores $y_n$ obtenidos con Euler explícito para aproximar la solución del problema
$$y'(t) = a\,y(t) + b, \quad 0 \leq t \leq 1.$$
   *a*) **(1 punto)** Suponiendo que $y(0) = y_0 = 1$ deducir una expresión para los valores $y_n$. Deducir a partir de esta expresión, y de su límite, la forma de la solución exacta.
   *b*) **(1 punto)** Verificar que $y(nh) - y_n = O(h)$.

2. **(3 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas con tablero de Butcher
$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$
y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema. ¿Qué se puede decir con respecto a su orden?

3. **(2 puntos)** Caracterizar y determinar las propiedades del método multipaso
$$y_{n+1} - y_n \;=\; \frac{h}{12}[23\,f_n - 16\,f_{n-1} + 5\,f_{n-2}],\ n \geq 0$$

4. **(2 puntos)** Consideremos el esquema
$$y_{n+1} - y_{n-1} \;=\; h[\frac{7}{3}f_n - \frac{2}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}],\ n \geq 2$$
Comprobar la consistencia y estabilidad de este esquema.

5. (**1 p.**) Comprobar que se tiene
$$u_{xxx}(x) = \frac{H_{xxx}u(x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2)$$
donde
$$H_{xxx}u(x) = u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 2[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)].$$