Interferometría

¿Por qué necesitamos interferometría?

Una de las principales aplicaciones es la medida de fase del campo eléctrico:

Componente eléctrica del campo electromagnético:

$E(t,r) = \boldsymbol{E_0}\cos(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kz})$

- $\boldsymbol{E_0}$: amplitud del campo eléctrico
- $\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kz}$: fase del campo eléctrico

Los dispositivos que empleamos para detectar el campo eléctrico responden a la intensidad de este

$$I_E = \langle E^2 \rangle = \left\langle E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \right\rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2}\cos\big(2(\omega t - kz)\big) \right\rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

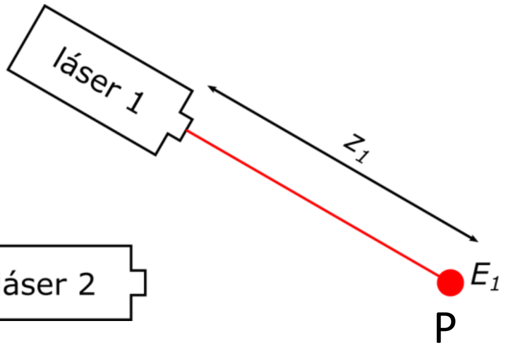
Con estos detectores solo podemos obtener información sobre la amplitud no sobre la fase

Para medir la fase del campo necesitamos utilizar técnicas de interferometría

Aparte de la medición de fase, la interferometría se emplea para diseñar filtros, para técnicas de apuntamiento de haz, modulación, computación fotónica…

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría

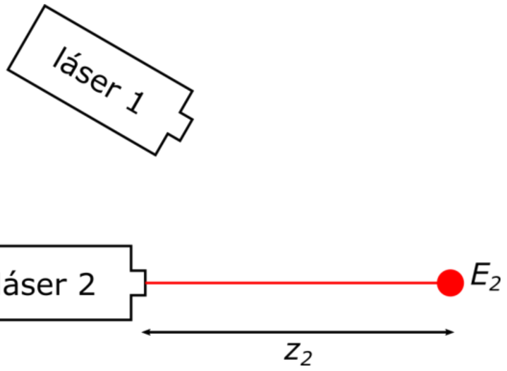


Solo encendemos el láser 1 y mediamos la intensidad de E_1 en el punto P

$$E_1 = E_{01}\cos(\omega t - kz_1)$$

$$I_1 = \langle E_1^2\rangle = \langle E_{01}^2\cos^2(\omega t - kz_1)\rangle = \left\langle \frac{E_{01}^2}{2} + \frac{E_{01}^2}{2}\cos\big(2(\omega t - kz_1)\big)\right\rangle = \frac{E_{01}^2}{2}$$

$$I_1 = \frac{E_{01}^2}{2}$$



Solo encendemos el láser 2 y mediamos la intensidad de E_2 en el punto P

$$E_2 = E_{02}\cos(\omega t - kz_2)$$

$$I_2 = \langle E_2^2\rangle = \langle E_{02}^2\cos^2(\omega t - kz_2)\rangle = \left\langle \frac{E_{02}^2}{2} + \frac{E_{02}^2}{2}\cos\big(2(\omega t - kz_2)\big)\right\rangle = \frac{E_{02}^2}{2}$$

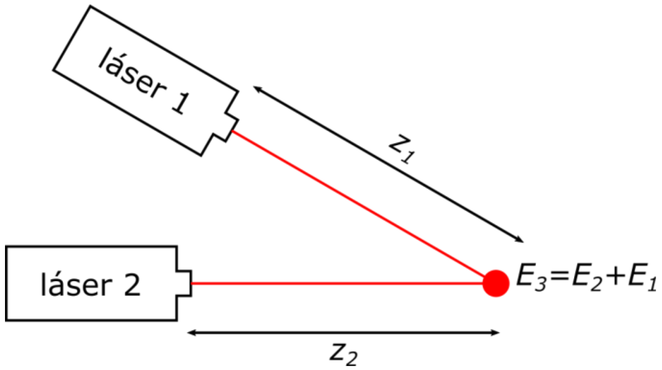
$$I_2 = \frac{E_{02}^2}{2}$$

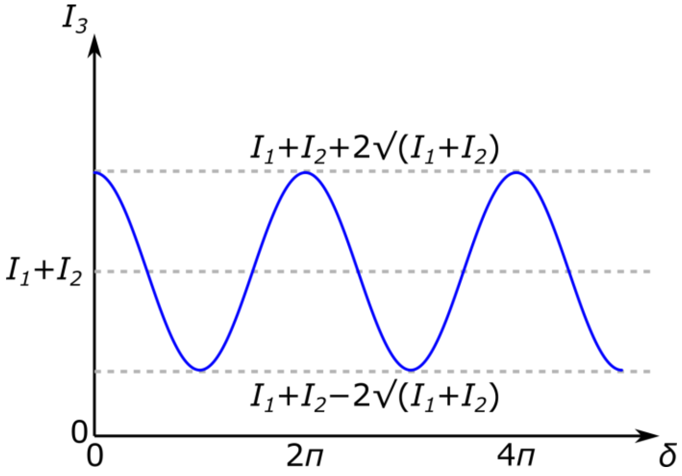
¿Qué pasa si encendemos los dos láseres a la vez? ¿Cuál será la intensidad medida? ¿$I_1 + I_2$?

