Universidad de Concepcíon
Facultad de Ingeniería
Depto. de Ingeniería Eléctrica

Ayudantía 6 - Procesamiento Digital de Señales

1. Determinar la TFD de $x[n] = 5(0.8)^n$, $0 \leq n \leq 15$.

Solución: Con muestras $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 15$, tenemos $N = 16$ muestras. Por definición:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} && (1)\\
&= \sum_{n=0}^{15} 5(0.8)^n e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} && (2)\\
&= 5 \sum_{n=0}^{15} \left(0.8 e^{-j\frac{2\pi}{16}k}\right)^n && (3)\\
&= 5 \frac{1 - 0.8 e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{16}}\cancel{16}k}}{1 - 0.8 e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} && (4)\\
&= 5 \frac{1 - 0.8}{1 - 0.8 e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} && (5)\\
&= 5 \frac{0.2}{1 - 0.8 e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} && (6)\\
&= \frac{1}{1 - 0.8 e^{-j\frac{2\pi}{16}k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 && (7)
\end{aligned}
$$

2. Sea $x[n]$ una señal discreta real, con $X[k]$ TFD de N puntos de la señal. Muestre que:

   (a) $X[0]$ es real.

Solución: Por definición de la TFD:

$$
X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(0)n} \quad (8)
$$

$$
X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (9)
$$

Como $x[n]$ es real, la suma es real y $X[0]$ es real.

   (b) $X[N/2]$ es real si N es par.

Solución: Por definición:

$$
\begin{aligned}
X[N/2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2})n} && (10)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\pi n} && (11)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\Big(\cos(\pi n) - j\sin(\pi n)\Big) && (12)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\Big((-1)^n - 0\Big) && (13)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](-1)^n && (14)
\end{aligned}
$$

$x[n](-1)^n$ es real. Por lo tanto la suma es real y $X[N/2]$ es real.

(c) $X[N-k] = X^*[k]$, con $1 \leq k \leq N-1$

Solución:

$$
\begin{aligned}
X[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} && (15)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(N)n} e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} && (16)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} && (17)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} && (18)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* && (19)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* \quad (x[n] \text{ real}) && (20)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* && (21)\\
&= X^*[k] && (22)
\end{aligned}
$$

3. Sea $x_c(t) = 5e^{-10t}\sin(20\pi t)u(t)$

(a) Determine la TFTC $X_c(j\Omega)$ de la señal.

Solución:

$$x_c(t) = 5e^{-10t}\sin(20\pi t)u(t) \tag{23}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$X_c(s) = 5\left.\frac{20\pi}{s^2 + (20\pi)^2}\right|_{s+10} \tag{24}$$

$$X_c(s) = 5\frac{20\pi}{(s+10)^2 + 400\pi^2} \tag{25}$$

$$\Big\downarrow s = j\Omega$$

$$X_c(j\Omega) = \frac{100\pi}{(j\Omega + 10)^2 + 400\pi^2} \tag{26}$$

(b) Muestre como se puede aproximar la TFTC usando la TFD, al muestrear la señal con un periodo de muestreo T.

Solución: Por definición:

$$X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt \tag{27}$$

$$\Big\downarrow x_c \text{ es de soporte positivo}$$

$$= \int_{0}^{\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt \tag{28}$$

Muestreando la señal en $t = nT$ podemos aproximar la integral como una suma de Riemann. El diferencial dt pasa a ser el periodo de muestreo T.

$$X_c(j\Omega) \approx \sum_{n=0}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT}\cdot T \tag{29}$$

Despreciamos los $x_c(nT)$ para valores de $n \geq N$. Convertimos la serie en una suma finita.

$$X_c(j\Omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT)e^{-j\Omega nT}\cdot T \tag{30}$$

Aún tenemos una suma de funciones continuas en Ω. Muestreando esta variable se obtiene una suma discreta de señales discretas. Teniendo en cuenta que la frecuencia es periódica (dado que se muestreó en el tiempo), muestreamos la frecuencia tal que la exponencial recorra el intervalo $-\pi$ a π y se obtenga la expresión de la TFD. Muestreando en $\Omega = \frac{2\pi}{NT}k$

$$X_c(j\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{NT}k} \approx \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT)e^{-j\frac{2\pi}{NT}knT} \cdot T \tag{31}$$

$$\approx T\sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = TX[k] \tag{32}$$

