Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

Notación

- Decisor NP: Decisor de Neyman-Pearson.
- $P_{H|X}(h|x)$: probabilidad *a posteriori* de la hipótesis $H = h$ dada la observación $X = x$.
- P_{FA}: Probabilidad de falsa alarma.
- P_{D}: Probabilidad de detección.

1. En un sistema de reconocimiento de voz, se utiliza un detector de palabras clave para activar comandos específicos en dispositivos electrónicos. El sistema necesita diferenciar entre dos situaciones:

   - $H = 0$: solo hay ruido ambiental, sin presencia de la palabra clave.
   - $H = 1$: la palabra clave está presente en el audio, junto con el ruido de fondo.

   La amplitud de la señal procesada, X, se modela como una variable aleatoria continua. Dependiendo de la presencia o ausencia de la palabra clave, la amplitud sigue una función de densidad de probabilidad diferente:

   - Bajo la hipótesis $H = 0$ (solo hay ruido ambiental):
   $$p_{X|H}(x|0) = \frac{1}{2}\exp(-|x+1|)$$
   - Bajo la hipótesis $H = 1$ (presencia de la palabra clave):
   $$p_{X|H}(x|1) = 2\exp(-2x) \qquad x \geq 0$$

   (a) Obtenga el decisor de Neyman-Pearson dado por $P_{\mathrm{FA}} \leq 0.1$.

   (b) Determine la probabilidad de detección del decisor de Neyman-Pearson.

Solution:

(a) $$\phi_{\mathrm{NP}} = \begin{cases} D = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} 0.7845 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(b) $P_{\mathrm{D}} \approx 0.7917$

2. Considérese un examen tipo test donde cada pregunta tiene 3 posibles opciones y solo una es correcta. En cada pregunta, cada alumno puede marcar tantas opciones como desee. La política de puntuación de estas preguntas es la siguiente:

   - Marcar la respuesta correcta suma 1 punto.
   - Cada respuesta incorrecta resta medio punto.

   Para seguir una estrategia óptima de marcado de opciones vamos a traducir el problema a un escenario de decisión analítica. Como cada pregunta tiene tres opciones y solo una es correcta, consideramos 3 hipótesis: $H = 1$, $H = 2$ y $H = 3$, donde $H = h$ quiere decir que h es la opción correcta. Como se pueden marcar tantas opciones como se quiera, existen 7 posibles decisiones (no marcar ninguna opción equivale a marcarlas todas): $D = 1$, $D = 2$, $D = 3$, $D = 1, 2$, $D = 1, 3$, $D = 2, 3$ y $D = 1, 2, 3$ ($D = i, j$ quiere decir que se marcan las opciones i y j).

En primer lugar adoptaremos una política de costes tal que si M es la nota que se obtiene en cada pregunta y $c_{d,h}$ es el coste de decidir $D = d$ cuando la opción correcta es $H = h$, la nota de cada pregunta del examen se calcule mediante:

$$m_{d,h} = 1 - c_{d,h}$$

Por ejemplo, si hacemos que el coste de acertar cuando únicamente se marca la opción correcta sea 0, $c_{h,h} = 0$, la nota que se obtiene si la decisión equivale a marcar únicamente la respuesta correcta $D = h$ sería 1 punto:

$$m_{h,h} = 1 - c_{h,h} = 1 - 0 = 1$$

Análogamente, el coste de marcar todas las opciones debería ser $c_{(1,2,3),h} = 1$. Esto es porque al marcar todas las opciones, se suma un punto por marcar la opción correcta y se resta medio punto por cada una de las incorrectas, resultando en una nota de cero puntos:

$$m_{(1,2,3),h} = 1 - c_{(1,2,3),h} = 1 - 1 = 0$$

(a) Complete la tabla que define la política de costes necesaria para calcular la nota de cada pregunta en función de las opciones marcadas por el alumno.

	$H = 1$	$H = 2$	$H = 3$
$D = 1$	0		
$D = 2$		0	
$D = 3$			0
$D = 1, 2$			
$D = 1, 3$			
$D = 2, 3$			
$D = 1, 2, 3$	1	1	1

(b) Un estudiante lee el enunciado de una pregunta y estima que las probabilidades *a posteriori* de que cada una de las dos primeras opciones sea la correcta son: $P_{H|X}(H = 1|x) = 0.5$ y $P_{H|X}(H = 2|x) = 0.3$. ¿Cuál será la opción que marque el estudiante?

(c) En otra pregunta el estudiante tiene claro que la opción $H = 3$ no es correcta y que la opción $H = 1$ es más probable que la opción $H = 2$, por lo que duda entre marcar solo la primera opción (decidir $D = 1$) o marcar las opciones 1 y 2 (decidir $D = 1, 2$). ¿Para qué valores de $p = P_{H|X}(H = 1|x)$ el estudiante debería marcar las opciones 1 y 2 en lugar de solamente la opción 1?

Solution:

(a)

	$H = 1$	$H = 2$	$H = 3$
$D = 1$	0	1.5	1.5
$D = 2$	1.5	0	1.5
$D = 3$	1.5	1.5	0
$D = 1, 2$	0.5	0.5	2
$D = 1, 3$	0.5	2	0.5
$D = 2, 3$	2	0.5	0.5
$D = 1, 2, 3$	1	1	1

(b) El estudiante debería de marcar la opción de menor coste medio *a posteriori*. Si calculamos el coste de cada una de las decisiones:

$$\mathbb{E}\{c_{dh}|x\} = P_{H|X}(H = 1|x)c_{d,1} + P_{H|X}(H = 2|x)c_{d,2} + P_{H|X}(H = 3|x)c_{d,3}$$

	$\sum_{h=1}^{3} P_{H\|X}(H=h\|x)c_{d,h}$	Coste
$D=1$	$0\cdot 0.5+1.5\cdot 0.3+1.5\cdot 0.2$	0.75
$D=2$	$1.5\cdot 0.5+0\cdot 0.3+1.5\cdot 0.2$	1.05
$D=3$	$1.5\cdot 0.5+1.5\cdot 0.3+0\cdot 0.2$	1.2
$D=1,2$	$0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.3+2\cdot 0.2$	0.8
$D=1,3$	$0.5\cdot 0.5+2\cdot 0.3+0.5\cdot 0.2$	0.95
$D=2,3$	$2\cdot 0.5+0.5\cdot 0.3+2\cdot 0.2$	1.25
$D=1,2,3$	$0.5+0.3+0.2$	1

El estudiante debería marcar la opción $D=1$ que es la de menor coste medio.

(c) Como $H=3$ no es correcta, si $p=P_{H|X}(H=1|x)$ entonces $P_{H|X}(H=2|x)=1-p$ y los costes de cada una de las dos decisión entre las que duda el estudiante serán

- $D=1$: $0\cdot p+1.5\cdot(1-p)+1.5\cdot 0=1.5\cdot(1-p)$
- $D=1,2$: $0.5\cdot p+0.5\cdot(1-p)+2\cdot 0=0.5$

La decisión correcta será la de mínimo coste medio, y esto equivale a resolver la inecuación

$$1.5(1-p)>0.5\Rightarrow p<2/3$$

Es decir, si el estudiante considera que $P_{H|X}(H=1|x)<2/3$ debería marcar las opciones 1 y 2, mientras que si considera que $P_{H|X}(H=1|x)\geq 2/3$ debería marcar la opción 1 únicamente.