TEORÍA MODERNA DE LA DETECCIÓN Y ESTIMACIÓN

Ejemplos Teóricos de Decisión Analítica

Curso 2024/2025

- **Ejemplo 2.1**

  Obtener las regiones de decisión del decisor $\phi(x) = u(x^2 - 1)$, donde $u(\cdot)$ es la función escalón, definido sobre $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

$$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 < 0\} = (-1, 1)$$
$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

- **Ejemplo 2.2**

  Supóngase un problema de decisión multiclase con 3 hipótesis cuyas verosimilitudes son:

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|0) &= 1, & 0 < x < 1 \\ p_{X|H}(x|1) &= 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ p_{X|H}(x|2) &= 2x, & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

  donde las probabilidades a priori de las hipótesis son: $P_H(0) = 0{,}4$ y $P_H(1) = P_H(2) = 0{,}3$ y la política de costes viene dada por $c_{hh} = 0,\ h = 0, 1, 2$ y $c_{dh} = 1,\ h \neq d$.

  Calcule el riesgo (coste medio) del decisor:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0{,}5 \\ 2, & x > 0{,}5 \end{cases}$$

  Sabiendo que el riesgo del decisor se define según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} r_\phi =& \mathbb{E}\{c(D,H)\} = \sum_{d=0}^{M-1}\sum_{h=0}^{L-1} c_{dh} P\{D = d, H = h\} \\ =& \sum_{d=0}^{M-1}\sum_{h=0}^{L-1} c_{dh} P_H(h) P_{D|H}(d|h) = \sum_{d=0}^{M-1}\sum_{h=0}^{L-1} c_{dh} P_H(h) \int_{\mathcal{X}_d} p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|h) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

  donde M es el número de posibles decisiones ($M = 3$) y L el número de hipótesis ($L = 3$).

  Sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned} r_\phi =& c_{00} P_H(0) P_{D|H}(0|0) + c_{01} P_H(1) P_{D|H}(0|1) + c_{02} P_H(2) P_{D|H}(0|2) + \\ &+ c_{10} P_H(0) P_{D|H}(1|0) + c_{11} P_H(1) P_{D|H}(1|1) + c_{12} P_H(2) P_{D|H}(1|2) + \\ &+ c_{20} P_H(0) P_{D|H}(2|0) + c_{21} P_H(1) P_{D|H}(2|1) + c_{22} P_H(2) P_{D|H}(2|2) \end{aligned}$$

  Sabiendo que:

  $c_{00} = c_{11} = c_{22} = 0$
  $c_{01} = c_{02} = c_{10} = c_{12} = c_{20} = c_{21} = 1$

  se obtiene:

$$\begin{aligned} r_\phi =& P_H(1) P_{D|H}(0|1) + P_H(2) P_{D|H}(0|2) + P_H(0) P_{D|H}(1|0) + \\ &+ P_H(2) P_{D|H}(1|2) + P_H(0) P_{D|H}(2|0) + P_H(1) P_{D|H}(2|1) \end{aligned}$$

Si calculamos dichas probabilidades, se tiene:

$P_{D|H}(0|1) = P_{D|H}(0|2) = 0$ (nunca se decide $D = 0$)

$P_{D|H}(1|0) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{x|0}(x|0)\,dx = \int_0^{0,5} 1\,dx = 0,5$

$P_{D|H}(2|0) = \int_{\mathcal{X}_2} p_{x|0}(x|0)\,dx = \int_{0,5}^{1} 1\,dx = 0,5$

$P_{D|H}(1|2) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{x|2}(x|2)\,dx = \int_0^{0,5} 2x\,dx = 0,25$

$P_{D|H}(2|1) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{x|1}(x|1)\,dx = \int_{0,5}^{1} 2(1-x)\,dx = 0,25$

Si se sustituye:

$$r_\phi = 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,25 = 0,55$$

- **Ejemplo 2.3**

  Continuando con el Ejemplo 2.2, calcular el riesgo condicional de cada decisión.

