Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen

Notación

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. Sea S una variable aleatoria continua con la siguiente distribución:

$$p_S(s) = \begin{cases} 2s, & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y sabiendo que:

$$p_{X|S}(x|s) = \begin{cases} 2sx - s + 1, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Obtenga el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Obtenga el estimador lineal de menor error cuadrático medio de S a la vista de X ($\widehat{S}_{\text{LMSE}}$):

Solution:

(a)

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p_{S|X}(s|x) = \begin{cases} \dfrac{6s(2sx - s + 1)}{4x + 1}, & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{3x+\frac{1}{2}}{4x+1}$

(b) $\mathbb{E}\{X\} = \frac{11}{18}$
$\mathbb{E}\{X^2\} = \frac{4}{9}$
$Var(X) = 0.071$
$\mathbb{E}\{S\} = \frac{2}{3}$
$\mathbb{E}\{SX\} = \frac{5}{12}$
$Covar(X, Y) = 0.00926$
$\widehat{S}_{\text{LMSE}} = 0.13x + 0.58$

2. Una variable aleatoria X sigue una distribución de gamma inversa con paramétros deterministas $\alpha > 0$ y $\beta > 0$:

$$p_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{(\alpha - 1)!} x^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right), \qquad x > 0$$

(a) Suponiendo conocido el valor de α, determine el estimador de máxima verosimilitud de β, $\widehat{\beta}_{\mathrm{ML}}$, basado en un conjunto de K observaciones independientes de la variable aleatoria X, $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

(b) Si se dispone del siguiente conjunto de observaciones:

$$\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{4} = \left\{4, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}$$

y asumiendo que $\alpha = 1$, calcule el valor de $\widehat{\beta}_{\mathrm{ML}}$. Para ese valor de $\widehat{\beta}_{\mathrm{ML}}$, obtenga el valor de la (máxima) verosimilitud que se obtendría con el conjunto de observaciones dado. Si lo desea, puede dejar el resultado en función del número e o $\exp()$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\beta_{ML} &= \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \log(p_{x|\beta}(x_k|\beta)) = \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!} x_k^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x_k}} \right) \right) \\
&= \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha \log(\beta) - \log((\alpha-1)!) - (\alpha+1)\log(x_k) - \frac{\beta}{x_k} \right) \\
&= \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \left(K\alpha \log(\beta) - K\log((\alpha-1)!) - (\alpha+1)\sum_{k=1}^{K} \log(x_k) - \sum_{k=1}^{K} \frac{\beta}{x_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^{K} \log(p_{x|\beta}(x_k|\beta))}{\partial \beta} = K\frac{\alpha}{\beta} - \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{x_k}$$

$$K\frac{\alpha}{\hat{\beta}_{ML}} - \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{x_k} = 0$$

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\alpha K}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{x_k}}$$

(b) The estimated ML solution would be

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{4}{\frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}} = 1, \tag{1}$$

and the associated likelihood is

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \prod_{k=1}^{K} \hat{\beta}_{ML} x_k^{-2} e^{-\frac{\hat{\beta}_{ML}}{x_k}} = \prod_{k=1}^{K} x_k^{-2} e^{-\frac{1}{x_k}} \\
&= \frac{1}{16} e^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{9}{4} e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{25}{16} e^{-\frac{5}{4}} = \frac{225}{1024} e^{-4}.
\end{aligned} \tag{2}$$