

## Ayudantía 3 - Procesamiento Digital de Señales

1. Para las siguientes señales tiempo continuo, encuentre la TFTC:

(a)  $x_1(t) = e^{-3|t|} \sin 2\pi t$

**Solución:** La señal puede ser reescrita como:

$$e^{-3|t|} \sin 2\pi t = \begin{cases} e^{-3t} \sin 2\pi t, & t \geq 0 \\ e^{3t} \sin 2\pi t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$= e^{-3t} \sin(2\pi t)u(t) + e^{3t} \sin(2\pi t)u(-t) \quad (2)$$

Aplicamos transformada de Laplace usando la propiedad de linealidad. Para el primer término:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \sin(2\pi t)u(t)\} = \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} \Big|_{s+3} \quad (3)$$

$$= \frac{2\pi}{(s+3)^2 + 4\pi^2} \quad (4)$$

Para el segundo término:

$$\mathcal{L}\{e^{3t} \sin(2\pi t)u(-t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3(-t)} \sin(-2\pi[-t])u(-t)\} \quad (5)$$

$$= -\mathcal{L}\{e^{-3(-t)} \sin(2\pi[-t])u(-t)\} \quad (6)$$

$$= -\mathcal{L}\{e^{-3t} \sin(2\pi t)u(t)\} \Big|_{-s} \quad (7)$$

$$= -\frac{2\pi}{(s+3)^2 + 4\pi^2} \Big|_{-s} \quad (8)$$

$$= -\frac{2\pi}{(3-s)^2 + 4\pi^2} \quad (9)$$

Finalmente escribimos la transformada de Laplace como la suma de las partes y realizamos la sustitución para encontrar la TFTC.

$$\mathcal{L}\{e^{-3|t|} \sin 2\pi t\} = \frac{2\pi}{(s+3)^2 + 4\pi^2} - \frac{2\pi}{(3-s)^2 + 4\pi^2} \quad (10)$$

$$\downarrow s = j\Omega$$

$$X_1(j\Omega) = \frac{2\pi}{(j\Omega+3)^2 + 4\pi^2} - \frac{2\pi}{(3-j\Omega)^2 + 4\pi^2} \quad (11)$$

(b)  $x_2(t) = e^{-3|t-5|} \sin(2\pi[t-5]) * e^{-3|t+1|} \sin(2\pi[t+1])$

**Solución:** Aquí notamos que las señales que se convolucionan se pueden escribir en función de la señal  $x_1$  de la parte (a) con un retardo (o adelanto):

$$x_2(t) = x_1(t - 5) * x_1(t + 1) \quad (12)$$

Recordemos que la convolución es multiplicación en la frecuencia. Podemos aplicar la TFTC directamente, considerando la propiedad de retardo en el tiempo.

$$x_2(t) = x_1(t - 5) * x_1(t + 1) \quad (13)$$

$\downarrow$  TFTC

$$X_2(j\Omega) = e^{-5j\Omega} X_1(j\Omega) \cdot e^{j\Omega} X_1(j\Omega) \quad (14)$$

$$= e^{-4j\Omega} X_1^2(j\Omega) \quad (15)$$

$$= e^{-4j\Omega} \left( \frac{2\pi}{(j\Omega + 3)^2 + 4\pi^2} - \frac{2\pi}{(3 - j\Omega)^2 + 4\pi^2} \right)^2 \quad (16)$$

2. Sea la señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 - \sin(\pi n/4), & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & e.t.o.c. \end{cases}$$

(a) Determine la TFTD de la señal.

**Solución:** La señal toma valores distintos de 0 solo para  $0 \leq n \leq 3$ . Podemos reescribir la señal como una sucesión de impulsos:

$$x[n] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n - 1] + x[2]\delta[n - 2] + x[3]\delta[n - 3] \quad (17)$$

$$= \delta[n] + (1 - \sqrt{2}/2)\delta[n - 1] + (1 - \sqrt{2}/2)\delta[n - 3] \quad (18)$$

$$= \delta[n] + (1 - \sqrt{2}/2)(\delta[n - 1] + \delta[n - 3]) \quad (19)$$

Aplicamos la transformada Z y posteriormente sustituimos para obtener la TFTD:

$$x[n] = \delta[n] + (1 - \sqrt{2}/2)(\delta[n - 1] + \delta[n - 3]) \quad (20)$$

$\downarrow \mathcal{Z}\{\}$

$$X(z) = 1 + (1 - \sqrt{2}/2)(z^{-1} + z^{-3}) \quad (21)$$

$\downarrow z = e^{j\omega}$

$$X(e^{j\omega}) = 1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}) \quad (22)$$

(b) Se construye la señal periódica  $\tilde{x}_N$  de periodo  $N \geq 4$  a partir de la señal  $x$ :

$$\tilde{x}_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

Encuentre una expresión para los coeficientes de Fourier de la señal periódica en función de  $N$ .

**Solución:** Para encontrar los coeficientes de Fourier tenemos dos maneras:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad c_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (23)$$

Con  $X(e^{j\omega})$ , TFTD de un periodo base. Esta transformada ya la tenemos es la que se determinó en 2(a). Sustituyendo tenemos:

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{N} [1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\omega} + e^{-3j\omega})] \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{N} [1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + e^{-j\frac{6\pi}{N}k})] \quad (26)$$

(c) Escriba los coeficientes de Fourier para  $\tilde{x}_4[n]$  ( $N = 4$ ).