  Para este ejemplo, el riesgo condicional de cada decisión d, se calcula como:

$$\mathbb{E}\{c(d,H)|x\} = c_{d0}P_{H|X}(0|x) + c_{d1}P_{H|X}(1|x) + c_{d2}P_{H|X}(2|x)$$

  donde se pueden obtener las distribuciones a posteriori mediante la aplicación del Teorema de Bayes:

$$P_{H|X}(0|x) = \frac{p_{X|H}(x|0)P_H(0)}{\sum\limits_{h=0}^{2} p_{X|H}(x|h)P_H(h)} = \frac{1\cdot 0,4}{1\cdot 0,4 + 2(1-x)\cdot 0,3 + 2x\cdot 0,3} = 0{,}4$$

$$P_{H|X}(1|x) = \frac{p_{X|H}(x|1)P_H(1)}{\sum\limits_{h=0}^{2} p_{X|H}(x|h)P_H(h)} = \frac{2(1-x)\cdot 0{,}3}{1} = 0{,}6(1-x)$$

$$P_{H|X}(2|x) = \frac{p_{X|H}(x|2)P_H(2)}{\sum\limits_{h=0}^{2} p_{X|H}(x|h)P_H(h)} = \frac{2x\cdot 0{,}3}{1} = 0{,}6x$$

  se llega a:

  - Para $d=0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{c(0,H)|x\} &= c_{00}P_{H|X}(0|x) + c_{01}P_{H|X}(1|x) + c_{02}P_{H|X}(2|x)\\ &= 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}6(1-x) + 1\cdot 0{,}6x = 0{,}6\end{aligned}$$

  - Para $d=1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{c(1,H)|x\} &= c_{10}P_{H|X}(0|x) + c_{11}P_{H|X}(1|x) + c_{12}P_{H|X}(2|x)\\ &= 1\cdot 0{,}4 + 0\cdot 0{,}6(1-x) + 1\cdot 0{,}6x = 0{,}4 + 0{,}6x\end{aligned}$$

  - Para $d=2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{c(2,H)|x\} &= c_{20}P_{H|X}(0|x) + c_{21}P_{H|X}(1|x) + c_{22}P_{H|X}(2|x)\\ &= 1\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}6(1-x) + 0\cdot 0{,}6x = 1 - 0{,}6x\end{aligned}$$

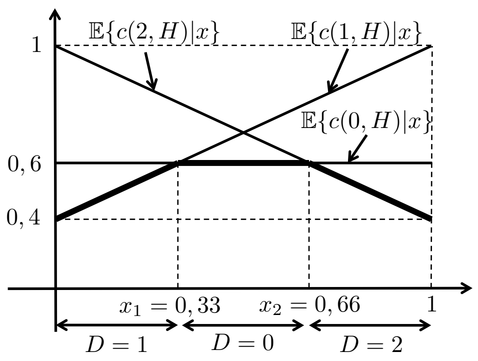
- **Ejemplo 2.4**

  Obtener el decisor de mínimo riesgo del problema de decisión dado en el Ejemplo 2.2.

  Partiendo de las expresiones del riesgo condicional obtenidas en el Ejemplo 2.3,

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}\{c(0,H)|x\} &= \ 0{,}6 \\ \mathbb{E}\{c(1,H)|x\} &= \ 0{,}4 + 0{,}6x \\ \mathbb{E}\{c(2,H)|x\} &= \ 1 - 0{,}6x \end{aligned}$$

  sólo hay que analizar para cada valor de x qué término es menor.

  Cálculo de x_1:

  $$0,4 + 0,6x_1 = 0,6 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \simeq 0.\widehat{3}$$

  Cálculo de x_2:

  $$1 - 0,6x_2 = 0,6 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \simeq 0.\widehat{6}$$

  El decisor bayesiano quedaría:

  $$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/3 \\ 0, & 1/3 < x < 2/3 \\ 2, & 2/3 < x < 1 \end{cases}$$

(Otra posible solución aplicando el Teorema de Bayes)

$$P_{H|\mathbf{X}}(h|\mathbf{x}) = \frac{p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|h)P_H(h)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}$$

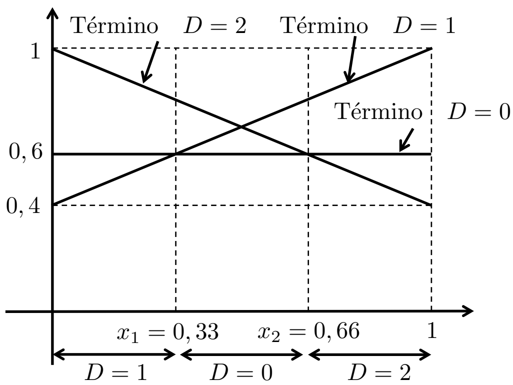
$$\phi^*(\mathbf{x}) = \arg\min_d \sum_{h=0}^{L-1} c_{dh} \frac{p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|h)P_H(h)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}$$

y teniendo en cuenta que el denominador no afecta a la decisión:

