

Ayudantía 4 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere el sistema LTI causal descrito por $y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n]$.

(a) Determine $H(z)$ y $H(e^{j\omega})$

Solución:

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n] \quad (1)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z) = 0.8z^{-1}Y(z) + 0.2X(z) \quad (2)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{0.2}{1 - 0.8z^{-1}} \quad (3)$$

$$\downarrow z = e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.2}{1 - 0.8e^{-j\omega}} = \frac{0.2}{1 - 0.8 \cos \omega + j0.8 \sin \omega} \quad (4)$$

- (b) Obtenga $|H(e^{j\omega})|$ y $\angle H(e^{j\omega})$

Solución:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{0.2}{|1 - 0.8 \cos \omega + j0.8 \sin \omega|} \quad (5)$$

$$= \frac{0.2}{\sqrt{(1 - 0.8 \cos \omega)^2 + (0.8 \sin \omega)^2}} \quad (6)$$

$$= \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos \omega}} \quad (7)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\angle(1 - 0.8 \cos \omega + j0.8 \sin \omega) \quad (8)$$

$$= -\arctan\left(\frac{0.8 \sin \omega}{1 - 0.8 \cos \omega}\right) \quad (9)$$

- (c) Halle la ganancia DC y en $\omega = \pi$. Identificar el tipo de filtro y hallar la frecuencia de corte.

Solución: Para la ganancia DC, ocupamos la TFTD evaluada en $\omega = 0$:

$$G_{DC} = H(e^{j(0)}) = \frac{0.2}{1 - 0.8} \quad (10)$$

$$= \frac{0.2}{0.2} = 1 \quad (11)$$

La magnitud en $\omega = \pi$:

$$|H(e^{j(\pi)})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos \pi}} \quad (12)$$

$$= \frac{0.2}{\sqrt{3.24}} = \frac{0.2}{1.8} \quad (13)$$

$$= 1/9 \quad (14)$$

Para encontrar la frecuencia de corte ω_c , consideramos la ecuación:

$$|H(e^{j\omega_c})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos \omega_c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3_{\text{dB}} \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos \omega_c}} = \frac{1}{\sqrt{0.08}} \quad (16)$$

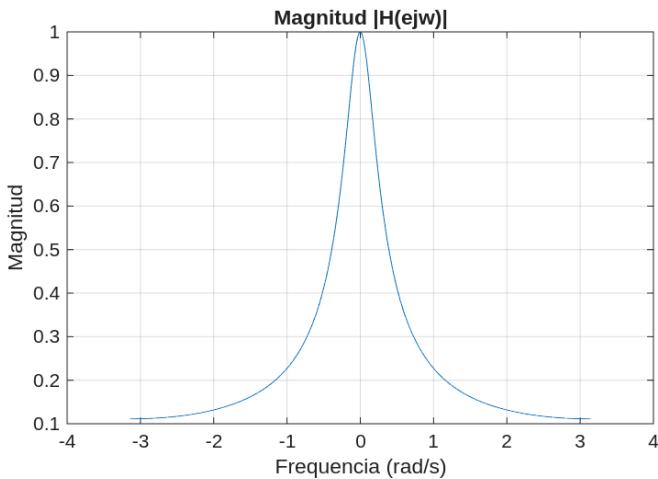
$$1.64 - 1.6 \cos \omega_c = 0.08 \quad (17)$$

$$\omega_c = \cos^{-1} \frac{1.56}{1.6} \quad (18)$$

$$= 0.2241 \quad (19)$$

(d) Bosqueje la magnitud.

Solución: La magnitud para sistemas con respuesta a impulso reales es par. El bosquejo es simétrico. Se realiza el bosquejo entre $-\pi$ y π , pues la magnitud es periódica.



- (e) Encuentre el retardo de fase y el retardo de grupo. ¿Que se puede concluir?

Solución: El retardo de fase es por definición:

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega} = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{0.8 \sin \omega}{1 - 0.8 \cos \omega} \right) \quad (20)$$

Para la respuesta continua de fase consideramos $\Psi(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$ pues la fase $\angle H(e^{j\omega})$ es en este caso continua. Por lo tanto, el retardo de grupo es por definición:

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \arctan \left(\frac{0.8 \sin \omega}{1 - 0.8 \cos \omega} \right) \quad (21)$$

$$= \frac{0.8 \cos \omega - 0.64}{1.64 - 1.6 \cos \omega} \quad (22)$$

Es evidente que ni el retardo de fase τ_{pd} ni el retardo de grupo τ_{gd} son constantes. Como no son constantes, se concluye que el filtro distorsiona la señal de entrada.

- (f) Considere la entrada $x[n] = 3 + 5 \cos(\frac{\pi}{4}n)$. Determine la salida $y[n]$.

Solución: Para la salida, aplicamos la propiedad de sistemas LTI para señales periódicas. Para la constante utilizamos la ganancia DC ($G_{DC} = 1$), y para el coseno ($\omega = \pi/4$) consideramos:

$$|H(e^{j\pi/4})| = \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos(\pi/4)}} \quad \angle H(e^{j\pi/4}) = -\arctan \left(\frac{0.8 \sin(\pi/4)}{1 - 0.8 \cos(\pi/4)} \right) \quad (23)$$

$$= 0.2804 \quad = -0.9160 \quad (24)$$

Utilizando estos valores, se deduce la salida del sistema:

$$x[n] = 3 + 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad (25)$$

$\downarrow \mathcal{H}$

$$y[n] = 3G_{DC} + 5|H(e^{j\omega})| \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \angle H(e^{j\omega})\right) \quad (26)$$

$$= 3(1) + 5(0.2804) \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.9160\right) \quad (27)$$

$$= 3 + 1.402 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.9160\right) \quad (28)$$

2. Un filtro se define por la siguiente ecuación:

$$y[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 x[n-k]$$

- (a) Encuentre la respuesta a impulso $h[n]$ e identifique el tipo de filtro.

Solución: Puesto que ya tenemos una expresión explícita para la salida, podemos encontrar la respuesta a impulso reemplazando $x[n] = \delta[n]$.

$$y[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 x[n-k] \quad (29)$$

$\downarrow x[n] = \delta[n]$

$$h[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \delta[n-k] \quad (30)$$

$$= \frac{1}{5}(\delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[n-4]) \quad (31)$$

$$= \frac{1}{5}(u[n] - u[n-5]) \quad (32)$$

- (b) Demuestre que la respuesta en frecuencia se puede escribir como: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j2\omega}$

Solución: Aplicando transformada Z sobre la respuesta a impulso, y evaluando en $e^{j\omega}$ se obtiene la respuesta en frecuencia.

Recordar que: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$, $\sum_{k=0}^N a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$, $2j \sin \omega = e^{j\omega} - e^{-j\omega}$

$$h[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \delta[n-k] \quad (33)$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 z^{-k} \quad (34)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} \quad (35)$$

$\downarrow z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(1 - e^{-j5\omega})e^{j5\omega/2}}{(1 - e^{-j\omega})e^{j\omega/2}} \cdot \frac{e^{-j5\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \cdot e^{-2j\omega} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-2j\omega} \quad (39)$$

(c) Encuentre el retardo de grupo del sistema.

Solución: Para el retardo de grupo necesitamos la respuesta continua de fase $\Psi(\omega)$. Esta se puede encontrar obteniendo la fase y descartando discontinuidades, o bien mediante inspección, si la respuesta en frecuencia se escribe en coordenadas polares:

$$H(e^{j\omega}) = G(\omega)e^{j\Psi(\omega)} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right) \cdot e^{j(-2\omega)} \quad (40)$$

$$\Psi(\omega) = -2\omega \quad (41)$$

$$\tau_{\text{gd}}(\omega) = -\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = 2 \quad (42)$$

El retardo de grupo es constante. Este sistema no distorsiona señal.

(d) Encuentre los ceros de $H(z)$ y ubíquelos en el plano Z.

Solución: Con:

$$H(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

Los ceros vienen dados por:

$$1 - z^{-5} = 0 \quad (43)$$

$$z^5 = 1 \quad (44)$$

$$z = e^{j2\pi k/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (45)$$

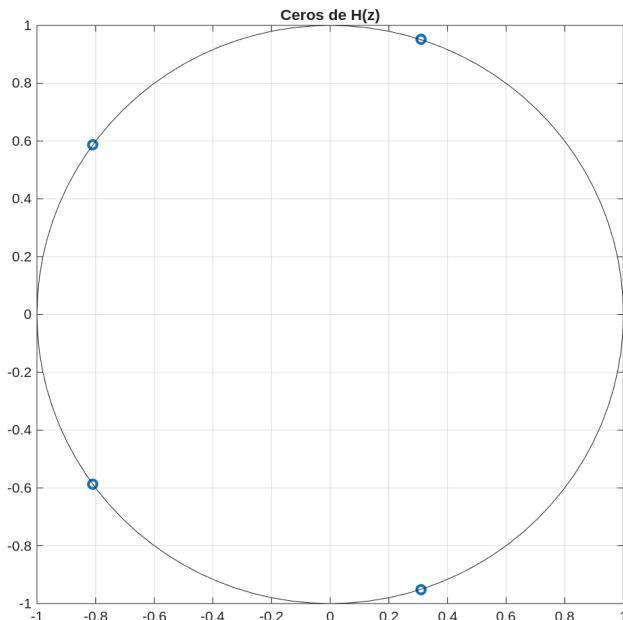
Al analizar los polos, tenemos:

$$1 - z^{-1} = 0 \quad (46)$$

$$z = 1 \quad (47)$$

Este cero se cancela con el polo $z = e^{j2\pi(0)/5} = 1$. Por lo tanto, los ceros de la función de transferencia son:

$$z = e^{j2\pi k/5}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (48)$$



- (e) Determine la salida $y[n]$ ante entrada $x[n] = (-1)^n + 3 \sin(\pi n/2)$

Solución: La señal es periódica por lo que podemos aplicar la propiedad de funciones propias para sistemas LTI. Para encontrar la respuesta sin embargo, conviene escribirla en términos de senos y cosenos:

$$x[n] = (-1)^n + 3 \sin(\pi n/2) \quad (49)$$

$$= \cos(\pi n) + 3 \sin(\pi n/2) \quad (50)$$

Debemos calcular magnitud y fase para $\omega = \pi, \pi/2$. Primero obtenemos la magnitud y fase del sistema:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-2j\omega} \right| \quad \angle H(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-2j\omega} \right) \quad (51)$$

$$= \frac{1}{5} \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad = \angle \left(\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right) - 2\omega \quad (52)$$

Evaluamos en los valores ya mencionados:

$$(\omega = \pi) : \quad |H(e^{j\pi})| = \frac{1}{5} \quad \angle H(e^{j\pi}) = 0 - 2\pi = -2\pi \quad (53)$$

$$(\omega = \pi/2) : \quad |H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{5} \quad \angle H(e^{j\pi/2}) = \pi - 2\frac{\pi}{2} = 0 \quad (54)$$

Utilizando los valores calculados, se obtiene la respuesta del sistema:

$$x[n] = \cos(\pi n) + 3 \sin(\pi n/2) \quad (55)$$

$\downarrow \mathcal{H}$

$$y[n] = |H(e^{j\pi})| \cos [\pi n + \angle H(e^{j\pi})] + 3|H(e^{j\pi/2})| \sin [\pi n/2 + \angle H(e^{j\pi/2})] \quad (56)$$

$$= \frac{1}{5} \cos(\pi n - 2\pi) + \frac{3}{5} \sin(\pi n/2 + 0) \quad (57)$$

$$= \frac{1}{5} \cos(\pi n) + \frac{3}{5} \sin(\pi n/2) \quad (58)$$

3. Considere el filtro pasabajo $h_{lp}[n] = (0.9)^n u[n]$

- (a) Encuentre la respuesta en frecuencia $H_{lp}(e^{j\omega})$

Solución:

$$h_{lp}[n] = (0.9)^n u[n] \quad (59)$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$H_{lp}(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad (60)$$

$\downarrow z = e^{j\omega}$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.9e^{j\omega}} \quad (61)$$

- (b) Diseñe un filtro pasabanda $H_{bp}(e^{j\omega})$ cuya magnitud sea máxima para las frecuencias $\omega \approx \pm\pi/3$

Solución: El filtro pasabajo de (a) tiene máxima magnitud para $\omega = 0$. Si consideramos el filtro pasabajo con desplazamiento en la frecuencia $H(e^{j(\omega-\omega_c)})$, este es máximo en magnitud para $\omega = \omega_c$.

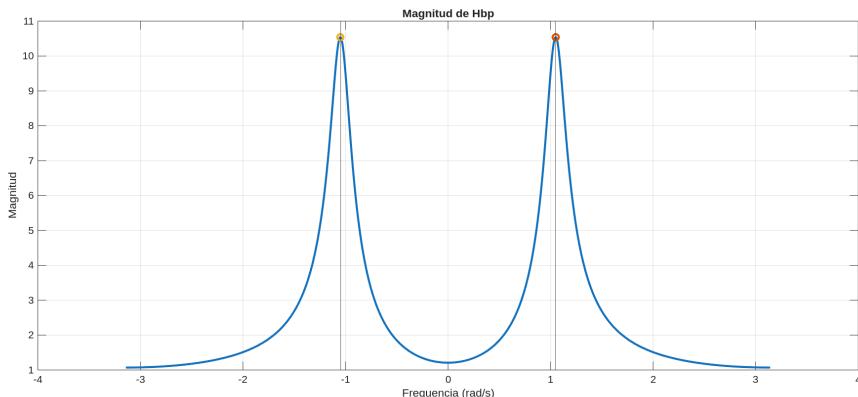
Utilizando dos pasabajos desplazados por $\omega_c = \pm\pi/3$, deberíamos obtener un filtro que tenga dos picos de magnitud para las frecuencias deseadas:

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\omega_c)}) + H_{lp}(e^{j(\omega+\omega_c)}) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{1 - 0.9e^{j(\omega-\omega_c)}} + \frac{1}{1 - 0.9e^{j(\omega+\omega_c)}} \quad (63)$$

- (c) Bosqueje la magnitud. Compruebe y determine $|H(e^{j\omega})|_{\max}$ y la frecuencia correspondiente en Matlab.

Solución: La magnitud es 10.5421, para $\omega = 1.0498$.



```
%% 3 (c)
Hlp_ej = @(w) 1./(1-0.9.*exp(-1j.*w));

Hbp_ej = @(w) Hlp_ej(w-pi/3) + Hlp_ej(w+pi/3);
mag = @(w) abs(Hbp_ej(w));

w_max = fminbnd(@(w) -mag(w), 0, pi)
mag_max = mag(w_max)

w = linspace(-pi,pi,1000);
figure;
plot(w, mag(w), 'LineWidth',2); hold on
plot(w_max, mag(w_max), 'o', 'LineWidth',2)
plot(-w_max, mag(-w_max), 'o', 'LineWidth',2)
xline([-pi/3 pi/3])
```

```
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
title('Magnitud de Hbp');
grid on;
```