Universidad de Concepcíon
Facultad de Ingeniería
Depto. de Ingeniería Eléctrica

Ayudantía 1 - Procesamiento Digital de Señales

ToDo

1. Para las siguientes señales, identifique:
   - Si son continuas, tiempo discreto o digitales.
   - Tipo de soporte.
   - Si son periódicas.

   (a) $x_1(t) = \sin(3t)$

   Solución: La señal depende del parámetro t y toma valores continuos. Por lo tanto, la señal es continua. Además $\sin(3t)$ es periódica. Es de soporte infinito.

   (b) $x_2[n] = 0.4^n u[n]$

   Solución: La señal está definida para $n \in \mathbb{Z}$, no puede ser continua. A medida que $n > 0$ crece, el valor de la señal se vuelve arbitrariamente pequeño, por lo que no puede ser representada en cuantos (requeriría bits infinitos), no puede ser digital; la señal es tiempo discreto.

   La señal $x_2[n]$ es mayor a cero para todo n positivo, y $x_2[n]$ es cero para n negativo. Es de soporte positivo.

   La señal no es periódica.

   (c) $x_1(t)$, si se muestrea con $T = 0.1$

   Solución: Al muestrear se obtiene:

$$x_3[n] = x_1(nT)|_{T=0.1} = \sin(0.3n), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

   La señal es ahora de tiempo discreto.

   La señal mantiene su soporte.

   A primera vista puede parecer periódica. Recordemos que esto se cumple si existe un m tal que para cualquier n:

$$x_3[n] = x_3[n+m]$$

   Al reemplazar por la expresión obtenida:

$$\sin(0.3n) = \sin(0.3n + 0.3m)$$

sin es 2π periódica, por lo que debe existir m tal que:

$$0.3m = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2}$$
$$\Rightarrow \frac{0.3m}{2k} = \pi \tag{3}$$

El lado izquierdo de la ecuación es racional, mientras que π es irracional, es decir no existen m y k que satisfagan la ecuación, por lo tanto, la señal no es periódica.

2. Se tiene un sistema tiempo discreto cuya respuesta a impulso es $h[n] = (0.5)^n u[n]$. Usando convolución discreta, calcule la salida del sistema $y[n]$ si se somete a una entrada $x[n] = u[n] - u[n-4]$.

Solución: Conociendo la respuesta a impulso y entrada al sistema, la respuesta viene dada por la expresión:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Desarrollando mediante la definición de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{4}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-4])h[n-k] \tag{5}$$

Notemos que $u[k]-u[k-4]$ es uno para $0 \leq k \leq 3$, y cero en cualquier otro caso. Podemos simplificar la serie a una suma finita.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{3} h[n-k] \tag{6}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} (0.5)^{n-k} u[n-k] \tag{7}$$
$$= (0.5)^n u[n] + (0.5)^{n-1} u[n-1] \tag{8}$$
$$+ (0.5)^{n-2} u[n-2] + (0.5)^{n-3} u[n-3]$$

3. Calcular la transformada Z, región de convergencia (RC) e identificar polos de las señales a continuación. Bosquejar RC y polos. 1.bosquejos
   (a) $(-0.8)^n u[n]$, utilizando definición de la transformada Z.

Solución: Al ser de soporte positivo, podemos utilizar la transformada Z unilateral:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(-0.8)^n u[n]\} &= \mathcal{Z}^+\{(-0.8)^n\} && (9)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-0.8)^n z^{-n} && (10)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-0.8z^{-1})^n && (11)
\end{aligned}$$

Aplicando la identidad $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-0.8z^{-1})^n = \frac{1}{1+0.8z^{-1}} \qquad (12)$$

Para la región de convergencia, $|-0.8z^{-1}| = |0.8z^{-1}| < 1$. Es decir $|z| > 0.8$. La RC es el exterior de una circunferencia de radio 0.8.
Existe un único polo cuando $1 + 0.8z^{-1} = 0$. Es decir cuando $z = -0.8$.

(b) $\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n] + (0.5)^n u[n-3]$, utilizando todos sus conocimientos.

Solución: Para calcular la transformada Z en este caso aplicamos linealidad. Primero calculamos $\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\}$. Recordemos que en general:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\omega n)u[n]\} = \frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2\cos(\omega)z + 1} \qquad (13)$$

Con RC $|z| > 1$.
En nuestro caso $\omega = \frac{\pi}{4}$, y $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo que:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\} = \frac{z\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} \qquad (14)$$

Ahora buscamos $\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\}$. Sabemos que:

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (15)$$

Con RC $|z| > |a|$. Podemos aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo para obtener la transformada Z. Sin embargo, para esto debemos preocuparnos que todas las partes de la expresión tengan el desplazamiento:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\} &= \mathcal{Z}\{(0.5)^3(0.5)^{n-3}u[n-3]\} && (16)\\
&= (0.5)^3\mathcal{Z}\{(0.5)^{n-3}u[n-3]\} && (17)\\
&= (0.5)^3 z^{-3}\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n]\} && (18)\\
&= \frac{1}{8z^3}\cdot\frac{1}{1-0.5z^{-1}} && (19)
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando ambas partes tenemos la transformada Z completa:

$$\frac{z\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{8z^3} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \tag{20}$$

Con RC $|z| > 0.5$ Para la región de convergencia y polos, consideramos ambas partes. La RC será la intersección de ambas RC. Ambas son el exterior de una circunferencia. La RC será el exterior de la circunferencia más grande: $|z| > 1$.

Los polos vienen dados por $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ y $1 - 0.5z^{-1}$. Los polos serían

4. Un sistema cumple:

$$y[n] - 0.6y[n-1] = x[n], \quad y[-1] = 1$$

   (a) Obtener $H(z)$.
   (b) Calcular la respuesta $y[n]$ para entrada escalón usando transformada Z.

5. Dada la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.6}$$

   (a) Encontrar respuesta a impulso del sistema.
   (b) Analizar causalidad y estabilidad
   (c) ¿Que ocurriría si el polo estuviera en $z = 1.2$?