Introdução à hemodinâmica computacional

Aula I

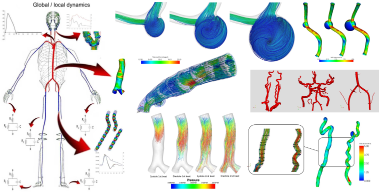
Pablo J. Blanco e Luis Alonso M. Álvarez

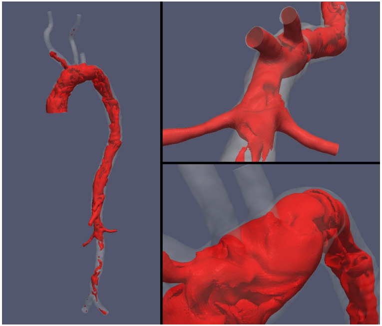
XXI Escola de Verão do LNCC

Janeiro de 2023

O quê?

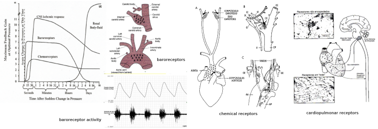
- Estudaremos a circulação do sangue
- Identificaremos fenômenos físicos associados aos fisiológicos
- Apresentaremos técnicas quantitativas baseadas na engenharia
- Destacaremos o papel das imagens médicas no desenvolvimento da medicina de precisão
- Comentaremos sobre a relação entre doenças cardiovasculares e fenômenos mecano-biológicos

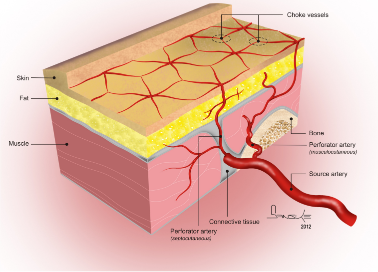




O quê?

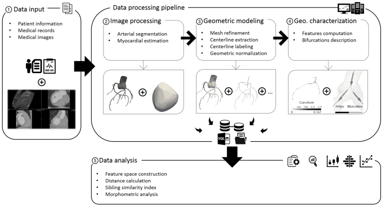
- Estudaremos a circulação do sangue
- Identificaremos fenômenos físicos associados aos fisiológicos
- Apresentaremos técnicas quantitativas baseadas na engenharia
- Destacaremos o papel das imagens médicas no desenvolvimento da medicina de precisão
- Comentaremos sobre a relação entre doenças cardiovasculares e fenômenos mecano-biológicos

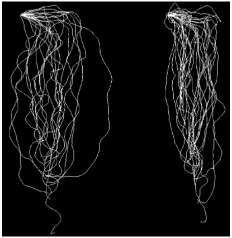


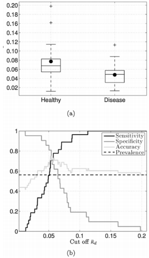


O quê?

- Estudaremos a circulação do sangue
- Identificaremos fenômenos físicos associados aos fisiológicos
- Apresentaremos técnicas quantitativas baseadas na engenharia
- Destacaremos o papel das imagens médicas no desenvolvimento da medicina de precisão
- Comentaremos sobre a relação entre doenças cardiovasculares e fenômenos mecano-biológicos

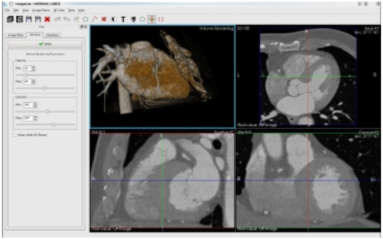


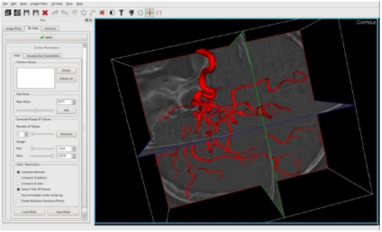




O quê?

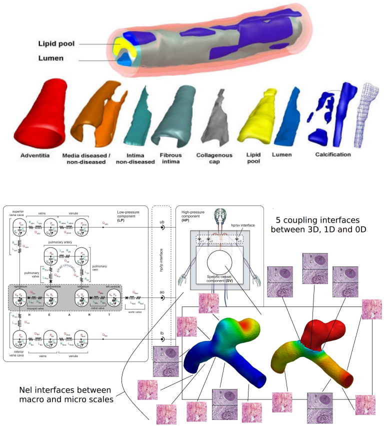
- Estudaremos a circulação do sangue
- Identificaremos fenômenos físicos associados aos fisiológicos
- Apresentaremos técnicas quantitativas baseadas na engenharia
- Destacaremos o papel das imagens médicas no desenvolvimento da medicina de precisão
- Comentaremos sobre a relação entre doenças cardiovasculares e fenômenos mecano-biológicos





O quê?

- Estudaremos a circulação do sangue
- Identificaremos fenômenos físicos associados aos fisiológicos
- Apresentaremos técnicas quantitativas baseadas na engenharia
- Destacaremos o papel das imagens médicas no desenvolvimento da medicina de precisão
- Comentaremos sobre a relação entre doenças cardiovasculares e fenômenos mecano-biológicos



Como?

- Empregaremos princípios físicos para escrever as equações fundamentais
- Utilizaremos instrumentos de modelagem avançados
- Faremos uso de técnicas numéricas de vanguarda
- Colocaremos situações práticas para visualizar os conceitos básicos
- Destacaremos a necessidade de grandes massas de dados médicos

Leis fundamentais

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \psi - \operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Como?

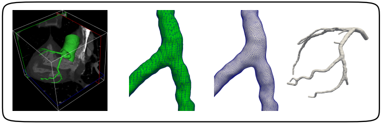
- Empregaremos princípios físicos para escrever as equações fundamentais
- Utilizaremos instrumentos de modelagem avançados
- Faremos uso de técnicas numéricas de vanguarda
- Colocaremos situações práticas para visualizar os conceitos básicos
- Destacaremos a necessidade de grandes massas de dados médicos

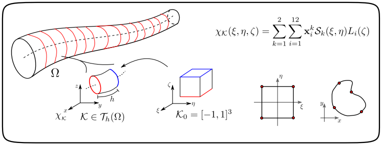
Formulações variacionais

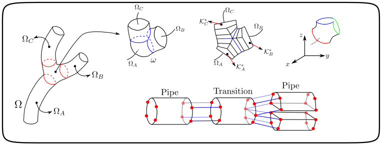
$$\int_\Omega 2\mu\nabla^s\mathbf{u}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{x} \qquad \forall\hat{\mathbf{u}}\in\mathcal{V}$$

$$\delta^2\mathcal{F}(\mathbf{u},\hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{d\tau}\delta\mathcal{F}(\mathbf{u}+\tau\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}})\Big|_{\tau=0}$$
$$= \frac{d}{d\tau}\left(\int_\Omega(2\mu(\nabla^s\mathbf{u}+\tau\nabla^s\hat{\mathbf{u}})\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{u}} - \rho\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{u}})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{x}\right)\Big|_{\tau=0}$$
$$= \int_\Omega 2\mu\nabla^s\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{x} = 2\mu\int_\Omega|\nabla^s\hat{\mathbf{u}}|^2d\mathbf{x}$$

