Introdução à hemodinâmica computacional

Aula II

Pablo J. Blanco e Luis Alonso M. Álvarez

HeMoLab Laboratório de Modelagem em Hemodinâmica
Laboratório Nacional de Computação Científica

XXI Escola de Verão do LNCC

Fevereiro de 2023

Abordagem clássica e variacional

- O princípio das potências virtuais é um arcabouço flexível que permite construir forças por meio da ação de campos de velocidade que nós estamos livres de escolher
- O princípio das potências virtuais é um verdadeiro *Gedankenexperiment* (experimento mental)
- A potência (virtual) é uma medida de custo (virtual)
- Dualidade entre velocidade (virtual) e força resulta em um produto chamado potência (virtual)
- Dualidade nos transporta ao campo dos funcionais lineares e contínuos sobre um conjunto de campos de velocidade generalizados

$$p = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$$

Integração por partes

Sabemos que para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regular, vale o seguinte

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x)dx = f(b) - f(a)$$

Integração por partes

Sabemos que para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regular, vale o seguinte

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x)dx = f(b) - f(a)$$

Dada uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ regular o suficiente, o teorema de Gauss estabelece que

$$\int_\Omega \nabla f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f \mathbf{n} d\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário na direção da normal exterior no contorno $\partial\Omega$

Integração por partes

Dada uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ regular o suficiente, o teorema do divergente estabelece que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário na direção da normal exterior no contorno $\partial\Omega$

Integração por partes

Dada uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ regular o suficiente, o teorema do divergente estabelece que

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário na direção da normal exterior no contorno $\partial\Omega$

Dada uma função $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ regular o suficiente, o teorema do divergente estabelece que

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{T} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}\mathbf{n} d\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário na direção da normal exterior no contorno $\partial\Omega$

Integração por partes

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_a^b f(x) \frac{dg}{dx}(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b \frac{df}{dx}(x) g(x) dx$$

Integração por partes

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b \frac{df}{dx}(x)g(x)dx$$

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_\Omega f(\nabla g)d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} fg\mathbf{n}d\mathbf{x} - \int_\Omega (\nabla f)gd\mathbf{x}$$

Integração por partes

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b \frac{df}{dx}(x)g(x)dx$$

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_\Omega f(\nabla g)d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} fg\mathbf{n}d\mathbf{x} - \int_\Omega (\nabla f)gd\mathbf{x}$$

Dadas as funções $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ regulares o suficiente, a integração por partes estabelece que

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\nabla g d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{f}\cdot\mathbf{n})d\mathbf{x} - \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{f})gd\mathbf{x}$$

Problema típico (1D). Formulação clássica

- Considere o problema de encontrar $u \in U$ tal que

$$\begin{cases} -k\dfrac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{em } (0, L) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

- $k > 0$ é uma propriedade física
- f é uma fonte
- $(0, L)$ é o intervalo do espaço (unidimensional neste caso) onde se formula o problema
- $u(0)$ e $u(L)$ são prescritos (condições de contorno de tipo Dirichlet)
- $-k\frac{d^2u}{dx^2} = f$ equação diferencial em derivadas parciais (aqui só de x) de balanço local
- U um conjunto de funções com propriedades adequadas para que o problema faça sentido

Problema típico (1D). Formulação variacional

- Considere o problema de encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F}(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(v)$$

- $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ um funcional apropriado
- $\mathcal{U}$ um conjunto de funções com propriedades adequadas para que o problema faça sentido
- No caso do problema anterior $\mathcal{F}$ é

$$\mathcal{F}(v) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}_{\text{energia interna}} - \underbrace{\int_0^L f v dx}_{\text{energia externa}}$$

Problema típico (1D). Formulação variacional

- Considere o problema de encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F}(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(v)$$

- $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ um funcional apropriado
- $\mathcal{U}$ um conjunto de funções com propriedades adequadas para que o problema faça sentido
- No caso do problema anterior $\mathcal{F}$ é

$$\mathcal{F}(v) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}_{\text{energia interna}} - \underbrace{\int_0^L f v dx}_{\text{energia externa}}$$

