

## Ayudantía 1 - Procesamiento Digital de Señales

1. Para las siguientes señales, identifique:

- Si son continuas, tiempo discreto o digitales.
- Tipo de soporte.
- Si son periódicas.

(a)  $x_1(t) = \sin(3t)$

**Solución:** La señal depende del parámetro  $t$  y toma valores continuos. Por lo tanto, la señal es continua. Además  $\sin(3t)$  es periódica. Es de soporte infinito.

(b)  $x_2[n] = 0.4^n u[n]$

**Solución:** La señal está definida para  $n \in \mathbb{Z}$ , no puede ser continua. A medida que  $n > 0$  crece, el valor de la señal se vuelve arbitrariamente pequeño, por lo que no puede ser representada en cuantos (requeriría bits infinitos), no puede ser digital; la señal es tiempo discreto.

La señal  $x_2[n]$  es mayor a cero para todo  $n$  positivo, y  $x_2[n]$  es cero para  $n$  negativo. Es de soporte positivo.

La señal no es periódica.

(c)  $x_1(t)$ , si se muestrea con  $T = 0.1$

**Solución:** Al muestrear se obtiene:

$$x_3[n] = x_1(nT)|_{T=0.1} = \sin(0.3n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

La señal es ahora de tiempo discreto.

La señal mantiene su soporte.

A primera vista puede parecer periódica. Recordemos que esto se cumple si existe un  $m$  tal que para cualquier  $n$ :

$$x_3[n] = x_3[n + m] \quad (2)$$

Al reemplazar por la expresión obtenida:

$$\sin(0.3n) = \sin(0.3n + 0.3m) \quad (3)$$

$\sin$  es  $2\pi$  periódica, por lo que debe existir  $m$  tal que:

$$0.3m = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

El lado izquierdo de la ecuación es racional, mientras que  $\pi$  es irracional, es decir no existen  $m$  y  $k$  que satisfagan la ecuación, por lo tanto, la señal no es periódica.

2. Se tiene un sistema tiempo discreto cuya respuesta a impulso es  $h[n] = (0.5)^n u[n]$ . Usando convolución discreta, calcule la salida del sistema  $y[n]$  si se somete a una entrada  $x[n] = u[n] - u[n - 4]$ .

**Solución:** Conociendo la respuesta a impulso y entrada al sistema, la respuesta viene dada por la expresión:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Desarrollando mediante la definición de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (5)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-4])h[n-k] \quad (6)$$

Notemos que  $u[k] - u[k-4]$  es uno para  $0 \leq k \leq 3$ , y cero en cualquier otro caso. Podemos simplificar la serie a una suma finita.

$$y[n] = \sum_{k=0}^3 h[n-k] \quad (7)$$

$$= \sum_{k=0}^3 (0.5)^{n-k} u[n-k] \quad (8)$$

$$= (0.5)^n u[n] + (0.5)^{n-1} u[n-1] + (0.5)^{n-2} u[n-2] + (0.5)^{n-3} u[n-3] \quad (9)$$

3. Calcular la transformada Z, región de convergencia (RC) e identificar polos de las señales a continuación. Bosquejar RC y polos.

(a)  $(-0.8)^n u[n]$ , utilizando definición de la transformada Z.

**Solución:** Al ser de soporte positivo, podemos utilizar la transformada Z unilateral:

$$\mathcal{Z}\{(-0.8)^n u[n]\} = \mathcal{Z}^+\{(-0.8)^n\} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-0.8)^n z^{-n} \quad (11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-0.8z^{-1})^n \quad (12)$$

