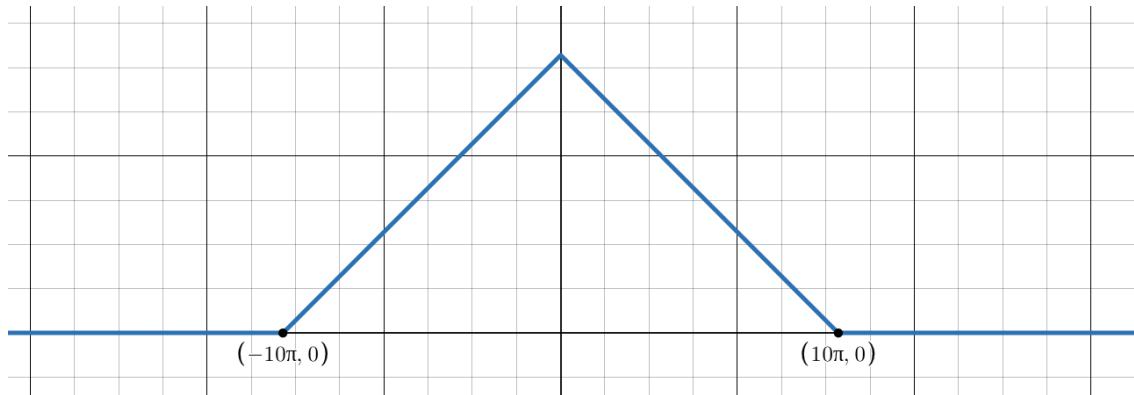


Ayudantía 5 - Procesamiento Digital de Señales

1. Una señal $x_c(t)$ tiene el espectro de magnitud $X_c(j\Omega)$ que se muestra en la figura:



La señal se muestrea con un periodo de muestreo $T = 1/8$ segundos.

- (a) Encuentre la frecuencia de Nyquist Ω_H .

Solución: La frecuencia de Nyquist corresponde a la máxima frecuencia presente en la señal. Por inspección: $\Omega_H = 10\pi = 5 \cdot 2\pi$ (en Hz: $F_H = 5$ Hz).

- (b) ¿Se cumple el teorema de muestreo?

Solución: El teorema de muestreo (o teorema de Nyquist) dice que si $F_s \geq 2F_H$ entonces la señal se puede recuperar completamente.

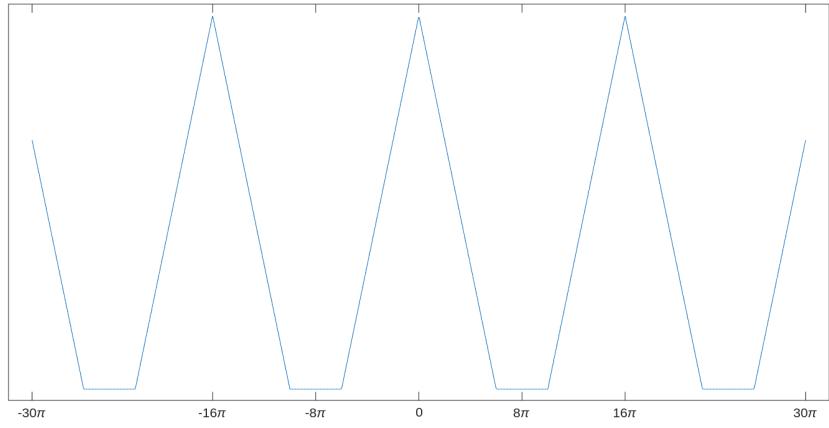
Con $T = 1/8$, $F_s = 1/T = 8$ Hz, y $F_H = 5$ Hz, la desigualdad $F_s \geq 2F_H$ no se cumple y no se cumple el teorema de muestreo.

- (c) Dibuje el espectro $X(e^{j\Omega T})$ de la señal muestreada $x[n]$ en el rango $-30\pi \leq \Omega \leq 30\pi$.

Solución: El espectro corresponde a la sumatoria de copias desplazadas en $2\pi/T = 2\pi F_s = 16\pi$ del espectro original.

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - j16\pi k) \quad (2)$$



2. Se tiene una señal continua $x_c(t) = 2 \cos(150\pi t)$.

- (a) Escoja una frecuencia de muestreo adecuada para la señal.

Solución: La frecuencia de Nyquist (máxima frecuencia) es $150\pi = 75 \cdot 2\pi$ (es decir 75 Hz). Al escoger una frecuencia de muestreo, utilizamos como criterio el teorema de muestreo (o de Nyquist): $F_s \geq 2F_H$.

Por lo tanto:

$$F_s \geq 2F_H = 2 \cdot 75 \quad (3)$$

$$\geq 150 \text{ Hz} \quad (4)$$

Escogiendo una tasa de muestreo sobre 150 Hz, seremos capaces de recuperar la señal sin aliasing. Podemos escoger por ejemplo, $F_s = 300$ Hz.

- (b) La señal se muestrea, y posteriormente se reconstruye utilizando un retentor de orden cero y un filtro ideal que bloquea frecuencias por encima de la frecuencia de Nyquist. Bosqueje la señal en cada paso y determine la señal reconstruida.

Solución: Se considera $F_s = 300$ Hz ($T = 1/300$).

La señal original $x_c(t)$ se muestrea cada $t = nT$.

$$x[n] = x_c(nT) = 2 \cos(150\pi nT) \quad (5)$$

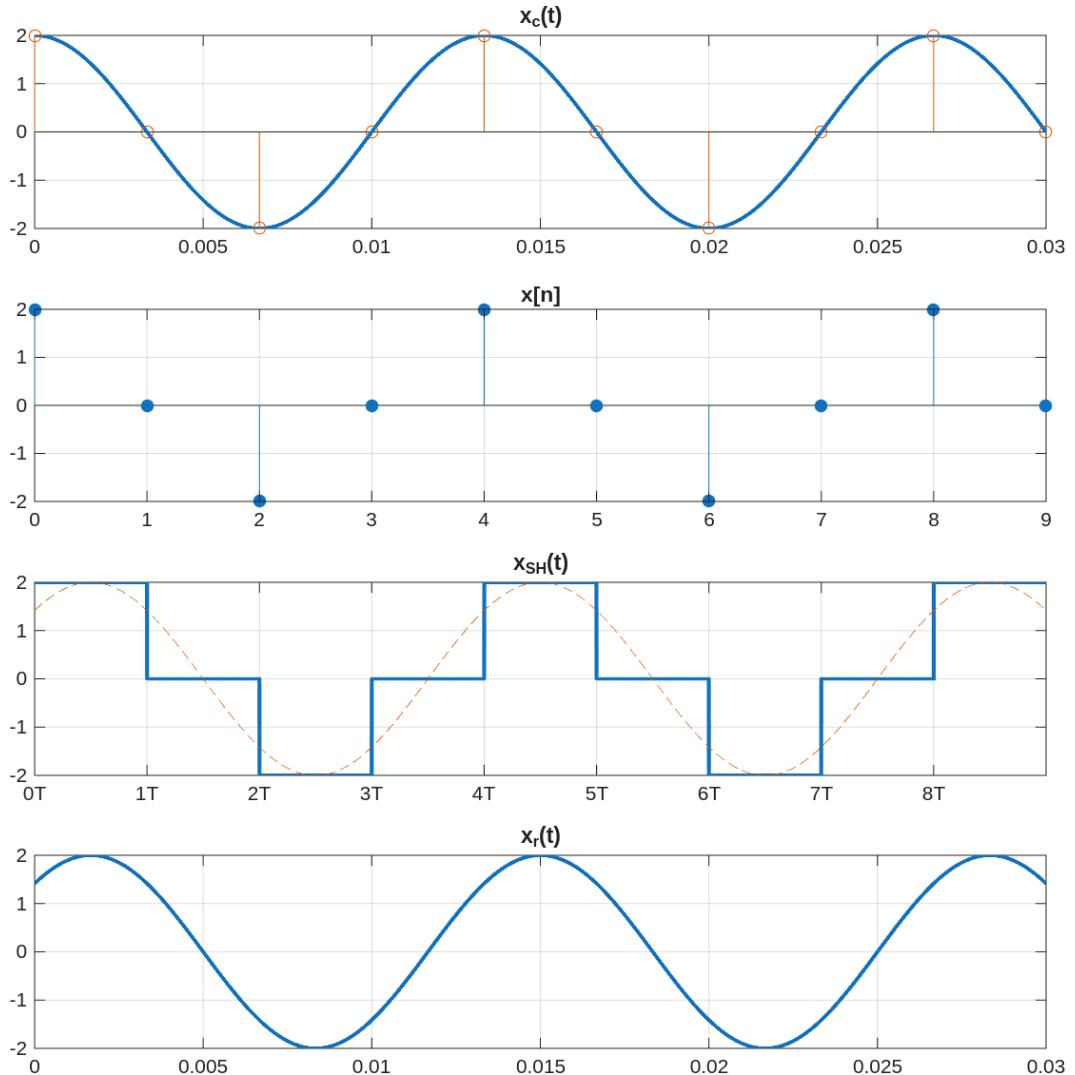
$$= 2 \cos\left(\frac{150}{300}\pi n\right) \quad (6)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (7)$$

Tras el retentor de orden cero, la señal $x_{SH}(t)$ mantiene el valor de cada muestra por $T = 1/300$ tiempo.

El filtro elimina las frecuencias $F > \frac{F_s}{2}$ introducidas por el retentor y el muestreo. Como se cumple el teorema de muestreo, la señal recuperada es la original con un retardo de $T/2 = 1/600$ (debido al retentor de orden cero):

$$x_r(t) = x_c(t - T/2) = 2 \cos(150\pi[t - T/2]) = 2 \cos(150\pi t - \pi/4)$$



Nota: Se asume que el filtro compensa la atenuación de la señal causada por este.

3. Considere la siguiente señal tiempo continuo:

$$x_c(t) = 5 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi t)$$

- (a) Determine las frecuencias (en Hz) presentes en la señal.

Solución: Las frecuencias presentes en la señal se hallan mediante inspección:

$$x_c(t) = 5 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi t) \quad (8)$$

$$= 5 \cos\left(\underbrace{100 \cdot 2\pi t}_{F_1} + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\underbrace{200 \cdot 2\pi t}_{F_2}\right) \quad (9)$$

Las frecuencias son $F_1 = 100$ Hz, y $F_2 = 200$ Hz.

- (b) Determine la frecuencia de Nyquist, y tasa de muestreo para un muestreo sin aliasing.

Solución: La frecuencia de Nyquist F_H corresponde a la mayor frecuencia en la señal. En este caso $F_2 = 200$ Hz es la mayor frecuencia, por lo que $F_H = 200$ Hz.

Para una tasa de muestreo sin aliasing, consideramos el teorema de Nyquist.

$$F_s \geq 2F_H \quad (10)$$

$$\geq 400 \text{ Hz} \quad (11)$$

Para una tasa de muestreo sin aliasing, esta debe ser mayor o igual a 400 Hz.

- (c) La señal se muestrea con $F_s = 500$ Hz (ADC ideal). Determine el espectro $|X(e^{j\Omega T})|$ de la señal muestreada $x[n]$ y grafique su magnitud como función de la frecuencia F en Hz.

Solución: Nota: $\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 t}\} = \pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

Notemos que la señal se puede descomponer en exponentiales complejas:

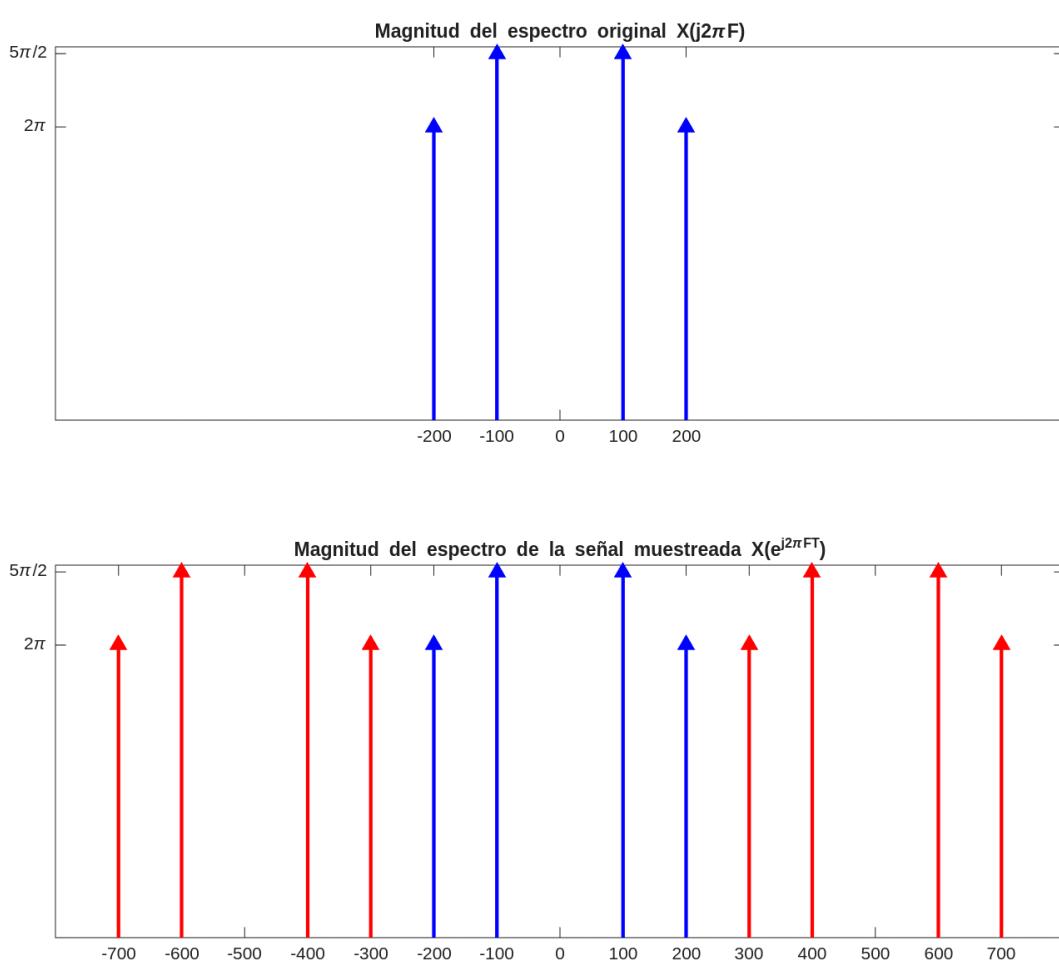
$$x_c(t) = 5 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi t) \quad (12)$$

$$= \frac{5e^{j\pi/6}}{2} e^{j200\pi t} + \frac{5e^{-j\pi/6}}{2} e^{-j200\pi t} + \frac{4}{2} e^{j400\pi t} - \frac{4}{2} e^{-j400\pi t} \quad (13)$$

El espectro original tiene picos en las frecuencias $\pm 200\pi$ y $\pm 400\pi$. En Hz, estas son ± 100 Hz, y ± 200 Hz.

Al muestrear la señal, el espectro se hace periódico. Aparecen copias del espectro original desplazadas en $2\pi/T = 2\pi F_s = 1000\pi$ hacia la izquierda y hacia la derecha. En Hz, las copias se desplazan $F_s = 500$ Hz hacia los lados.

En el gráfico, las copias debido al muestreo se muestran en rojo.

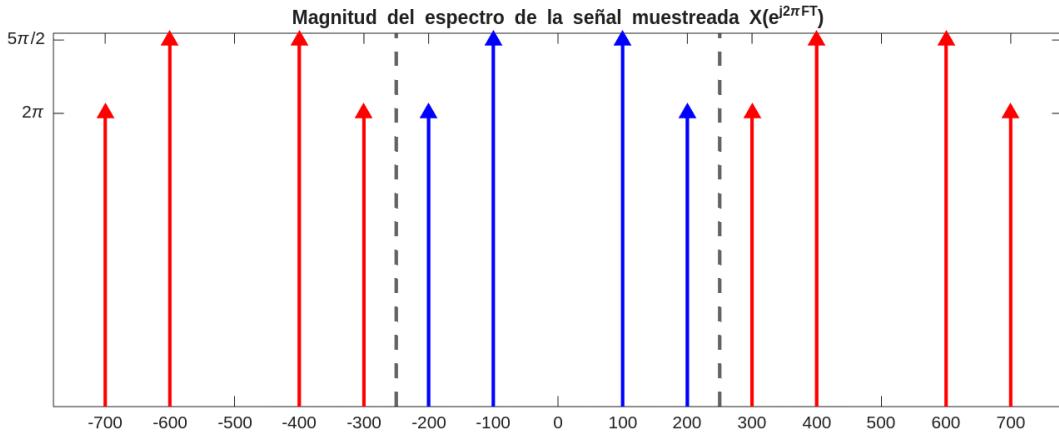


Al cumplirse el teorema del muestreo, no hay aliasing (las copias no se cruzan con el espectro original).

- (d) Determine la señal $x_r(t)$ reconstruida utilizando un DAC ideal.

Solución: Dado que se cumple el teorema del muestreo (con $F_s = 500 \text{ Hz} > 400 \text{ Hz}$), se recupera la señal original (DAC ideal).

DAC ideal reconstruye la señal tomando las frecuencias $|F| \leq F_s/2 = 250 \text{ Hz}$.



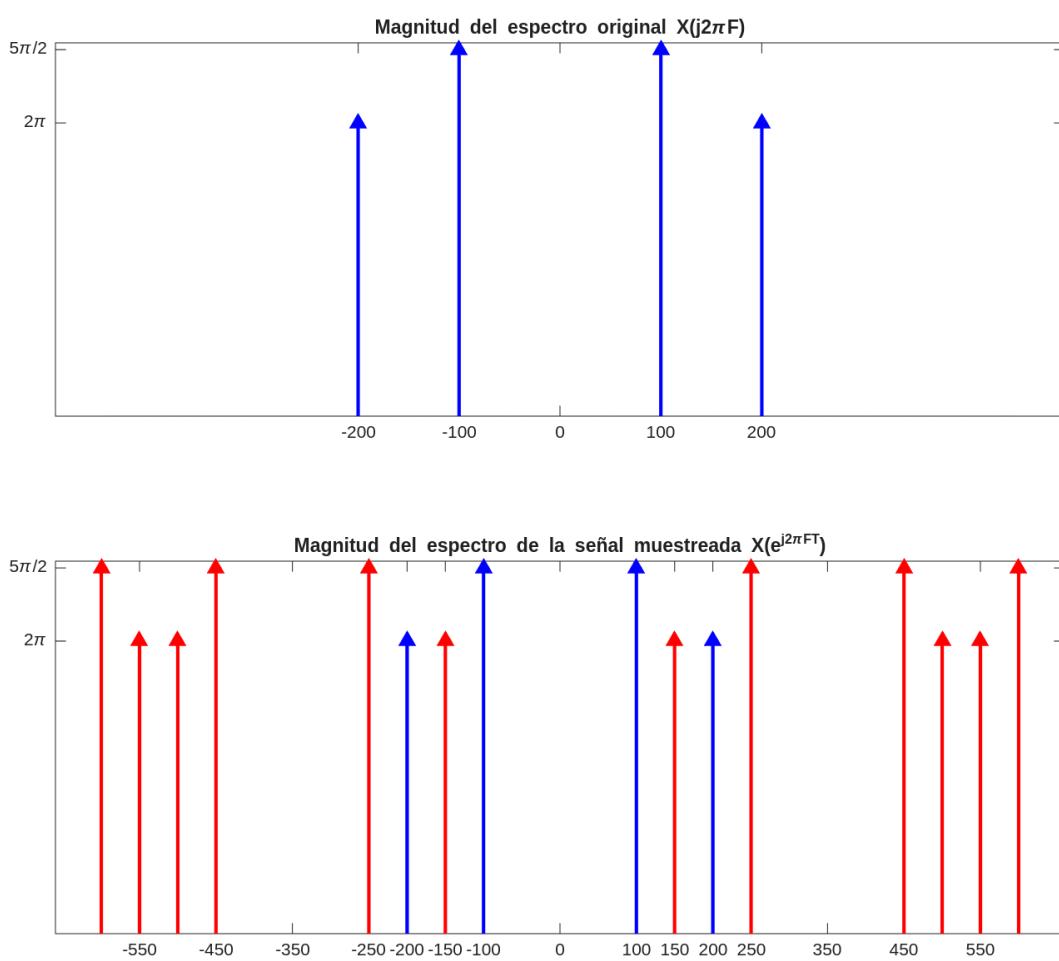
Como se puede ver en el gráfico esto nos deja con el espectro original.

La señal reconstruida es igual a la original: $x_r(t) = x_c(t)$.

- (e) Repita (c) y (d), muestreando la señal con $F_s = 350$ Hz.

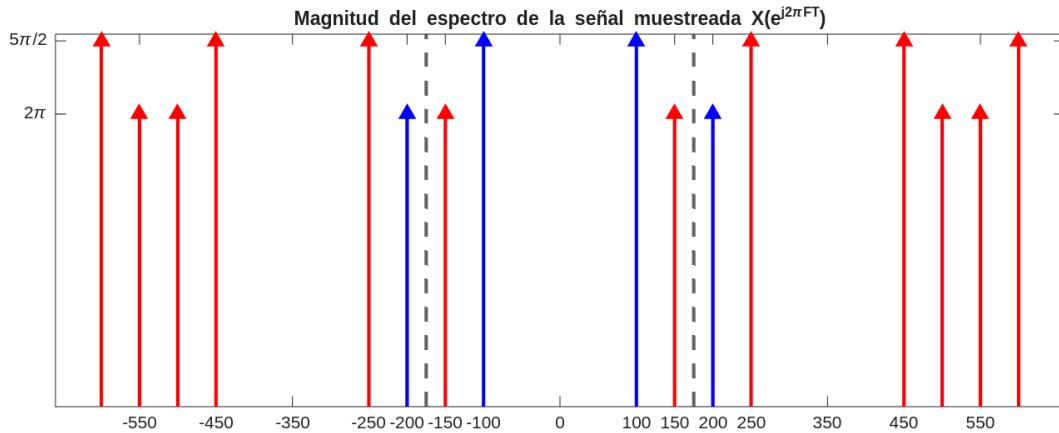
Solución: Al muestrear con $F_s = 350$ Hz, no se cumple el teorema del muestreo (350 Hz < 400 Hz).

Las copias del espectro original se desplazan $F_s = 350$ Hz hacia la izquierda y hacia la derecha.



Como se puede ver, el espectro de las copias se cruza con el espectro original. Hay aliasing.

Al reconstruir la señal, el DAC ideal toma las frecuencias $|F| < F_s/2 = 175$ Hz.



El espectro dentro de las líneas punteadas ya no es el espectro original.

Para hallar la respuesta reconstruida, consideraremos la fórmula de interpolación del

DAC ideal (banda limitada):

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]g_{BL}(t - nT) \quad (14)$$

$$g_{BL}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (15)$$

En este caso al tratarse de señales sinusoidales, se puede encontrar de una manera un poco más cualitativa:

1. Aplicamos el muestreo.

$$x[n] = x_c(nT) = 5 \cos\left(200\pi nT + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi nT) \quad (16)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n\right) \quad (17)$$

2. En el dominio discreto la frecuencia es periódica. Llevamos todas las frecuencias al intervalo $[-\pi, \pi]$. Vemos que $400\pi/350 > \pi$:

$$x[n] = 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n\right) \quad (18)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n - 2\pi n\right) \quad (19)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n - \frac{700}{350}\pi n\right) \quad (20)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(-\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (21)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (22)$$

(23)

3. El DAC ideal “deshace” la sustitución $t = nT = n/350$:

$$x[n] = 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (24)$$

$$\downarrow t = n/350$$

$$x_r(t) = 5 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin(300\pi t) \quad (25)$$

En la señal reconstruida, desaparece la frecuencia 200 Hz (400π), y aparece otra frecuencia a 150 Hz (300π) producto del aliasing. Esto concuerda con el gráfico mostrado anteriormente.