Ayudantía 10 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere el filtro FIR con respuesta a impulso $h[n] = u[n] - u[n-4]$.

   (a) Determine el tipo de filtro FIR (I, II, III o IV)

   Solución: La respuesta a impulso puede ser reescrite como $h[n] = \{1, \ 1, \ 1, \ 1\}$. Dado que es simétrica ($h[n] = h[M-n]$) y de orden par ($M = 3$), se trata de un filtro FIR tipo II.

   (b) Determine y bosqueje la respuesta de magnitud $|H(e^{j\omega})|$

   Solución: De la respuesta a impulso:

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] - u[n-4] \qquad (1)\\ &\downarrow \mathcal{Z} \\ H(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (2)\\ &= \frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}} \qquad (3)\\ &\downarrow z = e^{j\omega} \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{1-e^{-4j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \qquad (4) \end{aligned}$$

Bosquejar la magnitud a partir de esta expresión es complicado. Factorizando numerador y denominador por exponenciales complejas:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1-e^{-4j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \qquad (5)\\ &= \frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}\left(\frac{e^{-2j\omega}}{e^{-j\omega/2}}\right) \qquad (6) \end{aligned}$$

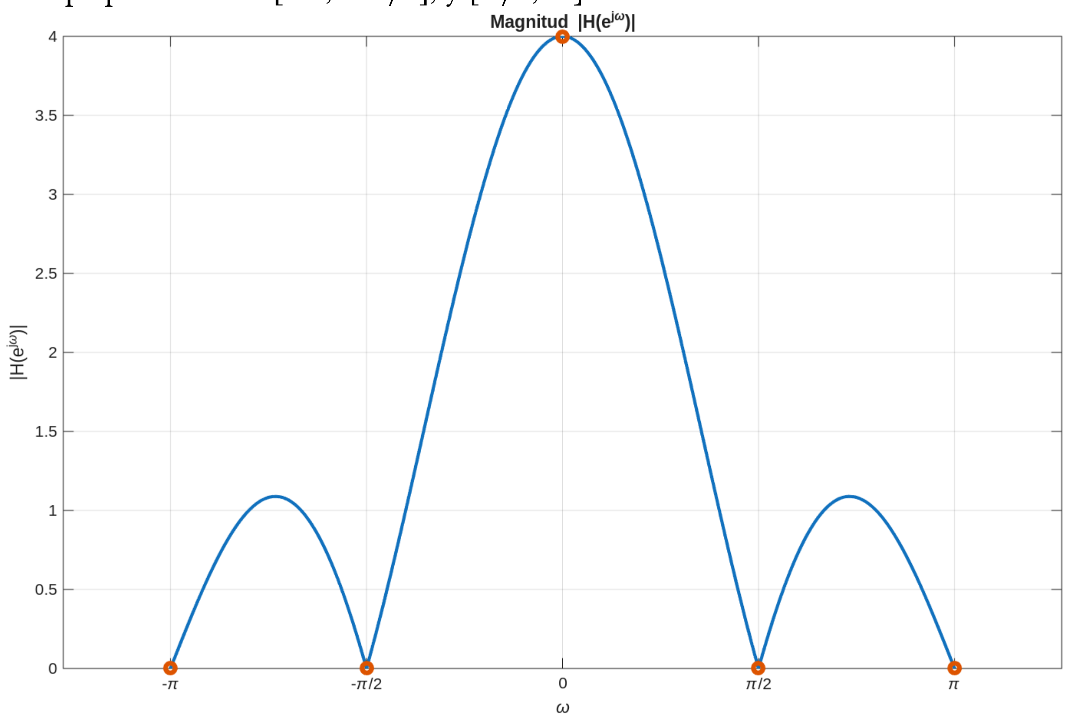
Usando $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}\left(\frac{e^{-2j\omega}}{e^{-j\omega/2}}\right) \qquad (7)\\ &= \frac{2j\sin(2\omega)}{2j\sin(\omega/2)}e^{-\frac{3}{2}j\omega} \qquad (8)\\ &= \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}e^{-\frac{3}{2}j\omega} \qquad (9)\\ &\downarrow |\cdot| \\ |H(e^{j\omega})| &= \left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right|\left|e^{-\frac{3}{2}j\omega}\right| \qquad (10)\\ &= \left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad (11) \end{aligned}$$