- Empregaremos princípios físicos para escrever as equações fundamentais
- Utilizaremos instrumentos de modelagem avançados
- Faremos uso de técnicas numéricas de vanguarda
- Colocaremos situações práticas para visualizar os conceitos básicos
- Destacaremos a necessidade de grandes massas de dados médicos

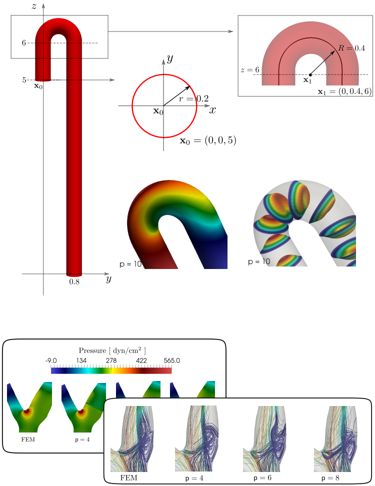






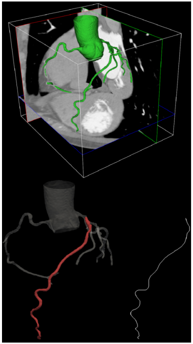
Como?

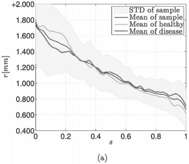
- Empregaremos princípios físicos para escrever as equações fundamentais
- Utilizaremos instrumentos de modelagem avançados
- Faremos uso de técnicas numéricas de vanguarda
- Colocaremos situações práticas para visualizar os conceitos básicos
- Destacaremos a necessidade de grandes massas de dados médicos

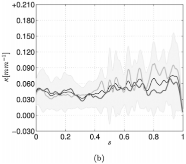


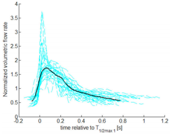
Como?

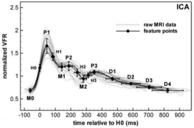
- Empregaremos princípios físicos para escrever as equações fundamentais
- Utilizaremos instrumentos de modelagem avançados
- Faremos uso de técnicas numéricas de vanguarda
- Colocaremos situações práticas para visualizar os conceitos básicos
- Destacaremos a necessidade de grandes massas de dados médicos









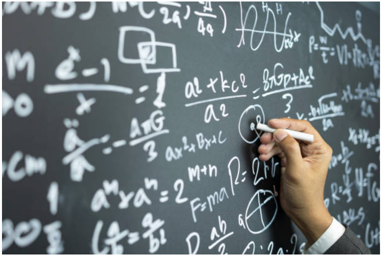


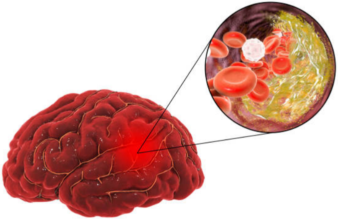
Por quê?

- Acreditamos que é necessário imprimir um caráter mecanístico à medicina
- Postulamos que muitas situações podem ser melhor quantificadas ao utilizar estas ferramentas
- Consideramos que é uma abordagem consistente com o conceito de medicina orientada a cada paciente
- Confiamos em que este tipo de pesquisa acabará retornando à população melhorando sua qualidade de vida

Por quê?

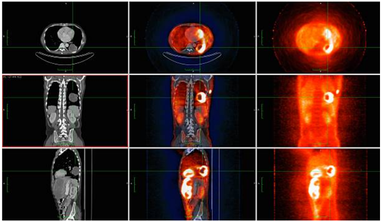
- Acreditamos que é necessário imprimir um caráter mecanístico à medicina
- Postulamos que muitas situações podem ser melhor quantificadas ao utilizar estas ferramentas
- Consideramos que é uma abordagem consistente com o conceito de medicina orientada a cada paciente
- Confiamos em que este tipo de pesquisa acabará retornando à população melhorando sua qualidade de vida





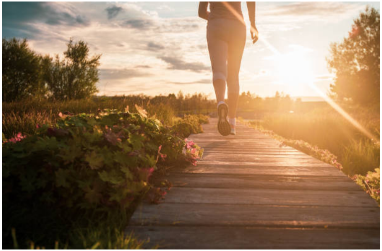
Por quê?

- Acreditamos que é necessário imprimir um caráter mecanístico à medicina
- Postulamos que muitas situações podem ser melhor quantificadas ao utilizar estas ferramentas
- Consideramos que é uma abordagem consistente com o conceito de medicina orientada a cada paciente
- Confiamos em que este tipo de pesquisa acabará retornando à população melhorando sua qualidade de vida



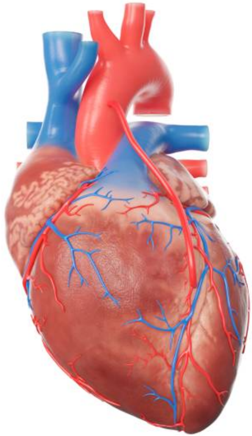
Por quê?

- Acreditamos que é necessário imprimir um caráter mecanístico à medicina
- Postulamos que muitas situações podem ser melhor quantificadas ao utilizar estas ferramentas
- Consideramos que é uma abordagem consistente com o conceito de medicina orientada a cada paciente
- Confiamos em que este tipo de pesquisa acabará retornando à população melhorando sua qualidade de vida



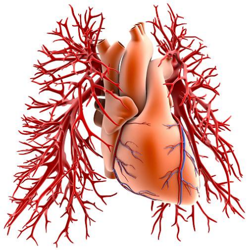
Principais componentes do sistema cardiovascular

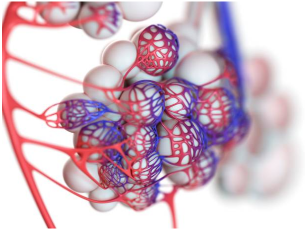
- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros



Principais componentes do sistema cardiovascular

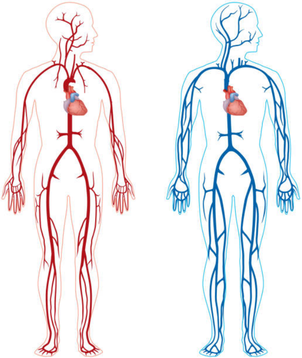
- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros





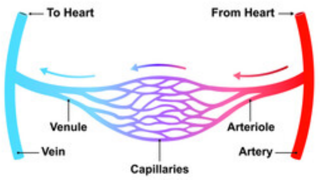
Principais componentes do sistema cardiovascular

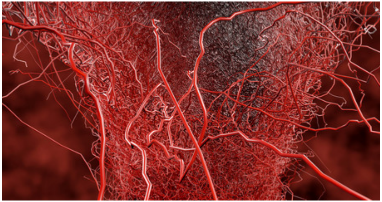
- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros



Principais componentes do sistema cardiovascular

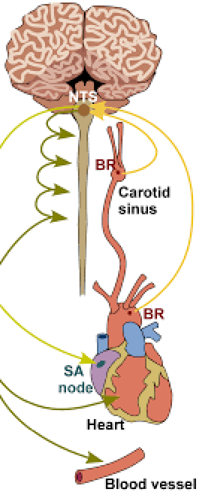
- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros





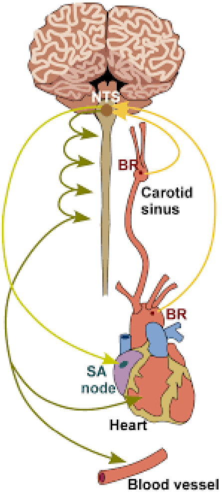
Principais componentes do sistema cardiovascular

- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros



Principais componentes do sistema cardiovascular

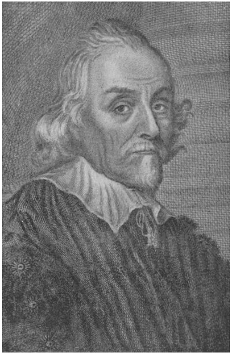
- Coração (esquerdo e direito)
- Sistema pulmonar (arterial e venoso)
- Sistema arterial
- Sistema venoso
- Microcirculação (leitos periféricos)
- Sistemas de controle
- Outros



Circulação do sangue no corpo humano

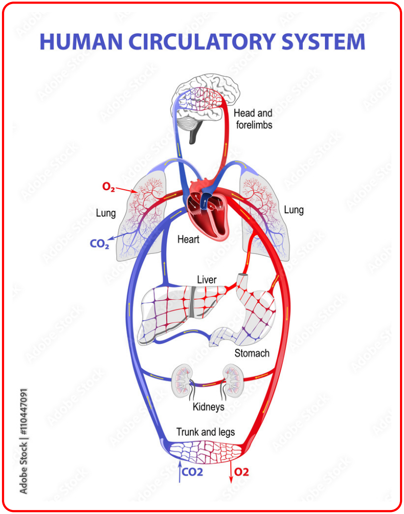
Definiu o modelo de dupla circulação fechada, com o sangue partindo do coração em direção a todas as partes do corpo, contendo sangue oxigenado no circuito arterial e não oxigenado no circuito venoso

William Harvey (1578-1657)



Circulação do sangue no corpo humano

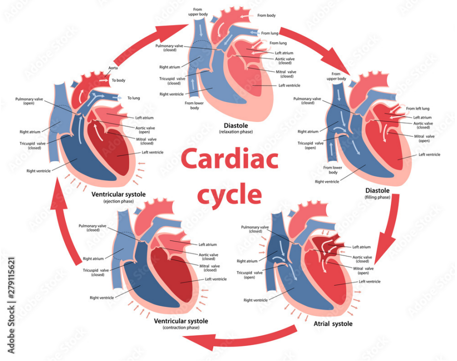
- Lado direito do coração envia sangue não oxigenado ao sistema pulmonar
- No sistema pulmonar o sangue é oxigenado
- O lado esquerdo recebe sangue oxigenado e o bombeia para dentro do sistema arterial
- O sangue alcança todos os territórios vasculares, onde o metabolismo troca oxigênio por dióxido de carbono
- O sangue não oxigenado retorna ao lado direito do coração



Características básicas do sistema cardiovascular

Fases cardíacas

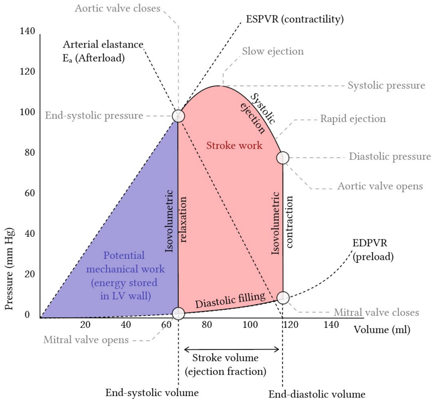
- **Sístole ventricular**: ambos os ventrículos estão contraindo, elevando a pressão e abrindo as válvulas pulmonar (dir) e aórtica (esq) e realizando a **ejeção** do sangue
- **Diástole**: A pressão começa a cair e ao equalizar as pressões ambas as válvulas fecham, e o coração realiza a fase de **relaxação**
- **Diástole**: As pressões nos ventrículos caem a tal ponto que os átrios tem maior pressão, forçando a abertura das válvulas tricúspide (dir) e mitral (esq), forçando o **preenchimento** dos ventrículos
- **Sístole atrial**: Os átrios contraem para auxiliar no preenchimento dos ventrículos
- **Sístole ventricular**: ambos os ventrículos começam a fase de **contração**, aumentando a pressão



Características básicas do sistema cardiovascular

Fases cardíacas

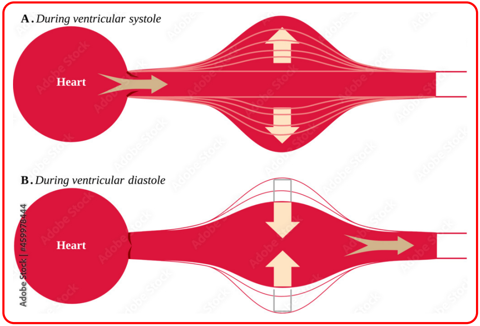
- **Sístole ventricular**: ambos os ventrículos estão contraindo, elevando a pressão e abrindo as válvulas pulmonar (dir) e aórtica (esq) e realizando a **ejeção** do sangue
- **Diástole**: A pressão começa a cair e ao equalizar as pressões ambas as válvulas fecham, e o coração realiza a fase de **relaxação**
- **Diástole**: As pressões nos ventrículos caem a tal ponto que os átrios tem maior pressão, forçando a abertura das válvulas tricúspide (dir) e mitral (esq), forçando o **preenchimento** dos ventrículos
- **Sístole atrial**: Os átrios contraem para auxiliar no preenchimento dos ventrículos
- **Sístole ventricular**: ambos os ventrículos começam a fase de **contração**, aumentando a pressão



Características básicas do sistema cardiovascular

Efeito Windkessel

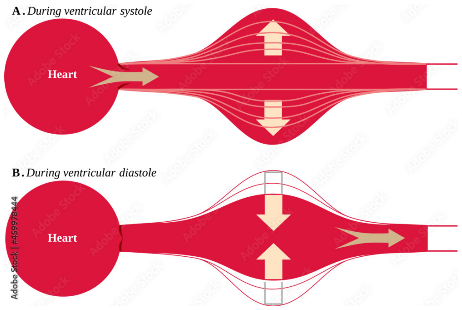
- Modelo simplificado do acoplamento coração-vaso
- O coração contrai por fases, repentinamente, ou seja que se comporta como uma bomba intermitente
- Ao ser empurrado para dentro do vaso, o sangue eleva sua pressão e provoca uma força contra a parede vascular
- A distenção do vaso causa um acúmulo de sangue dentro dele
- Nem todo o sangue que entra no vaso sai de forma instantânea
- O coração relaxa, e o vaso retornando ao seu estado inicial, impulsionando o sangue acumulado



Características básicas do sistema cardiovascular

Efeito Windkessel

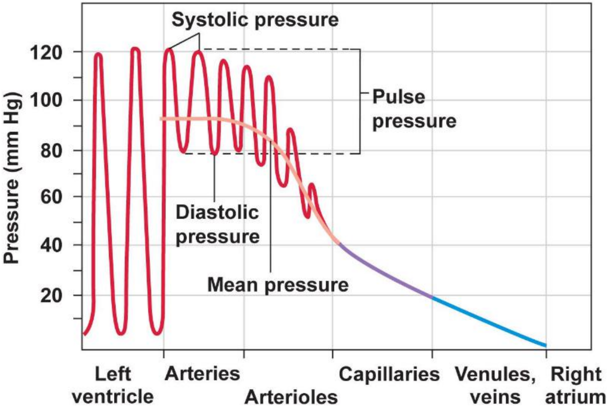
- Modelo simplificado do acoplamento coração-vaso
- O coração contrai por fases, repentinamente, ou seja que se comporta como uma bomba intermitente
- Ao ser empurrado para dentro do vaso, o sangue eleva sua pressão e provoca uma força contra a parede vascular
- A distenção do vaso causa um acúmulo de sangue dentro dele
- Nem todo o sangue que entra no vaso sai de forma instantânea
- O coração relaxa, e o vaso retornando ao seu estado inicial, impulsionando o sangue acumulado



Isto causa um efeito de amortecimento da intermitência do suprimento sanguíneo aos órgãos

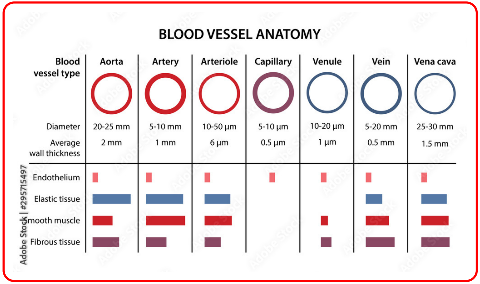
Características básicas do sistema cardiovascular

Pressão sanguínea no sistema cardiovascular



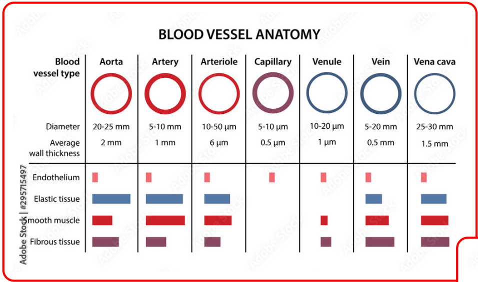
Características básicas do sistema cardiovascular

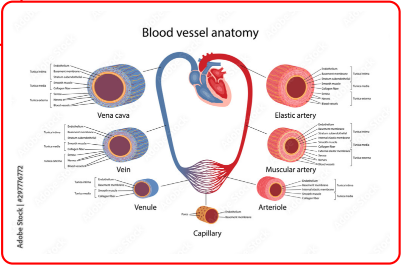
Características anatômicas do sistema cardiovascular



Características básicas do sistema cardiovascular

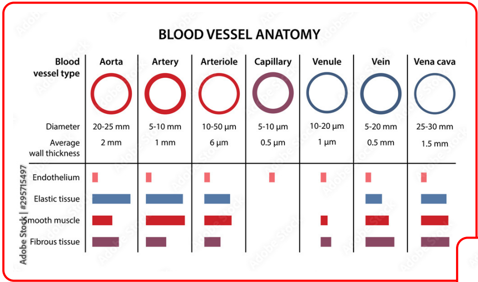
Características anatômicas do sistema cardiovascular

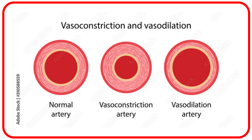


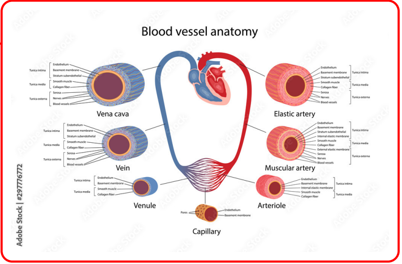


Características básicas do sistema cardiovascular

Características anatômicas do sistema cardiovascular





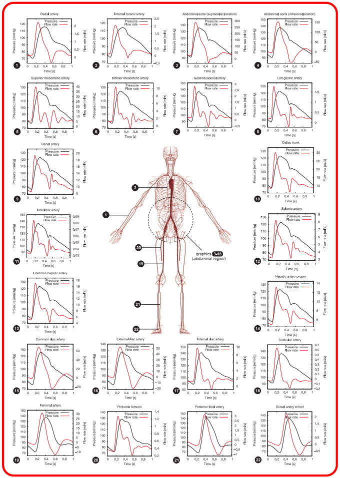


Características básicas do sistema cardiovascular

Características anatômicas do sistema cardiovascular

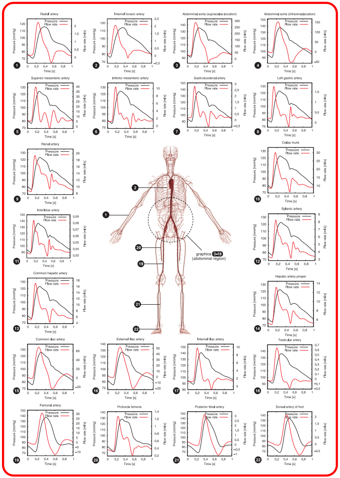
Vaso	Diâmetro [cm]	Quantidade	Área [cm^2]	Espessura [cm]	$\frac{\text{Diâmetro}}{\text{Espessura}}$
Aorta	2.5	1	4.9	0.2	12.5
Artérias	0.4	2000	250	0.1	4.0
Arteríolas	$3 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{7}$	400	$2 \cdot 10^{-3}$	1.5
Capilares	$6 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{10}$	4500	$1 \cdot 10^{-4}$	6.0
Vênulas	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{9}$	4000	$2 \cdot 10^{-4}$	10.0
Veias	0.5	2000	1000	0.05	10.0
Veia cava	3.0	2	14	0.15	20.0

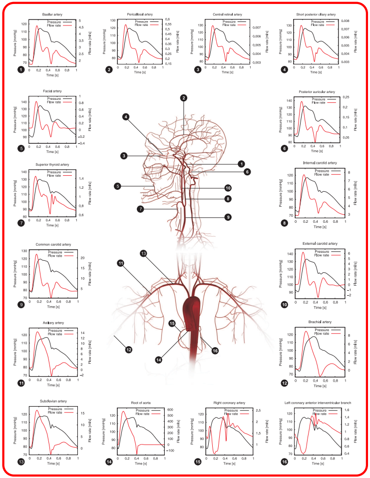
Hemodinâmica no corpo humano (simulação)



Características básicas do sistema cardiovascular

Hemodinâmica no corpo humano (simulação)





Características básicas do sistema cardiovascular

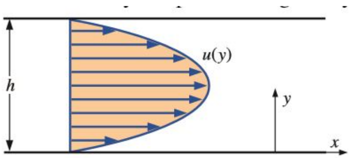
Conceitos básicos: quantidades físicas

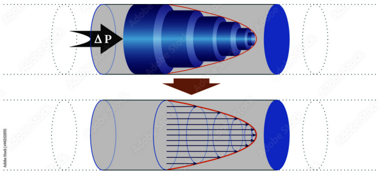
- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] ($= 0.1$[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] ($= 0.1$[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] ($= 0.1$[Pa s])

Conceitos básicos: quantidades físicas

- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] (= 0.1[Pa s])

Velocidade – Vazão

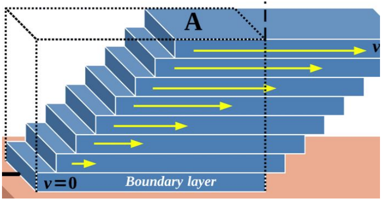




Conceitos básicos: quantidades físicas

- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] (= 0.1[Pa s])

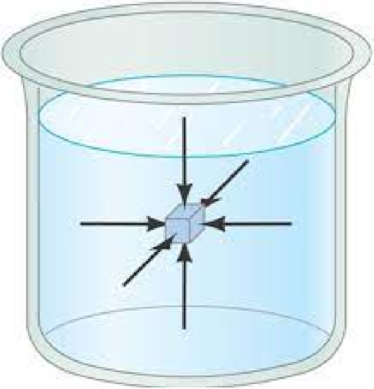
Taxa de deformação



Conceitos básicos: quantidades físicas

- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] (= 0.1[Pa s])

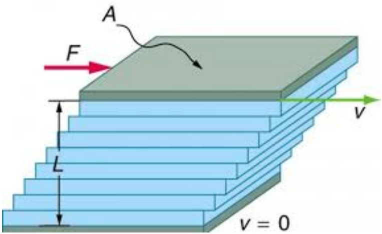
Pressão



Conceitos básicos: quantidades físicas

- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] (= 0.1[Pa s])

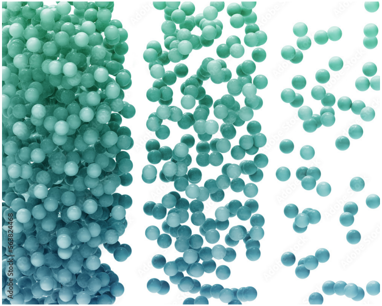
Tensão de cisalhamento



Conceitos básicos: quantidades físicas

- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Tensão [dyn/cm^2] (= 0.1[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] (= 0.1[Pa s])

Massa específica



Razão entre massa e volume

Conceitos básicos: quantidades físicas

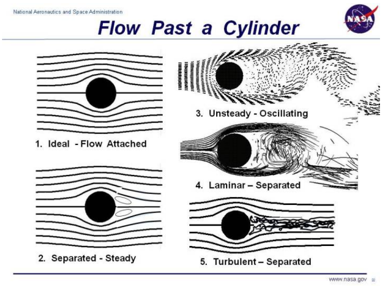
- Comprimento [cm]
- Tempo [s]
- Massa [g]
- Volume [cm^3]
- Velocidade [cm/s]
- Vazão [cm^3/s]
- Taxa de deformação [1/s]
- Pressão [$\mathrm{dyn}/\mathrm{cm}^2$] ($= 0.1$[Pa])
- Tensão [$\mathrm{dyn}/\mathrm{cm}^2$] ($= 0.1$[Pa])
- Massa específica [g/cm^3]
- Viscosidade [g/cm/s] ($= 0.1$[Pa s])

Viscosidade

Relação entre tensão
e taxa de deformação

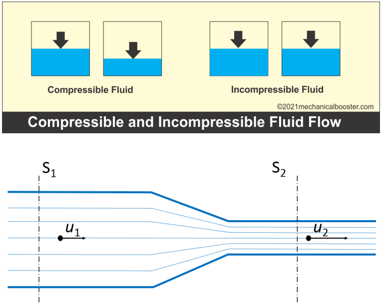
Tipos de escoamento

- Viscoso ou invíscido
- Estacionário ou transiente
- Laminar ou turbulento
- Incompressível ou compressível
- Interno ou externo
- Desenvolvido ou não desenvolvido



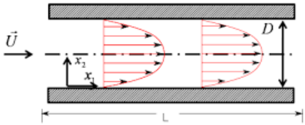
Tipos de escoamento

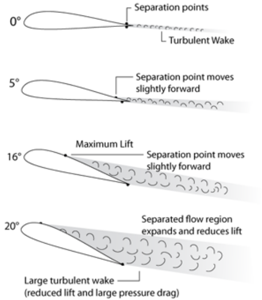
- Viscoso ou invíscido
- Estacionário ou transiente
- Laminar ou turbulento
- Incompressível ou compressível
- Interno ou externo
- Desenvolvido ou não desenvolvido



Tipos de escoamento

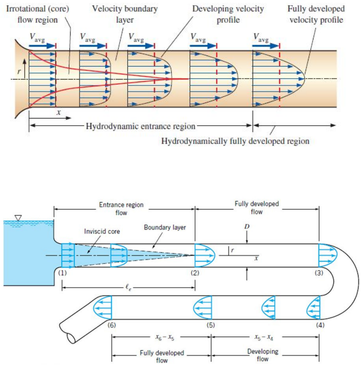
- Viscoso ou invíscido
- Estacionário ou transiente
- Laminar ou turbulento
- Incompressível ou compressível
- Interno ou externo
- Desenvolvido ou não desenvolvido





Tipos de escoamento

- Viscoso ou invíscido
- Estacionário ou transiente
- Laminar ou turbulento
- Incompressível ou compressível
- Interno ou externo
- Desenvolvido ou não desenvolvido



Caracterização dos escoamentos

A análise dimensional nos entrega dois grupos adimensionais (dentre outros) bem característicos na hemodinâmica computacional

Reynolds number

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho D V}{\mu}$$

Womersley number

$$\mathrm{Wo} = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}}$$

- D: diâmetro do tubo
- ρ: massa específica do sangue
- μ: viscosidade do sangue
- V: velocidade característica (ex. valor médio)
- ω: frequência característica (frequência de oscilação do escoamento)

Caracterização dos escoamentos

Espectro de valores já medidos e estimados

	Re
Aorta	3000
Artérias	100–850
Arteríolas	1
Capilares	$2 \cdot 10^{-3}$
Vênulas	0.01
Veias	150
Vena cava	3000

	Wo
Aorta	13.83
Artérias	2.21
Arteríolas	0.0166
Capilares	$4.43 \cdot 10^{-3}$
Vênulas	0.011
Veias	2.77
Vena cava	16.6

Conceitos derivados

Definimos a resistência como segue

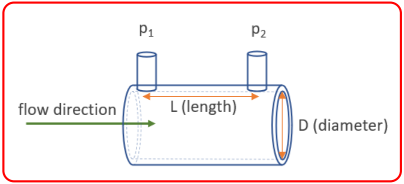
$$\Delta P = RQ$$

Cilindro rígido, escoamento desenvolvido, estacionário e laminar

$$R = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

- ΔP: diferença de pressão entre entrada e saída
- Q: vazão (massa por unidade de volume) através da área transversal
- ρ: massa específica
- μ: viscosidade
- D: diâmetro do tubo
- L: comprimento do tubo

Resistência (R)



Conceitos derivados

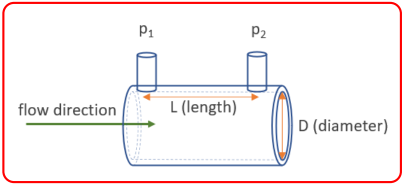
Definimos a inertância como segue

$$\Delta P = L \frac{dQ}{dt}$$

Inertância (L)

Cilindro rígido, escoamento desenvolvido e laminar

$$L = \frac{4 \rho L}{\pi D^2}$$



- ΔP: diferença de pressão entre entrada e saída
- Q: vazão (massa por unidade de volume) através da área transversal
- ρ: massa específica
- D: diâmetro do tubo
- L: comprimento do tubo

Conceitos derivados

Definimos a complacência como segue

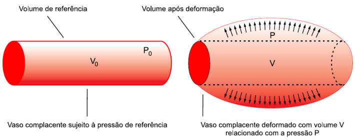
$$\Delta V = C \Delta P$$

Cilindro elástico, pressão uniforme

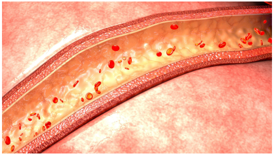
$$C = \frac{3}{16} \frac{\pi D^3 L}{Eh}$$

- ΔP: diferença de pressão entre estado inicial e final
- ΔV: variação de volume por aumento/diminuição do tamanho
- E: elasticidade da parede do vaso
- h: espessura da parede do vaso
- D: diâmetro do tubo
- L: comprimento do tubo

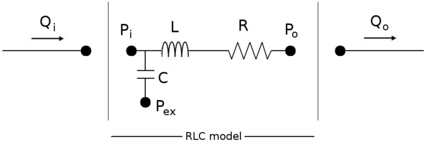
Complacência (C)



Modelo de parâmetros condensados



$\Longrightarrow$



No modelo de compartimentos (ou parâmetros condensados) as equações ficam

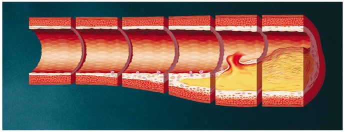
$$L\frac{dQ_o}{dt} + RQ_o = P_i - P_o$$

$$C\frac{d}{dt}(P_i - P_{\text{ex}}) = Q_i - Q_o$$

- Parâmetros R, L, C, P_{ex} (função do tempo, não lineares, etc.)
- Condições *de contorno* $Q_i(t)$ e $P_o(t)$
- Incógnitas $Q_o(t)$ e $P_i(t)$

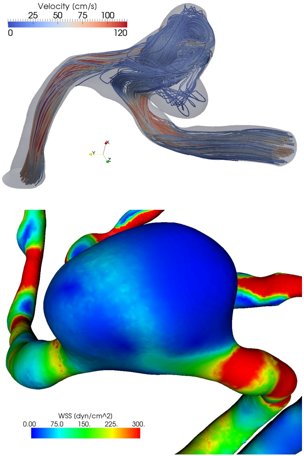
Além dos compartimentos

- O escoamento sanguíneo ocorre no espaço 3D
- Os modelos de compartimentos (0D) removem a noção espacial
- Fenômenos associados a muitas doenças são inerentemente 3D
- Curvaturas, obstruções, dentre outros representam desafios para a modelagem 0D
- Muitas quantidades físicas não são bem representadas por modelos 0D



Além dos compartimentos

- O escoamento sanguíneo ocorre no espaço 3D
- Os modelos de compartimentos (0D) removem a noção espacial
- Fenômenos associados a muitas doenças são inerentemente 3D
- Curvaturas, obstruções, dentre outros representam desafios para a modelagem 0D
- Muitas quantidades físicas não são bem representadas por modelos 0D

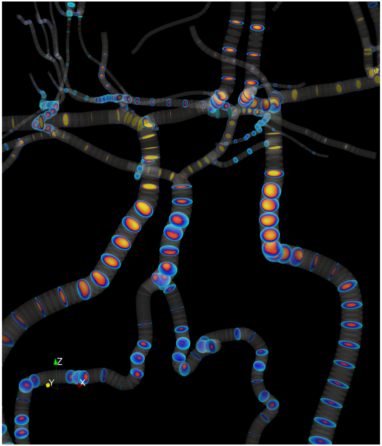


Além dos compartimentos

- O escoamento sanguíneo ocorre no espaço 3D
- Os modelos de compartimentos (0D) removem a noção espacial
- Fenômenos associados a muitas doenças são inerentemente 3D
- Curvaturas, obstruções, dentre outros representam desafios para a modelagem 0D
- Muitas quantidades físicas não são bem representadas por modelos 0D

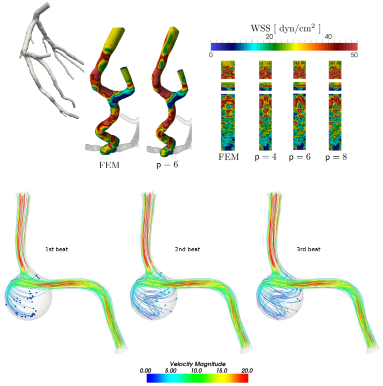
Além dos compartimentos

- O escoamento sanguíneo ocorre no espaço 3D
- Os modelos de compartimentos (0D) removem a noção espacial
- Fenômenos associados a muitas doenças são inerentemente 3D
- Curvaturas, obstruções, dentre outros representam desafios para a modelagem 0D
- Muitas quantidades físicas não são bem representadas por modelos 0D



Além dos compartimentos

- O escoamento sanguíneo ocorre no espaço 3D
- Os modelos de compartimentos (0D) removem a noção espacial
- Fenômenos associados a muitas doenças são inerentemente 3D
- Curvaturas, obstruções, dentre outros representam desafios para a modelagem 0D
- Muitas quantidades físicas não são bem representadas por modelos 0D



Conceitos básicos da mecânica dos fluidos

- Descrição Lagrangeana: partículas (no contínuo) como marco de referência

$$F(t, \mathbf{X}) \quad t: \text{ tempo} \quad \mathbf{X}: \text{ (posição da) partícula}$$

- Descrição Euleriana: espaço (fixo ou móvel) como marco de referência

$$f(t, \mathbf{x}) \quad t: \text{ tempo} \quad \mathbf{x}: \text{ posição espacial}$$

- Transformação por meio da função de movimento: indica qual a posição do espaço $\mathbf{x}$ ocupada pela partícula $\mathbf{X}$ no tempo t

$$\mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{X})$$

- Em geral

$$f(t, \mathbf{x}) = f(t, \phi(t, \mathbf{X})) = F(t, \mathbf{X})$$

Conceitos básicos da mecânica dos fluidos

- ρ: massa específica

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \rho(t, \mathbf{x})\end{aligned}$$

- $\mathbf{v}$: velocidade

$$\begin{aligned}\mathbf{v} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad \to \quad v_i(t, \mathbf{x}) \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

- ε: taxa de deformação

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^{3\times 3} \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x}) \quad \to \quad \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad i, j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Conceitos básicos da mecânica dos fluidos

- p: pressão

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto p(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{\sigma}$: tensão de Cauchy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^{3\times 3} \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) \quad \to \quad \sigma_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

- μ: viscosidade

  Propriedade constitutiva do fluido que relaciona a tensão com a taxa de deformação

Conceitos básicos da mecânica dos fluidos

- $\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$: aceleração, derivada material da velocidade (derivada mantendo fixa as partículas)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) \quad \to \quad a_i(t, \mathbf{x}) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \quad \to \quad \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

- ε: taxa de deformação

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad \to \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Conceitos básicos da mecânica dos fluidos

- Comportamento constitutivo: determina a relação entre taxa de deformação e tensão
- O sangue pode ser considerado um fluido Newtoniano em vasos de grande porte (comparado com tamanho de hemácias)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

onde

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

- Decomposição hidrostática/desviadora da tensão

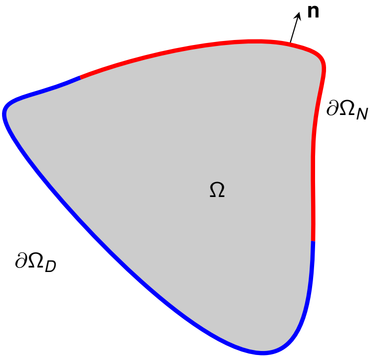
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^H + \boldsymbol{\sigma}^D$$

$$\boldsymbol{\sigma}^H = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}$$

onde

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{I} = \sigma_{ii}$$

Domínio e fronteira



- $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$, **n**: normal exterior
- $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$\partial\Omega_D$: fronteira de Dirichlet

$\partial\Omega_N$: fronteira de Neumann

Conservação da massa

- Para um meio contínuo em geral, vale o seguinte

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \mathbf{v} = 0$$

- Se o escoamento é incompressível (o sangue pode ser considerado incompressível) temos

$$\rho = \text{constante}$$

- Portanto

$$\mathrm{div} \, \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Conservação do momento linear

- Para um meio contínuo em geral, vale o seguinte

$$\rho\mathbf{a} = \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g}$$

- Observando que temos uma descrição Euleriana, e um fluido Newtoniano (μ constante), resulta

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}) = -\nabla p + 2\mu\operatorname{div}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$$

- E ainda

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) = \frac{1}{2}(\triangle\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}))$$

Conservação do momento linear

- Portanto

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu(\triangle\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v})) + \rho\mathbf{g}$$

- Para um escoamento incompressível $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, então

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu\triangle\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i \quad i = 1, 2, 3$$

Equações de Navier-Stokes

- Considerando um escoamento incompressível, de um fluido Newtoniano, temos

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \qquad & \text{em } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad & \text{em } (0, T) \times \Omega \end{aligned}$$

- Temos quatro incógnitas $(\mathbf{v}, p) = (v_1, v_2, v_3, p)$ e quatro equações
- O sistema deve ser complementado com condições iniciais

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega$$

- E com condições de contorno sobre a fronteira

Equações de Navier-Stokes

- Dividimos a fronteira em $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, com $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$
- $\partial\Omega_D$: fronteira com condições de Dirichlet

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x}) \quad \text{em } (0,T) \times \partial\Omega_D$$

  onde $\bar{\mathbf{v}}$ é um campo de velocidade conhecido
- $\partial\Omega_N$: fronteira com condições de Neumann

$$(-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T))\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(t,\mathbf{x}) \quad \text{em } (0,T) \times \partial\Omega_N$$

  onde $\bar{\mathbf{t}}$ é um campo de tração conhecido
- Outro tipo de condição de contorno é o de Robin ($\partial\Omega_R$)

$$\alpha\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) + (-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T))\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(t,\mathbf{x}) \quad \text{em } (0,T) \times \partial\Omega_R$$

Comentários sobre a incompressibilidade

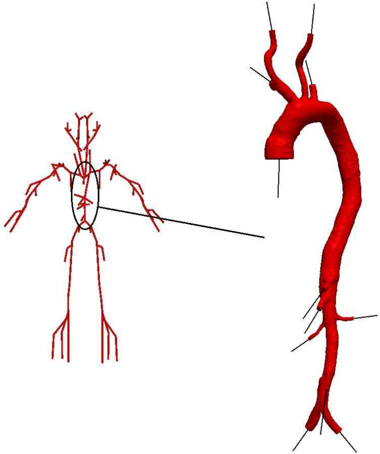
- A condição $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ implica que a informação se propaga infinitamente rápido, o que não é verdade, mas é uma hipótese razoável em hemodinâmica
- Não é preciso informar condição inicial para a pressão, por ser um problema de meio incompressível
- Se se prescrevem condições de contorno de Dirichlet em toda a fronteira ($\partial\Omega \equiv \partial\Omega_D$) então a pressão fica definida a menos de um valor constante
- Cada equação de momento linear corresponde a uma componente da velocidade, e a equação da massa é chamada de **equação da pressão**, embora ela não apareça ali
- Ao ser um meio incompressível, o sistema resultante possui características de problema de ponto de sela

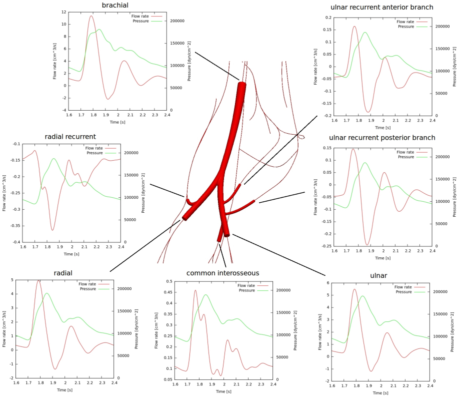
Especificidades do escoamento sanguíneo

- Em hemodinâmica computacional, o domínio Ω é o sistema cardiovascular inteiro, fechado
- A definição da fronteira $\partial\Omega$ depende do problema específico a ser modelado
- A definição das condições de contorno são um dos maiores problemas na hemodinâmica computacional
- Em hemodinâmica nós conhecemos valores parciais destas informações no contorno
  - Velocidade em alguma fronteira (ressonância magnética)
  - Velocidade da parede arterial (ressonância magnética ou ultrassom)
  - Vazão através de uma artéria (ultrassom)
  - Pressão média em alguma seção transversal das artérias (catéter)
- Os contornos, em muitos casos, são artificialmente criados ao modelar um problema específico

Especificidades do escoamento sanguíneo

Contorno lateral: parede arterial





Contornos artificiais: seções transversais de entrada e saída

Problema de Stokes estacionário

- Consideremos um escoamento cujo número de Reynolds é desprezível, ou seja

$$\mathrm{Re} \approx 0$$

- Nesse caso, podemos negligenciar as acelerações convectivas nas equações de Navier-Stokes
- No caso estacionário resulta

$$\begin{aligned} -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 && \text{em } \Omega \end{aligned}$$

Problema de Stokes estacionário

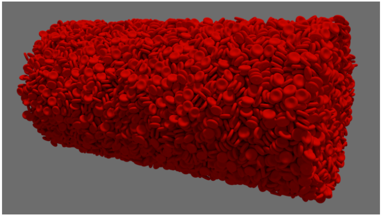
- Assim, o problema, incluindo as condições de contorno, resulta

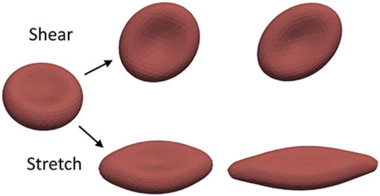
$$\begin{cases} -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} & \text{em } \partial\Omega_D \\ (-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T))\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases}$$

- O nosso próximo passo é escrever este problema em um formato variacional (poderíamos ter feito isso desde o início)
- Veremos que o sistema de equações acima é uma consequência da formulação variacional que descreve este problema

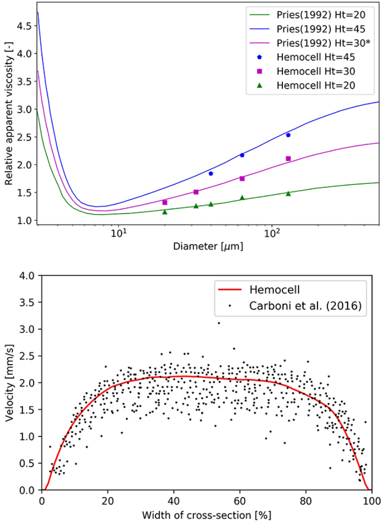
Comportamento reológico do sangue

- A presença de hemácias altera o comportamento do sangue quando as escalas espaciais são comparáveis
- As hemácias estão em suspensão no plasma, e as mesmas possuem propriedades estruturais
- Em vasos pequenos, a viscosidade aparente (propriedade emergente) depende do diâmetro e do hematócrito (% de hemácias)
- Quando a taxa de deformação é baixa, as hemácias se agregam, formando pacotes de hemácias agregadas (*rouleaux*)
- A viscosidade depende então da taxa de deformação, pois esta desmonta os *rouleaux*





- A presença de hemácias altera o comportamento do sangue quando as escalas espaciais são comparáveis
- As hemácias estão em suspensão no plasma, e as mesmas possuem propriedades estruturais
- Em vasos pequenos, a viscosidade aparente (propriedade emergente) depende do diâmetro e do hematócrito (% de hemácias)
- Quando a taxa de deformação é baixa, as hemácias se agregam, formando pacotes de hemácias agregadas (*rouleaux*)
- A viscosidade depende então da taxa de deformação, pois esta desmonta os *rouleaux*



Comportamento reológico do sangue

- A presença de hemácias altera o comportamento do sangue quando as escalas espaciais são comparáveis
- As hemácias estão em suspensão no plasma, e as mesmas possuem propriedades estruturais
- Em vasos pequenos, a viscosidade aparente (propriedade emergente) depende do diâmetro e do hematócrito (% de hemácias)
- Quando a taxa de deformação é baixa, as hemácias se agregam, formando pacotes de hemácias agregadas (*rouleaux*)
- A viscosidade depende então da taxa de deformação, pois esta desmonta os *rouleaux*