Universidad de Concepcíon
Facultad de Ingeniería
Depto. de Ingeniería Eléctrica

Ayudantía 2 - Procesamiento Digital de Señales

1. Sea $x(t) = 2 + 4\sin(3\pi t) + 6\cos(8\pi t + \pi/3)$:

   (a) Determine la frecuencia fundamental Ω_0 de $x(t)$

   Solución: Para encontrar la frecuencia fundamental Ω_0 (rad/s), basta con mirar las frecuencias presentes en nuestra señal original, y hallar el "máximo común divisor".

   $$2 + \underbrace{4\sin(3\pi t)}_{3\pi} + \underbrace{6\cos(8\pi t + \pi/3)}_{8\pi} \tag{1}$$

   Como $mcd(3\pi, 8\pi) = \pi$, la frecuencia fundmental sería $\Omega_0 = \pi$.

   (b) Determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier. Bosquejar magnitud y fase como función de $k\Omega_0$.

   Solución: Como la señal periódica está compuesta por sinusoidales de frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental, se hallan los coeficientes por inspección. Recordemos que:

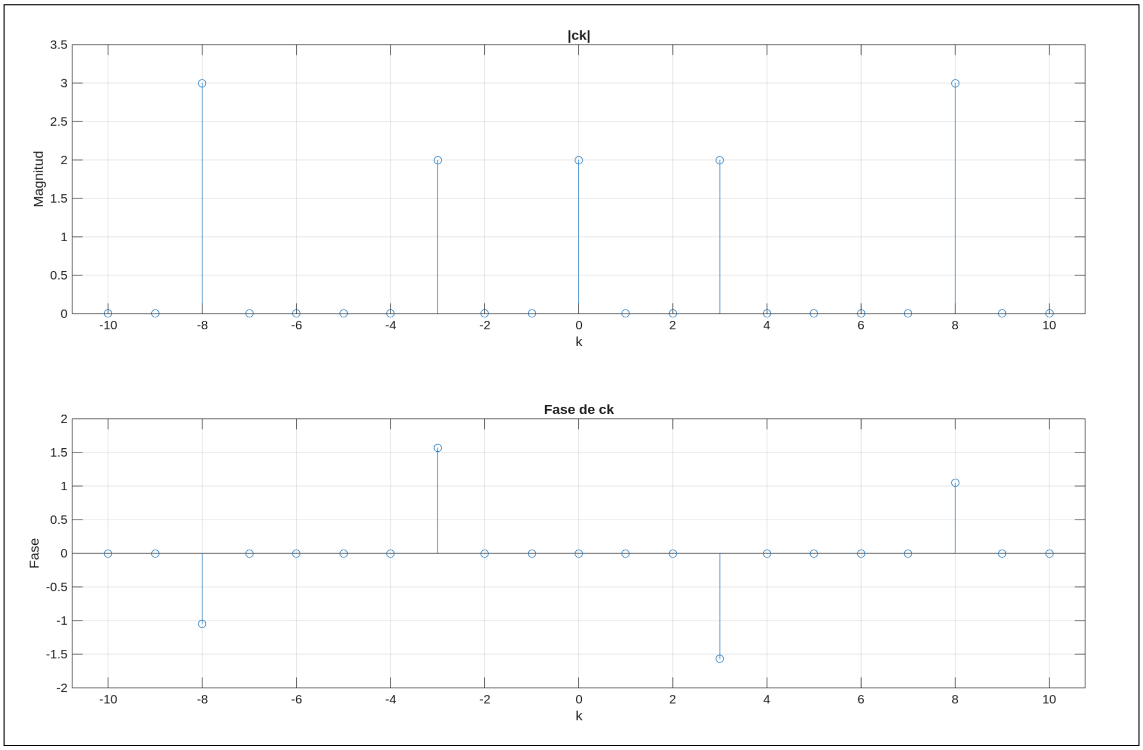
   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} = x(t) \tag{2}$$