Evaluando la expresión se obtienen valores para el bosquejo (para el caso $\omega = 0$ se usa el límite):

$$
\begin{aligned}
&\omega = 0 && \omega = \pm\pi/2 && \omega = \pm\pi && (12)\\
&\left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| \approx \left|\frac{2\omega}{\omega/2}\right| && \left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| = \left|\frac{\sin(\pm\pi)}{\sin(\pm\pi/4)}\right| && \left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| = \left|\frac{\sin(\pm 2\pi)}{\sin(\pm\pi/2)}\right| && (13)\\
&= |4| && = \left|\frac{0}{\sin(\pm\pi/4)}\right| && = \left|\frac{0}{\sin(\pm\pi/2)}\right| && (14)\\
&= 4 && = 0 && = 0 && (15)
\end{aligned}
$$

La respuesta de magnitud tiene un lóbulo principal entre $[-\pi/2,\ \pi/2]$, y dos lóbulos más pequeños entre $[-\pi,\ -\pi/2]$, y $[\pi/2,\ \pi]$:



(c) Determine y bosqueje la respuesta de amplitud $A(e^{j\omega})$

Solución: A partir de la expresión de la respuesta en frecuencia hallada en el punto anterior, se deduce la respuesta de amplitud $A(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} = A(e^{j\omega})e^{j\Psi(\omega)} \tag{16}$$

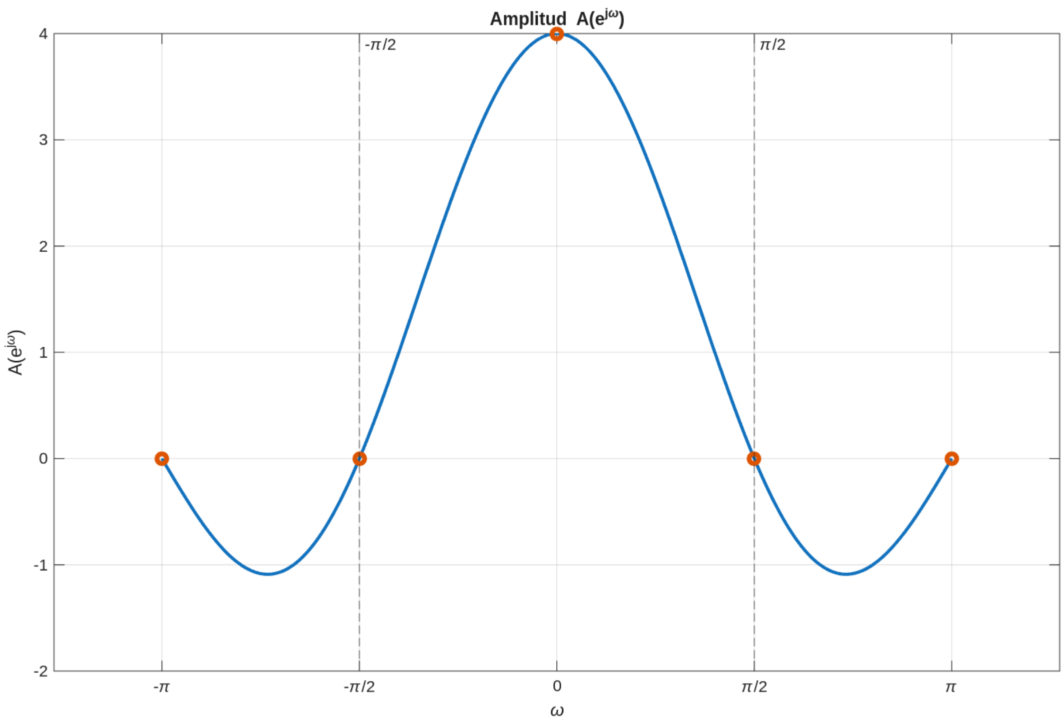
$$\downarrow$$

$$A(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \tag{17}$$

Como $|A(e^j\omega)| = |H(e^{j\omega})|$, los ceros que se vieron en el punto anterior se vuelven a utilizar para el bosquejo. Para dibujar los lóbulos se debe tener en cuenta el signo de la expresión:

$$-\pi < \omega < -\pi/2 \qquad -\pi/2 < \omega < 0 \qquad 0 < \omega < \pi/2 \qquad \pi/2 < \omega < \pi \tag{18}$$

$$\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0 \qquad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} > 0 \qquad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} > 0 \qquad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0 \tag{19}$$