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría

La interferometría es básicamente la interacción entre dos campos electromagnéticos de la misma frecuencia:





$$E_3 = E_1 + E_2$$

$$I_3 = \left\langle E_3^2 \right\rangle = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \left\langle E_1^2 \right\rangle + \left\langle E_2^2 \right\rangle + \langle 2E_1E_2 \rangle$$

- $\left\langle E_1^2 \right\rangle = \frac{E_{01}^2}{2} = I_1$
- $\left\langle E_2^2 \right\rangle = \frac{E_{02}^2}{2} = I_2$
- $\langle 2E_1E_2 \rangle = \langle 2E_{01}E_{02} \cos(\omega t - kz_1) \cos(\omega t - kz_2) \rangle = \left\langle 2E_{01}E_{02} \left[\frac{1}{2} \cos(kz_2 - kz_1) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] \right\rangle =$
  $E_{01}E_{02} \cos(kz_2 - kz_1) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(kz_2 - kz_1)$

$$I_3 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(kz_2 - kz_1) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$

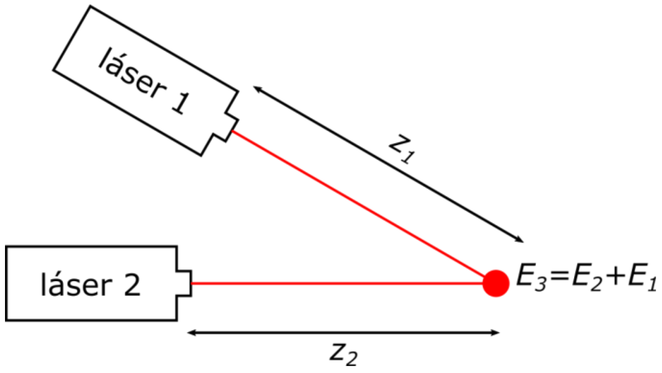
En las zonas de máximos ($\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$) la intensidad resultante es mayor que la simple suma de las intensidades de cada láser (es decir, $I_1 + I_2$)

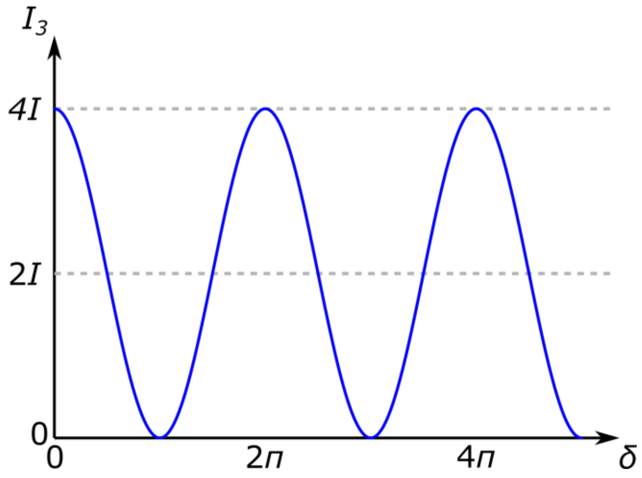
El eje x de la figura de la izquierda representa variación de $\delta = kz_2 - kz_1$. Para variar δ ¿qué habría que hacer en la figura donde aparecen los dos láseres?

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría

La interferometría es básicamente la interacción entre dos campos electromagnéticos de la misma frecuencia:





$$E_3 = E_1 + E_2$$

$$I_3 = \left\langle E_3^2 \right\rangle = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \left\langle E_1^2 \right\rangle + \left\langle E_2^2 \right\rangle + \langle 2E_1E_2 \rangle$$

- $\left\langle E_1^2 \right\rangle = \frac{E_{01}^2}{2} = I_1$
- $\left\langle E_2^2 \right\rangle = \frac{E_{02}^2}{2} = I_2$
- $\langle 2E_1E_2 \rangle = \langle 2E_{01}E_{02}\cos(\omega t - kz_1)\cos(\omega t - kz_2) \rangle = \left\langle 2E_{01}E_{02}\left[\frac{1}{2}\cos(kz_2 - kz_1) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right]\right\rangle =$
  $E_{01}E_{02}\cos(kz_2 - kz_1) = 2\sqrt{I_1I_2}\cos(kz_2 - kz_1)$

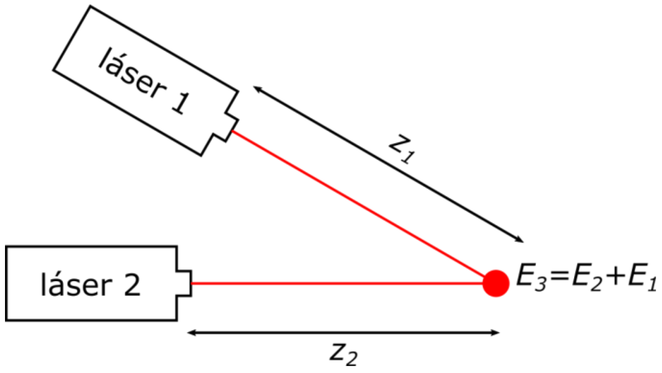
$$I_3 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(kz_2 - kz_1) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\delta)$$

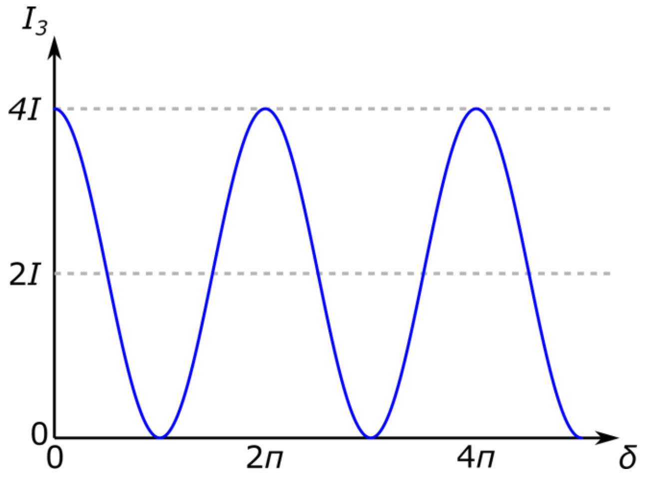
Si $I_1 = I_2 = I \Rightarrow I_3 = 2I + 2I\cos(\delta)$

En este caso hay zonas de oscuridad absoluta ($I_3 = 0$ en los mínimos)

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría





Interferencia entre 2 ondas electromagnéticas con la misma frecuencia

$E_3 = E_1 + E_2$

$I_3 = \langle E_3^2 \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta)$

$\delta = k_2 z_2 - k_1 z_1$

Si $I_1 = I_2 = I$ (las dos ondas tienen la misma intensidad) $\Rightarrow I_3 = 2I + 2I\cos(\delta)$

