Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Runge Kutta $S \leq 3$ error de truncatura. Fecha: 11/10/2022

Total sobre 10 p.

Para $y'(t) = f(t, y(t))$ usamos la notación

$$f = f(t, y(t)),\ f_y = f_y(t, y(t)),\ f_t = f_t(t, y(t)),\ f_{ty} = f_{ty}(t, y(t)),\ ....$$

y definimos

$$F = f_t + f f_y, \quad G = f_{tt} + 2 f f_{ty} + f^2 f_{yy}.$$

Comprobar que:

1. **(0.5 p.)** $y'' = f_t + f f_y = F, \quad y''' = F f_y + G$
2. **(0.5 p.)** $y(t+h) = y(t) + fh + F\frac{h^2}{2} + [F f_y + G]\frac{h^3}{6} + O(h^4)$

Si se considera ahora la forma general de un método de Runge-Kutta explicito para $S \leq 3$ etapas (si $S = 2$ entonces $c_3 = a_{31} = a_{32} = b_3 = 0$)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

con $b_1 + b_2 + b_3 = 1,\ c_2 = a_{21},\ c_3 = a_{31} + a_{32}$. Comprobar que:

1. **(1 p.)** $k_2 = f + a_{21} h F + \frac{1}{2} c^2 h^2 G + O(h^3)$
2. **(1.5 p.)** $h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) = c_3 h f + a_{32} a_{21} h^2 F + \frac{1}{2} a_{32} c_2^2 h^3 G + O(h^4)$
3. **(1.5 p.)** $k_3 = f + c_3 h F + h^2[a_{32} a_{21} F f_y + \frac{1}{2} c_3^2 G] + O(h^3)$
4. **(3 p.)** Finalmente

$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 = f + (a_{21} b_2 + c_3 b_3) h F + \frac{1}{2} h^2 [2 a_{32} a_{21} b_3 F f_y + (b_3 c_3^2 + b_2 c_2^2) G] + O(h^3)$$

Concluir que para obtener orden 2 es necesario

$$c_2 b_2 + c_3 b_3 = \frac{1}{2}$$

y que para obtener orden 3 necesitamos además tener simultáneamente

$$c_2^2 b_2 + c_3^2 b_3 = \frac{1}{3}, \quad a_{32} a_{21} b_3 = \frac{1}{6}$$

(2 p.) Construir el método de Runge-Kutta de tres etapas que tiene la siguiente matriz de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 3/6 & 1/6 & 2/6 \end{array}$$

Comprobar que el método es de orden 2 y no es 3 en general. Comprobar que si que es de orden 3 cuando se aplica al problema $y'(t) = y(t)$ con $y(0) = 1$. Explicar esta aparente contradicción. Dar ejemplos teóricos donde el orden 2 y el orden 3 se alcancen.