(d) Determine y bosqueje la respuesta de fase $\angle H(e^{j\omega})$

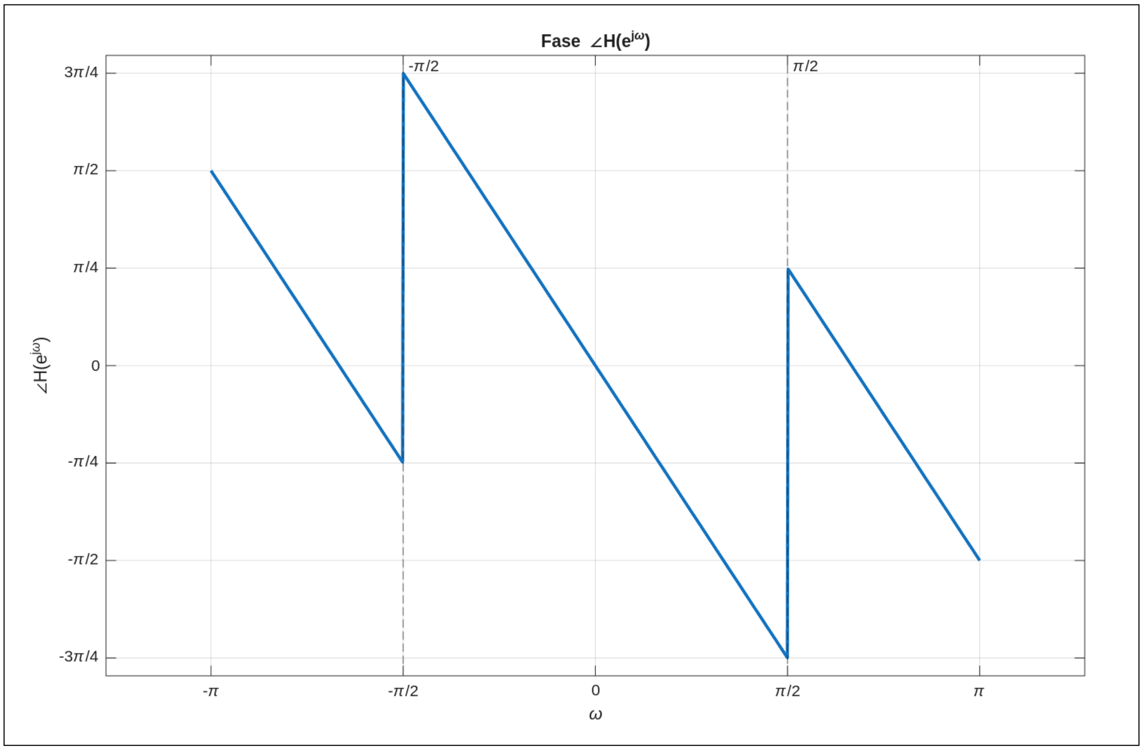
Solución: Tenemos que:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega}\right) \tag{20}$$

$$= \angle\left(\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right) - \frac{3}{2}\omega \tag{21}$$

Cuando $\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0$, su fase toma el valor $\pm\pi$:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\pi - \frac{3}{2}\omega & -\pi < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{3}{2}\omega & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \frac{3}{2}\omega & \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \end{cases} \tag{22}$$



