PRIMER PARCIAL

jueves, 15 de mayo de 2025 3:57 p. m.

1. Se tiene un microprocesador de 5 bits con entrada análoga de -3.3 a 5 [v]. Diseñe el sistema de acondicionamiento y digitalización para la señal: $x(t) = 20\sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$. Presente las simulaciones y gráficas de los procedimientos más representativos en un cuaderno de Python, incluyendo al menos dos períodos de la señal estudiada.

Tenemos la señal

$$x(t) = \underbrace{20}\,\text{sen}\left(7t - \frac{\pi}{2}\right) \underbrace{-3}\cos(5t) \underbrace{+2}\cos(10t)$$

Vamos a usar la identidad trigonométrica

$$\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$$

$$|x(t)|_{max} \leq |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$\left.\begin{aligned} |A_1| &= 20 \\ |A_2| &= 3 \\ |A_3| &= 2 \end{aligned}\right\} 20 + 3 + 2 = 25$$

$$x(t) \in \{-25, 25\}$$

Teniendo en cuenta que el microprosesador solo acepta voltajes entre $-3{,}3V$ y $5V$ tenemos:

$$5V - (-3{,}3V) = 8{,}3V$$

$$X_{escalado}(t) = K \cdot X(t)$$

$$K = \frac{8{,}3V}{25V - (-25V)} = \frac{8{,}3V}{50V} = 0{,}166$$

Escalada nos queda centrado en 0 de la siguiente manera

$$X_{escalada}(t) \in \{-4{,}15, 4{,}15\}$$

Haciendo un Ofset obtendremos los valores entre $-3{,}3V$ y $5V$

$$\text{actual} = \frac{-4{,}15 + 4{,}15}{2} = 0$$

$$\text{ofset} = \frac{-3{,}3 + 5}{} = 0{,}85$$

$$\text{actual} = \frac{-4{,}15 + 4{,}15}{2} = 0$$

$$\text{ofset} = \frac{-3{,}3 + 5}{2} = 0{,}85$$

Al tener 5 bits, el ADC tiene

$2^5 = 32$ niveles

El rango de entrada es

$(3{,}3 \,,\, 5) \rightarrow$ amplitud total es $8{,}3V$

El nivel de voltaje a 5 bits es

$$\Delta = \frac{8{,}3}{32} = 0{,}259$$

Para convertir un voltaje a digital

$$X_{nivel} = \left[\frac{X_{escalada}(t) + 3{,}3}{\Delta}\right]$$

frecuencia más baja $\rightarrow W = 5$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$$

2. Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$, aplicado a la señal $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

Tenemos la señal

$$X(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Verificamos que la señal sea cuasiperiódica

$W_1 = 1000\pi$

$W_2 = 2000\pi$

$W_3 = 11000\pi$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{W_1}{W_2} = \frac{1000\pi}{2000\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \\ \\ \frac{W_1}{W_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11} \in \mathbb{Q} \\ \\ \frac{W_2}{W_3} = \frac{2000\pi}{11000\pi} = \frac{2}{11} \in \mathbb{Q}\end{array}\right\} \text{la señal es cuasiperiódica}$$

Discretizamos la señal

$$t \to nt_s = \frac{n}{s} \to x(t) \to x[n] \qquad f_s = 5000\,\text{Hz}$$

Verificar nyquist con 5KHz

$$W_{max} = 11000\pi \to F_{max} = \frac{W_{max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,\text{Hz}$$

f_s debe ser mayor a $2(f_{max}) = 2 \cdot 5500\,\text{Hz} = 11000\,\text{Hz}$

En este caso los 5KHz no son suficientes, así que vamos a cambiar:

$$f_s \to 4f_{max} = 4(5500) = 22000$$

Calculamos el periodo de la señal

$$W_1 = 1000\pi$$

$$W_2 = 2000\pi$$

$$W_3 = 11000\pi$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{2000\pi} = \frac{1}{1000}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{11000} = \frac{1}{5500}$$

