



Universidad  
Carlos III de Madrid  
[www.uc3m.es](http://www.uc3m.es)

# TEMA 3 (Cont.)

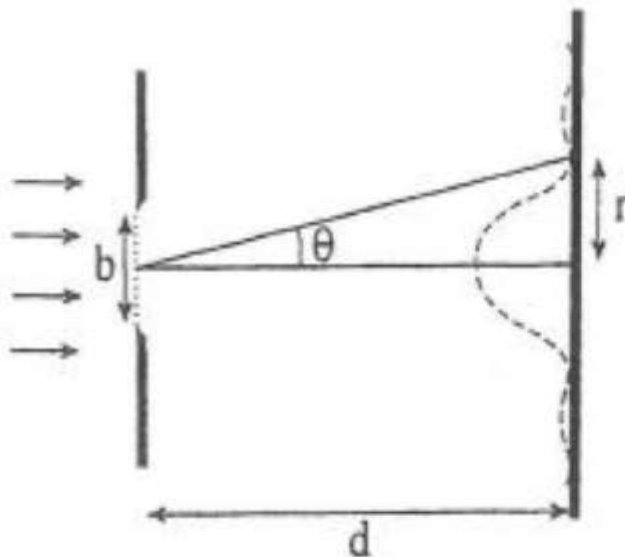
## DIFRACCION Y OPTICA DE FOURIER

### FOTONICA

Grado en Ingeniería en Tecnologías de  
Telecomunicación

## 1.-DIFRACCION

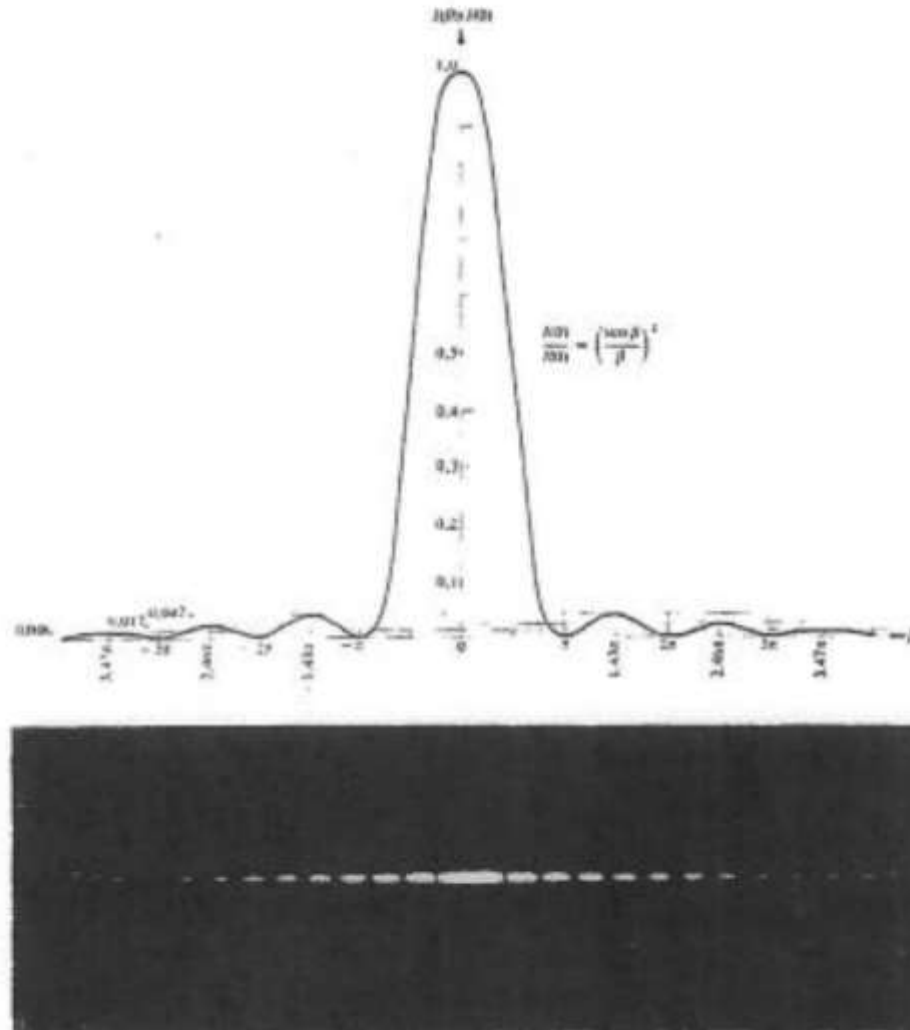
La difracción es un fenómeno que sufre la luz, muy parecido a la interferometría, pero suele aparecer cuando los objetos (rendijas, aberturas, etc.) son del tamaño de la longitud de onda. Un ejemplo de difracción es la separación de la luz blanca en los diferentes colores que la componen (arco iris). Se suele hablar de difracción de Fresnel cuando nos encontramos en la zona cercana al objeto, y de difracción de Fraunhofer cuando estamos alejados del objeto. Nosotros nos centraremos en el segundo tipo.