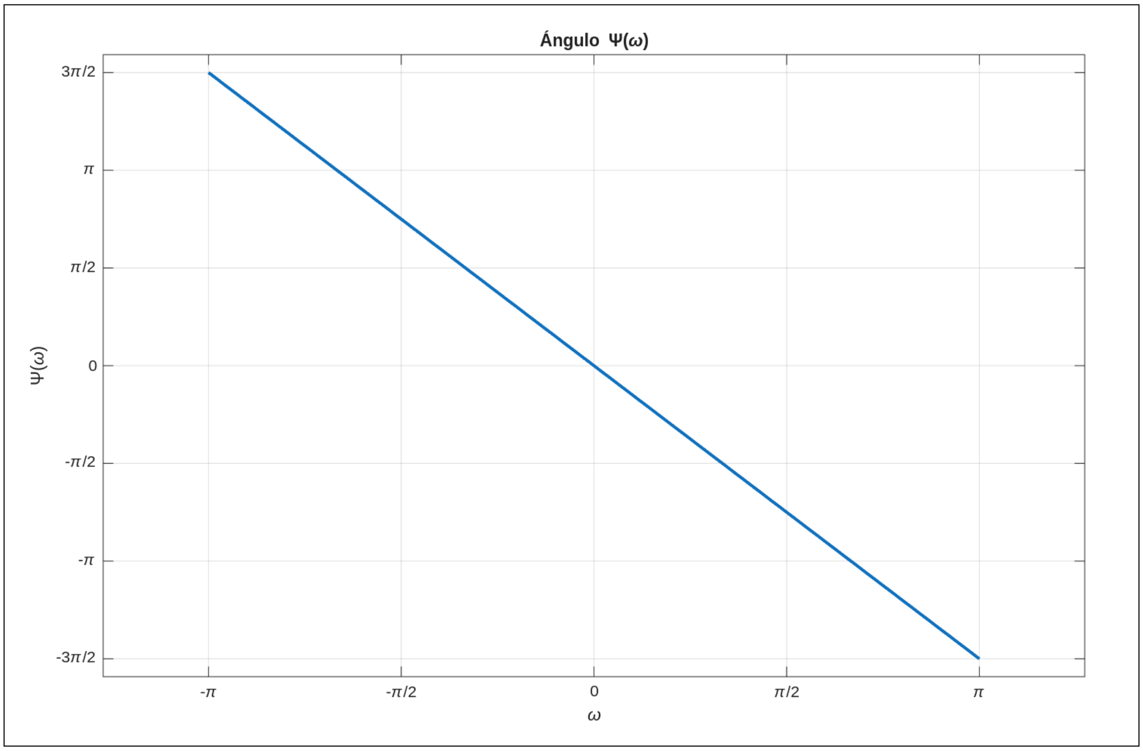
(e) Determine y bosqueje la respuesta de ángulo $\Psi(\omega)$

Solución: La respuesta de ángulo $\Psi(\omega)$ se deduce de $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} = A(e^{j\omega})e^{j\Psi(\omega)} \tag{23}$$

$$\downarrow$$

$$\Psi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega \tag{24}$$



2. Se requiere un filtro digital pasa-alto para procesar una señal de sonido:
   - La señal se muestrea a 48 kHz.
   - Frecuencia borde de la banda de rechazo: $F_s = 10.8$ kHz
   - Frecuencia borde de la banda de paso: $F_p = 12$ kHz
   - Atenuación de banda de rechazo $A_s = 42$ dB
   - Ripple en banda de paso $A_p = 0.2$ dB

Table 10.3 Properties of commonly used windows ($L = M + 1$).

Window name	Side lobe level (dB)	Approx. $\Delta\omega$	Exact $\Delta\omega$	$\delta_p \approx \delta_s$	A_p (dB)	A_s (dB)
Rectangular	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	0.75	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.45	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.055	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.019	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0017	74

(a) Determine las especificaciones absolutas δ_s y δ_p, y las frecuencias normalizadas ω_s y ω_p para el diseño del filtro.

Solución: Para convertir de especificaciones relativas a absolutas usamos:

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \qquad\qquad \delta_s = \frac{1 + \delta_p}{10^{A_s/20}} \tag{25}$$

Reemplazando por los datos se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{10^{0.2/20} - 1}{10^{0.2/20} + 1} & \delta_s &= \frac{1 + 0.0115}{10^{42/20}} & (26) \\ &= 0.0115 & &= 0.0080 & (27) \end{aligned}$$

Se convierte de las frecuencias en Hz, a frecuencia normalizada usando $\omega = 2\pi \frac{F}{F_m}$:

$$\begin{aligned} \omega_s &= 2\pi \frac{F_s}{F_m} & \omega_p &= 2\pi \frac{F_p}{F_m} & (28) \\ &= 2\pi \frac{10.8}{48} & &= 2\pi \frac{12}{48} & (29) \\ &= 0.45\pi & &= 0.5\pi & (30) \end{aligned}$$

(b) Determine la respuesta a impulso ideal para el diseño de un filtro FIR por medio de ventana.

