Universidad de Concepcíon
Facultad de Ingeniería
Depto. de Ingeniería Eléctrica

Ayudantía 4 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere el sistema LTI causal descrito por $y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n]$.

(a) Determine $H(z)$ y $H(e^{j\omega})$

Solución:

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n] \tag{1}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z) = 0.8z^{-1}Y(z) + 0.2X(z) \tag{2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{0.2}{1-0.8z^{-1}} \tag{3}$$

$$\Big\downarrow z = e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.2}{1-0.8e^{-j\omega}} = \frac{0.2}{1-0.8\cos\omega + j0.8\sin\omega} \tag{4}$$

(b) Obtenga $|H(e^{j\omega})|$ y $\angle H(e^{j\omega})$

Solución:

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})| &= \frac{0.2}{|1-0.8\cos\omega + j0.8\sin\omega|} &(5)\\ &= \frac{0.2}{\sqrt{(1-0.8\cos\omega)^2 + (0.8\sin\omega)^2}} &(6)\\ &= \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\omega}} &(7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle H(e^{j\omega}) &= -\angle(1-0.8\cos\omega + j0.8\sin\omega) &(8)\\ &= -\arctan\left(\frac{0.8\sin\omega}{1-0.8\cos\omega}\right) &(9)\end{aligned}$$

(c) Halle la ganancia DC y en $\omega = \pi$. Identificar el tipo de filtro y hallar la frecuencia de corte.

Solución: Para la ganancia DC, ocupamos la TFTD evaluada en $\omega = 0$:

$$G_{DC} = H(e^{j(0)}) = \frac{0.2}{1 - 0.8} \tag{10}$$
$$= \frac{0.2}{0.2} = 1 \tag{11}$$

La magnitud en $\omega = \pi$:

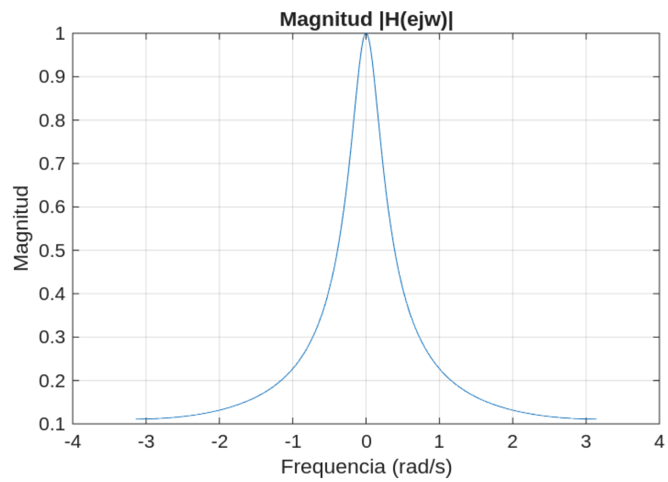
$$|H(e^{j(\pi)})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\pi}} \tag{12}$$
$$= \frac{0.2}{\sqrt{3.24}} = \frac{0.2}{1.8} \tag{13}$$
$$= 1/9 \tag{14}$$

Para encontrar la frecuencia de corte ω_c, consideramos la ecuación:

$$|H(e^{j\omega_c})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\omega_c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3_{\text{dB}} \tag{15}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\omega_c}} = \frac{1}{\sqrt{0.08}} \tag{16}$$
$$1.64 - 1.6\cos\omega_c = 0.08 \tag{17}$$
$$\omega_c = \cos^{-1}\frac{1.56}{1.6} \tag{18}$$
$$= 0.2241 \tag{19}$$

(d) Bosqueje la magnitud.

Solución: La magnitud para sistemas con respuesta a impulso reales es par. El bosquejo es simétrico. Se realiza el bosquejo entre $-\pi$ y π, pues la magnitud es periódica.



(e) Encuentre el retardo de fase y el retardo de grupo. ¿Que se puede concluir?