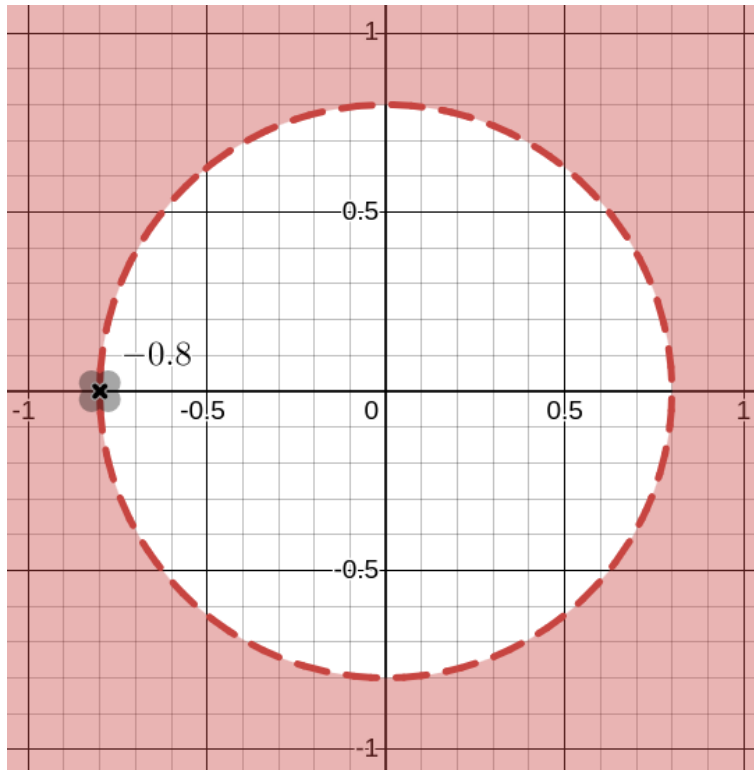
Aplicando la identidad  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ , obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-0.8z^{-1})^n = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1}} \quad (13)$$

Para la región de convergencia,  $|-0.8z^{-1}| = |0.8z^{-1}| < 1$ . Es decir  $|z| > 0.8$ . La RC es el exterior de una circunferencia de radio 0.8.

Existe un único polo cuando  $1 + 0.8z^{-1} = 0$ . Es decir cuando  $z = -0.8$ .

Se bosqueja RC y el polo:



(b)  $\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n] + (0.5)^n u[n-3]$ , utilizando todos sus conocimientos.

**Solución:** Para calcular la transformada Z en este caso aplicamos linealidad. Primero calculamos  $\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\}$ . Recordemos que en general:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\omega n)u[n]\} = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2 \cos(\omega)z + 1} \quad (14)$$

Con RC  $|z| > 1$ .

En nuestro caso  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , y  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Por lo que:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\} = \frac{z \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} \quad (15)$$

Ahora buscamos  $\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\}$ . Sabemos que:

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (16)$$

Con RC  $|z| > |a|$ . Podemos aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo para obtener la transformada Z. Sin embargo, para esto debemos preocuparnos que todas las partes de la expresión tengan el desplazamiento:

$$\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\} = \mathcal{Z}\{(0.5)^3 (0.5)^{n-3} u[n-3]\} \quad (17)$$

$$= (0.5)^3 \mathcal{Z}\{(0.5)^{n-3} u[n-3]\} \quad (18)$$

$$= (0.5)^3 z^{-3} \mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n]\} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{8z^3} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2(z - 0.5)} \quad (21)$$

Finalmente, sumando ambas partes tenemos la transformada Z completa:

$$\frac{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2(z - 0.5)} \quad (22)$$

Con RC  $|z| > 0.5$  Para la región de convergencia y polos, consideramos ambas partes. La RC final será la intersección de ambas RC. Ambas son el exterior de una circunferencia. La RC será el exterior de la circunferencia más grande:  $|z| > 1$ .