Solución:

Filtro pasa-bajo Recordando que

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad h_{LP}[n] = \frac{\sin(\omega_c[n-\alpha])}{\pi[n-\alpha]} \tag{31}$$

Es la respuesta de un filtro pasa-bajo ideal y su respuesta a impulso. Se deducen las las respuestas a impulso de otros tipos de filtro.

Filtro pasa-banda Un filtro pasa banda ideal con frecuencias de corte ω_{c1} y ω_{c2}, se obtiene restando dos pasabajos:

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_{c1} \\ e^{-j\alpha\omega} & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0 & \omega_{c2} < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} h_{BP}[n] = & \frac{\sin(\omega_{c2}[n-\alpha])}{\pi[n-\alpha]} \\ & - \frac{\sin(\omega_{c1}[n-\alpha])}{\pi[n-\alpha]} \end{aligned} \tag{32}$$

Filtro pasa-alto Un filtro pasa-alto con frecuencia de corte ω_c se obtiene restando un pasa-bajos de un impulso:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\alpha\omega} & \omega_c < |\omega| \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad h_{HP}[n] = \delta[n-\alpha] - \frac{\sin(\omega_c[n-\alpha])}{\pi[n-\alpha]} \tag{33}$$

Para el diseño del filtro, escogemos la frecuencia de corte ω_c en el punto medio de la banda de transición $[\omega_s,\ \omega_p]$:

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{0.45\pi + 0.5\pi}{2} = 0.475\pi \tag{34}$$

La respuesta a impulso ideal a utilizar para el filtro FIR de orden M (por definir) es:

$$h_{HP}[n] = \delta[n - M/2] - \frac{\sin(0.475\pi[n - M/2])}{\pi[n - M/2]} \tag{35}$$

(c) Escoja una ventana apropiada de la tabla y utilice esta para determinar el filtro FIR en Matlab.

Solución:

Selección de ventana Considerando las especificaciones calculadas en (a):

$$\delta_s = 0.0080 \qquad \delta_p = 0.0115 \qquad \omega_s = 0.45 \qquad \omega_p = 0.5$$

Obtenemos un ripple mínimo y lo convertimos a atenuación en dB para la elección de la ventana:

$$\delta = \text{mín}\{\delta_s,\ \delta_p\} \qquad A = -20\log(0.0080) \tag{36}$$

$$= 0.0080 \qquad = 42 \text{ dB} \tag{37}$$

De la columna "A_s (**dB**)" de la tabla escogemos la ventana. Con $A = 42 < 44$ dB, se escoge la ventana de Hann.

Selección de orden M Para hallar el orden $M = L - 1$ se iguala la banda de transición requerida ($\Delta\omega = \omega_p - \omega_s = 0.05\pi$) con la banda producida por la ventana escogida (columna **Exact** $\Delta\omega$ de la tabla). Para la ventana Hann.

Así, tenemos:

$$\Delta\omega = 0.05\pi = \frac{6.2\pi}{L} \longrightarrow M = L - 1 = 123 \tag{38}$$

Ajuste de M Al tener $M = 123$ **impar**, aplicar la ventana produce un filtro **FIR tipo II**. Este tipo de filtro tiene la restricción $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0$. Esto es malo considerando que diseñamos un pasa-alto.

Por esta razón, aumentamos en 1 el orden para obtener $M = 124$ **par**, que produce un filtro **FIR tipo I**, que no tiene esta restricción.

Respuesta a impulso final Considerando lo anterior, la respuesta a impulso del filtro FIR queda como:

$$\begin{aligned} h[n] &= h_{HP}[n] \cdot w_{\text{Hann}}[n] && (39) \\ &= \left(\delta[n-62] - \frac{\sin(0.475\pi[n-62])}{\pi[n-62]} \right) w_{\text{Hann}}[n] && (40) \end{aligned}$$

Con

$$w_{\text{Hann}}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(2\pi n/M\right) & 0 \le n \le M = 124 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad (41)$$

Esto se puede realizar de forma manual en Matlab, o bien, utilizando la función `fir1` de Matlab:

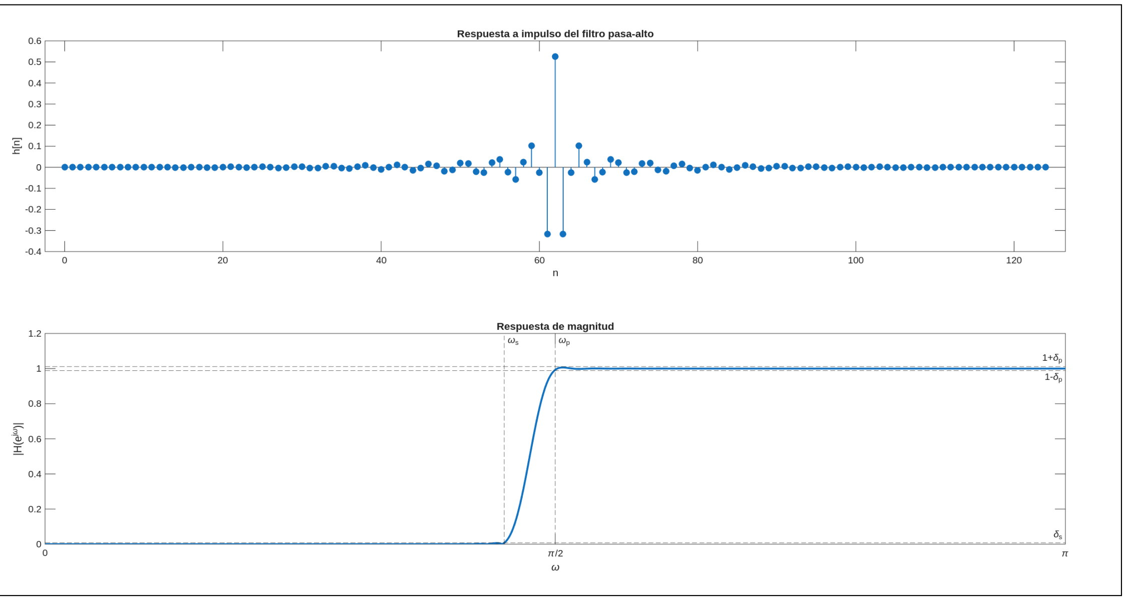
```
M = 124;
wc = 0.475*pi;

% Forma manual
n=0:M;
h_ideal = -sin(wc*(n-M/2))./(pi* (n-M/2));
%h_ideal = sin(pi*(n-M/2))./(pi* (n-M/2))-sin(wc*(n-M/2))./(pi* (n-M/2));
h_ideal(isnan(h_ideal)) = -wc/pi;
h_ideal(M/2+1) = h_ideal(M/2+1) + 1; % M/2+1 porque matlab indexa desde uno.

h_HP = h_ideal.*hann(M+1)';

% Usando fir1
h_fir1 = fir1(M,wc/pi,"high",hann(M+1));
```