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \arg\min_d \sum_{h=0}^{L-1} c_{dh}\, p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|h)P_H(h)$$

- Si $D = 0$:
  $\sum_{h=0}^{2} c_{0h}\, p_{X|H}(x|h)P_H(h) = 0{\cdot}1{\cdot}0{,}4 + 1{\cdot}2(1-x){\cdot}0{,}3 + 1{\cdot}2x{\cdot}0{,}3 = 0{,}6.$
- Si $D = 1$:
  $\sum_{h=0}^{2} c_{1h}\, p_{X|H}(x|h)P_H(h) = 1\cdot 1\cdot 0{,}4 + 0\cdot 2(1-x)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 2x\cdot 0{,}3 = 0{,}4 + 0{,}6x.$
- Si $D = 2$:
  $\sum_{h=0}^{2} c_{2h}\, p_{X|H}(x|h)P_H(h) = 1\cdot 1\cdot 0{,}4 + 1\cdot 2(1-x)\cdot 0{,}3 + 0\cdot 2x\cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}6x.$

Minimizando el coste para cada x (después de dibujar cada término como función de x), se llega a la misma decisión que antes:



Cálculo de x_1:
$0,4 + 0,6x_1 = 0,6 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3} \simeq 0.\widehat{3}$

Cálculo de x_2:
$1 - 0,6x_2 = 0,6 \Rightarrow x_2 = \dfrac{2}{3} \simeq 0.\widehat{6}$
y, por tanto,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/3 \\ 0, & 1/3 < x < 2/3 \\ 2, & 2/3 < x < 1 \end{cases}$$

- **Ejemplo 2.5**

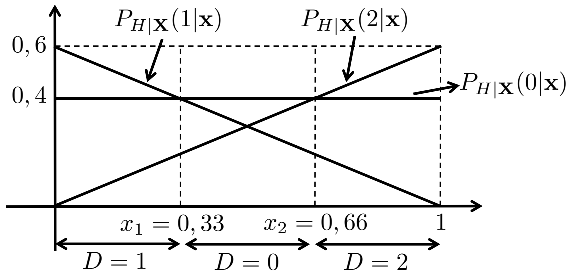
  Obtener el decisor MAP del problema de decisión del Ejemplo 2.2.

  Para este problema, las distribuciones a posteriori obtenidas son (calculadas en el Ejemplo 2.3):

  $P_{H|X}(0|x) = 0{,}4$

  $P_{H|X}(1|x) = 0{,}6(1 - x)$

  $P_{H|X}(2|x) = 0{,}6x$



  Lo que lleva al decisor:

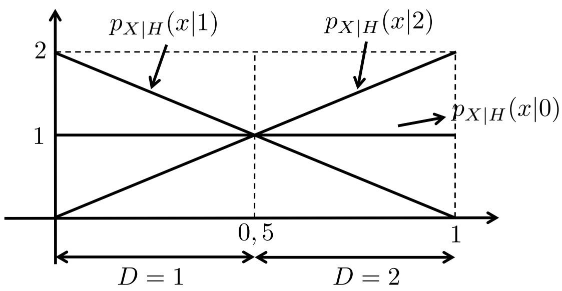
$$\phi_{\mathrm{MAP}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/3 \\ 0, & 1/3 < x < 2/3 \\ 2, & 2/3 < x < 1 \end{cases}$$

- **Ejemplo 2.6**

  Obtener el decisor ML del problema de decisión del Ejemplo 2.2.

  Para obtener el decisor simplemente hay que analizar para cada valor de x que verosimilitud toma mayor una probabilidd:

$$\begin{array}{lll} p_{X|H}(x|0) = & 1 & 0 < x < 1 \\ p_{X|H}(x|1) = & 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ p_{X|H}(x|2) = & 2x & 0 < x < 1 \end{array}$$



  Lo que proporciona el siguiente decisor:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 0{,}5 \\ 2, & 0{,}5 < x < 1 \end{cases}$$

  Como se puede observar, nunca se decide $D = 0$.

- **Ejemplo 2.7**

  Considere un problema de decisión binario dado por las siguientes verosimilitudes:

  $$\begin{array}{lll} p_{X|H}(x|0) = & 2\exp(-2x) & x > 0 \\ p_{X|H}(x|1) = & \exp(-x) & x > 0 \end{array}$$

  donde se sabe que $P_H(0) = 2/3$ y se tiene la siguiente política de costes: $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = 1$ y $c_{01} = 3$.

  Obtener el decisor de mínimo riesgo (coste), el de mínima probabilidad de error y el decisor ML, calculando para cada uno de ellos su probabilidad de error.

  - **Decisor de mínimo riesgo (coste)**:

    $$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} = \frac{\exp(-x)}{2\exp(-2x)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{(c_{10} - c_{00})P_H(0)}{(c_{01} - c_{11})P_H(1)} = \frac{1-0}{3-0} \cdot \frac{2/3}{1/3}$$

    $$\exp(x) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \ln\frac{4}{3} \simeq 0{,}28$$

    Calculamos P_{FA}, P_{M} y P_{e}:

    $$P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)dx = \int_{\ln\frac{4}{3}}^{\infty} 2\exp(-2x)dx = \exp\left(-2\ln\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{16}$$

    $$P_{\mathrm{M}} = P_{D|H}(0|1) = \int_{\mathcal{X}_0} p_{X|H}(x|1)dx = \int_{0}^{\ln\frac{4}{3}} \exp(-x)dx = 1-\exp\left(-\ln\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

    $$P_{\mathrm{e}} = P_H(1)P_{\mathrm{M}} + P_H(0)P_{\mathrm{FA}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16} = \frac{11}{24}$$

  - **Decisor MAP**:

    Dado que el decisor de mínima probabilidad de error es el decisor MAP, procedemos a su cálculo a través de la siguiente expresión:

    $$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} = \frac{\exp(-x)}{2\exp(-2x)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)} = \frac{2/3}{1/3}$$

    $$\exp(x) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 4 \qquad \Rightarrow \qquad x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \ln 4 \simeq 1{,}38$$

Calculamos P_{FA}, P_{M} y P_{e}:

$$P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)dx = \int_{\ln 4}^{\infty} 2\exp(-2x)dx = \exp\Big(-2\ln 4\Big) = \frac{1}{16}$$

$$P_{\mathrm{M}} = P_{D|H}(0|1) = \int_{\mathcal{X}_0} p_{X|H}(x|1)dx = \int_{0}^{\ln 4} \exp(-x)dx = 1 - \exp\Big(-\ln 4\Big) = \frac{3}{4}$$

$$P_{\mathrm{e}} = P_H(1)P_{\mathrm{M}} + P_H(0)P_{\mathrm{FA}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{7}{24}$$

- **Decisor ML**:

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} = \frac{\exp(-x)}{2\exp(-2x)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 1$$

$$\exp(x) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 2 \qquad \Rightarrow \qquad x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \ln 2 \simeq 0{,}69$$

Calculamos P_{FA}, P_{M} y P_{e}:

$$P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = \int_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)dx = \int_{\ln 2}^{\infty} 2\exp(-2x)dx = \exp\Big(-2\ln 2\Big) = \frac{1}{4}$$

$$P_{\mathrm{M}} = P_{D|H}(0|1) = \int_{\mathcal{X}_0} p_{X|H}(x|1)dx = \int_{0}^{\ln 2} \exp(-x)dx = 1 - \exp\Big(-\ln 2\Big) = \frac{1}{2}$$

$$P_{\mathrm{e}} = P_H(1)P_{\mathrm{M}} + P_H(0)P_{\mathrm{FA}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

- **Ejemplo 2.8**

  Dadas las verosimilitudes:

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|1) = &\quad 2x \qquad & 0 \leq x \leq 1 \\ p_{X|H}(x|0) = &\quad 2(1-x) \qquad & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

  diseñar el decisor NP dado por la cota $\alpha = 0{,}1 (P_{\mathrm{FA}} \leq \alpha)$.

  Calculamos el LRT:

$$\frac{2x}{2(1-x)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta$$

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta}$$

  Por tanto, la probabilidad de falsa alarma será:

$$P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = \int_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} 2(1-x)dx = \alpha = 0{,}1$$

$$P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = \int_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} 2(1-x)dx = \frac{1}{(1+\eta)^2}$$

  Si igualamos $P_{\mathrm{FA}} = \alpha$, se tiene

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \qquad \Rightarrow \eta = \frac{1}{\sqrt{0{,}1}} - 1 \simeq 2{,}16$$

  Una vez calculado el valor de η, se puede establecer el decisor NP:

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta} = \frac{2{,}16}{1+2{,}16} \simeq 0{,}6835$$

- **Ejemplo 2.9**

  Dadas las verosimilitudes:

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|1) = &\ 2x && 0 \leq x \leq 1 \\ p_{X|H}(x|0) = &\ 2(1-x) && 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

  diseñar el decisor Minimax.

