# TEMA 1

## Sistemas de ecuaciones lineales

- REGLA DE CRAMER

$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $x = (x_i)$, $b = (b_i)$

$Ax = b$

$\Rightarrow x_j = \dfrac{\det(B_j)}{\det(A)}$ con $B_j = \left( a_1 \cdots a_{j-1} \; b \; a_{j+1} \cdots a_n \right)$

€ Como el costo de calcular un determinante de una matriz de tamaño nxn es una $O(n!)$ ("o grande de n!") es poco eficiente.

- MÉTODO DE GAUSS

$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $x = (x_i)_{n\times 1}$, $b = (b_i)_{n\times 1}$

1) $a_{1\cdot} \cdot \dfrac{-a_{i1}}{a_{11}} + a_{i\cdot}$ $\forall i = 2,\dots,n$ → anulamos $x_1$ en la ec. i-ésima con $i = 2,\dots,n$.

2) Repetimos $\forall j$ $a_{j\cdot} \dfrac{-a_{ij}}{a_{jj}} + a_{i\cdot}$ con $i = j+1,\dots,n$.

El costo de aplicar el método de Gaus es una $O(n^3)$.

- MATRIZ ELEMENTAL

$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ l_{ki} & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\; 1 \end{bmatrix}$ Una matriz elemental es cualquier matriz obtenida al aplicarle a la matriz identidad una operación elemental.

## factorización $\mathcal{L}\mathcal{U}$

Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, esta posee una factorización LU si $\exists \mathcal{L}$ triangular inferior, $\mathcal{U}$ triangular superior.

$Ax = b \Leftrightarrow \mathcal{L}\mathcal{U}x = b \Leftrightarrow \mathcal{U}x = y \;\wedge\; \mathcal{L}y = b$

Costo de hacer $\mathcal{L}\mathcal{U} \rightarrow O(n^3)$ Costo resolución $\rightarrow O(n^2)$

→ OBTENCIÓN DE FACTORIZACIÓN LU

Se hace de forma inductiva o constructiva.

$$A = L\cdot U \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & \dots & l_{11}u_{1n} \\ \vdots & & \\ l_{n1}u_{11} & \dots & l_{n1}u_{1n} + \dots + l_{nn}u_{nn} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow l_{11} \cdot u_{1j} = a_{1j}$

* elección de doolittle $\rightarrow l_{ii} = 1 \;\forall i$ * elección de CROUT $\rightarrow u_{ii} = 1 \;\forall i$

$\rightsquigarrow l_{kk} \cdot u_{kk} = \dfrac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$

Fijando $l_{ii} = 1 \;\; \forall i = 1,\dots,n \Rightarrow \begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & j = i, i+1,\dots,n \\ l_{ji} = \dfrac{1}{u_{ii}}\left[ a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right] & j = i+1,\dots,n \end{cases}$

→ EXISTENCIA

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $\det(A) \neq 0$. Entonces, $\exists \mathcal{L},\mathcal{U} : A = \mathcal{L}\mathcal{U} \Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,n \; \det(A_k) \neq 0$.

- A SIMÉTRICA

  ↳ $A = A^t := A'$

$$\begin{cases} A = \mathcal{L}\cdot U \\ A^t = (\mathcal{L}U)^t = U^t \cdot \mathcal{L}^t \end{cases}$$

Si $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \neq 0 \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad u_{ii} \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} u_{11} & \ddots & u_{ij} \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \ddots & 0 \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ddots & \widetilde{u_{ij}} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{M^t} \Rightarrow A = \mathcal{L}U = \mathcal{L}DM^t$$

$$\widetilde{u_{ij}} = u_{ij}/u_{ii}$$

Entonces, si $A$ es simétrica $(A = A^t)$ y $\det(A) \neq 0$, $A = \mathcal{L}D\mathcal{L}^t$ (porque $\mathcal{L} = M$)

Prop: Dada $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ \ell_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow \det(\mathcal{L}) = 1 \neq 0) \Rightarrow \exists \mathcal{L}^{-1}$ con $\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ \widetilde{\ell_{ij}} & & 1 \end{pmatrix}$

Esta descomposición es similar a los autovalores de la matriz $A$ ya que $(\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow Ax = \lambda x$ ; $\sigma(A) = \{$raíces de $\det(A - \lambda I)\}$:

$$Ax = \mathcal{L}D\mathcal{L}^t = \lambda x \Leftrightarrow D\mathcal{L}^t = \lambda \mathcal{L}^{-1} x$$

- A SIMÉTRICA DEFINIDA POSITIVA (S.P.D.)

  ↳ $A = A^t$ y $\forall x \in \mathbb{K}^n \quad x^t A x > 0$ y $x^t A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v \Rightarrow \underbrace{v^t A v}_{\overset{\vee}{0}} = \lambda \underbrace{v^t v}_{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 > 0} \Rightarrow \lambda > 0$$

Así que $A = \mathcal{L}D\mathcal{L}^t$ con $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ donde $d_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Por lo que podemos considerar $d_i^{1/2} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$

descomposición de Cholesky

$$\Rightarrow D^{1/2} = \begin{pmatrix} d_1^{1/2} & \ddots & 0 \\ 0 & & d_n^{1/2} \end{pmatrix} \text{ con } D = D^{1/2} \cdot D^{1/2} \Rightarrow A = \mathcal{L}D\mathcal{L}^t = \underbrace{\mathcal{L}D^{1/2}}_{G} \cdot \underbrace{D^{1/2}\mathcal{L}^t}_{G^t = (D^{1/2})^t \mathcal{L}^t = D^{1/2}\mathcal{L}^t} = G \cdot G^t$$

Si $\exists G = \begin{pmatrix} g_{11} & \ddots & 0 \\ g_{ij} & & g_{nn} \end{pmatrix}$ : $A = G \cdot G^t \Rightarrow A$ es SVD.

con $g_{kk} > 0$

→ ALGORITMO DE OBTENCIÓN DE CHOLESKY

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}}$$

$$\dots$$

$$g_{k1} = \frac{a_{k1}}{g_{11}}$$

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}$$

$$g_{ji} = \frac{1}{g_{ii}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik} g_{jk} \right]$$

$j = i+1, \dots, n$

$9 + 25 + x^2 = 35$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$6 + 1 \cdot x = 1 \Rightarrow x = -5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$12 - 10 + 1 \cdot x = 5 \Rightarrow x = 3$

## Factorización LU con permutaciones

Matrices de permutación.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad \rightsquigarrow P_{ij} \cdot A \text{ interambiamos las columnas } i \text{ y } j.$$

$P_{ij}^t = P_{ij}^{-1} = P_{ji}$

→ PERMUTACIÓN PARCIAL

$PA = LU$ donde $P$ matriz de permutaciones

* Pasos a seguir (iteración $k$-ésima)

I) Elegimos el pivote como el mayor elemento de la columna $k$-ésima (sup. fila $p$).

II) Se permutan la fila $k$ y $p$ de $A^{(k)}$ y $b^{(k)}$ ($\cdot P_{kp}$)

III) Eliminamos los elementos de la columna $k$ bajo la diagonal.

→ PERMUTACIÓN TOTAL

Se optimiza el algoritmo anterior buscando el mayor elemento entre las filas y columnas $i,j \geq k$ (iteración $k$-ésima) ⇒ se multiplica a izquierda y derecha por las matrices $P$ para permutar filas y columnas.

## Factorización QR

$Q = (q_1 | \cdots | q_n) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tq $\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ ($\langle q_i, q_j \rangle = q_i^{*} \cdot q_j = \sum_{s=1}^{m} \overline{q_{is}} \cdot q_{js}$)

y $Q^{*} \cdot Q = I_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Cuando la matriz es cuadrada, se dice que es una **matriz ortogonal** y sus columnas y filas son **ortonormales**.

$$x \in \mathbb{K}^n \Rightarrow x = \langle x, q_1 \rangle q_1 + \ldots + \langle x, q_n \rangle q_n$$

**Tª de Gram-Schmidt** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ LI en $\mathbb{K}^d \Rightarrow \exists \{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{K}^d : \langle x_1, \ldots, x_p \rangle = \langle y_1, \ldots, y_p \rangle$, $p = 1, \ldots, n$

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad \forall j > 1 \quad \tilde{y}_j = x_j - \sum_{s=1}^{j-1} \langle x_j, y_s \rangle y_s \rightarrow y_j = \frac{\tilde{y}_j}{\|\tilde{y}_j\|}$$

Reescrito:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_{11} y_1 \\ x_2 = \gamma_{12} y_1 + \gamma_{22} y_2 \\ \ldots \\ x_n = \gamma_{1n} y_1 + \gamma_{2n} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n \end{cases} \rightsquigarrow A = \left( x_1 | x_2 | \cdots | x_n \right) = \left( y_1 | y_2 | \cdots | y_n \right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ & \gamma_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} = QR$$

Donde $Q$ es ortogonal y $R$ triangular superior.

→ MATRIZ DE HOUSEHOLDER

Dado $u \in \mathbb{R}^n$, la **matriz de Householder** asociada a $u$ es $H_u = I - 2\frac{uu^t}{u^t u}$.

Prop.: 1. $H_u^t = H_u$ 2. $H_u \cdot H_u = I$ 3. Las matrices de Householder son ortogonales, simétricas y unitarias ⇒ preservan longitudes. ↝ $H_u$ simétrica, $H_u^2 = I$ y $\|H_u\|_2 = 1$

Teo.: Dado $a \in \mathbb{R}^n$, buscamos $u \in \mathbb{R}^n$ : $H_u a = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\|H_u a\| = |x| = \|a\|_2$

$$u = -\|a\| \cdot e_1 + a \Rightarrow H_u(a) = (\|a\|_2, 0, \ldots, 0)^t$$

$$\bar{u} = \|a\| \cdot e_1 + a \Rightarrow H_{\bar{u}}(a) = (-\|a\|_2, 0, \ldots, 0)^t$$

Obs.: 1. $u = (-\|a\|, 0, \dots, 0)^t + (a_1, \dots, a_n)^t = (-\|a\| + a_1, a_2, \dots, a_n)^t$

- $a \perp e_1 \Rightarrow$ todo OK.
- $a$ "$\parallel$" $e_1$ (casi $\parallel$) $\Rightarrow a_1 \cong 1, a_2 \cong 0, \dots, a_n \cong 0 \Rightarrow \|a\| \cong |a_1|$

$a_1 > 0 \Rightarrow -\|a\| + a_1 \cong 0 \Rightarrow$ ponemos $-\|a\| + a_1 = \dfrac{(-\|a\| + a_1)(-\|a\| - a_1)}{-\|a\| - a_1} = \dfrac{-a_1^2 + \|a\|^2}{-(\|a\| + a_1)} =$

$= -\dfrac{a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + \|a\|}$ que es $\uparrow$ estable

2. $a \in \mathbb{R}^n$, $u = -\|a\| e_1 + a \rightsquigarrow \mathcal{H}_u = I - 2\dfrac{u u^t}{u^t u}$, $\mathcal{H}_u(a) = \begin{pmatrix} \|a\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_u(b) = b - 2\dfrac{u u^t}{u^t u} b = b - 2\dfrac{u^t b}{u^t u} u$

* Factorización QR usando las transformaciones de Householder

Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ una factorización QR de $A$ es una de la forma $A = QR$ donde $Q \in \mathbb{K}^{m \times m}$ ortogonal y $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ triangular superior.

Si $p \in \min\{m, n\}$, el método de Householder para obtener la factorización consiste en encontrar $p$ matrices Householder $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ tq $R = \mathcal{H}_p \cdots \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_1 A$ sea una matriz triangular sup. $\Rightarrow Q = \mathcal{H}_1^t \cdots \mathcal{H}_p^t \;:\; A = QR$

- $R_0 = A$ y $Q_0 = \mathcal{H}_0 = Id$
- $Q_K = \mathcal{H}_K Q_{K-1} R_K = \mathcal{H}_K R_{K_1} \rightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \\ R_K = & \begin{bmatrix} x & \dots & x & \dots & x \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x & \dots & x \\ 0 & & x & \dots & x \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & x & \dots & x \end{bmatrix} \leftarrow \text{fila } K \\ & \text{columna } K \rightarrow \; \vec{r}_K \qquad \tilde{R}_K \end{array}$$

Con $\vec{r}_K = (r_{KK}, \dots, r_{mK})^t \in K^{m-K+1}$, consideremos $\tilde{\mathcal{H}}_{K+1} = \mathcal{H}(\tilde{v}_K)$ la matriz de Householder tq $\tilde{\mathcal{H}}_{K+1} \cdot \vec{r}_K = (1, 0, \dots, 0)$.

Sea $\boxed{\mathcal{H}_{K+1} = \left( \begin{array}{c|c} Id_{K-1} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\mathcal{H}}_{K+1} \end{array} \right)}$ donde $\mathcal{H}_{K+1} = \mathcal{H}(v_{K+1})$; $(0, \dots, 0, \tilde{v}_K)^t = v_K$

Entonces, construyendo $\boxed{Q_{K+1} = \mathcal{H}_{K+1} \cdot Q_K}$ y $\boxed{R_{K+1} = \mathcal{H}_{K+1} \cdot R_K = Q_{K+1} \cdot A}$

Reiteramos el proceso hasta obtener la matriz triangular $R = R_p = Q_p A$ y poniendo $Q = Q_p^t \Rightarrow A = QR$ que SIEMPRE EXISTE.

→ MATRIZ DE GIVENS

La matriz de transformación de Givens es de la forma
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \dots & -\operatorname{sen}\theta & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \operatorname{sen}\theta & \dots & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante transformaciones de Givens se puede reducir la matriz de un problema de mínimos cuadrados, en $n$ etapas, a una triangular superior $R$. En cada una de estas etapas $j$, se harían cero, uno a uno, los coeficientes $j+1$ a $m$.

Fin

## Factorización de Schur

**Tª de Schur** $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaria $(\mathcal{U}^{*}=\mathcal{U}^{-1})$ : $\mathcal{U}^{-1}A\mathcal{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & x\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=T$

$\Rightarrow A=\mathcal{U}T\mathcal{U}^{*}$ con $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & x & \dots & x\\ & \ddots & & \vdots\\ & & & x\\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ donde $\lambda_i\in\sigma(A)$ $i=1,\dots,n$

Dada $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tomamos $\lambda_1\in\sigma(A)$ y sea $v_1$ el correspondiente autovector $v_1$ : $\|v_1\|=1$. Elegimos $n-1$ vectores $w_2,\dots,w_n$ tq $\{v_1,w_2,\dots,w_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow V_1=(v_1'\ w_2'\cdots w_n')$ que cumple $V_1^{-1}\cdot A\cdot V_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, donde $A_1\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

Repitiendo el proceso con $A_1 \to V_2^{-1}\cdot A_1\cdot V_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$ donde $V_2$ es unitaria.

Así que,

$$Q_2=V_1\hat{V}_2=V_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_2\end{pmatrix} \Rightarrow Q_2^{*}AQ_2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \lambda_2 & *\\ 0 & 0 & A_2\end{bmatrix}$$

Continuando el proceso, $\exists V_3,\dots,V_n$ : $Q:=V_1\cdot\hat{V}_2\cdot\hat{V}_3\cdots\hat{V}_n \to T=Q^{*}AQ \Rightarrow A=QTQ^{*}$

triangular superior

Prop.: $Q^{*}\cdot Q=Id$ con $Q$ unitaria, ortogonal y $\lambda\in\sigma(Q)\Rightarrow|\lambda|=1$

$A$ es **normal** si $A^{*}A=AA^{*}$. Si $A^{*}A=I_n$ se dice que $A$ es **unitaria**.

Teo: $A$ es normal $\Leftrightarrow A=\mathcal{U}\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\cdot\mathcal{U}^{*}$ con $\mathcal{U}$ unitaria.

A autoadjunta

Teo: $A=A^{*}\Leftrightarrow A$ diagonalizable con una base ortonormal y con autovalores reales.

Teo: $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A=A^t\Leftrightarrow A=P\cdot\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)\cdot P^{*}$ con $d_i\in\mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$ $\Rightarrow P:=Q$ y $P^{*}=Q^t$

Una matriz $A$ es **simétrica definida positiva (S.P.D.)** si $A=A^t$ y es PD, es decir, si $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $\quad x^tAx=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0$

$B^{*}=B$

Prop.: Dada $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})\Rightarrow A^{*}A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ es hermítica y $\forall\lambda\in\sigma(A^{*}A)$ $\lambda>0$.

Los autovalores de $A^{*}A$ reciben el nombre de **valores singulares** de $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$.

## Descomposición en valores singulares (SVD)

Prop.: Si $A$ tiene rango máximo, entonces $\sigma_j\in\sigma(A^{*}A)\Rightarrow\sigma_j>0$

Dada $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^{*}A$ es simétrica con $\sigma(A^{*}A)>0$, tomamos $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\sigma(A^{*}A)$ : $\sigma_1\geq\dots\geq\sigma_n\geq0$ con $\sigma_i=0$ $(i=r+1,\dots,n)$ si $\mathrm{rang}(A^{*}A)=r$.

Si $\forall i=1,\dots,n$ tomamos $e_i$ : $A^{*}Ae_i=\sigma_ie_i$ ($\{e_1,\dots,e_n\}$ base ortogonal) y $u_i=\frac{1}{\sigma_i}Ae_i$ ($\Rightarrow\{u_1,\dots,u_n\}$ cumple que $u_i^{*}u_i=\frac{1}{\sigma_i}$ y $i\neq j$ $u_i^{*}u_j=0$ pues $e_i^{*}e_j=0$).

Vamos a llegar a $A=\mathcal{U}\Sigma V^{*}$ con $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{U}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ unitaria y $V\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaria.

$$A=(a_1\dots a_n)=(u_1|\cdots|u_n)\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ 0 & & \sigma_n\\ & 0 & \end{bmatrix}(v_1|\cdots|v_n)^{*}=\mathcal{U}\Sigma V^{*}\Rightarrow AV=\mathcal{U}\Sigma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(v_1|\cdots|v_n)=(u_1\sigma_1|\cdots|u_n\sigma_n)$$

Tomamos $v_1,\dots,v_n$ tq $(A^{*}A)v_i=\sigma_iv_i$ $\Rightarrow\{Av_1,\dots,Av_n\}$ $\quad(Av_i)^{*}(Av_j)=\sigma_jv_i^{*}v_j=\begin{cases}\sigma_i & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$

**Tª de Existencia de SVD** sea $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ $(m\geq n)\Rightarrow\exists\,\mathcal{U}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K}),V\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitarias y $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & 0\\ 0 & & \sigma_n\\ & 0 & \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ : $A=\mathcal{U}\Sigma V^{*}$.

→ CONSTRUCCIÓN

$A \cdot A^* \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ hermítica $\Rightarrow$ el espectro es real y positivo.

$\sigma(A \cdot A^*) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0)$ $\Rightarrow$ consideremos $\{u_1, \dots, u_m\}$ base ortonormal de autovectores de $AA^*$ $\rightarrow j = 1, \dots, m$ $\; AA^* u_j = \lambda_j u_j$.

$$\mathcal{U} = (u_1 | \cdots | u_m) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \text{ ortogonal.}$$

$$\Downarrow$$

$$(AA^*)\,\mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathcal{U} \cdot D \Rightarrow AA^* = \mathcal{U} D \mathcal{U}^*$$

$$AA^* u_j = \begin{cases} \lambda_j u_j = \sigma_j^2 u_j & j = 1, \dots, r \\ 0 & j = r+1, \dots, m \end{cases} \quad \boxed{\sqrt{\lambda_j} = \sigma_j}$$

$\operatorname{rang}(AA^*) = r < m$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$ familia ortonormal de $\mathbb{K}^n$ $\quad \boxed{v_j = \frac{1}{\sigma_j} A^* u_j}$

$$\boxed{\Sigma = \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \end{array}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}^* A = \Sigma V^* \Rightarrow A = \mathcal{U} \Sigma V^*$$

→ FORMA REDUCIDA DE SVD

$A^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simétrica $\Rightarrow (A^t A)\underset{\text{ortogonal}}{V} = V \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow AV = \hat{\mathcal{U}} \hat{\Sigma}$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ y $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \quad i = 1, \dots, n$

$V = (v_1 | \cdots | v_n)$, $\hat{\mathcal{U}} = (u_1, \dots, u_n)$, $\hat{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

**Lema**: Los autovalores no nulos de $AB$ coinciden con los de $BA$.

**Lema**: $A$ normal $(A^* A = AA^*) \Rightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(A)$ $\; \sigma_i = |\lambda_i|$

## Mínimos cuadrados

Dada la familia de puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ con abscisas distintas 2 a 2. Sabemos que $\exists!\, q$ polinomio interpolador de grado a lo sumo $m$ tq $\forall i$ $q(x_i) = y_i$ $\Rightarrow$ en general, si $n < m$ $\nexists\, q$ polinomio interpolador de grado $\leq n$ $\Rightarrow$ buscamos un polinomio $p(x)$ tq minimice $\|(y_0 - p(x_0), \dots, y_m - p(x_m))\|$, para ello introducimos los sistemas sobredeterminados.

Sean $n < m$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$ : $Ax = b$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

Buscamos minimizar $\|Ax - b\|_2$ con $\operatorname{rang}(A) = n < m$

**Teo.**: $x \in \mathbb{K}^m$ minimiza $\|Ax - b\|_2$ con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $b \in \mathbb{K}^m \Leftrightarrow r = Ax - b$ es ortogonal a $\mathrm{Img}(A)$.

**Teo.**: $x \in \mathbb{K}^n = \min\{\|Ay - b\|_2 : y \in \mathbb{K}^n\} \Leftrightarrow A^* A x = Ab$.

→ FORMAS DE RESOLVER $\min\{\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{K}^n\}$.

I. $A^* A x = A^* b$ ⇝ podemos usar Choleski en $A^* A$ ya que es def. positiva y hermítica $\Rightarrow A^* \cdot A = G^* \cdot G$ con $G = \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ g_{ij} & & g_{nn} \end{pmatrix}$ con $g_{ii} > 0$.

II. Usando QR: $A = \underset{\substack{\text{columnas} \\ \text{ortonormales}}}{(q_1 | \cdots | q_n)} \begin{pmatrix} r_{11} & & r_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} = \underset{\mathcal{M}_{m \times n}}{\hat{Q}} \cdot \underset{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})}{\hat{R}}$ $\quad$ ($\hat{Q}$ ⇝ $Q$ completando base ortonormal de $\mathbb{K}^m$)

$$\|Ax-b\|_2 = \|QRx-b\|_2 = \|Q\|_2 \cdot \|Rx - Q^H b\|_2 \overset{Q \text{ unitaria}}{=} \|Rx - Q^H b\|_2 \Rightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^H = (\hat{Q}|\tilde{Q})^H = \begin{pmatrix} \hat{Q}^H \\ \tilde{Q}^H \end{pmatrix}$$

$$\forall y \in \mathbb{K}^n \quad \|Ay-b\|_2^2 = \|\hat{R}y - \hat{Q}^H b\|_2^2 + \|\tilde{Q}^H b\|_2^2$$

$$(*)\ y = x \Rightarrow \hat{R}x = \hat{Q}^H b \Rightarrow \|Ay-b\|_2^2 \geq \|\tilde{Q}^H b\|_2^2 = \|Ax-b\|_2^2$$

Así que $x = \min\{\|Ay-b\|_2^2 : y \in \mathbb{K}^n\} \Leftrightarrow \boxed{x = \hat{R}^{-1}(\hat{Q}^H b)}$

~~Recapitulando, obt~~

También se puede obtener $x$ : $A^H A x = A^H b$ pues

$$\|A^H A x - A^H b\|_2^2 = \langle A^H A x - A^H b, u \rangle = \langle Ax - b, Au \rangle = 0$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Ax-b, Au\rangle$, en particu. $u = A^H A x - A^t b$

$$\Leftrightarrow A^H A x - A^H b = 0 \Leftrightarrow A^H A x = A^H b.$$

III. Usando SVD:

$$A^H A x = A^H b \Leftrightarrow (U\Sigma V^H)^H (U\Sigma V^H) x = (U\Sigma V^H)^H b \Leftrightarrow$$

$A = U\Sigma V^H$ con $U, V$ ortogonales ($\Rightarrow U^H = U^{-1}, V^H = V^{-1}$)

$$\Leftrightarrow \cancel{V}\Sigma^H \Sigma V^H x = \cancel{V}\Sigma^H U^H b \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix} (\hat{\Sigma} | 0) = \hat{\Sigma}^2\right] \Rightarrow$$

matrices diag

$$\Rightarrow \hat{\Sigma}^2 V^H x = (\hat{\Sigma}|0) U^H b \Leftrightarrow \circledast$$

$$U^H b = \begin{pmatrix} u_1^H \cdot b \\ \vdots \\ u_m^H b \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^H U^H = \left(\begin{matrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{matrix} \middle| 0_{m-n}\right) \begin{pmatrix} u_1^H \\ \vdots \\ u_m^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1^H \\ \vdots \\ \sigma_n u_n^H \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma^H U^H b = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1^H b \\ \vdots \\ \sigma_n u_n^H b \end{pmatrix}$$

$$V^H x = \begin{pmatrix} v_1^H x \\ \vdots \\ v_n^H x \end{pmatrix}$$

$$\circledast \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^H x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 v_1^H x \\ \vdots \\ \sigma_n^2 v_n^H x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1^H b \\ \vdots \\ \sigma_n u_n^H b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1^H x \\ \vdots \\ v_n^H x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} u_1^H b \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n} u_n^H b \end{bmatrix}$$

En conclusión, $A^H A x = A^H b \Leftrightarrow x = V\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^H b$

# TEMA 2

## Normas matriciales

Sea $E$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una **norma** sobre $E$ es una aplicación $\|\cdot\|: E \to [0,+\infty)$ tq $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$, $\forall x,y \in E$ $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ y $\forall x \in E, a \in \mathbb{K}$ $\|ax\|=|a|\|x\|$

Teo.: Todas las normas definidas en un espacio de dimensión finita son equivalentes, es decir, $\forall \|\cdot\|, \|\cdot\|_*$ $\exists a,b>0$ : $\forall x \in \mathbb{K}^n$ $a\|x\|_* \leq \|x\| \leq b\cdot\|x\|_*$

Una **norma matricial** en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una norma $\|\cdot\|$ definida en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que además cumple que $\forall A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$.

Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{K}^n$, se define la **norma matricial subordinada** como

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \setminus 0\right\} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1\right\} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\|=1\right\}$$

Prop: $\|A\|_\infty = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right\} = \max\limits_{i=1,\dots,n} \|a_{i\cdot}\|_1$

$\|A\|_1 = \max\left\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} : \|x\|_1 = 1\right\} = \max\limits_{j=1,\dots,n}\left\{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right\} = \max\limits_{j=1,\dots,n} \|a_{\cdot j}\|_1$

$\|A\|_2 = \max\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : \|x\|_2 = 1\right\} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2 \underset{\text{si A es normal}}{=} \rho(A)$

El **radio espectral** de una matriz $A$ se define como $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Definamos la **norma de Frobenius** como

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$$

Tiene la característica de que $\|I\|_F = \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1$.
$\Downarrow$
$\|\cdot\|_F$ no es subordinada a ninguna norma vectorial en $\mathbb{K}^n$.

Prop.: $U$ unitaria $\Rightarrow \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|A\|_2$. Además, $\|A\|_2 = \rho(A)$ si $A$ es normal.

Teo.: $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\|\cdot\|$ norma matricial $\Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$. Recíprocamente, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varepsilon>0$ $\exists \|\cdot\|$ norma matricial subordinada : $\|A\| \leq \rho(A)+\varepsilon$.

Coro: $\rho(A) = \min\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ norma matricial}\} = \min\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\} = $
$= \min\left\{\max\limits_{j=1,\dots,n} \|a_{\cdot j}\|_1, \max\limits_{i=1,\dots,n} \|a_{i\cdot}\|_1\right\}$.

## Sucesiones y series de matrices

Dada una familia de matrices $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\lim_{i\to+\infty} A_i = A \Leftrightarrow \|A_i - A\| \xrightarrow{i\to+\infty} 0$$

Definimos $S_i = \sum_{j=1}^i A_j$ y veamos:

Teo: $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}^n \lim\limits_{k\to+\infty} A^k x = 0 \Leftrightarrow \rho(A)<1 \Leftrightarrow \exists \|\cdot\|$ norma subordinada : $\|A\|<1$.

Coro: Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k < +\infty$ para $|z|<R \Rightarrow$ podemos construir $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ para $\rho(A)<R$, es ~~decir~~ más, $\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$.

Si $\rho(A)<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$

Teo: Las matrices invertibles son un conjunto abierto.

**Condicionamiento** Dada una norma matricial subordinada $\|\cdot\|$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible, se define el **nº de condición** de la matriz A CRA $\|\cdot\|$ por $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Teo.: Sea A una matriz invertible, $x$ y $x + \Delta x$ soluciones de $Ax = b$ y $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.

A mal condicionada $\Rightarrow \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \gg 1 \Rightarrow \Delta x \rightsquigarrow O(\varepsilon) = 10^3$ ó $10^4$.

Prop: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

i) $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$, $\text{cond}(I) = 1$

ii) $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} = \dfrac{\max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}}{\min\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}}$

iii) A normal $\Rightarrow \text{cond}_2(A) = \dfrac{|\lambda \max(A)|}{|\lambda \min(A)|} = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$.

iv) $\mathcal{U}$ unitaria $\Rightarrow \text{cond}_2(\mathcal{U}) = 1$

v) $\mathcal{U}$ unitaria $\Rightarrow \text{cond}_2(\mathcal{U}A) = \text{cond}_2(A\mathcal{U}) = \text{cond}_2(A)$

## hoja apartado EDO's

~~El algoritmo~~ La factorización $\mathcal{L}\mathcal{U}$ con el criterio de Doolitle en matrices tridiagonales también se conoce como **algoritmo de thomas**

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \\ & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & a_n & b_n \end{pmatrix}_{n\times n} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \tilde{a}_2 & \ddots & \\ 0 & \tilde{a}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & c_1 & & 0 \\ & \tilde{b}_2 & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & \ddots & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

Si consideramos $\{\delta_i\}$ dada por $\delta_1 = b_1$, $\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}$ $k = 2, \dots, n$

$(\det(A_k) = \delta_k) \Rightarrow \tilde{a}_j = a_j \dfrac{\delta_{j-2}}{\delta_{j-1}}$ $j = 2, \dots, n$ ; $\tilde{b}_j = \delta_j / \delta_{j-1}$ $j = 1, \dots, n$

Prop.: I $(\mathcal{L}\mathcal{U})_{kp} = 0$ si $|k-p| > 0$ II $(\mathcal{L}\mathcal{U})_{kk} = b_k$

III $(\mathcal{L}\mathcal{U})_{kk-1} = a_k$ IV $(\mathcal{L}\mathcal{U})_{kk+1} = c_k$ V $(d_k := \det(A_k))$

# TEMA 4

## Jacobi

Dada $Ax=b \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1=b_1-\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j \\ \dots \\ a_{nn}x_n=b_n-\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}x_j \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall j=1,\dots,n \quad x_j=\dfrac{b_j-\sum_{i\neq j}a_{ji}x_i}{a_{jj}}$

→ PROCESO ITERATIVO

Dado $x^0\in \mathbb{K}^n$ tomamos $\{x^k\}: x_i^{k+1}=\dfrac{b_i-\sum_{i\neq j}a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$

$A=D-E-F$ donde $-E\rightarrow (\Delta^0)$, $D\rightarrow ({}_0\diagdown{}^0)$ y $F\rightarrow ({}_0\nabla)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^{k+1}=D^{-1}(b+Ex^k+Fx^k)=\underbrace{D^{-1}b}_{C}+\underbrace{D^{-1}(E+F)}_{T}x^k \rightarrow \boxed{x^{k+1}=T_Jx^k+C_J \quad k>>0}$

Jacobi $\rightarrow \boxed{T_J=D^{-1}(E+F),\ C_J=D^{-1}b}$.

## Gauss-Seidel

En Gauss-Seidel hacemos $X^{k+1}=D^{-1}b+D^{-1}EX^{k+1}+D^{-1}FX^k$

$\Rightarrow (I-D^{-1}E)X^{k+1}=D^{-1}FX^k+D^{-1}b \Rightarrow (D-E)X^{k+1}=FX^k+b$

$\Rightarrow \boxed{X^{k+1}=T_{GS}X^k+C_{GS} \text{ donde } T_{GS}=(D-E)^{-1}F,\ C_{GS}=(D-E)^{-1}b}$

$x_{GS}^{k+1}$ $x_{GS}^{k}$

## SOR

$X_{SOR}^{k+1}=\omega X_{GS}^{k+1}+(1-\omega)X_{GS}^k \Rightarrow (X_{SOR}^{k+1})_i=\omega\dfrac{b_i-\sum_{j<i}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j>i}a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}+(1-\omega)(X_{GS}^k)_i$

$\Rightarrow X_{SOR}^{k+1}=\omega D^{-1}b+\omega D^{-1}EX^{k+1}+\omega D^{-1}FX^k+(1-\omega)\underbrace{(D^{-1}b+D^{-1}EX^k+D^{-1}FX^{k-1})}_{=X^k}$

$\Rightarrow X_{SOR}^{k+1}=\omega D^{-1}b+\omega D^{-1}EX^{k+1}+\omega D^{-1}FX^k+(1-\omega)X^k \Rightarrow$

$\Rightarrow DX^{k+1}=\omega b+\omega EX^{k+1}+\omega FX^k+(1-\omega)X^k \Rightarrow \boxed{(D-\omega E)X^{k+1}=((1-\omega)D+\omega F)X^k+\omega b}$

En resumen, $\boxed{X^{k+1}=T_{SOR}X^k+C_{SOR(\omega)}}$ donde $T_{SOR(\omega)}=(D-\omega E)^{-1}((1-\omega)D+\omega F)$, $c_{SOR(\omega)}=\omega b$.

En general, podemos tener el proceso iterativo:

→ Dado $x^0$, obtenemos $x^k$ tq $x^{k+1}=Tx^k+C$ con $k\geq 0$.

Es fácil ver que $Ax=b \Leftrightarrow x=Tx+C$ en los 3 casos.

## Error y convergencia

$X=TX+C$, $X^{k+1}=TX^k+C$

$X^{k+1}-X:=e^{k+1}=T(X^k-X)=T^2(X^{k-1}-X)=\dots=T^{k+1}(X^0-X)$

$\|e^k\|\rightarrow 0 \Leftrightarrow \|T^k\|\rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(T)<1$.

→ Idea general: sea $Ax=b$ con $A=M-N$ donde $M$ sea fácilmente invertible.

$\Rightarrow Mz=d$ se resuelve fácilmente.

$$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=(M^{-1}N)x+M^{-1}b$$

Denominando $T=M^{-1}N$, $C=M^{-1}b \Rightarrow MC=b$, entonces, $Ax=b \Leftrightarrow x=Tx+C$

→ ALGORITMO: Dado $x^0$, obtenemos $x^{k}$ con $k\geq 1$ como $x^{k+1}=Tx^k+C$ para $k\geq 0$.

Jacobi: $T_J=D^{-1}(E+F)$, $C_J=D^{-1}b$

¿$A=M-N$: $T=M^{-1}N$? ¿$C=M^{-1}b$? $\Rightarrow M=D$, $N=E+F$

## Condición de parada

Paramos si $\|e^k\| < \varepsilon$ donde $e^k = x^k - x$, el problema es que si no se conoce $x \Rightarrow$ no podemos calcular $e^k$. Para solucionar este problemas consideramos el residuo definido como $r^k = b - Ax^k$

$\|r^k\| << 1 \not\Rightarrow \|x^k - x\| << 1$, pero sí se cumple que

$$x - x^k = A^{-1}(Ax - Ax^k) = A^{-1}(b - Ax^k) = A^{-1} \cdot r^k \Rightarrow e^k = A^{-1} r^k$$

$$A(x - x^k) = Ax - Ax^k = b - Ax^k = r^k$$

Luego, $\|e^k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r^k\|$. En conclusión, un criterio de parada razonable es:

$$\frac{\|r^k\|}{\|r^0\|} < \varepsilon$$

## Matrices especiales

Una matriz $A = (a_{ij})$ es estrictamente diagonal dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

A estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ A es no singular.

Prop.: A estrictamente dominante $\Rightarrow$ Jacobi y Gauss-Seidel convergen. Es más,
diagonal
$\|T_G\|_\infty \leq \|T_J\|_\infty < 1$

Prop.: A es SPD $\Leftrightarrow \forall K = 1, \dots, n$ $A_K$ es SPD donde $A_K = (a(1:K, 1:K))$.

Si $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda > 0$, y A es simétrica $\Rightarrow$ A es SPD.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonal de autovectores

$\forall x$ $\exists \lambda_i$ (no todos nulos) : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow x^t A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot |v_i|^2$.

$Av_i = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i > 0$

T.ª de Gershgorin Sea $A = (a_1 | \cdots | a_n)$ y consideramos $\gamma_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i \text{ donde } D_i = \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| < \gamma_i\}$$