**Solución:** Si consideramos la señal de periodo 4 ( $N = 4$ ), la expresión para los coeficientes queda:

$$c_k = \frac{1}{4} [1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + e^{-j\frac{6\pi}{4}k})] \quad (27)$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k})] \quad (28)$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (1 - \sqrt{2}/2)(e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{j\frac{\pi}{2}k})] \quad (29)$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (2 - \sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{2}k] \quad (30)$$

Obtenemos los coeficientes evaluando  $k$  desde 0 hasta  $N - 1 = 3$ :

$$c_0 = \frac{1}{4} [1 + (2 - \sqrt{2}) \cos(0)] = 0.3964 \quad (31)$$

$$c_1 = \frac{1}{4} [1 + (2 - \sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{2}] = 0.25 \quad (32)$$

$$c_2 = \dots = 0.1036 \quad (33)$$

$$c_3 = \dots = 0.25 \quad (34)$$

3. Considere el sistema **causal** descrito por:

$$y[n] = ay[n - 1] + 2x[n]$$

- (a) Determine la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  para  $a = 0.5$ .

**Solución:** Aplicamos transformada Z a la ecuación, para encontrar la función de transferencia:

$$y[n] = ay[n - 1] + 2x[n] \quad (35)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}\{\}$$

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + 2X(z) \quad (36)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - az^{-1}} \quad (37)$$

$$\downarrow a = 0.5$$

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (38)$$

El sistema tiene un polo  $p_1 = 0.5$ . Al tratarse de un sistema causal, deducimos que la RC es el exterior de una circunferencia. RC:  $|z| > 0.5$ . El sistema es estable podemos obtener la respuesta en frecuencia sustituyendo  $z = e^{j\omega}$ :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - 0.5e^{-j\omega}} = \frac{2}{1 - 0.5 \cos \omega + 0.5j \sin \omega} \quad (39)$$

Y las respuestas de magnitud y fase son:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{2}{\sqrt{1 - 0.5^2 + 0.5^2 \sin^2 \omega}} \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\angle(1 - 0.5 \cos j\omega + 0.5 \sin j\omega) \quad (40)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1.25 - \cos \omega}} \quad = -\arctan \frac{0.5 \sin \omega}{1 - 0.5 \cos \omega} \quad (41)$$

- (b) Encuentre la salida  $y[n]$  si la secuencia de entrada es  $x[n] = 3 \sin(\pi n/4)$ .

**Solución:** Para encontrar la salida de un sistema estable, con una señal periódica como entrada, consideramos la propiedad de funciones propias de un sistema LTI. Para una señal exponencial compleja de frecuencia angular  $\omega_0$ , la salida viene dada por:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{H}} y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0})} \quad (42)$$

Esta propiedad, se extiende para señales sinusoidales cuando la respuesta a impulso es real (una demostración aparece en la página 203 del libro guía). En nuestro caso,

para una entrada  $x[n] = 3 \sin(\pi n/4)$ :

$$x[n] = 3 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{\omega_0} \xrightarrow{\mathcal{H}} 3|H(e^{j\pi/4})| \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \angle H(e^{j\pi/4})\right) \quad (43)$$

Sustituyendo por las expresiones de magnitud y fase encontradas anteriormente, tenemos:

$$y[n] = 3 \frac{2}{\sqrt{1.25 - \cos \pi/4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}n - \arctan \frac{0.5 \sin \omega}{1 - 0.5 \cos \omega}\right) \quad (44)$$

$$= 8.1432 \sin\left(\frac{\pi}{4}n - 0.5005\right) \quad (45)$$

- (c) Repita (b) para una secuencia de entrada  $x[n] = \tilde{x}_4[n]$  de la pregunta 2(c).

**Solución:** Para encontrar la respuesta al tomar la señal periódica  $\tilde{x}_4$  consideramos su representación mediante los coeficientes de Fourier encontrados en 2(c):

$$\tilde{x}_4[n] = \sum_{k=0}^3 c_k e^{j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{k=0}^3 c_k e^{j\frac{\pi}{2}kn} \quad (46)$$

Para encontrar la respuesta aplicamos la propiedad de funciones propias para sistemas LTI término a término:

$$\tilde{x}_4[n] = \sum_{k=0}^3 c_k e^{j[\frac{\pi}{2}k]n} \quad (47)$$

$\downarrow \mathcal{H}$

$$y[n] = \sum_{k=0}^3 c_k H(e^{j\frac{\pi}{2}k}) e^{j\frac{\pi}{2}kn} \quad (48)$$

Evaluando para  $0 \leq k \leq 3$  y expandiendo la suma:

$$y[n] = c_0 H(e^0) + c_1 H(e^{j\pi/2}) e^{j\frac{\pi}{2}n} + c_2 H(e^{j\pi}) e^{j\pi n} + c_3 H(e^{j3\pi/2}) e^{j\frac{3\pi}{2}n} \quad (49)$$

$$= (0.3964)(4) + (0.25)(1.6 - 0.8j) e^{j\frac{\pi}{2}n} \\ + (0.1036)(1.33) e^{j\pi n} + (0.25)(1.6 + 0.8j) e^{j\frac{3\pi}{2}n} \quad (50)$$

$$= 1.5858 + (0.4 - 0.2j) e^{j\frac{\pi}{2}n} \\ + 0.1381 e^{j\pi n} + (0.4 + 0.2j) e^{j\frac{3\pi}{2}n} \quad (51)$$

(d) ¿Que ocurriría si  $a = 1.5$ ?

**Solución:** Si  $a = 1.5$ , la función de transferecia queda como:

$$H(z) = \frac{2}{1 - 1.5z^{-1}} \quad (52)$$

Con un polo  $p_1 = 1.5$ , y RC:  $|z| > 1.5$  (causal). Concluimos que es sistema no es estable. La respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  no existe pues involucra evaluar  $z$  en la circunferencia unitaria que no esta en la RC.

La respuesta con entrada una señal periódica no es posible calcularse.