

Filtrado lineal

Lorena Álvarez Pérez

Universidad Carlos III de Madrid

Curso académico 2024/2025

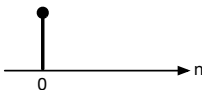
Índice

- 1 Repaso de señales y filtros en tiempo discreto
 - Señales discretas o secuencias
 - Filtros en tiempo discreto
- 2 Filtro de Wiener
 - Introducción
 - Obtención del filtro óptimo
 - Filtro de Wiener para filtrado de ruido
 - Filtro FIR de Wiener para predicción lineal
 - Filtro FIR de Wiener para cancelación de ruido

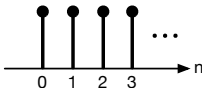
Señal discreta

- Secuencia indexada de números reales o complejos.
- Una secuencia es función de una variable entera $n \Rightarrow x[n]$.
- En esta asignatura, la variable independiente n es el tiempo ($x[n]$ sólo está definida para **valores enteros de n**).
- Ejemplos:

- Impulso unitario: $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



- Escalón unitario: $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



Clasificación de las señales discretas

• Duración

- Secuencia finita
 - $x[n] = 0$ fuera de un intervalo $[N_1, N_2]$ de duración finita.
- Secuencia infinita
 - Las que no son de duración finita.
 - Secuencia de lado izquierdo: $x[n] = 0$ para $n > n_0$
 - Secuencia de lado derecho: $x[n] = 0$ para $n < n_0$

• Aleatoriedad

- Secuencias deterministas
 - Pueden reproducirse exactamente con medidas repetidas
 - Ejemplo: respuesta al impulso de un sistema LTI
- Secuencias aleatorias
 - No pueden repetirse de manera predecible
 - Ejemplo: ruido de un canal de comunicaciones

Filtros discretos

- Un **filtro** es un **sistema** que transforma una señal de entrada ($x[n]$) en otra secuencia discreta ($y[n]$), denominada **salida del filtro**, mediante un conjunto fijo de reglas o funciones (Ejemplo: $y[n] = (x[n])^2 + 3$).
- Propiedades de un sistema:
 - Memoria: La salida no depende de valores pasados ni futuros de la entrada.
 - Causal: La salida no depende de valores futuros de la entrada.
 - Invertible: Es posible recuperar la entrada al filtro conociendo la salida.
 - Estabilidad: Para cualquier $x[n]$ acotada, $y[n]$ también está acotada.
 - Linealidad: Dadas dos señales de entrada: $x_1[n]$ y $x_2[n]$, cuyas salidas respectivas son $y_1[n]$ e $y_2[n]$, cuando se presenta a la entrada del sistema $z[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$, la salida se puede obtener como $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$.
 - Invarianza: Dadas $x[n]$ e $y[n]$, se cumple que $\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$, para cualquier valor de n_0 .
- Si un filtro es **lineal e invariante en tiempo** (LTI), puede caracterizarse mediante su **respuesta al impulso** $h[n]$.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k]$$

Tipos de filtros LTI

Según sea $h[n]$, existen dos tipos de filtros:

- Filtros FIR (*Finite Impulse Response*)

- El número de coeficientes no-ceros de $h[n]$ es una secuencia finita de M instantes consecutivos de tiempo. De esta forma, se puede calcular la salida del filtro como se muestra a continuación:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

- Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*)

- El número de coeficientes no-ceros de $h[n]$ es infinito ($h[n] \neq 0$ para $n \geq 0$). La convolución no se puede implementar físicamente, y se describe el filtro IIR con ecuaciones en diferencia:

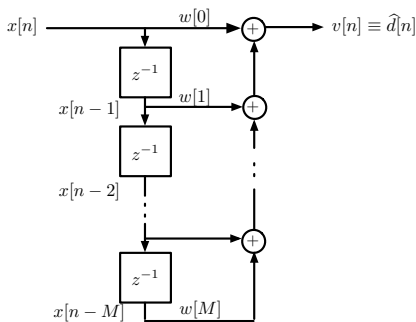
$$\sum_{k=0}^M a[k]y[n-k] = \sum_{j=0}^N b[j]x[n-j]$$

Para obtener $h[n]$, hay que recurrir a la transformada Z.

Filtros FIR

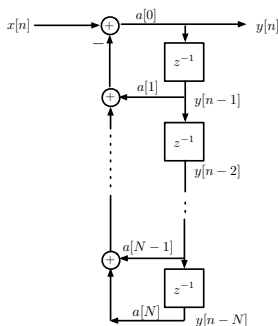
$w[n]$ ($\equiv h[n]$) tiene duración finita (supongamos, $M + 1$ coeficientes distintos de cero).

$$\hat{d}[n] = x[n] * w[n] = \sum_{k=0}^M w[k]x[n - k]$$



Modelo autorregresivo

- Autorregresivo (AR): $x[n] = \sum_{k=0}^N a[k]y[n-k]$

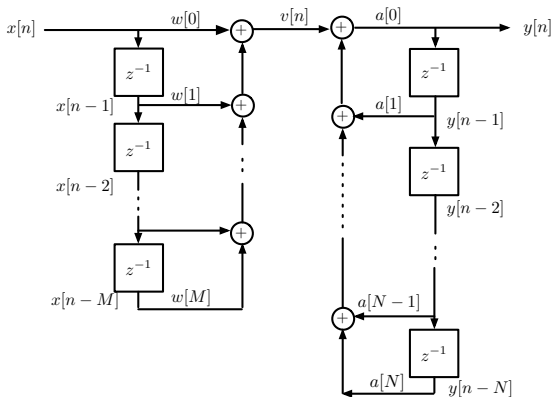


$$(a[0]y[n] + a[1]y[n-1] + a[2]y[n-2] + \dots + a[N]y[n-N] = x[n])$$

Filtros IIR

- Filtro (ARMA): Parte MA conectada en serie con una parte AR.

$$\sum_{l=0}^N a[l]y[n-l] = \sum_{k=0}^M w[k]x[n-k]$$



Representación vectorial de los filtros

La salida del filtro ARMA se puede obtener:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{a[0]} \left(\sum_{k=0}^M w[k]x[n-k] - \sum_{l=1}^N a[l]y[n-l] \right) \\ &= \frac{1}{a_0} [w_0, \dots, w_M, a_1, \dots, a_N] \times \begin{bmatrix} x[n] \\ \vdots \\ x[n-M] \\ y[n-1] \\ \vdots \\ y[n-N] \end{bmatrix} = \mathbf{w}^T \times \begin{bmatrix} x[n] \\ \vdots \\ x[n-M] \\ y[n-1] \\ \vdots \\ y[n-N] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{w}^T = \frac{1}{a_0} [w_0, \dots, w_M, a_1, \dots, a_N]^T$ son los coeficientes del filtro.

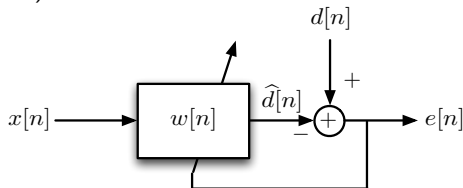
Filtros estacionarios y adaptativos

- Filtros estacionarios

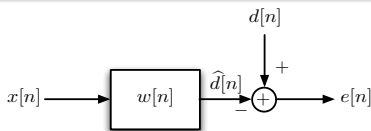
- Los coeficientes del filtro se obtienen una única vez y se mantienen fijos durante toda la vida operativa del filtro.
- El vector de pesos es constante en el tiempo.

- Filtros adaptativos

- Los coeficientes del filtro se actualizan constantemente cada vez que se realiza una predicción.
- El vector de pesos varía con el tiempo (sus valores dependen del instante n).



Elementos en un problema de diseño de filtros



- **Señal de entrada** ($x[n]$). Es la señal que va a ser “transformada” con el filtro.
- **Señal de referencia** ($d[n]$). El objetivo del filtro es “transformar” $x[n]$ para que sea una buena aproximación de $d[n]$. Es necesario establecer un criterio para evaluar la calidad de esta aproximación.
- **Señal de salida** ($y[n] = \hat{d}[n]$).
- **Respuesta al impulso del filtro** ($w[n]$ o $h[n]$). Es la función que tenemos que aprender (en esta asignatura, esta función es un conjunto de coeficientes —los filtros con los que trabajamos son lineales).
- **Señal de error**: $e[n] = d[n] - (x[n] * w[n])$. El objetivo del filtro es minimizar la energía de la señal de error tal que $\hat{d}[n] = x[n] * w[n]$ sea una buena aproximación de $d[n]$.

Problemas que se resuelven con filtros

- **Filtrado de ruido:** ésta es una de las aplicaciones más utilizadas de los filtros. Los elementos son:
 - $d[n]$ es la señal sin ruido (señal deseada).
 - $x[n]$ es $d[n]$ contaminada con ruido.

El objetivo del filtro es aprender $w[n]$ de tal forma que transforme la señal $x[n]$ en una buena aproximación de su versión **sin ruido**.

Una vez que el filtro es diseñado, la señal de referencia ($d[n]$) se “desconecta” y el filtro puede usarse para *limpiar* cualquier otra señal de entrada (distinta de $x[n]$ que es la que se utilizó para diseñar el filtro).

(En la página 12 se muestra una configuración de un filtro de eliminación de ruido)

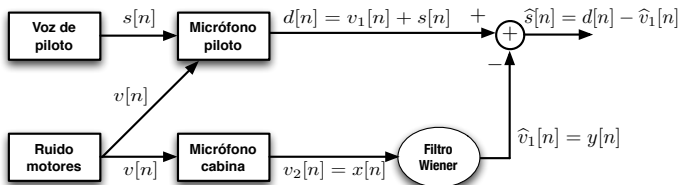
Problemas que se resuelven con filtros

• Predicción:

- La señal de referencia ($d[n]$) es una versión desplazada (en tiempo) de $x[n]$. De esta forma, el filtro **predice** los valores de $x[n]$ en instantes de tiempo futuros como combinación de los valores de $x[n]$ en instantes de tiempo pasados.
- Este esquema puede usarse para comprimir la señal de entrada. Si el predictor es bueno, sólo se necesita transmitir el predictor y la señal de error. Además, si dicho predictor es bueno, los valores de la señal de error serán pequeños y, por tanto, pueden codificarse con un menor número de bits.

Problemas que se resuelven con filtros

- **Cancelación de interferencias:** La señal de entrada $v[n]$ es una señal interferente o ruido, y la señal deseada $d[n]$ está formada por la suma de una señal de interés $s[n]$ y una componente interferente $v_1[n]$ relacionada con $v[n]$. El objetivo del filtro es estimar esa componente interferente a partir de $v[n]$ y restarla de $d[n]$ para recuperar la señal de interés ($s[n]$, voz del piloto en el ejemplo).



Problemas que se resuelven con filtros

- **Identificación de planta (o de sistema):**

El objetivo es construir una aproximación a un sistema *desconocido* para que éste se comporte como una **caja negra** para nosotros.

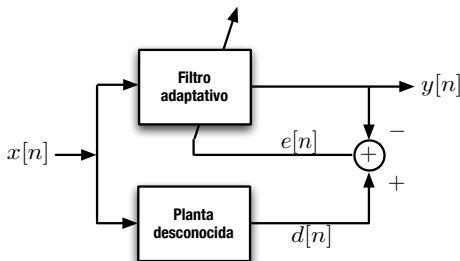
- La señal de referencia se construye introduciendo una señal de entrada $x[n]$ al sistema desconocido. Es decir, $d[n]$ es la salida del sistema desconocido cuando la entrada es $x[n]$.
- La señal de entrada al filtro es $x[n]$.

El objetivo del filtro es encontrar $w[n]$ tal que $y[n] = x[n] * w[n]$ sea una buena aproximación de $d[n]$.

Problemas que se resuelven con filtros

- **Identificación de planta (o de sistema):**

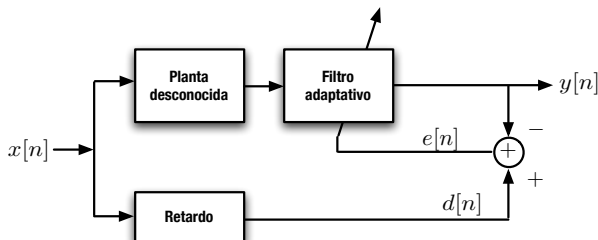
Cuanto más se parezca $y[n]$ a $d[n]$, mejor será la suposición de que el filtro lineal $w[n]$ es una buena aproximación al sistema desconocido.



Problemas que se resuelven con filtros

• Ecualizador:

- El objetivo del filtro es aprender el sistema inverso al sistema desconocido, de modo que pueda contrarrestarse. Éste es un problema fundamental en comunicaciones: ecualización del canal.



Problemas que se resuelven con filtros

- **Ecualizador:**

- Asumamos que la señal original transmitida es $s[n]$. Durante su transmisión, el canal (que es un sistema propiamente dicho) transforma $s[n]$ en $x[n]$.
- El diseño del ecualizador usa:
 - Señal de entrada: $x[n]$
 - Señal de referencia: $d[n] = x[n - M]$ es una versión retardada de $s[n]$ ($s[n - M]$, siendo M el número de muestras), donde el valor de M depende del canal.

Problemas que se resuelven con filtros

- **Ecualizador:**

La razón de ser ésta la señal de referencia es la siguiente. Imaginemos que el canal es un sistema LTI FIR cuya $h[n]$ tiene 3 coeficientes.

$$x[n] = s[n] \cdot h[0] + s[n-1] \cdot h[1] + s[n-2] \cdot h[2]$$

Cada valor de la señal $x[n]$ se construye como combinación lineal de las muestras de $s[n]$. En otras palabras, cada muestra particular de $s[n]$, $s[n_*]$, participa en el valor de algunas muestras de $x[n]$:

$$\begin{aligned}x[n_*] &= s[n_*] \cdot h[0] + s[n_* - 1] \cdot h[1] + s[n_* - 2] \cdot h[2] \\x[n_* + 1] &= s[n_* + 1] \cdot h[0] + s[n_*] \cdot h[1] + s[n_* - 1] \cdot h[2] \\x[n_* + 2] &= s[n_* + 2] \cdot h[0] + s[n_* + 1] \cdot h[1] + s[n_*] \cdot h[2]\end{aligned}$$

Así que $x[n_*]$, $x[n_* + 1]$ y $x[n_* + 2]$ podrían usarse para encontrar el valor de $s[n_*]$.

Problemas que se resuelven con filtros

● Ecualizador:

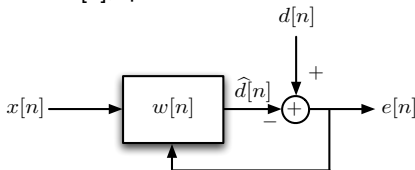
- Dado que viajar al futuro todavía está en desarrollo, es necesario esperar a la llegada de $x[n_* + 1]$ y $x[n_* + 2]$ antes de averiguar el valor de $s[n_*]$. Ésta es la razón por la que para invertir el canal, la señal de referencia debe ser una versión retardada de la señal original $s[n]$.
- En otras palabras, el objetivo del filtro igualador es construir una buena aproximación de $s[n]$ como combinación lineal de $x[n]$, $x[n + 1]$... $x[n + M - 1]$. O, si usamos $x[n]$ como referencia, construir una buena aproximación de $d[n] = s[n - M]$ con $x[n]$, $x[n - 1]$... $x[n - M + 1]$.

Filtrado lineal óptimo - Filtro de Wiener

- El filtro de Wiener es el **mejor filtro lineal de mínimos cuadrados** (óptimo).
- Pueden ser usados para tareas de predicción, estimación, interpolación, filtrado de señal y ruido, etc.
- Para diseñarlos, se necesita tener un conocimiento previo apropiado de las propiedades estadísticas de la señal de entrada y de la señal de referencia. El problema reside en que este conocimiento generalmente no se puede obtener.

Planteamiento del problema

- Es un sistema al que le llegan dos señales: $x[n]$ y $\hat{d}[n]$ y el objetivo es **determinar la respuesta al impulso** $w[n]$ de tal manera que el filtro produzca a su salida una señal $\hat{d}[n]$, que sea una **reconstrucción óptima de $d[n]$** .



- $x[n]$ y $d[n]$ son realizaciones de procesos estocásticos conjuntamente WSS¹, de media nula (si no, basta restársela).
- $e[n] = d[n] - \hat{d}[n]$: error de reconstrucción en el instante n .
- Objetivo:** minimizar $e[n]$ en algún sentido estadístico.

¹Sentido amplio (WSS, de *Wide Sense Stationary*)

Restricciones y opciones de diseño

- **Sobre el filtro:**

- Restricciones: lineal y discreto
- Opciones: FIR o IIR (causal o no causal). Trataremos la teoría para FIRs por ser inherentemente estables.

- **Sobre las señales:**

- Procesos estocásticos estacionarios con características espectrales conocidas o autocorrelación y correlación cruzada conocidas.

- **Sobre el criterio estadístico de optimalidad**

- $\mathbb{E}\{e[n]\}$: convexo, no diferenciable.
- $\mathbb{E}\{|e[n]|^2\}$: convexo, diferenciable. Es matemáticamente más sencillo de tratar (se pueden calcular gradientes).
- Otros.

- **Objetivo:** encontrar $w[0], w[1], w[2], \dots, w[P-1]$ tales que se minimice

$$J_n(\mathbf{w}) = \mathbb{E}\{|e[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|d[n] - x[n] * w[n]|^2\}.$$

Obtención del filtro óptimo

- Imponemos la restricción de que $w[n]$ sea un filtro FIR
 - Número finito P de valores distintos de 0
 - P es el **orden del filtro**.
- Consideramos que $w[n]$ es casual y definido entre $n = 0$ y $n = P - 1$.
- La salida del filtro $\hat{d}[n]$ se calculará:

$$\hat{d}[n] = x[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{P-1} w[k]x[n-k]$$

- Notación vectorial:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[P-1] \end{bmatrix}; \mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-P+1] \end{bmatrix}$$

Obtención del filtro óptimo

- A partir de esta notación vectorial:

$$\hat{d}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

- La señal $e[n]$ de error de reconstrucción entre $d[n]$ y $\hat{d}[n]$ se puede escribir:

$$e[n] = d[n] - \hat{d}[n] = d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

- El vector de pesos \mathbf{w} del filtro óptimo será el que minimiza el error cuadrático medio:

$$\mathbf{w} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E}\{(e[n])^2\} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E}\{(d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n])^2\}$$

De ahora en adelante, asumiremos que las señales son de valor real (... y nos deshacemos del valor absoluto)

Obtención del filtro óptimo

- Para encontrar el vector de pesos óptimo, calculamos el gradiente con respecto a \mathbf{w} e igualamos a cero.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}} \mathbb{E} \left\{ (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n])^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \nabla_{\mathbf{w}} (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n])^2 \right\} \\ &= -2 \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]) \right\} = -2 \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] e[n] \right\}\end{aligned}$$

- Al igualar a cero, aparece el *Principio de Ortogonalidad* (el error de reconstrucción es estadísticamente ortogonal a todas las componentes de $\mathbf{x}[n]$).

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] e[n] \right\} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{E} \left\{ x[n-k] e[n] \right\} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, P-1$$

(La señal de error y la señal de entrada están incorreladas)

- Sabiendo que $e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] (d[n] - \mathbf{x}[n]^T \mathbf{w}) \right\} \\ \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] d[n] \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}[n]^T \right\} \mathbf{w}\end{aligned}$$

Obtención del filtro óptimo

Vamos a poner “nombre” a las cosas...

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}[n]d[n]\} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{x[n]d[n]\} \\ \mathbb{E}\{x[n-1]d[n]\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{x[n-P+1]d[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{X,D}[0] \\ r_{X,D}[1] \\ \vdots \\ r_{X,D}[P-1] \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x}[n]$ y $d[n]$ son dos procesos estocásticos estacionarios WSS.

$\mathbf{r}_{X,D}$ es el **vector de correlación cruzada** entre $\mathbf{x}[N]$ y $d[N]$ hasta P instantes de tiempo.

Obtención del filtro óptimo

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T\} &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{x[n]x[n]\} & \mathbb{E}\{x[n]x[n-1]\} & \dots & \mathbb{E}\{x[n]x[n-P+1]\} \\ \mathbb{E}\{x[n-1]x[n]\} & \mathbb{E}\{x[n-1]x[n-1]\} & \dots & \mathbb{E}\{x[n-1]x[n-P+1]\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{x[n-P+1]x[n]\} & \mathbb{E}\{x[n-P+1]x[n-1]\} & \dots & \mathbb{E}\{x[n-P+1]x[n-P+1]\} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} r_X[0] & r_X[-1] & \dots & r_X[1-P] \\ r_X[1] & r_X[0] & \dots & r_X[2-P] \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ r_X[P-1] & r_X[P-2] & \dots & r_X[0] \end{bmatrix} = \mathbf{R}_X \end{aligned}$$

Con esto:

$$\mathbf{R}_X \mathbf{w} = \mathbf{r}_{X,D} \Rightarrow \boxed{\mathbf{w} = \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{r}_{X,D}}$$

Señal de error de reconstrucción

La potencia de la señal de error de reconstrucción será:

$$\mathbb{E}\{(e[n])^2\} = \mathbb{E}\{e[n](d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n])\} = \mathbb{E}\{e[n]d[n]\} - \mathbf{w}^T \mathbb{E}\{\mathbf{x}[n]e[n]\}$$

Aplicando el principio de ortogonalidad,

$$\mathbb{E}\{(e[n])^2\} = \mathbb{E}\{e[n]d[n]\} = \mathbb{E}\{d[n]d[n]\} - \mathbf{w}^T \mathbb{E}\{d[n]\mathbf{x}[n]\}$$

Si tenemos en cuenta que $d[n]$ y $\mathbf{x}[n]$ son dos procesos estocásticos WSS:

$$\mathbb{E}\{(e[n])^2\} = r_D[0] - \mathbf{w}^T \mathbf{r}_{X,D}$$

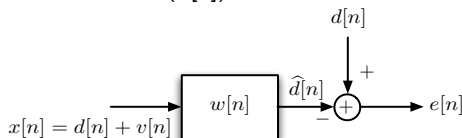
Sabiendo que $\mathbf{w} = \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{r}_{X,D}$, se tiene:

$$\mathbb{E}\{(e[n])^2\} = r_D[0] - \mathbf{r}_{X,D}^T \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{r}_{X,D}$$

El término $r_D[0] - \mathbf{r}_{X,D}^T \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{r}_{X,D}$ supone un límite inferior al mínimo error de reconstrucción del filtro que intente aproximar las señales generadas por el proceso D_n transformando las señales generadas con el proceso estocástico \mathbf{X}_n .

Planteamiento del problema

- La señal de entrada al filtro ($x[n]$) es una versión de la señal deseada ($d[n]$) corrompida con ruido aditivo ($v[n]$).



- El ruido tiene media nula e **incorrelacionado con la señal deseada** $\Rightarrow \mathbb{E}\{d[n]v[n-k]\} = 0$, para valores enteros de k .
- La autocorrelación entre D_n y X_n es:

$$\begin{aligned} r_{X,D}[k] &= \mathbb{E}\{d[n]x[n-k]\} \\ &= \mathbb{E}\{d[n]d[n-k]\} + \mathbb{E}\{d[n]v[n-k]\} \\ &= r_D[k] \end{aligned}$$

Obtención de los coeficientes

- La autocorrelación de la señal de entrada se puede expresar como:

$$\begin{aligned} r_X[k] &= \mathbb{E}\{x[n]x[n-k]\} = \mathbb{E}\{(d[n] + v[n])(d[n-k] + v[n-k])\} \\ &= \mathbb{E}\{d[n]d[n-k]\} + \mathbb{E}\{d[n]v[n-k]\} + \mathbb{E}\{v[n]d[n-k]\} + \\ &\quad + \mathbb{E}\{v[n]v[n-k]\} \\ &= r_D[k] + r_V[k] \end{aligned}$$

- Si \mathbf{R}_D y \mathbf{R}_V son las matrices de autocorrelación de los procesos V_n y D_n , se tiene:

$$[\mathbf{R}_D + \mathbf{R}_V]\mathbf{w} = \mathbf{r}_D \Rightarrow \boxed{\mathbf{w} = [\mathbf{R}_D + \mathbf{R}_V]^{-1}\mathbf{r}_D}$$

Obtención de los coeficientes

- El problema de predicción lineal de una señal $x[n]$ (en un escenario libre de ruido) consiste en encontrar los coeficientes $w[k]$ del modelo:

$$\hat{x}[n+1] = \sum_{k=0}^{P-1} w[k]x[n-k]$$

- Si reescribimos el problema definiendo $d[n] = x[n+1]$, la correlación cruzada entre la señal deseada y señal de entrada se reduce a:

$$r_{D,x}[k] = \mathbb{E}\{d[n]x[n-k]\} = \mathbb{E}\{x[n+1]x[n-k]\} = r_x[k+1]$$

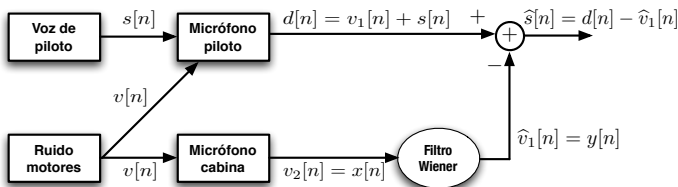
y el error del predictor se puede calcular como:

$$\mathbb{E}\{(e[n])^2\} = r_x[0] - \mathbf{w}^T \mathbf{r}_x[k+1]$$

donde $\mathbf{r}_x[k+1] = [r_x[1] \quad r_x[2] \quad \dots \quad r_x[P]]^T$

Objetivo

- El objetivo es cancelar el ruido de motores, maquinaria, etc. en la señal recogida en el micrófono de un piloto en una cabina de aeroplanos.
- Diferencia entre *filtrar* el ruido y *cancelar* el ruido:
 - Filtrar ruido: la señal “contaminada” pasa por un filtro donde se espera que se elimine la mayor parte del ruido.
 - Cancelar ruido: se utiliza un filtro para aprender la señal de ruido y restársela a la señal “contaminada”.



- $s[n]$: voz del piloto
- $v[n]$: señal de ruido de motores, viento, etc. Se transforma en:
 - $v_1[n]$: señal de ruido tras “pasar” por el micrófono del piloto
 - $v_2[n]$: señal de ruido tras “pasar” por el micrófono de la cabina
- $d[n]$: señal compuesta por la suma de la voz del piloto y el ruido en el micrófono del piloto
- $\hat{s}[n]$: salida del cancelador de ruido. Se espera que sea una reproducción lo más exacta posible de $s[n]$

Obtención de los coeficientes

- Diseño de un filtro FIR de Wiener que obtenga una aproximación de $v_1[n]$ a partir de $v_2[n]$ ($v_1[n]$ y $v_2[n]$ están correlados).
- Identificamos señales:
 - Señal de entrada ($x[n]$): señal de ruido registrado en el micrófono de la cabina, es decir, $v_2[n]$
 - Señal deseada ($d[n]$): señal de salida del micrófono del piloto, $d[n]$
- En este caso, se tiene que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1} \mathbf{r}_{d, v_2}$$

(donde $\mathbf{r}_{d, v_2} = \mathbf{r}_{v_1, v_2}$)

- Si la voz del piloto está incorrelada con el ruido de los motores, se tiene:

$$\begin{aligned} r_{d, v_2}[k] &= \mathbb{E}\{d[n]v_2[n-k]\} = \mathbb{E}\{v_1[n]v_2[n-k]\} + \mathbb{E}\{s[n]v_2[n-k]\} \\ &= \mathbb{E}\{v_1[n]v_2[n-k]\} = r_{v_1, v_2}[k] \end{aligned}$$

- Como $s[n]$ y $v_2[n]$ están incorreladas, el filtro sólo aprende la parte de $d[n]$ correlacionada con $v_2[n]$, y ésta es precisamente, $v_1[n]$.