

## Ayudantía 11 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere un filtro pasa-bajo análogo Butterworth  $H_c(s)$  de cuarto orden con una frecuencia de corte (3 dB) en 20 Hz. Determine y bosqueje los polos de  $H_c(s)$ .

### Solución:

**Derivación** En general, el filtro de Butterworth de orden  $N$  cumple

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (1)$$

Considerando  $s = j\Omega$ ,  $-1 = e^{j(2k-1)\pi}$ , y  $j = e^{j\pi/2}$  los  $N$  polos del filtro cumplen con:

$$1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0 \quad (2)$$

$$(s/j\Omega_c)^{2N} = -1 \quad (3)$$

$$(s/j\Omega_c)^{2N} = e^{j(2k-1)\pi} \quad (4)$$

$$s/j\Omega_c = e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} \quad (5)$$

$$s = j\Omega_c e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} \quad (6)$$

$$s = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)} \quad (7)$$

Esta ecuación tiene  $2N$  soluciones  $k = 1, 2, \dots, 2N$ . Sin embargo el filtro tiene  $N$  polos. Como se desea un filtro con respuesta impulsiva estable, se escogen los polos con  $k = 1, 2, \dots, N$ , que se encuentran en el SP izquierdo.

**Polos del filtro Butterworth y F. de T.** Así, dados  $\Omega_c$  (frecuencia de corte) y  $N$  (orden del filtro), los polos y función de transferencia son:

$p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)}$	$H(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$	$k = 1, 2, \dots, N$
---	--	----------------------

(8)

Los polos cubren el lado izquierdo de una circunferencia de radio  $\Omega_c$ .

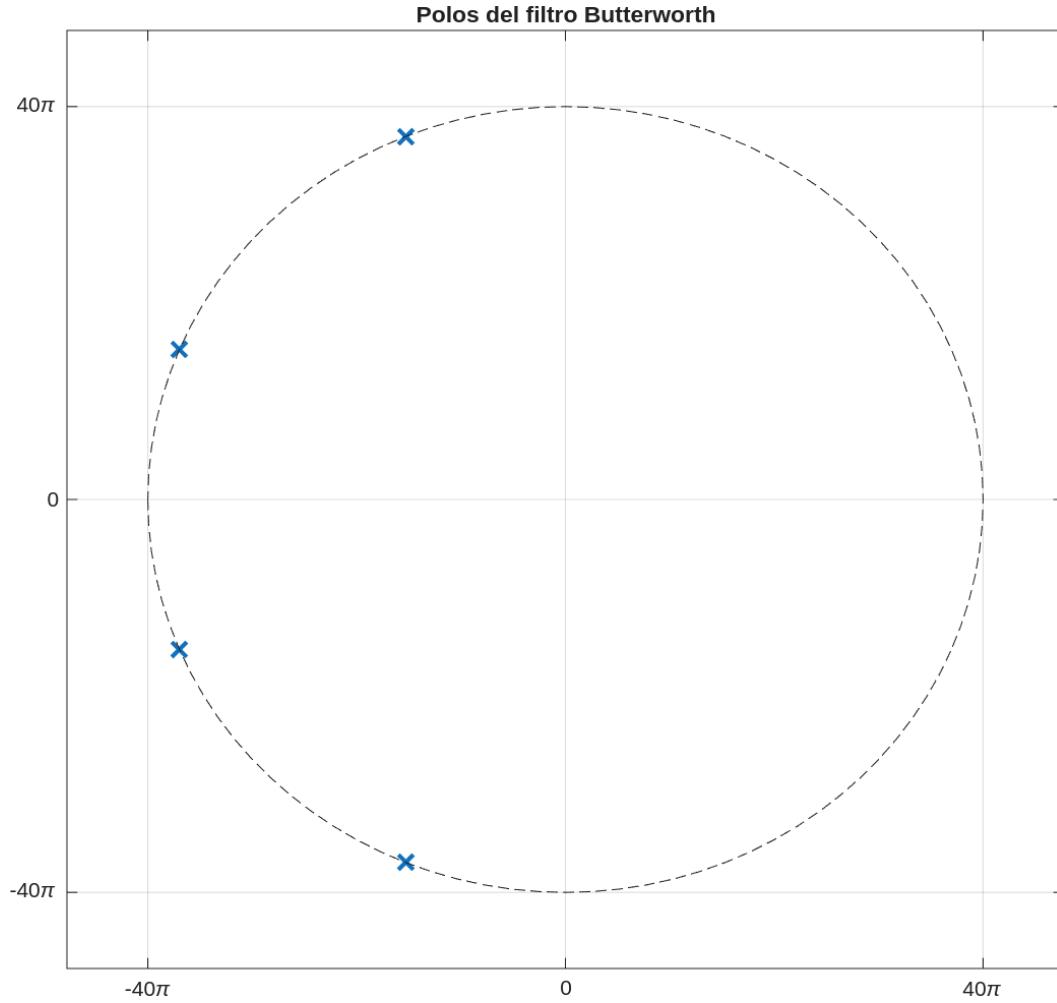
**Ahora sí, el problema** Con orden  $N = 4$ , y frecuencia de corte  $F_c = 20$  Hz, tenemos  $\Omega_c = 2\pi F_c = 40\pi$  y  $2N = 8$ . Por lo tanto:

$$p_k = 40\pi e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{8}\pi\right)} = \begin{cases} p_1 = 40\pi e^{j5\pi/8} \\ p_2 = 40\pi e^{j7\pi/8} \\ p_3 = 40\pi e^{j9\pi/8} \\ p_4 = 40\pi e^{j11\pi/8} \end{cases} \quad (9)$$

Y la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{(40\pi)^4}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)} \quad (10)$$

Para bosquejar los polos, se dibuja una circunferencia de radio  $\Omega_c = 40\pi$  como guía, y se ubican los polos en los ángulos que indican las exponenciales complejas. Los polos siempre “cubren” la mitad izquierda de la circunferencia



2. Con ayuda de Matlab, diseñe un pasa-bajo análogo Butterworth con las especificaciones:

- Frecuencia borde de banda de paso:  $F_p = 50$  Hz
- Ripple en banda de paso:  $A_p = 0.5$  dB
- Frecuencia borde de banda de rechazo  $F_s = 80$  Hz
- Atenuación en banda de rechazo:  $A_s = 45$  dB

- (a) Obtenga el orden  $N$  del filtro.

**Solución:** Se tiene

$$F_p = 50 \text{ Hz} \rightarrow \Omega_p = 2\pi F_p = 100\pi \quad (11)$$

$$F_s = 80 \text{ Hz} \rightarrow \Omega_s = 2\pi F_s = 160\pi \quad (12)$$

La fórmula para hallar el orden  $N$  del filtro de Butterworth es:

$$\boxed{N \geq \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}} \quad \boxed{\alpha = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \quad \boxed{\beta = \frac{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}}{\sqrt{10^{A_p/10} - 1}}} \quad (13)$$

Reemplazando:

$$\alpha = \frac{160\pi}{100\pi} \quad \beta = \frac{\sqrt{10^{45/10} - 1}}{\sqrt{10^{0.5/10} - 1}} \quad N \geq \frac{\ln 1.6}{\ln 509.7} \quad (14)$$

$$= 1.6 \quad = 509.7 \quad \geq 13.26 \quad (15)$$

$$N = 14 \quad (16)$$

- (b) Obtenga la frecuencia de corte  $\Omega_c$  para el diseño del filtro.

**Solución:** Una vez obtenido el orden  $N$ , se utiliza

$$\boxed{\Omega_p (10^{A_p/10} - 1)^{-1/2N} \leq \Omega_c \leq \Omega_s (10^{A_s/10} - 1)^{-1/2N}} \quad (17)$$

Para escoger la frecuencia de corte. Cualquier valor dentro del intervalo sirve. Al reemplazar:

$$100\pi (10^{45/10} - 1)^{-1/28} \leq \Omega_c \leq 160\pi (10^{0.5/10} - 1)^{-1/28} \quad (18)$$

$$338.67 \leq \Omega_c \leq 347.18 \quad (19)$$

Escogiendo el límite superior  $\Omega_c = 347.18$ , se obtiene mejor ripple en la banda de paso.

- (c) Obtener en Matlab los polos.

**Solución:** Matlab realiza el procedimiento de diseño (encontrar  $\Omega_c$  y  $N$ ), mediante el comando `buttord`:

```
Omegap = 100*pi;
Omegas = 160*pi;
Ap = 0.5;
```

```

As = 45;

[N, Omegac] = buttord(Omegap, Omegas, Ap, As, 's')

N =

14

Omegac =

347.1811

```

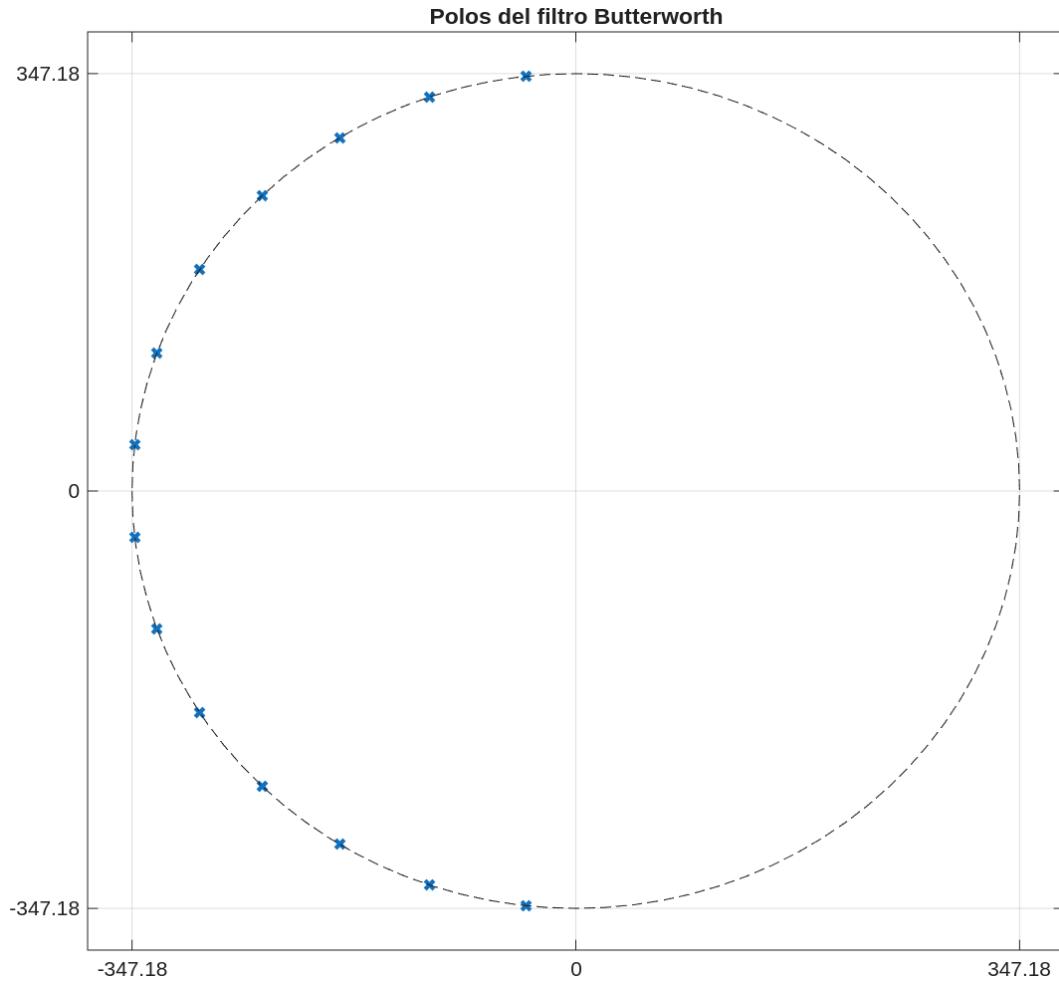
Y se obtienen los polos con el comando butter:

```
[z, p, k] = butter(N, Omegac, 's')
```

Equivalente a:

$$p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)} = 347.18 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{28}\pi\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, 14 \quad (20)$$

Al graficar los polos:

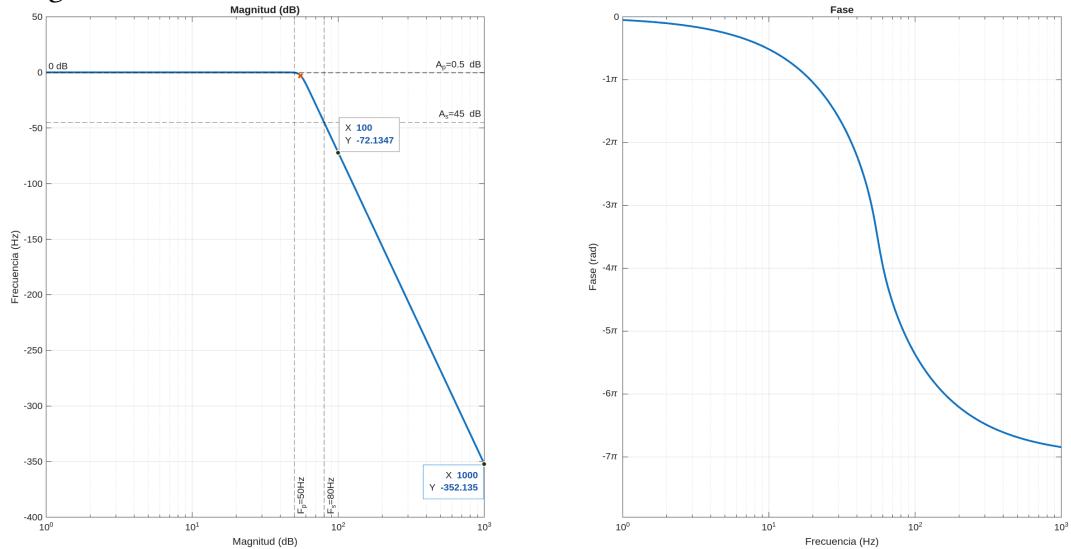


(d) Grigar magnitud y fase.

**Solución:** Se obtiene magnitud y fase con

```
[b, a] = zp2tf(z, p, k);
h = freqs(b, a, Omega);
h_mag = abs(h);
h_fase = angle(h);
```

Al graficar:



La magnitud tiene una pendiente de  $-20N = -280$  dB por octava, y fase disminuye en  $-\frac{\pi}{2}N = -7\pi$ .

(e) Obtener un filtro digital mediante transformación impulso invariante, y graficar magnitud y fase

**Solución:**

**Transformación impulso invariante** La transformación impulso invariante se obtiene realizando:

$$h[n] = T_d h_c(n T_d), \quad T_d \text{ Periodo de muestreo} \quad (21)$$

Y la respuesta en frecuencia pasa a ser

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left( j \frac{\omega}{T_d} + j \frac{2\pi}{T_d} k \right) \quad (22)$$

Es decir, hay aliasing debido al muestreo. A medida que  $T_d$  decrece, el aliasing se vuelve despreciable.

Las frecuencias y los polos se mapean:

$$\omega = \Omega T_d \quad p_k = e^{s_k T_d} \quad (23)$$

Asumiendo que se filtran frecuencias hasta 500 Hz, se escoge  $F_d = 1000$  Hz por el teorema de muestreo. Es decir  $T_d = 1/1000$ :

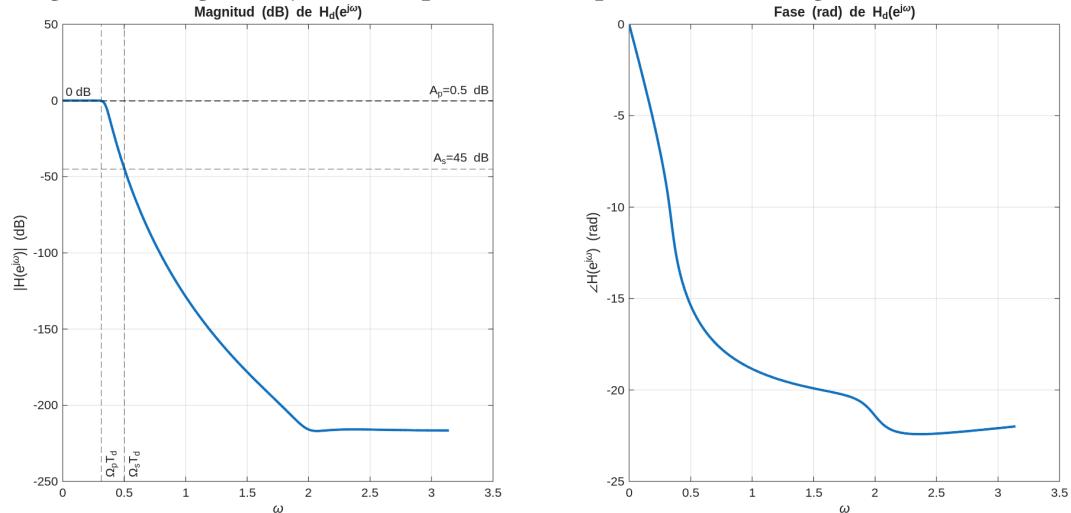
$$h[n] = \frac{1}{1000} h_c \left( \frac{n}{1000} \right) \quad (24)$$

En Matlab:

```
Td = 1/1000;
[bz, az] = impinvar(b, a, 1/Td);

t = linspace(0,0.12,1000);
[ht, tout] = impulse(tf(b, a), t);
[hn, nT]= impz(bz, az, 120, 1/Td);
```

Al graficar magnitud y fase (mapeando las especificaciones según  $\omega = \Omega/1000$ ):



En la banda de paso y transición, la diferencia con el filtro original es despreciable

3. Con ayuda de Matlab y usando transformación bilineal, diseñe un filtro pasa-bajo de Chebyshev I que cumpla:

- Frecuencia borde de banda de paso:  $\omega_p = 0.2\pi$
- Ripple en banda de paso:  $A_p = 1$  dB
- Frecuencia borde de banda de rechazo  $\omega_s = 0.3\pi$
- Atenuación en banda de rechazo:  $A_s = 60$  dB

- (a) Obtener las frecuencias  $\Omega_p$  y  $\Omega_s$  equivalentes para el diseño del filtro.

**Solución:** Aplicar la transformación bilineal mapea las frecuencias de acuerdo a:

$$\omega = 2 \tan^{-1} \left( \frac{T_d}{2} \Omega \right) \leftrightarrow \Omega = \frac{2}{T_d} \tan \left( \frac{\omega}{2} \right) \quad T_d \text{ arbitrario.} \quad (25)$$

Escogiendo  $T_d = 2$  a conveniencia:

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d} \tan \left( \frac{\omega_p}{2} \right) \quad \Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan \left( \frac{\omega_s}{2} \right) \quad (26)$$

$$= \tan \left( \frac{0.2\pi}{2} \right) \quad = \tan \left( \frac{0.3\pi}{2} \right) \quad (27)$$

$$= 0.325 \quad = 0.509 \quad (28)$$

- (b) Obtener  $\epsilon$  y  $A$  para el diseño.

**Solución:** Se utilizan las ecuaciones de conversión de especificaciones relativas a análogas:

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} \quad A = 10^{A_s/20} \quad (29)$$

Sustituyendo:

$$\epsilon = \sqrt{10^{1/10} - 1} \quad A = 10^{60/20} \quad (30)$$

$$= 0.509 \quad = 1000 \quad (31)$$

- (c) Obtener orden del filtro  $N$  y frecuencia de corte  $\Omega_c$ .

**Solución:** Se selecciona  $\Omega_c = \Omega_p = 0.325$

El orden  $N$  se obtiene de acuerdo a las ecuaciones de diseño

$$N \geq \frac{\ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \quad \alpha = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \quad \beta = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{A^2 - 1} \quad (32)$$

Reemplazando:

$$\alpha = \frac{0.509}{0.325} \quad \beta = \frac{1}{0.509} \sqrt{1000^2 - 1} \quad N \geq \frac{\ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \quad (33)$$

$$= 1.5661 \quad = 1968.5 \quad \geq 8.12 \quad (34)$$

$$N = 9 \quad (35)$$

- (d) Obtener en Matlab la función de transferencia y el filtro digital usando bilinear, y graficar magnitud y fase de este.

**Solución:** La selección de orden  $N = 9$  y frecuencia de corte  $\Omega_c = 0.325$  se comprueba en Matlab mediante

```
Omegap = 0.325;
Ap = 1;
Omegas = 0.509;
As = 60;
[N, Omegac] = cheb1ord(Omegap, Omegas, Ap, As, 's')
```

N =

9

Omegac =

0.3250

La función de transerencia y respuesta en frecuencia del filtro digital (aplicando transformación bilinear) se obtiene mediante

```
[b, a] = cheby1(N, Ap, Omegac, 's');
[bz, az] = bilinear(b, a, 1/Td)
[hz, w]= freqz(bz, az, 1024);
```

bz =

1.0e-04 \*

Columns 1 through 7

0.0019	0.0167	0.0667	0.1556	0.2333	0.2333	0.1556
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 8 through 10

0.0667	0.0167	0.0019
--------	--------	--------

az =

Columns 1 through 7

1.0000	-7.5802	26.2987	-54.7173	75.1516	-70.6047	45.3539
--------	---------	---------	----------	---------	----------	---------

Columns 8 through 10

-19.2051	4.8651	-0.5620
----------	--------	---------

Donde bz y az son numerador y denominador de la función de transferencia:

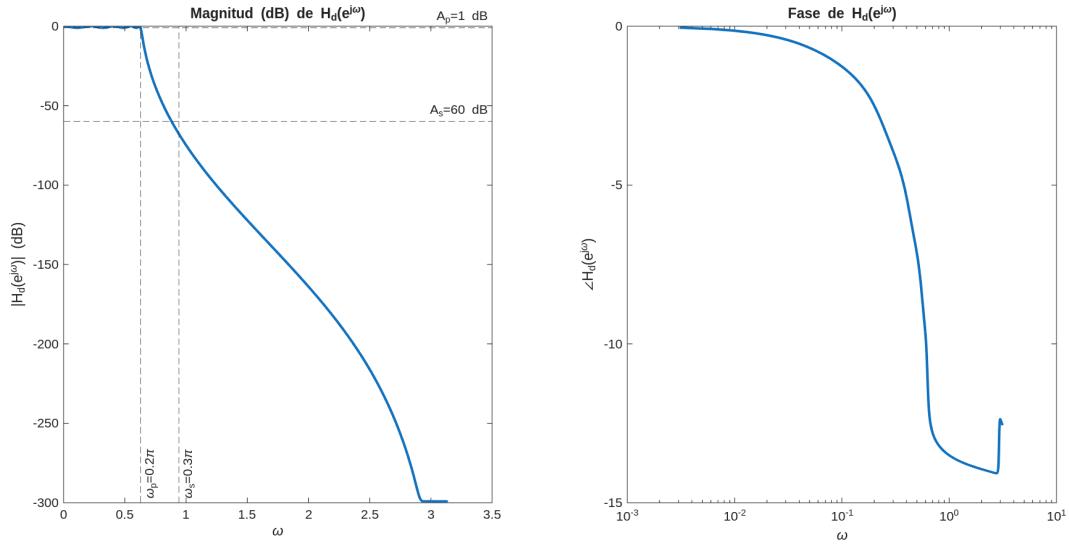
$$H_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_9 z^{-9}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_9 z^{-9}} \quad (36)$$

Esto es equivalente a sustituir en la función de transferencia continua  $H_c(s)$  por  $s = \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ :

$$H_c(s) \longrightarrow H_d(z) = H_c \left( \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad (37)$$

$$= H_c \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad (38)$$

Al graficar magnitud y fase:



La magnitud cumple con las especificaciones. Al tratarse de un filtro de Chebyshev tipo I, el filtro exhibe ripple en la banda de paso:

