Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen

Notación:

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.

1. Las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 se distribuyen conjuntamente según la función de densidad de probabilidad:

$$p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \mathrm{G}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.75 & 1.25 & 1 \\ 1.25 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio de X_1 a la vista de X_2 y X_3, $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_2, X_3)$.

(b) ¿Es el estimador $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_2, X_3)$ insesgado?

(c) En lugar de tener acceso a X_2 y X_3, solo se puede observar X_4, y se sabe además que $X_4 = X_2 + X_3$. Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio de X_1 a la vista de X_4, $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_4)$.

Solution:

(a) $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_2, X_3) = X_2 + \dfrac{X_3}{2}$

(b) $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_2, X_3)$ es insesgado

(c) $\widehat{X}_{1\text{MMSE}}(X_4) = \dfrac{3}{4} \cdot X_4$

2. Las variables aleatorias S y X están relacionadas a través de la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$p_{S,X}(s,x) = \theta x^{\theta-1} \qquad x \leq s \leq x+1 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

donde θ es un parámetro determinista, de valor desconocido, tal que $0 < \theta \leq 1$.

(a) Determine $p_{S|X}(s|x)$.

(b) Obtenga el estimador de error cuadrático medio mínimo de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(c) Determine el estimador de mínimo error absoluto medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

Solution:

(a) $p(s|x) = 1 \qquad x \leq s \leq x+1$

(b) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = 1 + \dfrac{X}{2}$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAD}} = 1 + \dfrac{X}{2}$