$I_3 = 2I + 2I\cos(\delta)$

Condición de interferencia

- Interferencia constructiva

  $\delta = 0, 2\pi, 4\pi \ldots = 2m\pi$

- Interferencia destructiva

  $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots = (2m+1)\pi$

  $m = 0,1,2 \ldots$

Valor de δ

$$\delta = k_2 z_2 - k_1 z_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 z_2 - \frac{2\pi}{\lambda} n_1 z_1 = k_0(n_2 z_2 - n_1 z_1)$$

$(n_2 z_2 - n_1 z_1)$: diferencia de caminos ópticos

k_0: número de onda del vacío

Si las dos ondas viajan por el aire:

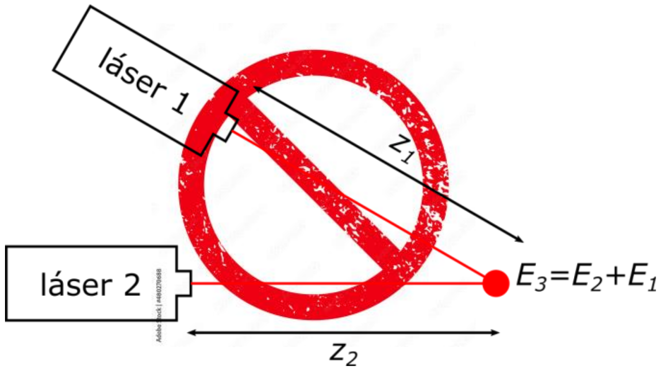
$n_2 = n_1 = 1$

$$\delta = k_0(z_2 - z_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(z_1 - z_2)$$

$(z_1 - z_2)$: diferencia de caminos físicos

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría



Los conceptos que hemos aprendido con el ejemplo de arriba (aunque no se use para hacer interferometría) son aplicables a los interferómetros que vamos a ver a continuación.

Un patrón de interferencia tiene que ser estable en el tiempo. Es decir, si no movemos los láseres de posición solo deberíamos obtener un valor de intensidad.

Esto no es posible si se utilizan dos láseres diferentes como en el diagrama de la izquierda por el ruido de fase, que depende del tiempo:

$$E_1 = E_{01}\cos(\omega t - kz_1 + \Delta\boldsymbol{\varphi_1(t)})$$
$$E_2 = E_{02}\cos(\omega t - kz_2 + \Delta\boldsymbol{\varphi_2(t)})$$

$$I_3 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\underbrace{(kz_2 - kz_1 + \Delta\varphi_2(t) - \Delta\varphi_1(t))}$$

Aunque la posición de los láseres es fija, la intensidad I_3 varia por el ruido de fase de los láseres (es decir, $\Delta\varphi_2(t)$ y $\Delta\varphi_1(t)$)

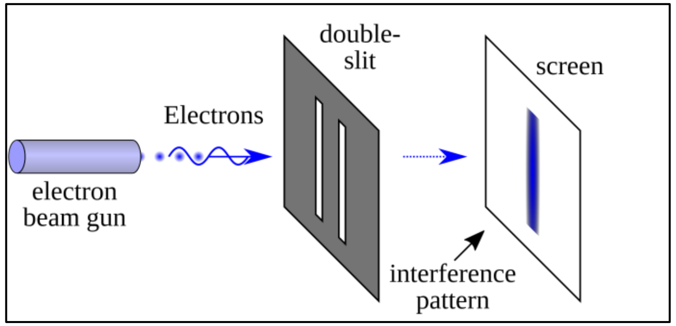
Para conseguir interferencia se utilizan interferómetros, que utilizan solo una fuente de luz que luego se divide en dos:

Interferómetro de Young
Interferómetro de Michelson
Interferómetro de Mach-Zehnder
Interferómetro de Fabry-Perot

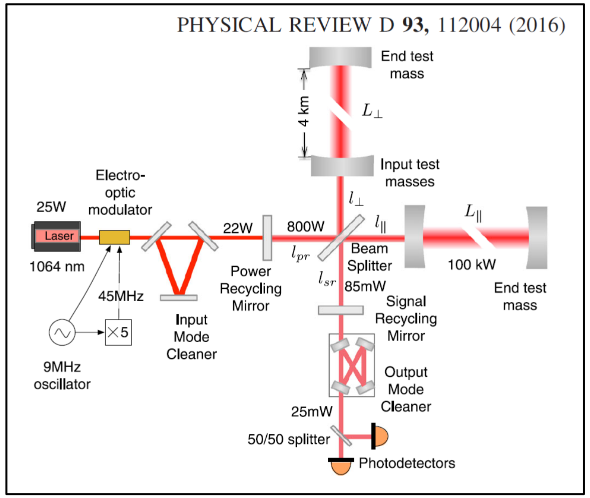
Interferometría

Interferómetros y aplicaciones

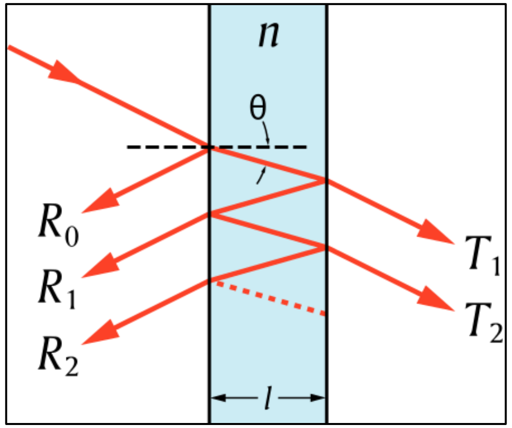
- Interferómetro de Young
  - Demostración comportamiento ondulatorio luz
  - Comportamiento ondulatorio de la materia (experimento doble rendija)