- A condição necessária de mínimo é resolver a seguinte equação variacional
- Encontre $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\delta \mathcal{F}(u, \hat{u}) = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

- $\hat{u}$ são variações (ou perturbações) admissíveis de u
- $\mathcal{V}$ é o espaço das variações (ou perturbações) admissíveis

Problema típico (1D). Formulação variacional

- Para o problema anterior, a equação variacional é a seguinte: encontre $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\int_0^L k \frac{du}{dx}\frac{d\hat{u}}{dx} dx = \int_0^L f \hat{u} dx \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

Problema típico (1D). Formulação variacional

- Para o problema anterior, a equação variacional é a seguinte: encontre $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\int_0^L k \frac{du}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx = \int_0^L f \hat{u} dx \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

- Vejamos a equivalência com o problema original
- Tomemos $\mathcal{U} = \{u \text{ suficientemente regulares}, \ u(0) = 0, \ u(L) = 0\}$
- Integrando por partes o lado esquerdo (assumamos que é possível) resulta

$$\left(k \frac{du}{dx} \hat{u} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) \hat{u} dx = \int_0^L f \hat{u} dx \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

- Pelas condições de contorno homogêneas prescritas em $\mathcal{U}$, e por ser k constante (poderia não ser) resulta

$$\int_0^L \left(k \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) \hat{u} dx = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

Problema típico (1D). Formulação variacional

- Dado que vale $\forall \hat{u} \in \mathcal{V}$, então o parêntese deve ser nulo

$$k \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0 \quad \text{em } (0, L)$$

- Esta equação foi derivada de forma natural do problema de mínimo
- As condições de contorno sobre o campo u estavam dentro do conjunto $\mathcal{U}$
- Esse tipo de condição de contorno se chama condição essencial (ou principal)
- Em uma só expressão: encontre $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\int_0^L k \frac{du}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx = \int_0^L f \hat{u} dx \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

  a formulação variacional resume o problema inteiro e suas condições de contorno
- Neste caso, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ é espaço vetorial

Condição de mínimo e equação variacional

- Vimos que o problema de mínimo é: encontre $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$u = \arg\min_{v \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L fv dx \right]$$

- Observe que para qualquer perturbação (ou variação) em torno do mínimo, $v = u + \tau \hat{u}$, resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(u + \tau\hat{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{d}{dx}(u + \tau\hat{u}) \right)^2 dx - \int_0^L f(u + \tau\hat{u}) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{2\tau}{2} \int_0^L k \frac{du}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx + \frac{\tau^2}{2} \int_0^L k \left(\frac{d\hat{u}}{dx} \right)^2 dx \\
&- \int_0^L fu dx - \tau \int_0^L f\hat{u} dx \\
&= \mathcal{F}(u) + \underbrace{\tau \left(\int_0^L k \frac{du}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - \int_0^L f\hat{u} dx \right)}_{\delta\mathcal{F}(u,\hat{u})=0 \ \forall \hat{u} \in \mathcal{V}} + \underbrace{\frac{\tau^2}{2} \int_0^L k \left(\frac{d\hat{u}}{dx} \right)^2 dx}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Condição de mínimo e equação variacional

- Como condição necessária de mínimo obtivemos que

$$\delta\mathcal{F}(u,\hat{u}) = \int_0^L k \frac{du}{dx}\frac{d\hat{u}}{dx}dx - \int_0^L f\hat{u}dx = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

- A forma $\delta\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ será chamada primeira variação do funcional
- A forma $\delta\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ é linear no segundo argumento
- O funcional $\mathcal{F}$ é resultado do processo de modelagem
- O conjunto $\mathcal{U}$ é resultado do processo de modelagem
- O espaço $\mathcal{V}$ é associado a $\mathcal{U}$