$$T = kT_1 = lT_2 = rT_3$$

$$T = \frac{k_1}{500} = \frac{l_1}{1000} = \frac{r_1}{5000} \quad (11000)$$

$$11000T = k22 = l11 = r2 \quad \to mcm = 22$$

$$1000T = k22 = l11 = r2 \rightarrow mcm = 22$$

$$k=1,\ l=2,\ r11$$

$$11000T = 22 \rightarrow T = \frac{22}{11000} = \frac{1}{500}\ (\text{deg})$$

Hacemos el cambio de $t = nT_s$

$$t = nT_s$$

$$x(t) = 3\cos\left(1000\pi nT_s - \frac{\pi}{4}\right) + 5\,\text{sen}(2000\pi\, nT_s) + 10\cos(11000\pi nT_s - \pi)$$

$$t_s = \frac{1}{F_s} = \frac{3}{22000}$$

$$x(nT_s) = 3\cos\left(\frac{1000\pi n}{2000} - \frac{\pi}{4}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{2000\pi}{22000}\right) + 0{,}1\cos\left(\frac{11000\pi n}{22000} - \pi\right)$$

$$z_1 = \frac{1000\pi}{22000} = \frac{1\pi}{22} < \pi;$$

$$z_2 = \frac{2000\pi}{22000} = \frac{1\pi}{11} < \pi;$$

$$z_3 = \frac{11000\pi}{22000} = \frac{1\pi}{2} < \pi;$$

Si cumple

3. La distancia media entre dos señales $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se puede expresar a partir de la potencia media:

$$d(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2\, dt.$$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$x_1(t) = A\cos(w_0 t), \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1 & si \quad \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1 & si \quad \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

$$x_1(t) = A\cos(w_0 t), \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1 & si \quad \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1 & si \quad \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

¿Cuál es la distancia media entre las señales?. Corrobore sus desarrollos con Sympy.

$$d(x_1, x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int |x_1(t) - x_i(t)|^2 \, dt$$

$$x_1(t) = A\cos(W_0 t), \quad W_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1, & \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1, & \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

x_1 y x_2 son señales periódicas con periodo T

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/4} (A\cos(W_0 t) - 1)\, dt + \frac{1}{T}\int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(W_0 t) + 1)^2\, dt + \frac{1}{T}\int_{3T/4}^{T} (A\cos(W_0 t) - 1)^2\, dt\right.$$

Expandiendo los cuadrados

$$(A\cos(W_0 t) \pm 1)^2 = A^2\cos^2(W_0 t) \pm 2A\cos(W_0 t) + 1$$

$$d(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/4} (A^2\cos^2(W_0 t) - 2A\cos(W_0 t) + 1)\, dt \int_{T/4}^{3T/4} (A^2\cos^2(W_0 t) + 2A\cos(W_0 t) + 1)\, dt + \int_{3T/4}^{T} (A^2\cos^2(W_0 t) - 2A\cos(W_0 t) + 1)\, dt\right.$$

Sabemos que

$$\cos^2(W_0 t) = \frac{1 + \cos(2W_0 t)}{2}$$

Por lo tanto

$$\int_0^T \cos(2W_0 t)\, dt = 0 \quad y \quad \int_0^T \cos(W_0 t)\, dt = 0$$

$$\int_0 \cos(2W_0 t)\,dt = 0 \quad y \quad \int_0 \cos(W_0 t)\,dt = 0$$

Evaluamos las integrales

- $(0 \leq t < T/4)$

$$\int_0^{T/4} (A\cos(W_0 t) - 1)^2 dt = \int_0^{T/4} A^2\cos^2(W_0 t) - 2A\cos(W_0 t) + 1\,dt$$

$$= A^2 \cdot \frac{T}{8} - 2A \cdot \frac{T}{\pi} + \frac{T}{4}$$

- $(T/4 \leq t < 3T/4)$

$$\int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(W_0 t) + 1)^2 dt = A^2 \cdot \frac{T}{4} + 2A \cdot \frac{T}{\pi} + \frac{T}{2}$$

sumando tenemos

$$\left(2\left(\frac{A^2 T}{8} - \frac{2AT}{\pi} + \frac{T}{4}\right)\right) + \left(\frac{A^2 T}{4} + \frac{2AT}{\pi} + \frac{T}{2}\right)$$

$$= \frac{A^2 T}{2} - \frac{4AT}{\pi} + T$$

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left(\frac{A^2 T}{2} - \frac{4AT}{\pi} + T\right)$$

$$= \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1$$

4. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud, fase, parte real, parte imaginaria y el error relativo de reconstrucción para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1 . Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ y presente las respectivas simulaciones sobre Python.

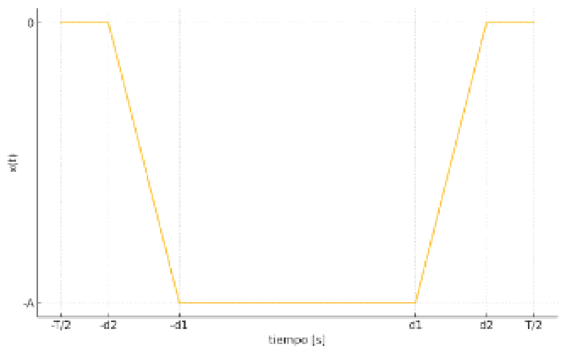


Figura 1: Señal $x(t)$ - ejercicio 4.

Los coeficientes C_n de la serie de fourier para la segunda derivada $x''(t)$ están dados por:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_o t} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

Expansión de la señal $x(t)$ en serie exponencial de Fourier

$$x(t) = \sum_n C_n e^{jnw_o t}$$

Ahora obtenemos la primera derivada de $x(t)$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_n C_n e^{jnw_o t}\right) = \sum_n C_n jnw_o e^{jnw_o t}$$

Ahora la segunda derivada

Ahora la segunda derivada

$$x''(t)\ \frac{d}{dt}\left(\sum_n C_n\, jnW_0 e^{jnW_0t}\right)=\sum_n C_n (jnW_0)^2 e^{jnW_0t}$$

Calculamos C_n multiplicando $x''(t)$ por e^{-jnW_0t} y lo integramos en el intervalo $[t_i, t_f]$

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnW_0t}\,dt = \int_{t_i}^{t_f}\sum_n C_n(jnW_0)^2 e^{jnW_0t}e^{-jnW_0t}\,dt$$

Cancelamos los exponentes en la integración debido a la ortogonalidad de las exponenciales complejas, se conservan únicamente el término $n=K$

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnW_0t}\,dt = C_n(jnW_0)^2(t_f-t_i)$$

Despejar C_n:

$$C_n=\frac{1}{(t_f-t_i)(jnW_0)^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnW_0t}\,dt$$

Simplificamos con $j^2=-1$

$$C_n=\frac{1}{(t_f-t_i)n^2W_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnW_0t}\,dt$$

Ahora hacemos la relación con la serie trigonométrica

Tenemos la expresión general de $x(t)$:

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nW_0t)+b_n\,\mathrm{sen}(nW_0t)\right]$$

Primera derivada:

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n nW_0\,\mathrm{sen}(nW_0t)+b_n nW_0\cos(nW_0t)\right]$$

Segunda derivada

$$x''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n(nW_0)^2\cos(nW_0t)-b_n(nW_0)^2\,\mathrm{sen}(nW_0t)\right]$$

Ahora sacamos la ortogonalidad para los coeficientes a_n y b_n:

- Para a_n

Ahora sacamos la ortogonalidad para los coeficientes a_n y b_n:

- Para a_n

$$a_n = \frac{-2}{Tn^2 W_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(nW_0 t)\,dt$$

- Para b_n

$$b_n = \frac{-2}{Tn^2 W_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,\text{sen}(nW_0 t)\,dt$$

Ahora vamos a encontrar el espectro de fourier, su magnitud y el error relativo para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$ a partir de $x''(t)$

Tenemos la fórmula general para C_n

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jnW_0 t}$$

$x''(t)$ se representa como:

$$x''(t) = A[\delta(t+d_2) - \delta(t+d_1) - \delta(t-d_1) + \delta(t-d_2)]$$

sustituimos $x''(t)$ en la integral

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A[\delta(t+d_2) - \delta(t+d_1) - \delta(t-d_1) + \delta(t-d_2)]e^{-jnW_0 t}\,dt$$

Evaluamos la integral

$$C_n = \frac{A}{T}\left[e^{-jnW_0 d_2} - e^{-jnW_0 d_1} - e^{jnW_0 d_1} + e^{jnW_0 d_2}\right]$$

$$C_n = \frac{A}{T}\left[(e^{-jnW_0 d_2} + e^{jnW_0 d_2}) - (e^{-jnW_0 d_1} + e^{jnW_0 d_1})\right]$$

$$\rightarrow e^{-jnW_0 d} + e^{jnW_0 d} = 2\cos(nW_0 d)$$

$$C_n = \frac{2A}{T}[\cos(nW_0 d_2) - \cos(nW_0 d_1)]$$

Sustituimos los factores de escala

$$C_n = \frac{2A}{Tn^2 W_0^2}[\cos(nW_0 d_2) - \cos(nW_0 d_1)]$$

Para $n=0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

Sustituimos $x(t)$ con su representacion en términos de deltas

$$C_0 = \frac{1}{T}\left[A(d_2+d_1) - A(d_2-d_1) + A(d_1+d_2) - A(d_1-d_2)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\cdot 2A(d_1+d_2)$$

$$C_0 = \frac{4Ad_1}{T}$$

Calculamos la magnitud de C_n

$$|C_n| = \left|\frac{2A}{Tn^2W_0^2}\left[\cos(nW_0d_2) - \cos(nW_0d_1)\right]\right|$$

Calculamos error relativo

La potencia total de la señal es

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

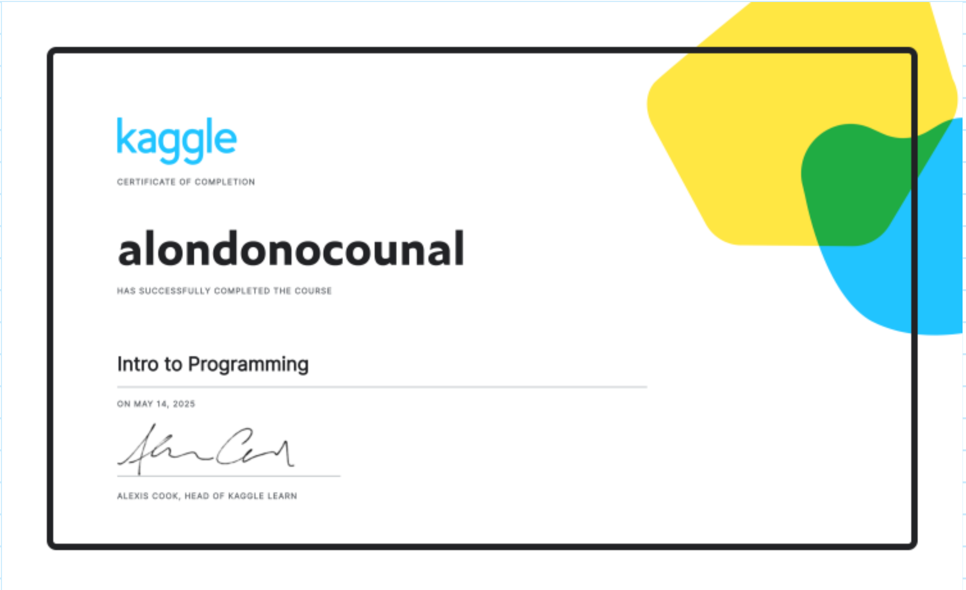
Representacion con deltas

$$P_x = \frac{1}{T}\left[A^2(d_2^2 + d_1^2) + \ldots\right]$$

Usando los coeficientes C_n

$$P_x^{(N)} = \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2$$

$$\frac{|P_x - P_x^{(N)}|}{P_x} = \text{error relativo}$$



kaggle

CERTIFICATE OF COMPLETION

alondonocounal

HAS SUCCESSFULLY COMPLETED THE COURSE

Intro to Programming

ON MAY 14, 2025

ALEXIS COOK, HEAD OF KAGGLE LEARN

kaggle

CERTIFICATE OF COMPLETION

alondonocounal

HAS SUCCESSFULLY COMPLETED THE COURSE

Python

ON MAY 14, 2025

COLIN MORRIS, KAGGLE INSTRUCTOR

ALEXIS COOK, HEAD OF KAGGLE LEARN