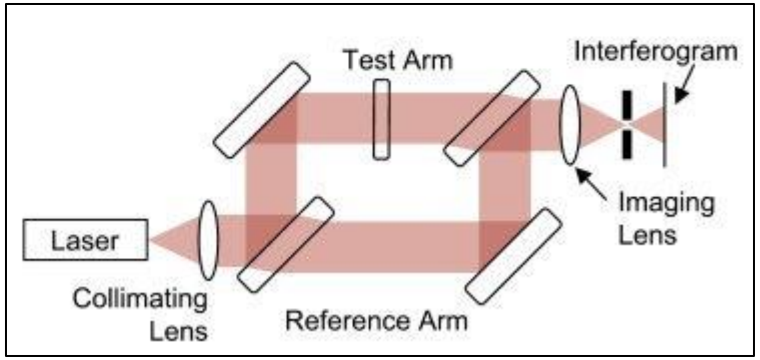
- Interferómetro de Michelson
  - Detector de Ondas gravitacionales (Premio Nobel Física 2017)



- Interferómetro de Mach-Zehnder
  - Modulación de datos
  - Filtros
  - Computación fotónica



- Interferómetro de Fabry-Perot
  - Cavidades de láser
  - Filtros

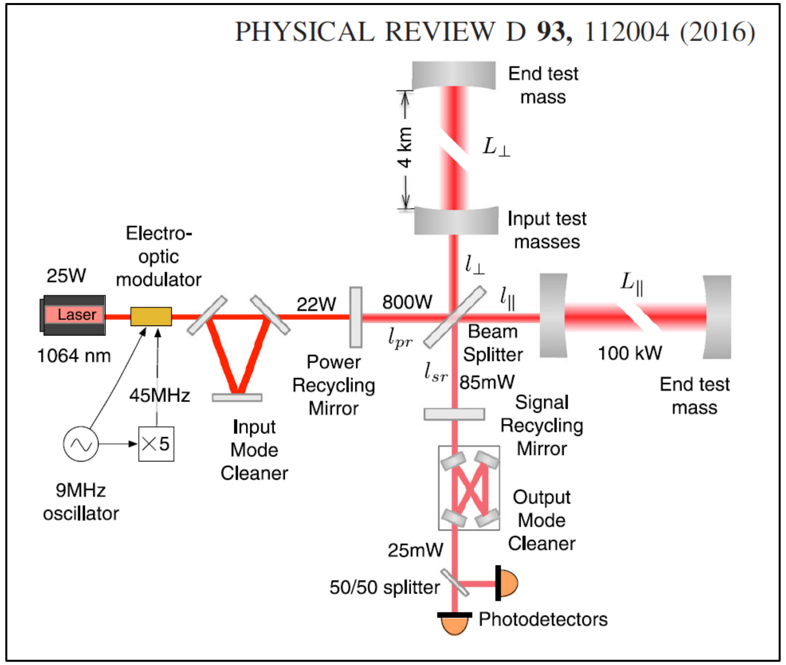


Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría

Para conseguir interferencia se utilizan interferómetros, que utilizan solo una fuente de luz que luego se divide en dos:

Interferómetro de Young
Interferómetro de Michelson
Interferómetro de Mach-Zehnder
Interferómetro de Fabry-Perot

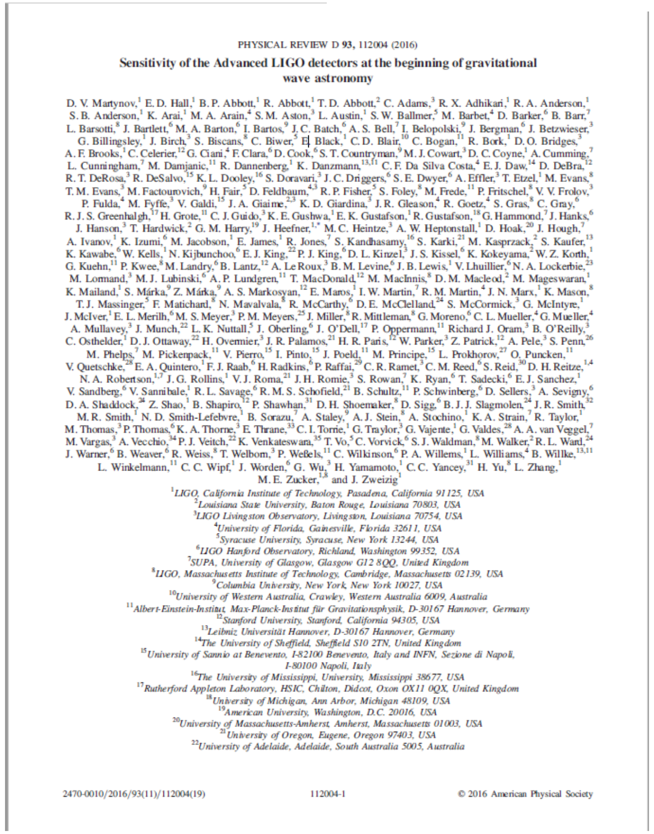


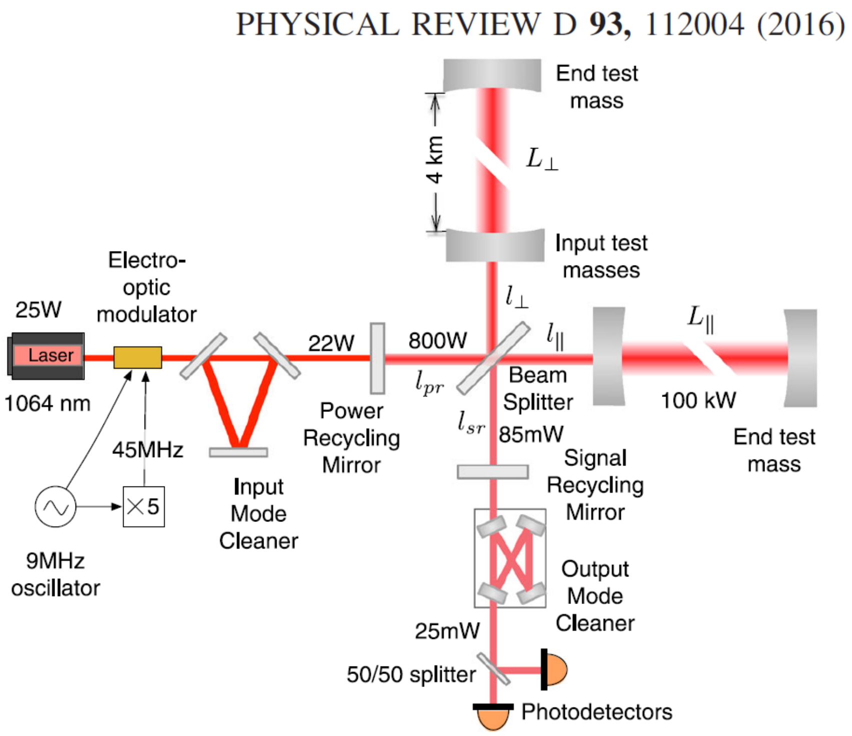
Interferometría

Interferómetro de Michelson - aplicaciones

PHYSICAL REVIEW D **93,** 112004 (2016)

Sensitivity of the Advanced LIGO detectors at the beginning of gravitational wave astronomy

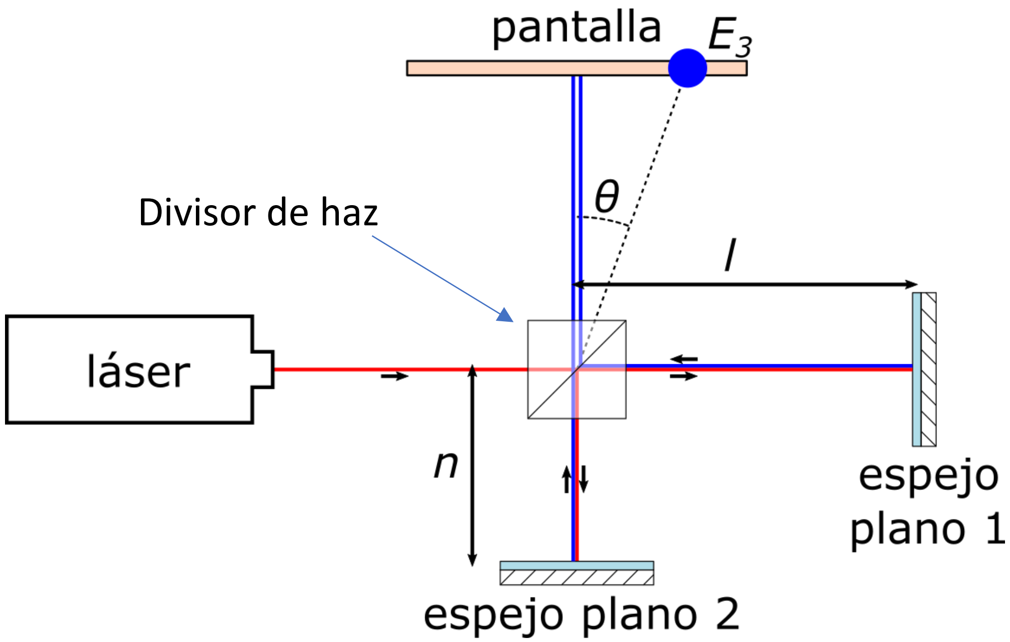




In general relativity, a gravitational wave far away from the source can be approximated as a linear disturbance of the Minkowski metric, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ with the space-time deformation expressed as a dimensionless strain, $h_{\mu\nu}$. In a Michelson interferometer we define the differential displacement as $L = L_\parallel - L_\perp$, where $L_\parallel$ and $L_\perp$ are the lengths of the inline arm and the perpendicular arm, respectively, as shown in Fig. 1. With equal macroscopic arm lengths, $L_0 \simeq L_\parallel \simeq L_\perp$, the gravitational wave strain and the differential arm length are related through the simple equation $L(f) = L_\parallel - L_\perp = h(f)L_0$, where h is the average differential strain induced into both arms at frequency f.

Interferometría

Interferómetro de Michelson - funcionamiento



Para la derivación del valor de δ en el interferómetro de Michelson (dado en la siguiente columna) el alumno puede consultar el diagrama de la página de 409 de Optics de E. Hecht (4ª edición)

Intensidad de E_3

$I_3 = 2I + 2I\cos(\delta)$

Valor de δ (para ángulo θ)

$\delta = k(2d\cos\theta) - \pi$

- d**:** diferencia de caminos ópticos de las dos ramas del interferómetro $\Rightarrow$ si las dos ondas viajan por el aire $d = l - n$

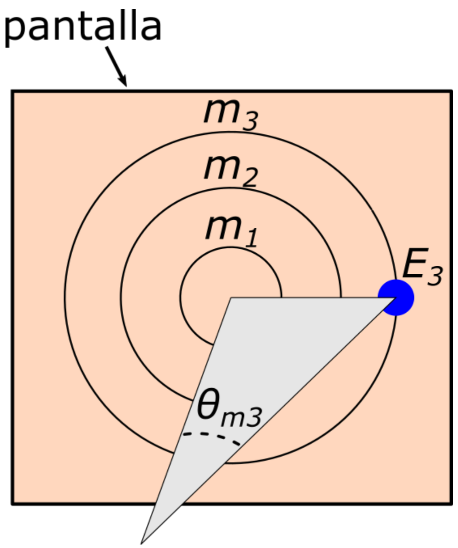
Condición de interferencia

Interferencia constructiva

- $k(2d\cos\theta_{max}) - \pi = 2m\pi$

Interferencia destructiva

- $k(2d\cos\theta_{min}) - \pi = (2m+1)\pi$
- $\cos\theta_{min} = \frac{\lambda(m+1)}{2d}$
- Un ángulo para cada valor de m y valor de d
- $m = 0{,}1{,}2 \ldots$

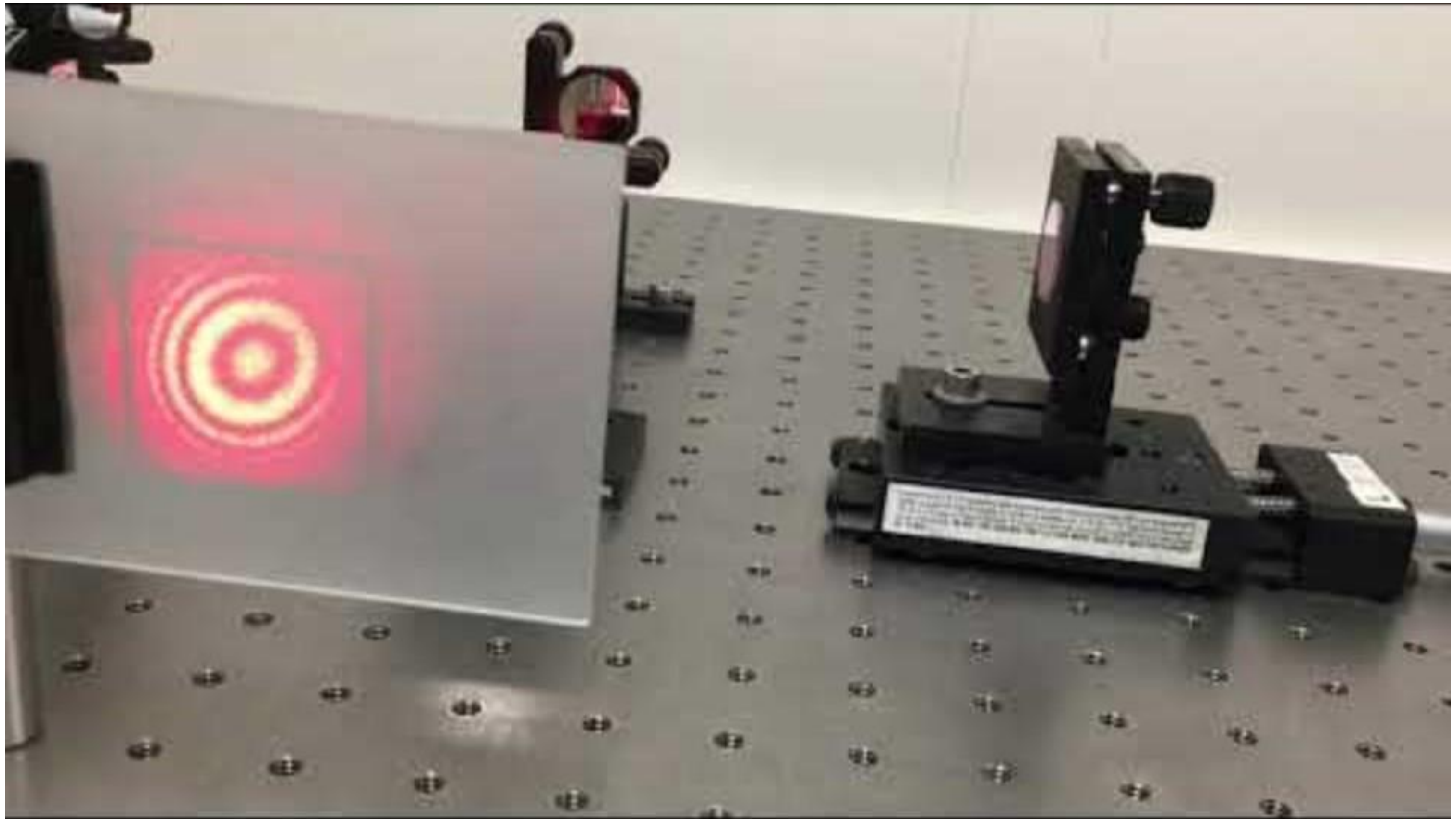


Lo que veremos en la pantalla será una serie de anillos de luz (interferencia constructiva) y de oscuridad (interferencia constructiva)

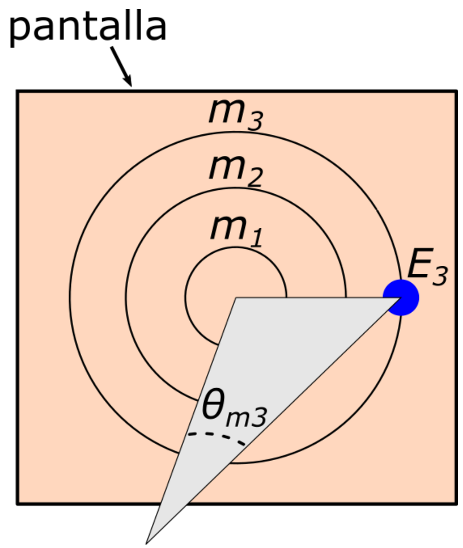
¡ATENCIÓN! m_1 es un número entero que no tiene por qué ser igual a 0 ó 1 (de hecho, su valor, para longitudes de onda visible, es elevado, del orden de varios cientos de miles)

Interferometría

Interferómetro de Michelson - funcionamiento



https://www.youtube.com/watch?v=TZ8RdkXv2Fs

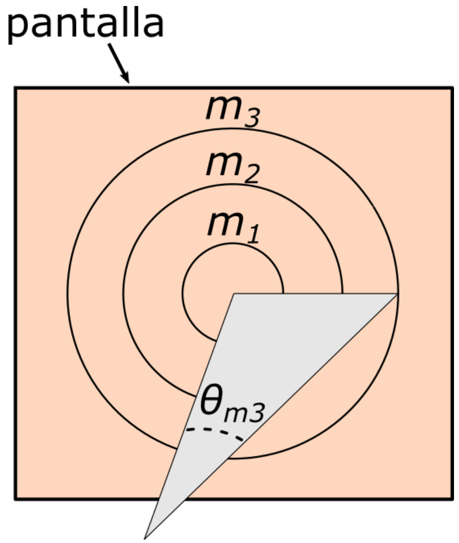


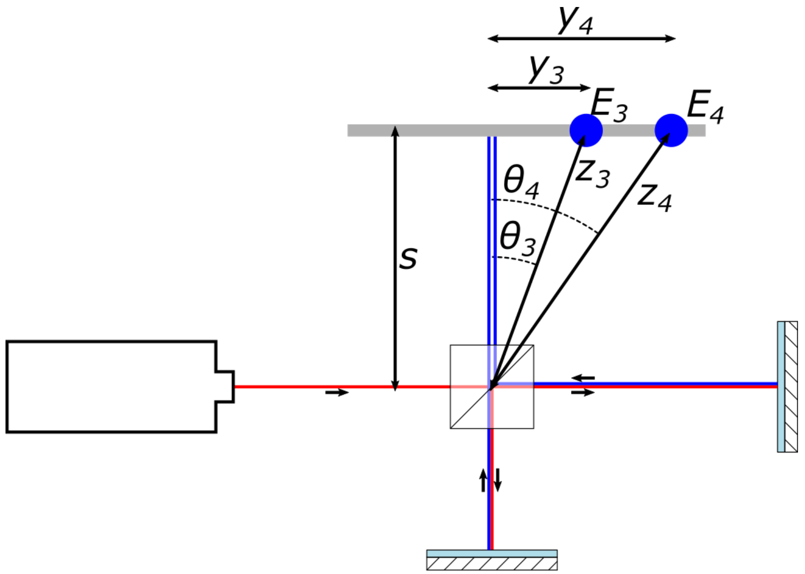
Lo que veremos en la pantalla será una serie de anillos de luz (interferencia constructiva) y de oscuridad (interferencia constructiva)

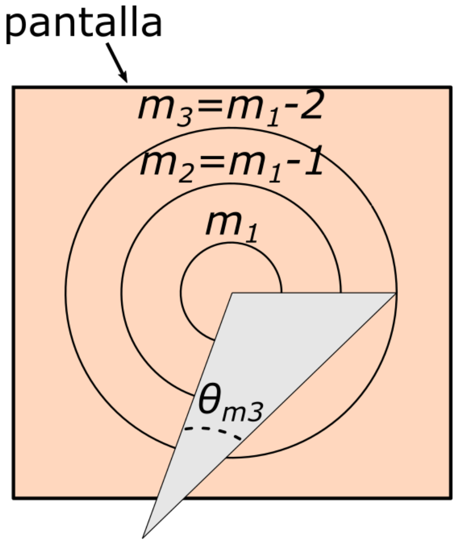
¡ATENCIÓN! m_1 es un número entero que no tiene por qué ser igual a 0 ó 1 (de hecho, su valor, para longitudes de onda visible, es elevado, del orden de varios cientos de miles)

Interferometría

Interferómetro de Michelson - funcionamiento







Ecuación de interferencia destructiva:

$$\cos\theta_{min} = \frac{\lambda(m+1)}{2d}$$

¿El valor de m crece o decrece según me voy alejando del centro de la pantalla (i.e., según aumento θ)?

La forma más directa de responder a esto es argumentando lo siguiente:

θ solo puede tener valores de 0 a $^{\pi}/_{2}$, en este rango $\cos\theta$ decrece a medida que θ crece, por tanto, $\frac{\lambda(m+1)}{2d}$ y también m decrecen a medida que θ crece de 0 a $^{\pi}/_{2}$

Otra forma de verlo:

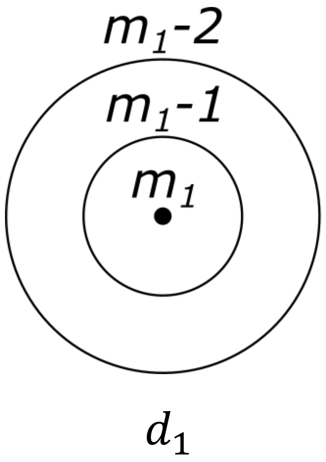
Cuando aumentamos el valor de y, la hipotenusa crece, pero el cateto contiguo s permanece fijo, luego $\cos\theta$ decrece y el valor de m decrece también.

$$\cos\theta_{min} = \frac{s}{z} = \frac{\lambda(m+1)}{2d}$$

Interferómetro de Michelson - problema

¿Cuánto tenemos que variar d (i.e., Δd) para que el anillo de oscuridad $m_1 - 1$ se mueva hasta m_1?

Asunción: para distancia d_1 el modo m_1 tiene $\theta_{min} = 0$



Ecuación de interferencia destructiva:

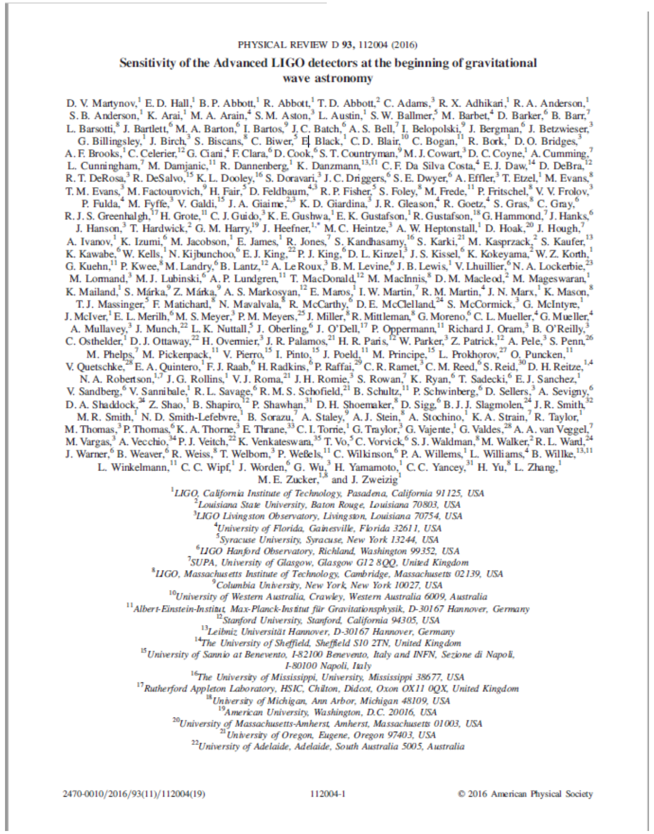
$$\cos\theta_{min} = \frac{\lambda(m+1)}{2d}$$

Interferometría

Interferómetro de Michelson - aplicaciones

PHYSICAL REVIEW D **93,** 112004 (2016)

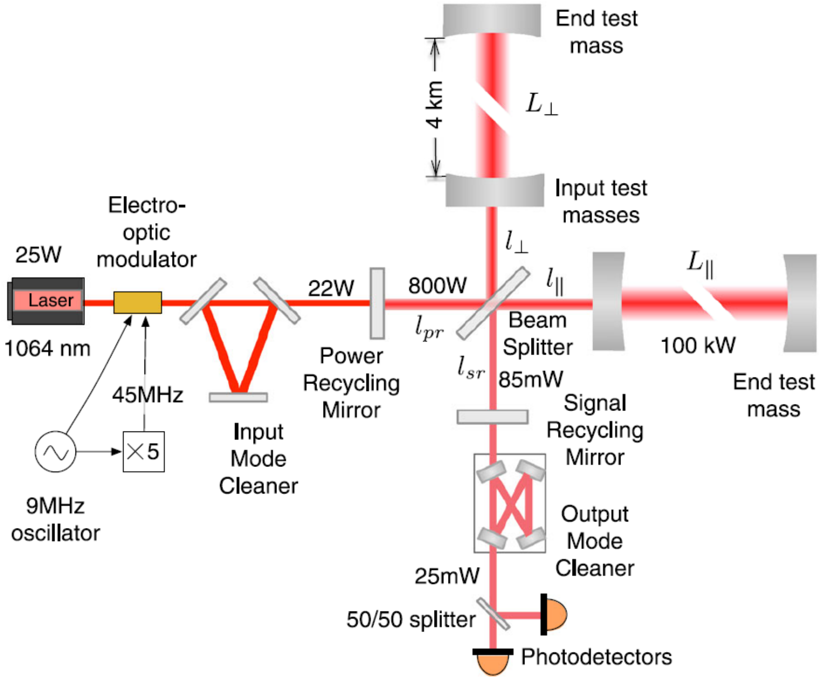
Sensitivity of the Advanced LIGO detectors at the beginning of gravitational wave astronomy


PHYSICAL REVIEW D 93, 112004 (2016)

Sensitivity of the Advanced LIGO detectors at the beginning of gravitational wave astronomy

2470-0010/2016/93(11)/112004(19) 112004-1 © 2016 American Physical Society

PHYSICAL REVIEW D **93,** 112004 (2016)



In general relativity, a gravitational wave far away from the source can be approximated as a linear disturbance of the Minkowski metric, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ with the space-time deformation expressed as a dimensionless strain, $h_{\mu\nu}$. In a Michelson interferometer we define the differential displacement as $L = L_\parallel - L_\perp$, where $L_\parallel$ and $L_\perp$ are the lengths of the inline arm and the perpendicular arm, respectively, as shown in Fig. 1. With equal macroscopic arm lengths, $L_0 \simeq L_\parallel \simeq L_\perp$, the gravitational wave strain and the differential arm length are related through the simple equation $L(f) = L_\parallel - L_\perp = h(f)L_0$, where h is the average differential strain induced into both arms at frequency f.

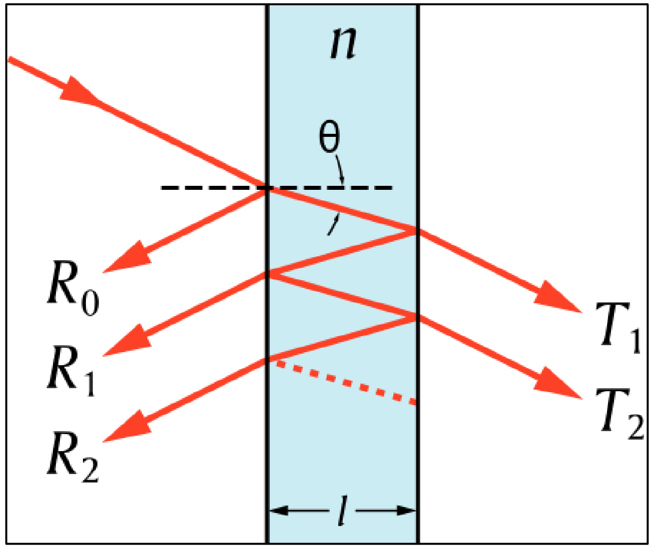
Una onda gravitacional estira y acorta los brazos del interferómetro LIGO ⇒ sabiendo el desplazamiento de los anillos de oscuridad podemos medir la deformación de los brazos

Interferometría

Fundamentos básicos de interferometría

Para conseguir interferencia se utilizan interferómetros, que utilizan solo una fuente de luz que luego se divide en dos:

Interferómetro de Young
Interferómetro de Michelson
Interferómetro de Mach-Zehnder
Interferómetro de Fabry-Perot



Interferometría

Notación compleja

Una onda electromagnética está descrita por la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

La solución más sencilla a la ecuación de ondas es la onda harmónica o sinusoidal:

$$E(t,r) = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Sin embargo, por conveniencia matemática, muchas veces es más sencillo trabajar con notación compleja. Aprovechando que

$$\mathrm{Re}\left[E_0 e^{j(\omega t - kz)}\right] = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

de aquí en adelante trabajaremos directamente con $E_0 e^{j(\omega t - kz)}$ asumiendo que al final de los cálculos se cogerá la parte real del resultado.

Números complejos

Forma polar

$$E(t,r) = |E| e^{j(\omega t - kz)} = |E| e^{j(\varphi)}$$

Forma trigonométrica

$$E(t,r) = |E| e^{j(\varphi)} = |E|(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = a + jb$$

$$a = \mathrm{Re}\left[|E| e^{j(\varphi)}\right] = |E|\cos(\varphi)$$

$$b = \mathrm{Im}\left[|E| e^{j(\varphi)}\right] = |E|\sin(\varphi)$$

Intensidad números complejos

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = E \cdot E^*$$

Intensidad forma rectangular

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

Intensidad forma polar

$$I \propto |E|^{\mathbf{2}} = E \cdot E^* = |E| e^{j(\varphi)} \cdot |E| e^{j(-\varphi)}$$