Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2021-2022.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Examen Computacional tipo A. Fecha: 16/12/2021, 12:00 a 14:00

Nombre: **DNI:**

Instruciones:

- Tiempo 2 horas
- Los nombres de los códigos deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$. Lo mismo para los archivos que contengan imágenes. No se aceptarán otros nombres.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido.
- Envie los códigos o gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es** y responda a las preguntas que se plantean en este documento.
- **Si un código no funciona no se valorará el ejercicio.**

Ejercicios: (puntuaciones: $3 + 4 + 3 = 10$)

1. Dados y_0, y_1, y_2 se computa

$$y_{n+1} \;=\; y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(7f(t_n, y_n) - 2f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_{n-2}, y_{n-2}\right), \quad n \geq 2$$

Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia de este método lineal multipaso usando para ello la ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & (1+t^2)^{-1} - 2\,y(t)^2, \quad t \in [0,3], \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

cuya solución exacta es $y(t) = t\,(1+t^2)^{-1}$, y como valores iniciales los valores de la solución exacta, es decir, $y_n = y(t_n)$ para $n = 0, 1, 2$. Se pide:

- **(1.5 puntos)** Generar la recta de pendiente del método.
- **(0.5 puntos)** Generar una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente.
- **(1 punto)** Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **Nombre. Ejercicio 1, orden ...**

(continua detrás...)

2. Para $t > 0$ consideramos el sistema lineal de edos

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 32x_1(t) + 66\,x_2(t) + \dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3}, \\ x_2'(t) &= -66\,x_1(t) - 133x_2(t) - \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Para los datos iniciales $x_1(0) = 1/3$ y $x_2(0) = 1/3$ posee solución exacta

$$x_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t},\ x_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t}.$$

- **(2 puntos)** Aproximar numéricamente la solución exacta usando Euler explícito y Euler implícito en el intervalo temporal $[0, 3]$.
- **(1 punto)** Comparar los dos métodos en términos de estabilidad absoluta y generar una gráfica con subplots que ilustren su comportamiento en este aspecto. Poner los títulos adecuados para que las gráficas se expliquen por sí mismas.
- (Usar la notación matricial de Matlab u Octave aportará **1 punto** a este ejercicio)

3. **(3 puntos)** Considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y'(t) &= 101 + 100(t - y(t)), \quad t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

cuya solución general es $y(t) = 1+t+(y(0)-1)e^{-100t}$ y tiene como solución particular $y(t) = 1 + t$.

a) **(2 puntos)** Aplicar Runge-Kutta Fehlberg 4(5) para aproximar la solución. Obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada.

b) **(0.5 punto)** Usando una partición uniforme con el mismo número de puntos obtenidos anteriormente usar el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden y obtener una gráfica comparando la solución exacta con la computada en este caso.

c) **(0.5 punto)** Obtener una gráfica comparando los errores puntuales de ambos métodos en todo el intervalo.