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t} = 2 + 4\sin(3\pi t) + 6\cos(8\pi t + \pi/3) \tag{3}$$

   $$= 2 + \frac{4}{2j}\left[e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}\right] + \frac{6}{2}\left[e^{j8\pi t + j\pi/3} + e^{-j\pi t - j\pi/3}\right] \tag{4}$$

   $$= \underbrace{2}_{c_0} e^{j(0)\pi t} \underbrace{-2j}_{c_3} \cdot e^{j(3)\pi t} + \underbrace{2j}_{c_{-3}} \cdot e^{j(-3)\pi t} + \underbrace{3e^{j\pi/3}}_{c_8} \cdot e^{j(8)\pi t} + \underbrace{3e^{-j\pi/3}}_{c_{-8}} \cdot e^{j(-8)\pi t} \tag{5}$$

   Por lo tanto tenemos: $c_{-8} = 3e^{-j\pi/3}$, $c_{-3} = 2j$, $c_0 = 2$, $c_3 = -2j$, $c_8 = 3e^{j\pi/3}$ y $c_k = 0$ para cualquier otro k.



2. Considere la señal aperiódica $x(t)$ y la señal periódica $\tilde{x}(t)$ definidas por:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-2k)$$

(a) Obtenga la transformada de Laplace de $x(t)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt && (6) \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-t}e^{-st}dt && (7) \\ &= \frac{e^{s+1}}{s+1} - \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} && (8) \end{aligned}$$

(b) Calcule la transformada de Fourier $X(j\Omega)$ de $x(t)$.

Solución:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= X(s)|_{s=j\Omega} && (9) \\ &= \frac{e^{j\Omega+1}}{j\Omega+1} - \frac{e^{-(j\Omega+1)}}{j\Omega+1} && (10) \end{aligned}$$

(c) Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. Verifique la relación $c_k = \frac{1}{T_0} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$.

Solución: Los coeficientes se calculan por medio de la expresión:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \tag{11}$$

En nuestro caso, la señal $\tilde{x}(t)$ se forma tomando la señal $x(t)$ como periodo base, desplazándola sucesivamente en 2 unidades. El periodo viene dado por $T_0 = 2$. En cuanto a la frecuencia angular: $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi / T_0 = \pi$. Sustituyendo en la expresión, y escogiendo como intervalo de integración [-1,1]:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-t} e^{-jk\pi t} dt \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jk\pi+1}}{jk\pi + 1} - \frac{e^{-(jk\pi+1)}}{jk\pi + 1} \right] \tag{13}$$

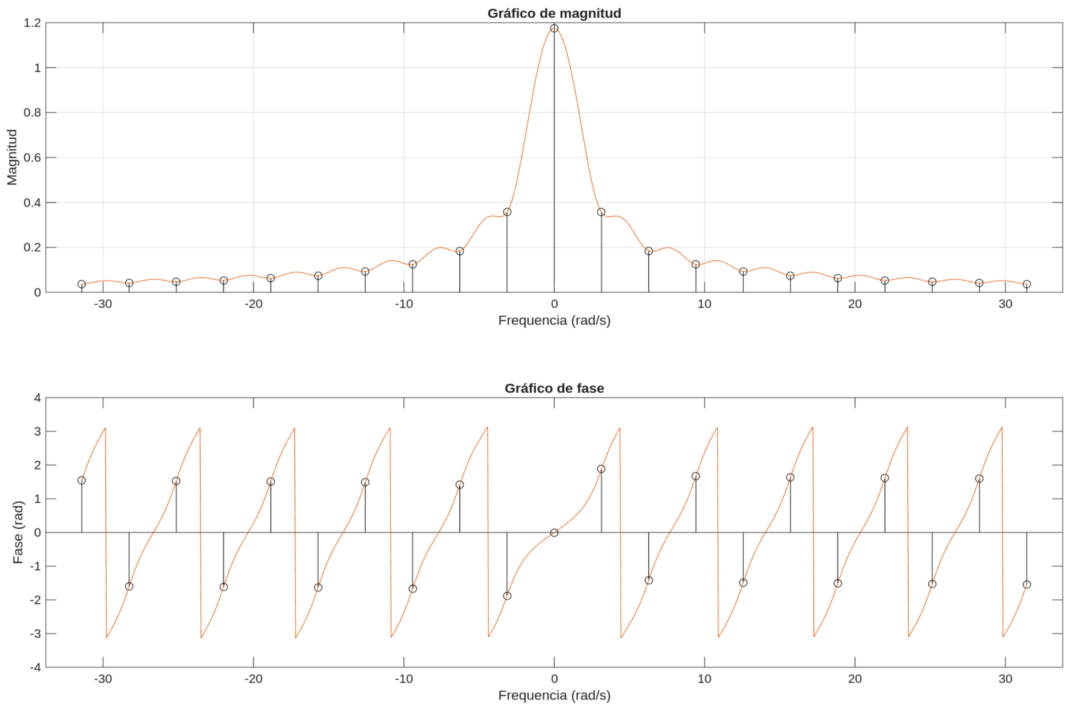
Finalmente verificamos que al evaluar la expresión $\frac{1}{T_0} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$ obtenemos:

$$\frac{1}{T_0} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j\Omega+1}}{j\Omega + 1} - \frac{e^{-(j\Omega+1)}}{j\Omega + 1} \right]_{\Omega = k\pi} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jk\pi+1}}{jk\pi + 1} - \frac{e^{-(jk\pi+1)}}{jk\pi + 1} \right] = c_k \tag{15}$$

(d) Grafique magnitud y fase de ambas en Matlab.

Solución:




```
%% 2 d)
X = @(om) ( exp(1j*om+1) - exp(-1j*om-1) )./(1j*om+1);
c = @(k) ( exp(1j*k*pi + 1) - exp(-1j*k*pi - 1) )./(2j*k*pi+2);

om_0 = pi;

k = -10:1:10;
om = linspace(-10*om_0, 10*om_0, 1000);

% Magnitud
figure
subplot(2,1,1)
stem(k*om_0, abs(c(k)), 'o', 'color', 'k');
hold on;
%plot(om, abs(X(om)), '-');
plot(om, abs(X(om)/2), '-');
title('Gráfico de magnitud');
xlabel('Frequencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
grid on; hold on;

% Fase
subplot(2,1,2)
```

```
stem(k*om_0, angle(c(k)), 'o', 'color', 'k');
hold on;
%plot(om, angle(X(om)), '-')
plot(om, angle(X(om)/2), '-')
title('Gráfico de fase');
xlabel('Frequencia (rad/s)');
ylabel('Fase (rad)');
```

3. Determine el espectro de magnitud y fase de la TFTD de las siguientes señales:

   (a) $x_1[n] = (1/3)^n u[n-1]$

Solución: Se calcula la TFTD a partir de la transformada Z.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1] \tag{16}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{17}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}\{\ \} \tag{18}$$

$$X_1(z) = \frac{1}{3} z^{-1} \frac{z}{z - 1/3} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 1/3} \tag{20}$$

$$\Big\downarrow z = e^{j\omega} \tag{21}$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \tag{22}$$

La magnitud viene dada por:

$$
\begin{aligned}
\left|X_1(e^{j\omega})\right| &= \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e^{j\omega}-1/3}\right| && (23)\\
&= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{e^{j\omega}-1/3}\right| && (24)\\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{|\cos\omega + j\sin\omega - 1/3|} && (25)\\
&= \frac{1}{3\sqrt{(\cos\omega - 1/3)^2 + \sin^2\omega}} && (26)\\
&= \frac{1}{3\sqrt{\cos^2\omega - 2/3\cos\omega + 1/9 + \sin^2\omega}} && (27)\\
&= \frac{1}{3\sqrt{10/9 - 2/3\cos\omega}} && (28)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10 - 6\cos\omega}} && (29)
\end{aligned}
$$

En cuanto a la fase:

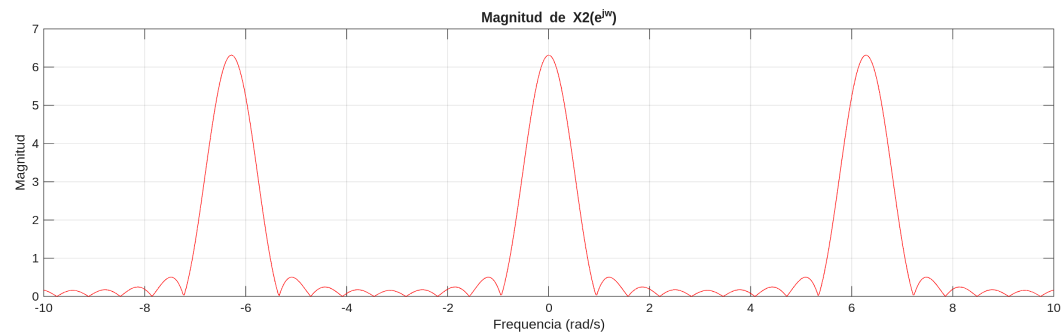
$$
\begin{aligned}
\angle X_1(e^{j\omega}) &= \angle\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e^{j\omega}-1/3}\right) && (30)\\
&= \angle\left(\frac{1}{e^{j\omega}-1/3}\right) && (31)\\
&= -\angle(e^{j\omega}-1/3) && (32)\\
&= -\angle(\cos\omega + j\sin\omega - 1/3) && (33)\\
&= -\operatorname{atan2}(\sin\omega,\ \cos\omega - 1/3) && (34)
\end{aligned}
$$

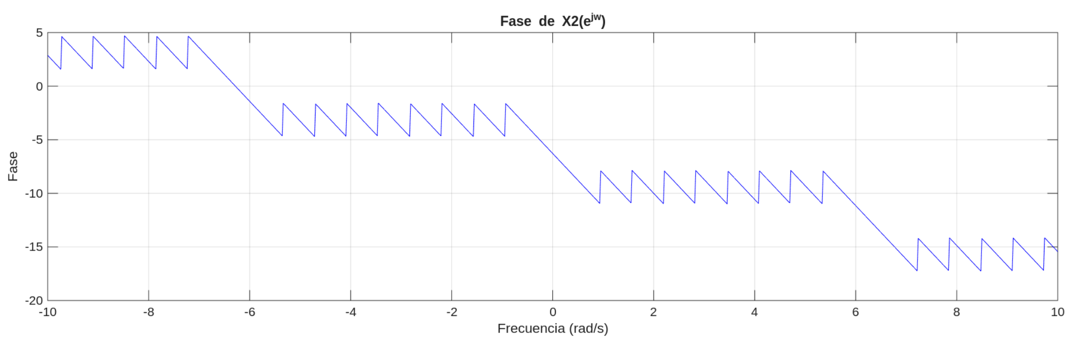
(b) $x_2[n] = \sin(0.1\pi n)(u[n] - u[n-10])$

Solución: Calculamos la TFTD del mismo modo:

$$
\begin{aligned}
x_2[n] &= \sin(0.1\pi n)(u[n]-u[n-10]) && (35)\\
&= \sin(0.1\pi n)u[n]-\sin(0.1\pi n)u[n-10] && (36)\\
&= \sin(0.1\pi n)u[n]-\sin(0.1\pi[n-10]+\pi)u[n-10] && (37)\\
& \qquad \boxed{-\sin(x+\pi)=\sin(x)} && (38)\\
&= \sin(0.1\pi n)u[n]+\sin(0.1\pi[n-10])u[n-10] && (39)\\
&\Big\downarrow \mathcal{Z}\{\,\} && (40)\\
X_2(z) &= \frac{z\sin 0.1\pi}{z^2-2z\cos 0.1\pi+1}(1+z^{-10}) && (41)\\
&\Big\downarrow z=e^{j\omega} && (42)\\
X_2(e^{j\omega}) &= \frac{e^{j\omega}\sin 0.1\pi}{e^{j2\omega}-2e^{j\omega}\cos 0.1\pi+1}(1+e^{-j10\omega}) && (43)
\end{aligned}
$$

Aquí un desarrollo analítico de magnitud y fase es más complicado que para el caso anterior. Involucra factorizar la función de transferencia, utilizar propiedades trigonométricas, y propiedades de módulo y ángulo para números complejos.





4. Determine los coeficientes de Fourier de las siguientes señales periódicas:

   (a) $x_1[n]=\cos(2\pi[3/10]n)$

Solución: Primero determinamos el periodo de la señal periódica. Recordando que cos es 2π-periódica, notamos que el menor $n \neq 0$ a partir del cual la señal se comienza a repetir es $N = 10$.

Encontramos los coeficientes por inspección. Recordemos que —en general— una señal se reconstruye a partir de los coeficientes mediante la expresión:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = x[n] \tag{44}$$

Sustituyendo el periodo y nuestra señal, desarrollando se hallan los coeficientes:

$$\begin{align}
\sum_{k=0}^{9} c_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn} &= \cos(2\pi[3/10]n) \tag{45}\\
&= \frac{e^{j\frac{2\pi}{10}3n} + e^{-j\frac{2\pi}{10}3n}}{2} \tag{46}\\
&= \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_3} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-3}?} e^{j\frac{2\pi}{10}(-3)n} \tag{47}
\end{align}$$

Aquí ya podemos obtener un coeficiente. El otro parece ser c_{-3}, sin embargo $0 \leq k \leq 9$. Aquí debemos considerar la periodicidad de la exponencial compleja, simplemente sumamos $N = 10$, hasta que se ajuste al dominio de k:

$$\begin{align}
&= \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{10}(-3+10)n} \tag{48}\\
&= \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_3} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_7} e^{j\frac{2\pi}{10}(7)n} \tag{49}
\end{align}$$

Luego $c_3 = 1/2$, $c_7 = 1/2$, y $c_k = 0$ en otro caso.

(b) $x_2[n] = 1 - \sin(\pi n/4)$, con $0 \leq n \leq 11$ un periodo.

Solución: En este caso no podemos obtener los coeficientes por inspección pues el periodo $N = 12$, no es múltiplo de del periodo de la sinusoidal (8). En este caso encontraremos los coeficientes mediante la expresión:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_2[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} && (50)\\
&= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}[1-\sin(\pi n/4)]e^{-j\frac{2\pi}{12}kn} && (51)\\
&= \frac{1}{12}\left[\sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{2\pi}{12}kn} - \sum_{n=0}^{11}\sin(\pi n/4)e^{-j\frac{2\pi}{12}kn}\right] && (52)\\
&= \frac{1}{12}\left[12\delta[k] - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{11}\left(e^{j\pi n/4}e^{-j\frac{2\pi}{12}kn} - e^{-j\pi n/4}e^{-j\frac{2\pi}{12}kn}\right)\right] && (53)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{11}\left(\left[e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}\right]^n - \left[e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}\right]^n\right) && (54)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{24}\left(\frac{1-e^{j12(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}}{1-e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}} - \frac{1-e^{-j12(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}{1-e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}\right) && (55)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{24}\left(\frac{1-e^{j(3\pi-2\pi k)}}{1-e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}} - \frac{1-e^{-j(3\pi+2\pi k)}}{1-e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}\right) && (56)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{24}\left(\frac{1-e^{j3\pi}}{1-e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}} - \frac{1-e^{-j3\pi}}{1-e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}\right) && (57)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{24}\left(\frac{2}{1-e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}} - \frac{2}{1-e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}\right) && (58)\\
&= \delta[k] + j\frac{1}{12}\left(\frac{1}{1-e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{12}k)}} - \frac{1}{1-e^{-j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{12}k)}}\right) && (59)
\end{aligned}
$$

Este proceso como se puede ver es bastante engorroso. En la próxima ayudantía se verá como encontrar los coeficientes utilizando una propiedad análoga a la utilizada en 2(c) para señales discretas. Con matlab, los coeficientes se encuentran con sencillez, definiendo la secuencia de un periodo base y aplicando la función `fft`.

```
%% 4(b)
k = 0:11;
x = 1-sin(pi*k/4);
N = 12;

c_k = 1/N * fft(x)
```