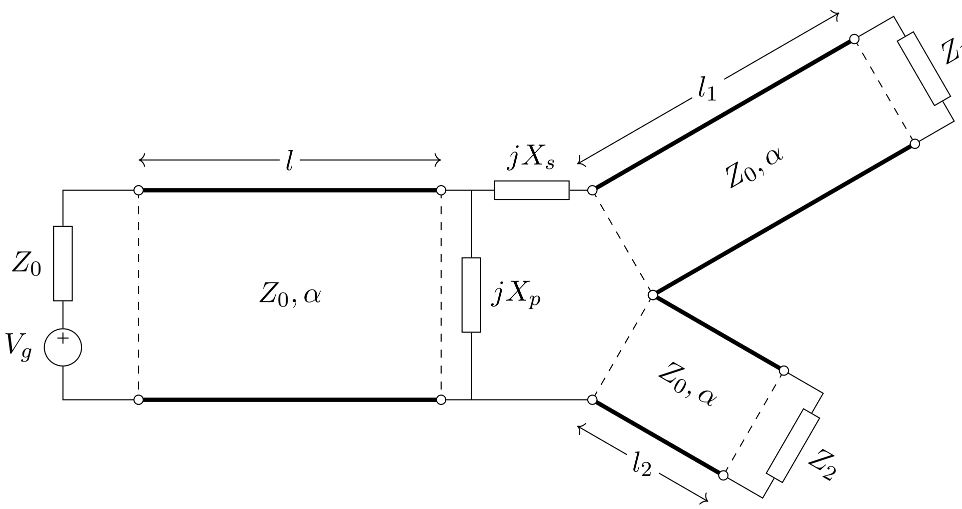
Tecnologías de Alta Frecuencia

Problemas de líneas de transmisión

Problema 1

Se desea alimentar dos antenas, de impedancias $Z_1 = 40\ \Omega$ y $Z_2 = 60\ \Omega$, a la frecuencia de 2 GHz con un generador con tensión de pico $V_g = 10\,\mathrm{V}$, e impedancia interna $Z_0 = 50\ \Omega$. Para conseguirlo, se dispone de una red de tres puertas, sin pérdidas, cuyo circuito equivalente a la frecuencia de trabajo se muestra en la figura (la parte formada por las reactancias jX_p y jX_s). Suponiendo que el generador se conecta a la puerta común a través de un cable coaxial de impedancia característica Z_0 y longitud eléctrica correspondiente a $\beta l = 3\pi/4$ rad, y las cargas Z_1 y Z_2 a las puertas 1 y 2 con tramos de cable coaxial idéntico al anterior, pero de longitudes eléctricas respectivas correspondientes a $\beta l_1 = \pi/2$ rad, $\beta l_2 = \pi$ rad, determinar la potencia entregada a cada una de las antenas.



Nota La atenuación de los cables utilizados es $3{,}5 \times 10^{-3}$ Np/cm. Las reactancias de la red de adaptación son $jX_s = j\,10\ \Omega$, $jX_p = j\,100\ \Omega$.

Solución

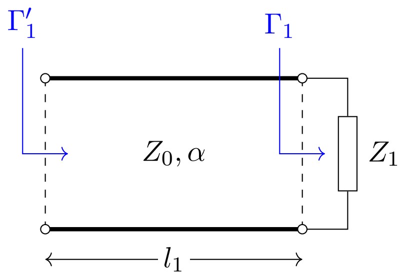
Antes de resolver el problema conviene calcular los parámetros de las líneas de transmisión:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 15 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{15} \text{ rad/cm}$$

$$\begin{aligned}
l &= \frac{3\pi}{4}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3\lambda}{8} = 5{,}625 \text{ cm} &\Rightarrow\quad \alpha l &= 0{,}019686 \ll 1\\
l_1 &= \frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4} = 3{,}75 \text{ cm} &\Rightarrow\quad \alpha l_1 &= 0{,}013125 \ll 1\\
l_2 &= \pi\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2} = 7{,}5 \text{ cm} &\Rightarrow\quad \alpha l_2 &= 0{,}02625 \ll 1
\end{aligned}$$

Estos últimos resultados indican que los tramos de línea son de bajas pérdidas. Sin embargo el problema va a ser resuelto sin aproximaciones. Primero es necesario calcular las impedancias vistas a la entrada de los dos tramos de línea de las antenas. Aunque se puede aplicar directamente la ecuación de transformación de impedancias a lo largo de un tramo de línea aquí es preferible hacerlo por medio de los coeficientes de reflexión, ya que serán útiles posteriormente, al calcular potencias. La primera parte de la resolución es por tanto el cálculo de coeficientes de reflexión, desde las cargas hacia el generador de la red.

