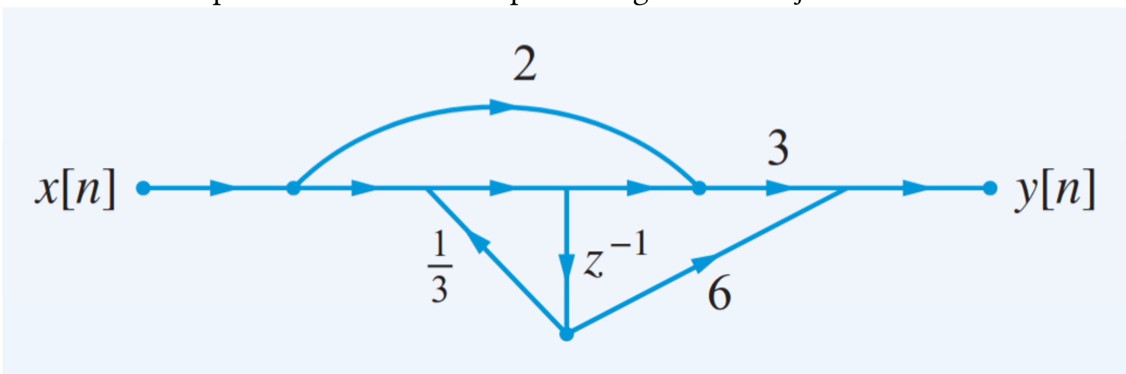
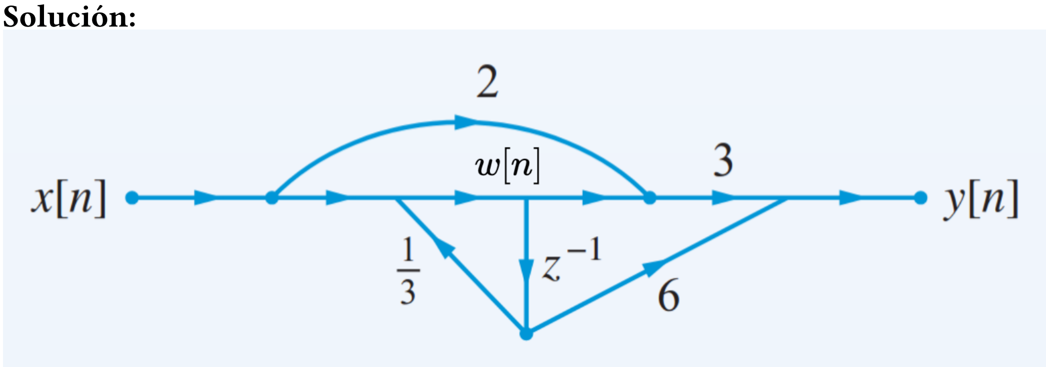
Ayudantía 8 - Procesamiento Digital de Señales

1. Un sistema tiempo discreto es descrito por el diagrama de flujo de señales a continuación:



(a) Determine la ecuación de diferencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

Solución:



Asignando la señal $w[n]$ en el punto indicado, podemos escribir una ecuación de diferencias para $y[n]$:

$$y[n] = 3(2x[n] + w[n]) + 6w[n-1] \tag{1}$$
$$= 6x[n] + 3w[n] + 6w[n-1] \tag{2}$$

Mirando desde $w[n]$ hacia atrás escribimos una ecuación de diferencias para $w[n]$:

$$w[n] = x[n] + \frac{1}{3}w[n-1] \tag{3}$$

Así formamos un sistema de ecuaciones de diferencias que describe el sistema:

$$\begin{cases} y[n] = 6x[n] + 3w[n] + 6w[n-1] \\ w[n] = x[n] + \frac{1}{3}w[n-1] \end{cases} \tag{4}$$

Sin embargo, nosotros queremos una ecuación de diferencias que relacione $y[n]$ con $x[n]$ sin la variable intermedia $w[n]$. En este caso no podemos reemplazar en la primera ecuación el $w[n]$, pues aparece el término $w[n-1]$ y el problema no se resuelve.

Aplicando transformada Z, desarrollamos para reemplazar $W(z)$:

$$\begin{cases} Y(z) = 6X(z) + W(z)(3 + 6z^{-1}) \\ W(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}W(z) \longrightarrow W(z) = \frac{X(z)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \end{cases} \tag{5}$$

$$\downarrow$$

$$Y(z) = 6X(z) + X(z)\frac{3 + 6z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{6}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) = X(z)\left(6 - 2z^{-1}\right) + X(z)\left(3 + 6z^{-1}\right) \tag{7}$$

$$Y(z) = X(z)(9 + 4z^{-1}) + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} \tag{8}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y[n] = 9x[n] + 4x[n-1] + \frac{1}{3}y[n-1] \tag{9}$$

(b) Determine la respuesta a impulso del sistema.

Solución: A partir del paso (6) de la pregunta anterior:

$$Y(z) = 6X(z) + X(z)\frac{3 + 6z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{10}$$

$$H(z) = 6 + \frac{3 + 6z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{11}$$

$$H(z) = 6 - 18\frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{12}$$

$$H(z) = 6 - 18\frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) - \frac{7}{6}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{13}$$

$$H(z) = 6 - 18 - 18\frac{-\frac{7}{6}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{14}$$

$$H(z) = -12 + \frac{21}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{15}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$h[n] = -12\delta[n] + 21\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{16}$$

2. Considere el sistema tiempo discreto dado por

$$y[n] = 3\sum_{m=0}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m} x[n-m] + \sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{m} y[n-m]$$

Determine y dibuje las siguientes estructuras:

(a) Forma directa I (normal)

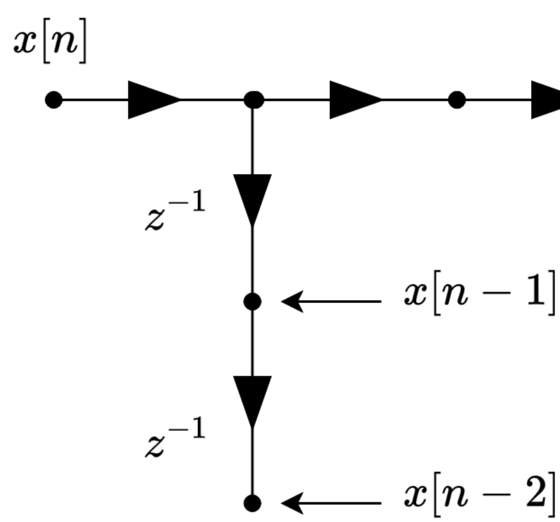
Solución: La forma directa I consiste en concatenar la estructura que da los ceros del sistema (términos x) y luego la estructura que otorga los polos del sistema (términos y).

Desarrollando la ecuación de diferencias:

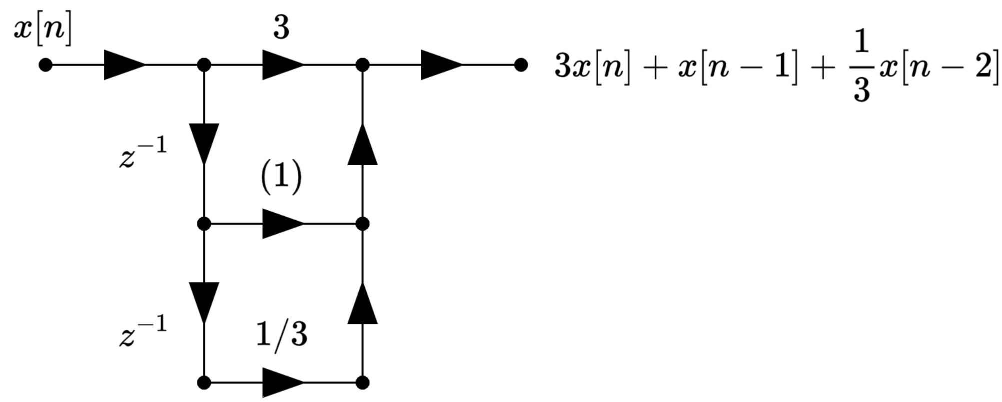
$$\begin{aligned} y[n] = 3\left(x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{9}x[n-1]\right) \\ + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] + \frac{1}{8}y[n-3] \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} y[n] = 3x[n] + x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-1] \\ + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] + \frac{1}{8}y[n-3] \end{aligned} \tag{18}$$

Primero nos ocupamos de la expresión $3x[n] + x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-1]$. Dibujando una rama de la cual se extrae la señal $x[n]$ con los retardos que necesitamos:

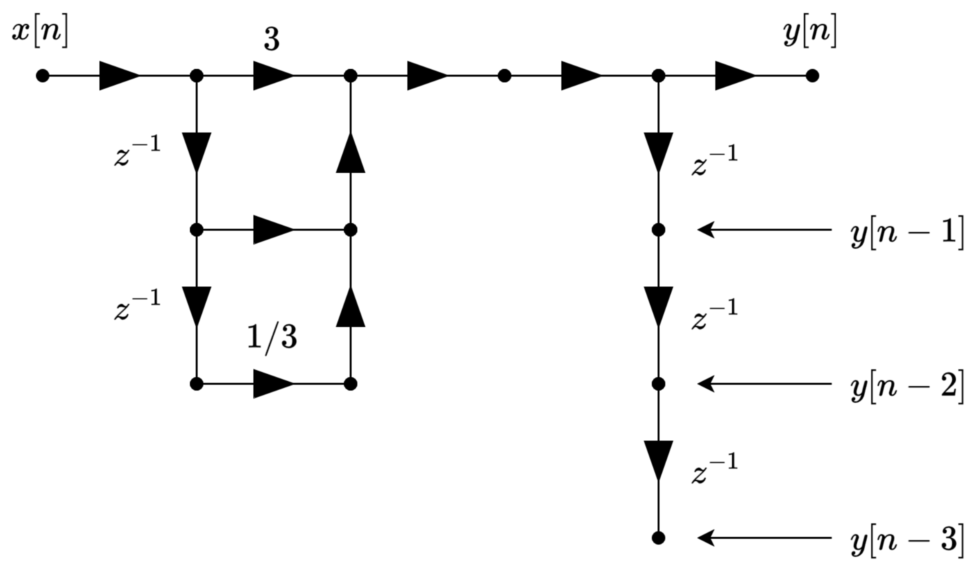


Se multiplican por los coeficientes de la expresión y se suman (el coeficiente 1 puede no escribirse explícitamente):

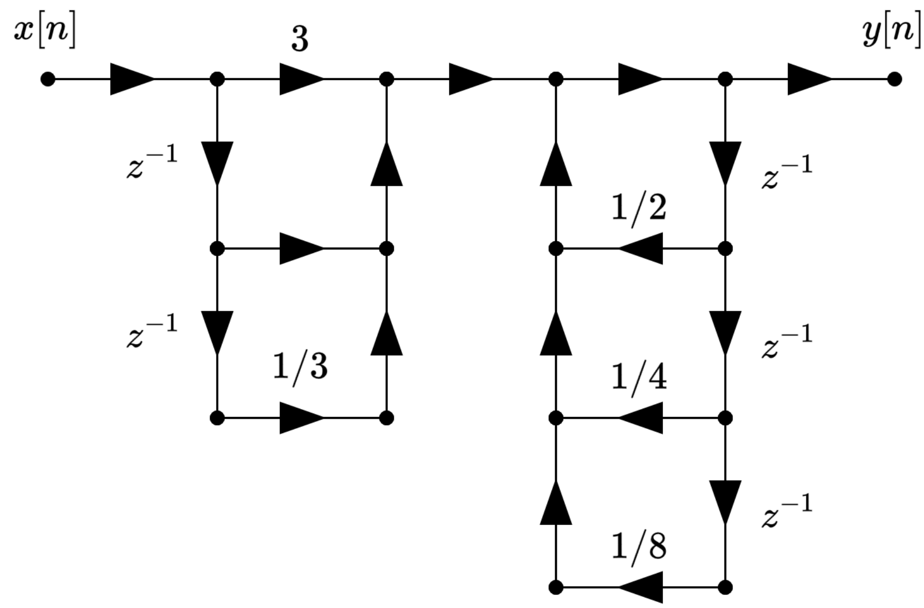


Luego nos ocupamos de la expresión $\frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] + \frac{1}{8}y[n-3]$.

Se extiende la estrucura y se dibuja una rama de donde se extrae la señal $y[n]$ con los retardos necesarios:



Estos se multiplican por los coeficientes de la expresión y se suman **hacia atrás**, dando como resultado la estructura que describe el sistema:



Observemos que si obtenemos la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}} \tag{19}$$

Se nota que igualmente se puede obtener el diagrama de flujos de señales a partir de ella, fijándonos en el numerador y denominador:

$$H(z) = \frac{\overbrace{3 + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}^{\text{coeficientes para } x[n-d]}}{\underbrace{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}_{\text{coeficientes para y[n-d]}}} \tag{20}$$

El exponente de z indica el retardo y el coeficiente que lo acompaña por cuanto se debe multiplicar. El signo de los coeficientes del denominador se invierte.