Condição de mínimo e equação variacional

- Como condição necessária de mínimo obtivemos que

$$\delta\mathcal{F}(u,\hat{u}) = \int_0^L k\frac{du}{dx}\frac{d\hat{u}}{dx}dx - \int_0^L f\hat{u}dx = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$$

- A forma $\delta\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ será chamada primeira variação do funcional
- A forma $\delta\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ é linear no segundo argumento
- O funcional $\mathcal{F}$ é resultado do processo de modelagem
- O conjunto $\mathcal{U}$ é resultado do processo de modelagem
- O espaço $\mathcal{V}$ é associado a $\mathcal{U}$

A formulação variacional nos permite

- Estudar sem limitações outras condições de contorno
- Introduzir na análise as condições de salto associadas ao problema
- Estudar de forma natural a existência e unicidade com as ferramentas da análise funcional
- Realizar análise de sensibilidade dentro do mesmo paradigma
- Desenvolver métodos numéricos para resolver de forma aproximada o problema

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Considere o funcional

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mu |\nabla^s \mathbf{v}|^2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

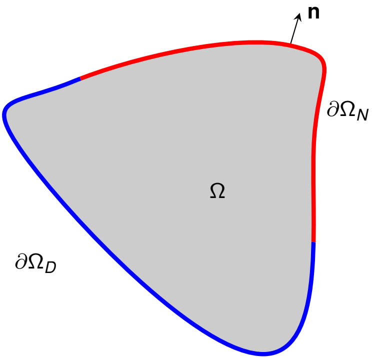
cujo domínio é

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \bar{\mathbf{v}}\}$$

onde

- $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é o campo vetorial que representa a velocidade do fluido no domínio $\Omega \in \mathbb{R}^3$, com contorno $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$
- $\mathbf{v}$ é um campo vetorial solenoidal, implicando que o escoamento é incompressível, ou seja $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, a qual é uma restrição distribuída, que deve valer $\forall \mathbf{x} \in \Omega$
- $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ é o perfil de velocidade prescrito no contorno $\partial\Omega_D$
- $\nabla^s \mathbf{v}$ é o gradiente simétrico de $\mathbf{v}$, ou seja $\nabla^s \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$
- $\rho > 0$ e $\mu > 0$ são a massa específica e a viscosidade do fluido, constantes em Ω
- $\mathbf{g}$ é a força da gravidade, constante em Ω
- $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ é uma força por unidade de área atuando sobre o contorno $\partial\Omega_N$
- $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^3$ é o espaço de funções vetoriais cujo quadrado é integrável e cujo gradiente é também quadrado integrável no domínio Ω

Modelo variacional para escoamento de Stokes

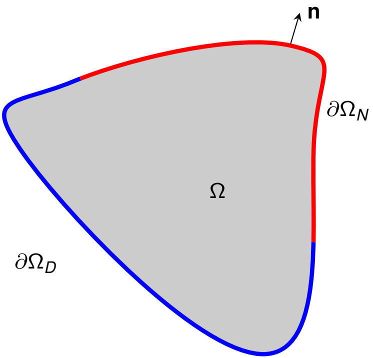


- $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$, **n**: normal exterior
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

Condição de Dirichlet $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ sobre $\partial\Omega_D$

Tração $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ definida sobre $\partial\Omega_N$

Modelo variacional para escoamento de Stokes



- $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$, $\mathbf{n}$: normal exterior
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

Condição de Dirichlet $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ sobre $\partial\Omega_D$

Tração $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ definida sobre $\partial\Omega_N$

O conjunto $\mathcal{U}$ é uma variedade linear, e o espaço de variações admissíveis resulta

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{0}\}$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Calculamos a primeira variação do funcional em $\mathbf{v}$ na direção $\hat{\mathbf{v}}$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) &= \frac{d}{d\tau}\mathcal{F}(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})\Big|_{\tau=0} \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(\int_\Omega (\mu|\nabla^s\mathbf{v}+\tau\nabla^s\hat{\mathbf{v}}|^2 - \rho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}}))d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}\right)\Big|_{\tau=0} \\
&= \int_\Omega (2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Calculamos a primeira variação do funcional em $\mathbf{v}$ na direção $\hat{\mathbf{v}}$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) &= \frac{d}{d\tau}\mathcal{F}(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})\Big|_{\tau=0} \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(\int_\Omega (\mu|\nabla^s\mathbf{v}+\tau\nabla^s\hat{\mathbf{v}}|^2 - \rho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}}))d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}\right)\Big|_{\tau=0} \\
&= \int_\Omega (2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

A condição necessária de mínimo resulta na seguinte equação variacional: encontre $\mathbf{v}\in\mathcal{U}$ tal que

$$
\int_\Omega 2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}
$$

ou, equivalentemente

$$
\int_\Omega 2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}
$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Integramos por partes usando as identidades anteriores

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) &= \int_\Omega (2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega (\mathrm{div}(2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\hat{\mathbf{v}}) - \mathrm{div}(2\mu\nabla^s\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} 2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\hat{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}d\mathbf{x} + \int_\Omega(-\mu\,\mathrm{div}(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T)\cdot\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} 2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_\Omega(-\mu\triangle\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \underbrace{\int_{\partial\Omega_D} 2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}}_{=0} + \int_{\partial\Omega_N}(2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}-\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_\Omega(\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N}(2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}-\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_\Omega(\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Do processo de integração por partes chegamos ao seguinte

$$\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_\Omega (\mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}$$

Definamos $\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega);\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}$, então temos

$$-\int_\Omega (\mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}_0$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Do processo de integração por partes chegamos ao seguinte

$$\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\Omega_N}(2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}-\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_{\Omega}(\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}$$

Definamos $\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}\}$, então temos

$$-\int_{\Omega}(\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}_0$$

- Neste caso, é importante notar que $\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}\neq\mathbf{0}$!! Mas, deve ser $\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}\perp\mathcal{V}_0$!!
- O vetor $\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}$ é ortogonal ao espaço de funções com divergente nulo
- As funções que provêm de um gradiente constituem o espaço ortogonal a $\mathcal{V}_0$
- De fato, integrando por partes veja que

$$\int_{\Omega}\nabla\phi\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\phi\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_{\Omega}(\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}})\phi d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathcal{V}_0$$

- Logo, $\mu\triangle\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}$ escreve-se como o gradiente de uma função, digamos $p(\mathbf{x})$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Assim sendo, observamos que

$$-\int_{\Omega} (\mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_0$$

implica em

$$\mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = \nabla p \qquad \text{em } \Omega$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Assim sendo, observamos que

$$-\int_\Omega (\mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_0$$

implica em

$$\mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = \nabla p \qquad \text{em } \Omega$$

Voltamos com este resultado na expressão anterior e integramos por partes novamente

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_\Omega \underbrace{(\mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g})}_{=\nabla p} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_\Omega (\operatorname{div}(p\hat{\mathbf{v}}) - p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}
\end{aligned}$$

Modelo variacional para escoamento de Stokes

Continuamos com o desenvolvimento, e utilizamos o fato de $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\partial\Omega_N} (2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} p\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_D} p\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x}}_{=0} + \int_{\Omega} p \underbrace{\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}}_{=0} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N} (-p\mathbf{n} + 2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N} ((-p\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}
\end{aligned}$$

o que implica que necessariamente deve ser

$$(-p\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{em } \partial\Omega_N$$

Chegamos assim às equações de Euler-Lagrange associadas ao problema de escoamentos lentos incompressíveis

$$\begin{cases}
-\nabla p + \mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\
\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\
(-p\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N
\end{cases}$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Considere o funcional do modelo de Stokes

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_\Omega (\mu|\nabla^s \mathbf{v}|^2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

cujo domínio é

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \bar{\mathbf{v}}\}$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Considere o funcional do modelo de Stokes

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_\Omega (\mu|\nabla^s \mathbf{v}|^2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

cujo domínio é

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \bar{\mathbf{v}}\}$$

- A restrição que será removida do domínio $\mathcal{U}$ é a do divergente
- Tal restrição é distribuída em todo Ω

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Armamos o Lagrangeano

$$\mathcal{L}(\mathbf{v},\lambda) = \underbrace{\int_\Omega (\mu|\nabla^s \mathbf{v}|^2 - \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v} d\mathbf{x}}_{\mathcal{F}(\mathbf{v})} - \underbrace{\int_\Omega \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}}_{\langle \lambda, G(\mathbf{v})\rangle_{W'\times W}}$$

Note que aqui $W = W' = L^2(\Omega)$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Armamos o Lagrangeano

$$\mathcal{L}(\mathbf{v},\lambda) = \underbrace{\int_\Omega (\mu|\nabla^s\mathbf{v}|^2 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}}_{\mathcal{F}(\mathbf{v})} - \underbrace{\int_\Omega \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}d\mathbf{x}}_{\langle\lambda,G(\mathbf{v})\rangle_{W'\times W}}$$

Note que aqui $W = W' = L^2(\Omega)$

O problema de ponto de sela consiste em encontrar $(\mathbf{v}^*,\lambda^*) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}^*,\lambda^*) = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{U}^*} \max_{\lambda\in L^2(\Omega)} \left\{ \int_\Omega (\mu|\nabla^s\mathbf{v}|^2 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} - \int_\Omega \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}d\mathbf{x} \right\}$$

onde o domínio $\mathcal{U}^*$ já não possui a restrição do divergente

$$\mathcal{U}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \bar{\mathbf{v}}\}$$
$$\mathcal{V}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{0}\}$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Calculamos a primeira variação do funcional

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}((\mathbf{v},\lambda),(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda})) &= \frac{d}{d\tau}\left(\int_\Omega(\mu|\nabla^s\mathbf{v}+\tau\nabla^s\hat{\mathbf{v}}|^2-\rho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}}))d\mathbf{x}\right.\\
&\left.-\int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}-\int_\Omega(\lambda+\tau\hat{\lambda})\,\mathrm{div}(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}\right)\Bigg|_{\tau=0}\\
&=\int_\Omega(2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}-\rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}-\int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}-\int_\Omega\hat{\lambda}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}d\mathbf{x}-\int_\Omega\lambda\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Calculamos a primeira variação do funcional

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}((\mathbf{v},\lambda),(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda})) &= \frac{d}{d\tau}\bigg(\int_\Omega (\mu|\nabla^s\mathbf{v}+\tau\nabla^s\hat{\mathbf{v}}|^2-\rho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}}))d\mathbf{x} \\
&\quad -\int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}-\int_\Omega(\lambda+\tau\hat{\lambda})\operatorname{div}(\mathbf{v}+\tau\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}\bigg)\bigg|_{\tau=0} \\
&= \int_\Omega(2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}-\rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{x}-\int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}-\int_\Omega\hat{\lambda}\operatorname{div}\mathbf{v}d\mathbf{x}-\int_\Omega\lambda\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

A condição de estacionariedade consiste em resolver a equação variacional para encontrar $(\mathbf{v},\lambda)\in\mathcal{U}^*\times L^2(\Omega)$ tal que

$$
\int_\Omega\left(2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}-\hat{\lambda}\operatorname{div}\mathbf{v}-\lambda\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}\right)d\mathbf{x}=\int_\Omega\rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}
$$

$$
\forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda})\in\mathcal{V}^*\times L^2(\Omega)
$$

onde usamos o fato de ser $\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}=\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Integramos por partes, e usamos o fato de $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}^*$, resultando

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}((\mathbf{v},\lambda),(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda})) &= \int_\Omega \left(2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}} - \hat{\lambda}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \lambda\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right)d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} 2\mu(\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\lambda\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega \left(-\mu\triangle\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}} + \nabla\lambda\cdot\hat{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right)d\mathbf{x} - \int_\Omega\hat{\lambda}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_N}((-\lambda\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega(-\mu\triangle\mathbf{v} + \nabla\lambda - \rho\mathbf{g})\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} - \int_\Omega\hat{\lambda}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda}) \in \mathcal{V}^*\times L^2(\Omega)
\end{aligned}
$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Novamente, devido a que $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\lambda}$ são independentes, obtemos as equações de Euler-Lagrange utilizando os resultados fundamentais do cálculo das variações

$$\begin{cases} -\nabla\lambda + \mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ (-\lambda\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

Formulação variacional mista - velocidade/pressão

Novamente, devido a que $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\lambda}$ são independentes, obtemos as equações de Euler-Lagrange utilizando os resultados fundamentais do cálculo das variações

$$\begin{cases} -\nabla\lambda + \mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ (-\lambda\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

- A condição do divergente é obtida de forma natural mediante um multiplicador de Lagrange
- O multiplicador λ possui o significado físico da pressão p no fluido
- A análise da ortogonalidade entre espaços ficou facilitada devido a considerarmos explicitamente a restrição no Lagrangeano
- Portanto, as equações de Euler-Lagrange foram derivadas de forma mais direta

Formulação variacional para Navier-Stokes

Acrescentando o termo de aceleração no balanço de potências virtuais o problema variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(2\mu \nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{p} \operatorname{div} \mathbf{v} - p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} =$$

$$\int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \qquad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega)$$

Formulação variacional para Navier-Stokes

Acrescentando o termo de aceleração no balanço de potências virtuais o problema variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(2\mu \nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{p} \operatorname{div} \mathbf{v} - p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} =$$
$$\int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \qquad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega)$$

Integrando por partes como anteriormente, chegamos às equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

Este problema não se corresponde com a minimização de um funcional

Condições de contorno típicas em hemodinâmica

Velocidade prescrita

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- No volume (medida de ressonância magnética)
- Na parede arterial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou igual á velocidade da parede)

Condições de contorno típicas em hemodinâmica

Velocidade prescrita

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- No volume (medida de ressonância magnética)
- Na parede arterial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou igual á velocidade da parede)

Pressão conhecida

- Medida invasiva em local específico
- Para números de Reynolds em hemodinâmica a pressão é muito maior que as tensões cisalhantes
- $-p\mathbf{n} \approx \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n} = -\bar{P}\mathbf{n}$ (condição de Neumann)
- Considera-se p constante nas seções transversais escolhidas

Condições de contorno típicas em hemodinâmica

Velocidade prescrita

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- No volume (medida de ressonância magnética)
- Na parede arterial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou igual á velocidade da parede)

Vazão conhecida

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- $\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx = \bar{Q}$

Pressão conhecida

- Medida invasiva em local específico
- Para números de Reynolds em hemodinâmica a pressão é muito maior que as tensões cisalhantes
- $-p\mathbf{n} \approx \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n} = -\bar{P}\mathbf{n}$ (condição de Neumann)
- Considera-se p constante nas seções transversais escolhidas

Condições de contorno típicas em hemodinâmica

Velocidade prescrita

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- No volume (medida de ressonância magnética)
- Na parede arterial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou igual á velocidade da parede)

Vazão conhecida

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- $\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} = \bar{Q}$

Pressão conhecida

- Medida invasiva em local específico
- Para números de Reynolds em hemodinâmica a pressão é muito maior que as tensões cisalhantes
- $-p\mathbf{n} \approx \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n} = -\bar{P}\mathbf{n}$ (condição de Neumann)
- Considera-se p constante nas seções transversais escolhidas

Relação entre vazão e pressão

- Representação de resistência periférica
- $\bar{Q} = R\bar{P}$
- $-\frac{1}{R}\left(\int_{\partial\Omega_R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}\right)\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n}$
- Condição de tipo Robin com média na velocidade

Condições de contorno típicas em hemodinâmica

Velocidade prescrita

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- No volume (medida de ressonância magnética)
- Na parede arterial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou igual á velocidade da parede)

Vazão conhecida

- Em seção transversal (medida de ultrassom)
- $\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} = \bar{Q}$

Acoplamento com sistemas mais complexos

- Equações diferenciais ordinárias (0D)
- Equações diferenciais parciais (1D)
- Sistemas de equações combinadas

Pressão conhecida

- Medida invasiva em local específico
- Para números de Reynolds em hemodinâmica a pressão é muito maior que as tensões cisalhantes
- $-p\mathbf{n} \approx \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n} = -\bar{P}\mathbf{n}$ (condição de Neumann)
- Considera-se p constante nas seções transversais escolhidas

Relação entre vazão e pressão

- Representação de resistência periférica
- $\bar{Q} = R\bar{P}$
- $-\frac{1}{R}\left(\int_{\partial\Omega_R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}\right)\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n}$
- Condição de tipo Robin com média na velocidade

Prescrição da vazão

Prescrevamos uma vazão conhecida $\bar{Q}$ sobre uma fronteira $\partial\Omega_Q$, ou seja

$$\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \bar{Q} = 0$$

Prescrição da vazão

Prescrevamos uma vazão conhecida $\bar{Q}$ sobre uma fronteira $\partial\Omega_Q$, ou seja

$$\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \bar{Q} = 0$$

Utilizamos uma formulação com multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ associado à restrição, e a formulação variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p, \lambda) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(2\mu \nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{p} \operatorname{div} \mathbf{v} - p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x}$$
$$+ \left(\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \bar{Q} \right) \hat{\lambda} + \left(\int_{\partial\Omega_Q} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \right) \lambda = \int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x}$$
$$\forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\lambda}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$$

Prescrição da vazão

Integrando por partes como anteriormente, chegamos às equações de Navier-Stokes com vazão prescrita

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} = \bar{Q} & \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = -\lambda \mathbf{n} & \text{em } \partial\Omega_Q \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

O multiplicador de Lagrange λ tem o papel de ser a força necessária para garantir a vazão $\bar{Q}$

Prescrição da relação entre vazão e pressão

Consideremos um modelo de condição de contorno resistivo sobre $\partial\Omega_R$

$$\bar{Q} = R\bar{P},$$

$$-\frac{1}{R}\left(\int_{\partial\Omega_R} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dx\right)\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon)\mathbf{n}$$

Trata-se de uma condição de tipo Robin, com média na velocidade, pois a mesma relaciona a tensão e a (média da) velocidade sobre a fronteira

Prescrição da relação entre vazão e pressão

Consideremos um modelo de condição de contorno resistivo sobre $\partial\Omega_R$

$$\bar{Q} = R\bar{P},$$
$$-\frac{1}{R}\left(\int_{\partial\Omega_R} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dx\right)\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon)\mathbf{n}$$

Trata-se de uma condição de tipo Robin, com média na velocidade, pois a mesma relaciona a tensão e a (média da) velocidade sobre a fronteira

Não precisamos de multiplicador de Lagrange adicional, e a formulação variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\right)\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(2\mu\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}} - \hat{p}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - p\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}\right)d\mathbf{x}$$
$$+ \int_{\partial\Omega_R}\frac{1}{R}\left(\int_{\partial\Omega_R}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\mathbf{x}\right)\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}d\mathbf{x}$$
$$\forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{p}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega)$$

Prescrição da relação entre vazão e pressão

Integrando por partes como anteriormente, chegamos às equações de Navier-Stokes incluindo relação linear entre vazão e pressão

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = -\dfrac{1}{R} \left(\displaystyle\int_{\partial\Omega_R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx \right) \mathbf{n} & \text{em } \partial\Omega_R \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

Não existe multiplicador de Lagrange neste caso, pois a tensão em $\partial\Omega_R$ está explicitamente relacionada com a vazão, a qual não é conhecida a priori, e depende da velocidade $\mathbf{v}$

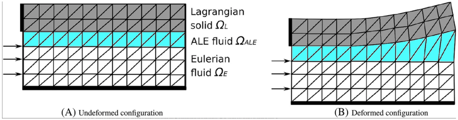
R: parâmetro que define a oposição ao escoamento (resistência) que existe no contorno $\partial\Omega_R$

Interação fluido-estrutura - domínios deformáveis

- As artérias se deformam pois a parede arterial é complacente
- A deformação implica na formação de ondas no escoamento
- O escoamento ocorre em um domínio que varia o tempo todo
- Uma forma de modelar é utilizar o domínio móvel como marco de referência
- Descrição Arbitrariamente Lagrangeana-Euleriana (ALE)

Interação fluido-estrutura - domínios deformáveis

- As artérias se deformam pois a parede arterial é complacente
- A deformação implica na formação de ondas no escoamento
- O escoamento ocorre em um domínio que varia o tempo todo
- Uma forma de modelar é utilizar o domínio móvel como marco de referência
- Descrição Arbitrariamente Lagrangeana-Euleriana (ALE)



Interação fluido-estrutura - domínios deformáveis

Na descrição Euleriana, a derivada material é

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$$

Na descrição Arbitrariamente Lagrangeana-Euleriana, ela é

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$$

onde **w** é a velocidade do marco de referência

Interação fluido-estrutura - domínios deformáveis

Na descrição Euleriana, a derivada material é

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$$

Na descrição Arbitrariamente Lagrangeana-Euleriana, ela é

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$$

onde **w** é a velocidade do marco de referência

Sobre a parede arterial $\partial\Omega_W$, a velocidade do fluido deve ser igual à velocidade da parede

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \qquad \text{em } \partial\Omega_W$$

onde $\mathbf{v}_{\text{wall}}$ pode ser conhecida a priori, ou pode ser variável incógnita

Formulação variacional em domínios móveis

Neste cenário, o problema variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w})\right) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega (2\mu \nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{p} \operatorname{div} \mathbf{v} - p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \qquad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega)$$

onde

$$\mathcal{U}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_W} = \mathbf{v}_{\text{wall}}\}$$
$$\mathcal{V}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_W} = \mathbf{0}\}$$

Formulação variacional em domínios móveis

Neste cenário, o problema variacional resulta: encontrar $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U}^* \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w})\right) \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(2\mu \nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{p}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - p\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \qquad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V}^* \times L^2(\Omega)$$

onde

$$\mathcal{U}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_W} = \mathbf{v}_{\mathrm{wall}}\}$$
$$\mathcal{V}^* = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_W} = \mathbf{0}\}$$

O sistema de equações diferenciais parciais resulta

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} & \text{em } \Omega \\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{wall}} & \text{em } \partial\Omega_W \\ (-p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^s \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

Observe que deve ser $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{\mathrm{wall}}$ em $\partial\Omega_W$

Movimento do domínio

- O domínio se deforma produto da deformação da parede arterial
- A velocidade $\mathbf{v}_{\text{wall}}$ pode ser conhecida (a partir de imagens) ou desconhecida
- Se $\mathbf{v}_{\text{wall}}$ é conhecida, então o problema é o anteriormente formulado
- Se $\mathbf{v}_{\text{wall}}$ é desconhecida, então devemos completar o sistema de equações com um modelo para o movimento da parede arterial
- Um modelo para a parede arterial pode ser escrito como segue

$$\mathbf{v}_{\text{wall}} = \mathcal{P}(\mathbf{t}_{\text{wall}}),$$

onde $\mathbf{t}_{\text{wall}}$ é a tração sobre a parede exercida pelo fluido (é desconhecida)

$$\mathbf{t}_{\text{wall}} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n} \qquad \text{em } \partial\Omega_W$$

- O operador $\mathcal{P}(\cdot)$ pode ser uma função algébrica, linear ou não linear, ou ainda pode vir definida por um outro problema variacional