Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen

Notación:

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. La distribución conjunta de dos variables aleatorias S y X está dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(s+x^2) & 0 \le s \le 1,\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   (a) Determine el estimador de máximo a posteriori de S a partir de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

   (b) Determine el estimador $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = 1$.

(b) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{2+3x^2}{3+6x^2}$.

2. Se desea estimar una variable aleatoria S a través de la observación de X. Se dispone de la siguiente información estadística:

$$\mathbb{E}\{S\} = 1/2; \quad \mathbb{E}\{X\} = 1; \quad \mathbb{E}\{X^2\} = 3; \quad \mathbb{E}\{S^2\} = 3; \quad \mathbb{E}\{SX\} = 2$$

   (a) Calcule los coeficientes del estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$.

   (b) Calcule el error cuadrático medio del estimador obtenido en el apartado anterior.

Solution:

(a) $w = \dfrac{3}{4}$, $w_0 = -\dfrac{1}{4}$.

(b) $\mathbb{E}\{(S - \widehat{S}_{\text{LMSE}})^2\} = \dfrac{13}{8}$.

3. La variable aleatoria X tiene distribución

$$p_X(x) = \frac{2\lambda}{\pi\,(x^2+\lambda^2)}, \qquad x > 0 \tag{1}$$

   siendo λ un parámetro determinista tal que $\lambda > 0$.

   (a) Determine el estimador de máxima verosimilitud de λ basado en una única observación de la variable X, $\widehat{\lambda}_{\text{ML}}$.

(b) Se realizan dos observaciones $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ independientes de la variable X, resultando $x^{(1)} = 4$ y $x^{(2)} = 1$. Determine el estimador ML de λ basado en $(x^{(1)}, x^{(2)})$.

Solution:

(a) $\lambda_{\mathrm{ML}} = x$.

(b) $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \sqrt{x^{(1)}x^{(2)}} = 2$.

4. Todas las mañanas, una secretaria recibe exactamente una llamada de su jefe. La llamada llega al cabo de x minutos de haber comenzado su jornada laboral, siguiendo una distribución

$$p_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad 0 < x \text{ minutos.}$$

Todas las horas de llamada son i.i.d.

(a) Los últimos tres días han llegado llamadas del jefe cuando habían transcurrido una hora y media, tres horas y cuarto y cuatro horas y cuarto desde el comienzo de la jornada. Estime el valor de λ usando máxima verosimilitud. No olvide especificar sus unidades.

(b) Calcule cuál es el tiempo medio transcurrido, según el modelo anterior, desde el comienzo de la jornada hasta que llama el jefe.

Solution:

(a) $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{180}\ \mathrm{min}^{-1}$

(b) $\mathbb{E}[x|\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}] = 180$ min