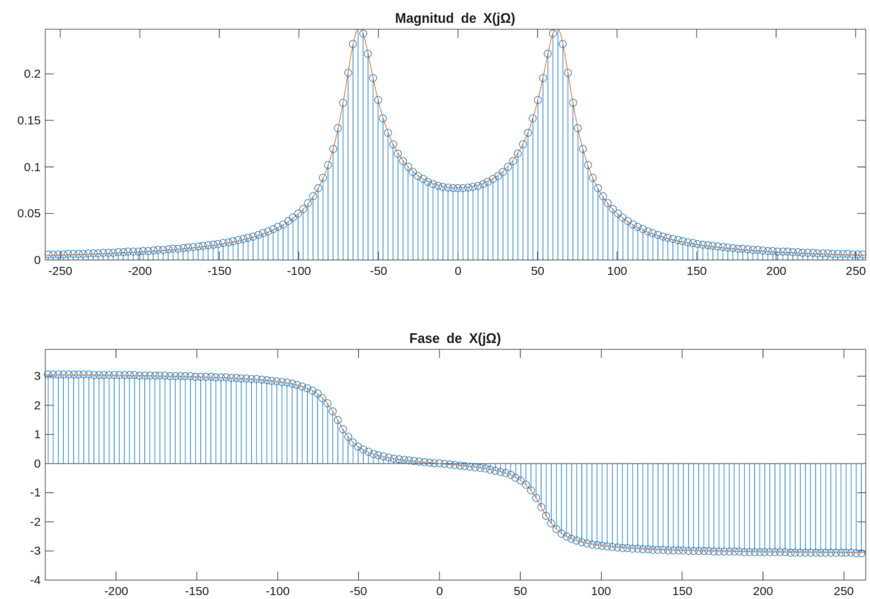
Con $X[k]$ TFD de N puntos de $x[n] = x_c(nT)$. La precisión de la aproximación depende de la frecuencia de muestreo $1/T$ (entra en juego el teorema de nyquist, aliasing), y la cantidad de muestras N.

(c) Use el comando `fft` Matlab para calcular la aproximación, y compare la aproximación con la expresión analítica en un gráfico.

Solución: Para los gráficos se toma en cuenta la el muestreo que se realiza en la frecuencia. Se utiliza la sustitución $\Omega = \frac{2\pi}{NT}k$.
Tambien hay que notar que al muestrear la señal la frecuencia se hace periódica. Por esto, las muestras $k > N/2$ son más bien un reflejo de las frecuencias con $k < 0$. Para solucionar esto se ocupa `fftshift` que reordena la TFD automáticamente y la centra en torno a $k = 0$. Luego para graficar se debe ocupar $N/2 < k < N/2 - 1$.

```
%% 3
% Expresión analítica
X = @(Om) 100*pi./( (1j*Om+10).^2 + 400*pi^2 );

% Señal continua
xc = @(t) 5.*exp(-10*t).*sin(20*pi*t);

% Parámetros para el muestreo
Fs = 200;
T = 1/Fs;
N = 400;
n = 0:N-1;

X_dft = fft(xc(n*T));

X_approx = T * fftshift(X_dft);

% Muestreo de la frecuencia
k = -N/2:N/2-1;
Om_approx = 2*pi/(N*T)*k;
```

```
Om_cont = linspace(Om_approx(1), Om_approx(end), 2000);

figure;
subplot(2,1,1)
stem(Om_approx, abs(X_approx)); hold on
plot(Om_cont, abs(X(Om_cont)));
title("Magnitud de X(j\Omega)");
subplot(2,1,2)
stem(Om_approx, angle(X_approx)); hold on
plot(Om_cont, angle(X(Om_cont)));
title("Fase de X(j\Omega)");
```



4. Sea una señal periódica $\tilde{x}_c(t)$, con periodo $T_0 = 5$ dada por $\tilde{x}_c(t) = e^{-t}$, $0 \leq t \leq 5$.

   Los coeficientes de Fourier de la señal vienen dados por:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}_c(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} = \frac{1 - e^{-5}}{5 + j2\pi k}$$

   (a) Muestre como se pueden aproximar los coeficientes usando la TFD, al muestrear la señal con un periodo de muestreo T.

