

TEMA 2: INTERFEROMETRIA

FOTONICA

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación





- 1.-FENOMENOS INTERFERENCIALES DE 2 ONDAS
- 2.-INTERFEROMETROS DE DIVISION DE FRENTE DE ONDA
- 3.-INTERFEROMETROS DE DIVISION DE AMPLITUD
 - 3.1.-Interferómetro de Michelson
 - 3.2.-Interferómetro de Mach-Zehnder
- 4.-INTERFEROMETROS DE ONDAS MULTIPLES
 - 4.1.-Interferómetro de Fabry-Perot





1.-FENOMENOS INTERFERENCIALES DE 2 ONDAS

Sean 2 Campos Electromagnéticos que interfieren en el punto P (ver Figura 2.1):

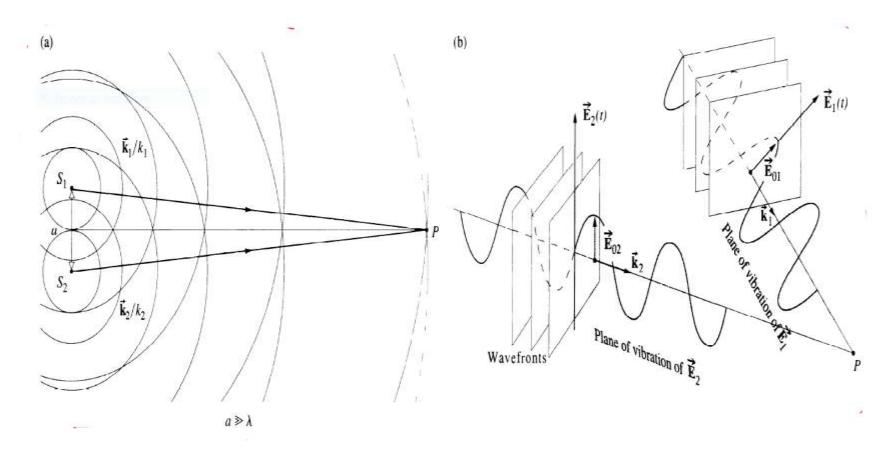


Figura 2.1.-Los 2 Frentes de onda E₁ y E₂ partiendo de los 2 Puntos Fuente S₁ y S₂ interfiriendo en el punto P.



En consecuencia, tenemos como suma de los Campos Electromagnéticos E₁ y E₂ en el Punto P según la Figura 2.1:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}_{1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{1}, t \end{pmatrix} = E_{01} \cos \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{1} - \omega t + \varepsilon_{1} \\ K_{1} r_{1} - \omega t + \varepsilon_{1} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{E}_{2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{2}, t \end{pmatrix} = E_{02} \cos \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{2} - \omega t + \varepsilon_{2} \\ K_{2} r_{2} - \omega t + \varepsilon_{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{E} \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{1}, t \end{pmatrix} = \overrightarrow{E}_{1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{1}, t \end{pmatrix} + \overrightarrow{E}_{2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{2}, t \end{pmatrix}$$

Si medimos la irradiancia, podemos decir que: $I = \langle E^2 \rangle$ dado que nos interesan los campos rápidos para que la energía sea grande E = hv

Por tanto,

$$\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2$$



$$I = \langle \vec{E} \rangle = \langle \vec{E_1}^2 \rangle + \langle \vec{E_2}^2 \rangle + \langle 2\vec{E_1}\vec{E_2} \rangle = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Donde el término de interferencia es $I_{12} = < 2\vec{E_1}\vec{E_2} >$

Desarrollando los factores:

$$\vec{E}_{1} \cdot \vec{E}_{2} = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_{1}} \frac{\rightarrow}{r_{1}} - \omega t + \varepsilon_{1} \right) \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_{2}} \frac{\rightarrow}{r_{2}} - \omega t + \varepsilon_{2} \right) =$$

$$= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left[\cos \left(\frac{\rightarrow}{K_{1}} \frac{\rightarrow}{r_{1}} + \varepsilon_{1} \right) \cos(\omega t) + \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_{1}} \frac{\rightarrow}{r_{1}} + \varepsilon_{1} \right) \sin(\omega t) \right].$$

$$\left[\cos \left(\frac{\rightarrow}{K_{2}} \frac{\rightarrow}{r_{2}} + \varepsilon_{2} \right) \cos(\omega t) + \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_{2}} \frac{\rightarrow}{r_{2}} + \varepsilon_{2} \right) \sin(\omega t) \right] =$$



$$= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left[\cos \left(\frac{\rightarrow}{K_1} \frac{\rightarrow}{r_1 + \varepsilon_1} \right) \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_2} \frac{\rightarrow}{r_2 + \varepsilon_2} \right) \cos^2(\omega t) + \right.$$

$$+ \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_1} \frac{\rightarrow}{r_1 + \varepsilon_1} \right) \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_2} \frac{\rightarrow}{r_2 + \varepsilon_2} \right) \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_1} \frac{\rightarrow}{r_1 + \varepsilon_1} \right) \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_2} \frac{\rightarrow}{r_2 + \varepsilon_2} \right) \sin(\omega t) \cos(\omega t) +$$

$$+ \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_1} \frac{\rightarrow}{r_1 + \varepsilon_1} \right) \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_2} \frac{\rightarrow}{r_2 + \varepsilon_2} \right) \sin^2(\omega t) \left. \right]$$

Teniendo en cuenta que:

$$<\cos(\omega t)\sin(\omega t)>=0$$

 $<\cos^2(\omega t)>=1/2$
 $<\sin^2(\omega t)>=1/2$



Nos queda:

$$I_{12} = \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left[\cos \left(\frac{\rightarrow}{K_1} + \varepsilon_1 \right) \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_2} + \varepsilon_2 \right) + \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_1} + \varepsilon_1 \right) \sin \left(\frac{\rightarrow}{K_2} + \varepsilon_2 \right) \right] = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_1} + \varepsilon_1 - \frac{\rightarrow}{K_2} + \varepsilon_2 \right) = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \left(\frac{\rightarrow}{K_1} + \varepsilon_1 - \frac{\rightarrow}{K_2} + \varepsilon_2 \right)$$

Sabiendo que:

$$I_1 = \frac{E_{01}^2}{2}$$
$$I_2 = \frac{E_{02}^2}{2}$$



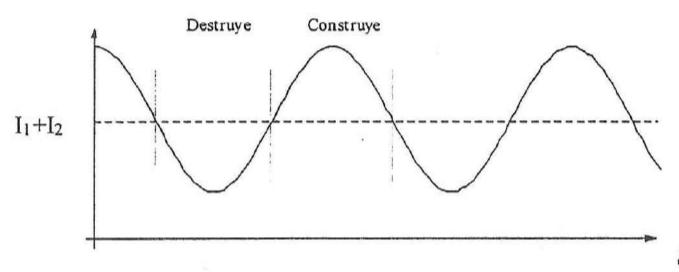


Obtenemos:

$$I_1 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta), \text{ donde } \delta = \underbrace{\vec{K_1} \vec{r_1} - \vec{K_2} \vec{r_2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}_{(1)}$$

Donde (1) es la diferencia del camino óptico y (2) es la diferencia de fase.

Vamos a analizar este resultado:





Tipos de interferencias:

δ	cos(δ)
0	1
π/2	0
π	-1
3π/2	0
2π	1

Totalmente Constructiva

Totalmente Destructiva

Totalmente Constructiva

Entonces la irradiancia quedará:

i) Totalmente constructiva:
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$
 $\delta=0,2\pi,4\pi,...$

ii) Totalmente destructiva:
$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$$
 $\delta=\pi,3\pi,5\pi,...$

Un caso particular es cuando $E_{01}=E_{02}$ y $K_1=K_2$, tendremos:

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos(\delta) = 4I_0 \cos^2(\frac{\delta}{2})$$

$$\delta = \vec{K_1} \cdot \vec{r_1} - \vec{K_2} \cdot \vec{r_2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = K(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

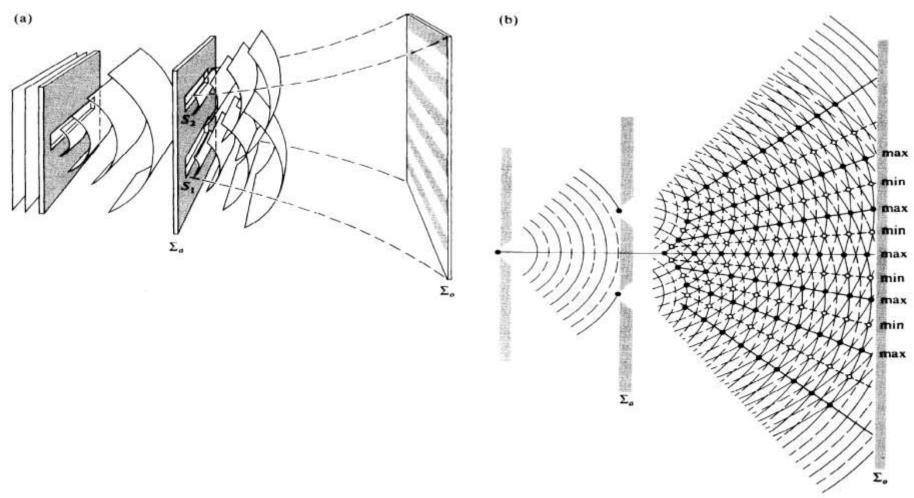




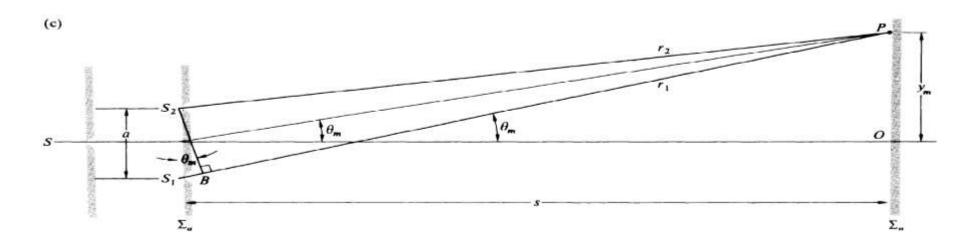


2.-INTERFEROMETROS DE DIVISION DE FRENTE DE ONDA

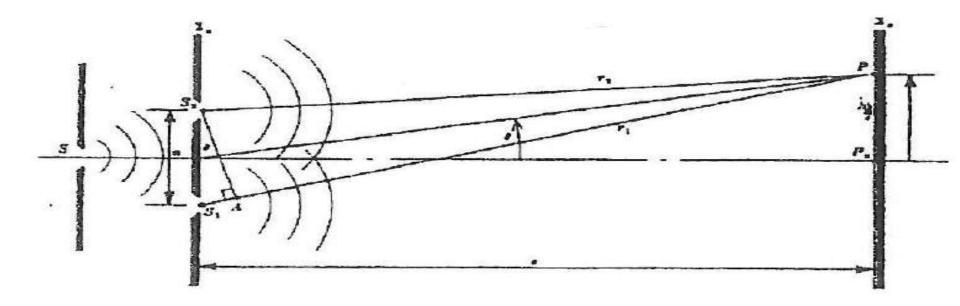
2.1.-Interferómetro de Young







2.1.a-Generación de Interferencias de Young mediante Frentes de Onda Esféricos







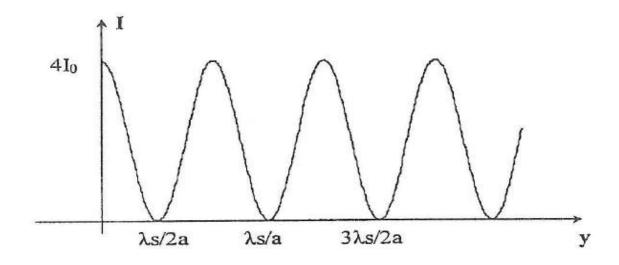
En este caso, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ entonces $\delta = K(r_1 - r_2)$

Como el ángulo θ es muy pequeño sin $\theta \approx \theta$. Entonces:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{s} \approx \theta$$

$$\sin(\theta) = \frac{r_1 - r_2}{a} \approx \theta$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{ay}{s} \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi ay}{\lambda s}\right)$$

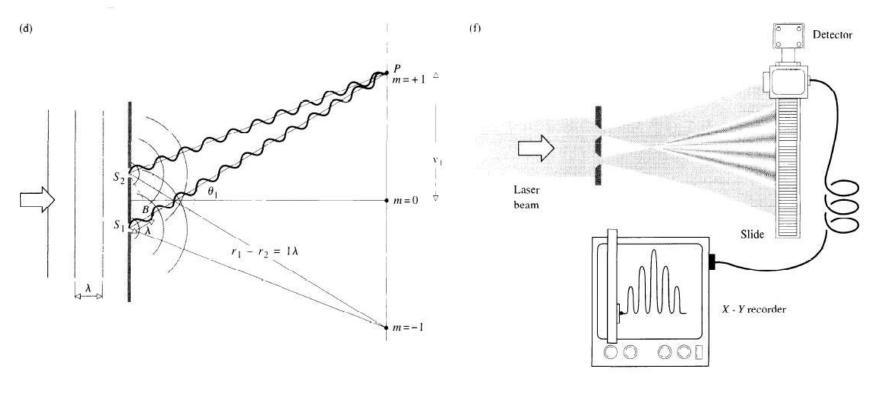


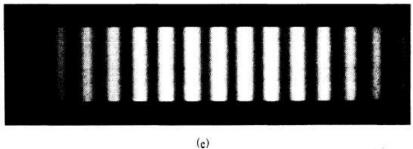
Se observa que la distancia entre dos máximos es: Δy=sλ/a





2.1.b-Generación de Interferencias de Young mediante Frentes de Onda Planos



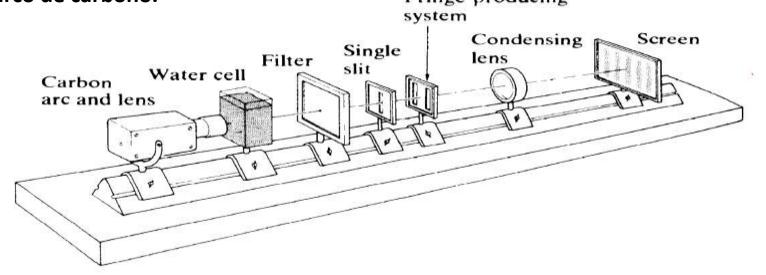




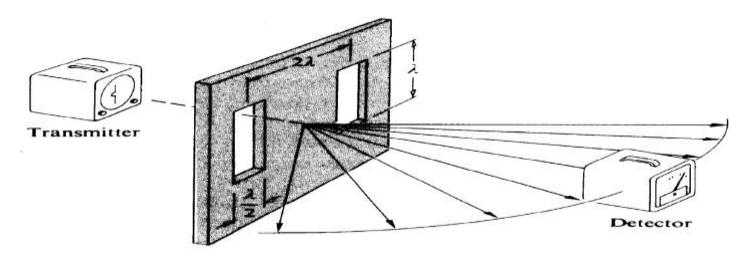


2.1.c-Setup para estudiar las Interferencias de Young mediante una lámpara de arco de carbono.

Fringe-producing



2.1.d-Interferferómetro de Young de Microondas.

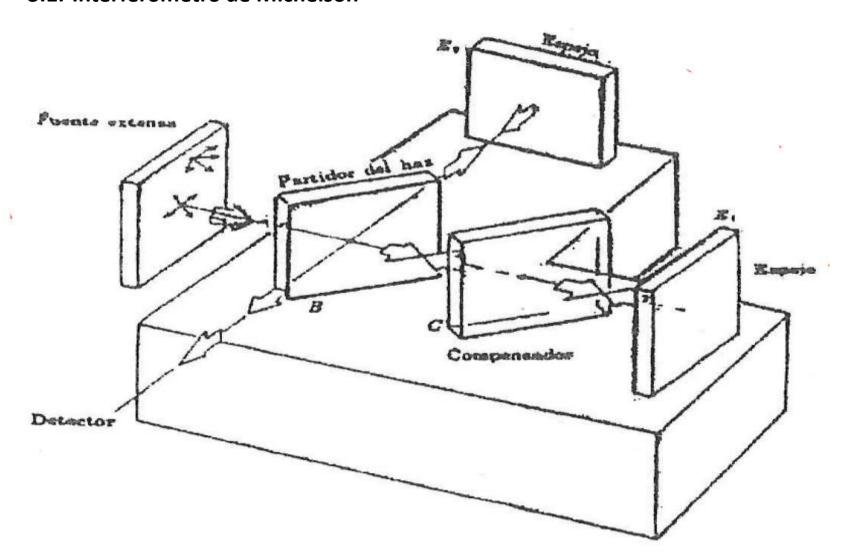






3.-INTERFEROMETROS DE DIVISION DE AMPLITUD

3.1.-Interferómetro de Michelson





$$\delta = K(2d\cos\theta) - \pi$$
 donde d es la diferencia de caminos.

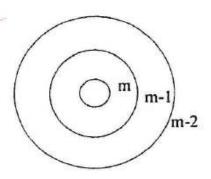
Los máximos de la irradiancia se encontrarán en $\delta=m2\pi$ para m=0,1,2,..., y los mínimos en $\delta=m\pi$ para m=1,3,5,... Por tanto, sustiuyendo en la expresión de delta, obtenemos:

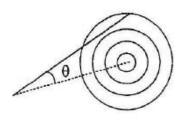
MÍNIMOS:
$$\lambda(m+1) = 2d \cos \theta$$
 para m = 1,3,5,...

MÁXIMOS:
$$\lambda(2m+1) = 2d\cos\theta$$
 para m = 0,1,2,...

Lo que veremos en la pantalla serán una seria de anillos que se mueven al variar la distancia entre espejos. Se crean nuevos anillos por fuera y se "cuelan" por el centro.







¿Cuánto tenemos que variar la distancia d para que el anillo m-1 se mueva hasta m?

$$\begin{cases} 2d\cos\theta_{m-1} = (m-1)\lambda \Rightarrow \cos\theta_{m-1} = \frac{(m-1)\lambda}{2d} \\ 2(d+\Delta d)\cos\theta_{m} = m\lambda \Rightarrow \cos\theta_{m} = \frac{m\lambda}{2(d+\Delta d)} \end{cases}$$

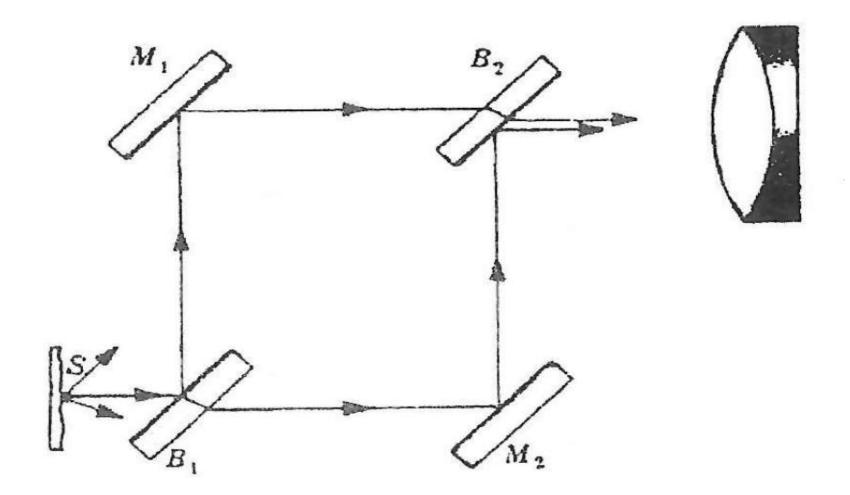
Los ángulos deben ser iguales, por tanto, si restamos las dos ecuaciones resulta:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2}N$$
 donde N es el número de anillos que pasan.





3.2.-Interferómetro de Mach-Zehnder

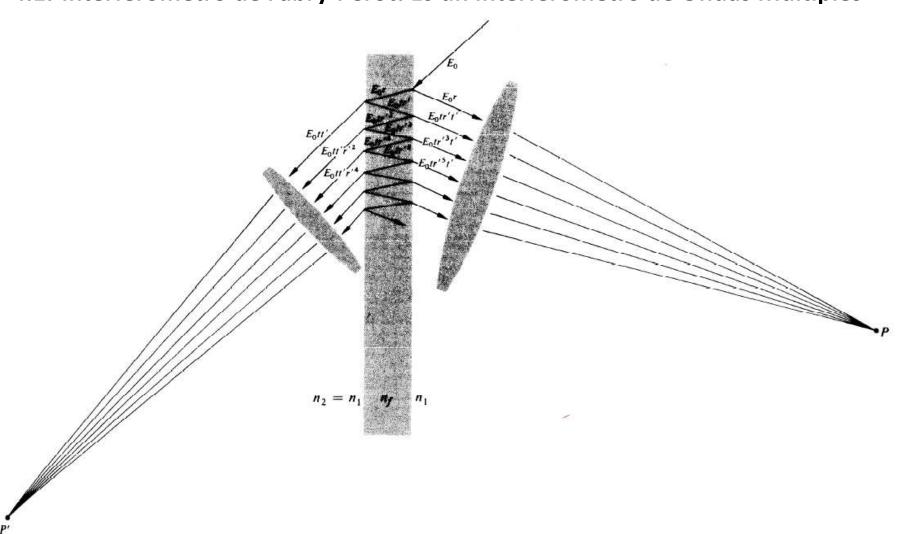




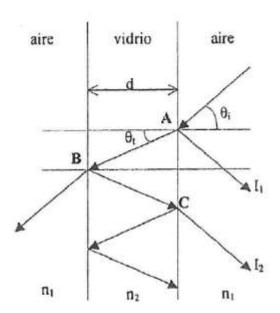


4.-INTERFEROMETROS DE ONDAS MULTIPLES

4.1.-Interferómetro de Fabry-Perot: Es un Interferómetro de Ondas Múltiples







En este caso podemos controlar la distancia entre las placas y/o el índice de refracción en el interior.

Vamos a ver cuál es el desfase entre I1 e I2

$$\delta = Kx_2 - Kx_1 = K(n_2x_2 - n_1x_1) =$$

$$\zeta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1\overline{AD} = n_2\frac{2d}{\cos(\theta_t)} - n_2\frac{2d\sin^2(\theta_t)}{\cos(\theta_t)} = n_2\frac{2d}{\cos(\theta_t)}(1 - \sin^2(\theta_t)) = n_22d\cos(\theta_t)$$





Partiendo de las expresión de la diferencia de fase tenemos:

$$\delta = Kx_2 - Kx_1 = K(n_2x_2 - n_1x_1) =$$

$$\zeta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1\overline{AD} = n_2\frac{2d}{\cos(\theta_t)} - n_2\frac{2d\sin^2(\theta_t)}{\cos(\theta_t)} = n_2\frac{2d}{\cos(\theta_t)}(1 - \sin^2(\theta_t)) = n_22d\cos(\theta_t)$$

Para ángulos pequeños hay un cambio de fase en la reflexión de π :

$$\delta = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d\cos(\theta_i) - \pi \implies \delta = \frac{4\pi d}{\lambda_0} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2} - \pi$$





Obteniendo como Resultado Final:

$$\frac{I_t}{I_t} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})} = A(\theta) \text{ función de Airy}$$

$$\frac{I_t}{I_t} = \frac{F \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})} = 1 - A(\theta)$$

El factor F o factor de fuerza (Finesse) depende de la reflectividad de los espejos:

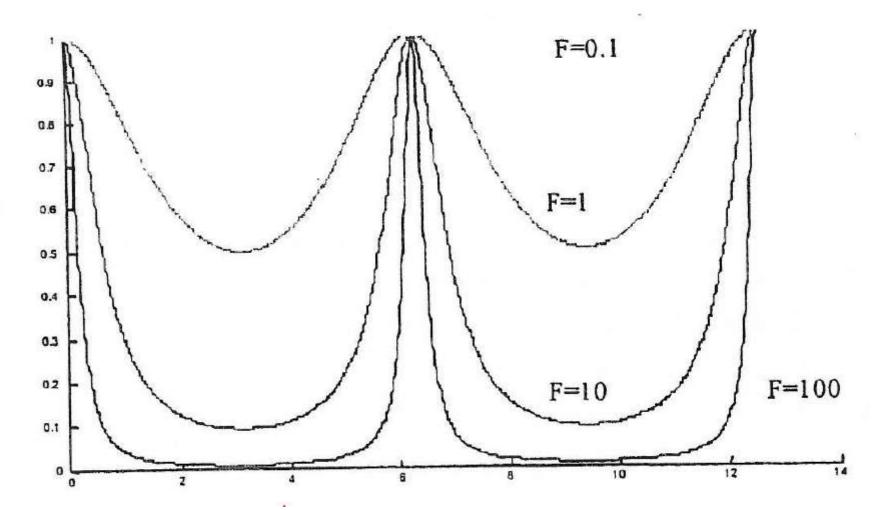
$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2}\right)^2$$

Si la reflectividad es muy alta, el factor F será grande, y hará que la función de transferencia I_t/I_i tenga unos picos muy estrechos. Variando su valor vemos cómo evoluciona la función:





Función de Airy como resultado de la Función de Transferencia del Interferómetro de Fabry-Perot en función de Factor de Finesse F:







Para caracterizar la Función de Transferencia del Interferómetro de Fabry-Perot empleamos la Anchura a -3Bs. En consecuencia, tenemos:

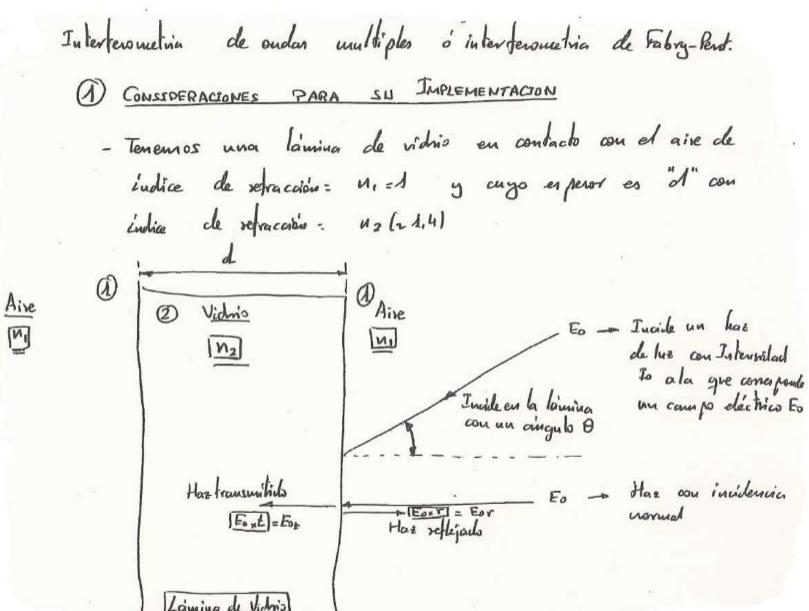
$$\frac{1}{1+F\sin^2(\frac{\delta}{2})} = \frac{1}{2} \to F\sin^2(\frac{\delta}{2}) = 1 \to \frac{\delta}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{F}} \to \delta = \frac{2}{\sqrt{F}}$$

Siendo la Anchura de Pico:

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{F}}$$



ANEXO: Interferometría de Fabry-Perot





- 2 DEFINICION DE LOS COEFICIENTES DE REFLEXION Y DE TRANSMICCION
 - @ Coeficiente de (Incidencia Normal): (1) Aire-Lamina (Vidral): $r = \frac{E_{0r}}{E_{0}} = \frac{N_{1} N_{2}}{N_{1} + N_{2}}$
 - (29) Lamina (Vidsis 1- Aire: r'= 12-11 = 11-42 = -r

En consecuencia, [=-v']

Los conficientes que relacionan les conficientes de reflexión del campo eléctrico son inversos (con incidencia normal).

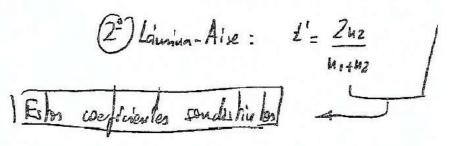
No obstante, como la Intensidad Luminasa (W) à Invachicuscia (W)

es proporcional al campo eléchia tenemos: I ac <E2>



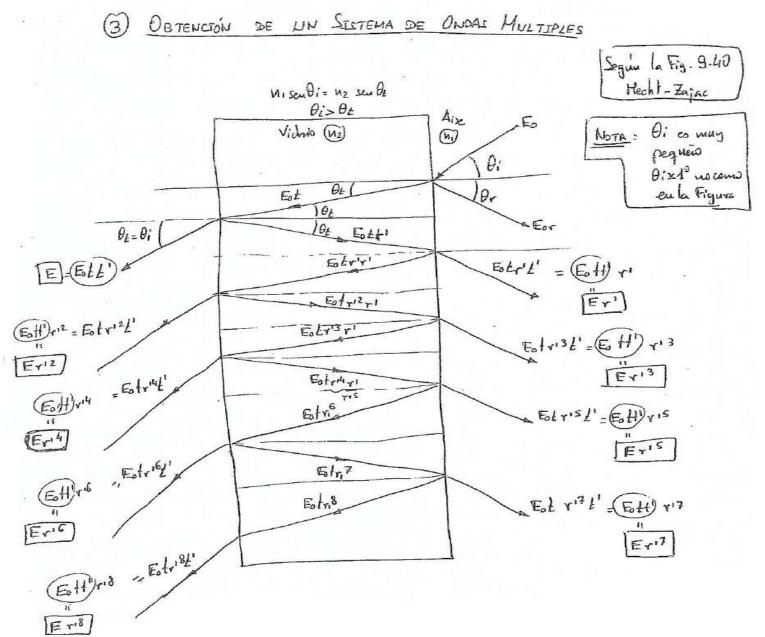
$$R_1 = r^2$$
 $R_2 = r^{12} = (-r)^2 = r^2$

(b) Coefidente de Transmisión (Incidencia Normal): (1) Aix-Lamina (Vidral): $t = \underline{E_0}t = \underline{Z_{N_1}}$ Es u_{1+N_2}



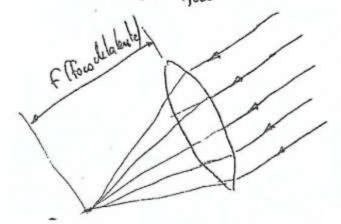
Una vez obtenidos los opericientes de referior y transmisión vamos a ves cimo se obtienen las interferencias. por ondas multiples en una







a estudiar las ondas transmitidas llamando Est'=E y su interferencia se va a localizar en el infinito, que en equisalente al foco de una lente (F). Per tamb tenemas:



$$\theta_t = 0^\circ$$
 en incidencia normal.

 $\delta \theta_t = 0^\circ$ en incidencia cuasinormal $-con \theta_t = 1$

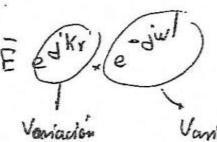






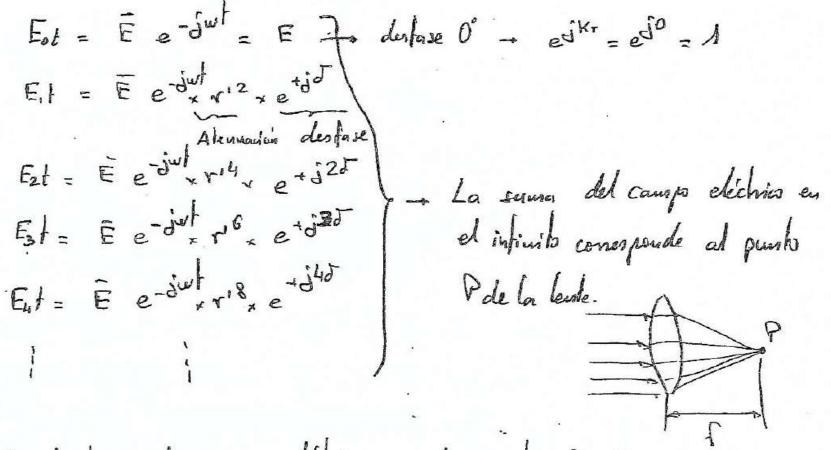
$$d = \frac{2\Pi}{\lambda} \times 2du_2$$
, para $u_2 = u$, inchie del vidro $d = \frac{2\Pi}{\lambda} \times 2du$

Si suponemen
$$E = \bar{E} e^{i(Kr-wt)} = \bar{E} e^{iKr} e^{-iwt}$$



Variación cond tiempo





Por lando, et compo éléctria en et punto Prale:

Ep = (E. e-juit) (I+ r'2 e d + r'4 + 2jd + r'6 e + 3jd r'8 2jd + r'4 e d + r'





En conseinencia, Tenenas

Para el catalo de la parke seal y la parte imaginaria subemons

$$\frac{1}{1+x} \Big|_{-1 < x < 1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+(-r^{12}e^{i\sigma})} = \frac{1-(-r^{12}e^{i\sigma})}{\times} + \frac{r^{14}e^{i\sigma}}{\times} - \frac{(-r^{16}e^{i\sigma})}{\times} + \frac{r^{18}e^{i\sigma}}{\times} + \frac{r^{18}e^{i\sigma}}$$





Sabemon tam bren:

$$\frac{1}{1-r^{12}e^{-j\sigma}} = \frac{1}{1-r^{12}e^{-j\sigma}} \times \frac{1-r^{12}e^{-j\sigma}}{1-r^{12}e^{-j\sigma}} = \frac{1-r^{12}e^{-j\sigma}}{1-r^{12}(e^{j\sigma}+e^{-j\sigma})+r^{14}}$$

$$e^{+j\sigma} = \cot J + j \operatorname{sen}J \qquad e^{j\sigma} = 2 \operatorname{con}J + r^{12}\operatorname{sen}J \qquad e^{j\sigma} = 2 \operatorname{con}J \qquad e^{j\sigma} = 2 \operatorname{con}J$$

Parte Imaginania: 12 sent = 12 sent + 14 sen 25 + 16 sen 35 + 18 sen 45 + ...



(3) CALCILLO DE LA JINTENSIDAD OPTICA EN EL PUNTO P

Como nos interesa la intensidad optica transmitida tenemos.

$$I = \angle E^2 > = \angle E_p E_p^+ >$$

$$(x+jy)(x-jy)=x^2+y^2$$
Source de les purhe sent y de

la parte imaginante.

$$\int_{P} = E^{2} \left[\frac{1 - 2r^{2} \cos 3 + r^{2} \cos^{2} 5 + r^{4} \sin^{2} 5}{(1 - r^{2} 2 \cos 5 + r^{4})^{2}} \right]$$

$$\int \overline{I_{p}} = E^{2} \left[\frac{1 - 2\tau'^{2} \cos \vartheta + \tau'^{4}}{(1 - 2\tau'^{2} \cos \vartheta + \tau'^{4})^{2}} \right] = \frac{E^{2}}{1 - \tau'^{2} 2 \cos \vartheta + \tau'^{4}}$$
 (1)

Expression 9-32 del Libro de Option (Hecht-Zajac)





Per olso lado, tenemos también:

Donde la Ecuación (1) para Ip se transforma en:

$$\int_{\mathbb{R}^{2}} \frac{\mathbb{E}^{2}}{\left(1-r^{2}\right)^{2}+4r^{2}} \frac{\mathbb{E}^{2}}{\mathbb{E}^{2}} \quad \left| \begin{array}{c} \operatorname{Para} & \overline{\mathcal{I}} = \emptyset, \Pi, 2\Pi \\ \overline{\mathcal{I}} = \operatorname{Para} & \overline{\mathcal{I}} = \emptyset, \Pi, 2\Pi \end{array} \right| = \operatorname{ann} b$$

$$\left| \begin{array}{c} \operatorname{In} & \operatorname{In} &$$



En consecuencia, la Expresión para Imax resultante es:

$$I_{\text{max}}|_{0,2\Pi,4\Pi} = \frac{\mathbb{E}^2}{|J_{-Y^{12}}|^2}$$

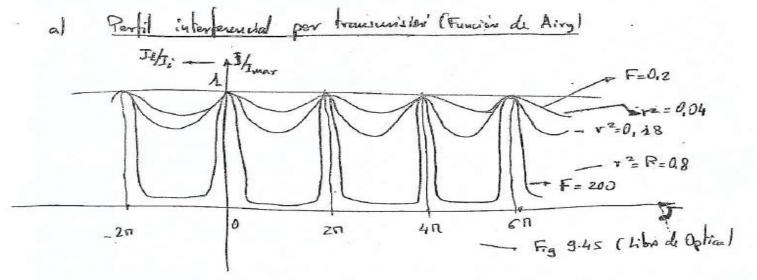
$$I_{\text{final member}}|_{0,2\Pi,4\Pi} = \frac{\mathbb{E}^2}{|J_{-Y^{12}}|^2}$$

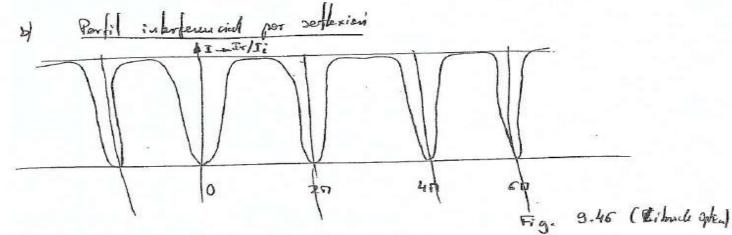
$$I_{\text{fi$$

Universidad Carlos III de Madrid

FOTONICA

El perfil interferencial que se obtiene es partanto (Función de Airy):





Es de votar que estar 2 funcioner son complementarias, en deux, su suma en igualalo