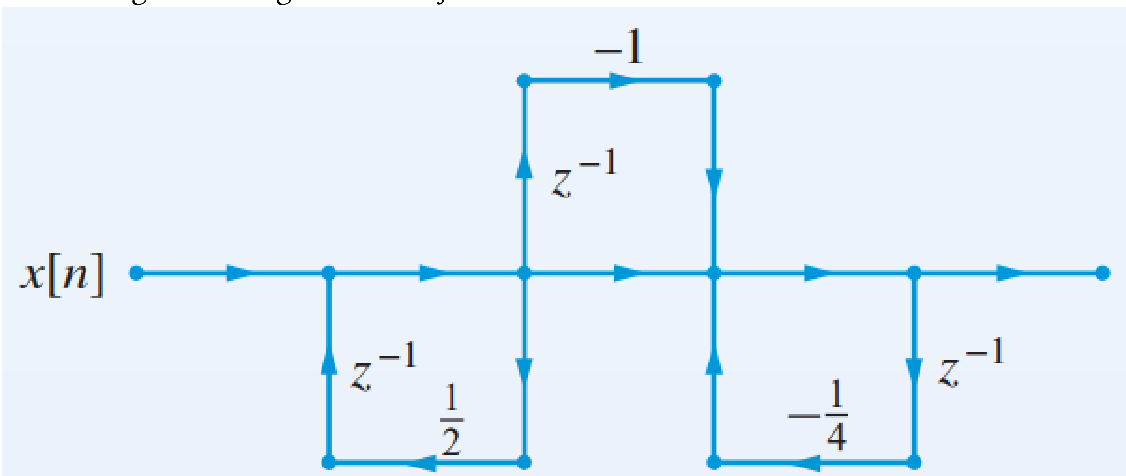
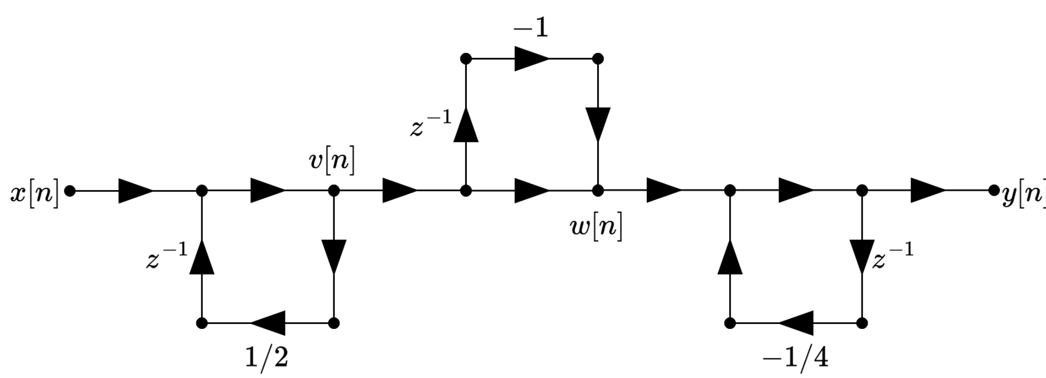
Ayudantía 12 - Procesamiento Digital de Señales

1. Dado el siguiente diagrama de flujo de señales



(a) Encontrar la función de transferencia del sistema.

Solución: Extendiendo un poco el diagrama y definiendo variables intermedias $v[n]$ y $w[n]$:



Ecuaciones y F.de Ts. para $v[n]$, $w[n]$ y $y[n]$:

$$v[n] = x[n] + \frac{1}{2}v[n-1] \qquad w[n] = v[n] - v[n-1] \qquad y[n] = w[n] - \frac{1}{4}w[n-1] \tag{1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \frac{W(z)}{V(z)} = 1 - z^{-1} \qquad \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{2}$$

Finalmente:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \cdot \frac{W(z)}{V(z)} \cdot \frac{V(z)}{X(z)} \tag{3}$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \tag{4}$$

(b) Encontrar una ecuación de diferencias.

Solución:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{5}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \tag{6}$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] \tag{7}$$

2. Para el sistema dado por la función de transferencia

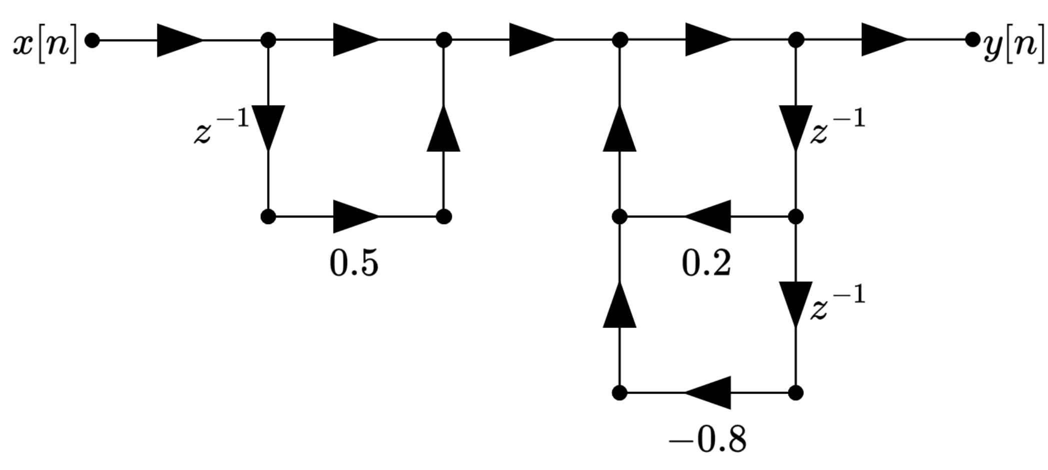
$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$

(a) Dibujar estructura en forma directa I.

Solución:

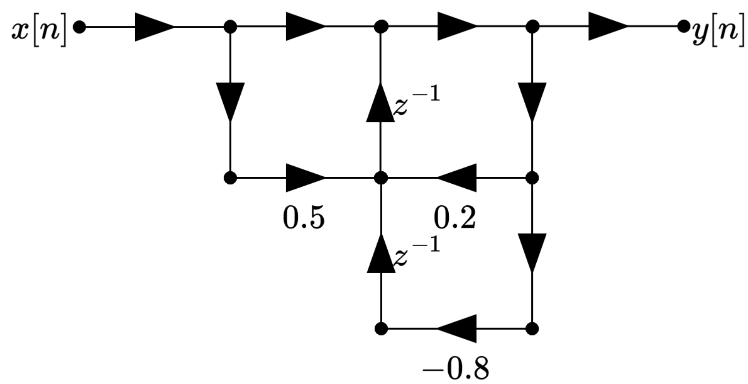
$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1] \underbrace{+0.2y[n] - 0.8y[n-2]}_{\text{Coeficientes se invierten}} \tag{8}$$

Primero ceros de la F. de T., luego polos. Señales se retardan primero y después se multiplican por los coeficientes



(b) Dibujar estructura en forma transpuesta II.

Solución: Similar al anterior, pero señales se multiplican por los coeficientes, luego se retardan. Lineas de retardo se unen en una sola.



3. Para los siguientes sistemas, identifique el tipo de filtro (IIR o FIR) y determine si tiene fase lineal o no:

H_0 : $\quad H_0(z) = \dfrac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}$

H_1 : $\quad H_1(z) = 3 - 2z^{-1} - 2z^{-3} + 3z^{-4}$

H_2 : $\quad h_2[n] = \{5, 6, 3, 3, 6, 5\}$

H_3 : $\quad h_3[n] = \{4, 1, 0, -1, -4\}$

H_4 : $\quad h_4[n] = \{-5, 1, 3, -3, -1, 5\}$

H_5 : $\quad h_5[n] = u[n] - u[n-4] + \delta[n-3]$

Solución: H_0 : $\quad H_0(z) = \dfrac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}$

Filtro tiene retroalimentación, por lo que es IIR. Al ser IIR, causal o anticausal, no tiene fase lineal.

Solución: H_1 : $\quad H_1(z) = 3 - 2z^{-1} - 2z^{-3} + 3z^{-4}$

$$h_1[n] = \{3, -2, 0, -2, 3\} \tag{9}$$

Es FIR, simétrica $h_1[n] = h_1[M - n]$, de orden $M = 4$ par.

Por lo tanto, H_1 es FIR tipo I y tiene fase lineal.

Solución: H_2 : $\quad h_2[n] = \{5, 6, 3, 3, 6, 5\}$

Es FIR, simétrica $h_2[n] = h_2[M - n]$, de orden $M = 5$ impar.

Por lo tanto, H_2 es FIR tipo II y tiene fase lineal.

Solución: H_3 : $\quad h_3[n] = \{4, 1, 0, -1, -4\}$

Es FIR, antisimétrica $h_3[n] = -h_3[M - n]$, de orden $M = 4$ par.

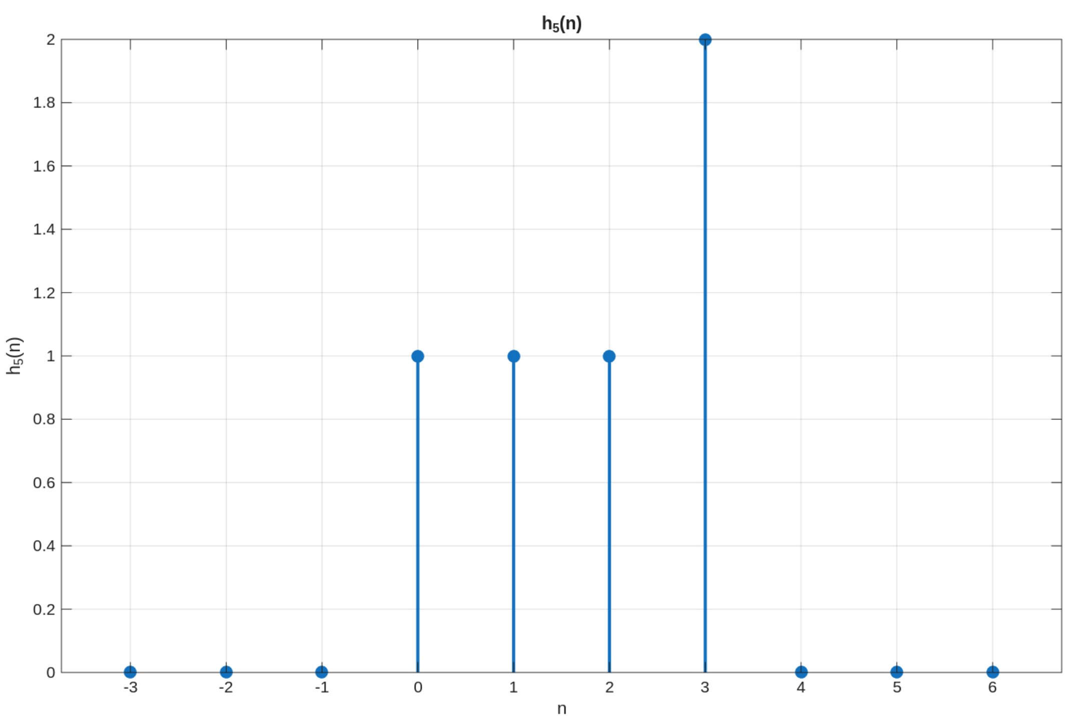
Por lo tanto, H_3 es FIR tipo III y tiene fase lineal.

Solución: H_4 : $\quad h_4[n] = \{-5, 1, 3, -3, -1, 5\}$

Es FIR, antisimétrica $h_4[n] = -h_4[M - n]$, de orden $M = 5$ impar.

Por lo tanto, H_4 es FIR tipo IV y tiene fase lineal.

Solución: H_5 : $\quad h_5[n] = u[n] - u[n-4] + \delta[n-3]$



$$h_5[n] = \{1, 1, 1, 2\} \tag{10}$$

Es FIR, pero no tiene respuesta impulso simétrica ni antisimétrica. Por lo tanto no tiene fase lineal.

4. Hallar magnitud $|H(e^{j\omega})|$, amplitud $A(e^{j\omega})$, y retardo de grupo de:

   (a) $H_6(z) = 3 - 2z^{-1} - 2z^{-3} + 3z^{-4}$

   Solución:

$$\begin{aligned} H_6(e^{j\omega}) &= 3 - 2e^{-j\omega} - 2e^{-3j\omega} + 3e^{-4j\omega} && (11)\\ &= \left(3e^{2j\omega} - 2e^{j\omega} - 2e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega}\right) e^{-2j\omega} && (12)\\ &\downarrow \boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)} \\ &= \left[6\cos(2\omega) - 4\cos(\omega)\right] e^{-2j\omega} = A(e^{j\omega})e^{j\Psi(\omega)} && (13) \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$|H(e^{j\omega})| = |6\cos(2\omega) - 4\cos(\omega)| \quad (14)$$

   La amplitud:

$$A(e^{j\omega}) = 6\cos(2\omega) - 4\cos(\omega) \quad (15)$$

   La respuesta de ángulo y retardo de grupo:

$$\Psi(\omega) = -2\omega \qquad \begin{aligned} \tau_{gd}(\omega) &= -\frac{d\Psi}{d\omega} && (16)\\ &= 2 && (17) \end{aligned}$$

   (b) $h_7[n] = \{2, 2, 2, 2, 2\}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
h_7[n] &= 2(u[n] - u[n-5]) && (18)\\
&\downarrow \mathcal{Z}\\
H_7(z) &= 2\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}} && (19)\\
&\downarrow z = e^{j\omega}\\
H_7(e^{j\omega}) &= 2\frac{1-e^{-5j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{5}{2}j\omega}e^{-\frac{5}{2}j\omega}}{e^{\frac{1}{2}j\omega}e^{-\frac{1}{2}j\omega}}\right) && (20)\\
&= 2\frac{e^{\frac{5}{2}j\omega} - e^{-\frac{5}{2}j\omega}}{e^{\frac{1}{2}j\omega} - e^{-\frac{1}{2}j\omega}} \cdot e^{-2j\omega} && (21)\\
&= 2\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-2j\omega} = A(e^{j\omega})e^{j\Psi(\omega)} && (22)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
|H(e^j\omega)| = 2\left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \tag{23}
$$

La amplitud:

$$
A(e^{j\omega}) = 2\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{24}
$$

La respuesta de ángulo y retardo de grupo:

$$
\Psi(\omega) = -2\omega \qquad\qquad \tau_{gd}(\omega) = -\frac{d\Psi}{d\omega} \tag{25}
$$

$$
= 2 \tag{26}
$$

5. Diseñe un pasabajos digital FIR para una señal con $F_p = 500$ Hz y $F_s = 550$ Hz.

Table 10.3 Properties of commonly used windows ($L = M + 1$).

Window name	Side lobe level (dB)	Approx. $\Delta\omega$	Exact $\Delta\omega$	$\delta_p \approx \delta_s$	A_p (dB)	A_s (dB)
Rectangular	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	0.75	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.45	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.055	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.019	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0017	74

(a) Determine ω_p y ω_s, si la señal se muestrea con una frecuencia de muestreo $F_m = 10$ kHz.

Solución:

$$\omega_p = 2\pi\frac{F_p}{F_m} = 0.1\pi \qquad \omega_s = 2\pi\frac{F_s}{F_m} = 0.11\pi \tag{27}$$

(b) Determine la frecuencia de corte ω_c y un filtro ideal para el diseño del filtro.

Solución:

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \qquad h_{\text{ideal}}[n] = \frac{\sin(\omega_c[n - M/2])}{\pi[n - M/2]} \tag{28}$$

$$= 0.105\pi \qquad = \frac{\sin(0.105\pi[n - M/2])}{\pi[n - M/2]} \tag{29}$$

(c) Si los ripples aceptables son $\delta_s = 0.073$ y $\delta_p = 0.028$, determine una ventana apropiada para el filtro.

Solución:

$$\delta = \text{mín}\{\delta_s, \delta_p\} \qquad A = -20\log(\delta) \tag{30}$$

$$= 0.028 \qquad = 31.05 \text{ dB} \tag{31}$$

De la tabla (columna A_s **dB**): $44 > 31.05 \longrightarrow$ Hann

(d) Determine el orden y expresión de la respuesta a impulso del filtro.

Solución:

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.01\pi \tag{32}$$

De la tabla (columna **Exact** $\Delta\omega$, ventana Hann): $\Delta\omega = 6.2\pi/L$

$$0.01\pi = 6.2\pi/L \longrightarrow L = 620 \longrightarrow M = 619 = L - 1 \tag{33}$$

Considerando esto, la respuesta a impulso $h[n]$ del filtro FIR queda:

$$h[n] = h_{\text{ideal}}[n] \cdot w_{\text{Hann}}[n] = \frac{\sin(0.105\pi[n - 619/2])}{\pi[n - 619/2]} \cdot w_{\text{Hann}}[n] \tag{34}$$

Con $w_{\text{Hann}}[n]$ ventana de Hann de largo $L = 620$

6. Las especificaciones para un filtro IIR son $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.5\pi$, $A_p = 1$ dB y $A_s = 55$ dB

(a) Determine las frecuencias de diseño si se utiliza transformación bilinear con $T_d = 1$.

Solución:

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \qquad \Omega_s = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \tag{35}$$

$$= 2\tan\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) \qquad = 2\tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right) \tag{36}$$

$$= 1.4531 \qquad = 2 \tag{37}$$

(b) Determine las frecuencias de diseño si se utiliza impulso invariante con $T = 0.005$

Solución:

$$\omega = 2\pi\frac{F}{F_m} = \frac{\Omega}{F_m} = \Omega T \longrightarrow \Omega = \frac{\omega}{T} \tag{38}$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} \qquad \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} \tag{39}$$

$$= \frac{0.4\pi}{0.005} \qquad = \frac{0.5\pi}{0.005} \tag{40}$$

$$= 80\pi \qquad = 100\pi \tag{41}$$

7. Dada la función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1}$$

(a) Aplique transformación bilinear para encontrar el filtro digital $H_d(z)$.

Solución: Transformación bilinear: $s = \dfrac{2}{T_d}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Escogiendo T_d por conveniencia:

$$
\begin{aligned}
H_c(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1} \cdot \left(\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) && (42)\\
&= \frac{1+z^{-1}}{2} && (43)\\
&= 0.5 + 0.5z^{-1} && (44)
\end{aligned}
$$

(b) Hallar la frecuencia de corte ω_c en el plano discreto.

Solución: El filtro $H_c(s)$ es un pasabajo de primer orden con frecuencia de corte $\Omega_c = 1$

Tomando en cuenta que se escogió $T_d = 2$:

$$
\begin{aligned}
\omega_c &= 2\tan^{-1}\left(\Omega_c \frac{T_d}{2}\right) && (45)\\
&= 2\tan^{-1}\left(1\frac{2}{2}\right) && (46)\\
&= \pi/2 = 1.57 && (47)
\end{aligned}
$$