$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \cdot (\text{senc} \beta)^2$$

$$\beta = \left( \frac{k \cdot b}{2} \right) \cdot \sin \theta$$

Para el caso particular de una única rendija se puede comprobar que el patrón de difracción de Fraunhofer (irradiancia) tiene la forma del cuadrado de una función seno cardinal (conocida como sinc ó sinc).



Como se puede ver en las expresiones anteriores, la distribución de intensidad de luz se abre en la dirección del lado más pequeño de la rendija, de forma que si tenemos una rendija vertical obtendremos una sinc al cuadrado en el eje horizontal.

A continuación vamos a calcular el radio de dicho máximo central, que será igual al ancho del lóbulo principal de la sinc cuadrado. El primer mínimo lo tenemos para  $\beta = \pi$ , luego:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \left( \frac{2\pi \cdot b}{\lambda} \right) \cdot \sin \theta = \pi \Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{b} \\ \text{tg} \theta &\approx \theta \Rightarrow \theta = \frac{r}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{d\lambda}{b}$$

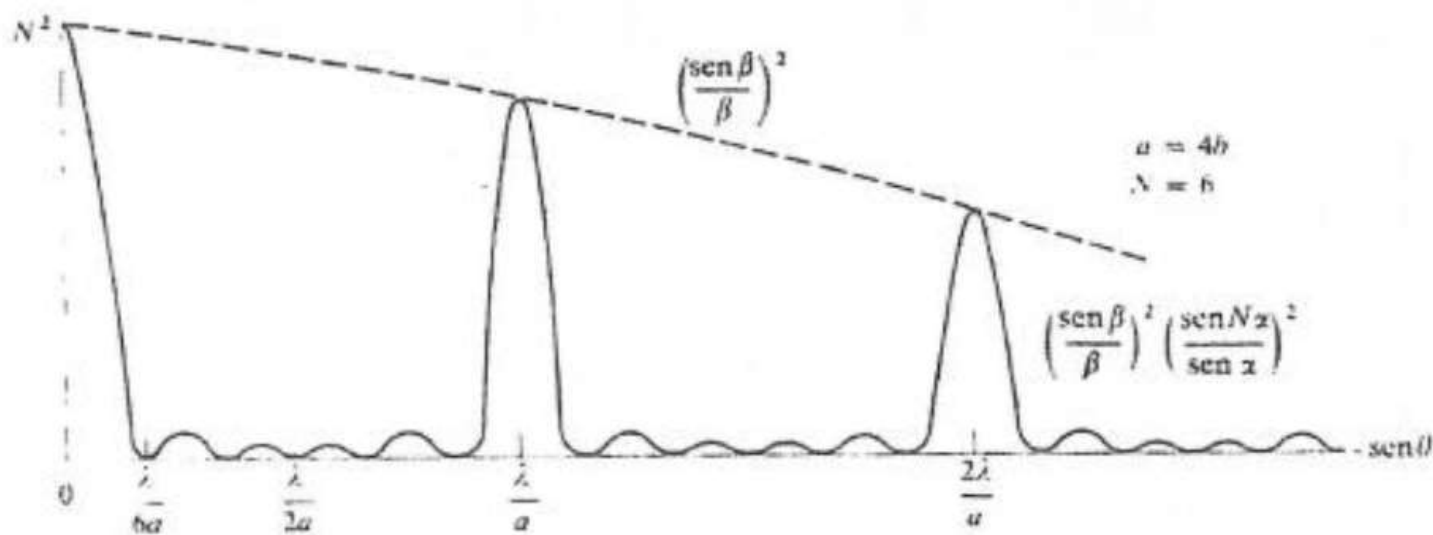
Observando la relación obtenida podemos comprobar que cuanto menor sea la rendija mayor será el ancho del lóbulo principal (el ángulo de apertura  $\theta$  será mayor).

Para el caso de  $N$  rendijas de anchura  $b$  y separadas una distancia  $a$  entre ellas, tendríamos la siguiente expresión para la irradiancia:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

$$\beta = \left( \frac{k \cdot b}{2} \right) \cdot \sin \theta$$

$$\alpha = \left( \frac{k \cdot a}{2} \right) \cdot \sin \theta$$

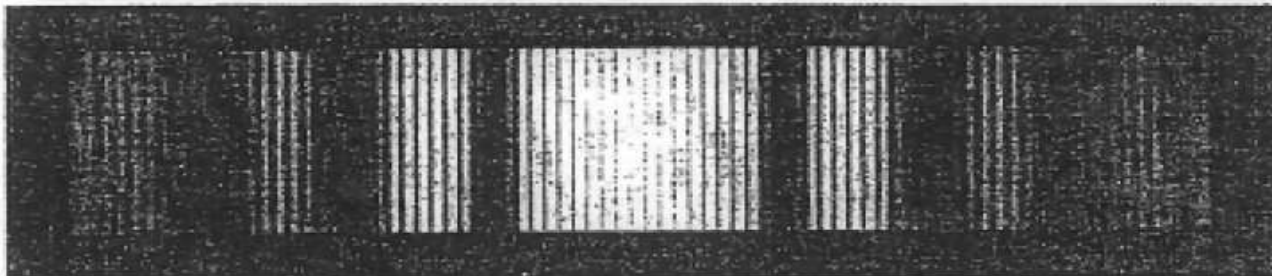
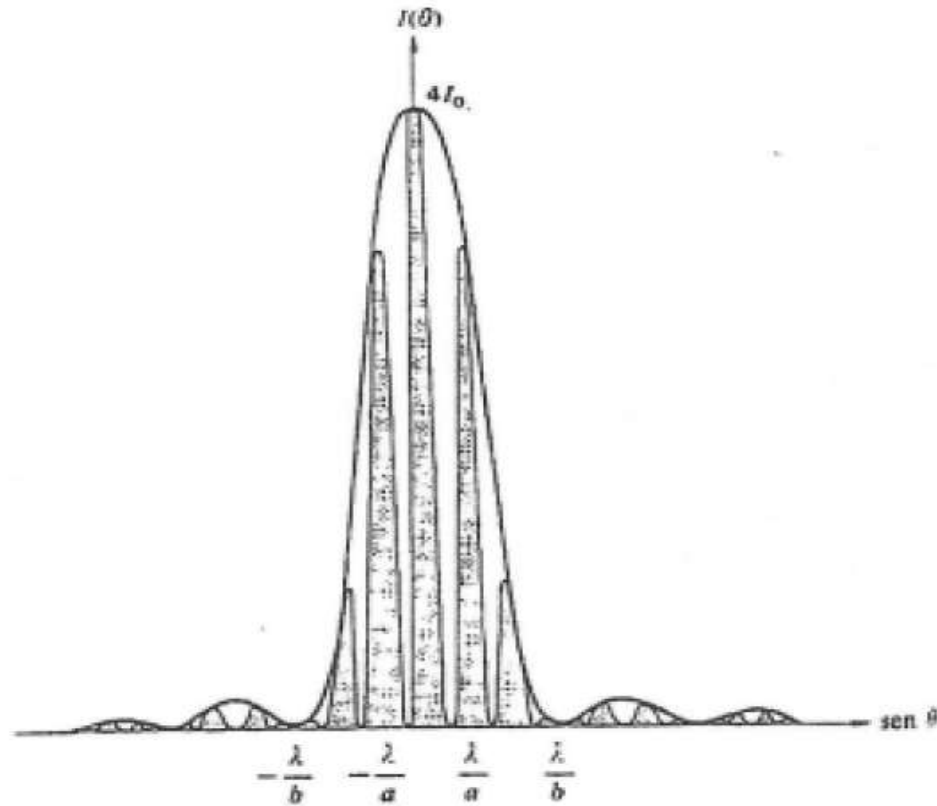


Tal y como se puede observar, la irradiancia para el caso de múltiples rendijas consiste en una composición de una envolvente de la forma  $(\sin\beta/\beta)^2$  y una función de la forma  $(\sin N\alpha/\sin\alpha)^2$ . Cuando  $\sin^2 N\alpha$  y  $\sin^2 \alpha$  se hacen cero a la vez vamos a tener una indeterminación con lo que realizaremos la aproximación  $\sin\alpha \approx \alpha$  de forma que obtendremos un máximo de valor  $I_0 \cdot N^2$  ( $N^2$  en la figura anterior puesto que la irradiancia está normalizada por el factor  $I_0$ ).

La principal conclusión que se obtiene analizando el patrón de difracción para el caso de  $N$  rendijas es que entre dos máximos principales consecutivos tendremos  $N-1$  mínimos; además, es obvio que entre cada par de mínimos hay un máximo secundario, luego habrá  $N-2$  máximos secundarios entre cada par de máximos principales.

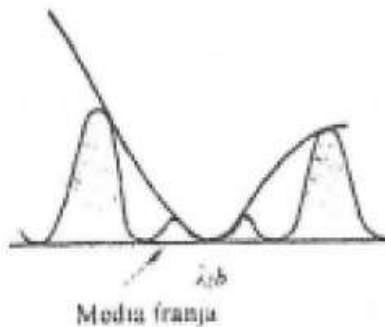
Como ejemplo de difracción por múltiples rendijas, vamos a observar el patrón de difracción para el caso particular de 2 rendijas:





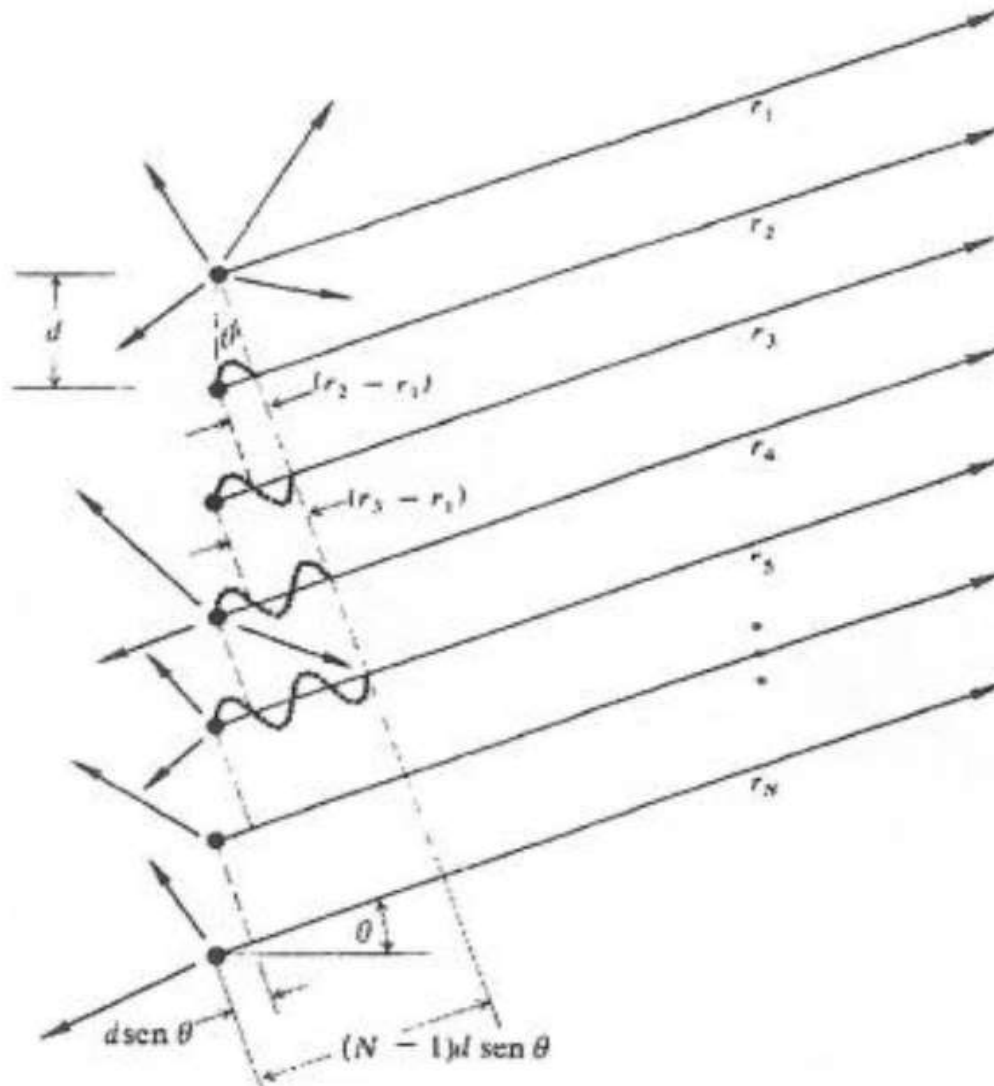
**NOTA:** Observar que la representación para una rendija está en función de  $\beta$ , mientras que la representación para dos rendijas está en función de  $\sin \theta$ , por lo que los puntos en los que la irradiancia es nula no son los mismos.

Por otro lado, podemos comprobar que si  $a = mb$ , siendo  $m$  el número de franjas, habrá  $2m$  franjas brillantes dentro del máximo central de la irradiancia. Para llegar a esta conclusión debemos tener en cuenta que en el patrón de difracción pueden aparecer medias franjas como consecuencia de los ceros de la envolvente (media franja en cada extremo del máximo central forman una franja completa).



Por último vamos a suponer que tenemos  $N$  rendijas en paralelo y que cada una va a contribuir con una onda (las consideraremos como osciladores puntuales coherentes):





Campo eléctrico creado por una fuente:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) = \varepsilon_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + kx + \varphi)} \right\} = \varepsilon_0 e^{j\omega t} e^{j(kx + \varphi)}$$

Campo eléctrico total:

$$\begin{aligned} E_T &= E_0 e^{j(kr_1 - \omega t)} + \dots + E_0 e^{j(kr_N - \omega t)} = E_0 e^{-j\omega t} \left[ e^{jkr_1} + \dots + e^{jkr_N} \right] = \\ &= E_0 e^{-j\omega t} e^{jkr_1} \left[ 1 + e^{jk(r_2 - r_1)} + \dots + e^{jk(r_N - r_1)} \right] = E_0 e^{-j\omega t} e^{jkr_1} \left[ 1 + e^{jk\alpha \sin \theta} + \dots + e^{jk(N-1)\alpha \sin \theta} \right] = \\ &= E_0 e^{-j\omega t} e^{jkr_1} \left[ 1 + e^{j\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta} \right] \end{aligned}$$

$$1 + e^{j\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta} = \frac{e^{jN\delta} - 1}{e^{j\delta} - 1} = \frac{e^{jN\delta/2} \left[ e^{jN\delta/2} - e^{-jN\delta/2} \right]}{e^{j\delta/2} \left[ e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2} \right]} = e^{j(N-1)\delta/2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\delta/2 N)}{\operatorname{sen}(\delta/2)}$$

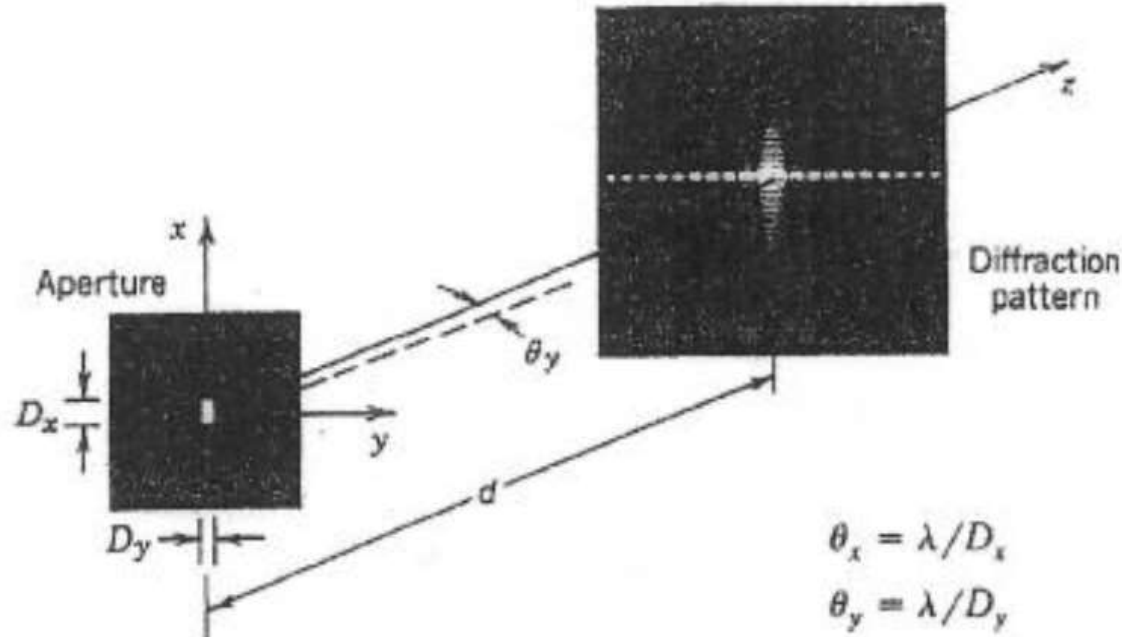
La expresión final del campo eléctrico total en un punto muy alejado de las fuentes tendrá la siguiente forma:

$$E_T = E_0 e^{-j\omega t} e^{jkr_1} e^{j(N-1)\delta/2} \cdot \frac{\text{sen}(\delta/2 N)}{\text{sen}(\delta/2)}$$

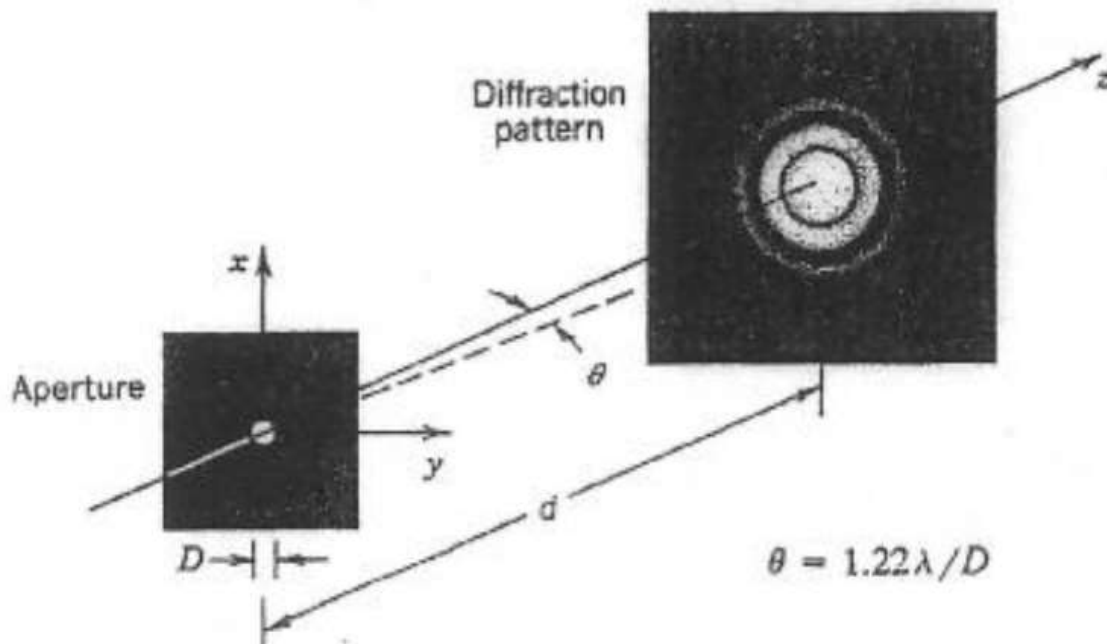
Si elevamos al cuadrado esta expresión vemos que obtenemos algo muy parecido a la expresión de  $I(\theta)$  anterior, es decir,  $(\text{sen}N\alpha/\text{sen}\alpha)^2$  es la contribución de  $N$  rendijas en paralelo.

Una vez llegados a este punto es muy simple saber intuitivamente cuáles serán los patrones de difracción de otros tipos de rendijas.

Por ejemplo, si en vez de tener una rendija vertical tenemos una rendija cuadrada, podemos tomarla como superposición de dos rendijas perpendiculares entre sí, con lo que obtenemos que el patrón de difracción será el cruce de dos sinc perpendiculares entre sí.



Análogamente, si hacemos girar una rendija obtendremos un agujero redondo, luego si el patrón de difracción de la rendija era una sinc al cuadrado, al girarlo obtendremos el patrón de difracción de un agujero que consistirá en círculos concéntricos con un máximo en el centro.





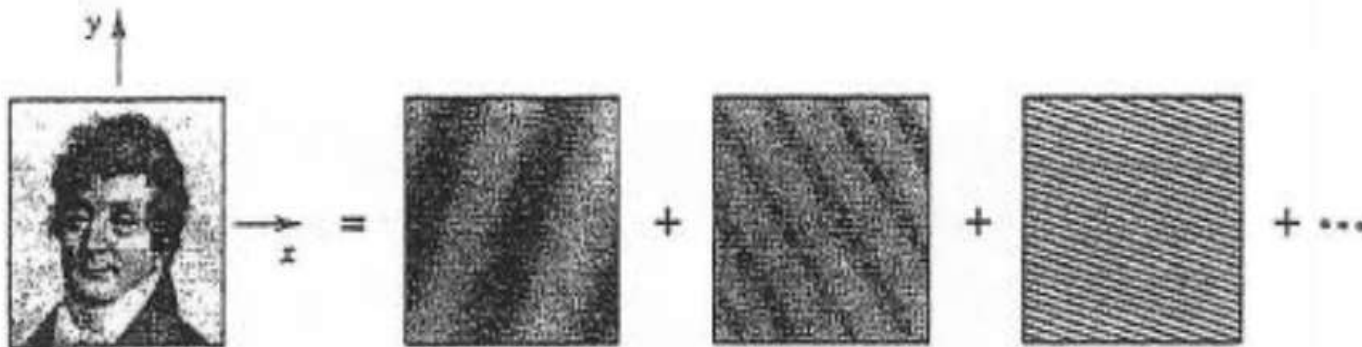
**NOTA:** El ángulo  $\theta$  de apertura del haz se mide desde el eje z hasta el extremo del spot creado (el haz se abrirá un total de  $2\theta$ ) por lo que nos permitirá hallar el radio de dicho spot aplicando trigonometría:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta \Rightarrow \theta = \frac{r}{d} \Rightarrow r = d \cdot \theta$$

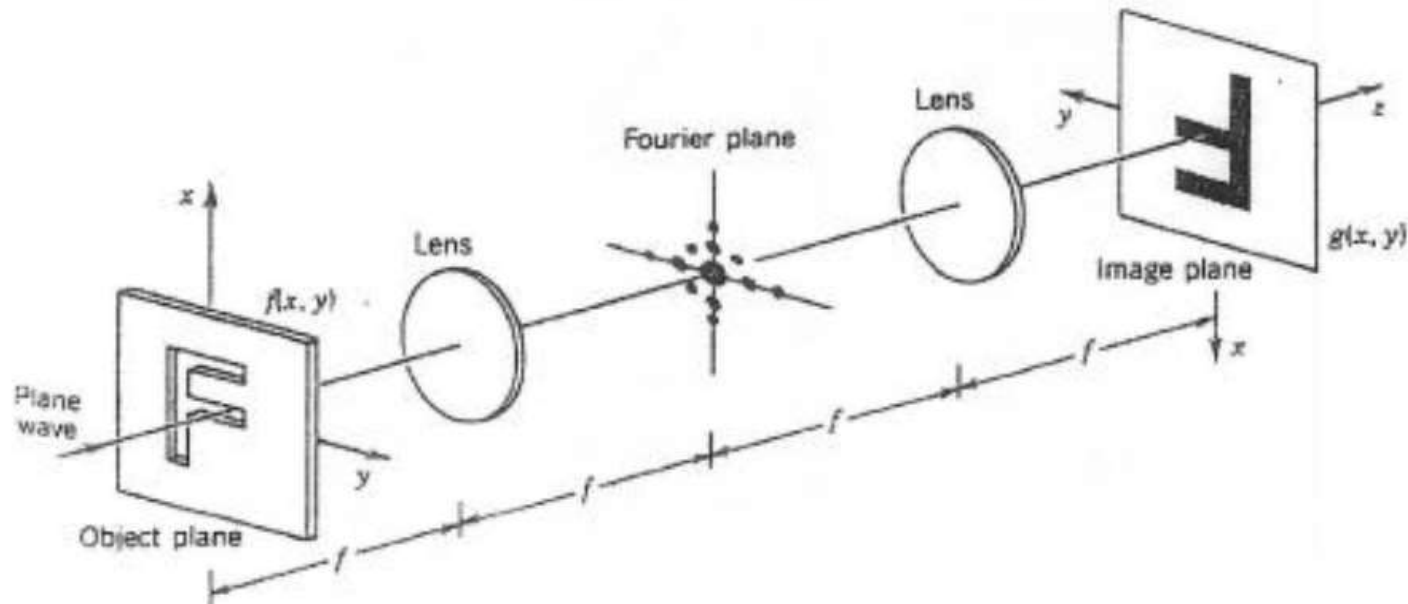
siendo  $\theta$  el valor hallado a partir de la expresión correspondiente al tipo de apertura del que se trate. Estas expresiones son utilizadas habitualmente para hallar la apertura de un haz láser en un enlace de comunicaciones.

## 2.-OPTICA DE FOURIER

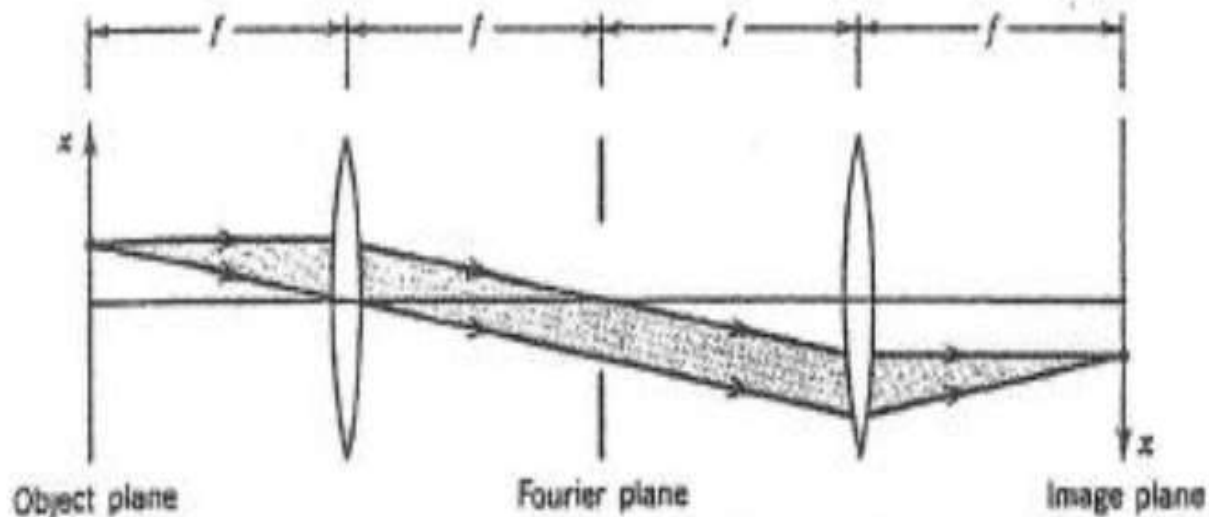
La óptica de Fourier nos va a permitir describir la propagación de las ondas luminosas basándonos en la transformada de Fourier en el los sistemas lineales. Mediante el análisis de Fourier podemos obtener una señal mediante la superposición de funciones armónicas de diferentes frecuencias y amplitudes complejas; análogamente podremos analizar una imagen tomándola como una superposición de funciones armónicas de diferentes frecuencias espaciales y amplitudes complejas.



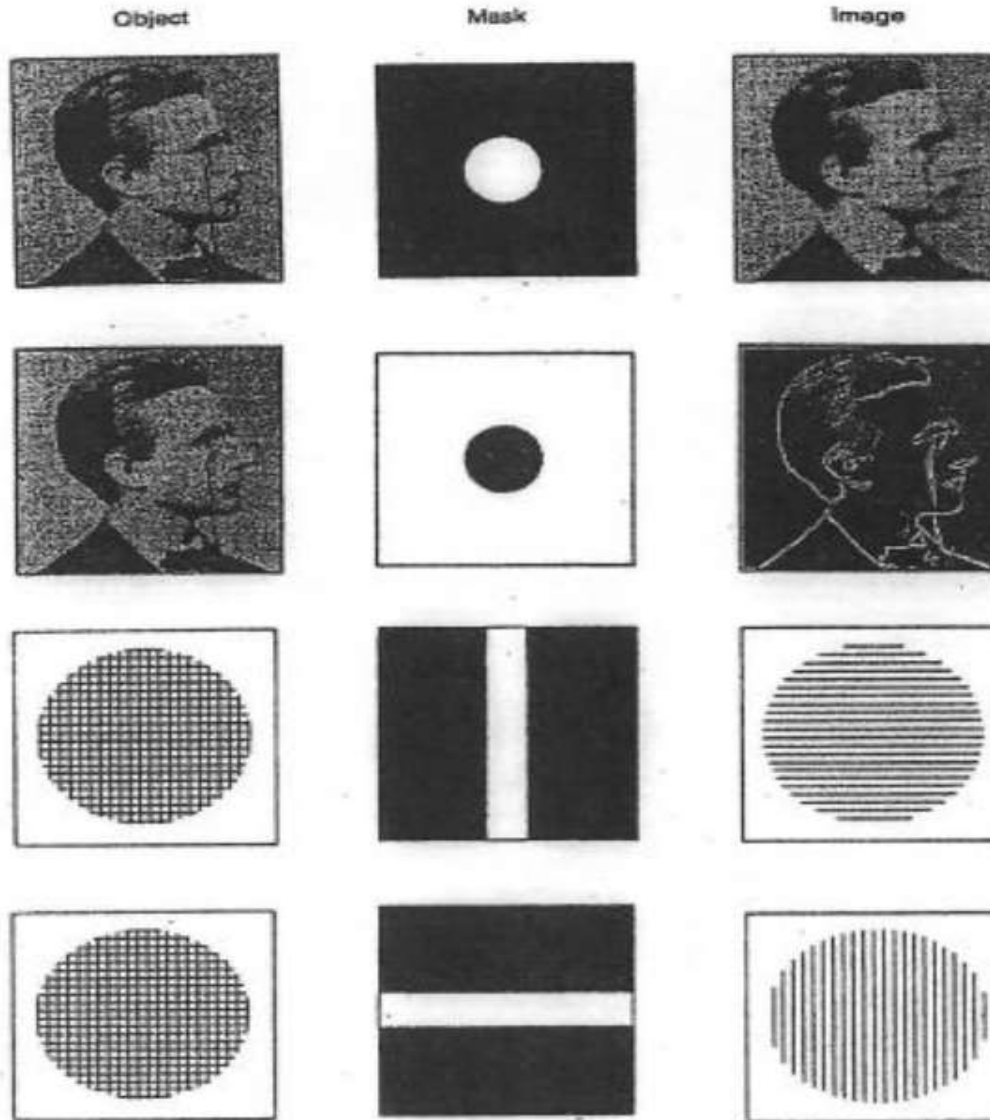
La óptica de Fourier está muy relacionada con la difracción. Esto se debe a que la distribución espacial de la intensidad de la difracción de Fraunhofer es igual al cuadrado de la transformada de Fourier de la distribución espacial del campo electromagnético en el plano del objeto que produce la difracción. Esto nos lleva a que podemos obtener la transformada de Fourier espacial de una imagen a una distancia lo suficientemente alejada. Para poder trabajar con estas imágenes utilizaremos lentes ya que nos permitirán acercar estas representaciones de la transformada a la distancia focal. De esta manera, el sistema que se forma tiene el siguiente aspecto:



En el plano de Fourier podremos aplicar filtrados espaciales muy semejantes a los filtrados realizados sobre señales puesto que será donde aparezca la transformada de Fourier espacial del objeto. Por otro lado, en el plano de la imagen obtendremos la imagen filtrada; cabe destacar que esta imagen filtrada se encontrará abatida respecto a ambos ejes con respecto a la imagen original.



A continuación vamos a tratar algunos ejemplos de filtros espaciales que podemos colocar en el plano de Fourier.





Tal y como podemos observar en las imágenes anteriores, si en el plano de Fourier ponemos una lámina con un agujero en el centro (filtro paso bajo) nos estaremos quedando con las bajas frecuencias, es decir, la imagen perderá sus componentes de altas frecuencias con lo que obtendremos el contorno de la imagen. Análogamente, si tapamos el centro (filtro paso alto) estaremos dejando pasar las altas frecuencias, es decir, la imagen perderá sus componentes de bajas frecuencias con lo que obtendremos una imagen sin contornos, difuminada. Por otro lado, si en el plano de Fourier colocamos una lámina con una abertura vertical estaremos dejando pasar las componentes horizontales. De la misma manera, si ponemos una abertura horizontal, estaremos dejando pasar las componentes verticales.