Grado en Matemáticas. Universidad de Murcia.
Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales. Curso 2022-2023.
Convocatoria de Junio. Examen Final: parte teórica.
Fecha: 25/05/2023, hora: 9:30, tiempo 2 horas y 15 mins

Calificación total: $0.7\times T + 0.3\times P$ siempre y cuando ambas partes T y P sean mayores de 4 puntos

Nombre: **DNI:**

1. Aproximamos $y(t_n)$ por los valores y_n obtenidos con Euler explícito para aproximar la solución del problema
$$y'(t) = -\frac{y(t)}{1+t}, \quad 0 \le t \le 1.$$
   a) **(1 punto)** Suponiendo que $y(0) = y_0 = 1$ deducir expresiones explícitas, libres de sumas o productos, para los valores y_n.
   b) **(1 punto)** Deducir a partir de estas expresiones, y de su límite, la forma de la solución exacta.
   c) **(1 punto)** Verificar que $y(nh) - y_n = O(h)$.

2. **(3 puntos)** Interpretar geométricamente el siguiente método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas con tablero de Butcher
$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 3/6 \end{array}$$
y aplicarlo al problema $y'(t) = y(t)$ obteniendo una estimación del error global cometido en este problema. ¿Qué se puede decir con respecto a su orden?

3. **(2 puntos)** Caracterizar y determinar las propiedades del método multipaso
$$y_{n+1} - y_n \;=\; \frac{h}{12}[23\,f_n - 16\,f_{n-1} + 5\,f_{n-2}],\; n \ge 0$$

(sigue)

4. Responder a las siguientes cuestiones:

- (**0.5 p.**) Comprobar que se tiene

$$u_{xxx}(x) = \frac{H_{xxx}u(x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2)$$

  donde

$$H_{xxx}u(x) = u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 2[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)].$$

- (**1.5 p.**) Usando esta información, generar un esquema de diferencias finitas para la ecuación

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) &= 0 \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(t,0) &= 0, \quad t > 0 \\ u(t,1) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

  Construir y detallar todo lo que se necesita para plantear este esquema.