Grado en Ingeniería de Comunicaciones Móviles y Espaciales
Grado en Ingeniería Telemática

Notación

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.

1. Se conoce la siguiente información estadística que relaciona la variable aleatorio S y las variables aleatorias X_1 y X_2:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}\{S\} = 0 & \mathbb{E}\{X_1\} = 0 & \mathbb{E}\{X_2\} = 1 \\ \mathbb{E}\{X_1^2\} = 2 & \mathbb{E}\{X_2^2\} = 3 & \mathbb{E}\{S^2\} = 3 \\ \mathbb{E}\{X_1X_2\} = 0.5 & \mathbb{E}\{SX_1\} = 2 & \mathbb{E}\{SX_2\} = 1 \end{array}$$

   (a) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio que permite estimar S a partir de X_1, $\widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1)$.

   (b) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio que permite estimar S a partir de X_1 y X_2, $\widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1, X_2)$.

   (c) Indique cuál de los dos estimadores presenta un menor error cuadrático medio y el valor de dicho error.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1) = X_1$

(b) $\widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1, X_2) = -\frac{4}{15} + \frac{14}{15}X_1 + \frac{4}{15}X_2$

(c) $\mathbb{E}\Big\{\Big(S - \widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1, X_2)\Big)^2\Big\} < \mathbb{E}\Big(S - \widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1)\Big)^2\Big\}$.

$\mathbb{E}\Big\{\Big(S - \widehat{S}_{\text{LMSE}}\ (X_1, X_2)\Big)^2\Big\} = \frac{13}{15}$

2. Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 2sx & 0 < s < 2x, \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Determínese el estimador $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

   (b) Calcule el sesgo del estimador $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MAD}} = \sqrt{2}X$

(b) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAD}}\right\} = \frac{16}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{5} \approx -0.0647$