Solución: De la definición de los coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}_c(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} \tag{33}$$

Particionando el intervalo $[0, T_0]$ en N subintervalos de longitud $T = T_0/N$ (se muestrea la señal en $t = nT$), se aproxima la integral como una sumatoria. (Notar que $T_0 = NT$)

$$c_k \approx \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_c(nT) e^{-j\frac{2\pi}{NT}knT} \cdot T \tag{34}$$

$$c_k \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_c(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} X[k] \tag{35}$$

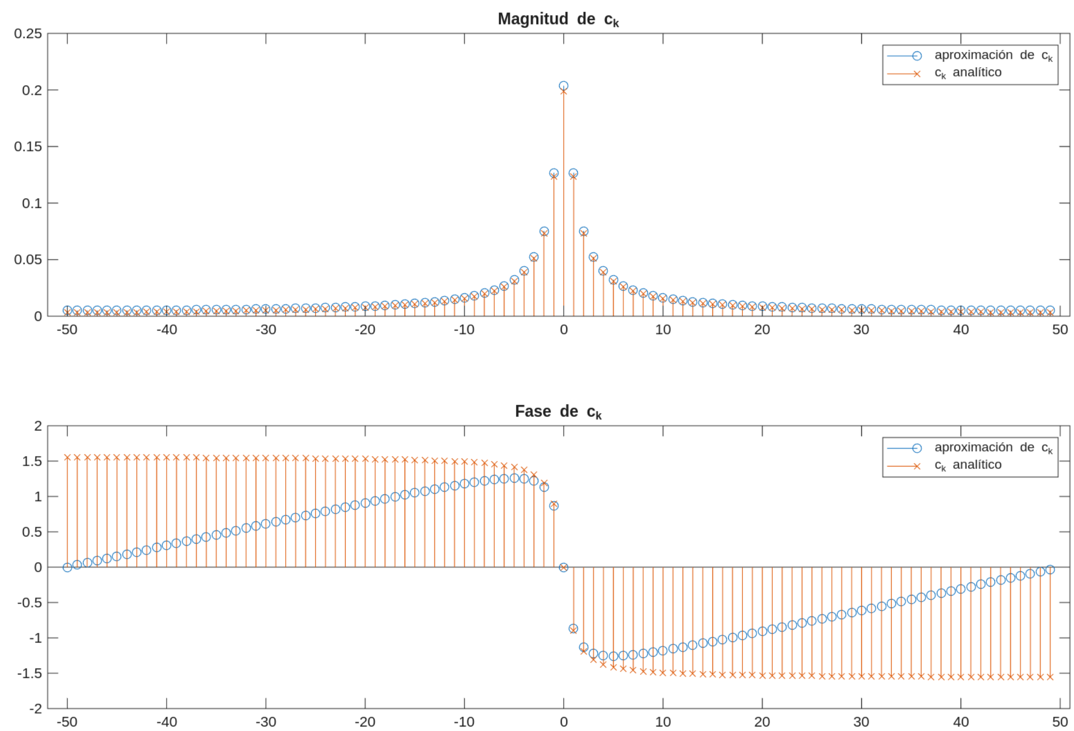
Con $X[k]$ TFD de N muestras de $x[n] = \tilde{x}_c(nT)$. La aproximación mejora a medida que N aumenta (y $T = T_0/N$ disminuye). Notar también, que con N muestras se obtienen los coeficientes N ($0 \leq k \leq N-1$).

(b) Aproxime los coeficientes usando el comando `fft` en Matlab. Compare la aproximación con la expresión analítica de los coeficientes en un gráfico.