(b) Forma directa II (normal)

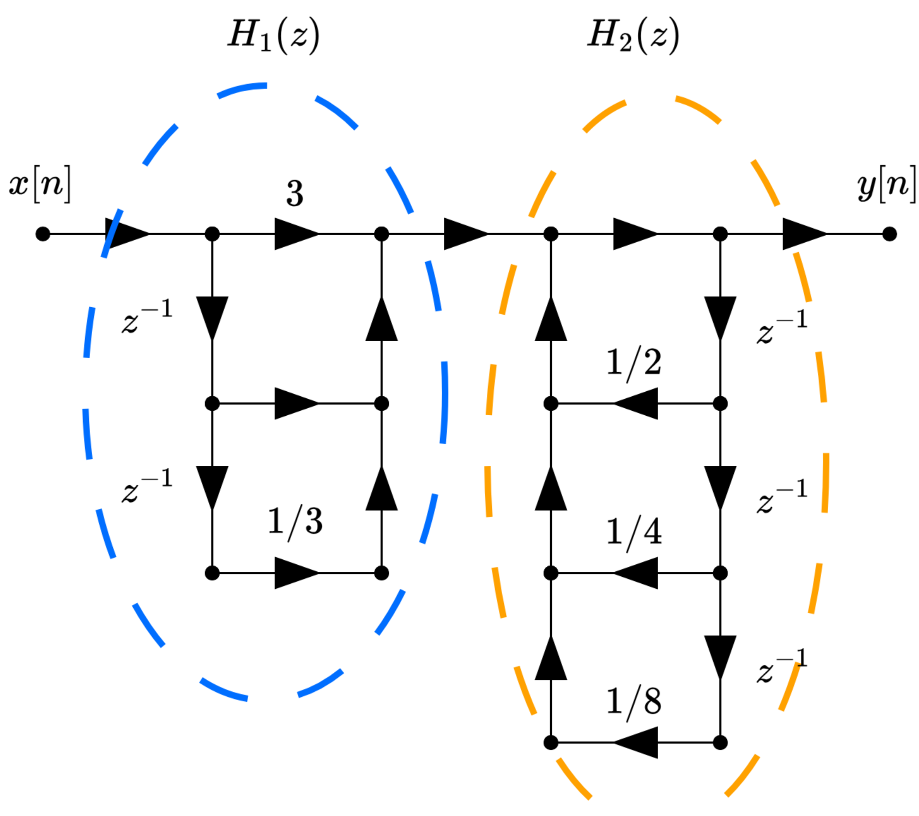
Solución: La forma directa II consiste en invertir el orden en que se realizan las operaciones de la forma directa I.
Notemos que el sistema se puede escribir como:

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}} \tag{21}$$

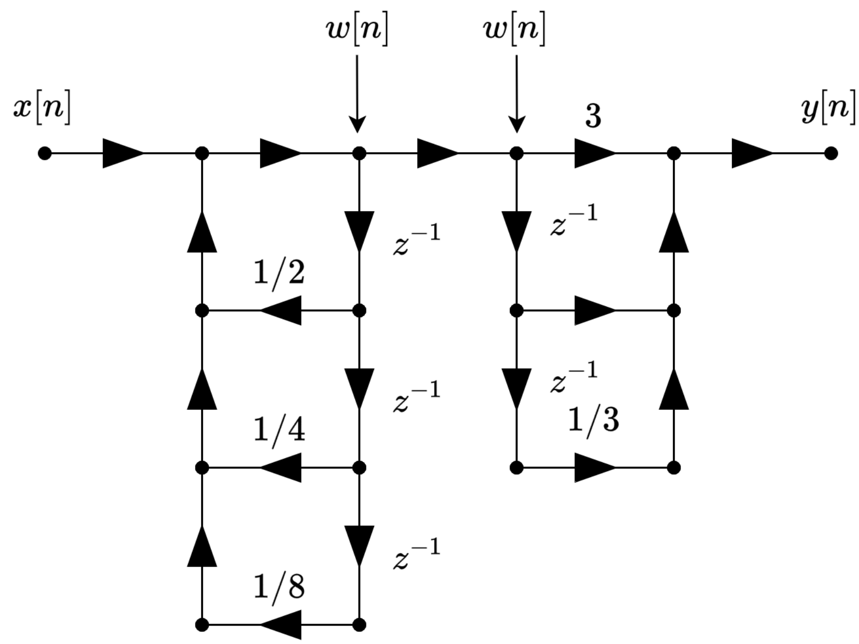
$$= \left(3 + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}} \tag{22}$$

$$= H_1(z) \cdot H_2(z) \tag{23}$$

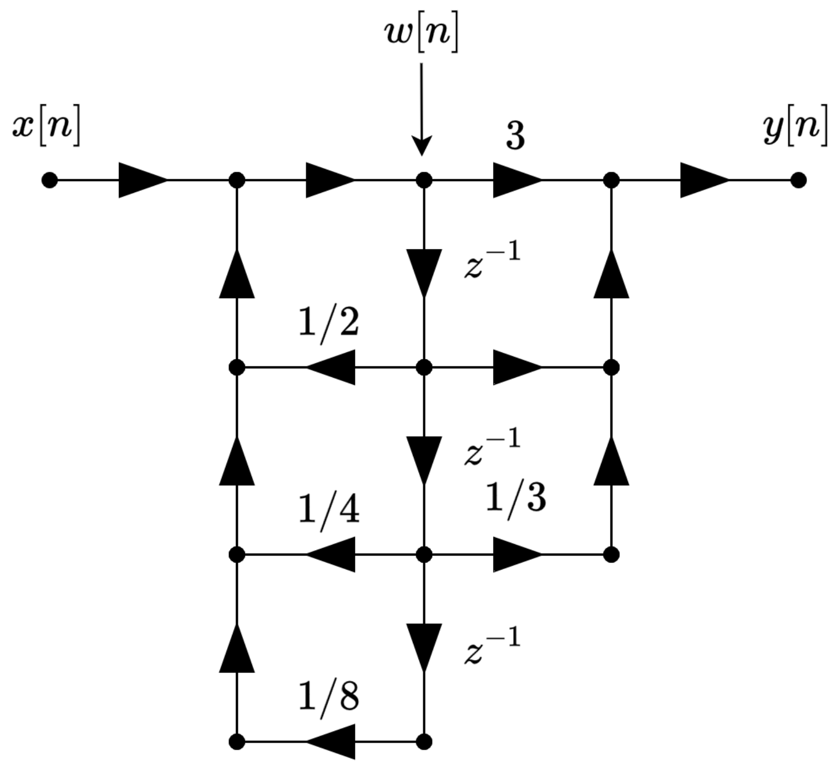
Esto se observa en el diagrama de flujos (forma directa I), como dos sistemas en cascada:



Como $H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$, podemos invertir el orden en que se aplican los sistemas en el diagrama:

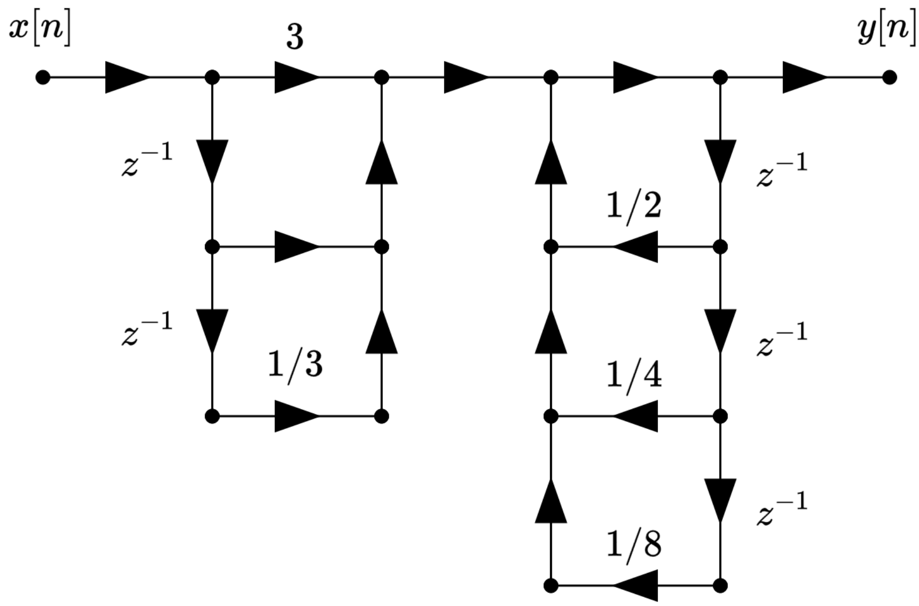


Al realizar aquello, vemos que esta señal intermedia $w[n]$, se retarda en dos ramas distintas a pesar de que es idéntica. Se pueden combinar estas ramas en una:

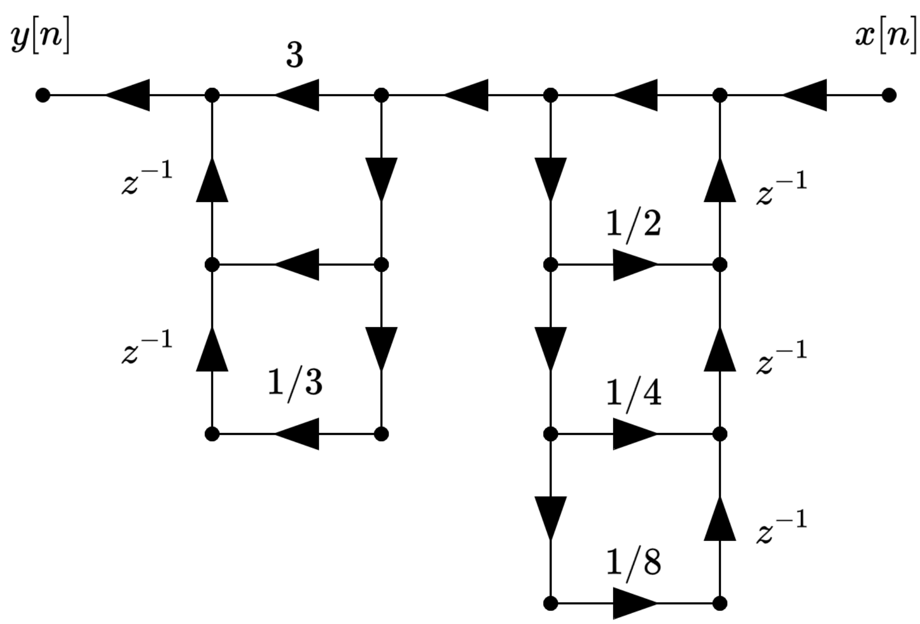


(c) Forma directa I (transpuesta)

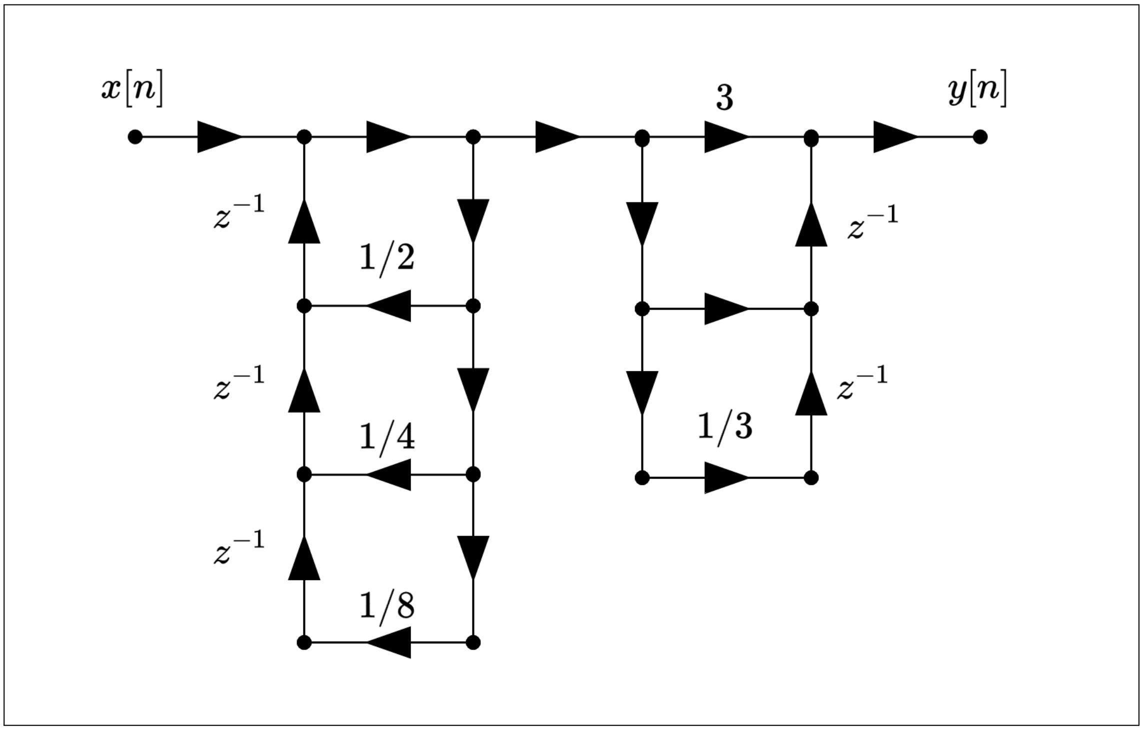
Solución: La forma directa I transpuesta, como dice el nombre corresponde a transponer el diagrama de la forma directa I. Recordemos que la forma directa I es:



Y procedemos a transponer el diagrama. Transponer el diagrama consiste en invertir todas las flechas e intercambiar la entrada y la salida ($x[n]$ e $y[n]$):



Dando como resultado la forma directa I transpuesta. Si se quiere, se puede reflejar el diagrama como un espejo para que quede la entrada al lado izquierdo y la salida al lado derecho:

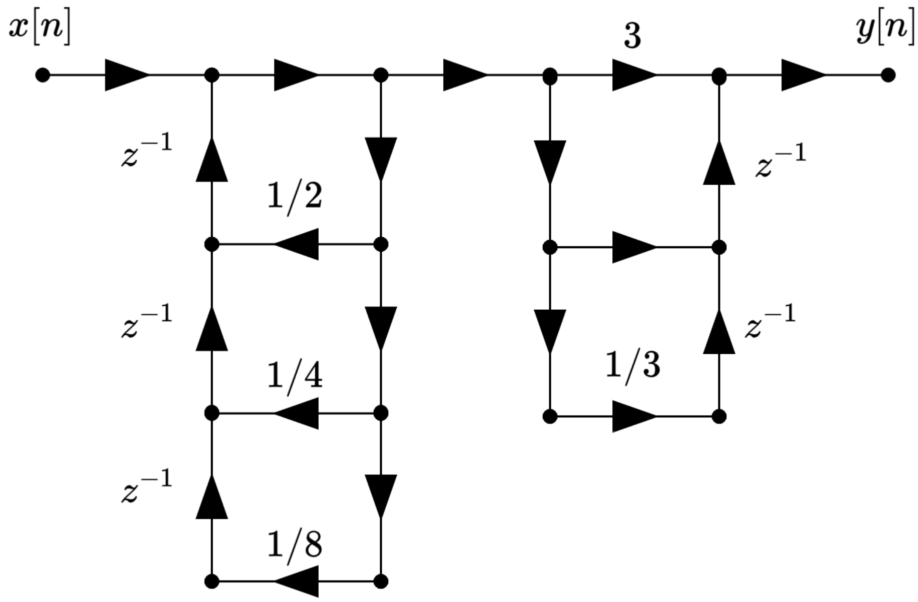


(d) Forma directa II (transpuesta)

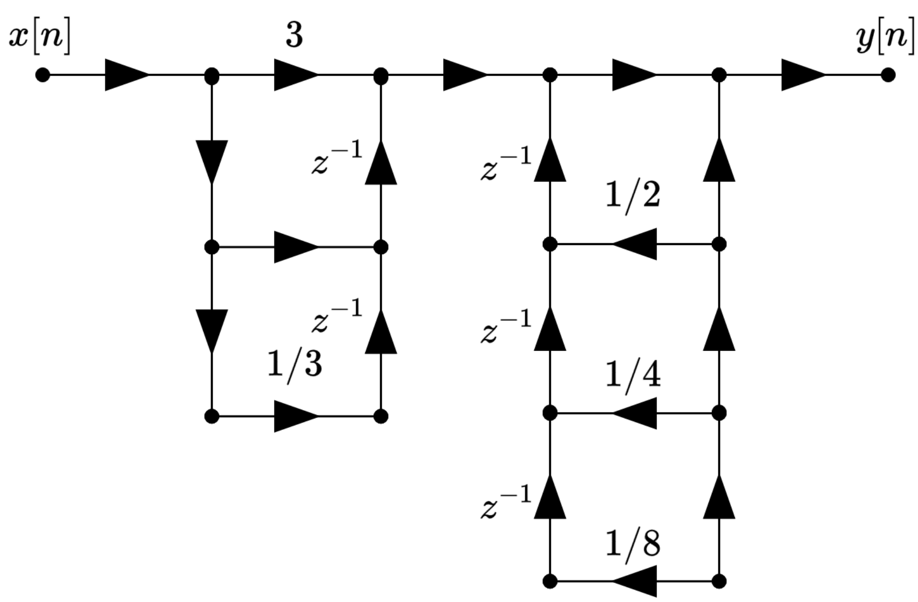
Solución: La forma directa II transpuesta se puede obtener:

- Transponiendo la forma directa II normal
- Invirtiendo el orden de aplicación de la forma directa I transpuesta.

Partiendo de la forma directa I transpuesta:



Si invertimos el orden en que se aplican los sistemas:



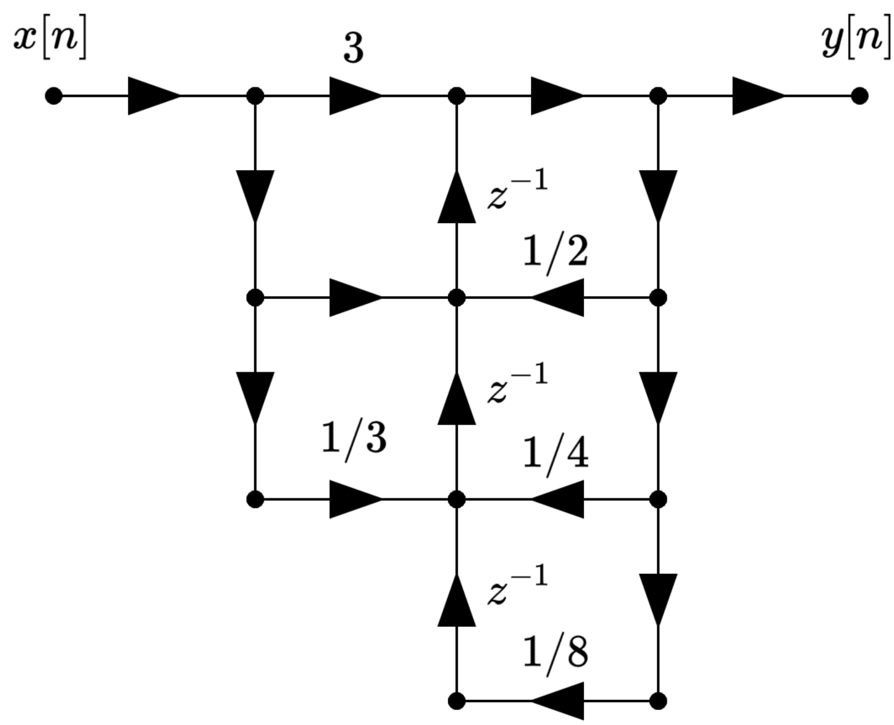
Esta estructura representa la expresión

$$Y(z) = 3X(z) + X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-3} \tag{24}$$

Que es equivalente a:

$$Y(z) = 3X(z) + \left(X(z) + \frac{1}{2}Y(z) \right) z^{-1} + \left(\frac{1}{3}X(z) + \frac{1}{4}Y(z) \right) z^{-2} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-3} \quad (25)$$

Es decir, podemos unir la estructura por la rama del medio:



Es relativamente sencillo observar que se puede llegar a este diagrama directamente de la función de transferencia o ecuación de diferencias

$$H(z) = \frac{\overbrace{3 + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}^{\text{coeficientes para } x[n-d]}}{\underbrace{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}_{\text{coeficientes para y[n-d]}}} \quad (26)$$

De hecho este diagrama es muy similar a la forma directa I, con la diferencia de que aquí se toman las señales $x[n]$ e $y[n]$, se multiplican, se suman, y luego se aplican los retardos correspondientes.

3. Un sistema FIR esta dado por

$$H(z) = 1 + 1.61z^{-1} + 1.74z^{-2} + 1.61z^{-3} + z^{-4}$$

Determine y dibuje las siguientes estructuras:

(a) Forma cascada (utilice el comando `tf2sos` para hallar los coeficientes de segundo orden).

Solución:
Ingresando el sistema a Matlab como numerador y denominador

$$H(z) = \frac{1 + 1.61z^{-1} + 1.74z^{-2} + 1.61z^{-3} + z^{-4}}{1} \tag{27}$$

y aplicando `tf2sos`:

```
%% 3 (a)

b = [1, 1.61, 1.74, 1.61, 1];
a = [1];

sos = tf2sos(b, a)
```

Se obtiene:

```
sos =

    1.0000   -0.1479    1.0000    1.0000         0         0
    1.0000    1.7579    1.0000    1.0000         0         0
```

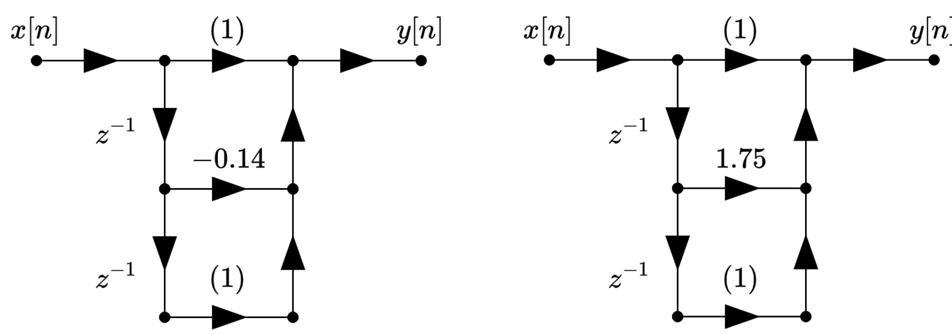
La matriz sos representa una factorización del sistema original en dos sistemas de segundo orden. Las primeras tres columnas representan los numeradores, y las últimas tres los denominadores:

$$H(z) = 1 + 1.61z^{-1} + 1.74z^{-2} + 1.61z^{-3} + z^{-4} \tag{28}$$

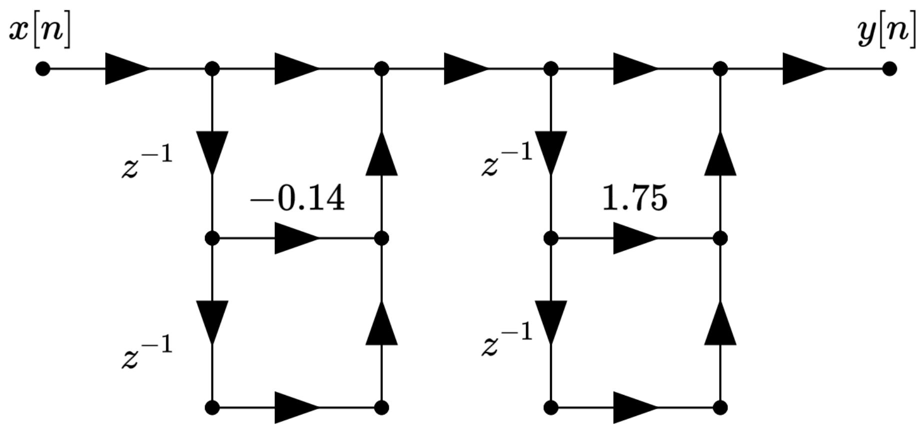
$$= \frac{1 - 0.14z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0z^{-1} + 0z^{-2}} \cdot \frac{1 + 1.75z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0z^{-1} + 0z^{-2}} \tag{29}$$

$$= \left(1 - 0.14z^{-1} + z^{-2}\right)\left(1 + 1.75z^{-1} + z^{-2}\right) \tag{30}$$

Dibujando estos dos sistemas obtenemos:



Concatenándolos uno tras otro obtenemos el diagrama de flujos en forma cascada que implementa el sistema completo:



(b) Forma fase lineal

Solución: Dado que tenemos un sistema de fase lineal con

$$H(z) = 1 + 1.61z^{-1} + 1.74z^{-2} + 1.61z^{-3} + z^{-4} \tag{31}$$
$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$
$$h[n] = \delta[n] + 1.61\delta[n-1] + 1.74\delta[n-2] + 1.61\delta[n-3] + \delta[n-4] \tag{32}$$

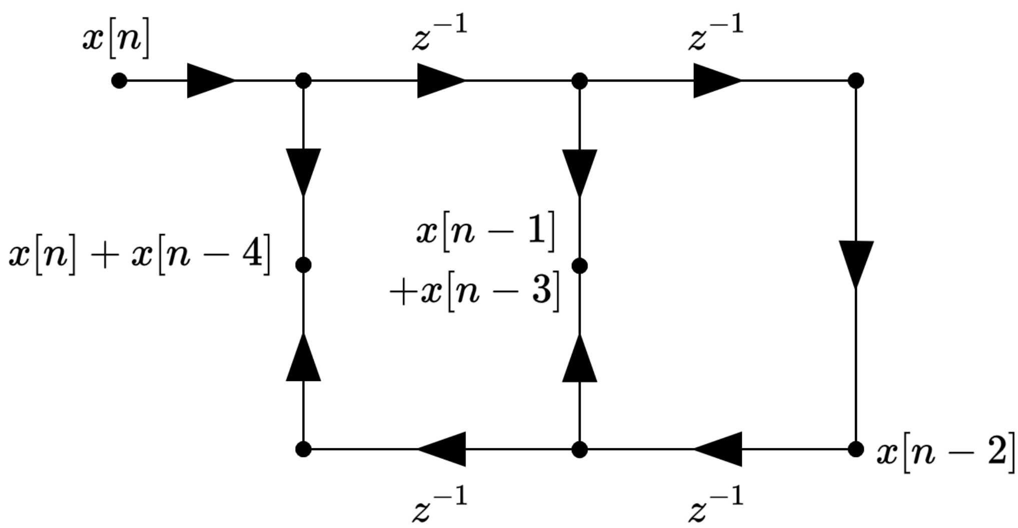
Es decir, $h[n] = h[4-n]$ $(0 \leq n \leq 4)$, podemos dibujar una estructura en forma fase lineal.
Observemos que:

$$H(z) = 1 + 1.61z^{-1} + 1.74z^{-2} + 1.61z^{-3} + z^{-4} \tag{33}$$
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 + z^{-4}) + 1.61(z^{-1} + z^{-3}) + 1.74z^{-2} \tag{34}$$

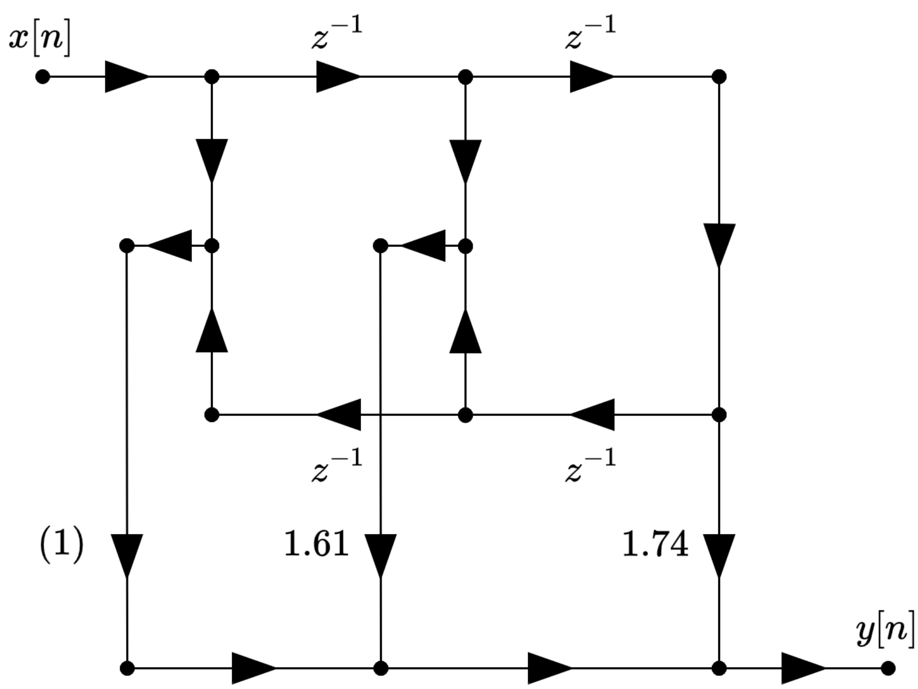
Pasándolo a ecuación de diferencias:

$$y[n] = (1)\,(x[n] + x[n-4]) + 1.61\,(x[n-1] + x[n-3]) + 1.74x[n-2] \tag{35}$$

Esta es nuestra guía para dibujar el diagrama. Comenzamos sumando lo indicado entre paréntesis:



Y posteriormente multiplicamos cada suma por su coeficiente correspondiente, y los sumamos:



4. Un sistema IIR viene dado por:

$$H(z) = \frac{3.96 + 6.36z^{-1} + 8.3z^{-2} + 4.38z^{-3} + 2.07z^{-4}}{1 + 0.39z^{-1} - 0.93z^{-2} - 0.33z^{-3} + 0.34z^{-4}}$$

Utilizando Matlab determine:

(a) Una estructura en forma paralela

Solución: Se utiliza el comando `residuez`. Al aplicarlo sobre el sistema:

```
b = [3.96, 6.36, 8.3, 4.38, 2.07];
a = [1, 0.39, -0.93, -0.33, 0.34];

[R, p, C] = residuez(b, a)
```

Se obtiene:

```
R =

  -0.0252 + 1.6371i
  -0.0252 - 1.6371i
  -1.0389 -40.5443i
  -1.0389 +40.5443i


p =

  -0.8384 + 0.3211i
  -0.8384 - 0.3211i
   0.6434 + 0.0883i
   0.6434 - 0.0883i


C =

    6.0882
```

Donde:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{3.96 + 6.36z^{-1} + 8.3z^{-2} + 4.38z^{-3} + 2.07z^{-4}}{1 + 0.39z^{-1} - 0.93z^{-2} - 0.33z^{-3} + 0.34z^{-4}} && (36)\\
&\downarrow \texttt{residuez()} \\
&= \frac{R_1}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - p_2z^{-1}} + \frac{R_3}{1 - p_3z^{-1}} + \frac{R_4}{1 - p_4z^{-1}} + C && (37)\\
&= \frac{R_1}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{\overline{R_1}}{1 - \overline{p_1}z^{-1}} + \frac{R_3}{1 - p_3z^{-1}} + \frac{\overline{R_3}}{1 - \overline{p_3}z^{-1}} + 6.08 && (38)
\end{aligned}
$$

Si bien a partir de esta expresión podríamos dibujar el diagrama en forma paralela, es conveniente expresarlo en téminos de segundo orden para evitar matemáticas complejas en el diagrama. Sumando los pares conjugados obtenemos los sistemas de segundo orden con coeficientes reales.

Esto se puede realizar utilizando el mismo comando `residuez`. Emparejando los términos correspondientes:

$$
H(z) = \underbrace{\frac{R_1}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{\overline{R_1}}{1 - \overline{p_1}z^{-1}}}_{\texttt{R(1:2), p(1:2)}} + \underbrace{\frac{R_3}{1 - p_3z^{-1}} + \frac{\overline{R_3}}{1 - \overline{p_3}z^{-1}}}_{\texttt{R(3:4), p(3:4)}} + 6.08 \qquad (39)
$$

Se ingresan a matlab:

```
[B1, A1] = residuez(R(1:2), p(1:2), [])
[B2, A2] = residuez(R(3:4), p(3:4), [])

B1 =

  -0.0504 + 0.0000i  -1.0937 + 0.0000i


A1 =

    1.0000    1.6769    0.8061


B2 =

   -2.0778    8.4985


A2 =

    1.0000   -1.2869    0.4218
```

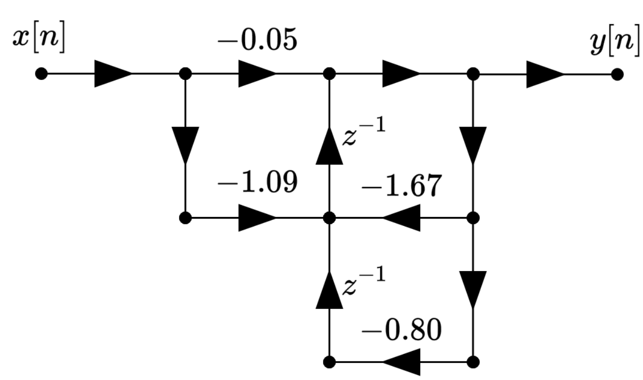
Es decir:

$$H(z) = \frac{-0.05 - 1.09z^{-1}}{1 + 1.67z^{-1} + 0.80z^{-2}} + \frac{-2.07 + 8.49z^{-1}}{1 - 1.28z^{-1} + 0.42z^{-2}} + 6.08 \tag{40}$$

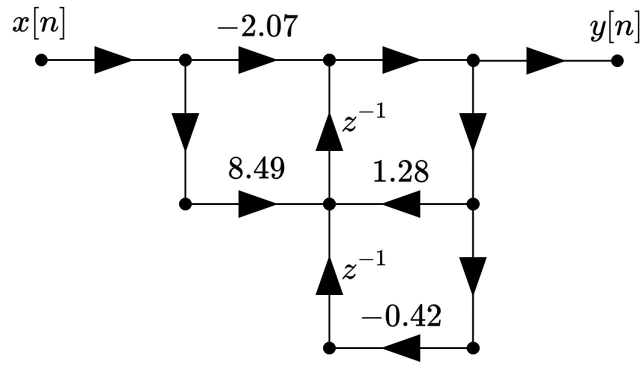
Y dibujamos el diagrama de cada uno de los términos.

Para 6.08:

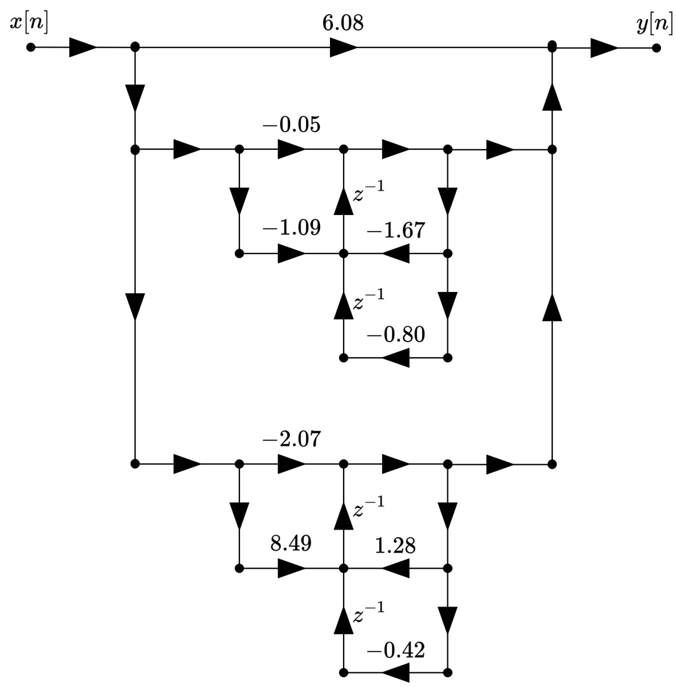
Para $\frac{-0.05-1.09z^{-1}}{1+1.67z^{-1}+0.80z^{-2}}$:



Para $\frac{-2.07+8.49z^{-1}}{1-1.28z^{-1}+0.42z^{-2}}$:



Finalmente se unen todos en paralelo y se suman:



(b) Una estructura en forma cascada

Solución: Se ingresa la función de transferencia a Matlab y se usa el comando `tf2sos`:

```
%% 4 (b)

b = [3.96, 6.36, 8.3, 4.38, 2.07];
a = [1, 0.39, -0.93, -0.33, 0.34];

sos = tf2sos(b, a)
```

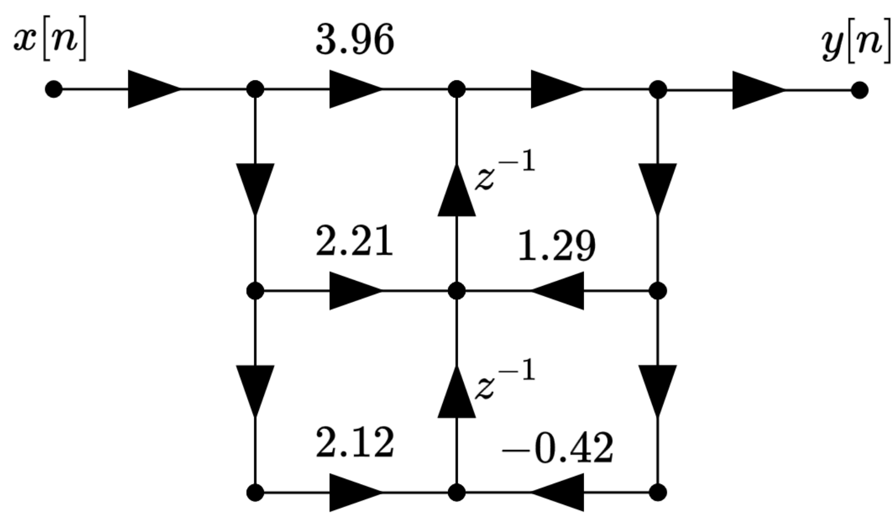
```
sos =

    3.9600    2.2107    2.1236    1.0000   -1.2869    0.4218
    1.0000    1.0478    0.9748    1.0000    1.6769    0.8061
```

La matriz respresenta una factorización de la función de transferencia en sistemas de segundo orden. Cada fila es un factor. Las tres primeras columnas corresponden a los numeradores y las últimas tres a los denominadores. Así:

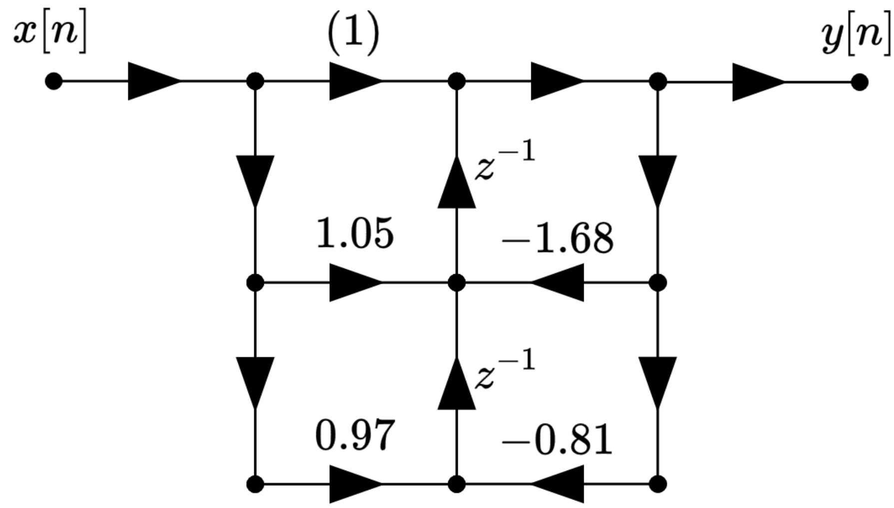
$$H(z) = \frac{3.96 + 6.36z^{-1} + 8.3z^{-2} + 4.38z^{-3} + 2.07z^{-4}}{1 + 0.39z^{-1} - 0.93z^{-2} - 0.33z^{-3} + 0.34z^{-4}} \tag{41}$$

$$= \frac{3.96 + 2.21z^{-1} + 2.12z^{-2}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.42z^{-2}} \cdot \frac{1 + 1.05z^{-1} + 0.97z^{-2}}{1 + 1.68z^{-1} + 0.81z^{-2}} \tag{42}$$

Dibujando el diagrama de cada factor (forma directa II transpuesta):
Para $\frac{3.96+2.21z^{-1}+2.12z^{-2}}{1-1.29z^{-1}+0.42z^{-2}}$:



Y para $\frac{3.96+2.21z^{-1}+2.12z^{-2}}{1-1.29z^{-1}+0.42z^{-2}}$:



Al concatenar ambos se obtiene el diagrama de la estructura completa: