

Análisis Numérico Matricial
Universidad de Murcia
curso 2016-2017

Unidad 1: Complementos de Análisis Matricial

Antonio José Pallarés Ruiz

Índice general

1. Introducción y complementos de análisis matricial.	5
1.1. Origen de los problemas del análisis numérico matricial	6
1.2. Repaso de álgebra matricial	8
1.2.1. Sistemas de Ecuaciones	8
1.2.2. Matrices	9
1.2.3. Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales	11
1.2.4. Reducción de matrices	17
1.2.5. Cocientes de Rayleigh. Matrices simétricas y hermitianas	19
1.3. Normas matriciales	21
1.3.1. Convergencia de matrices	24
1.4. Análisis del error. Condicionamiento	25
1.4.1. Condicionamiento en la búsqueda de valores y vectores propios	29
1.5. Actividades complementarias del capítulo	30
2. Métodos Directos para Ecuaciones Lineales	31
2.1. Sistemas fáciles de resolver	32
2.1.1. Sistemas diagonales	32
2.1.2. Sistemas triangulares superiores. Método ascendente	33
2.1.3. Sistemas triangulares inferiores. Método descendente	34
2.2. Factorización LU	35
2.2.1. Algoritmos de factorización	36
2.2.2. Complejidad de las factorizaciones LU	37
2.2.3. Factorizaciones LDU	38
2.2.4. Transformaciones de Gauss sin permutar filas	40
2.3. Sistemas con matrices especiales	42
2.3.1. Matrices con diagonal estrictamente dominante	42
2.3.2. Matrices definidas positivas.	43
2.3.3. Matrices simétricas definidas positivas (SPD).	45
2.3.4. Matrices tridiagonales	47
2.4. Método de Gauss	49
2.4.1. Gauss con pivote total	52

2.5. Factorización QR	54
2.5.1. Transformaciones de Householder	54
2.5.2. Factorización QR usando las transformaciones de Householder	57
2.5.3. Aplicación de QR a la resolución de sistemas lineales	59
2.6. Problemas de mínimos cuadrados	61
2.6.1. Modelo General de los problemas de aproximación	61
2.6.2. Aproximación por mínimos cuadrados	63
2.6.3. Sistemas sobredeterminados	66
2.6.4. Métodos Numéricos	67
2.6.5. Aplicaciones y Ejemplos	68
2.7. Actividades complementarias del capítulo	72
3. Métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones	73
3.1. Métodos iterativos. Criterios de Convergencia	74
3.1.1. Criterios de Convergencia	75
3.1.2. Construcción de Métodos iterativos	76
3.2. Método de Jacobi	77
3.3. Método de Gauss-Seidel	79
3.3.1. Convergencia de los Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel	81
3.4. Método de Relajación	83
3.5. Método del gradiente conjugado	89
3.6. Actividades complementarias del capítulo	94
4. Valores y vectores propios	95
4.1. El problema de aproximar valores y vectores propios.	96
4.2. El método de la potencia	98
4.3. El método de Jacobi	111
4.4. El método QR	123
4.5. Actividades complementarias del capítulo	124
5. Sistemas de Ecuaciones no lineales.	125
5.1. Iteración de punto fijo.	126
5.2. Método de Newton	130
5.3. Método de Broyden	134
5.4. Método del descenso rápido	137
5.5. Método de homotopía y continuación	137
5.6. Ejercicios	138
Bibliografía	141

Capítulo 1 Introducción y complementos de análisis matricial.

Interrogantes centrales del capítulo

- Un problema de análisis numérico matricial.
- Repaso de conceptos básicos del álgebra matricial.
- Triangulación y diagonalización de matrices
- Propiedades de las matrices simétricas y hermitianas. Radio espectral. Cocientes de Rayleigh.
- Normas matriciales.
- Condicionamiento de un sistema lineal

Destrezas a adquirir en el capítulo

- Conocer problemas modelizados por sistemas lineales de dimensión grande.
- Conocer y manejar distintas normas matriciales. Distinguir la mejor norma matricial.
- Saber definir el número de condición de una matriz o de un sistema lineal y saber calcularlo.

Este es el primer capítulo de los cuatro dedicados al análisis numérico matricial que aborda las dos cuestiones siguientes

- *La resolución de sistemas de ecuaciones lineales:* Dada una matriz no singular A y un vector b , encontrar el vector solución x del sistema lineal

$$Ax = b.$$

- *El cálculo de valores propios y vectores propios de una matriz:* Dada una matriz cuadrada A , encontrar todos sus valores propios, o solo algunos significativos, y eventualmente los vectores propios correspondientes. En otras palabras, encontrar vectores $p \neq 0$ y escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , tales que

$$Ap = \lambda p.$$

En los próximos capítulos vamos a estudiar métodos directos y métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales y métodos de cálculo de valores y vectores propios, pero antes vamos a detenernos en observar un modelo que origina un sistema de ecuaciones lineales con el objetivo de que nos sirva de ejemplo del tipo de sistemas que pueden aparecer a la hora de buscar soluciones a problemas reales concretos.

Por otra parte, para poder establecer criterios que nos permitan comparar entre los distintos métodos, y analizar el condicionamiento y la estabilidad de los mismos, describiremos distancias entre matrices y aprenderemos a calcularlas.

Desarrollo de los contenidos fundamentales

- Repaso de conceptos básicos de álgebra matricial
- Origen de los problemas del análisis numérico matricial.
- Normas matriciales. Normas subordinadas y sus propiedades.
- Análisis del error y condicionamiento.

Temporalización: 6HTe + 2HPb + 2HLab ¹

1.1. Origen de los problemas del análisis numérico matricial

Existen muchos problemas cuyas modelizaciones involucran la resolución de sistemas lineales o el cálculo de valores y vectores propios de matrices.

Dentro de los métodos numéricos objeto de este curso algunas soluciones a problemas no lineales pasan por aproximar el problema a uno lineal resolverlo y después iterando el proceso aproximarnos a la solución. Por ejemplo esta es la situación en el método de Newton para una ecuación no lineal o para sistemas de ecuaciones no lineales. También aparecen en problemas de interpolación por splines o en problemas de aproximación por mínimos cuadrados que también forman parte de este curso.

En el libro de Ciarlet [5] hay todo un capítulo (el capítulo 3) dedicado a mostrar aproximaciones lineales a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la Física (movimiento armónico, ecuación del calor, ...) que resultan al discretizar los problemas. En todos los casos aparecen sistemas con muchas ecuaciones y matrices de coeficientes con aspectos particulares donde los ceros aparecen dispuestos de forma especial (matrices tridiagonales o tridiagonales por bloques).

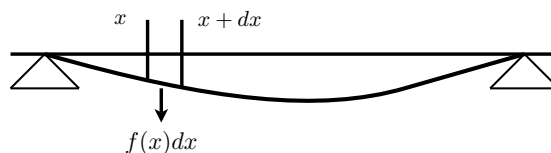
Antes de repasar algunos conceptos básicos del álgebra matricial y para ilustrar el origen de los problemas numéricos del análisis matricial, como ejemplo, vamos a reproducir el método de las diferencias finitas para una ecuación diferencial lineal de segundo grado en dimensión 1 con condiciones frontera [5, sección 3.1].

Consideremos dos funciones continuas en $[0,1]$, $c(x), f(x) \in \mathcal{C}([0,1])$, y dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Problema: Encontrar $u(x) \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tal que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = a, \quad u(1) = b. \end{cases}$$

¹Intentaremos reducir el tiempo dedicado este capítulo y a alguno de los siguientes para ampliar el tema de aproximación incluyendo la aproximación uniforme que quedo sin estudiar el primer cuatrimestre.

Un ejemplo de una situación física donde aparece este problema es el del estudio de los momentos $u(x)$ de la «flecha» de una viga de longitud 1 a lo largo de su eje, estirada por la acción de una fuerza (que determina $c(x)$) y sometida a la acción de una carga perpendicular $f(x)dx$ en cada punto de abscisa x .



Para obtener aproximaciones de $u(x)$ con el método de las diferencias finitas, se consideran particiones equidistribuidas de $[0,1]$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, $x_i = i/(N+1)$, $h = x_i - x_{i-1} = 1/(N+1)$, y se hacen las aproximaciones:

$$\begin{cases} u'(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h}, & i = 1, 2, \dots, N+1, \\ u''(x_i) \approx \frac{u'(x_{i+1}) - u'(x_i)}{h} \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}, & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Después se trasladan estas aproximaciones a la ecuación diferencial y se tiene el sistema de N ecuaciones lineales

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

con incógnitas $u_i = u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ ($u(x_0) = a$ y $u(x_{N+1}) = b$ son las condiciones frontera). El sistema de ecuaciones se puede escribir

$$\begin{cases} (c(x_1)h^2 + 2)u_1 & -u_2 & & = h^2 f(x_1) + a \\ -u_1 & +(c(x_2)h^2 + 2)u_2 & -u_3 & = h^2 f(x_2) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ -u_{N-2} & +(c(x_{N-1})h^2 + 2)u_{N-1} & -u_N & = h^2 f(x_{N-1}) \\ & -u_{N-1} & +(c(x_N)h^2 + 2)u_N & = h^2 f(x_N) + b \end{cases}$$

La matriz de coeficientes tiene una forma muy particular, es de las llamadas tridiagonales (sus coeficientes son cero fuera de la diagonal principal de la matriz y de las dos diagonales contiguas).

$$\begin{pmatrix} (c(x_1)h^2 + 2) & -1 & & \\ -1 & (c(x_2)h^2 + 2) & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & (c(x_{N-1})h^2 + 2) & -1 \\ & & & -1 & (c(x_N)h^2 + 2) \end{pmatrix}$$

En el capítulo siguiente veremos métodos para la resolución de sistemas lineales con matrices de coeficientes tridiagonales como la de este modelo.

Observad que para tener buenas aproximaciones numéricas a la solución $u(x)$ del problema hay que considerar sistemas con muchas ecuaciones correspondientes a considerar muchos puntos.

Ejemplos como este muestran la necesidad de disponer de métodos estables de resolución de ecuaciones capaces de trabajar con muchas ecuaciones y con ecuaciones con muchos ceros.

Las **soluciones** del sistema de ecuaciones son las listas de escalares (x_1, \dots, x_n) que son soluciones de todas las ecuaciones al mismo tiempo (simultáneamente).

Si un sistema de ecuaciones tiene soluciones se llama **compatible** y si no las tiene, **incompatible**. Un sistema compatible con una única solución se llama **determinado** y si tiene más soluciones se llama **indeterminado**.

Un sistema de ecuaciones donde los términos independientes son nulos ($b_1 = \dots = b_m = 0$) se llama **homogéneo** y tiene siempre soluciones: al menos la solución trivial $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Recordad las siguientes operaciones elementales que se utilizan para transformar los sistemas de ecuaciones en otros equivalentes que sean más fáciles de resolver:

- (I) Intercambiar dos ecuaciones de posición.
- (II) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- (III) Sumar a una ecuación un múltiplo escalar de otra ecuación.

Teorema 1.2.1 *Al aplicar una operación elemental a un sistema, el sistema resultante es equivalente al original.*

En el capítulo siguiente utilizaremos operaciones elementales para recordar y describir el método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones por «eliminación».

1.2.2. Matrices

La información de que disponemos acerca de un sistema de ecuaciones la proporcionan los coeficientes y los términos independientes, que podemos ordenar así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Estas **ordenaciones rectangulares** se llaman **matrices** y están relacionadas con otros muchos problemas, además de con los sistemas de ecuaciones. La matriz anterior es una **matriz de m filas y n columnas**. También se suele decir que es una matriz de tipo (m, n) , y se representa de forma abreviada mediante su **término general** a_{ij} ,

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

De forma más breve, también se utilizan expresiones del tipo

$$A = (a_{ij}),$$

si se sobrentiende el recorrido de los índices.

Los índices de cada término a_{ij} nos dicen donde está colocado; el primero, i , indica la fila, y el segundo, j , la columna. A veces, interesará indicar el término general de la matriz A en función de los índices en la forma

$$A(i, j) = a_{ij}.$$

El conjunto de las matrices $m \times n$ de escalares $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ se suele representar por $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, o simplemente por \mathcal{M}_{mn} si el cuerpo \mathbb{K} está claro.

Si el número de filas y el de columnas coinciden, $m = n$, se dice que la matriz es cuadrada, y se denota por \mathcal{M}_n al conjunto de las matrices cuadradas.

Si $m = 1$ tenemos las matrices **fila**, y si $n = 1$, las matrices **columna**. A los conjuntos correspondientes se les suele denotar por \mathbb{K}^n o \mathbb{K}^m (aunque si fuese necesario distinguir entre filas o columnas se debe utilizar la notación \mathcal{M}_{1n} o \mathcal{M}_{m1}) al identificarlos con los productos cartesianos de \mathbb{K} consigo mismos, que son los conjuntos formados por las listas ordenadas de escalares dispuestas en filas o en columnas.

Dada una matriz M , si consideramos solamente y en el mismo orden, los elementos que están en la intersección de algunas filas y columnas apropiadas se obtiene una **submatriz**.

Ejemplo 1.2.2 Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tachamos la segunda fila y las columnas segunda y cuarta obtenemos la submatriz:

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el contrario, si se pegan matrices de tamaños convenientes se puede obtener otra de tamaño mayor. Dicho al revés, la matriz grande se puede considerar descompuesta en **bloques**:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

Ejemplo 1.2.3 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = (4)$, podemos obtener una nueva matriz $(2+1) \times (2+1)$ descompuesta en bloques por

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A veces es conveniente pensar en una matriz M descompuesta en bloques formados por cada una de sus filas, en otras palabras, pensar en M como una columna de filas. O pensar en M como en una fila de columnas. En este sentido se utiliza normalmente la notación :

$$M_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n \text{ y } M^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

para los vectores fila y columna respectivamente, representando

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix} \text{ y } M = (M^1, \dots, M^n).$$

Otro caso muy frecuente es el de la matriz del sistema que describíamos al principio. A la submatriz formada por las n primeras columnas se le llama **matriz de coeficientes**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y la submatriz dada por la última columna

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

se le llama columna de **términos independientes**. La matriz completa $(A \mid B)$ se le llama **matriz ampliada**. Cuando coinciden el número de ecuaciones y el de incógnitas, la matriz de coeficientes es una matriz cuadrada.

Ejemplo 1.2.4 La matriz ampliada del sistema

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \end{cases}$$

es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Su columna de términos independientes es $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y la primera ecuación está representada por $(2, -1, 1, -1)$.

1.2.3. Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

Sea E un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}). Una base de E es un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$, de n vectores linealmente independientes de E y todo vector $x \in E$ admite una descomposición única de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Cuando la base está fijada sin ambigüedad, cada vector x está unívocamente determinado por sus coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$. Así, identificando la base de E con la base canónica de \mathbb{K}^n , $e_j = (\delta_{i,j})_i$ ($\delta_{j,j} = 1$ y $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$), se pueden identificar E y \mathbb{K}^n . En notación matricial representaremos siempre a x por el vector columna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

y denotaremos por x^t y x^* a los vectores fila

$$x^t = (x_1, \dots, x_n) \quad x^* = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}),$$

donde \bar{z} es complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$. El vector fila x^t es el **vector traspuesto** del vector columna x y x^* es el **vector adjunto** de x .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el **producto escalar euclídeo** en E se define por

$$(x, y) = x^t y = y^t x = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el **producto escalar hermitiano** en E se define por

$$(x, y) = y^* x = \overline{x^* y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

Asociada al producto escalar o hermitiano se tiene la **norma euclídea**

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

que define la distancia euclídea en E . Junto a esta noción de distancia, el producto escalar o hermitiano también introduce la noción de **ortogonalidad (ángulo)**, x e y se dicen ortogonales cuando $(x, y) = 0$. Observad que en relación a este producto escalar, los vectores de la base fijada v_i son dos a dos ortogonales y todos tienen norma 1. Las bases formadas por vectores ortogonales de norma 1 se denominan **bases ortonormales** con respecto al producto escalar.

Ejercicio 1.2 Comprueba que si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de E , cada $x \in E$ cumple

$$x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j.$$

Ejercicio 1.3 (Factorización QR con Gram-Schmidt)

Escribe un método **Gram-Schmidt** que reciba como dato de entrada una matriz rectangular $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ que devuelva como resultado un par de matrices $Q \in \mathcal{M}_{m,t}$ y $R \in \mathcal{M}_{t,n}$ de forma que los vectores columna de Q forman el sistema ortonormal de vectores que genera el mismo subespacio de \mathbb{R}^n generado por los vectores columna de la matriz A , y los vectores columna de R son los vectores con las coordenadas de los vectores columna de A con respecto al sistema ortonormal construido, de forma que $A = QR$

Sean $f : V \rightarrow W$ una **aplicación lineal**, y $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Los n vectores $f(v_1), \dots, f(v_n)$ están en W por lo que pueden escribirse de forma única como combinación lineal de la base $\{w_1, \dots, w_m\}$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\dots \dots \dots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

Se obtienen así $m \times n$ escalares a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) en los que los subíndices (ij) expresan que se trata de la i -ésima (primer índice) coordenada de la imagen del j -ésimo (segundo índice) vector de la base de V . Estos $m \times n$ escalares determinan una matriz $m \times n$

$$M = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que se llama **matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ con respecto de las bases $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$** . Nótese que la columna j de M , $M^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, está formada por las coordenadas del $f(v_j)$ en la base $\{w_1, \dots, w_m\}$.

Ejemplo 1.2.5 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo \mathbb{K} . Definimos una aplicación $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ como sigue: dado un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

la aplicación f_A así definida es lineal y nos referiremos a ella como la **aplicación lineal asociada a la matriz A** . Evidentemente la matriz asociada a la aplicación lineal f_A respecto de las bases canónicas $\{e_1, \dots, e_n\}$ (e_i es el vector con todas las coordenadas 0 menos la i -ésima que es 1), (de \mathbb{K}^n y $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{K}^m es precisamente A .

Observa que los términos de A se pueden describir con el producto escalar

$$a_{ij} = (Ae_j, e_i)$$

Trataremos a continuación el problema de obtener la matriz asociada a una composición de aplicaciones lineales cuando se conocen las matrices asociadas a cada uno de los factores. Para ello, supongamos que tenemos dos aplicaciones lineales $g : U \rightarrow V$ y $f : V \rightarrow W$ tales que el espacio final de la primera coincide con el espacio inicial de la segunda. Fijadas las bases $\{u_1, \dots, u_p\}$ de U , $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V y $\{w_1, \dots, w_m\}$ de W , llamamos $N = (b_{hk})$ a la matriz $n \times p$ asociada a g , y $M = (a_{ij})$ a la matriz $m \times n$ asociada a f . La aplicación compuesta $f \circ g : U \rightarrow W$ también es lineal y con respecto a las bases $\{u_1, \dots, u_p\}$ de U y $\{w_1, \dots, w_m\}$ de W tendrá asociada una matriz $m \times p$ que denotaremos $P = (c_{rs})$, y vamos a tratar de encontrar el modo de relacionar la matriz P de $f \circ g$ con las matrices N , M de g y f respectivamente.

Comencemos fijando un vector u_s de la base de U . Para este vector se tiene

$$(f \circ g)(u_s) = c_{1s}w_1 + \dots + c_{ms}w_m \quad (1)$$

y

$$g(u_s) = b_{1s}v_1 + \dots + b_{ns}v_n \quad (2)$$

Además se tienen las relaciones

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_m \quad (3)$$

Si en ambos miembros de (2) se toma la imagen por f resulta

$$f(g(u_s)) = b_{1s}f(v_1) + \dots + b_{ns}f(v_n)$$

y sustituyendo la expresión (3) resulta

o utilizando operadores lineales, en la forma

$$f_A(x) = b.$$

Ejercicio 1.4 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ y $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal.

Encuentra las expresiones de AD y DA

Algunas matrices notables

Dada una matriz $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$, se define la **matriz adjunta** $M^* \in \mathcal{M}_{nm}$ de manera que

$$(Mu, v) = (u, M^*v) \text{ para todo } u \in \mathbb{C}^n \text{ y } v \in \mathbb{C}^m.$$

lo que implica que $(M^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. M^* es la matriz obtenida al cambiar filas por columnas en A y tomar conjugados.

$$(M^*)_{ij} = (M^*e_i, e_j) = \overline{(e_j, M^*e_i)} = \overline{(Me_j, e_i)} = \overline{(a_{ji})}$$

La **traspuesta** de la matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ es la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{nm}$ definida de forma única por

$$(Mu, v) = (u, M^t v) \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^n \text{ y } v \in \mathbb{R}^m,$$

y en consecuencia $(M^t)_{ij} = M_{ji}$.

Ejercicio 1.5 Comprobad que $(AB)^t = B^t A^t$ y que $(AB)^* = B^* A^*$.

De ahora en adelante y salvo que digamos lo contrario sólo vamos a considerar matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

El espacio de las matrices cuadradas con la suma y el producto de matrices tiene estructura de anillo no conmutativo con elemento unidad.

La matriz unidad con respecto al producto es $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matriz $I = (\delta_{ij})$ que tiene 1 en todos los términos de la diagonal principal y 0 fuera de la diagonal.

$$AI = IA \text{ para toda } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Una matriz A se dice **invertible (no singular)** cuando existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. En caso contrario se dice que la matriz es **singular**.

El cálculo de la matriz inversa de A se puede identificar con el problema de resolver los sistemas lineales $Ax = e_j$ donde e_j es la base canónica de \mathbb{K}^n , pues sus soluciones son los vectores columna de A^{-1} . Así, por ejemplo, cuando en el siguiente capítulo escribamos el algoritmo de Gauss de resolución de sistemas, podremos modificarlo para invertir matrices fácilmente.

Ejercicio 1.6 Comprobad que si A y B son invertibles, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Una matriz A se dice

- **simétrica**, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A = A^t$.
- **hermitiana**, si $A = A^*$.
- **ortogonal**, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A^{-1} = A^t$, e.d. $AA^t = A^tA = I$.
- **unitaria**, si $A^{-1} = A^*$, e.d. $AA^* = A^*A = I$.
- **normal**, si $AA^* = A^*A$.

Ejercicio 1.7 Observad que una matriz es ortogonal-unitaria si, y solo si, los vectores fila (resp vectores columna) forman una base ortonormal de \mathbb{K}^n .

Ejercicio 1.8 Comprueba que si A es normal y tiene inversa, entonces A^{-1} también es normal.

La **traza** de una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ está definida por

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Ejercicio 1.9 (Invarianza de la traza para matrices semejantes) Comprobad que si A y $B \in \mathcal{M}_n$ entonces $tr(AB) = tr(BA)$, y como consecuencia, si $P \in \mathcal{M}_n$ es una matriz no singular

$$tr(P^{-1}AP) = tr((P^{-1}A)P) = tr(P(P^{-1}A)) = tr(PP^{-1}A) = tr(A).$$

El **determinante** de una matriz A está definido por

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \varepsilon_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n},$$

donde \mathcal{G}_n es el grupo de las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ y ε_{σ} es la signatura de la permutación.

Recordad que $det : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{K}$ es la única aplicación multilineal alternada (i.e. lineal en cada fila o columna y que cambia de signo si se permutan dos filas o columnas) y que cumple $det(I) = 1$. También se cumple que $det(AB) = det(BA) = det(A)det(B)$ y por lo tanto es un invariante para matrices semejantes.

Ejercicio 1.10 (Regla de Cramer) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz no singular $n \times n$ y $b = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{K}^n$, la solución al sistema lineal $Ax = b$ tiene por coordenadas

$$x_j = \frac{det(C_j)}{det(A)}, \quad \text{donde } C_j = (c_{rs}) \quad c_{rs} = \begin{cases} a_{rs} & \text{si } s \neq j \\ b_r & \text{si } s = j \end{cases}$$

Como consecuencia, tenemos que un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible determinado si y sólo si $det(A) \neq 0$, si y sólo si A es invertible.

Los **valores propios** de una matriz A son los complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que existen vectores no nulos p tales que $Ap = \lambda p$. También se dice que p es un vector propio de λ . Los valores propios de A son los ceros del **polinomio característico**

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

de la matriz A .

El **espectro** de la matriz A es el conjunto de los vectores propios

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

El radio espectral de A se define como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

Ejercicio 1.11 (Invarianza del espectro para matrices semejantes) Comprueba que si $P \in \mathcal{M}_n$ es una matriz no singular y $B = P^{-1}AP$, entonces

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda).$$

Como consecuencia tenemos que el espectro de una matriz es un invariante para matrices semejantes.

Una matriz $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ se dice **diagonal** cuando $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Para estas matrices el espectro está formado por los elementos de la diagonal

$$\sigma(D) = \{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}.$$

Una matriz $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ se dice **triangular superior (resp. triangular inferior)** cuando $t_{ij} = 0$ para $j < i$ (resp. para $i < j$). Para estas matrices el espectro está formado por los elementos de la diagonal

$$\sigma(T) = \{t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}\}.$$

En la sección siguiente probaremos que cualquier matriz A es semejante a una matriz triangular T , y tal y como acabamos de observar, el espectro de A coincidirá con los valores de la diagonal de T . En consecuencia, si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, se tendrá que:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{y que} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Ejercicio 1.12 Calcula el radio espectral de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.13 Comprabad que si A es simétrica o hermitiana, entonces todos sus valores propios son números reales.

Comprabad también que si A es ortogonal o unitaria, entonces todos sus valores propios tienen módulo 1.

1.2.4. Reducción de matrices

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones, sea una matriz invertible P (un cambio de base en \mathbb{K}^n) y $B = P^{-1}AP$. Si u es una solución del sistema de ecuaciones $Bu = P^{-1}b$, entonces $x = Pu$ es solución del sistema $Ax = b$, en efecto:

$$P^{-1}APu = P^{-1}b \rightarrow APu = b \rightarrow x = Pu.$$

Reducir una matriz A consiste en encontrar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea tan simple como sea posible.

En este sentido, los casos más favorables se tienen cuando $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal o una matriz escalonada (triangular). En estos casos los elementos de la diagonal son los valores propios de A y la resolución de los sistemas de ecuaciones es muy simple.

Cuando existe P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, se dice que A es diagonalizable (en este caso **los vectores columna de P forman una base de vectores propios de A**).

Aunque no todas las matrices son diagonalizables (probad con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), siempre se puede encontrar un buen cambio de base que las transforma en matrices triangulares:

Teorema 1.2.6

- (I) Dada una matriz cuadrada A , existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es una matriz triangular superior, i.e. $U^{-1}AU(i, j) = 0$ si $i > j$.
- (II) Dada una matriz normal A , existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es una matriz diagonal.
- (III) Dada una matriz simétrica A , existe una matriz ortogonal O tal que la matriz $O^{-1}AO$ es una matriz diagonal.

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.2, o en Allaire-Kaber [2, sect. 2.4 and 2.5]]

Ideas que intervienen

- (1) Primero se prueba por inducción la existencia de un cambio de base (no necesariamente ortonormal) que transforma la matriz A en una triangular.
- Ortonormalizando la base anterior con el método de Gram-Schmidt se obtiene el cambio de base ortonormal que produce la matriz unitaria buscada.
- (2) $T = U^{-1}AU = U^*AU$. Si A es normal ($A^*A = AA^*$), T también es normal:

$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU$$

Si T es triangular superior y normal, entonces T es diagonal.

- (3) Si A es simétrica, los pasos de la prueba de (1) y (2) se pueden hacer sin salir de \mathbb{R} , por lo tanto cambiando adjuntas por transpuestas y unitaria por ortogonal se obtiene la prueba.

□

Definición 1.2.7 Se denominan valores singulares de una matriz A a las raíces cuadradas positivas de los valores propios de la matriz hermitiana A^*A (o A^tA si A es real) que siempre son positivos².

² Si $p \neq 0$, $A^*Ap = \lambda p \implies \lambda \|p\|^2 = p^* \lambda p = p^* A^* A p = (Ap)^*(Ap) = \|Ap\|^2 \geq 0 \implies \lambda \geq 0$

Si A es no singular, sus valores singulares son estrictamente positivos. En efecto:

$$A^*Ap = 0 \rightarrow p^*A^*Ap = 0 \rightarrow (Ap)^*(Ap) = \|Ap\|^2 = 0 \rightarrow Ap = 0 \rightarrow p = 0.$$

Teorema 1.2.8 Si A es una matriz real cuadrada, existen dos matrices ortogonales U y V , tales que $U^tAV = \text{diagonal}(\mu_i)$. Y si A es una matriz compleja cuadrada, existen dos matrices unitarias U y V , tales que $U^tAV = \text{diagonal}(\mu_i)$.

En los dos casos los números $\mu_i \geq 0$ son los valores singulares de A .

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.2]

Ideas que intervienen

- Diagonalizar la matriz normal A^*A , haciendo

$$V^*A^*AV = \text{diagonal}(\mu_i^2)$$

con V unitaria/ortogonal.

- si f_j es el vector columna de AV y $f_j \neq 0$ ponemos $u_j = \frac{1}{\mu_j}f_j$.

Los u_j así definidos tienen norma 1 y son 2-2 ortogonales.

Se completa la lista u_j (en los casos $f_j = 0$) con vectores ortonormales para tener una base ortonormal.

- la matriz U con vectores columna u_j es unitaria/ortogonal y cumple $U^tAV = \text{diagonal}(\mu_i)$.

□

1.2.5. Cocientes de Rayleigh. Matrices simétricas y hermitianas

En este apartado vamos a enunciar los resultados para matrices complejas hermitianas aunque también se aplican a las matrices reales simétricas simplemente sustituyendo los adjetivos «hermitiana», «unitaria», «adjunta» y «compleja» por «simétrica», «ortogonal», «traspuesta» y «real».

Para caracterizar los valores propios de una matriz hermitiana (recordad que todos son números reales) vamos a hacer uso de la siguiente definición

Definición 1.2.9 (Cocientes de Rayleigh) Sea A una matriz cuadrada de dimensión n . El cociente de Rayleigh de A es la aplicación $R_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$R_A(v) = \frac{(Av, v)}{(v, v)} = \frac{v^*Av}{v^*v}.$$

Si la matriz A es hermitiana, los cocientes de Rayleigh toman valores reales:

$$\overline{R_A(v)} = \frac{\overline{(Av, v)}}{(v, v)} = \frac{(v, Av)}{(v, v)} = \frac{(A^*v, v)}{(v, v)} = \frac{(Av, v)}{(v, v)} = R_A(v).$$

Observad también que R_A toma los mismos valores en toda la semirecta definida por v :

$$R_A(v) = R_A\left(\frac{v}{\|v\|_2}\right).$$

Teorema 1.2.10 Sea A una matriz hermitiana de dimensión n , con valores propios

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

y con una base ortonormal de vectores propios p_1, \dots, p_n , e.d. tales que

$$(p_i, p_j) = \delta_{ij}, \text{ y } Ap_i = \lambda_i p_i.$$

Para cada $k = 1, \dots, n$ sea E_k el subespacio generado por $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, y denotemos por \mathcal{S}_k a la familia de todos los subespacios de \mathbb{C}^n con dimensión k . Pongamos también $E_0 = \{0\}$ y $\mathcal{S}_0 = \{E_0\}$.

Los valores propios de A admiten las siguientes caracterizaciones

$$(I) \quad \lambda_k = R_A(p_k).$$

$$(II) \quad \lambda_k = \max\{R_A(v) : v \in E_k \setminus \{0\}\}.$$

$$(III) \quad \lambda_k = \min\{R_A(v) : v \perp E_{k-1}\}.$$

$$(IV) \quad \lambda_k = \min_{E \in \mathcal{S}_k} \max\{R_A(v) : v \in E \setminus \{0\}\}. \text{ (Courant-Fischer)}$$

$$(V) \quad \lambda_k = \max_{E \in \mathcal{S}_{k-1}} \min\{R_A(v) : v \perp E\}. \text{ (Courant-Fischer)}$$

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.3]

Ideas que intervienen

- Considerar la matriz unitaria U cuyos vectores columna son los p_i , que diagonaliza A :

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_i) =: D.$$

- Poniendo $v = Uw$, e.d. tomando $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ el vector columna de las coordenadas de v con respecto a la base $\{p_1, \dots, p_n\}$, se tiene

$$R_A(v) = \frac{v^*Av}{V^*V} = \frac{w^*U^*AUw}{w^*U^*Uw} = \frac{D}{w^*w} = \frac{\sum \lambda_i |w_i|^2}{\sum |w_i|^2}.$$

- De la igualdad anterior se deducen (I), (II) y (III).
- Las otras dos identidades se deducen de las tres primeras.

□

Como caso particular de este teorema se tiene que

$$\lambda_1 = \min\{R_A(v) : \|v\|_2 = 1\} \text{ y } \lambda_n = \max\{R_A(v) : \|v\|_2 = 1\}.$$

En la última sección del capítulo utilizaremos estas caracterizaciones para calcular números de condición de sistemas lineales.

Una matriz hermitiana se dice “definida positiva” (resp. positiva) si

$$(Av, v) = v^*Av > 0 \quad (\text{resp. } (Av, v) = v^*Av \geq 0) \text{ para todo } v \neq 0.$$

Una matriz hermitiana definida positiva tiene todos sus valores propios positivos ($\lambda_1 > 0$).

Ejercicio 1.14 Sea A una matriz hermitiana con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ definimos

$$r = \frac{\|Av - \lambda v\|_2}{\|v\|_2}.$$

Prueba que existe un valor propio λ_j tal que $|\lambda - \lambda_j| \leq r$. Analiza cómo este resultado permite localizar valores propios de A .

1.3. Normas matriciales

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} . Una **norma** sobre E es una aplicación $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ que cumple las propiedades

- (I) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
- (II) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$ (desigualdad triángular).
- (III) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $x \in E$ y todo $a \in \mathbb{K}$.

al par $(E, \|\cdot\|)$ se le llama espacio vectorial normado. La función $d(x, y) = \|x - y\|$ define una distancia en E , y la topología asociada a esta métrica.

Todas las normas definidas en un espacio de dimensión finita E son equivalentes en el sentido de que todas definen la misma topología.

En \mathbb{K}^n las tres normas más utilizadas en la práctica son

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^*x} = \sqrt{(x, x)}$,
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$.

Donde $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Una **norma matricial** en el anillo de las matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de orden n es una norma $\|\cdot\|$ definida en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que además cumple

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \text{ para todo } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

($\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es isomorfo a \mathbb{K}^{n^2} , ¿es una norma matricial la norma $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |A(i, j)|$?)

Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{K}^n , utilizando la identificación de las matrices A con los operadores lineales que definen f_A , podemos considerar la norma de la aplicación lineal f_A para definir la **norma matricial subordinada** a la norma $\|\cdot\|$ de \mathbb{K}^n . Esta norma se define por

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n - 0 \right\} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\| = 1 \right\}.$$

Observad que estas normas subordinadas tienen la propiedad siguiente:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \text{ para todo } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ y } x \in \mathbb{K}^n.$$

Lo que las hace interesantes para intentar medir la estabilidad y el condicionamiento de los sistemas lineales $Ax = b$.

Existen normas matriciales que no están subordinadas a ninguna norma de \mathbb{K}^n como mostraremos más adelante.

El siguiente teorema ofrece información sobre las normas subordinadas a las más usuales

Teorema 1.3.1 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada. Entonces

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &:= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} : \|x\|_1 = 1 \right\} = \max_j \sum_i |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty &:= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} : \|x\|_\infty = 1 \right\} = \max_i \sum_j |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &:= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : \|x\|_2 = 1 \right\} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2 \end{aligned}$$

La norma $\|\cdot\|_2$ es invariante por transformaciones unitarias

$$UU^* = I \Rightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

Si además la matriz A es normal ($A^*A = AA^*$):

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.4]

Ideas que intervienen

- Para las norma $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ sólo hay que utilizar la definición y buscar los supremos correspondientes.
- Para la $\|\cdot\|_2$ utilizaremos los cocientes de Rayleigh de la sección anterior

$$\|A\|_2^2 = \sup \left\{ \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)} = \frac{(A^*Ax, x)}{(x, x)} = R_{A^*A}(x) : \|x\|_1 = 1 \right\}.$$

□

Observad que

- La norma $\|A\|_2$ coincide con el mayor *valor singular* de A .
Si U es una matriz unitaria/ortogonal se tiene $\|U\|_2 = 1$.
- Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son mucho más fáciles de calcular que la norma $\|\cdot\|_2$
- Se puede probar (ver [5, 1.4.4]) que la norma euclídea en $\mathcal{M}_n \equiv \mathbb{K}^{n^2}$, $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ es una norma matricial no subordinada a ninguna norma en \mathbb{K}^n pero que sirve para acotar la norma $\|\cdot\|_2$ y es más fácil de calcular que ésta.

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

Ejercicio 1.15 Encuentra dos matrices A y B tales que

$$\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$$

y en consecuencia, el radio espectral no puede ser una norma matricial.

Si A es normal $\|A\|_2 = \rho(A)$. Aunque esta identidad no es cierta para todas las matrices, el radio espectral tiene la siguiente propiedad:

Teorema 1.3.2 Si A es una matriz cuadrada y $\|\cdot\|$ es una norma matricial (subordinada o no), entonces

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

En sentido recíproco, si A es una matriz y $\varepsilon > 0$, existe una norma matricial subordinada tal que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.4]

Ideas que intervienen

- Sea $p \neq 0$ un vector propio del valor propio λ , $|\lambda| = \rho(A)$, y sea q un vector tal que la matriz $pq^t \neq 0$. (*¡Escribe la matriz!*)

$$\rho(A)\|pq^t\| = \|\lambda pq^t\| = \|(Ap)q^t\| = \|A(pq^t)\| \leq \|A\| \|pq^t\|,$$

y despejando queda $\rho(A) \leq \|A\|$.

- Para la segunda parte, la idea es considerar el cambio de base que triangula la matriz A e perturbándolo de forma que casi-diagonalize la matriz A . La norma del supremo al hacer este cambio de base será la que proporciona la norma subordinada del enunciado.

En efecto, sea U la matriz unitaria tal que

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & \lambda_2 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & u_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En la diagonal aparecen los valores propios de A .

Para $\delta > 0$ se toma la matriz diagonal $D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$. Entonces

$$(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta u_{12} & \delta^2 u_{13} & \dots & \delta^{n-1} u_{1n} \\ & \lambda_2 & \delta u_{23} & \dots & \delta^{n-2} u_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta u_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Tomando δ suficientemente pequeño se tiene $\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} u_{ij}| < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y por lo tanto (teorema 1.3.1) que

$$\|(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta)\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Si consideramos la norma $\|v\|_* = \|(UD_\delta)^{-1}v\|_\infty$, se tiene que la norma subordinada a ésta verifica la propiedad buscada:

$$\|A\|_* = \|(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta)\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

□

Corolario 1.3.3

$$\rho(A) = \inf\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ es una norma matricial}\}.$$

Ejercicio 1.16 Demuestra con un ejemplo que la norma del supremo

$$\|(a_{i,j})_{n \times n}\|_{\text{sup}} = \max\{|a_{i,j}| : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

no es una norma matricial en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Demuestra que la norma uno

$$\|(a_{i,j})_{n \times n}\|_{\text{uno}} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} |a_{i,j}| :$$

es una norma matricial en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ que no está subordinada a ninguna norma de \mathbb{R}^n .

1.3.1. Convergencia de matrices

Recordad que en dimensión finita la convergencia de las sucesiones es independiente de la norma considerada porque todas las normas son equivalentes.

El siguiente teorema caracteriza las sucesiones de potencias B^k de matrices que convergen a 0 en términos del radio espectral. De este resultado deduciremos los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema 1.3.4 *Si B es una matriz cuadrada, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I) $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$,
- (II) $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k v = 0$, para todo vector v .
- (III) $\rho(B) < 1$.
- (IV) Existe una norma subordinada tal que $\|B\| < 1$.

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.5]

Ideas que intervienen

- $IV \Rightarrow I$. Basta con utilizar la desigualdad $\|B^k\| \leq \|B\|^k$.
- $I \Rightarrow II$. Basta con utilizar la desigualdad $\|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\|$, válida para las normas subordinadas.
- $II \Rightarrow III$. Sea λ un valor propio con $|\lambda| = \rho(B)$ y p un vector propio asociado, entonces $B^k p = (\lambda)^k p \rightarrow 0$, $(\lambda)^k \rightarrow 0$, y $|\lambda| = \rho(B) < 1$.
- $III \Rightarrow IV$. Es el teorema 1.3.2.

□

El radio espectral también servirá para medir la rapidez con que convergen los métodos iterativos.

Teorema 1.3.5 *Para cualquier norma matricial se cumple*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B).$$

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 1.5]

Ideas que intervienen

- $\rho(B) \leq \|B\|$ y $\rho(B^k) = \rho(B)^k$ implica que

$$\rho(B) = \rho(B^k)^{\frac{1}{k}} \leq \|B^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

- Para $\varepsilon > 0$, la matriz $B_\varepsilon = \frac{1}{\rho(B) + \varepsilon} B$ tiene radio espectral $\rho(B_\varepsilon) < 1$.

Por el teorema anterior $\lim_k B_\varepsilon^k = 0$, por lo tanto para k suficientemente grande $\|B_\varepsilon^k\| < 1$ y entonces

$$\rho(B) \leq \|B^k\|^{\frac{1}{k}} = \|B_\varepsilon^k\|^{\frac{1}{k}} \rho(B) + \varepsilon \leq \rho(B) + \varepsilon.$$

□

Ejercicio 1.17 Sea B una matriz cuadrada tal que $\rho(B) < 1$.

- (I) Comprueba que $Id - B$ es invertible calculando su inversa.
- (II) Comprueba también que existe A tal que $A^2 = Id - B$.

Indicación: utiliza desarrollos en serie de potencias

1.4. Análisis del error. Condicionamiento

Recordad el ejemplo de la introducción:

Ejemplo Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.00001y = 2.00001. \end{cases}$$

Su solución, es $x = 1$ e $y = 1$.

Consideremos ahora el sistema perturbando un poco los términos independientes.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.00001y = 2. \end{cases}$$

Este sistema perturbado tiene como solución $x = 2$ e $y = 0$.

- Un error pequeño en los datos iniciales (en el término independiente) ha producido un error grande en la solución.
- En este caso, no se ha producido ningún error de cálculo.
- Este es un ejemplo de un problema (sistema lineal) **mal condicionado**. No podemos evitar que pequeños errores en los datos iniciales se conviertan en errores grandes en las soluciones.

Si en lugar de perturbar el término independiente se perturba la matriz

$$\begin{cases} 1.00001x + y = 2 \\ x + 1.00001y = 2.00001. \end{cases}$$

la solución pasa a ser $x = 0.9999E - 5$ e $y = 1.99990001$.

- Un error pequeño en la matriz del sistema también ha producido un error grande en la solución.

Vamos a estimar el número de condición de un sistema lineal atendiendo a estos fenómenos.

- Supongamos que A es una matriz invertible (no singular) y que consideramos las soluciones de los sistemas

$$Ax = b \quad \text{y} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Se deduce fácilmente que $A\Delta x = \Delta b$ y que $\Delta x = A^{-1}\Delta b$.

Para cualquier norma subordinada se cumple:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\| \quad \text{y} \quad \|b\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Acotando el error relativo en x en función del error relativo en b se tiene

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

- Consideramos ahora las soluciones de los sistemas

$$Ax = b \quad \text{y} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

Se deduce fácilmente que $A\Delta x = -\Delta A(x + \Delta x)$ y que $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$ Para cualquier norma subordinada se cumple:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|. \quad (1.1)$$

Acotando el error relativo en x (esta vez con respecto a $\|x + \Delta x\|$) en función del error relativo en A se tiene

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| = \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Observad que de (1.1) se deduce que

$$\|x + \Delta x\| \leq \|x\| + \|\Delta x\| \leq \|x\| + \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|$$

y despejando

$$\|x + \Delta x\| (1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|) \leq \|x\|.$$

Volviendo otra vez a (1.1)

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta A\|}{(1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|)} \|x\|. \quad (1.2)$$

Recordando la noción de condicionamiento de un problema y la de número de condición introducidas en la asignatura previa de Cálculo Numérico, en el sentido de medir la sensibilidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con respecto a perturbaciones en el término independiente o en la matriz de coeficientes, podemos establecer la siguiente definición:

Definición 1.4.1 Dada una norma matricial subordinada $\|\cdot\|$ y una matriz cuadrada invertible A , se define el número de condición de la matriz A con respecto a esta norma por

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Los dos teoremas siguientes prueban que el número de condición que acabamos de definir es la mejor acotación posible en las dos desigualdades que hemos encontrado para definirlo

Teorema 1.4.2 Sea A una matriz invertible, x y $x + \Delta x$ las soluciones de los sistemas

$$Ax = b \quad y \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Si $b \neq 0$ entonces

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Además esta desigualdad es la mejor posible en el sentido de que se pueden encontrar un vector $b \neq 0$ y un vector $\Delta b \neq 0$ para los que la desigualdad se convierte en igualdad.

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 2.2]

Ideas que intervienen

- La desigualdad se probó con antelación.
- Para la igualdad, observad que la compacidad de la bola unidad de \mathbb{K} proporciona $u \neq 0$ tal que $\|Au\| = \|A\|\|u\|$ ($b = Au$) y $\Delta b \neq 0$ tal que $\|A^{-1}(\Delta b)\| = \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$.

□

Teorema 1.4.3 Sea A una matriz invertible, x y $x + \Delta x$ las soluciones de los sistemas

$$Ax = b \quad y \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

Si $b \neq 0$ entonces

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| = \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Además esta desigualdad es la mejor posible en el sentido de que se pueden encontrar un vector $b \neq 0$ y una matriz $\Delta A \neq 0$ para los que la desigualdad se convierte en igualdad.

DEMOSTRACIÓN: [Prueba completa en Ciarlet [5] sección 2.2]

□

Ejercicio 1.18 ([7], pág. 78) Unifica los resultados anteriores probando que las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$ y $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ cumplen:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

La definición del número de condición depende de la norma subordinada considerada. Denotaremos $\text{cond}_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2$ al número de condición correspondiente a la norma euclídea.

Reuniendo los resultados que hemos ido obteniendo a lo largo del capítulo podemos obtener el siguiente teorema:

Teorema 1.4.4

(I) Para toda matriz A invertible se cumple

- a) $\text{cond}(A) \geq 1$,
- b) $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$.

c) $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ para todo escalar α .

(II) Para toda matriz A

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$$

donde $\mu_1(A)$ y $\mu_n(A)$ son el menor y el mayor valor singular de A .

(III) Para toda matriz normal A

$$\text{cond}_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_n(A)|}{|\lambda_1(A)|}$$

donde $|\lambda_1(A)|$ y $|\lambda_n(A)|$ son los valores propios de A de menor y mayor tamaño.

(IV) Para toda matriz unitaria U u ortogonal O se cumple $\text{cond}_2(U) = \text{cond}_2(O) = 1$.

(V) El número de condición $\text{cond}_2(A)$ es invariante por transformaciones unitarias (cambios de base ortonormales):

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(AU) = \text{cond}_2(U^{-1}AU).$$

Las afirmaciones (II y III) nos permiten pensar que el número de condición $\text{cond}_2(A)$ correspondiente a la norma euclídea es el *mejor* en el sentido de que proporciona la medida más pequeña del condicionamiento de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.4.0.1. Condicionamiento y determinantes

Sabemos que si $\det(A) = 0$ entonces la matriz es singular. Es interesante saber que el hecho de que $\det(A)$ sea muy pequeño no implica que A esté mal condicionada. Por ejemplo,

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ . & . & 1 & -1 & \dots & -1 \\ . & . & 0 & 1 & -1 & \dots \\ . & . & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $\det(B_n) = 1$ pero $\text{cond}_\infty(B_n) = n2^{n-1}$ que es muy grande si $n \gg 1$ mientras que la matriz $D_n = \text{diag}\{10^{-1}, \dots, 10^{-1}\}$ tiene un condicionamiento perfecto $\text{cond}_\infty(D_n) = 1$ siendo $\det(D_n) = 10^{-n} \approx 0$ si $n \gg 1$.

Ejercicio 1.19 Calcula los números de condición para las normas subordinadas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de las matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.20 Una matriz con la propiedad de que las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada fila son todas iguales se denomina **matriz de filas equilibradas**.

- (I) Demuestra que cada matriz no singular puede convertirse en una matriz de filas equilibradas, multiplicándola por una matriz diagonal.
- (II) Prueba que si A es una matriz de filas equilibradas entonces

$$\text{cond}_{\infty}(A) \leq \text{cond}_{\infty}(DA)$$

para cada matriz no singular diagonal D para concluir que el equilibrado de una matriz mejora su número de condición.

Ejercicio 1.21 Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada. ¿Qué condición necesaria y suficiente debe verificar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ para que su número de condición respecto a esta norma sea 1? Justifica la respuesta y da un ejemplo de matriz 2×2 con esta propiedad para la norma matricial subordinada a la euclídea que no sea un múltiplo de la matriz identidad.

NOTA: Este ejercicio se planteó en los finales de Julio y Septiembre de 2005.

1.4.1. Condicionamiento en la búsqueda de valores y vectores propios

El problema de buscar los valores propios de una matriz tiene la misma complejidad que el problema de resolver polinomios. En efecto, encontrar el espectro de una matriz cuadrada A equivale a encontrar los ceros de su polinomio característico $p_A(x) = \det(A - x Id)$. Pero, por otra parte, cualquier polinomio de grado n $p(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ es el polinomio característico de su matriz compañera, que es la matriz cuadrada de orden n :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

De hecho, los métodos numéricos de búsqueda de valores propios pueden usarse para encontrar las raíces de polinomios. En relación con el condicionamiento, cualquier ejemplo de polinomio mal condicionado para la búsqueda de sus raíces proporciona un ejemplo de una matriz mal condicionada para el problema de determinar sus valores propios.

Cuando las matrices son diagonalizables se puede medir bien el condicionamiento del problema de los valores propios

Teorema 1.4.5 Sean A una matriz diagonalizable, P una matriz (cambio de base) tal que $P^{-1}AP = D$ donde $D = \text{diag}(\lambda_i)$, y $\|\cdot\|$ una norma matricial que cumple $\|\text{diag}(d_i)\| = \max_i \{|d_i|\}$ para cada matriz diagonal. Entonces, para cada matriz ΔA se cumple

$$\sigma(A + \Delta A) \subset \bigcup_i D_i,$$

con $D_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_i| \leq \text{cond}(P)\|\Delta A\|\}$.

Observad que si P es unitaria y la norma matricial es la subordinada a la euclídea $\|\cdot\|_2$, entonces $\text{cond}(P) = 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Ideas que intervienen

- Si $\lambda \neq \lambda_i$ para todo i , entonces $D - \lambda Id$ es invertible y se puede escribir

$$P^{-1}(A + \Delta A - \lambda Id)P = D - \lambda Id + P^{-1}\Delta AP = (D - \lambda Id)[Id + B]$$

con $B = (D - \lambda Id)^{-1}P^{-1}\Delta AP$.

- Si $\lambda \in \sigma(A + \Delta A)$, la matriz $A + \Delta A - \lambda Id$ es singular y lo mismo sucede con $P^{-1}(A + \Delta A - \lambda Id)P$ y con $Id + B$. Recordando el ejercicio 1.17, $\|B\| \geq \rho(B) \geq 1$, y así

$$1 \leq \|B\| \leq \|(D - \lambda Id)^{-1}\| \|P\| \|P^{-1}\| \|\Delta A\|.$$

- De las hipótesis tenemos $\|(D - \lambda Id)^{-1}\| = \|\text{diag}(1/(\lambda_i - \lambda))\| = (\min_i \{|\lambda_i - \lambda|\})^{-1}$, y en consecuencia

$$\min_i \{|\lambda_i - \lambda|\} \leq \text{cond}(P) \|\Delta A\|.$$

□

1.5. Actividades complementarias del capítulo

Los documentos se pueden descargar de la zona de recursos de la asignatura en el Aula Virtual de la Universidad de Murcia.

- Hoja de problemas nº1
- Practica nº1

Bibliografía

- [1] A. Delshams A. Aubanell, A. Benseny, *Útiles básicos de cálculo numérico*, Ed. Labor - Univ. Aut. de Barcelona, Barcelona, 1993.
- [2] G. Allaire and S.M. Kaber, *Numerical linear algebra*, TAM 55, Springer,, New York, etc., 2008.
- [3] C. Brézinski, *Introduccion á la pratique du calcul numérique*, Dunod Université, Paris, 1988.
- [4] R.L. Burden and J.D. Faires, *Análisis numérico*, 7ª edición, Thomson-Learning, Mexico, 2002.
- [5] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1990.
- [6] P.M. Cohn, *Algebra*, vol. 1 y 2, Ed. Hohn Wiley and Sons, London, 1974.
- [7] G. Hammerlin and K.H. Hoffmann, *Numerical mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] J.Stoer and R. Burlisch, *Introduction to numerical analysis*, Springer Verlag, New York, 1980.
- [9] D. Kincaid and W. Cheney, *Análisis numérico*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Reading, USA, 1994.
- [10] J. R. Shewchuk, *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*, Tech. report, Carnegie Mellon University, USA,<http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient-figs.pdf>,doi=10.1.1.110.418, 1994.