Ayudantía 7 - Procesamiento Digital de Señales

1. Sea la secuencia $x[n] = \{1\ 1\ 0\ 3\}$
   (a) Calcule la TFD $X[k]$ utilizando la matriz $\boldsymbol{W_4}$.

Solución: Recordemos que la TFD se define por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{1}$$

Y definiendo $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{2}$$

Esta suma se puede reescribir como un producto entre una matriz $\boldsymbol{W_N}$ y un vector $\boldsymbol{x}$. De forma general:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W_N x} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \tag{4}$$

Para la matriz $\boldsymbol{W_N}$:

- Tiene dimensiones $N \times N$.
- La primera fila y columna son solo unos.
- Para la fila k, los exponentes de W_N aumentan de $k-1$ en $k-1$. Ej: La segunda fila los exponentes van de uno en uno, para la tercera fila van de dos en dos, etc...
- Es simétrica ($\boldsymbol{W_N} = \boldsymbol{W_N}^{\mathrm{T}}$)

En el caso de la secuencia $x[n] = \{1\ 1\ 0\ 3\}$ ($N = 4$) la transformada es:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{kn} \tag{5}$$

y en forma matricial:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W_4 x} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \tag{7}$$

Como $W_N^n = W_N^{n+N}$, entonces $W_4^4 = W_4^0$, $W_4^6 = W_4^2$ y $W_4^9 = W_4^1$ se escribe:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \tag{8}$$

Notando que $W_4^0 = 1$, $W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$, $W_4^2 = -1$ y $W_4^3 = j$, y reemplazando por los valores de $x[n]$:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1+0+3 \\ 1-j+0+3j \\ 1-1+0-3 \\ 1+j+0-3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1+2j \\ -3 \\ 1-2j \end{bmatrix} \tag{9}$$

Es decir: $X[k] = \{5 \quad 1+2j \quad -3 \quad 1-2j\}$

(b) Determine la la TFD inversa $z[n]$ de $W_4^{2k}X[k]$. Grafique $z[n]$ y $x[n]$ para su comparación.

Solución: Para el cálculo de la transformada inversa de $W_4^{2k}X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}X[k]$ debemos tener en cuenta la propiedad de desplazamiento circular. Sea una señal $x[n]$ y $X[k]$ su TFD de N puntos:

$$\boxed{x[\langle n-m\rangle_N] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} W_N^{mk}X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}X[k]} \tag{10}$$

Con $\langle * \rangle_N$ la operación módulo N. Notar que la exponencial debe estar en forma $e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$.

Al aplicar la propiedad en nuestro caso ($N = 4$, $m = 2$):

$$W_4^{2k}X[k] \xrightarrow{TFDI} z[n] = x[\langle n-2\rangle_4] \tag{11}$$

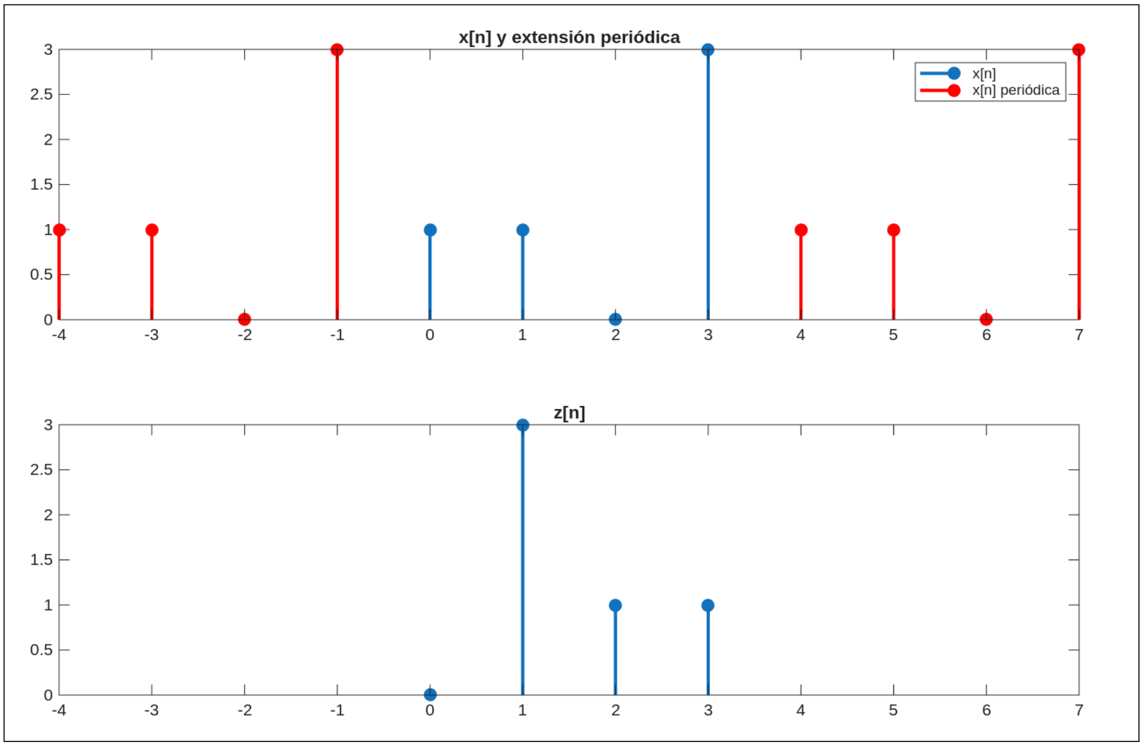
Para encontrar los valores de la señal para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ se retarda la señal en $m = 2$ rotando los valores que se salen del rango $0 \leq n \leq 3 = N-1$:

$$x[n] = \{1\ 1\ 0\ 3\} \tag{12}$$

$$\downarrow$$

$$z[n] = x[\langle n-2\rangle_4] = \{0\ 3\ 1\ 1\} \tag{13}$$

Al graficar $x[n]$, su extensión periódica y $z[n]$ vemos como la TFD no “ve” la señal $x[n]$ sino su extensión periódica al aplicar la propiedad de desplazamiento:



(c) Realice la convolución circular $x[n] \circledast h[n]$, con $h[n] = \{1\ 0\ 1\ 0\}$ en el plano temporal.

(d) Repita (c) usando las TFD $X[k]$ y $H[k]$.

2. Muestre brevemente como se realizaría el calculo de la TFD de $x[n] = \{0\ 1\ 2\ 3\}$ usando el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier visto en clases.

3. Implemente en Matlab el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier en Matlab. Puede asumir que el vector de entrada es de $N = 2^m$ una potencia de dos.

   (a) Compruebe la validez calculando la TFD $x[n]$ de la pregunta 1.

   (b) Considere la siguiente implementación directa (por definición) de la TFD:

```
function Xdft=dftdirect(x)
% Direct computation of the DFT
N=length(x); Q=2*pi/N;
for k=1:N
S=0;
for n=1:N
W(k,n)=exp(-1j*Q*(k-1)*(n-1));
S=S+W(k,n)*x(n);
end
Xdft(k)=S;
end
```

   Usando las funciones `tic` y `toc` de Matlab, compare el rendimiento de su implementación y la de `dftdirect`. Para la generación del vector de entrada de prueba puede utilizar la función `rand`.