

NOTA: Desprecie el efecto de los codos en el tramo de línea de interconexión de ambos circuitos.

*Respuesta:*

- a) Se trata de un circuito recíproco. La justificación se basa en que se trata de un circuito lineal y pasivo en el que el medio (nos estamos refiriendo al medio dieléctrico del sustrato empleado) es recíproco. Para que un medio sea no recíproco (no se cumpla la propiedad de reciprocidad), es necesario que su permitividad eléctrica y/o permeabilidad magnética vengan dadas por magnitudes tensoriales (matrices en su representación algebraica) no simétricas. En la práctica, el medio no recíproco por excelencia a frecuencias de microondas es aquel hecho con ferritas. Las ferritas tienen un comportamiento en frecuencias de microondas que se modela con una representación matricial para la permeabilidad magnética que es compleja y hermítica (pero no simétrica).

Nótese que el hecho de que el circuito sea simétrico respecto a todas sus puertas no tiene ninguna relevancia en el hecho de que el circuito sea recíproco. De este modo, tomando como ilustración el circuito divisor en anillo de la Figura 1, podemos afirmar que el circuito es recíproco independientemente de que las longitudes entre las puertas 1 y 2, entre las puertas 2 y 3, y entre las puertas 3 y 1, fueran cualesquiera.

La consecuencia de la reciprocidad es la simetría de la matriz de parámetros  $S$ ,  $[S]$ , es decir,  $S_{ji} = S_{ij}$ ,  $\forall i, j, i \neq j$ . De este modo,  $[S]$  queda determinada si se conoce su triangular superior o inferior. De este modo, podemos escribir:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

- b) Es sabido que un circuito de tres puertas, recíproco, y sin pérdidas (como es el de la figura) no puede tener todas sus puertas adaptadas. Por otro lado, la simetría del circuito de la Figura 1 obliga a que se cumpla:  $S_{11} = S_{22} = S_{33}$ . Si se diera que  $S_{11} = 0$ , se tendría que cumplir (por simetría) que  $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$  que contradice la afirmación primera sobre circuitos de tres puertas. Por lo tanto, concluimos que es imposible que se cumpla  $S_{11} = 0$  en el circuito de la Figura 1. Como consecuencia no hay ningún valor de  $Z_c$  que haga posible que  $S_{11} = 0$ .

EXPLICACIÓN COMPLEMENTARIA: El razonamiento anterior es el más general y el recomendable. Es válido para cualquier divisor de tres puertas sin pérdidas simétrico. Otra forma de obtener la respuesta, pero válida sólo para el circuito de tres puertas de la Figura 1, se basa en deducir el circuito equivalente visto desde la puerta 1 con el resto de puertas cargadas con la impedancia de referencia  $Z_0$ .

Atendiendo a la Figura 5.A, el coeficiente de reflexión a la entrada de la puerta 1 es:

$$\Gamma = \frac{Z_x/2 - Z_0}{Z_x/2 + Z_0} = \frac{Z_x - 2Z_0}{Z_x + 2Z_0}$$

por lo que será nulo si y solo si  $Z_x = 2Z_0$ .

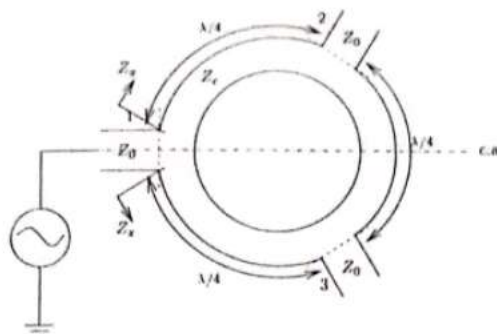


Figura 5.a

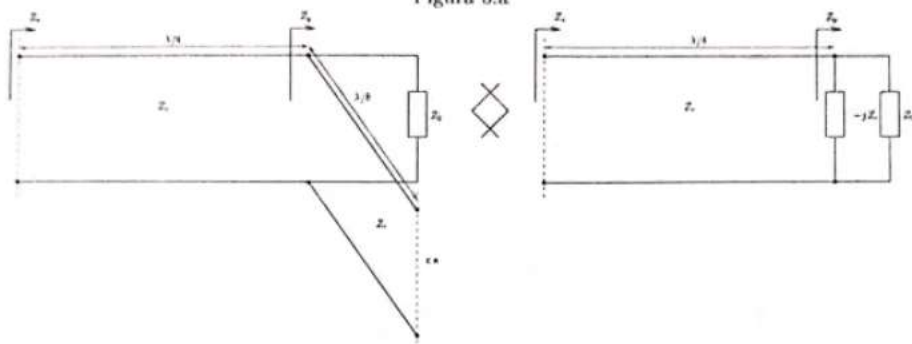


Figura 5.b

Del circuito equivalente de la Figura 5.b se deduce claramente que no hay valor de  $Z_c$  posible que haga que  $Z_x$  sea real, dado que eso implicaría que la impedancia de carga del tramo  $\lambda/4$ ,  $Z_y$ , fuera real lo que es obviamente imposible.

Siendo más precisos, diremos que no hay valor [real] de  $Z_c$  que haga que  $Z_x$  sea real. Puede comprobarse que para  $Z_c$  compleja existen soluciones que hacen  $Z_x$  real, y más concretamente,  $Z_x = 2Z_0$ . Sin embargo, una solución compleja de la impedancia característica en este contexto debe rechazarse dado que implica fuertes pérdidas en la estructura de transmisión. Nótese que si hay pérdidas nada impide a un circuito de tres puertos recíproco tener todas sus puertas adaptadas.

- c) Dada la simetría del circuito, basta con excitar uno de los puertos para conocer todos los coeficientes  $S_{ji}$ . Por ejemplo, si excitamos el puerto 1, obtenemos  $S_{j1}$   $j = 1 \dots 3$ . Por simetría del circuito, deducimos que (1) puede escribirse:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{11} & S_{21} \\ S_{31} & S_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (2)$$

De este modo,  $[S]$  queda en función de sólo dos coeficientes;  $S_{11}$  y  $S_{21}$ , en este caso. Además hay ciertas relaciones entre los mencionados dos coeficientes ( $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ) dado que la matriz  $[S]$  de (2) debe ser unitaria, tal y como corresponde a un circuito sin pérdidas. Podemos calcular  $S_{11}$  y  $S_{21}$  y comprobar *a posteriori* que  $[S]$  según (2) es unitaria.

El cálculo de  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  puede hacerse fácilmente empleando el plano de simetría que se indica en la Figura 6.

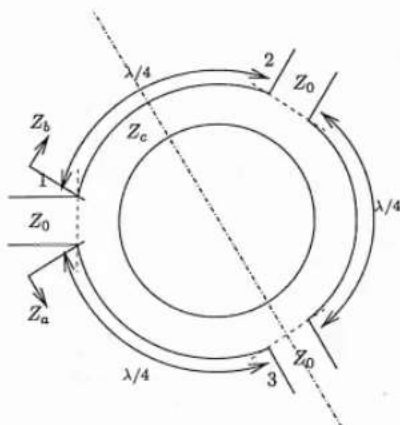


Figura 6

Haciendo uso de las excitaciones par e impar (véase la Figura 7), obtenemos  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  de forma sencilla a partir de coeficientes de reflexión:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\Gamma_e/2 + \Gamma_o/2}{1/2 + 1/2} = \frac{\Gamma_e + \Gamma_o}{2} \quad (3)$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{\Gamma_e/2 - \Gamma_o/2}{1/2 + 1/2} = \frac{\Gamma_e - \Gamma_o}{2} \quad (4)$$

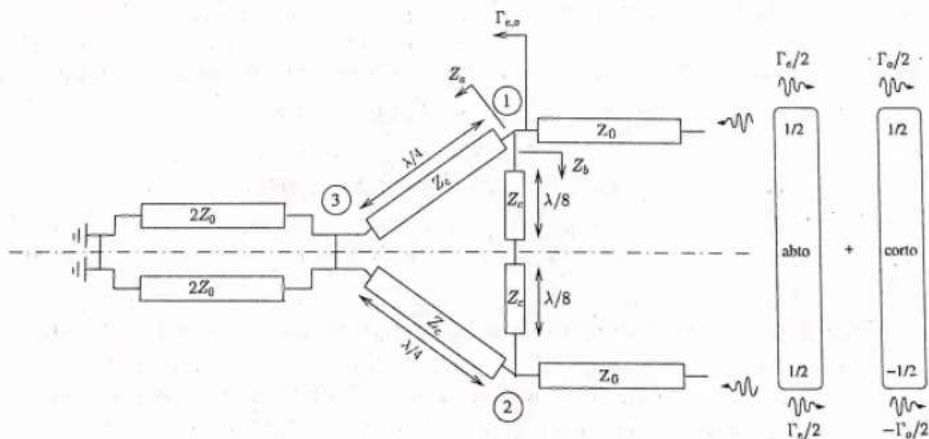


Figura 7

Los coeficientes de reflexión se calculan a partir de la impedancia vista en la puerta 1 con excitación par,  $Z_{1e}$ , e impar,  $Z_{2e}$ . Dado que la impedancia es el paralelo de la vista en la línea de  $\lambda/4$  y en el stub de  $\lambda/8$ , trabajamos con admitancias, que denominamos con  $Y$  y sus correspondientes subíndices.

De este modo, para el caso de excitación par,  $Y_{1e} = Y_a^e + Y_b^e$ . Los valores  $Y_a^e$ ,  $Y_b^e$  normalizados respecto a  $Y_0 = 1/Z_0$  son:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_a^e &= \frac{\bar{Y}_c^2}{1/2} = 1 \\ \bar{Y}_b^e &= j\bar{Y}_c = j/\sqrt{2}\end{aligned}$$

donde se ha sustituido el valor de  $\bar{Y}_c = 1/\sqrt{2}$ . Nótese que  $Y_b$  en este caso es la impedancia de un stub de  $\lambda/8$  terminado en circuito abierto (véase la Figura 8.a; nótese que la impedancia es normalizada a la de la línea,  $Y_c$  en este caso)

Análogamente, para el caso impar se tiene  $Y_{1o} = Y_a^o + Y_b^o$ , donde

$$\begin{aligned}\bar{Y}_a^o &= 0 \\ \bar{Y}_b^o &= -j\bar{Y}_c = -j/\sqrt{2}\end{aligned}$$

Con la excitación impar hay un cortocircuito en la puerta 3 lo que se convierte en un circuito abierto a la entrada de la línea  $\lambda/4$  de la puerta 1 y, por tanto, su impedancia es infinita (su admitancia nula). Nótese que  $Y_b$  en este caso es la impedancia de un stub de  $\lambda/8$  terminado en circuito abierto (véase la Figura 8.b)

FIGURA 8:A

FIGURA 8:B

Con todo ello, se pueden calcular los coeficiente de reflexión a la entrada de la puerta 1,  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_o$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_e &= -\frac{Y_{1e} - Y_0}{Y_{1e} + Y_0} = -\frac{\bar{Y}_{1e} - 1}{\bar{Y}_{1e} + 1} = -\frac{j}{2\sqrt{2} + j} = \frac{1}{3} \angle -109.47^\circ \\ \Gamma_o &= -\frac{Y_{1o} - Y_0}{Y_{1o} + Y_0} = -\frac{\bar{Y}_{1o} - 1}{\bar{Y}_{1o} + 1} = \frac{\sqrt{2} + j}{\sqrt{2} - j} = \frac{1 + j2\sqrt{2}}{3} = 1 \angle 70.53^\circ\end{aligned}$$

Nótese el signo “-” dado que se calculan los coeficiente de reflexión en impedancia

Combinando los resultados anteriores con (3), (4), se obtiene:

$$S_{11} = \frac{\Gamma_e + \Gamma_o}{2} = \frac{1 + j\sqrt{2}}{5 - j\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \angle 70.53^\circ \quad (5)$$

$$S_{21} = \frac{\Gamma_e - \Gamma_o}{2} = -2 \frac{1 + j\sqrt{2}}{5 - j\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \angle -109.47^\circ \quad (6)$$

De este modo, la matriz de parametros  $S$  (respecto de  $Z_0$ ) del circuito divisor de la Figura 2 con  $Z_c = \sqrt{2}Z_0$  es:

$$[S] = \frac{1 + j\sqrt{2}}{5 - j\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que  $[S]$  es unitaria tal y como corresponde a un circuito sin pérdidas.

- d) Al cargar una puerta (en nuestro caso la puerta 3) de un circuito de microondas con la impedancia de referencia para el cálculo de los parámetros  $S$  ( $Z_0$  en nuestro caso), se tiene que la onda de potencia reflejada (entrante al circuito) en dicha puerta,  $a_3$  en nuestro caso, es nula.

De este modo, los coeficientes  $S_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2$ , del circuito de 2 puertas resultante son los mismos que los del circuito de tres puertas, dado que las "medidas" de los parámetros  $S$  que se hace en ambos casos implican la misma condición de carga en la puerta 3.

Otra forma equivalente de concluir lo anterior es atendiendo a la definición algebraica de parámetros  $S$ . En el circuito de tres puertas se tiene:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3$$

$$b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3$$

Si  $a_3 = 0$ , se tiene que, en lo relativo a la relación entre las ondas de potencia  $b_1$ ,  $b_2$  y las  $a_1$ ,  $a_2$ :

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

Por lo tanto, la matriz de parámetros  $S$  del circuito de 2 puertas resultante es:

$$[S]_{2 \times 2} = [S]_{3 \times 3} (1 : 2, 1 : 2) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

En el caso particular de la estructura de la Figura 2, dada su reciprocidad y simetría, se tiene  $S_{12} = S_{21}$ , y  $S_{22} = S_{11}$ , respectivamente:

$$[S]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

donde  $S_{11}$  y  $S_{21}$  vienen dados por (5), (6), respectivamente.

Nótese que el circuito de 2 puertas resultante no es sin pérdidas. La resistencia  $Z_0$  hace que tenga pérdidas y que la matriz de parámetros  $S$  de  $2 \times 2$  deje de ser unitaria.

- e) En este apartado se pregunta cual es la potencia entregada a una carga situada en el extremo de una línea de transmisión a la salida de un circuito de 2 puertas (cuadripolo) cuyos parámetros  $S$  (véase el apartado anterior) y la potencia de la onda incidente en el puerto de entrada son conocidos. Se tiene, por tanto una situación como la ilustrada en la Figura 9. Nótese que no existe físicamente onda estacionaria en la línea de transmisión dado que se tiene  $Z_L = Z_1$ . Sin embargo, sí existe onda de potencia reflejada (entrante al circuito) en la puerta 2,  $a_2 \neq 0$ . Ello es debido a que  $Z_{a-a'}$  (véase figura) es diferente de  $Z_0$ ; es trivial obtener que  $Z_{a-a'} = Z_1 = 2Z_0$  y, por tanto:

$$\Gamma_{a-a'} = \frac{Z_{a-a'} - Z_0}{Z_{a-a'} + Z_0} = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3} \neq 0$$



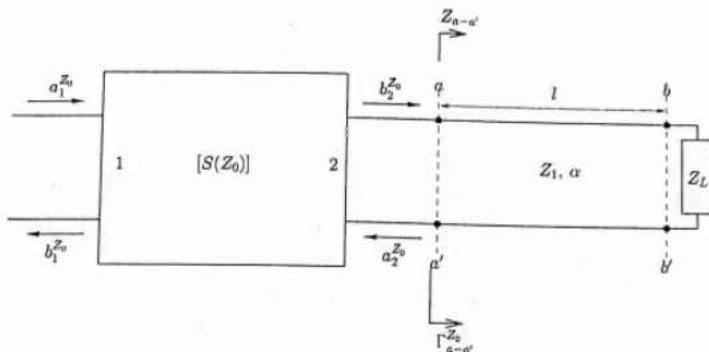


Figura 9

Es importante tener claro que las ondas de potencia  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2$ , empleadas para caracterizar el cuadripolo se refieren a la impedancia  $Z_0$  y no a  $Z_1$ . Se trata, si se quiere ver así, de un problema de líneas de transmisión con cambio de impedancia característica (véase la Figura 10) donde la potencia incidente es  $|b_2|^2$ .

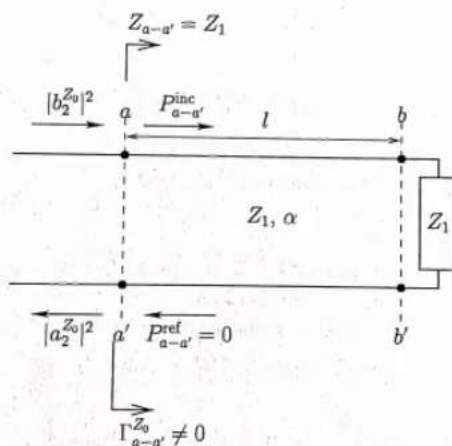


Figura 10

La potencia entregada al comienzo de la línea de transmisión (plano  $a - a'$ ) es

$$P_T|_{a-a'} = |b_2|^2 - |a_2|^2 = |b_2|^2(1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2) = |b_2|^2(1 - \frac{1}{9}) = |b_2|^2 \frac{8}{9},$$

que en la línea de transmisión es transportada por la onda incidente (no hay onda reflejada en la línea),

$$P_T|_{a-a'} = P_{inc}^{Z_0}|_{a-a'} \Rightarrow P_{inc}^{Z_0}|_{a-a'} = |b_2|^2 \frac{8}{9}$$

que se atenúa debido a las pérdidas disipativas en la línea hasta alcanzar la carga  $Z_L = Z_1$ , obteniéndose finalmente:

$$P_L = P_{inc}^{Z_0}|_{a-a'} e^{-2\alpha l} = |b_2|^2 \frac{8}{9} e^{-2\alpha l} = |b_2|^2 \frac{8}{9} 0.0498$$

Los coeficientes  $S_{11}^T$ ,  $S_{21}^T$  pueden obtenerse combinando los coeficientes de reflexión  $\Gamma_{e,o}$  en la puerta 1 resultantes de excitar el circuito de forma par y de forma impar (véase la Figura 12):

$$S_{11}^T = \frac{\Gamma_e + \Gamma_o}{2} \quad (7)$$

$$S_{21}^T = \frac{\Gamma_e - \Gamma_o}{2} \quad (8)$$

Figura 12

Nótese que los coeficientes de reflexión  $\Gamma_{e,o}$  no son más que los coeficiente de reflexión de entrada de un cuadripolo cuando su salida se carga con un impedancias dadas.

$$\Gamma_{e,o} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{L_{e,o}}}{1 - S_{22}\Gamma_{L_{e,o}}} = S_{11} + \frac{S_{21}^2\Gamma_{L_{e,o}}}{1 - S_{22}\Gamma_{L_{e,o}}}$$

donde los  $S_{ji}$  son los del cuadripolo del apartado (d) que es recíproco ( $S_{12} = S_{21}$ ).

El valor del coeficiente de reflexión en la puerta 2 del cuadripolo con excitación par,  $\Gamma_{L_e}$ , es el correspondiente al de un cortocircuito dado que el plano de simetría es un circuito abierto que está situado a  $l/2 = \lambda/4$ . Por tanto:  $\Gamma_{L_e} = -1$ . Análogamente, se tiene:  $\Gamma_{L_o} = 1$ . Sustituyendo dichos valores en (7), se obtiene  $S_{11}^T$ :

$$S_{11}^T = \frac{1}{2} \left( S_{11} + \frac{S_{21}^2(-1)}{1 - S_{22}(-1)} S_{11} + \frac{S_{21}^2}{1 - S_{22}} \right) = S_{11} + \frac{S_{21}^2 S_{22}}{1 - S_{22}^2}$$

Análogamente se procede con  $S_{21}^T$  sustituyendo  $\Gamma_{L_{e,o}}$  en (8):

$$S_{21}^T = \frac{1}{2} \left( S_{11} + \frac{S_{21}^2(-1)}{1 - S_{22}(-1)} - S_{11} - \frac{S_{21}^2}{1 - S_{22}} \right) = \frac{-S_{21}^2}{1 - S_{22}^2}$$

en donde se ha calculado previamente el valor de  $l = c_0/(2f) = 15 \text{ cm}$ .

Falta por obtener el valor de  $|b_2|^2$  para completar el apartado. El valor de  $b_2$  se obtiene directamente de las relaciones lineales entre ondas de potencia dictadas por los coeficientes  $S_{ji}$ :

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 = S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}b_2$$

es decir,

$$b_2 = \frac{S_{21}a_1}{1 - S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}}$$

Nótese que  $b_2 \neq S_{21}a_1$  dado que  $S_{22} \neq 0$ .

La expresión de  $|b_2|^2$  es por tanto:

$$|b_2|^2 = \frac{|S_{21}|^2 |a_1|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2}$$

donde  $|a_1|^2 = 1$ , W por ser  $|a_1|^2$  la potencia incidente en la puerta 1 (el dato se da en el enunciado del apartado).

NOTA: Un razonamiento basado en calcular la potencia entregada al cuadripolo en su puerta 1 y suponer que dicha potencia entregada al cuadripolo se entrega al comienzo de la línea (lo que se ha denotado anteriormente como  $P_T|_{a-a'}$  es erróneo dado que el cuadripolo tiene pérdidas.

- f) En este apartado se piden los parámetros  $S$  de una red que está formada por dos cuadripolos en cascada conectados a través de una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0$  de longitud  $l$ . Los cuadripolos están caracterizados mediante su matriz de parámetros  $S$  (calculada en el apartado d) referida a  $Z_0$ . Los dos cuadripolos están situados en espejo uno del otro a ambos lados de la línea de transmisión. Por tanto, existe un plano de simetría (véase la Figura 11) que se puede emplear para simplificar los cálculos.

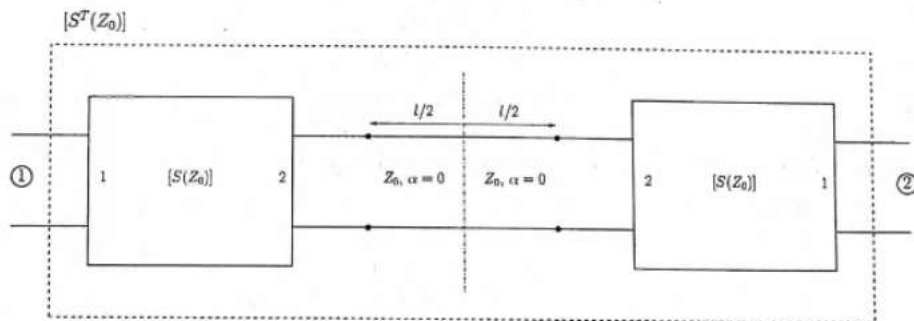


Figura 11

La primera consecuencia es la simetría, además de la reciprocidad. Por tanto, podemos escribir:

$$[S^T] = \begin{bmatrix} S_{11}^T & S_{21}^T \\ S_{21}^T & S_{11}^T \end{bmatrix}$$