Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2019-2020.
Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Convocatoria de Junio. Fecha: 8/06/2020, 09:30 a 14:00

Observación: Leer todo el examen antes de empezar. A partir de las 10:00 se cuenta convocatoria.

Calificación total: $0.7\times T+0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

Teoría, sobre 10 puntos: Tiempo de 9:30 a 12:30

Parte 1 (6 puntos):

1. **(2.5 puntos)** Sea $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ una función globalmente lipschitziana, y consideramos el problema de Cauchy

$$(PC)\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(y), \\ y(0) & = & y_0; \end{array}\right.$$

que pretendemos resolver mediante el método

$$(M1P) \qquad y_{n+1} = y_n + \alpha\, h f(y_n + \beta\, h f(y_n)).$$

Se pide:

a) Comprobar que el método es cero-estable y determinar α y β para que $(M1P)$ sea de orden 2, suponiendo que f tiene la suficiente regularidad, la cual se especificará.

b) Estimar el error de consistencia en este caso, en términos de f y sus derivadas. Indicar la regularidad necesaria en f para poder hacer todos los cálculos.

2. **(1.5 puntos)** Hallar una fórmula para y_n cuando se aplica el método de Crank-Nicolson a una ecuación de la forma $y'(t) = \alpha\, y(t) + \beta$, con y_0 dado.

a) Calcular la solución verdadera y comprobar que $|y(t) - y_n^h| \to 0$ cuando $h \to 0,\ n \to \infty$ de forma tal que $nh = t$.

b) Demostrar que si $\alpha \neq 0$ se cumple $|y(t) - y_n^h| = O(h^2)$ pero no existe $p > 2$ tal que $|y(t) - y_n^h| = O(h^p)$.

3. **(2 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas

$$\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n + \dfrac{h}{8}\,(k_1 + 3\,k_2 + 4\,k_3) \\ k_1 & = & f(t_n, y_n) \\ k_2 & = & f(t_n + \dfrac{h}{4}, y_n + \dfrac{h}{4}k_1) \\ k_3 & = & f(t_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \dfrac{h}{4}k_1 + \dfrac{h}{4}\,k_2). \end{array}$$

y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido.

(sigue)

Parte 2 (4 puntos):

1. **(2 puntos)** Responder a las siguientes cuestiones:

   - (**0.5 puntos**) Comprobar que se tiene

     $$u_{xxx}(x) = \frac{H_{xxx}u(x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2)$$

     donde

     $$H_{xxx}u(x) = u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 2[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)].$$

   - (**1.5 puntos**) Usando esta información, generar un esquema de diferencias finitas para la ecuación

     $$\begin{aligned} u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) &= 0 \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(t,0) &= 0, \quad t > 0 \\ u(t,1) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

     Construir y detallar todo lo que se necesita para plantear este esquema. En los extremos del intervalo realizar las hipótesis necesarias y más razonables para obtener un esquema válido.

2. **(2 puntos)** Siendo $\varepsilon, c, d > 0$ consideramos la ecuación de convección difusión y reacción

   $$u_t(t,x) \;=\; \varepsilon\, u_{xx}(t,x) + c\, u_x(t,x) + d\, u(t,x) + f(t,x) \quad x \in (0,1), \quad t > 0$$

   con datos de contorno $u(t,0) = u(t,1) = 0$ y dato inicial $u(0,x) = u_0(x)$.

   a) **(1 punto)** Plantear un esquema en diferencias finitas donde los términos de la derecha se aproximen de forma implícita en tiempo y se mantenga un orden $O(\Delta x^2)$ en cada diferencia finita, es decir, Euler implícito. Deducir razonadamente el esquema introduciendo toda la notación conveniente.

   b) **(0.5 puntos)** Usar notación matricial para condensar el esquema de trabajo.

   c) **(0.5 puntos)** Obtener el error de consistencia del esquema cuando se supone que se aplica en un punto cualquiera (t^n, x_j) del dominio computacional.

(sigue a continuación)

Computación, sobre 10 puntos: Tiempo: de 12:30 a 14:00

Instrucciones:

- Envie los códigos o gráficas generadas a la dirección **eliseo@um.es**. Los nombres de los códigos o imágenes deben seguir el formato `Apellido_DNI_Ejercicio_X.m` donde $X = 1, 2, 3$.
- Los códigos deben indicar en su cabecera nombre y DNI del autor y estar claramente comentados en los pasos principales. Si se reutilizan códigos, elimine o comente cualquier línea de código que no se corresponda con el trabajo pedido. **Se penalizará lo contrario.**

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1) \\ k_3 &= f(t_n + h,\, y_n - h\,k_1 + 2h\,k_2) \end{aligned}$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial, solución exacta $y(t) = 2\,e^{\sin(7\,t)}$,

$$\left\{ \begin{aligned} y'(t) &= 7\cos(7\,t)\,y(t), \quad t \in (0, 20], \\ y(0) &= 2. \end{aligned} \right.$$

Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente del método junto con una recta adicional que sirva de contraste para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado. Formato: **TuNombre: Ejercicio 1, orden p**

(sigue a continuación)

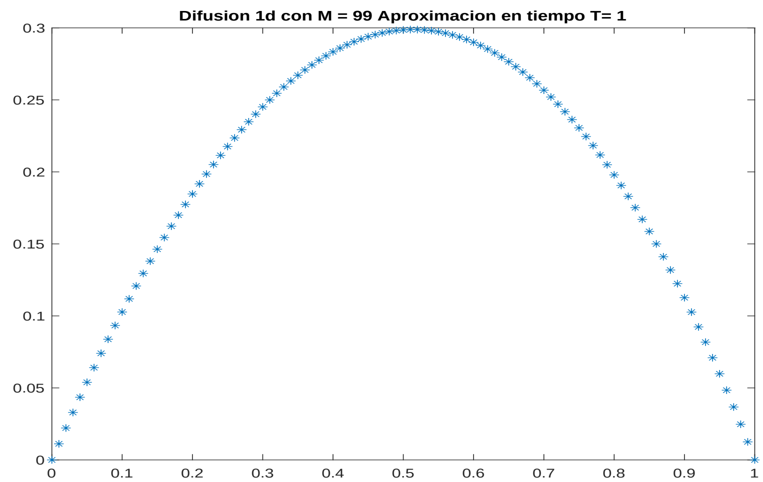

Figura 1: Ejercicio 3, solución en tiempo $T = 1$

2. **(3.5 puntos)** Expresar en términos de una ecuación de primer orden el sistema

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{v(t)}{1+t^2} - sin(r(t)) \\ v''(t) &= \frac{-u(t)}{1+t^2} + cos(r(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}$. Resolverlo en $[0, 5]$ usando un método de Runge-Kutta explícito de segundo orden cualquiera y con las condiciones iniciales

$$u(0) = 1, v(0) = u'(0) = v'(0) = 0.$$

Generar y enviar por correo el código y la gráfica del plano de fases (u,v)
Formato: **TuNombre: Ejercicio 2, plano de fases**

3. **(3.5 puntos)** Se considera la ecuación de difusión

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 2 + \sin(t)\,x, \quad \forall x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0,x) &= \sin(\pi\,x) + x(1-x), \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Usa Euler implícito y ajusta convenientemente los parámetros Δx y Δt para reproducir la gráfica de la Figura **??**.
Generar y enviar por correo el código y la gráfica obtenida.
Formato: **TuNombre: Ejercicio 3, Difusion T=1**