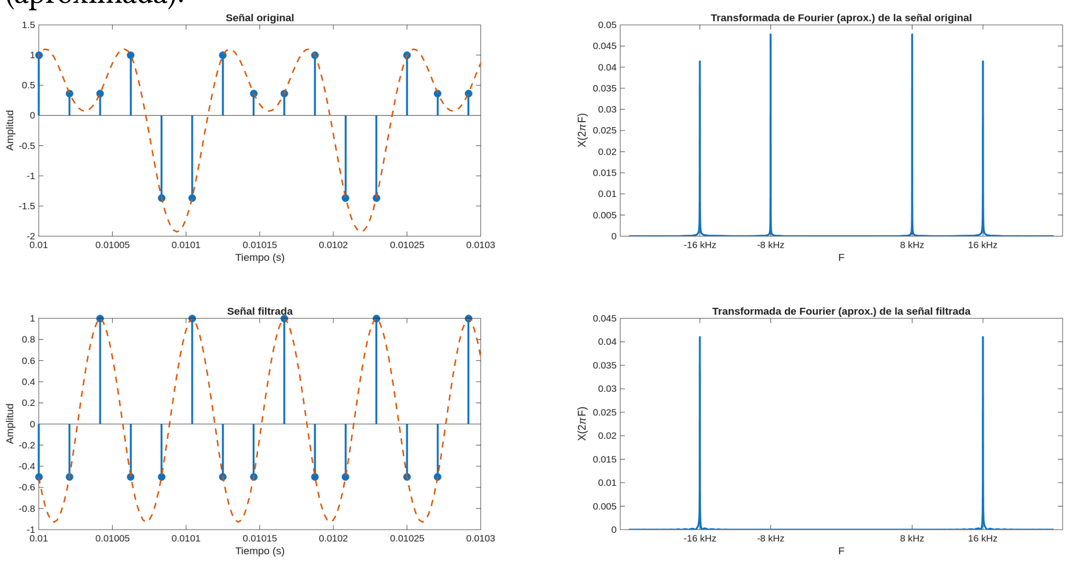
Al graficar respuesta a impulso y magnitud:



(d) Compruebe el filtro en Matlab con una señal de prueba $\cos(2\pi F_1 t) + \sin(2\pi F_2 t)$. (Con $F_1 = 16\text{kHz}$, $F_2 = 8$ kHz)

Solución: Al testear el filtro con la señal de prueba, vemos como la componente de 8 kHz se reduce en amplitud, siendo imperceptible en la señal filtrada. La otra componente se mantiene prácticamente intacta.

Para la señal original y filtrada, se grafica la forma de onda y transformada de Fourier (aproximada):




```
%% 2 (d)

F1 = 16000; F2 = 8000;
% Señal continua
x_cont = @(t) cos(2*pi*F1*t) + sin(2*pi*F2*t);
```

```
% Muestreo
Fm = 48000; % Frec. muestreo
T = 1/Fm;
nT = 0:T:0.1;
x_muestreada = x_cont(nT);

x_filtrada = filter(h_HP, 1, x_muestreada);

% Aproximacion de TFTC
f_m = abs(fftshift(fft(x_muestreada)*T));
f_f = abs(fftshift(fft(x_filtrada)*T));

% % Ploteamos una porción de la señal
n = 0:1000;
x_muestreada = x_muestreada(n+1);
x_filtrada = x_filtrada(n+1);

x_m_dac = interp(x_muestreada, 10);
x_f_dac = interp(x_filtrada, 10);
n_dac = (0:length(x_m_dac)-1) / 10;

% ploteo fourier
N = length(f_m);
F = (-N/2:N/2-1)*(1/(N*T));

figure;
% Ploteo de la señal filtrada
subplot(2,2,1)
stem(n*T, x_muestreada, 'filled', 'LineWidth', 2); hold on
plot(n_dac*T, x_m_dac, '--', Linewidth=1.5)
xlim([0.01 0.0103])
xlabel("Tiempo (s)")
ylabel("Amplitud")
title("Señal original")

subplot(2,2,2)
plot(F, f_m, LineWidth=2)
title("Transformada de Fourier (aprox.) de la señal original")
xlabel("F")
ylabel("X(2{\pi}F)")
xticks([-16 -8 8 16]*1000)
xticklabels(["-16 kHz" "-8 kHz" "8 kHz" "16 kHz"])

subplot(2,2,3)
stem(n*T, x_filtrada,'filled', LineWidth=2); hold on
plot(n_dac*T, x_f_dac, '--', Linewidth=1.5)
xlim([0.01 0.0103])
xlabel("Tiempo (s)")
ylabel("Amplitud")
title('Señal filtrada')
```

```
subplot(2,2,4)
plot(F, f_f, LineWidth=2)
title("Transformada de Fourier (aprox.) de la señal filtrada")
xlabel("F")
ylabel("X(2{\pi}F)")
xticks([-16 -8 8 16]*1000)
xticklabels(["-16 kHz" "-8 kHz" "8 kHz" "16 kHz"])
```