Solución:

```
%% 4 Aproximación de coeificientes de fourier mediante TFD
% Expresión analítica
c = @(k) (1-exp(-5))./(5+2j*pi*k);

% Señal continua
xc = @(t) exp(-t); % 0<t<5
T0 = 5;

% Muestreo
N = 100;
T = T0/N;
n = 0:N-1;

% Approximacion de coeficientes
X_dft = fft(xc(n*T));
c_approx = fftshift(X_dft)/N;
k = -N/2:N/2-1;

figure;
subplot(2,1,1)
```

```
stem(k, abs(c_approx)); hold on
stem(k, abs(c(k)), "x");
legend("aproximación de c_k", "c_k analítico")
title("Magnitud de c_k")
%xlim([-N/4, N/4])
subplot(2,1,2)
stem(k, angle(c_approx)); hold on
stem(k, angle(c(k)), "x");
legend("aproximación de c_k", "c_k analítico")
title("Fase de c_k");
%xlim([-N/4, N/4])
```



5. Considere la señal real:

$$x[n] = \begin{cases} \cos(0.25\pi n), & 0 \leq n \leq 99 \\ 0. & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine la TFTD $X(e^{j\omega})$.

Solución: Por definición:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{36}$$
$$= \sum_{n=0}^{99} \cos(0.25\pi n) \tag{37}$$
$$= \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{2}\left(e^{j0.25\pi n} + e^{-j0.25\pi n}\right) e^{-j\omega n} \tag{38}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{99} e^{j(0.25\pi-\omega)n} + \sum_{n=0}^{99} e^{-j(0.25\pi+\omega)n}\right) \tag{39}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(0.25\pi-\omega)100}}{1-e^{j(0.25\pi-\omega)}} + \frac{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)100}}{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)}}\right) \tag{40}$$

(b) Calcule la TFD de $N = 100$ puntos de la señal.

Solución: Existe una propiedad para calcular la TFD a partir de la TFTD. Veremos como y cuando se puede utilizar.
Por definición:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{41}$$
$$= \sum_{n=0}^{99} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{100}kn} \tag{42}$$

Notemos que la señal $x[n]$ es 0 para $n < 0$ y $n > 99$. Podemos añadir terminos a la suma sin cambiar su valor.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{99} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{100}kn} \tag{43}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{100}kn} \tag{44}$$

La serie es sospechosamente similar a la expresión de la TFTD. En efecto, en lugar de ω está $2\pi k/100$. La expresión es un muestreo de $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 2\pi k/100$:

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{100}kn} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{100}k} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(0.25\pi-\omega)100}}{1-e^{j(0.25\pi-\omega)}} + \frac{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)100}}{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)}}\right)_{\omega=\frac{2\pi}{100}k} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{100})100}}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{100})}} + \frac{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})100}}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}}\right) \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(25\pi-2\pi k)}}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{100})}} + \frac{1-e^{-j(25\pi+2\pi k)}}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}}\right) \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{100})}} + \frac{2}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}}\right) \tag{49}$$

$$= \frac{1}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{100})}} + \frac{1}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}} \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

Esta es una propiedad de la TFD. En resumen:

Sea $x[n]$, con $X(e^{j\omega})$ su TFTD. Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, $n \geq N$ entonces la TFD de N puntos viene dado por:

$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N} \tag{52}$$

Esto también aplica en el sentido inverso. Se puede usar la TFD para obtener muestras de la TFTD, si se cumple $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$.

Por otro lado si $x[n] \approx 0$ para los n mencionados, la TFD **aproxima** muestras de la TFTD.

(c) Repita con $N = 200$.

Solución: Podemos usar la propiedad en el punto anterior.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{199} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{200}kn} \tag{53}$$

Como $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq 200$, podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/200} && (54)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(0.25\pi-\omega)100}}{1-e^{j(0.25\pi-\omega)}} + \frac{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)100}}{1-e^{-j(0.25\pi+\omega)}}\right)_{\omega=\frac{2\pi}{200}k} && (55)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{200})100}}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{200})}} + \frac{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{200})100}}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}}\right) && (56)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j(25\pi-\pi k)}}{1-e^{j(0.25\pi-\frac{2\pi k}{200})}} + \frac{1-e^{-j(25\pi+\pi k)}}{1-e^{-j(0.25\pi+\frac{2\pi k}{100})}}\right) && (57)\\
& && (58)
\end{aligned}
$$

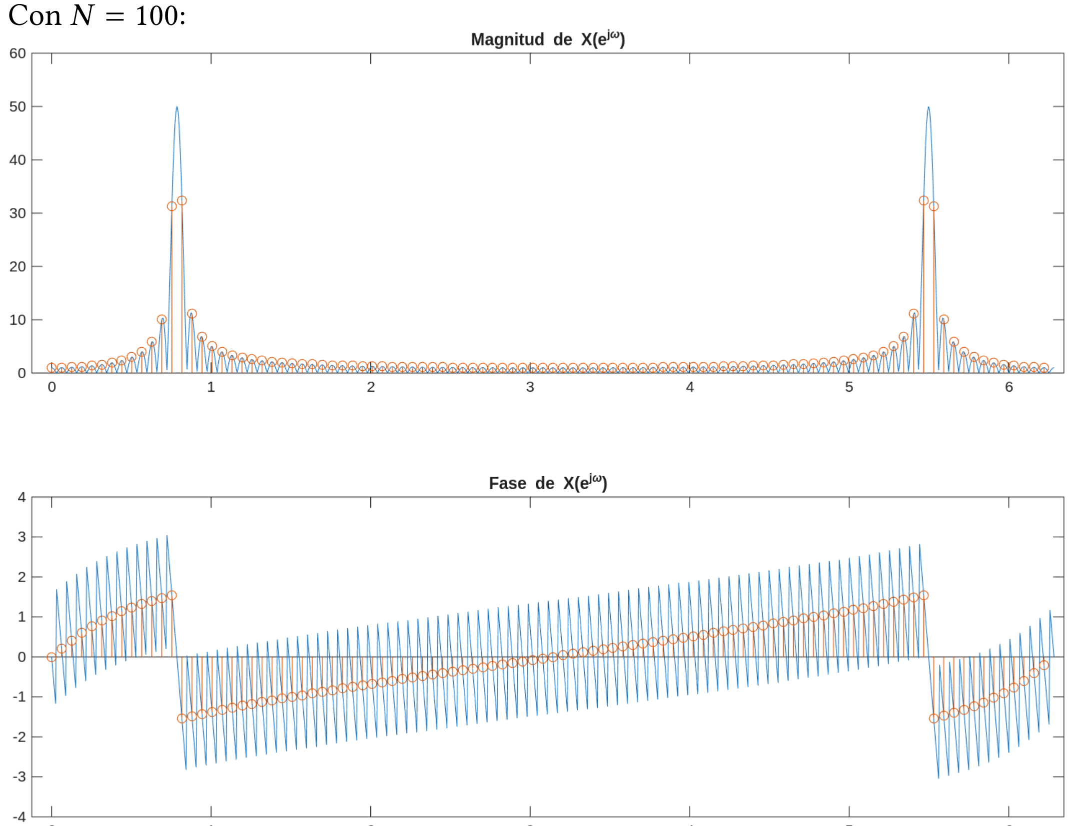
(d) Superponga ambos resultados con la TFTD en Matlab.

Solución: En esta ocasión al calcular la TFD (con $N = 200$) con `fft` se obtienen algunos valores de la transformada que deberían ser cero, que por razones numéricas se obtienen valores muy cercanos, pero distintos de cero. Para solucionar ese problema se aplica una tolerancia sobre el resultado de `fft` para forzar a cero los valores que sean muy cercanos a cero.

```
%% 5 TFTD y TFD comparadas
% Expresión analítica
X_tftd = @(w) ...
 1/2*( 1 - exp(1j*(0.25*pi-w)*100) )./( 1 - exp(1j*(0.25*pi-w)) ) ...
 + 1/2*( 1 - exp(-1j*(0.25*pi+w)*100) )./( 1 - exp(-1j*(0.25*pi+w)) );

% Señal discreta
x = @(n) cos(0.25*pi*n).*(n>=0 & n<=99);

% TFD
N=100;
%N=200;
X_tfd = fft(x(0:N-1));

% Tolerancia
% Fases erróneas en valores que deberían ser cero.
tol = 10^-6;
X_tfd(X_tfd<tol) = 0;

w = linspace(0, 2*pi, 1000);
```

```
% Muestreo de la frecuencia
k = 0:N-1;
w_discr = 2*pi*k/N;

figure
subplot(2,1,1)
plot(w, abs(X_tftd(w))); hold on;
stem(w_discr, abs(X_tfd));
title("Magnitud de X(e^{j\omega})")
subplot(2,1,2)
plot(w, angle(X_tftd(w))); hold on;
stem(w_discr, angle(X_tfd));
title("Fase de X(e^{j\omega})")
```

Con $N = 100$:



Con $N = 200$: