Ayudantía 1 - Procesamiento Digital de Señales

1. Para las siguientes señales, identifique:

   - Si son continuas, tiempo discreto o digitales.
   - Tipo de soporte.
   - Si son periódicas.

   (a) $x_1(t) = \sin(3t)$

   Solución: La señal depende del parámetro t y toma valores continuos. Por lo tanto, la señal es continua. Además $\sin(3t)$ es periódica. Es de soporte infinito.

   (b) $x_2[n] = 0.4^n u[n]$

   Solución: La señal está definida para $n \in \mathbb{Z}$, no puede ser continua. A medida que $n > 0$ crece, el valor de la señal se vuelve arbitrariamente pequeño, por lo que no puede ser representada en cuantos (requeriría bits infinitos), no puede ser digital; la señal es tiempo discreto.

   La señal $x_2[n]$ es mayor a cero para todo n positivo, y $x_2[n]$ es cero para n negativo. Es de soporte positivo.

   La señal no es periódica.

   (c) $x_1(t)$, si se muestrea con $T = 0.1$

   Solución: Al muestrear se obtiene:

   $$x_3[n] = x_1(nT)|_{T=0.1} = \sin(0.3n), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

   La señal es ahora de tiempo discreto.

   La señal mantiene su soporte.

   A primera vista puede parecer periódica. Recordemos que esto se cumple si existe un m tal que para cualquier n:

   $$x_3[n] = x_3[n+m] \tag{2}$$

   Al reemplazar por la expresión obtenida:

   $$\sin(0.3n) = \sin(0.3n + 0.3m) \tag{3}$$

   sin es 2π periódica, por lo que debe existir m tal que:

   $$0.3m = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

   El lado izquierdo de la ecuación es racional, mientras que π es irracional, es decir no existen m y k que satisfagan la ecuación, por lo tanto, la señal no es periódica.

2. Se tiene un sistema tiempo discreto cuya respuesta a impulso es $h[n] = (0.5)^n u[n]$. Usando convolución discreta, calcule la salida del sistema $y[n]$ si se somete a una entrada $x[n] = u[n] - u[n-4]$.

Solución: Conociendo la respuesta a impulso y entrada al sistema, la respuesta viene dada por la expresión:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Desarrollando mediante la definición de convolución:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] &(5)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-4])h[n-k] &(6) \end{aligned}$$

Notemos que $u[k]-u[k-4]$ es uno para $0 \leq k \leq 3$, y cero en cualquier otro caso. Podemos simplificar la serie a una suma finita.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{3} h[n-k] &(7)\\ &= \sum_{k=0}^{3} (0.5)^{n-k} u[n-k] &(8)\\ &= (0.5)^n u[n] + (0.5)^{n-1} u[n-1] &(9)\\ &\quad + (0.5)^{n-2} u[n-2] + (0.5)^{n-3} u[n-3] \end{aligned}$$

3. Calcular la transformada Z, región de convergencia (RC) e identificar polos de las señales a continuación. Bosquejar RC y polos.

(a) $(-0.8)^n u[n]$, utilizando definición de la transformada Z.

Solución: Al ser de soporte positivo, podemos utilizar la transformada Z unilateral:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{(-0.8)^n u[n]\} &= \mathcal{Z}^+\{(-0.8)^n\} &(10)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-0.8)^n z^{-n} &(11)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-0.8z^{-1})^n &(12) \end{aligned}$$

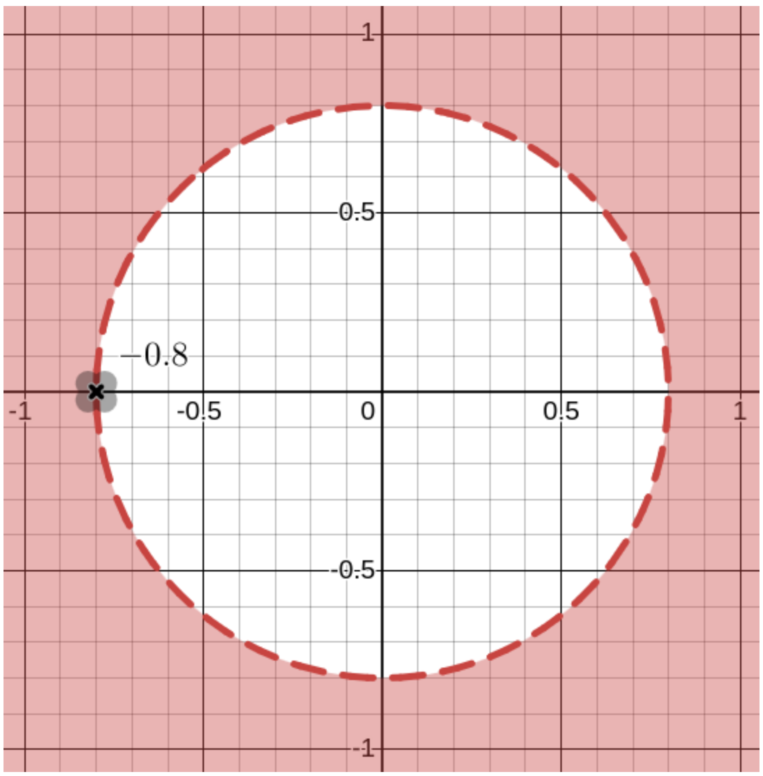
Aplicando la identidad $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-0.8z^{-1})^n = \frac{1}{1+0.8z^{-1}} \tag{13}$$

Para la región de convergencia, $|-0.8z^{-1}| = |0.8z^{-1}| < 1$. Es decir $|z| > 0.8$. La RC es el exterior de una circunferencia de radio 0.8.

Existe un único polo cuando $1 + 0.8z^{-1} = 0$. Es decir cuando $z = -0.8$.

Se bosqueja RC y el polo:



(b) $\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n] + (0.5)^n u[n-3]$, utilizando todos sus conocimientos.

Solución: Para calcular la transformada Z en este caso aplicamos linealidad. Primero calculamos $\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\}$. Recordemos que en general:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\omega n)u[n]\} = \frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2\cos(\omega)z + 1} \tag{14}$$

Con RC $|z| > 1$.

En nuestro caso $\omega = \frac{\pi}{4}$, y $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo que:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]\} = \frac{z\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} \tag{15}$$

Ahora buscamos $\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\}$. Sabemos que:

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{16}$$

Con RC $|z| > |a|$. Podemos aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo para obtener la transformada Z. Sin embargo, para esto debemos preocuparnos que todas las partes de la expresión tengan el desplazamiento:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n-3]\} &= \mathcal{Z}\{(0.5)^3 (0.5)^{n-3} u[n-3]\} && (17)\\
&= (0.5)^3 \mathcal{Z}\{(0.5)^{n-3} u[n-3]\} && (18)\\
&= (0.5)^3 z^{-3} \mathcal{Z}\{(0.5)^n u[n]\} && (19)\\
&= \frac{1}{8z^3} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} && (20)\\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2(z - 0.5)} && (21)
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando ambas partes tenemos la transformada Z completa:

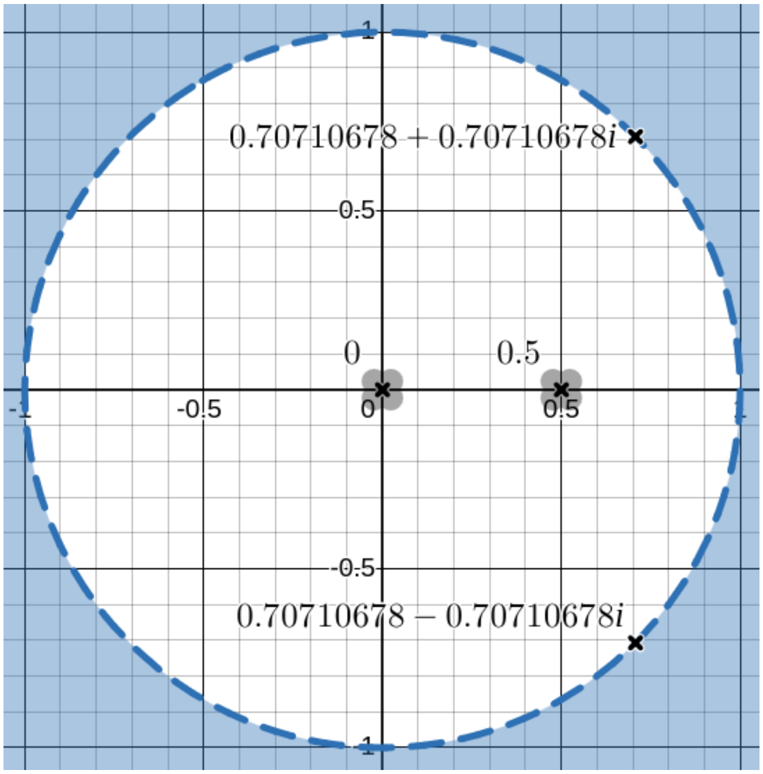
$$\frac{z\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2(z - 0.5)} \tag{22}$$

Con RC $|z| > 0.5$ Para la región de convergencia y polos, consideramos ambas partes. La RC final será la intersección de ambas RC. Ambas son el exterior de una circunferencia. La RC será el exterior de la circunferencia más grande: $|z| > 1$.

Los polos vienen dados por:

$$\begin{aligned}
z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0 &\Rightarrow p_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} j && (23)\\
z - 0.5 = 0 &\Rightarrow p_3 = 0.5 && (24)\\
z^2 &\Rightarrow p_{4,5} = 0 && (25)
\end{aligned}$$

Al bosquejar RC y polos queda:



4. Un sistema cumple:

$$y[n] - 0.6y[n-1] = x[n], \quad y[-1] = 1 \tag{26}$$

(a) Obtener $H(z)$.

Solución: Dado que tenemos una ecuación de diferencias con condición inicial, utilizamos transformada Z unilateral para encontrar función de transferencia y respuesta del sistema. La condición inicial aparece al aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

$$y[n] - 0.6y[n-1] = x[n] \tag{27}$$

$$Y(z) - 0.6z^{-1}Y(z) - 0.6y[-1] = X(z) \tag{28}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{z}{z-0.6}}_{H(z)} X(z) + \underbrace{\frac{0.6z}{z-0.6}y[-1]}_{\text{Respuesta natural}} \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

(b) Calcular la respuesta $y[n]$ para entrada escalón usando transformada Z.

Solución: Para calcular la respuesta para entrada escalón, sustituimos la entrada por su transformada Z, condición inicial y aplicamos transformada Z.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-0.6} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{0.6z}{z-0.6}(1) && (31) \\ &= z\left[\frac{z}{(z-0.6)(z-1)}\right] + \frac{0.6z}{z-0.6} && (32) \\ &= z\left[\frac{c_1}{z-0.6} + \frac{c_2}{z-1}\right] + \frac{0.6z}{z-0.6} && (33) \end{aligned}$$

$$\boxed{c_1 = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=0.6} = -1.5} \quad (34)$$

$$\boxed{c_2 = \left.\frac{z}{z-0.6}\right|_{z=1} = 2.5} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= -0.9\frac{z}{z-0.6} + 2.5\frac{z}{z-1} && (36) \\ y[n] &= -0.9(0.6)^n u[n] + 2.5u[n], \quad n \geq 0 && (37) \end{aligned}$$

5. Dada la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{z}{z-0.6}$$

   (a) Encontrar respuesta a impulso del sistema.

   (b) Analizar causalidad y estabilidad

Solución: Tenemos la función de transferencia, y se reconoce que corresponde a un escalon con un a exponencial. Sin embargo no tenemos la RC. La respuesta impulso, causalidad y estabilidad dependerán de la RC.
Caso (i) RC: $|z| > 0.6$ Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = 0.6^n u[n] \quad (38)$$

El sistema es estable (circunferencia unitaria dentro de la RC) y causal.
Caso (ii) RC: $|z| < 0.6$ Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = -0.6^n u[-n-1] \quad (39)$$

El sistema es inestable (circunferencia unitaria fuera de la RC) y anticausal.

   (c) ¿Que ocurriría si el polo estuviera en $z = 1.2$?

Solución: Suponemos nueva F. de T.:

$$H(z) = \frac{z}{z - 1.2} \tag{40}$$

Caso (iii) RC: $|z| > 1.2$ Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = 1.2^n u[n] \tag{41}$$

El sistema es inestable (circunferencia unitaria fuera de la RC) y causal.
Caso (iv) RC: $|z| < 1.2$ Aplicando transformada inversa:

$$h(n) = -1.2^n u[-n-1] \tag{42}$$

El sistema es estable (circunferencia unitaria dentro de la RC) y anticausal.
Observación: Al mover el polo hacia 1.2, la estabilidad cambia, no así la causalidad.

6. Se tiene un sistema tiempo invariante descrito por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} T[k+1] &= a_0 T[k] + x[k]^2 \\ T_m[k] &= T[k-d] \end{aligned}$$

Donde $x[k]$ es la entrada, y $T_m[k]$ es la salida.

(a) ¿Es este un sistema lineal? Si no es así, obtenga un modelo linealizado para una entrada constante 1.

Solución: El sistema no es lineal, debido al término $x[k]^2$. Con entrada constante $x_e = 1$ y asumiendo estado estacionario, tenemos:

$$T[k+1] = T[k] = T_e \tag{43}$$

Luego:

$$\begin{aligned} T[k+1] &= a_0 T[k] + x[k]^2 && (44) \\ T_e &= a_0 T_e + x_e^2 && (45) \\ T_e &= a_0 T_e + 1 && (46) \\ \Rightarrow T_e &= \frac{1}{1 - a_0} && (47) \end{aligned}$$

T_m es simplemente T tras un retardo, su valor en estado estacionario es el mismo.

$$T_{me} = \frac{1}{1 - a_0} \tag{48}$$

La variables utilizando el punto de operación quedan decritas como:

$$x[k] = x_e + \Delta x[k] \tag{49}$$
$$T[k] = T_e + \Delta T[k] \tag{50}$$
$$T_m[k] = T_{me} + \Delta T_m[k] \tag{51}$$

Con (la primera ecuación se linealiza, la segunda ecuación se toma tal cual pues ya es lineal):

$$\Delta T[k+1] = c_1 \Delta T[k] + c_2 \Delta x[k] \tag{52}$$
$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k-d] \tag{53}$$

Buscamos los coeficientes c_1 y c_2. Consideramos la función a partir de la primera ecuación de estado:

$$f(T, x) = a_0 T + x^2 \tag{54}$$
$$c_1 = \frac{\partial}{\partial T} f(T, x)\bigg|_{(T_e, x_e)} = a_0 \tag{55}$$
$$c_2 = \frac{\partial}{\partial x} f(T, x)\bigg|_{(T_e, x_e)} = 2x_e = 2 \tag{56}$$

Por lo que:

$$\Delta T[k+1] = a_0 \Delta T[k] + 2\Delta x[k] \tag{57}$$
$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k-d] \tag{58}$$

(b) Encuentre la función de transferencia del sistema.

Solución: La F. de T. del sistema linealizado se puede expresar como:

$$H(z) = \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta X(z)} = \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta T(z)} \cdot \frac{\Delta T(z)}{\Delta X(z)} \tag{59}$$

Luego utilizamos transformada Z en el sistema linealizado para encontrar las expresiones que buscamos:

$$\Delta T[k+1] = a_0 \Delta T[k] + 2\Delta x[k] \tag{60}$$
$$z\Delta T(z) = a_0 \Delta T(z) + 2\Delta X(z) \tag{61}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta T(z)}{\Delta X(z)} = \frac{2}{z - a_0} \tag{62}$$

$$\Delta T_m[k] = \Delta T[k-d] \tag{63}$$
$$\Delta T_m(z) = z^{-d}\Delta T(z) \tag{64}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta T_m(z)}{\Delta T(z)} = z^{-d} \tag{65}$$

Finalmente:

$$H(z) = \frac{2}{z-a_0}\cdot z^{-d} = \frac{2}{z^d(z-a_0)} \tag{66}$$

(c) Encuentre la salida ante una entrada $1 + u[k]$ y $d = 2$.

Solución: Para la respuesta utilizamos el sistema linealizado condierando el punto de operación. Tenemos para la entrada:

$$x[k] = x_e + \Delta x[k] = 1 + u[k] \tag{67}$$
$$1 + \Delta x[k] = 1 + u[k] \tag{68}$$
$$\Rightarrow \Delta x[k] = u[k] \tag{69}$$

En cuanto a la salida:

$$T_m[k] = T_{me} + \Delta T_m[k] \tag{70}$$
$$= \frac{1}{1-a_0} + \Delta T_m[k] \tag{71}$$

Obtenemos $\Delta T_m[k]$, mediante la función de transferencia con $d = 2$.

$$\Delta T_m(z) = H(z)\Delta X(z) \tag{72}$$
$$= \frac{2}{z^2(z-a_0)}\cdot\frac{z}{z-1} \tag{73}$$
$$= \frac{2}{z(z-a_0)(z-1)} \tag{74}$$
$$= \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-a_0} + \frac{c_3}{z-1} \tag{75}$$

$$\boxed{c_1 = \left.\frac{2}{(z-a_0)(z-1)}\right|_0 = \frac{2}{a_0}} \tag{76}$$
$$\boxed{c_2 = \left.\frac{2}{z(z-1)}\right|_{a_0} = \frac{2}{a_0^2-a_0}} \tag{77}$$
$$\boxed{c_3 = \left.\frac{2}{z(z-a_0)}\right|_1 = \frac{2}{1-a_0}} \tag{78}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta T_m(z) &= \frac{2}{a_0}\frac{1}{z} + \frac{2}{a_0^2 - a_0}\frac{1}{z - a_0} + \frac{2}{1 - a_0}\frac{1}{z - 1} && (79)\\
&= z^{-1}\frac{2}{a_0} + z^{-1}\frac{2}{a_0^2 - a_0}\frac{z}{z - a_0} + z^{-1}\frac{2}{1 - a_0}\frac{z}{z - 1} && (80)\\
\Delta T_m[k] &= \frac{2}{a_0}\delta[k-1] + \frac{2}{a_0^2 - a_0}a_0^{k-1}u[k-1] + \frac{2}{1 - a_0}u[k-1] && (81)
\end{aligned}$$

Y la respuesta completa sería:

$$\begin{aligned}
T_m[k] &= T_{me} + \Delta T_m[k] && (82)\\
&= \frac{1}{1 - a_0} + \frac{2}{a_0}\delta[k-1] + \frac{2}{a_0^2 - a_0}a_0^{k-1}u[k-1] + \frac{2}{1 - a_0}u[k-1] && (83)
\end{aligned}$$