uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Asignatura

Nombre y Apellidos

Fecha Curso Grupo

PROBLEMA 1

- Test de habilidades matemáticas
- $X \to$ v.a. en "Estadística y probabilidad" $\Rightarrow [0,1]$.
  $Y \to$ v.a. en "Funciones y gráficos" $\Rightarrow [0,1]$.
- $$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12(1-x)\,y\,(1-y) & 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

0,1 a) obtener $p_X(x)$ y $p_Y(y)$

$$p_X(x) = \int_{(y)} p_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 12\cdot(1-x)\cdot y\cdot(1-y)\cdot dy = 12(1-x)\cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= 12(1-x)\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = 12(1-x)\cdot\frac{1}{6} = 2(1-x)$$

$$\boxed{p_X(x) = 2(1-x) \quad 0\leq x\leq 1}$$

$$p_Y(y) = \int_{(x)} p_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 12(1-x)\cdot y\,(1-y)\cdot dx = y\cdot(1-y)\cdot 12\cdot x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= y\cdot(1-y)\cdot 12\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 6y(1-y)$$

$$\boxed{p_Y(y) = 6y(1-y) \quad 0\leq y\leq 1}$$

0,25 b) calcular $\hat{x}_{MMSE}(Y)$

$$\hat{x}_{MMSE}(Y) = \int_{(x)} x\cdot p(x|y)\cdot dx =$$

$\to$ X e Y son independientes

$p(x,y) = p(x)\cdot p(y) \Rightarrow$

Como son independientes: $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(x)\cdot \cancel{p(y)}}{\cancel{p(y)}} = p(x)$

$$\hat{x}_{MMSE} = \int_{0\,(x)}^{1} x\cdot p(x)\,dx = \int_{0\,(x)}^{1} x\cdot 2(1-x)\cdot dx = 2\cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\hat{x}_{MMSE} = \frac{1}{3}}$$

c) obtener $\hat{x}_{MAD}(y)$

0'25

$$\int_0^{\hat{x}_{MAD}} p(x|y)\,dx = \frac{1}{2} = \int_{\hat{x}_{MAD}}^{x} p(x|y)\cdot dx$$

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(x)\cdot \cancel{p(y)}}{\cancel{p(y)}} = p(x)$$

$$\int_0^{\hat{x}_{MAD}} 2(1-x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$2x - x^2 \Big|_0^{\hat{x}_{MAD}} = \frac{1}{2}$$

$$2\hat{x}_{MAD} - \hat{x}_{MAD}^2 = \frac{1}{2}$$

$$-\hat{x}_{MAD}^2 + 2\hat{x}_{MAD} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\hat{x}_{MAD}^2 - 2\hat{x}_{MAD} + \frac{1}{2} = 0$$

not valid!

$$\hat{x}_{MAD} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{2}}{2} \simeq 1'71 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq 0'2928 \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{x}_{MAD} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

d) Calcular el MSE de los estimadores obtenidos en apartados (b) y (c).

0'5

• $E\{(X-\hat{X}_{MMSE})^2\} = E\{(X-1/3)^2\} = E\{X^2+1/9-2/3X\}$

$= E\{X^2\} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\cdot \underbrace{E\{X\}}_{=\frac{1}{3}}$

$= E\{X^2\} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$E\{X^2\} = \int_{0\,(x)}^{1} x^2\cdot p(x)\,dx = \int_{0\,(x)}^{1} x^2\cdot 2(1-x)\,dx = 2\cdot \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^1$

$= 2\cdot\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$

$= \frac{1}{6}$

$$\boxed{E\{(X-\hat{X}_{MMSE})^2\} = \frac{1}{18}}$$

• $E\{(X-\hat{X}_{MAD})^2\} = Var\{X-\hat{X}_{MAD}\} + Sesgo^2(\hat{X}_{MAD})$

$= Var\{X\} + Sesgo^2(\hat{X}_{MAD})$

$Var\{X\} = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

$Sesgo(\hat{X}_{MAD}) = E\{X-\hat{X}_{MAD}\} = E\{X\} - E\{\hat{X}_{MAD}\}$

$= \frac{1}{3} - \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0'0404$

$\Downarrow$

$E\{(X-\hat{X}_{MAD})^2\} = Var\{X\} + Sesgo^2(\hat{X}_{MAD})$

$= \frac{1}{18} + (0'0404)^2 \simeq 0'0571$

$$\boxed{E\{(X-\hat{X}_{MAD})^2\} \simeq 0'0571}$$

Como se puede ver, $E\{(x-\hat{x}_{MSE})^2\} < E\{(x-\hat{x}_{MAD})^2\}$. Dado que $\hat{x}_{MSE}$ se diseña para minimizar el MSE, es lógico que $E\{(x-\hat{x}_{MSE})^2\}$ sea menor.

e) Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál sería el valor predicho de su puntuación en la prueba "estadística y probabilidad" con menor MSE?

Dado que $\hat{x}_{MSE} = \frac{1}{3}$ (y no depende de y)

$\downarrow$ El valor predicho es $\frac{1}{3}$