Primera subred



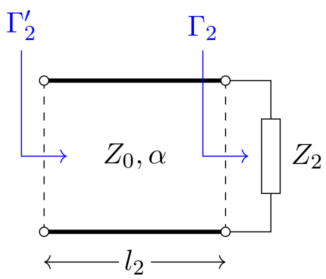
$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = -\frac{1}{9} = 0{,}1111\, e^{\pi j}$$

$$\Gamma_1' = \Gamma_1\, e^{-2\gamma l_1} = \Gamma_1\, e^{-2\alpha l_1} e^{-2j\beta l_1} = 0{,}10823\, e^{0j}$$

$$Z_1' = Z_0 \frac{1+\Gamma_1'}{1-\Gamma_1'} = 62{,}137\ \Omega$$

Nota: sin pérdidas el resultado sería $Z_1' = \dfrac{Z_0^2}{Z_1} = 62{,}5\ \Omega$

Segunda subred



$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{1}{11} = 0{,}1111\, e^{0j}$$

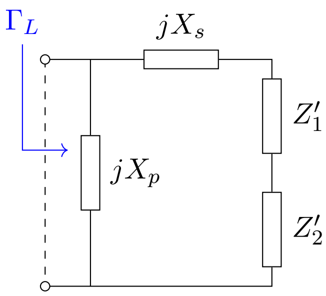
$$\Gamma_2' = \Gamma_2\, e^{-2\gamma l_2} = \Gamma_1\, e^{-2\alpha l_2} e^{-2j\beta l_2} = 0{,}086259\, e^{0j}$$

$$Z_2' = Z_0 \frac{1+\Gamma_2'}{1-\Gamma_2'} = 59{,}44\ \Omega$$

Nota: sin pérdidas el resultado sería $Z_2' = Z_2 = 60\ \Omega$

Como se puede ver en ambos casos las pérdidas acercan ligeramente el valor de la impedancia de entrada a Z_0, es decir, reducen el módulo del coeficiente de reflexión. La fase no se ve afectada.

Una vez conocidas dichas impedancias de entrada el cálculo de la impedancia de carga del tramo de línea próximo al generador se limita a un problema de elementos concentrados:

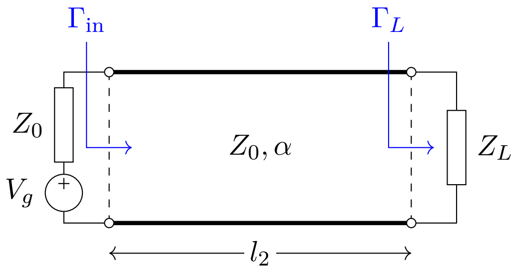


$$Z_L = \left(\frac{1}{jX_p} + \frac{1}{jX_s + Z_1' + Z_2'}\right)^{-1}$$

$$= \frac{jX_p\big(jX_s + Z_1' + Z_2'\big)}{jX_p + jX_s + Z_1' + Z_2'} = 45{,}228 + j59{,}079\ \Omega$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0{,}5289\, e^{1{,}0961 j}$$

Con este resultado el coeficiente de reflexión a la entrada de la red completa Γ_{in} se calcula de nuevo trasladando Γ_L a lo largo de la línea de entrada:



$$\Gamma_{\text{in}} = \Gamma_L\, e^{-2\gamma l} = \Gamma_1\, e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l} = 0{,}50848\, e^{2{,}6669j}$$

Hay que indicar que no es estrictamente necesario calcular Γ_{in}, ya que Γ_L es suficiente para resolver el problema de potencias.

Para obtener la potencia entregada ahora es necesario calcular potencias incidentes y entregadas, partiendo del generador y hacia las cargas, y empezando por la potencia disponible de aquel. Como la impedancia interna es Z_0 ésta resulta

$$P_{\text{av}} = \frac{V_g^2}{8Z_0} = 250 \text{ mW}$$

y es la potencia asociada a la onda incidente en la entrada de la red. La potencia entregada en ese punto es

$$P_{\text{in}} = P_{\text{av}} \left(1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2\right) = 185{,}36 \text{ mW}.$$

Sin embargo, es la potencia incidente la que se necesita para calcular la potencia entregada a la carga en el otro extremo de la línea P_L, como ya se ha indicado. En efecto

$$P_L = P_{\text{av}} \left(e^{-2\alpha l} - |\Gamma_{\text{in}}|^2\, e^{2\alpha l}\right) = P_{\text{av}}\, e^{-2\alpha l} \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) = 173{,}11 \text{ mW}.$$

Puesto que la red de tres puertos no tiene pérdidas la potencia anterior se distribuirá por completo entre las dos líneas de las antenas, es decir, entre las impedancias Z'_1 y Z'_2

$$P_L = P'_1 + P'_2.$$

Además, dichas impedancias están conectadas en serie, de forma que constituyen un divisor de tensión. Por tanto, denominando I_L la corriente común, la relación entre las potencias es la siguiente,

$$\frac{P'_1}{P'_2} = \frac{\frac{1}{2} I_L^2 \operatorname{Re}[Z'_1]}{\frac{1}{2} I_L^2 \operatorname{Re}[Z'_2]} = \frac{Z'_1}{Z'_2}.$$

Las dos ecuaciones anteriores permiten despejar las potencias entregadas:

$$P'_1 = \frac{Z'_1}{Z'_1 + Z'_2} P_L = 88{,}476 \text{ mW},$$
$$P'_2 = \frac{Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} P_L = 84{,}634 \text{ mW}.$$

Puesto que el coeficiente de reflexión es no nulo y hay onda estacionaria, nuevamente es necesario calcular las potencias incidentes a la entrada y salida de las líneas, ya que la onda incidente sufre atenuación exponencial. Si se denota como $P_1'^{+}$ y P_1^{+} las potencias incidentes a la entrada y la salida de la línea de la primera antena, su relación con las respectivas potencias entregadas P'_1 y P_1 permite resolver esta última

$$P'_1 = P_1'^{+} \left(1 - |\Gamma'_1|^2\right) \quad \Rightarrow \quad P_1'^{+} = \frac{P'_1}{1 - |\Gamma'_1|^2}$$

$$P_1 = P_1^+ \left(1 - |\Gamma_1|^2\right) = P_1'^+ e^{-2\alpha l_1} \left(1 - |\Gamma_1|^2\right) = P_1' \, e^{-2\alpha l_1} \frac{1 - |\Gamma_1|^2}{1 - |\Gamma_1'|^2} = 86{,}129 \text{ mW}$$

Del mismo modo, la potencia entregada a la segunda antena es

$$P_2 = P_2' \, e^{-2\alpha l_2} \frac{1 - |\Gamma_2|^2}{1 - |\Gamma_2'|^2} = 80{,}239 \text{ mW}$$

Es interesante comparar los resultados anteriores con lo que se obtendría empleando una aproximación de bajas pérdidas con el fin de verificar su validez. Se puede recordar que dicha aproximación consiste en aplicar la variación exponencial no a la potencia incidente, sino a la entregada, teniendo en cuenta que la constante de atenuación ha de ser incrementada con el fin de considerar las pérdidas de la onda reflejada.

Para la línea de la primera antena se tiene

$$\mathrm{ROE}_1 = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} = 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1' = \alpha \, \frac{\mathrm{ROE}_1^2 + 1}{2 \, \mathrm{ROE}_1} = 3{,}5875 \cdot 10^{-3} \text{ Np/cm}$$

$$P_1 \approx P_1' e^{-2\alpha_1' l_1} = 86{,}127 \text{ mW}$$

Y para la línea de la segunda antena

$$\mathrm{ROE}_2 = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|} = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2' = \alpha \, \frac{\mathrm{ROE}_2^2 + 1}{2 \, \mathrm{ROE}_2} = 3{,}5583 \cdot 10^{-3} \text{ Np/cm}$$

$$P_2 \approx P_2' e^{-2\alpha_2' l_2} = 80{,}235 \text{ mW}$$

Es decir, los errores cometidos al utilizar la aproximación son del orden de pocos microvatios, o dicho de otro modo, de decenas de partes por millón respecto a las potencias entregadas, lo cual valida la aproximación de bajas pérdidas. Hay que señalar que no tiene sentido aplicar la aproximación al tramo de línea de la entrada, ya que desde el principio se dispone de la potencia incidente. Calcular la potencia entregada para luego aplicar la aproximación sólo complicaría los cálculos de modo innecesario.