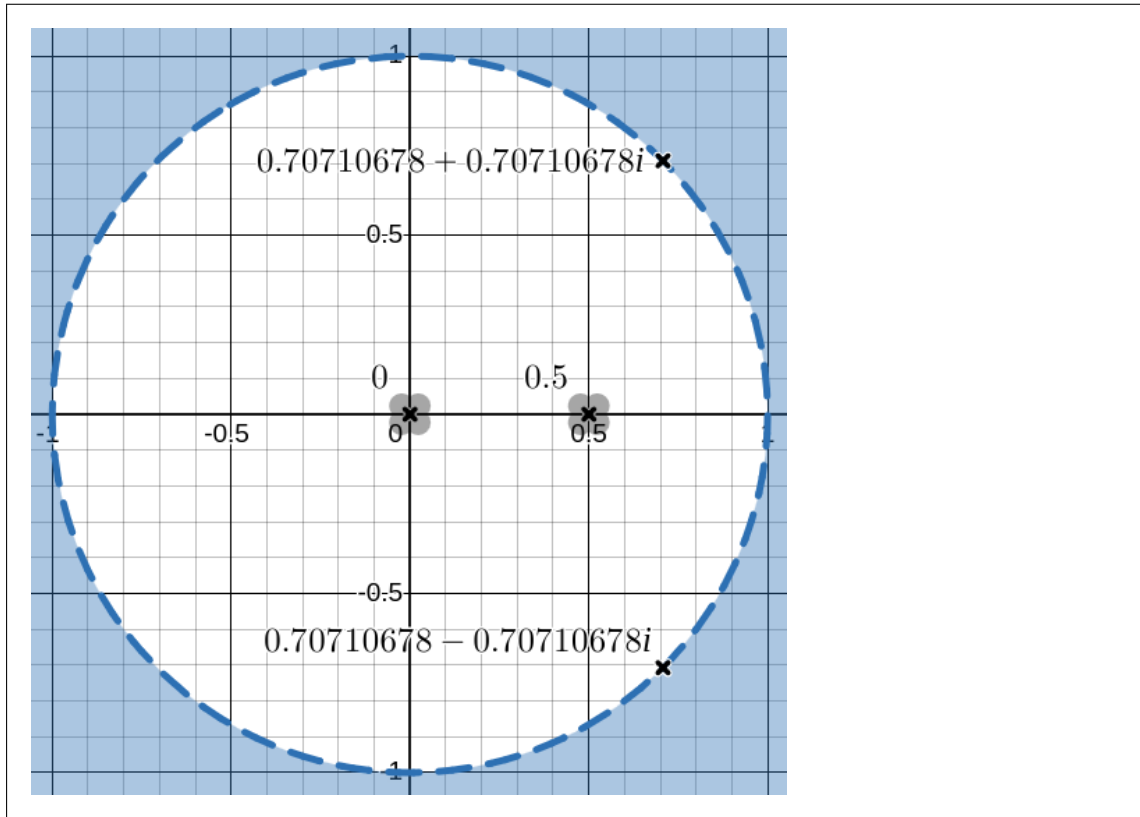
Los polos vienen dados por:

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j \quad (23)$$

$$z - 0.5 = 0 \Rightarrow p_3 = 0.5 \quad (24)$$

$$z^2 \Rightarrow p_{4,5} = 0 \quad (25)$$

Al bosquejar RC y polos queda:



4. Un sistema cumple:

$$y[n] - 0.6y[n-1] = x[n], \quad y[-1] = 1 \quad (26)$$

(a) Obtener  $H(z)$ .

**Solución:** Dado que tenemos una ecuación de diferencias con condición inicial, utilizamos transformada Z unilateral para encontrar función de transferencia y respuesta del sistema. La condición inicial aparece al aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

$$y[n] - 0.6y[n-1] = x[n] \quad (27)$$

$$Y(z) - 0.6z^{-1}Y(z) - 0.6y[-1] = X(z) \quad (28)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{z}{z-0.6}}_{H(z)} X(z) + \underbrace{\frac{0.6z}{z-0.6}y[-1]}_{\text{Respuesta natural}} \quad (29)$$

$$(30)$$

(b) Calcular la respuesta  $y[n]$  para entrada escalón usando transformada Z.

**Solución:** Para calcular la respuesta para entrada escalón, sustituimos la entrada por su transformada Z, condición inicial y aplicamos transformada Z.

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.6} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{0.6z}{z-0.6} \quad (1) \quad (31)$$

$$= z \left[ \frac{z}{(z-0.6)(z-1)} \right] + \frac{0.6z}{z-0.6} \quad (32)$$

$$= z \left[ \frac{c_1}{z-0.6} + \frac{c_2}{z-1} \right] + \frac{0.6z}{z-0.6} \quad (33)$$

$$c_1 = \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=0.6} = -1.5 \quad (34)$$

$$c_2 = \left. \frac{z}{z-0.6} \right|_{z=1} = 2.5 \quad (35)$$

$$Y(z) = -0.9 \frac{z}{z-0.6} + 2.5 \frac{z}{z-1} \quad (36)$$

$$y[n] = -0.9(0.6)^n u[n] + 2.5u[n], \quad n \geq 0 \quad (37)$$

5. Dada la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{z}{z-0.6}$$

(a) Encontrar respuesta a impulso del sistema.

(b) Analizar causalidad y estabilidad

**Solución:** Tenemos la función de transferencia, y se reconoce que corresponde a un escalon con un a exponencial. Sin embargo no tenemos la RC. La respuesta impulso, causalidad y estabilidad dependerán de la RC.

**Caso (i)** RC:  $|z| > 0.6$  Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = 0.6^n u[n] \quad (38)$$

El sistema es estable (circunferencia unitaria dentro de la RC) y causal.

**Caso (ii)** RC:  $|z| < 0.6$  Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = -0.6^n u[-n-1] \quad (39)$$

El sistema es inestable (circunferencia unitaria fuera de la RC) y anticausal.

(c) ¿Que ocurriría si el polo estuviera en  $z = 1.2$ ?

**Solución:** Suponemos nueva F. de T.:

$$H(z) = \frac{z}{z - 1.2} \quad (40)$$

**Caso (iii)** RC:  $|z| > 1.2$  Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = 1.2^n u[n] \quad (41)$$

El sistema es inestable (circunferencia unitaria fuera de la RC) y causal.

**Caso (iv)** RC:  $|z| < 1.2$  Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = -1.2^n u[-n - 1] \quad (42)$$

El sistema es estable (circunferencia unitaria dentro de la RC) y anticausal.

**Observación:** Al mover el polo hacia 1.2, la estabilidad cambia, no así la causalidad.

6. Se tiene un sistema tiempo invariante descrito por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} T[k + 1] &= a_0 T[k] + x[k]^2 \\ T_m[k] &= T[k - d] \end{aligned}$$

Donde  $x[k]$  es la entrada, y  $T_m[k]$  es la salida.

- (a) ¿Es este un sistema lineal? Si no es así, obtenga un modelo linealizado para una entrada constante 1.

**Solución:** El sistema no es lineal, debido al término  $x[k]^2$ . Con entrada constante  $x_e = 1$  y asumiendo estado estacionario, tenemos:

$$T[k + 1] = T[k] = T_e \quad (43)$$

Luego:

$$T[k + 1] = a_0 T[k] + x[k]^2 \quad (44)$$

$$T_e = a_0 T_e + x_e^2 \quad (45)$$

$$T_e = a_0 T_e + 1 \quad (46)$$

$$\Rightarrow T_e = \frac{1}{1 - a_0} \quad (47)$$

$T_m$  es simplemente  $T$  tras un retardo, su valor en estado estacionario es el mismo.

$$T_{me} = \frac{1}{1 - a_0} \quad (48)$$

La variables utilizando el punto de operación quedan decritas como:

$$x[k] = x_e + \Delta x[k] \quad (49)$$

$$T[k] = T_e + \Delta T[k] \quad (50)$$

$$T_m[k] = T_{me} + \Delta T_m[k] \quad (51)$$

Con (la primera ecuación se linealiza, la segunda ecuación se toma tal cual pues ya es lineal):

$$\Delta T[k + 1] = c_1 \Delta T[k] + c_2 \Delta x[k] \quad (52)$$

$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k - d] \quad (53)$$

Buscamos los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$ . Consideramos la función a partir de la primera ecuación de estado:

$$f(T, x) = a_0 T + x^2 \quad (54)$$

$$c_1 = \left. \frac{\partial}{\partial T} f(T, x) \right|_{(T_e, x_e)} = a_0 \quad (55)$$

$$c_2 = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(T, x) \right|_{(T_e, x_e)} = 2x_e = 2 \quad (56)$$

Por lo que:

$$\Delta T[k + 1] = a_0 \Delta T[k] + 2\Delta x[k] \quad (57)$$

$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k - d] \quad (58)$$

(b) Encuentre la función de transferencia del sistema.

**Solución:** La F. de T. del sistema linealizado se puede expresar como:

$$H(z) = \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta X(z)} = \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta T(z)} \cdot \frac{\Delta T(z)}{\Delta X(z)} \quad (59)$$

Luego utilizamos transformada Z en el sistema linealizado para encontrar las expresiones que buscamos:

$$\Delta T[k + 1] = a_0 \Delta T[k] + 2\Delta x[k] \quad (60)$$

$$z\Delta T(z) = a_0 \Delta T(z) + 2\Delta X(z) \quad (61)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T(z)}{\Delta X(z)} = \frac{2}{z - a_0} \quad (62)$$



$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k - d] \quad (63)$$

$$\Delta T_m(z) = z^{-d} \Delta T(z) \quad (64)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta T(z)} = z^{-d} \quad (65)$$

Finalmente:

$$H(z) = \frac{2}{z - a_0} \cdot z^{-d} = \frac{2}{z^d(z - a_0)} \quad (66)$$

(c) Encuentre la salida ante una entrada  $1 + u[k]$  y  $d = 2$ .

**Solución:** Para la respuesta utilizamos el sistema linealizado considerando el punto de operación. Tenemos para la entrada:

$$x[k] = x_e + \Delta x[k] = 1 + u[k] \quad (67)$$

$$1 + \Delta x[k] = 1 + u[k] \quad (68)$$

$$\Rightarrow \Delta x[k] = u[k] \quad (69)$$

En cuanto a la salida:

$$T_m[k] = T_{me} + \Delta T_m[k] \quad (70)$$

$$= \frac{1}{1 - a_0} + \Delta T_m[k] \quad (71)$$

Obtenemos  $\Delta T_m[k]$ , mediante la función de transferencia con  $d = 2$ .

$$\Delta T_m(z) = H(z) \Delta X(z) \quad (72)$$

$$= \frac{2}{z^2(z - a_0)} \cdot \frac{z}{z - 1} \quad (73)$$

$$= \frac{2}{z(z - a_0)(z - 1)} \quad (74)$$

$$= \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z - a_0} + \frac{c_3}{z - 1} \quad (75)$$

$$c_1 = \left. \frac{2}{(z - a_0)(z - 1)} \right|_0 = \frac{2}{a_0} \quad (76)$$

$$c_2 = \left. \frac{2}{z(z - 1)} \right|_{a_0} = \frac{2}{a_0^2 - a_0} \quad (77)$$

$$c_3 = \left. \frac{2}{z(z - a_0)} \right|_1 = \frac{2}{1 - a_0} \quad (78)$$

Finalmente, tenemos que:

$$\Delta T_m(z) = \frac{2}{a_0} \frac{1}{z} + \frac{2}{a_0^2 - a_0} \frac{1}{z - a_0} + \frac{2}{1 - a_0} \frac{1}{z - 1} \quad (79)$$

$$= z^{-1} \frac{2}{a_0} + z^{-1} \frac{2}{a_0^2 - a_0} \frac{z}{z - a_0} + z^{-1} \frac{2}{1 - a_0} \frac{z}{z - 1} \quad (80)$$

$$\Delta T_m[k] = \frac{2}{a_0} \delta[k - 1] + \frac{2}{a_0^2 - a_0} a_0^{k-1} u[k - 1] + \frac{2}{1 - a_0} u[k - 1] \quad (81)$$

Y la respuesta completa sería:

$$T_m[k] = T_{me} + \Delta T_m[k] \quad (82)$$

$$= \frac{1}{1 - a_0} + \frac{2}{a_0} \delta[k - 1] + \frac{2}{a_0^2 - a_0} a_0^{k-1} u[k - 1] + \frac{2}{1 - a_0} u[k - 1] \quad (83)$$