Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

Notación:

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto.
- $\widehat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X, conociendo que

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{1}{1-x} \quad 0 \leq s \leq 1-x;\ 0 < x < 1$$

$$p_X(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

(a) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Considere el estimador con forma analítica $\widehat{S}_{\text{q}} = w(1-x)^2$, y calcule el valor del coeficiente w que minimiza el error cuadrático medio de $\widehat{S}_{\text{q}}$.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{1-X}{2}$.

(b) $w = \dfrac{5}{8}$.

2. La variable aleatoria X tiene distribución

$$p_X(x) = \lambda x + (1-\lambda)(1-x), \qquad \lambda \in [0,1], x \in [0,1] \tag{1}$$

(a) Determine el estimador ML de λ basado en x.

(b) Se realizan dos observaciones $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ independientes de la variable X, resultando $x^{(1)} = 0.3$ y $x^{(2)} = 0.7$. Determine el estimador ML de λ basado en $(x^{(1)}, x^{(2)})$.

Solution:

(a) $\widehat{\lambda}_{\text{ML}} = u(x - 0.5)$

(b) $\widehat{\lambda}_{\text{ML}} = 0.5$

3. Las variables aleatorias S, X e Y siguen una distribución conjunta Gaussiana con los siguientes parámetros:

$$p_{S,X,Y}(s,x,y) \sim \mathcal{G}\left(\begin{bmatrix} s \\ x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1/4 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S en función de la variable aleatoria $Z = \dfrac{X+Y}{2}$.

Solution: $w = \dfrac{5}{8}$, $w_0 = -1/2$. $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{8}Z$

4. Se desea calibrar un sensor de temperatura cuya lectura se ve contaminada por ruido uniforme, i.e.,

$$X = S + N$$

donde X es la lectura del sensor, S el valor real de la temperatura, y N el ruido aditivo, con distribución $U(0, a)$, siendo a una constante desconocida.

Para la calibración del sensor se dispone de tres medidas diferentes, de las que se conocen tanto el valor de S como el de X: $\{(x^{(k)}, s^{(k)})\} = \{(0.5, 0), (3, 1), (4, 3)\}$.

(a) Determine, a partir de los tres valores de ruido asociados a las medidas disponibles, el estimador ML de a, $\widehat{A}_{\text{ML}}$.

Para el diseño del estimador de S a partir de X se asume que la distribución del ruido es $U(0, \widehat{A}_{\text{ML}})$. Si se sabe, además, que $S \sim U(0, 3)$:

(b) Calcule la distribución de probabilidad $p_{X|S}(x|s)$.

(c) Calcule la distribución de probabilidad $p_{X,S}(x, s)$ y represente el dominio de dicha fdp (i.e., la región del plano $X - S$ en el que dicha probabilidad toma valores no nulos).

(d) Obtenga el estimador lineal de la forma $\widehat{S}_l = wX$ de mínimo error cuadrático medio.

Indicación: En caso de no resolver el apartado (a), exprese sus respuestas de los apartados (b)-(d) en función de un valor $\widehat{A}_{\text{ML}}$ genérico.

Solution:

(a) $\widehat{A}_{\text{ML}} = 2$.

(b) $X|S \sim U(s, 2 + s)$.

(c) $p_{X,S}(x, s) = 1/6$
Dominio de definición: $0 < s < 3$, $s < x < 2 + s$

(d) $\widehat{S}_l = \dfrac{27}{44}X$.