Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

Notación:

- $\widehat{S}_{\mathrm{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. La variable aleatoria X presenta la siguiente verosimilitud:

$$p_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

siendo θ es un parámetro determinista, de valor desconocido, tal que $\theta \geq 0$.

(a) Se dispone de K muestras, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente, de la variable aleatoria X. Obtenga, a partir de dichas muestras, el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ, $\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Suponga ahora que se desea estimar el valor de otra variable S, relacionada con X, de la que se sabe que $\mathbb{E}(S) = 0$, $\mathbb{E}(S^2) = 1$ y $\mathbb{E}(SX) = 1/2$. Obtenga el estimador **lineal** de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}}$.

Nota: Para la resolución de este apartado, suponga $\theta = 2$.

Solution:

(a) $\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}} = -\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K} \ln(x^{(k)})}$

(b) $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X) = -6 + 9X$

2. Las variables aleatorias S y X están relacionadas a través de la distribución a posteriori:

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{x + 4s - s^2}{x + \frac{5}{3}}, \qquad 0 \leq s \leq 1, \qquad x \geq 0$$

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\mathrm{MMSE}}$.

(b) Determine el estimador de máximo a posteriori, $\hat{S}_{\mathrm{MAP}}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \mathbb{E}\{S|X = x\} &= \int_0^1 s\frac{x + 4s - s^2}{x + \frac{5}{3}} ds \\ &= \frac{6x + 13}{12x + 20}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\mathrm{MAP}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}}\{p_{S|X}(s|x)\} = \underset{s\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left\{\frac{x+4s-s^2}{x+\frac{5}{3}}\right\} \\ &= \underset{s\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left\{x+4s-s^2\right\}\end{aligned}$$

La parábola $x+4s-s^2$ tiene derivada

$$-2s+4$$

que se anula en $s=2$, que queda fuera del dominio de $p_{S|X}(s|x)$. Por tanto, $\hat{s}_{\mathrm{MAP}}$ debe coincidir con uno de los extremos del intervalo $[0,1]$. Dado que la derivada es positiva en ese intervalo, $p_{S|X}(s|x)$ es creciente en el dominio, y por tanto

$$\hat{s}_{\mathrm{MAP}} = 1$$