  Como es sabido, en el decisor minimax (para un problema de decisión de 2 clases), se cumple que $P_{\mathrm{FA}} = P_{\mathrm{M}}$ y, por tanto, se puede concluir que $P_{\mathrm{D}} = 1 - P_{\mathrm{FA}}$.

  Partiendo del cociente de verosimilitudes del Ejemplo 2.8, calculamos la probabilidad de falsa alarma:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{FA}} = P_{D|H}(1|0) = &\int_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} 2(1-x)dx = 2x - x^2 \Big|_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} \\ &= 2 - 1 - \frac{2\eta}{1+\eta} + \frac{\eta^2}{(1+\eta)^2} \\ &= \frac{(1+\eta)^2 - 2\eta(1+\eta) + \eta^2}{(1+\eta)^2} \\ &= \frac{1}{(1+\eta)^2} \end{aligned}$$

  A continuación, calculamos la probabilidad de detección:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{D}} = P_{D|H}(1|1) = &\int_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} 2xdx = x^2 \Big|_{\frac{\eta}{1+\eta}}^{1} \\ &= 1 - \frac{\eta^2}{(1+\eta)^2} \end{aligned}$$

  Haciendo $P_{\mathrm{D}} = 1 - P_{\mathrm{FA}}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\eta^2}{(1+\eta)^2} &= 1 - \frac{1}{(1+\eta)^2} \\ \frac{(\eta+1)^2 - \eta^2}{(1+\eta)^2} &= \frac{(\eta+1)^2 - 1}{(1+\eta)^2} \\ \eta^2 = \pm 1 &\Longrightarrow \eta = 1 \end{aligned}$$

  Con esto, quedaría:

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta} = \frac{1}{2}$$

- **Ejemplo 2.10**

  Un problema de decisión binario tiene las siguientes verosimilitudes:

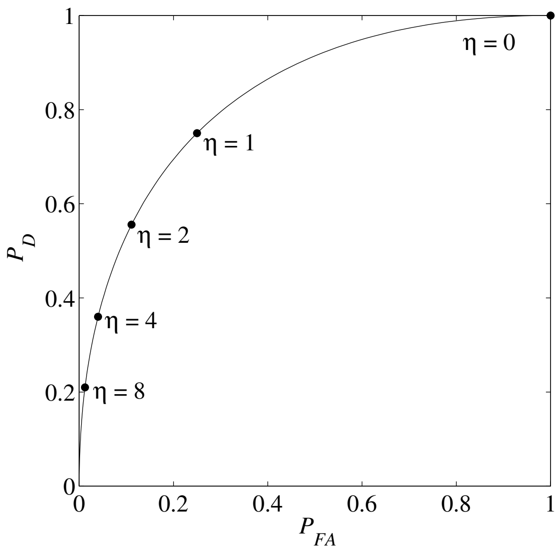
$$
\begin{aligned}
p_{X|H}(x|1) &= 2x, && 0 \leq x \leq 1 \\
p_{X|H}(x|0) &= 2(1-x), && 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

  El LRT tiene la forma

$$
\frac{x}{1-x} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta
$$

  Por tanto,

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{FA}}(\eta) &= \frac{1}{(1+\eta)^2} \\
P_{\mathrm{D}}(\eta) &= 1 - \frac{\eta^2}{(1+\eta)^2}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&\text{Si}\, \eta = 0 \Rightarrow && P_{\mathrm{FA}}(\eta) = 1,\ P_{\mathrm{D}}(\eta) = 1 \\
&\text{Si}\, \eta = 1 \Rightarrow && P_{\mathrm{FA}}(\eta) = \frac{1}{4},\ P_{\mathrm{D}}(\eta) = \frac{3}{4} \\
&\text{Si}\, \eta = 2 \Rightarrow && P_{\mathrm{FA}}(\eta) = \frac{1}{9} \simeq 0.\widehat{1},\ P_{\mathrm{D}}(\eta) = \frac{5}{9} \simeq 0.\widehat{5} \\
&\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{1}
$$