Solución: El retardo de fase es por definición:

$$\tau_{\text{pd}}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega} = \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{0.8\sin\omega}{1-0.8\cos\omega}\right) \tag{20}$$

Para la respuesta continua de fase consideramos $\Psi(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$ pues la fase $\angle H(e^{j\omega})$ es en este caso continua. Por lo tanto, el retardo de grupo es por definición:

$$\tau_{\text{gd}}(\omega) = -\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\arctan\left(\frac{0.8\sin\omega}{1-0.8\cos\omega}\right) \tag{21}$$

$$= \frac{0.8\cos\omega - 0.64}{1.64 - 1.6\cos\omega} \tag{22}$$

Es evidente que ni el retardo de fase τ_{pd} ni el retardo de grupo τ_{gd} son constantes. Como no son constantes, se concluye que el filtro distorsiona la señal de entrada.

(f) Considere la entrada $x[n] = 3 + 5\cos(\frac{\pi}{4}n)$. Determine la salida $y[n]$.

Solución: Para la salida, aplicamos la propiedad de sistemas LTI para señales periódicas. Para la constante utilizamos la ganancia DC ($G_{\text{DC}} = 1$), y para el coseno ($\omega = \pi/4$) consideramos:

$$|H(e^{j\pi/4})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos(\pi/4)}} \qquad \angle H(e^{j\pi/4}) = -\arctan\left(\frac{0.8\sin(\pi/4)}{1-0.8\cos(\pi/4)}\right) \tag{23}$$

$$= 0.2804 \qquad\qquad = -0.9160 \tag{24}$$

Utilizando estos valores, se deduce la salida del sistema:

$$\begin{aligned} x[n] &= 3 + 5\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) && (25) \\ &\Big\downarrow \mathcal{H} \\ y[n] &= 3G_{\mathrm{DC}} + 5|H(e^{j\omega})|\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \angle H(e^{j\omega})\right) && (26) \\ &= 3(1) + 5(0.2804)\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.9160\right) && (27) \\ &= 3 + 1.402\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.9160\right) && (28) \end{aligned}$$

2. Un filtro se define por la siguiente ecuación:

$$y[n] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} x[n-k]$$

(a) Encuentre la respuesta a impulso $h[n]$ e identifique el tipo de filtro.

Solución: Puesto que ya tenemos una expresión explícita para la salida, podemos encontrar la respuesta a impulso reemplazando $x[n] = \delta[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} x[n-k] && (29) \\ &\Big\downarrow x[n] = \delta[n] \\ h[n] &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} \delta[n-k] && (30) \\ &= \frac{1}{5}(\delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-4]) && (31) \\ &= \frac{1}{5}(u[n] - u[n-5]) && (32) \end{aligned}$$

(b) Demuestre que la respuesta en frecuencia se puede escribir como: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j2\omega}$

Solución: Aplicando transformada Z sobre la respuesta a impulso, y evaluando en $e^{j\omega}$ se obtiene la respuesta en frecuencia.

Recordar que: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$, $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$, $2j\sin\omega = e^{j\omega} - e^{-j\omega}$

$$h[n] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\delta[n-k] \tag{33}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} z^{-k} \tag{34}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}} \tag{35}$$

$$\Big\downarrow z = e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{(1-e^{-j5\omega})e^{j5\omega/2}}{(1-e^{-j\omega})e^{j\omega/2}}\cdot\frac{e^{-j5\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \tag{37}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{j5\omega/2}-e^{-j5\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}\cdot e^{-2j\omega} \tag{38}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-2j\omega} \tag{39}$$

(c) Encuentre el retardo de grupo del sistema.

Solución: Para el retardo de grupo necesitamos la respuesta continua de fase $\Psi(\omega)$. Esta se puede encontrar obteniendo la fase y descartando discontinuidades, o bien mediante inspección, si la respuesta en frecuencia se escribe en coordenadas polares:

$$H(e^{j\omega}) = G(\omega)e^{j\Psi(\omega)} = \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right)\cdot e^{j(-2\omega)} \tag{40}$$

$$\Psi(\omega) = -2\omega \tag{41}$$

$$\tau_{\text{gd}}(\omega) = -\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = 2 \tag{42}$$

El retardo de grupo es constante. Este sistema no distorsiona señal.

(d) Encuentre los ceros de $H(z)$ y ubíquelos en el plano Z.

Solución: Con:

$$H(z) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$$

Los ceros vienen dados por:

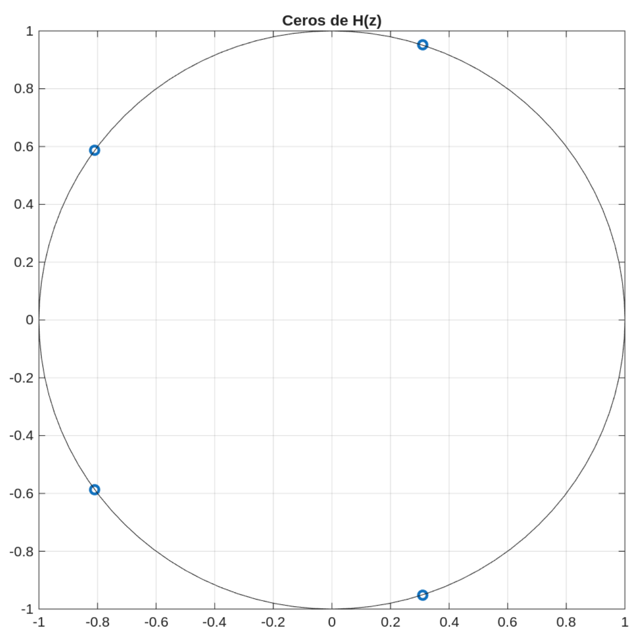
$$
\begin{aligned}
1 - z^{-5} &= 0 && (43)\\
z^5 &= 1 && (44)\\
z &= e^{j2\pi k/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 && (45)
\end{aligned}
$$

Al analizar los polos, tenemos:

$$
\begin{aligned}
1 - z^{-1} &= 0 && (46)\\
z &= 1 && (47)
\end{aligned}
$$

Este cero se cancela con el polo $z = e^{j2\pi(0)/5} = 1$. Por lo tanto, los ceros de la función de transferencia son:

$$z = e^{j2\pi k/5}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{48}$$



(e) Determine la salida $y[n]$ ante entrada $x[n] = (-1)^n + 3\sin(\pi n/2)$

Solución: La señal es periódica por lo que podemos aplicar la propiedad de funciones propias para sistemas LTI. Para encontrar la respuesta sin embargo, conviene escribirla en términos de senos y cosenos:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= (-1)^n + 3\sin(\pi n/2) && (49)\\
&= \cos(\pi n) + 3\sin(\pi n/2) && (50)
\end{aligned}
$$

Debemos calcular magnitud y fase para $\omega = \pi,\ \pi/2$. Primero obtenemos la magnitud y fase del sistema:

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-2j\omega}\right| \qquad \angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-2j\omega}\right) \tag{51}$$

$$= \frac{1}{5}\left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad = \angle\left(\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right) - 2\omega \tag{52}$$

Evaluamos en los valores ya mencionados:

$$(\omega = \pi)\ : \qquad |H(e^{j\pi})| = \frac{1}{5} \qquad \angle H(e^{j\pi}) = 0 - 2\pi = -2\pi \tag{53}$$

$$(\omega = \pi/2)\ : \qquad |H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{5} \qquad \angle H(e^{j\pi/2}) = \pi - 2\frac{\pi}{2} = 0 \tag{54}$$

Utilizando los valores calculados, se obtiene la respuesta del sistema:

$$x[n] = \cos(\pi n) + 3\sin(\pi n/2) \tag{55}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{H}$$

$$y[n] = |H(e^{j\pi})|\cos\left[\pi n + \angle H(e^{j\pi})\right] + 3|H(e^{j\pi/2})|\sin\left[\pi n/2 + \angle H(e^{j\pi/2})\right] \tag{56}$$

$$= \frac{1}{5}\cos(\pi n - 2\pi) + \frac{3}{5}\sin(\pi n/2 + 0) \tag{57}$$

$$= \frac{1}{5}\cos(\pi n) + \frac{3}{5}\sin(\pi n/2) \tag{58}$$

3. Considere el filtro pasabajo $h_{lp}[n] = (0.9)^n u[n]$

(a) Encuentre la respuesta en frecuencia $H_{lp}(e^{j\omega})$

Solución:

$$h_{lp}[n] = (0.9)^n u[n] \tag{59}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$H_{lp}(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \tag{60}$$

$$\Big\downarrow z = e^{j\omega}$$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.9e^{j\omega}} \tag{61}$$

(b) Diseñe un filtro pasabanda $H_{bp}(e^{j\omega})$ cuya magnitud sea máxima para las frecuencias $\omega \approx \pm\pi/3$

Solución: El filtro pasabajo de (a) tiene máxima magnitud para $\omega = 0$. Si consideramos el filtro pasabajo con desplazamiento en la frecuencia $H(e^{j(\omega-\omega_c)})$, este es máximo en magnitud para $\omega = \omega_c$.

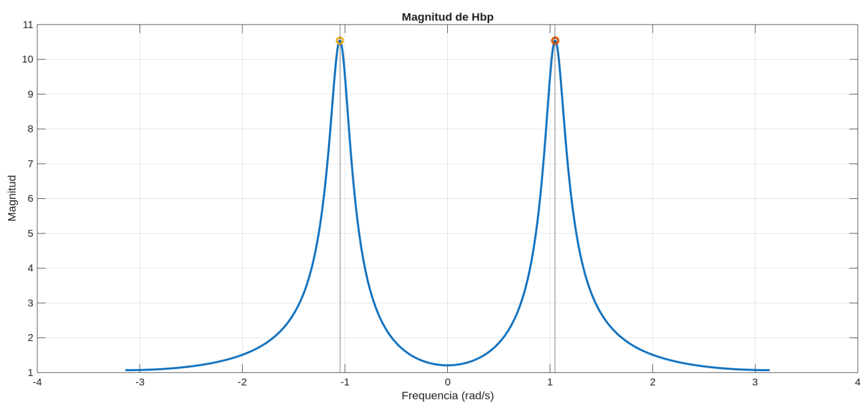
Utilizando dos pasabajos desplazados por $\omega_c = \pm\pi/3$, deberíamos obtener un filtro que tenga dos picos de magnitud para las frecuencias deseadas:

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\omega_c)}) + H_{lp}(e^{j(\omega+\omega_c)}) \tag{62}$$

$$= \frac{1}{1-0.9e^{j(\omega-\omega_c)}} + \frac{1}{1-0.9e^{j(\omega+\omega_c)}} \tag{63}$$

(c) Bosqueje la magnitud. Compruebe y determine $|H(e^{j\omega})|_{\max}$ y la frecuencia correspondiente en Matlab.

Solución: La magnitud es 10.5421, para $\omega = 1.0498$.




```
%% 3 (c)
Hlp_ej = @(w) 1./(1-0.9.*exp(-1j.*w));

Hbp_ej = @(w) Hlp_ej(w-pi/3) + Hlp_ej(w+pi/3);
mag = @(w) abs(Hbp_ej(w));

w_max = fminbnd(@(w) -mag(w), 0, pi)
mag_max = mag(w_max)

w = linspace(-pi,pi,1000);
figure;
plot(w, mag(w),'LineWidth',2); hold on
plot(w_max, mag(w_max),'o','LineWidth',2)
plot(-w_max, mag(-w_max),'o','LineWidth',2)
xline([-pi/3 pi/3])
```

```
xlabel('Frequencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
title('Magnitud de Hbp');
grid on;
```