Interferometría

Notación compleja

Una onda electromagnética está descrita por la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

La solución más sencilla a la ecuación de ondas es la onda harmónica o sinusoidal:

$$E(t,r) = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Sin embargo, por conveniencia matemática, muchas veces es más sencillo trabajar con notación compleja. Aprovechando que

$$\mathrm{Re}\left[E_0 e^{j(\omega t - kz)}\right] = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

de aquí en adelante trabajaremos directamente con $E_0 e^{j(\omega t - kz)}$ asumiendo que al final de los cálculos se cogerá la parte real del resultado.

Números complejos

Forma polar

$$E(t,r) = |E|e^{j(\omega t - kz)} = |E|e^{j(\varphi)}$$

Forma rectangular

$$E(t,r) = |E|e^{j(\varphi)} = |E|(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = a + jb$$
$$a = \mathrm{Re}\left[|E|e^{j(\varphi)}\right] = |E|\cos(\varphi)$$
$$b = \mathrm{Im}\left[|E|e^{j(\varphi)}\right] = |E|\sin(\varphi)$$

Intensidad números complejos

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = E \cdot E^*$$

Intensidad forma rectangular

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

Intensidad forma polar

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = E \cdot E^* = |E|e^{j(\varphi)} \cdot |E|e^{j(-\varphi)}$$

Interferometría

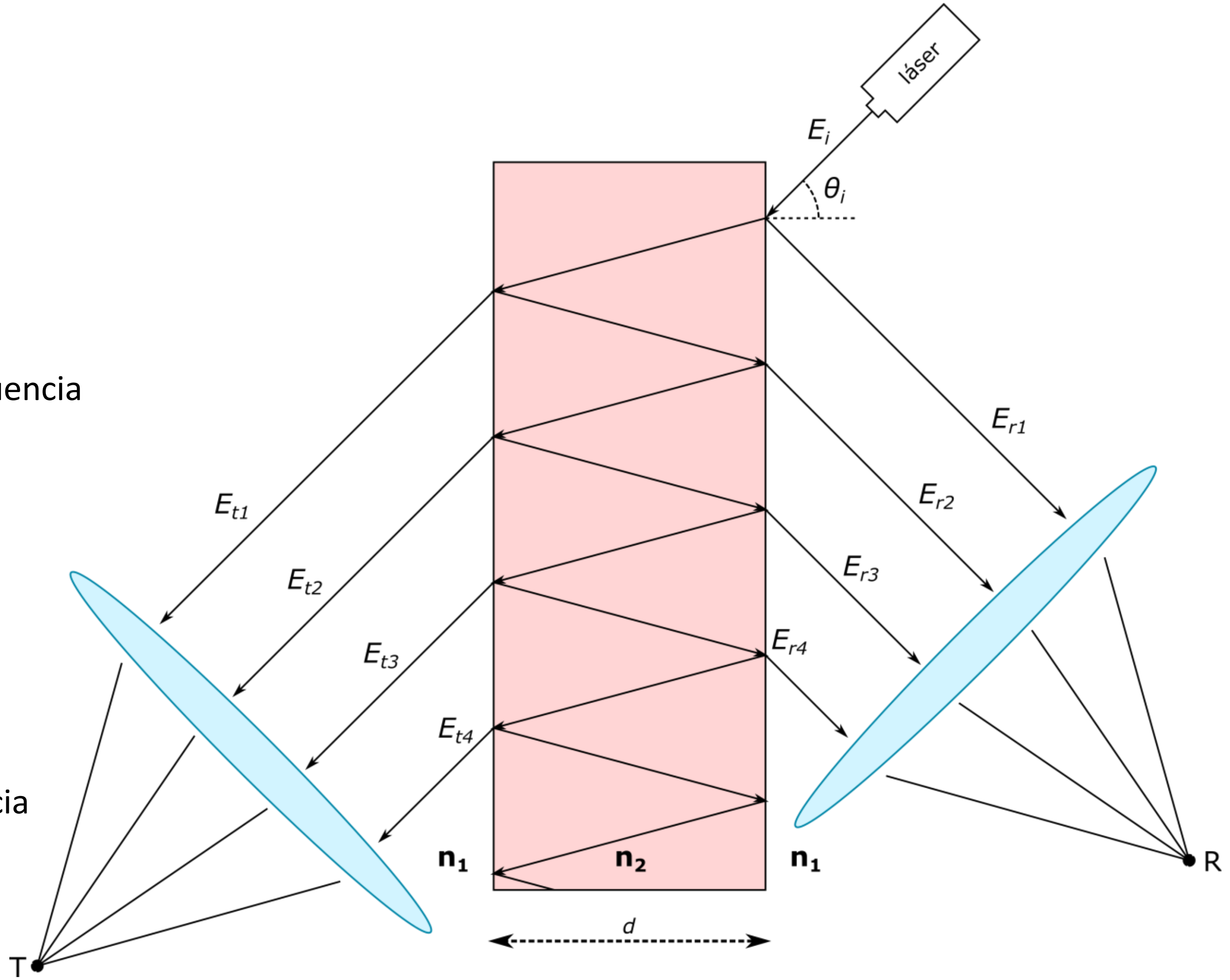
Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Resumen hasta ahora

- Interferencia entre 2 ondas electromagnéticas con la misma frecuencia
  - Interferómetro de Young
  - Interferómetro de Michelson
  - Interferómetro de Mach-Zehnder
- Interferencia entre múltiples ondas electromagnéticas con la misma frecuencia
  - Interferómetro de Fabry-Perot

Interferómetro Fabry-Perot: aire ($n = n_1 = 1$) + lámina de vidrio ($n = n_2$) + aire ($n = n_1 = 1$)

Parámetro de diseño del interferómetro: material de la lámina (i.e., n_2) y distancia entre placas (i.e., d)



Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

Queremos hallar la intensidad en el punto T (i.e, I_T)

$I_T = |E_\mathrm{T}|^2 = (|E_{t1} + E_{t2} + E_{t3} + E_{t4} + \cdots|)^2$

$E_{t1} = |E_{t1}|e^{j(-\omega t + k_1 z_1)}$

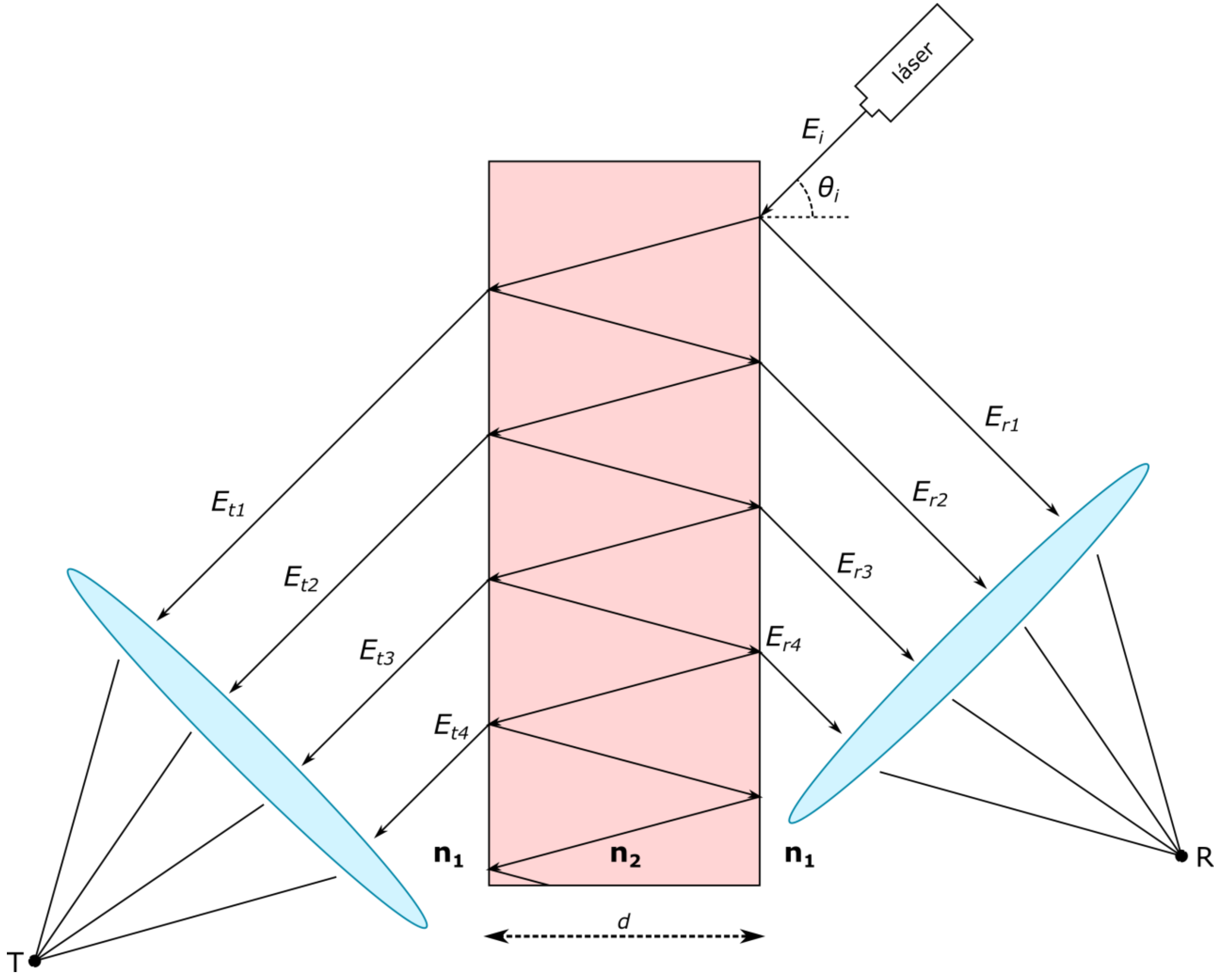
$E_{t2} = |E_{t2}|e^{j(-\omega t + k_2 z_2)}$

$\vdots$

Pasos

1. Expresar valores amplitudes $|E_{t1}|, |E_{t2}| \cdots$ con respecto a $|E_i|$
2. Encontrar diferencia de fases espaciales:
   - $k_2 z_2 - k_1 z_1$
   - $k_3 z_3 - k_2 z_2$

     $\vdots$
3. $E_T = E_{t1} + E_{t2} + E_{t3} + \cdots$
4. Pasar E_T a coordenadas rectangulares ($E_T = a_T + j b_T$)
5. Encontrar $I_T = a_T^2 + b_T^2$



Interferometría

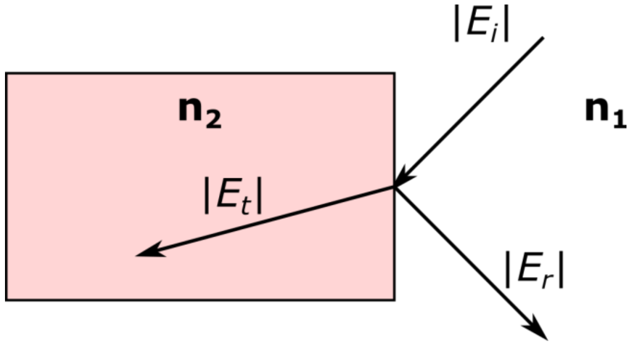
Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

Pasos

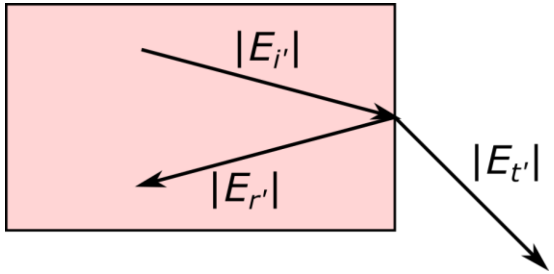
1. Expresar valores amplitudes $|E_{t1}|, |E_{t2}| \cdots$ con respecto a $|E_i|$

Coeficientes de transmisión y reflexión de Fresnel



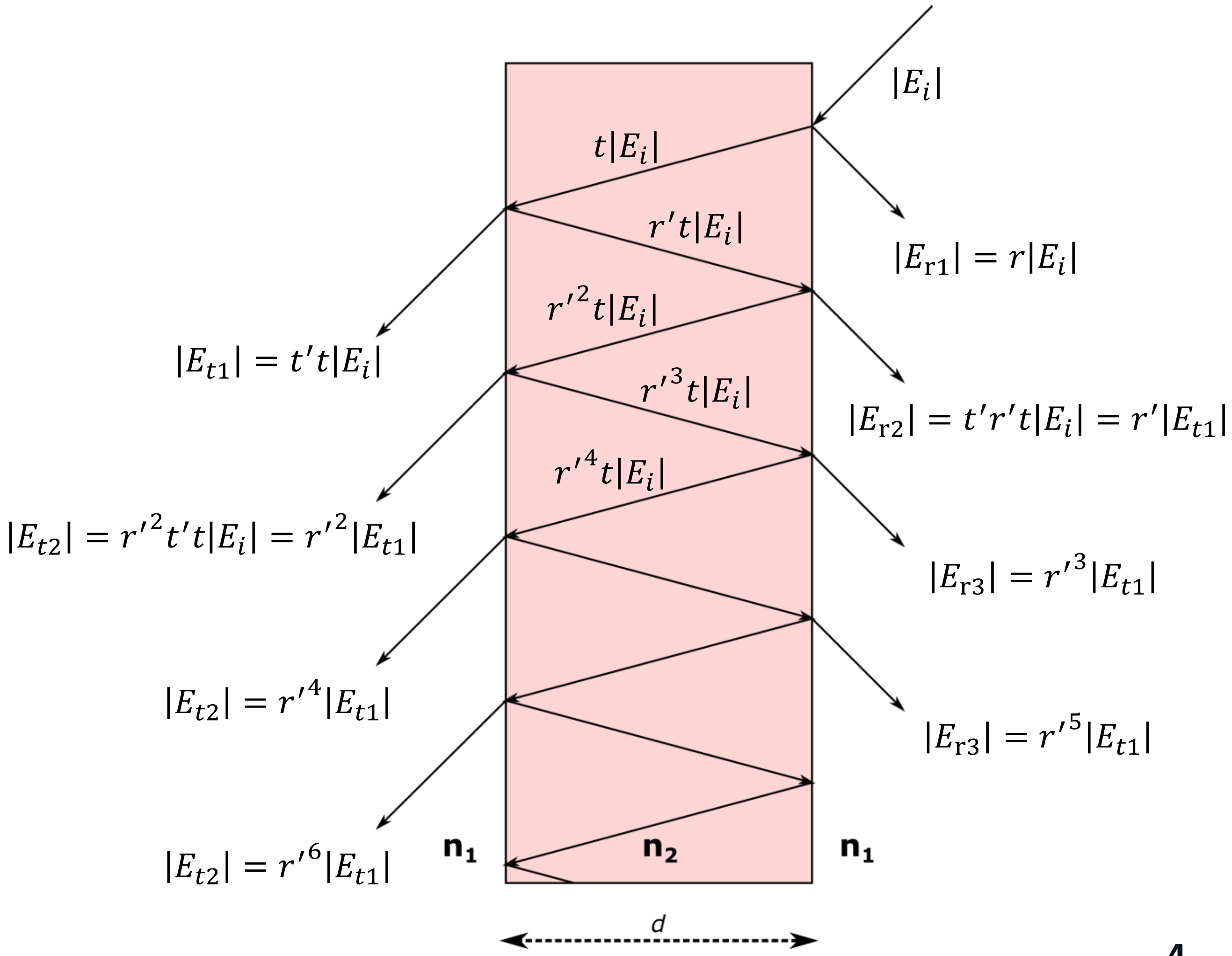
$$\frac{|E_t|}{|E_i|} = t \rightarrow |E_t| = t|E_i|$$

$$\frac{|E_r|}{|E_i|} = r \rightarrow |E_r| = r|E_i|$$



$$\frac{|E_{t'}|}{|E_{i'}|} = t' \rightarrow |E_{t'}| = t'|E_{i'}|$$

$$\frac{|E_{r'}|}{|E_{i'}|} = r' \rightarrow |E_{r'}| = r'|E_{i'}|$$



Interferometría

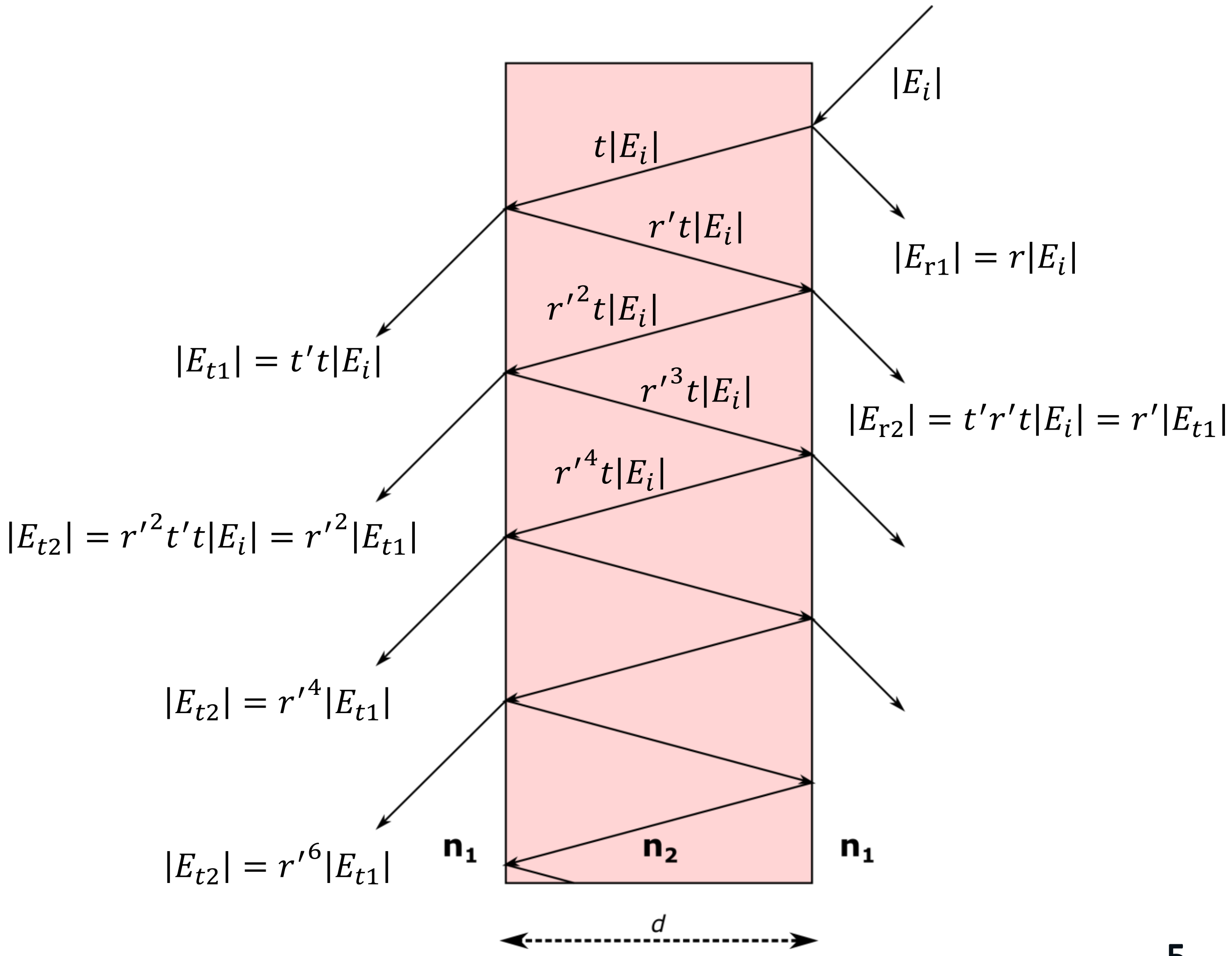
Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

Pasos

1. Expresar valores amplitudes $|E_{t1}|, |E_{t2}| \cdots$ con respecto a $|E_i|$

$$E_{t1} = |E_{t1}|e^{j(-\omega t+k_1 z_1)} = t't|E_i|e^{j(-\omega t+k_1 z_1)}$$
$$E_{t2} = |E_{t2}|e^{j(-\omega t+k_2 z_2)} = r'^2|E_{t1}|e^{j(-\omega t+k_2 z_2)}$$
$$E_{t3} = |E_{t3}|e^{j(-\omega t+k_3 z_3)} = r'^4|E_{t1}|e^{j(-\omega t+k_3 z_3)}$$
$$\vdots$$



Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

Pasos

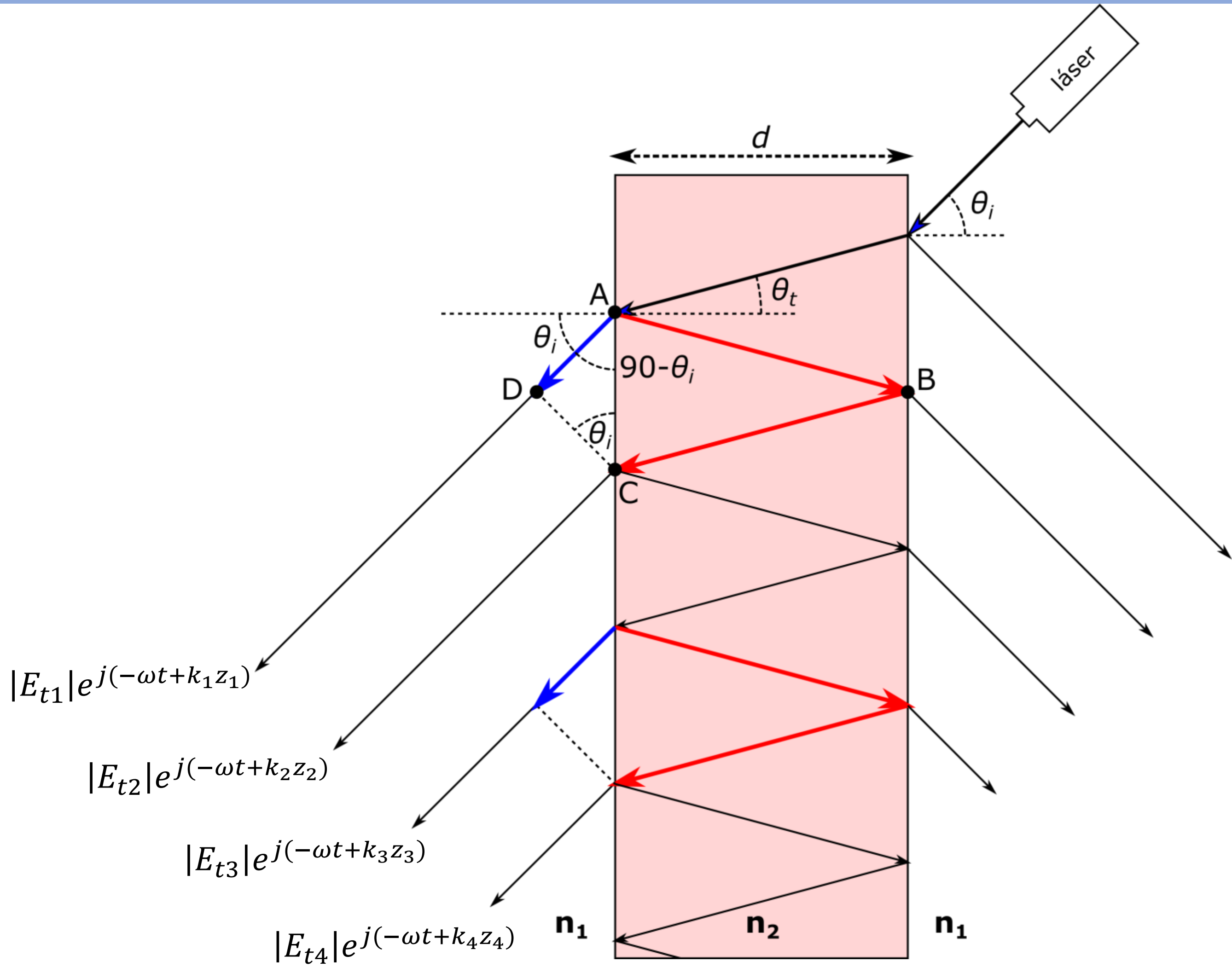
2. Encontrar diferencia de fases espaciales:
   - $k_2z_2 - k_1z_1$
   - $k_3z_3 - k_2z_2$

$$k_2z_2 - k_1z_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1(\overline{AD})\right) = \delta \Rightarrow k_2z_2 = k_1z_1 + \delta$$

$$k_4z_4 - k_3z_3 = \delta$$

$$k_3z_3 - k_2z_2 = \delta \Rightarrow k_3z_3 = k_2z_2 + \delta = k_1z_1 + 2\delta$$

$$E_{t1} = |E_{t1}|e^{j(-\omega t + k_1z_1)}$$
$$E_{t2} = |E_{t2}|e^{j(-\omega t + k_2z_2)} = r'^2|E_{t1}|e^{j(-\omega t + k_1z_1 + \delta)} = r'^2 e^{j(\delta)}E_{t1}$$
$$E_{t3} = |E_{t3}|e^{j(-\omega t + k_3z_3)} = r'^4|E_{t1}|e^{j(-\omega t + k_1z_1 + 2\delta)} = r'^4 e^{j(2\delta)}E_{t1}$$
$$\vdots$$



Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

Pasos

1. $E_T = E_{t1} + E_{t2} + E_{t3} + \cdots$

$E_{t1} = |E_{t1}| e^{j(-\omega t + k_1 z_1)}$
$E_{t2} = r'^2 e^{j(\delta)} E_{t1}$
$E_{t3} = r'^4 e^{j(2\delta)} E_{t1}$
$\vdots$

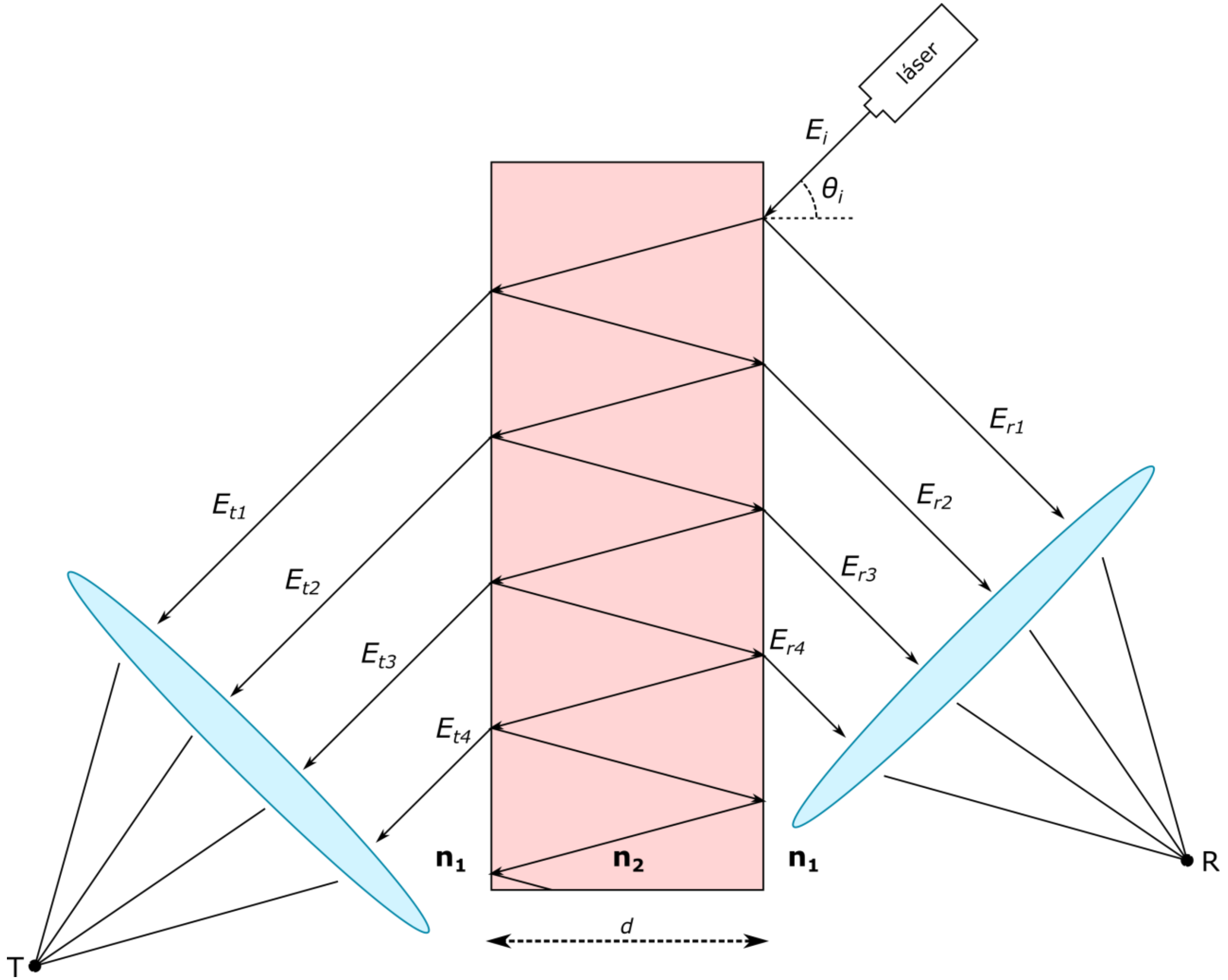
$E_T = E_{t1} + E_{t2} + E_{t3} + \cdots = E_{t1}\left(1 + r'^2 e^{j\delta} + r'^4 e^{j2\delta} + \cdots\right)$
asumiendo suma infinita, la expresión de E_T se puede simplificar

- Desarrollo matemático en los apuntes de Horacio

Pasos

3. Pasar E_T a coordenadas rectangulares ($E_T = a_T + jb_T$)
4. Encontrar $I_T = a_T^2 + b_T^2$

- Desarrollo matemático en los apuntes de Horacio



Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Patrón de interferencia en el punto T

$$I_T = \frac{|E_{t1}|^2}{\left(1-r'^2\right)^2 + 4r'^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$I_{T,máx} = \frac{|E_{t1}|^2}{\left(1-r'^2\right)^2}$$

$$\frac{I_T}{I_{T,máx}} = \frac{\left(1-r'^2\right)^2}{\left(1-r'^2\right)^2 + 4r'^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4r'^2}{\left(1-r'^2\right)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Función de Airy:

$$\boldsymbol{\frac{I_T}{I_{T,\mathrm{máx}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{F}\, sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

$F = \frac{4r'^2}{\left(1-r'^2\right)^2}$ (factor F, factor de fuerza, Finesse)

$$\boldsymbol{\frac{I_T}{I_{T,\mathrm{máx}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{F}\, sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

- **Máximos (interferencia constructiva)**

  Condición para máximo

  $$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \delta = 0, 2\pi, 4\pi = 2m\pi$$

  Valor en máximo

  $$\frac{I_T}{I_{T,máx}} = 1$$

- **Mínimo (interferencia destructiva)**

  Condición para mínimo

  $$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \delta = \pi, 3\pi, 5\pi = (2m+1)\pi$$

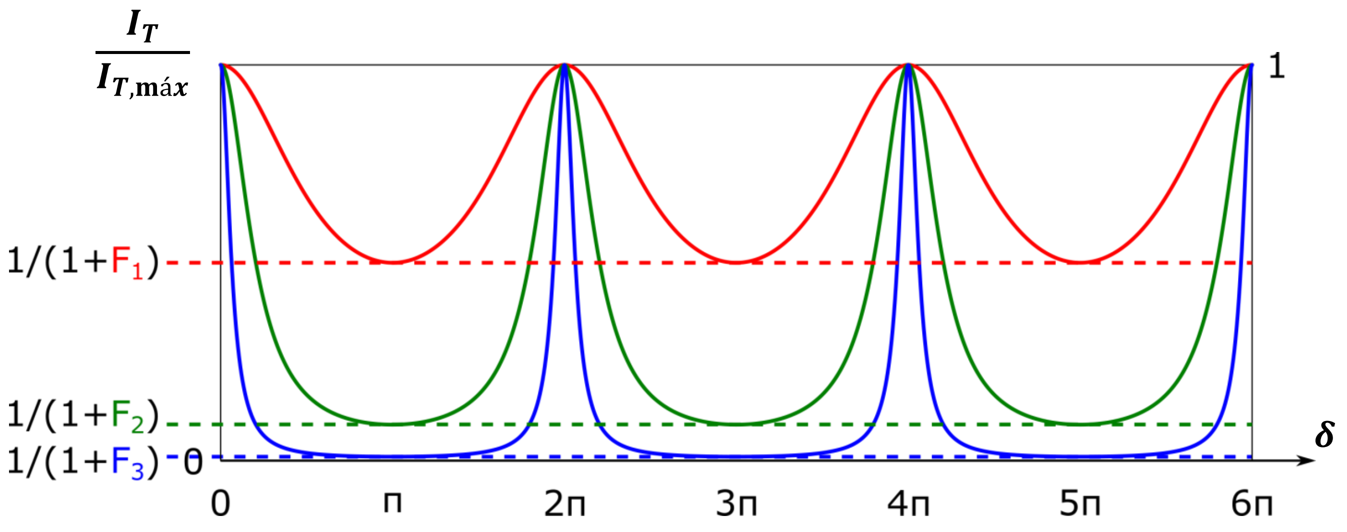
  Valor en mínimo

  $$\frac{I_P}{I_{T,máx}} = \frac{1}{1+F}$$

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy



$$F_1 = 1 < F_2 = 10 < F_3 = 100$$

$F = \frac{4r'^2}{(1-r'^2)^2}$ (F depende de r' que depende de n_1 y n_2)

$$\frac{I_T}{I_{T,\text{máx}}} = \frac{1}{1 + F\,sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

- **Máximos (interferencia constructiva)**

  Condición para máximo

  $$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \delta = 0, 2\pi, 4\pi = 2m\pi$$

  Valor en máximo

  $$\frac{I_T}{I_{T,máx}} = 1$$

- **Mínimo (interferencia destructiva)**

  Condición para mínimo

  $$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \delta = \pi, 3\pi, 5\pi = (2m+1)\pi$$

  Valor en mínimo

  $$\frac{I_P}{I_{T,máx}} = \frac{1}{1+F}$$

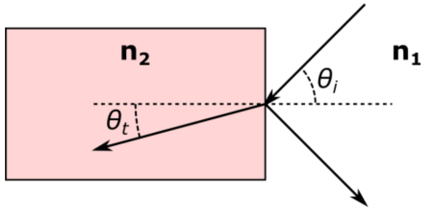
Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy – cálculo de δ

$$k_2 z_2 - k_1 z_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2(\overline{AB}+\overline{BC}) - n_1(\overline{AD})\right) = \delta$$

$$\cos(\theta_t) = \frac{d}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{d}{\cos(\theta_t)}$$



Snell

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)$$

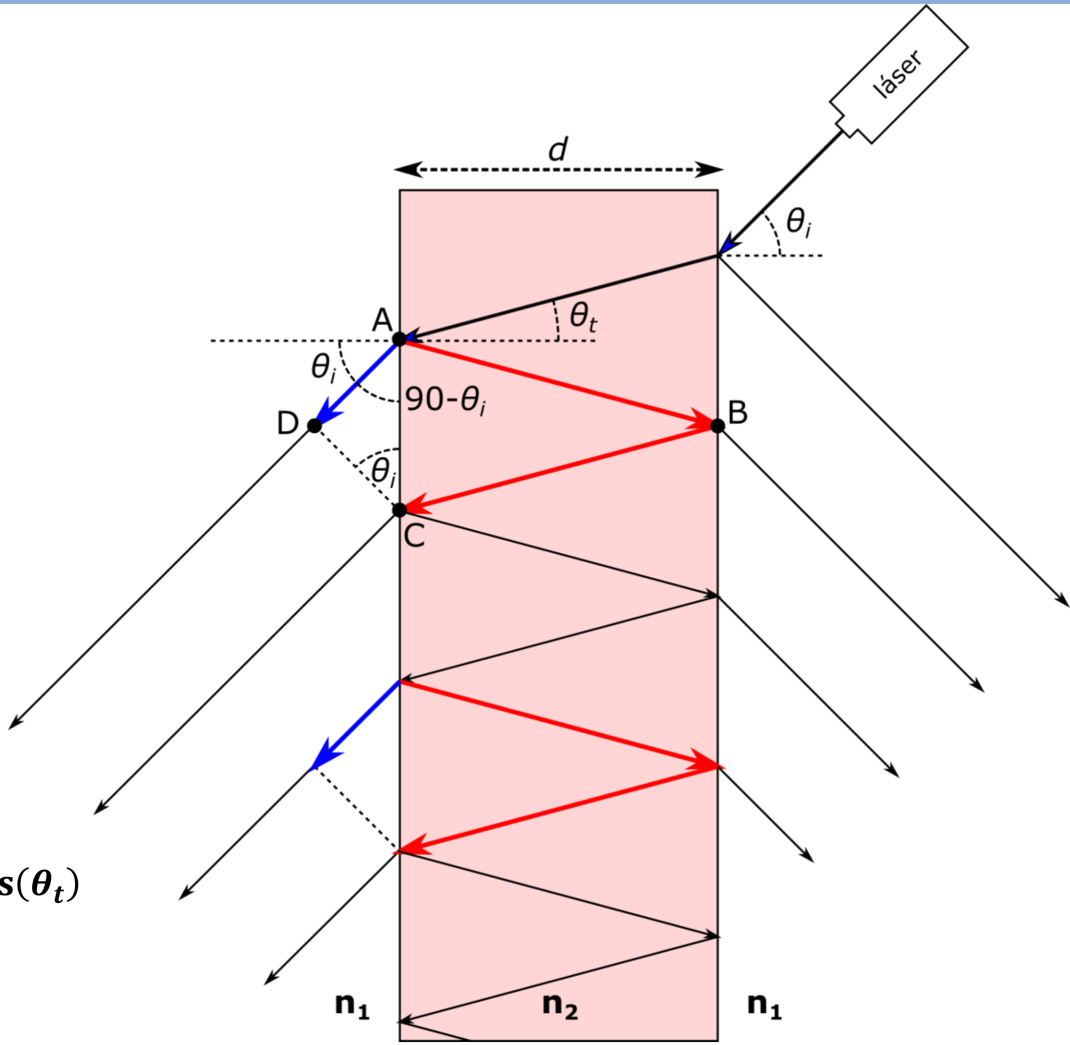
$$\sin(\theta_i) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AD} = \sin(\theta_i)\,\overline{AC}$$

$$\sin(\theta_t) = \frac{\overline{AC}/2}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = 2\sin(\theta_t)\,\overline{AB}$$

$$\overline{AD} = 2\sin(\theta_i)\sin(\theta_t)\,\overline{AB} = 2n_2\sin(\theta_t)\sin(\theta_t)\frac{2d}{\cos(\theta_t)} = \sin^2(\theta_t)\frac{n_2 2d}{\cos(\theta_t)}$$

$$n_2(\overline{AB}+\overline{BC}) - n_1(\overline{AD}) = \frac{n_2 2d}{\cos(\theta_t)} - \sin^2(\theta_t)\frac{n_2 2d}{\cos(\theta_t)} = \frac{n_2 2d}{\cos(\theta_t)}\left(1-\sin^2(\theta_t)\right) = \boldsymbol{n_2 2d\cos(\theta_t)}$$

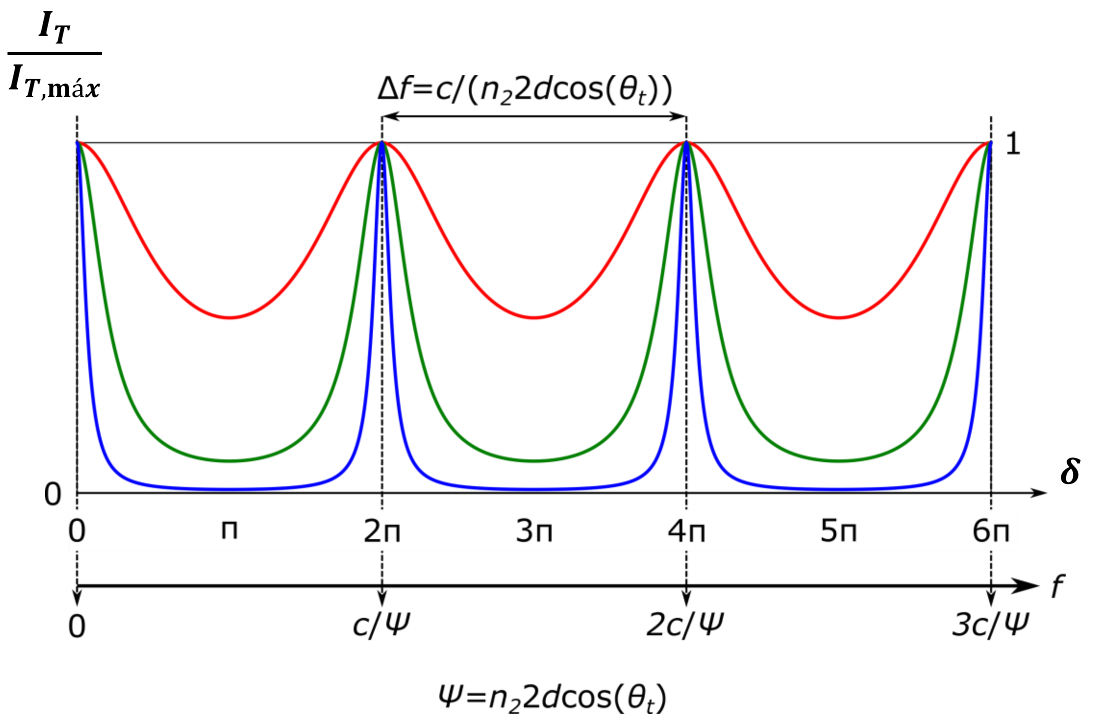
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2(\overline{AB}+\overline{BC}) - n_1(\overline{AD})\right) = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d\cos(\theta_t)$$



Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy



$$\frac{I_T}{I_{T,\text{máx}}} = \frac{1}{1 + F\, sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

- **Frecuencias resonantes (interferencia constructiva)**

  Condición para máximo

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \delta = 0{,}2\pi, 4\pi = 2m\pi$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d\cos(\theta_t) = 2m\pi \Rightarrow f = m\frac{c}{n_2 2d\cos\theta_t}$$

  Separación entre máximos (FSR, free spectral range)

$$\Delta f = f_m - f_{m-1} = \frac{cm}{n_2 2d\cos\theta_t} - \frac{c(m-1)}{n_2 2d\cos\theta_t} = \frac{c}{n_2 2d\cos\theta_t}$$

¿FSR en longitud de onda Δλ?

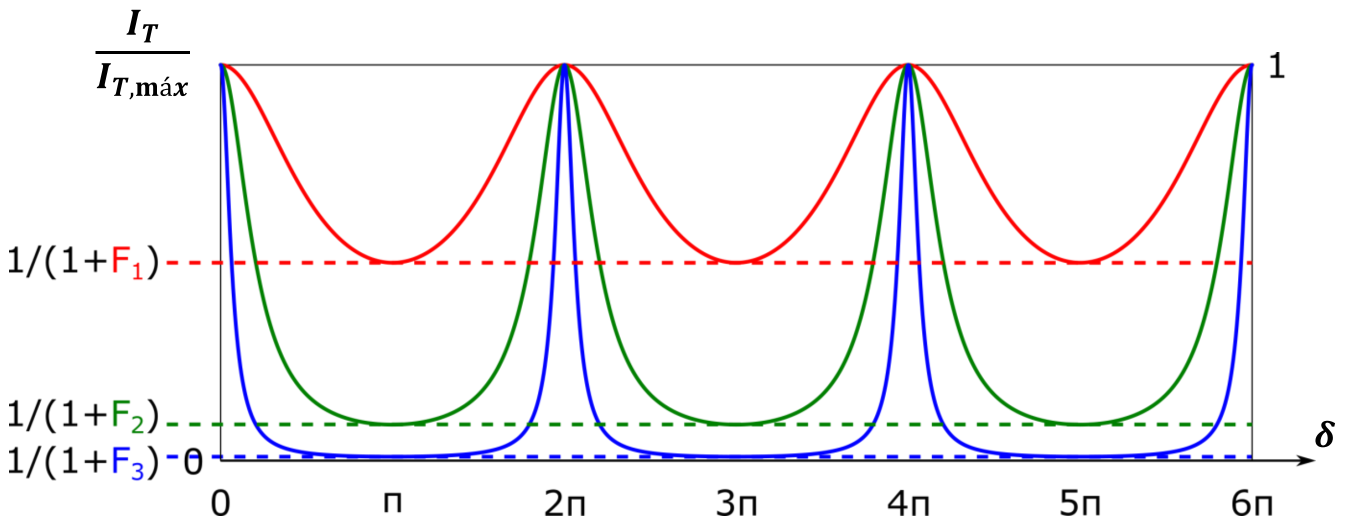
¿Picos equidistantes en longitud de onda?

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy

$$\frac{I_T}{I_{T,\text{máx}}} = \frac{1}{1 + F\,sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



$$F_1 = 1 < F_2 = 10 < F_3 = 100$$

- **Frecuencias no resonantes**

  Condición para mínimo

  $$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \delta = \pi, 3\pi, 5\pi = (2m+1)\pi$$

  $$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d\cos(\theta_t) = (2m+1)\pi \Rightarrow f = \frac{(2m+1)}{2}\frac{c}{n_2 2d\cos\theta_t}$$

  Valor en mínimo

  $$\frac{I_T}{I_{T,máx}} = \frac{1}{1+F} \Rightarrow F = \frac{4r'^2}{\left(1-r'^2\right)^2}$$

  Si $r' \approx 1$ entonces $r'^2 \approx 1$ y $F \to \infty$ y $\frac{1}{1+F} \to 0$

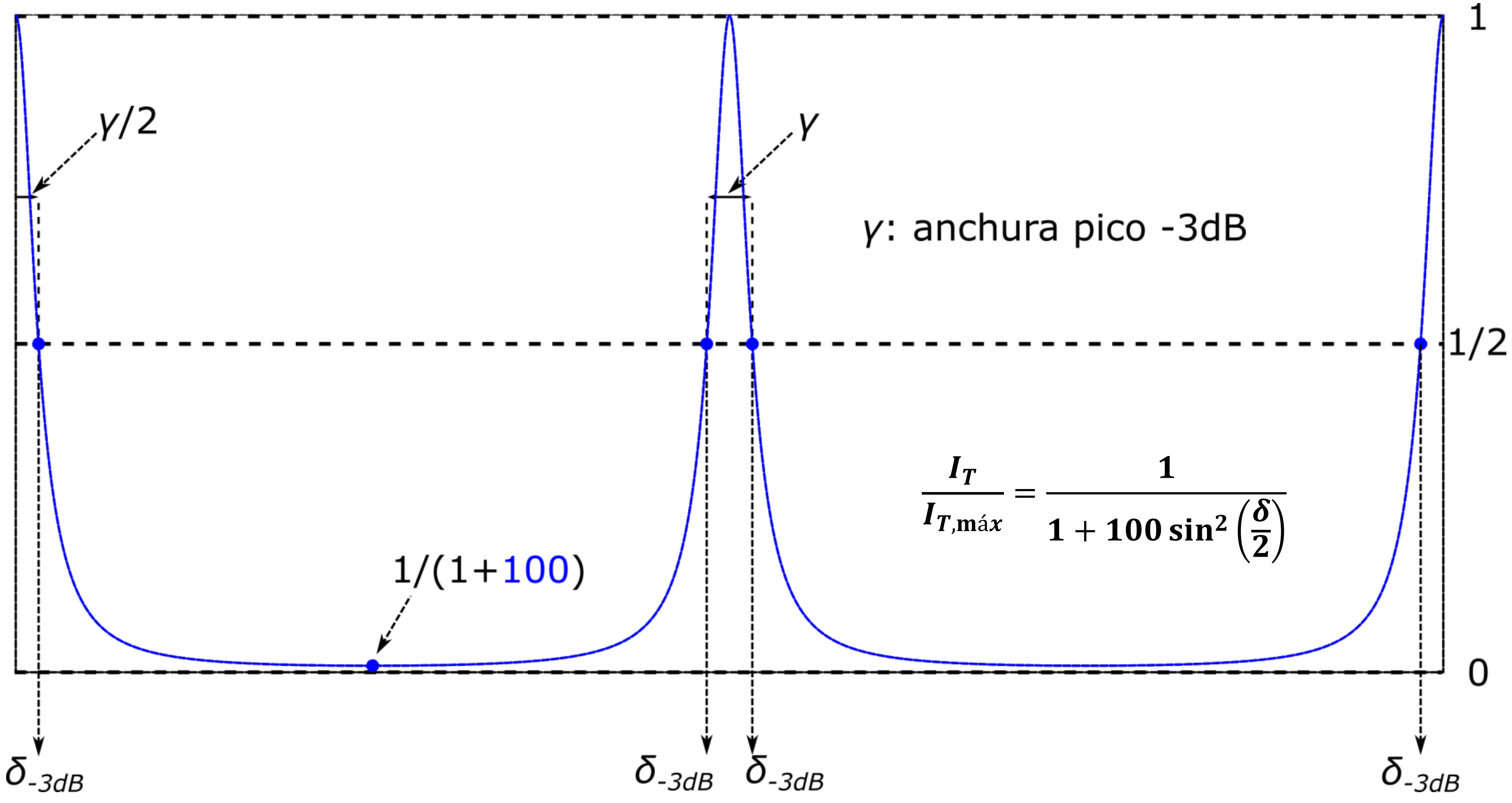
  $r' = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$ (coeficiente de reflexión de Frenel, reflectividad del interferómetro)

  $r' \approx 1$ para $n_2 \gg n_1 \Rightarrow$ alta reflectividad

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy – anchura de pico



$$\frac{I_T}{I_{T,\text{máx}}} = \frac{1}{1+100\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta_{3dB}}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$F\sin^2\left(\frac{\delta_{3dB}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\delta_{3dB}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{F}}$$

Solución 1er cuadrante $\frac{\delta_{3dB}}{2}$ es pequeña si F es grande $\Rightarrow$ aproximación ángulo pequeño (primer pico)

$$\frac{\delta_{3dB}}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{F}} \Rightarrow \gamma = 2\delta_{3dB} = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

Anchura pico en frecuencia

$$\gamma(\text{Hz}) = 2f_{3dB}$$

$$\delta_{3dB} = \frac{2\pi}{\lambda_{3dB}} n_2 2d\cos\theta_t = \frac{2}{\sqrt{F}}$$

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{n_2 d\cos\theta_t\sqrt{F}}$$

$$\gamma(\text{Hz}) = \frac{2}{2\pi}\frac{c}{n_2 d\cos\theta_t\sqrt{F}} = \frac{2}{\pi}\frac{FSR}{\sqrt{F}}$$

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de Airy

Sabiendo que los coeficientes de transmisión de Fresnel son:
$t = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$ y $t' = \frac{2n_2}{n_1+n_2}$

¿Cuál es la relación entre $I_{T,máx}$ y la intensidad de nuestro láser a la entrada del filtro Fabry-Perot (i.e., I_i)?

$$I_{T,máx} = \frac{|E_{t1}|^2}{\left(1-r'^2\right)^2}$$

$$|E_{t1}| = |E_i|tt' = |E_i|\frac{2n_1}{n_1+n_2}\frac{2n_2}{n_1+n_2} = |E_i|\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

Por otra parte:

$$1-r'^2 = 1-\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 = \frac{n_1^2+n_2^2+2n_1n_2-n_1^2-n_2^2+2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2+2n_1n_2} = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

Por tanto:

$$I_{T,máx} = \frac{|E_{t1}|^2}{\left(1-r'^2\right)^2} = \frac{\left(|E_i|\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\right)^2}{\left(\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\right)^2} = |E_i|^2 = I_i$$

$$I_{T,máx} = I_i$$

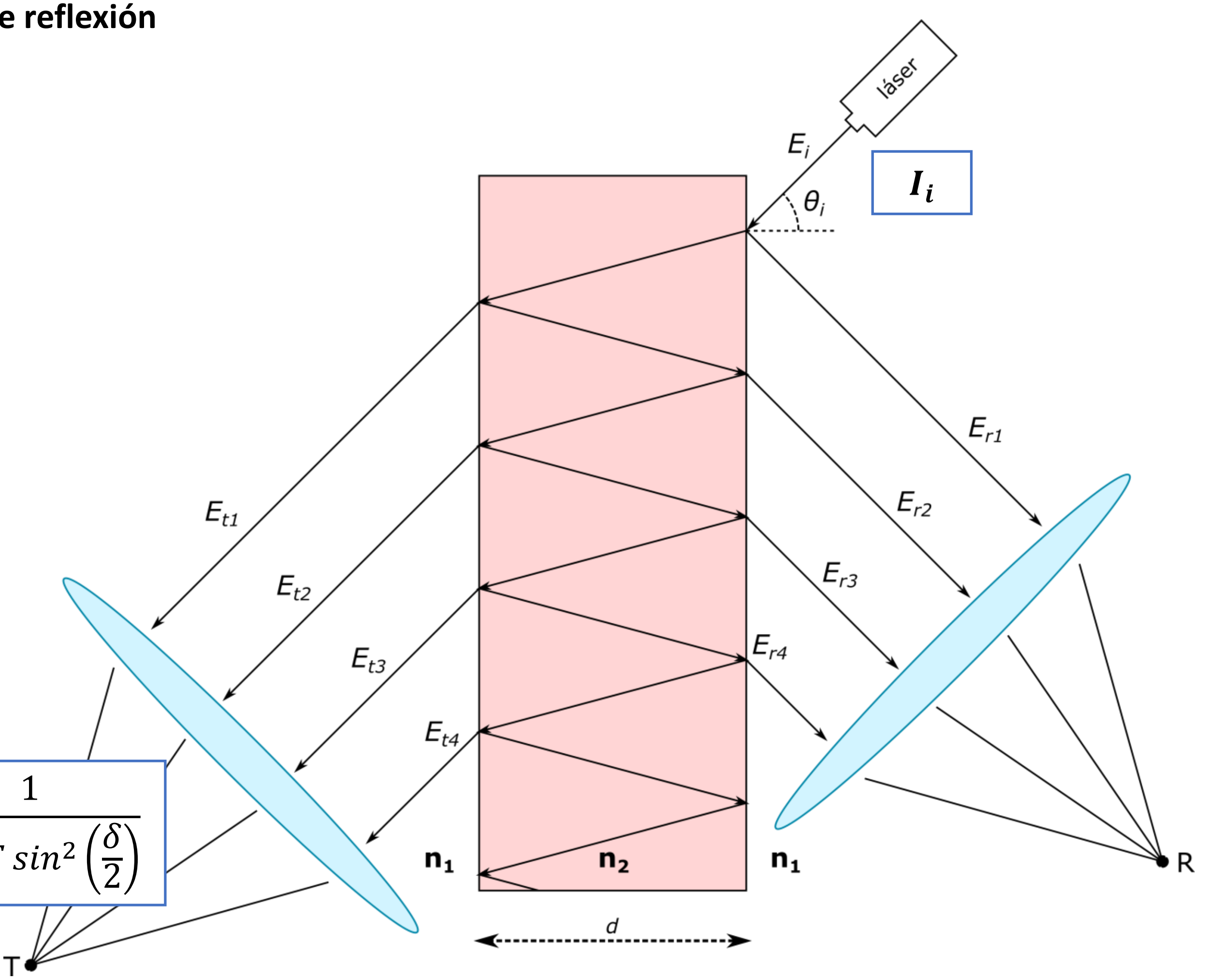
Luego la función de Airy se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\frac{I_T}{I_{T,\text{máx}}} = \frac{I_T}{I_i} = \frac{1}{1+\mathrm{F}\,sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

Función de reflexión



$\boldsymbol{I_i}$

$$\frac{\boldsymbol{I_T}}{\boldsymbol{I_i}} = \frac{1}{1 + F\,sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{\boldsymbol{I_R}}{\boldsymbol{I_i}} = \frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Función de transferencia $\frac{I_R}{I_i}$

Campo de entrada:

$E_i = |E_i|e^{j(-\omega t + k_1 z_1)}$

$I_i = |E_i|^2$

Conservación de la energía

$I_T + I_R = I_i$

$\frac{I_T}{I_i} + \frac{I_R}{I_i} = 1$

$I_{T,máx} = I_i$

$$\frac{I_R}{I_i} = 1 - \frac{I_R}{I_i} = 1 - \frac{1}{1 + F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Ojo

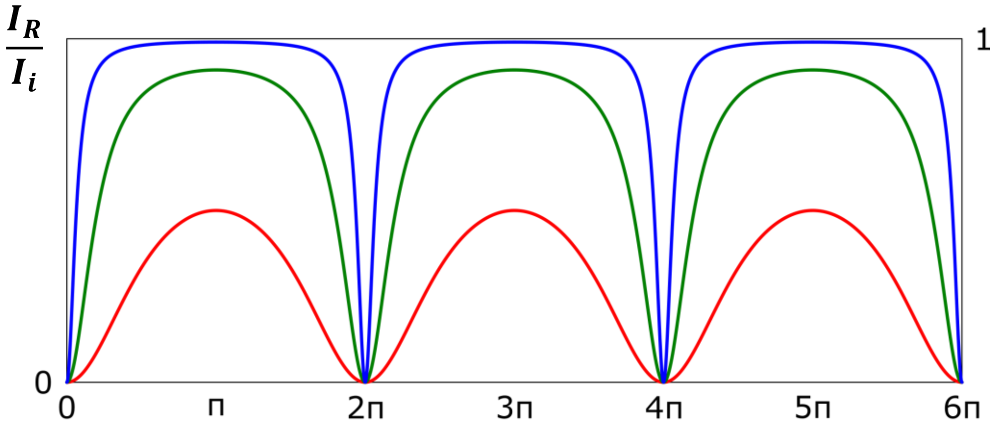
$I_{T,máx} = I_i$

$I_{R,máx} \neq I_i$

Interferometría

Interferómetro de ondas múltiples – interferómetro de Fabry-Perot

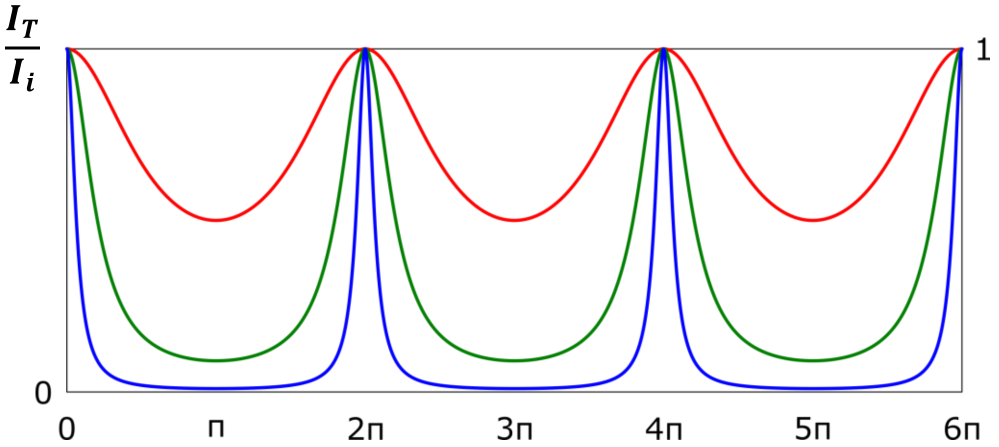
Función de reflexión



$$\frac{100\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+100\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{10\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+10\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{1\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+1\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



$$\frac{1}{1+100\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{1+10\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{1+1\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Función de transferencia $\frac{I_R}{I_i}$

Campo de entrada:

$$E_i = |E_i| e^{j(-\omega t + k_1 z_1)}$$

$$I_i = |E_i|^2$$

Conservación de la energía

$$I_T + I_R = I_i$$

$$\frac{I_T}{I_i} + \frac{I_R}{I_i} = 1$$

$$I_{T,máx} = I_i$$

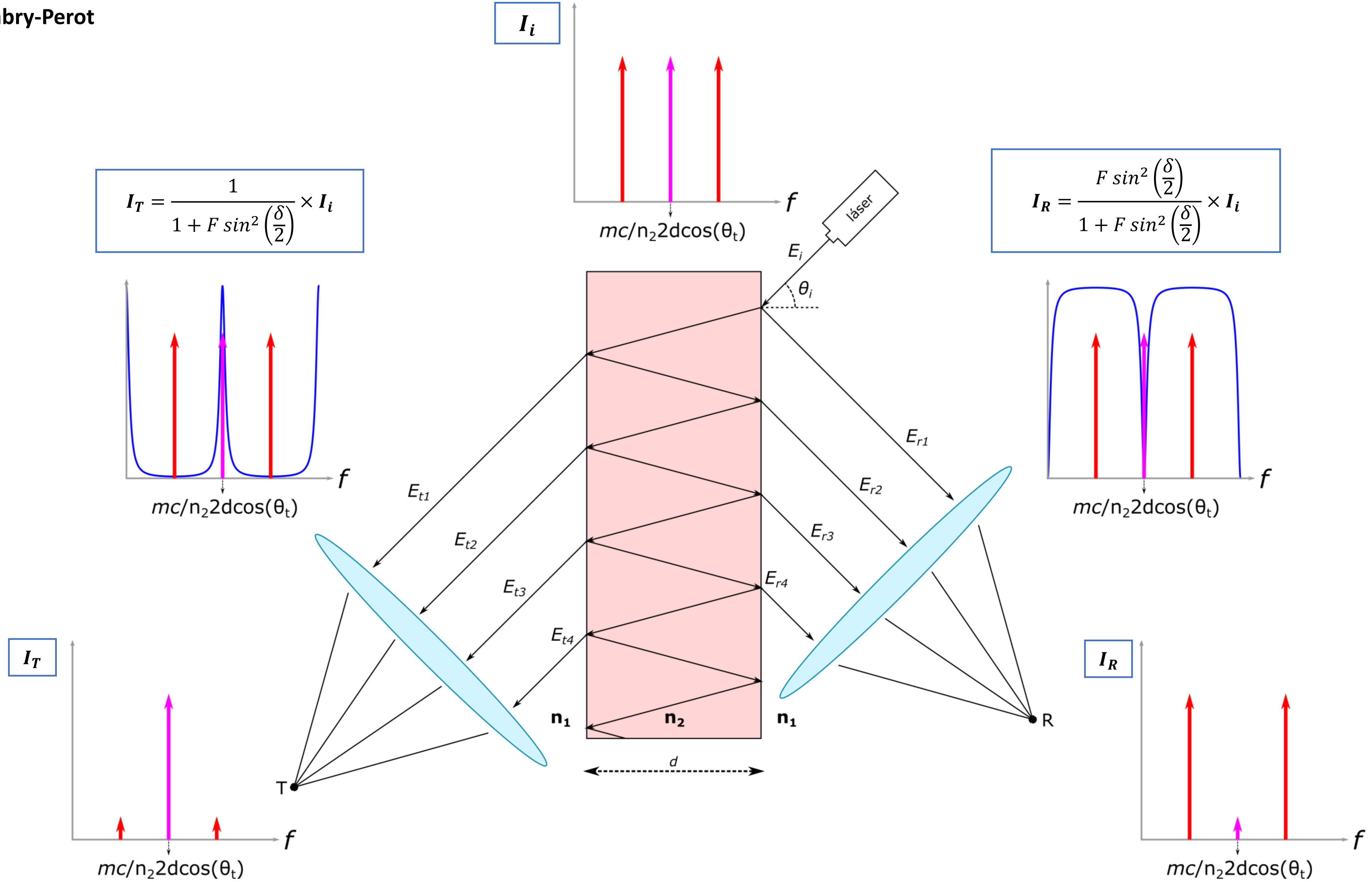
$$\frac{I_R}{I_i} = 1 - \frac{I_R}{I_i} = 1 - \frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Ojo

$$I_{T,máx} = I_i$$

$$I_{R,máx} \neq I_i$$

Filtros Fabry-Perot



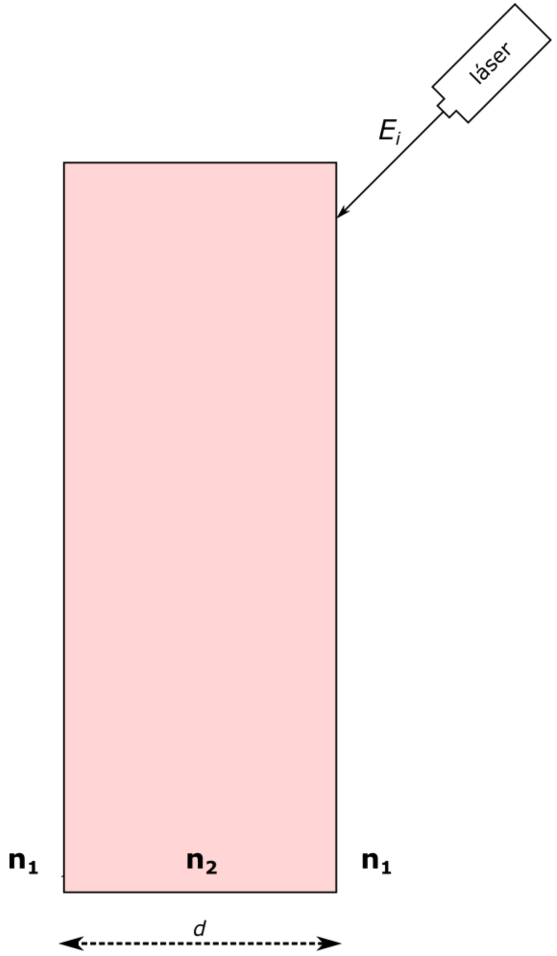
Interferometría

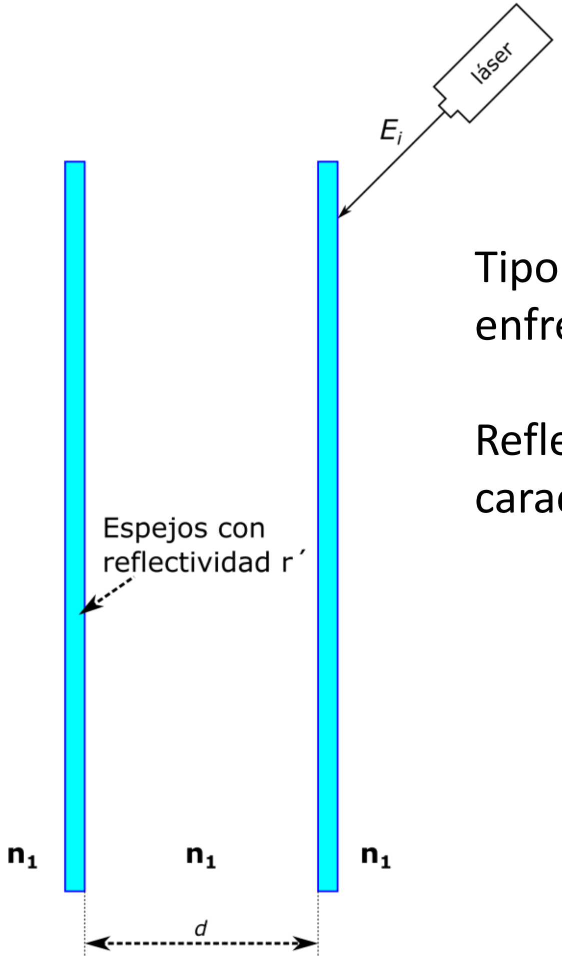
Tipos de filtro Fabry-Perot

Tipo 1: lámina de material con índice de refracción n_2

Reflectividad:

$$r' = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$





Tipo 2: dos espejos enfrentados con aire en medio

Reflectividad: parámetro característico de los espejos