5. Escriba una matriz P de 5×5 de tal modo que al multiplicar por la izquierda de otra matriz por P cause que los renglones 2 y 5 se intercambien.

6. (a) Escriba una matriz P de 4×4 de tal modo que al multiplicar por la izquierda otra matriz por P cause que los renglones segundo y cuarto de la matriz se intercambien. (b) ¿Cuál es el efecto de multiplicar por la derecha por P? Pruebe su respuesta con un ejemplo.

7. Cambie cuatro entradas de la matriz de la izquierda para hacer la ecuación matricial correcta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Encuentre la factorización PA = LU de la matriz A del ejercicio 2.3.15. ¿Cuál es el mayor multiplicador l_{ij} requerido?

9. (a) Encuentre la factorización PA = LU de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (b) Sea A la matriz de $n \times n$ con la misma forma que en (a). Describa las entradas de cada matriz de su factorización PA = LU.

10. (a) Suponga que A es una matriz de $n \times n$ con entradas $|a_{ij}| \leq 1$ para $1 \leq i, j \leq n$. Demuestre que la matriz U en su factorización PA = LU satisface $|u_{ij}| \leq 2^{n-1}$ para toda $1 \leq i, j \leq n$. Vea el ejercicio 9(b). (b) Formule y pruebe un hecho análogo para una matriz arbitraria A de $n \times n$.

Comprobación en la realidad 2

La viga de Euler-Bernoulli

La viga de Euler-Bernoulli es un modelo fundamental para un material de flexión bajo esfuerzo. La discretización convierte al modelo de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones lineales. Cuanto menor sea el tamaño de la discretización, mayor será el sistema resultante de ecuaciones. Este ejemplo proporcionará un interesante caso de estudio de los papeles del tamaño del sistema y del mal condicionamiento en el cálculo científico.

El desplazamiento vertical de la viga se representa mediante una función $y(x)$, donde $0 \leq x \leq L$ a lo largo de la viga con longitud L. En el cálculo se usarán unidades MKS: metros, kilogramos, segundos. El desplazamiento $y(x)$ satisface la ecuación de Euler-Bernoulli

$$EIy'''' = f(x) \tag{2.27}$$

donde E, el módulo de Young del material, e I, el momento de inercia del área, son constantes a lo largo de la viga. La $f(x)$ en el lado derecho es la carga aplicada, incluyendo el peso de la viga, en unidades de fuerza por unidad de longitud.

Las técnicas para las derivadas de discretización se encuentran en el capítulo 5, donde se muestra que una aproximación razonable para la cuarta derivada es

$$y''''(x) \approx \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} \tag{2.28}$$

para un pequeño incremento h. El error de discretización de esta aproximación es proporcional a h^2 (vea el ejercicio 5.1.21.). La estrategia a emplear será la consideración de la viga como la unión de muchos segmentos de longitud h, y la aplicación de la versión discretizada de la ecuación diferencial en cada segmento.

Para un entero positivo n, establezca $h = L/n$. Considere la cuadrícula uniformemente espaciada $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = L$, donde $h = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Al remplazar la ecuación diferencial (2.27) con la aproximación por diferencias (2.28) a fin de obtener el sistema de ecuaciones lineales para los desplazamientos $y_i = y(x_i)$, se obtiene

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i). \tag{2.29}$$

Se desarrollarán n ecuaciones con las n incógnitas $y_i, \ldots, y_n$. La matriz de coeficientes, o matriz de estructura, tendrá los coeficientes de la parte izquierda de esta ecuación. Sin embargo, observe que es necesario alterar las ecuaciones cerca de los extremos de la viga para tomar en cuenta las condiciones de frontera.

Un trampolín es una viga con un extremo sujeto en el soporte y con el otro extremo libre. Esto se llama viga **anclada-libre** o viga en voladizo. Las condiciones de frontera para el extremo anclado (izquierda) y el extremo libre (derecha) son

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0.$$

En particular, $y_0 = 0$. Sin embargo, observe que la determinación de y_1 presenta un problema, puesto que la aplicación de la aproximación (2.29) a la ecuación diferencial (2.27) en x_1 resulta en

$$y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EI} f(x_1), \tag{2.30}$$

y y_{-1} no está definida. En su lugar, debe utilizarse una aproximación alternativa a la derivada en un punto x_1 cercano al extremo fijo. En el ejercicio 5.1.22(a) se obtiene la aproximación

$$y''''(x_1) \approx \frac{16y(x_1) - 9y(x_1 + h) + \frac{8}{3}y(x_1 + 2h) - \frac{1}{4}y(x_1 + 3h)}{h^4} \tag{2.31}$$

que es válida cuando $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Por ahora, si la aproximación se considera "válida", entonces el error de discretización de la aproximación es proporcional a h^2, lo mismo que para la ecuación (2.28). En teoría, esto significa que el error al aproximar la derivada de esta manera se reducirá a cero en el límite de una h pequeña. Este concepto será el punto focal del análisis de la diferenciación numérica en el capítulo 5. El resultado aquí es que la aproximación (2.31) puede utilizarse para tomar en cuenta la condición del extremo para $i = 1$, de donde resulta

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI} f(x_1).$$

El extremo libre a la derecha de la viga requiere un poco más de trabajo porque deben calcularse todas las y_i hasta el extremo de la viga. Una vez más, se requieren aproximaciones alternativas de las derivadas en los dos últimos puntos x_{n-1} y x_n. En el ejercicio 5.1.22 se proporcionan las aproximaciones

$$y''''(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4} \tag{2.32}$$

$$y''''(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4} \tag{2.33}$$

que son válidas bajo el supuesto $y''(x_n) = y'''(x_n) = 0$.

Ahora es posible escribir el sistema de n ecuaciones con n incógnitas para el trampolín. Esta ecuación matricial resume las versiones aproximadas de la ecuación diferencial original (2.27) en cada punto $x_1, \ldots, x_n$, exactas en términos de orden h^2.

$$
\begin{bmatrix}
16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & & \\
-4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\
 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\
 & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 & & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\
 & & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}
= \frac{h^4}{EI}
\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \tag{2.34}
$$

La matriz de estructura A en (2.34) es una **matriz en bandas**, lo que significa que todas las entradas suficientemente lejos de la diagonal principal son iguales a cero. En concreto, las entradas a_{ij} de la matriz son iguales a 0, excepto para $|i-j| \leq 3$. El **ancho de banda** de la matriz en bandas es 7, puesto que $i - j$ toma 7 valores para las a_{ij} distintas de cero.

Por último, ya es posible modelar la viga anclada-libre. Considere un trampolín de madera sólida hecho de abeto Douglas. Suponga que el trampolín tiene una longitud de $L = 2$ metros, 30 cm de ancho y 3 cm de espesor. La densidad del abeto de Douglas es de aproximadamente 480 kg/m^3. Un Newton de fuerza es 1 kg-m/seg^2, y el módulo de Young para esta madera es de aproximadamente $E = 1.3 \times 10^{10}$ Pascales, o Newton/m^2. El momento de inercia de área I alrededor del centro de masa de una viga es $wd^3/12$, donde w es el ancho y d el espesor de la viga.

Se empezará calculando el desplazamiento de la viga sin carga, de modo que $f(x)$ representa sólo el peso propio de la viga, en unidades de fuerza por metro. Por lo tanto, $f(x)$ es la masa por metro $480wd$ veces la aceleración de la gravedad $-g = -9{,}81$ m/s^2, o la constante $f(x) = f = -480wdg$. El lector debe verificar que las unidades coincidan a ambos lados de (2.27). Existe una solución de forma cerrada para (2.27) en el caso cuando f es constante, de modo que es posible comprobar la exactitud del resultado de su cálculo.

Tras la comprobación de su código para la viga sin carga, modelará otros dos casos. En el primero, se añadirá a la viga una carga sinusoidal (o “pila”). En este caso, existe de nuevo una solución conocida de forma cerrada, pero las aproximaciones a las derivadas no son exactas, así que usted será capaz de controlar el error de su modelo como una función del tamaño de la cuadrícula h, y ver el efecto de los problemas de condicionamiento para una n grande. Después, colocará un clavadista sobre la viga.

Actividades sugeridas:

1. Escriba un programa en MATLAB para definir la matriz de estructura A en (2.34). Luego, utilizando el comando de MATLAB \ o un código de su propio diseño, resuelva el sistema para los desplazamientos y_i usando $n = 10$ pasos de la cuadrícula.

2. Grafique la solución del paso 1 contra la solución correcta $y(x) = (f/24EI)x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$, donde $f = f(x)$ es la constante definida anteriormente. Verifique el error en el extremo de la viga, $x = L$ metros. En este caso simple, las aproximaciones a las derivadas son exactas, por lo que su error debe estar cerca del redondeo de máquina.

3. Realice de nuevo el cálculo en el paso 1 para $n = 10 \cdot 2^k$, donde $k = 1, \ldots, 11$. Haga una tabla de los errores en $x = L$ para cada n. ¿Para qué n el error es el más pequeño?, ¿por qué el error empieza a aumentar con n después de cierto punto? Es posible que desee hacer una tabla que acompañe al número de condición de A como una función de n para ayudar a responder la última pregunta. A fin de llevar a cabo este paso para una k grande, puede ser necesario solicitar a MATLAB que

almacene la matriz A como una matriz dispersa para evitar quedarse sin memoria. Para ello, basta con inicializar A con el comando `A = sparse(n, n)`, y proceda como antes. En la siguiente sección se analizarán las matrices dispersas con mayor detalle.

4. Añada una pila sinusoidal a la viga. Esto significa añadir una función de la forma $s(x) = -pg\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{L}x$ al término de fuerza $f(x)$. Pruebe que la solución

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi}\left(\frac{L^3}{\pi^3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{L}{2}x^2 - \frac{L^2}{\pi^2}x\right)$$

satisface la ecuación de Euler-Bernoulli y las condiciones de frontera anclada-libre.

5. Vuelva a realizar el cálculo como en el paso 3 para la carga sinusoidal. (Asegúrese de incluir el peso propio de la viga). Establezca $p = 100$ kg/m y grafique sus soluciones calculadas contra la solución correcta. Responda a las preguntas del paso 3, además de la siguiente: ¿el error en $x = L$ es proporcional a h^2 como se indicó anteriormente? Es posible que desee graficar el error contra h en una gráfica log-log a fin de investigar este asunto. ¿El número de condición entra en juego?

6. Ahora retire la carga sinusoidal y añada un clavadista de 70 kg a la viga, balanceándose en los últimos 20 cm de ésta. Debe agregar una fuerza por unidad de longitud $-g$ veces 70/0.2 kg/m a $f(x_i)$ para toda $1.8 \le x_i \le 2$ y resolver el problema de nuevo con el valor óptimo de n encontrado en el paso 5. Grafique la solución y encuentre la deflexión del trampolín en el extremo libre.

7. Si también se ancla el extremo libre del trampolín, se tiene una viga "anclada-anclada", que obedece a las mismas condiciones de frontera en cada extremo: $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$. Esta versión se usa para modelar el pandeo de una estructura, como un puente. Comience con una cuadrícula uniformemente espaciada un poco diferente $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = L$, donde $h = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$ y encuentre el sistema de n ecuaciones con n incógnitas que determina $y_1, \ldots, y_n$. (Debe ser similar a la versión anclada-libre, salvo que los dos últimos renglones de la matriz de coeficientes A deben ser los dos primeros renglones en orden inverso). Resuelva para una carga sinusoidal y responda a las preguntas del paso 5 para el centro $x = L/2$ de la viga. La solución exacta para la viga fija-fija bajo una carga sinusoidal es

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(L - x)^2 - \frac{pgL^2}{\pi^4 EI}\left(L^2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{L}x + \pi x(x - L)\right).$$

8. Ideas para una exploración más profunda: si el ancho del trampolín se duplica, ¿cómo cambia el desplazamiento del clavadista?, ¿cambia más o menos que si el espesor se duplica? (ambas vigas tienen la misma masa). ¿Cómo cambia el desplazamiento máximo si la sección transversal es circular o anular con la misma área que la sección rectangular? (el momento de inercia del área para una sección transversal circular de radio r es $I = \pi r^4/4$, y para una sección transversal anular con radio interior r_1 y radio exterior r_2 es $I = \pi(r_2^4 - r_1^4)/4$). Averigüe el momento de inercia del área para las vigas I. Los módulos de Young para diferentes materiales también están tabulados y se encuentran disponibles. Por ejemplo, la densidad del acero es de unos 7850 kg/m^3 y su módulo de Young es de aproximadamente 2×10^{11} pascales.

La viga de Euler-Bernoulli es un modelo clásico, relativamente simple. Los modelos más recientes, como la viga de Timoshenko, toman en cuenta una flexión más inusual, donde la sección transversal de la viga no puede ser perpendicular al eje principal de la viga. ✔