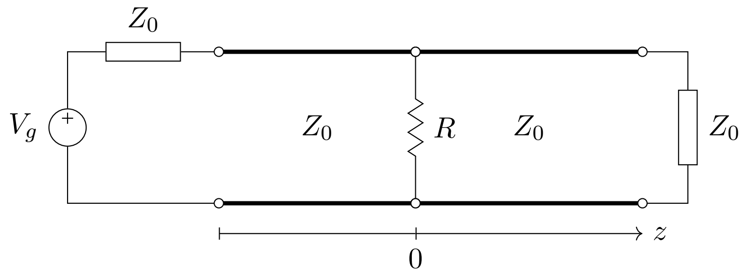
Problema 2

Se conecta una resistencia $R = 100\ \Omega$ en un punto arbitrario entre los dos hilos de una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica $Z_0 = 50\ \Omega$. En uno de los extremos de la línea está conectado un generador de impedancia interna Z_0 y potencia disponible $P_{\mathrm{av}} = 250$ mW. El otro extremo está cargado con Z_0. Determinar:

1. La tensión y la corriente de las ondas incidente, reflejada y transmitida más allá de la resistencia.
2. La potencia disipada en la resistencia, transmitida más allá de ésta y reflejada hacia el generador.

Solución

El montaje descrito corresponde a la siguiente figura:



1. El segundo tramo de línea de transmisión está adaptado, por lo que a su entrada la impedancia vista es Z_0. Por tanto, la salida del primer tramo está cargada con la conexión en paralelo de R y Z_0, por lo que el coeficiente de reflexión es

$$\Gamma_R \equiv \Gamma(z = 0^-) = \frac{\frac{RZ_0}{R+Z_0} - Z_0}{\frac{RZ_0}{R+Z_0} + Z_0} = \frac{-Z_0}{Z_0 + 2R} = -\frac{1}{5}$$

Teniendo en cuenta que en el segundo tramo de línea no hay onda reflejada, la tensión a lo largo de ambos tramos es

$$V(z) = \begin{cases} V_{01}^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_R\, e^{j\beta z}\right) & \text{para } z \leq 0 \\ V_{02}^+\, e^{-j\beta z} & \text{para } z \geq 0 \end{cases}$$

donde V_{01}^+ y V_{02}^+ son las amplitudes de las ondas incidentes en cada tramo en $z = 0$, que hay que despejar.

Por una parte, como la impedancia interna del generador y la impedancia característica de las líneas son iguales, la potencia de la onda incidente en el primer tramo es P_{av}, de donde puede despejarse su amplitud,

$$P_{\text{av}} = \frac{\left|V_{01}^+\right|^2}{2Z_0} \quad \Rightarrow \quad \left|V_{01}^+\right| = \sqrt{2Z_0 P_{\text{av}}} = 5 \text{ V}$$

La fase depende de la del generador. Podemos considerar arbitrariamente $V_{01}^+ = 5$ V (esto equivale simplemente a elegir un instante adecuado como $t = 0$).

Por otra parte, en $z = 0$ la tensión ha de ser continua, así que particularizando las expresiones anteriores de $V(z)$,

$$V(0) = V_{01}^+(1 + \Gamma_R) = V_{02}^+ = 4 \text{ V}$$

Por tanto, sustituyendo todos los resultados, la tensión a lo largo de la línea es

$$V(z) = \begin{cases} 5\, e^{-j\beta z} - 1\, e^{j\beta z} & \text{para } z \leq 0 \\ 4\, e^{-j\beta z} & \text{para } z \geq 0 \end{cases} \quad \text{(V)}$$

donde se puede identificar cada onda. Las ondas de corriente se obtienen dividiendo las de tensión entre Z_0, y cambiando el signo de la onda reflejada,

$$I(z) = \begin{cases} 100\, e^{-j\beta z} + 20\, e^{j\beta z} & \text{para } z < 0 \\ 80\, e^{-j\beta z} & \text{para } z > 0 \end{cases} \quad \text{(mA)}$$

Nótese que $I(z)$ no es continua en $z = 0$, debido a la corriente que se fuga por la resistencia ($I_R = 40$ mA).

2. La potencia de cada onda es:

$$\left.\begin{aligned} P_1^+ &= \frac{\left|V_{01}^+\right|^2}{2Z_0} = P_{\text{av}} = 250 \text{ mW} \\ P_1^- &= \frac{\left|V_{01}^+\right|^2}{2Z_0} \left|\Gamma_R\right|^2 = P_1^+ \left|\Gamma_R\right|^2 = 10 \text{ mW} \end{aligned}\right\} P_1 = P_1^+ - P_1^- = 240 \text{ mW}$$

$$P_2^+ = \frac{\left|V_{02}^+\right|^2}{2Z_0} = P_2 = 160 \text{ mW}$$

La potencia disipada en la resistencia es $P_R = \frac{|V(0)|^2}{2R} = 80$ mW, que coincide con la diferencia entre las potencias transmitidas en cada tramo de línea, $P_R = P_1 - P_2$.

En resumen, de los 250 mW disponibles, 10 mW son devueltos al generador, y de los 240 mW restantes, 80 mW son disipados en R y 160 mW transmitidos más allá de ésta.

Problema 3

Encontrar la relación entre la potencia máxima a transmitir (P_1) por una línea de transmisión sin pérdidas cuando la carga a alimentar está adaptada, y la potencia máxima a transmitir (P_2) cuando existe en la línea un coeficiente de oda estacionaria S. Supóngase que la única limitación en cuanto a potencia máxima ermisible en la línea se deriva del hecho de que exista una campo de ruptura en el dieléctrico dado por E_{rup}.

Solución

El campo de ruptura limita la tensión máxima soportada, $V_{\text{máx}}$.

- Sin onda estacionaria ($\Gamma = 0$), $V_1 = V_{01}^+ e^{-j\beta z}$

$$P_1 = \frac{\left|V_{01}^+\right|^2}{2Z_0} \qquad V_{\text{máx}} = \left|V_{01}^+\right|$$

- Con onda estacionaria, $V_2 = V_{02}^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$

$$P_2 = \frac{\left|V_{02}^+\right|^2}{2Z_0}\left(1 - |\Gamma|^2\right) \qquad V_{\text{máx}} = \left|V_{02}^+\right| \left(1 + |\Gamma|\right)$$

Por tanto, la relación entre potencias es

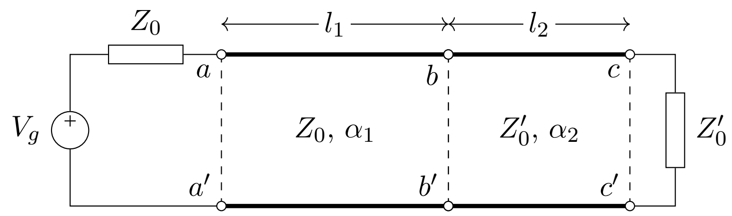
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left|V_{01}^+\right|^2}{\left|V_{02}^+\right|^2 \left(1 - |\Gamma|^2\right)} = \frac{\left(1 + |\Gamma|\right)^2}{1 - |\Gamma|^2} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \text{ROE}$$

Problema 4

Dibuje, con ayuda de un ordenador, la tensión a lo largo de una línea de transmisión terminada en cargas correspondientes a diferentes valores del coeficiente de reflexión Γ_L. Pruebe con estas cinco cargas: un cortocircuito, un circuito abierto, una inductancia pura, una capacidad pura y una carga compleja con carácter inductivo. Dibuje la onda de tensión, la onda de corriente y el coeficiente de reflexión. Hágalo para diferentes instantes de tiempo.

Problema 5

Considere la siguiente red formada por dos tramos de líneas de transmisión con su correspondiente generador y carga.



Se pide

1. Expresar la potencia P_a entregada a la entrada del primer tramo de línea (a/a').
2. Expresar la potencia P_b entregada a la entrada del segundo tramo de línea (b/b').
3. Expresar la potencia P_c entregada a la carga (c/c').
4. Suponiendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (líneas sin pérdidas), represente aproximadamente la envolvente de la tensión a lo largo de los tramos de línea de transmisión.

Solución

1. El coeficiente de reflexión en todo el tramo 2 es nulo, y la impedancia vista en b/b' es Z_0'. Por tanto, los coeficientes de reflexión (todos ellos respecto a Z_0) a la salida del primer tramo y a su entrada son,

$$\Gamma_b = \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_a = \Gamma_b\, e^{-2\alpha_1 l_1} e^{-2j\beta_1 l_1}$$

y el módulo de este último es

$$|\Gamma_a| = |\Gamma_b|\, e^{-2\alpha_1 l_1} = \left| \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \right| e^{-2\alpha_1 l_1}.$$

Como la impedancia interna del generador coincide con la impedancia característica del primer tramo de línea, la potencia disponible $P_{\text{av}} = |V_g|^2 / 8Z_0$ es la potencia de la onda incidente en ese tramo, y por tanto,

$$P_a = P_{\text{av}} \left(1 - |\Gamma_a|^2\right) = \frac{|V_g|^2}{8Z_0} \left(1 - \left| \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \right|^2 e^{-4\alpha_1 l_1}\right)$$

2. Debido a las pérdidas, la potencia de la onda incidente a la salida del primer tramo es $P_{\text{av}}\, e^{-2\alpha_1 l_1}$. Por tanto, la potencia entregada resulta

$$P_b = P_{\text{av}}\, e^{-2\alpha_1 l_1} \left(1 - |\Gamma_b|^2\right) = \frac{|V_g|^2}{8Z_0} \left(1 - \left| \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \right|^2\right) e^{-2\alpha_1 l_1}$$

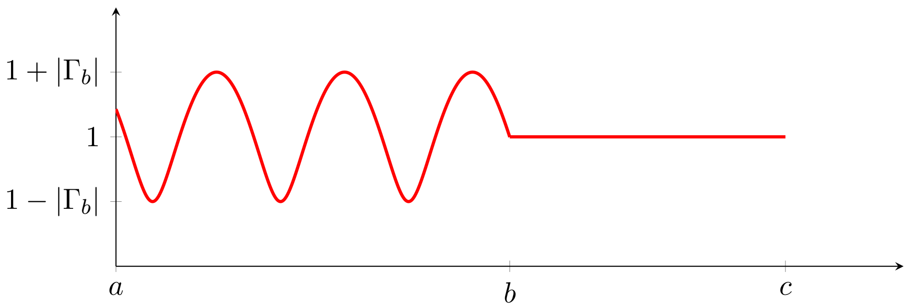
3. Como en el segundo tramo no hay reflexión, toda la potencia corresponde a la onda incidente. A su entrada, la potencia es P_b, por lo que su salida, en la carga, es

$$P_L = P_c = P_b\, e^{-2\alpha_2 l_2} = \frac{|V_g|^2}{8Z_0} \left(1 - \left| \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \right|^2\right) e^{-2(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}$$

4. El coeficiente de onda estacionaria es, en cada tramo,

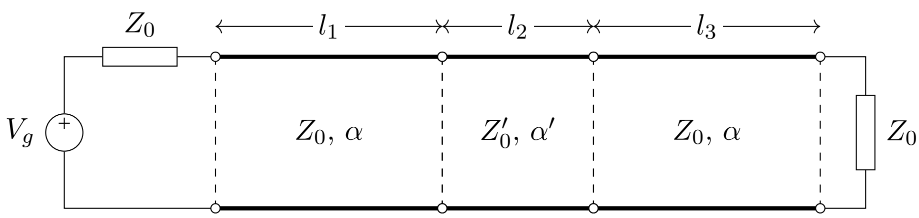
$$\mathrm{SWR}_1 = \frac{1+|\Gamma_b|}{1-|\Gamma_b|} \qquad \mathrm{SWR}_2 = 1$$

de modo que si se normaliza respecto a la amplitud de tensión constante del segundo tramo, la envolvente en el primer tramo varía entre $1-|\Gamma_b|$ y $1+|\Gamma_b|$. En cualquier caso la envolvente ha de ser continua, puesto que la tensión lo es.



Problema 6

Calcular la potencia entregada a la carga $Z_L = Z_0$ por el generador de frecuencia 1 GHz y amplitud $V_g = 10$ V (con impedancia interna Z_0), entre los que se intercalan tres tramos de línea de transmisión en cascada:

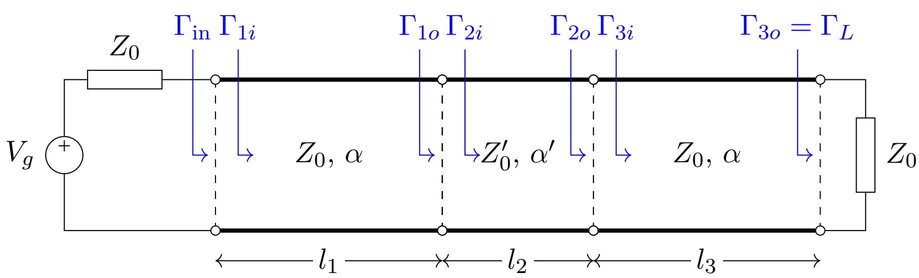


donde los tramos de línea de transmisión tienen $\varepsilon_r = 1$ y longitudes $l_1 = 2$ m, $l_2 = 10$ cm, $l_3 = 1$ m, y sus impedancias características y atenuaciones son:

- Primer y tercer tramo: $Z_0 = 50\ \Omega$, $\alpha = 3{,}5 \times 10^{-3}$ Np/cm.
- Segundo tramo: $Z_0' = 75\ \Omega$, $\alpha' = 3 \times 10^{-3}$ Np/cm.

Solución

Se va a utilizar la siguiente notación para los coeficientes de reflexión hacia la carga,



Esta notación será también utilizada para las impedancias vistas y para las potencias. Así, por ejemplo, Z_{2i} es la impedancia vista a la entrada del segundo tramo, mientras que $P_{2i} = P_{2i}^+(1 - |\Gamma_{2i}|^2)$ es la potencia en ese punto, expresada en función de la potencia de la onda incidente P_{2i}^+ y el coeficiente de reflexión Γ_{2i}.

Antes de empezar a calcular los coeficientes de reflexión, conviene determinar los exponentes asociados a las ondas (las atenuaciones y longitudes eléctricas) de cada tramo:

$$\begin{aligned}
&2\alpha l_1 = 1{,}4 \text{ Np} \qquad && 2\beta l_1 = \frac{80\pi}{3} \text{ rad} = 26\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \sim \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \\
&2\alpha' l_2 = 0{,}06 \text{ Np} \qquad && 2\beta l_2 = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \\
&2\alpha l_3 = 0{,}7 \text{ Np} \qquad && 2\beta l_1 = \frac{40\pi}{3} \text{ rad} = 12\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \sim \frac{4\pi}{3} \text{ rad}
\end{aligned}$$

Además, la potencia disponible del generador es $P_{\text{av}} = |V_g|^2 / 8Z_0 = 250$ mW.

Los coeficientes de reflexión se pueden calcular empezando desde la carga, teniendo en cuenta dos reglas:

1. A lo largo de un tramo de línea, $\Gamma_i = \Gamma_o \, e^{-2\gamma l} = \Gamma_o \, e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l}$ (desplazamiento *hacia el generador*).
2. A cada lado de la unión entre dos líneas el coeficiente de reflexión no es igual (si las impedancias de referencia no lo son) pero sí la impedancia vista, ya que la tensión y la corriente son magnitudes continuas.

Por tanto, los coeficientes de reflexión y las impedancias vistas son:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{3o} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0 && \longleftarrow && Z_{3o} = Z_L = Z_0 \\
&\Gamma_{3i} = \Gamma_{3o} \, e^{-2\alpha l_3} e^{-2j\beta l_3} = 0 && \longrightarrow && Z_{3i} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{3i}}{1 - \Gamma_{3i}} = Z_0 \\
&\Gamma_{2o} = \frac{Z_{2o} - Z_0'}{Z_{2o} + Z_0'} = -0{,}2 && \longleftarrow && Z_{2o} = Z_{3i} = Z_0 \\
&\Gamma_{2i} = \Gamma_{2o} \, e^{-2\alpha' l_2} e^{-2j\beta l_2} = 0{,}1884 \, e^{-1{,}047j} && \longrightarrow && Z_{2i} = Z_0' \frac{1 + \Gamma_{2i}}{1 - \Gamma_{2i}} = 85{,}394 + 28{,}883j \ \Omega \\
&\Gamma_{1o} = \frac{Z_{1o} - Z_0}{Z_{1o} + Z_0} = 0{,}3300 \, e^{-0{,}474j} && \longleftarrow && Z_{1o} = Z_{2i} = 85{,}394 + 28{,}883j \ \Omega \\
&\Gamma_{1i} = \Gamma_{1o} \, e^{-2\alpha l_1} e^{-2j\beta l_1} = 0{,}0814 \, e^{-2{,}5687j} && \longrightarrow && Z_{1i} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{1i}}{1 - \Gamma_{1i}} \text{ (innecesario)} \\
&\Gamma_{\text{in}} = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0} = 0{,}0814 \, e^{-2{,}5687j} && \longleftarrow && Z_{\text{in}} = Z_{1i}
\end{aligned}$$

Una vez determinados los coeficientes de reflexión se pueden calcular las potencias empezando desde el generador. Nuevamente, hay dos reglas:

1. Dentro de un tramo, $P_o^+ = P_i^+ e^{-2\alpha l}$.
2. A cada lado de la unión entre tramos las potencias netas son iguales. Por ejemplo, $P_{io} = P_{2i}$ (pero $P_{io}^+ \neq P_{2i}^+$).

Como la impedancia del generador y del primer tramo son iguales, la potencia de la onda incidente a la entrada de éste es la potencia disponible. Las potencias de las ondas incidentes y netas son, por tanto, las siguientes:

$$\begin{array}{lcl}
P_{1i}^+ = P_{\text{av}} = 250 \text{ mW} & \longrightarrow & P_{1i} = P_{1i}^+(1 - |\Gamma_{1i}|^2) = 248{,}34 \text{ mW} \\
P_{1o}^+ = P_{1i}^+ e^{-2\alpha l_1} = 61{,}649 \text{ mW} & \longrightarrow & P_{1o} = P_{1o}^+(1 - |\Gamma_{1o}|^2) = 54{,}936 \text{ mW} \\
P_{2i}^+ = \dfrac{P_{1i}}{1 - |\Gamma_{2i}|^2} = 56{,}957 \text{ mW} & \longleftarrow & P_{2i} = P_{1o} \\
P_{2o}^+ = P_{2i}^+ e^{-2\alpha' l_2} = 53{,}640 \text{ mW} & \longrightarrow & P_{2o} = P_{2o}^+(1 - |\Gamma_{2o}|^2) = 51{,}494 \text{ mW} \\
P_{3i}^+ = \dfrac{P_{3i}}{1 - |\Gamma_{3i}|^2} = P_{3i} & \longleftarrow & P_{3i} = P_{2o} \\
P_{3o}^+ = P_{3i}^+ e^{-2\alpha l_3} = 25{,}571 \text{ mW} & \longrightarrow & P_{3o} = P_{3o}^+(1 - |\Gamma_{3o}|^2) = P_{3o}^+
\end{array}$$

Y, por supuesto, $P_L = P_{3o} = 25{,}572$ mW. Alternativamente, se pueden combinar todas las relaciones anteriores y escribir la expresión de P_L en función de P_{av},

$$P_L = P_{\text{av}} \frac{(1 - |\Gamma_{1o}|^2)(1 - |\Gamma_{2o}|^2)(1 - |\Gamma_{3o}|^2)}{(1 - |\Gamma_{2i}|^2)(1 - |\Gamma_{3i}|^2)} \, e^{-2(\alpha l_1 + \alpha' l_2 + \alpha l_3)}$$

Observando esta ecuación es fácil ver cómo se puede generalizar para un número arbitrario de tramos de línea de transmisión. También es correcto

$$P_L = P_{\text{in}} \frac{(1 - |\Gamma_{1o}|^2)(1 - |\Gamma_{2o}|^2)(1 - |\Gamma_{3o}|^2)}{(1 - |\Gamma_{1i}|^2)(1 - |\Gamma_{2i}|^2)(1 - |\Gamma_{3i}|^2)} \, e^{-2(\alpha l_1 + \alpha' l_2 + \alpha l_3)}$$

donde $P_{\text{in}} = P_{1i} = P_{\text{av}}(1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2)$ es la potencia entregada por el generador (a la entrada de las líneas de transmisión).

Por otra parte, si las líneas no tienen pérdidas $\alpha = \alpha' = 0$ y el término exponencial desaparece. Además $|\Gamma_o| = |\Gamma_i|$ en cualquier tramo, por lo que la ecuación se reduce a

$$P_L = P_{\text{av}}(1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2) = P_{\text{in}}$$

lo que se puede interpretar como que toda la potencia que el generador es capaz de introducir en las líneas es entregada a la carga, ya que en las líneas no hay disipación.