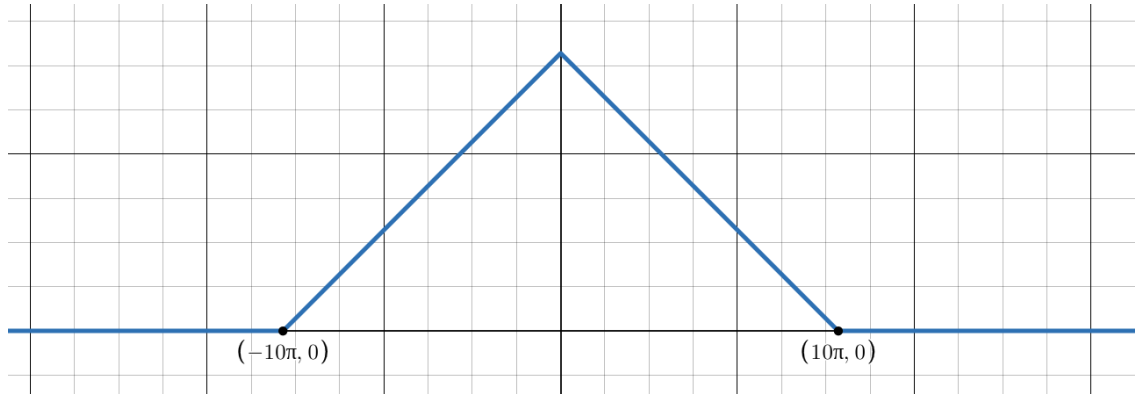


Ayudantía 5 - Procesamiento Digital de Señales

1. Una señal $x_c(t)$ tiene el espectro de magnitud $X_c(j\Omega)$ que se muestra en la figura:



La señal se muestrea con un periodo de muestreo $T = 1/8$ segundos.

- (a) Encuentre la frecuencia de Nyquist Ω_H .

Solución: La frecuencia de Nyquist corresponde a la máxima frecuencia presente en la señal. Por inspección: $\Omega_H = 10\pi = 5 \cdot 2\pi$ (en Hz: $F_H = 5$ Hz).

- (b) ¿Se cumple el teorema de muestreo?

Solución: El teorema de muestreo (o teorema de Nyquist) dice que si $F_s \geq 2F_H$ entonces la señal se puede recuperar completamente.

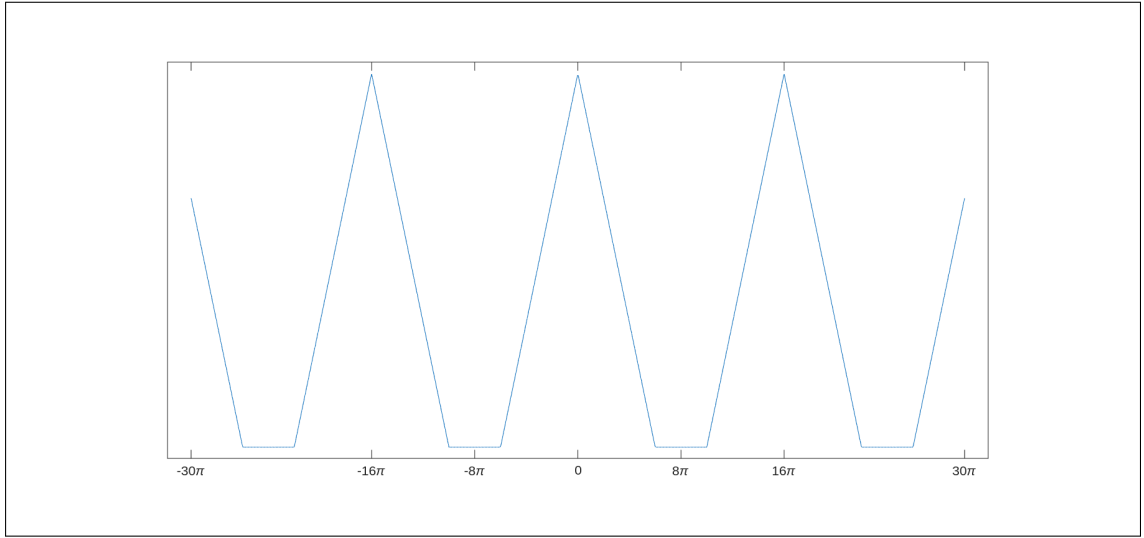
Con $T = 1/8$, $F_s = 1/T = 8$ Hz, y $F_H = 5$ Hz, la desigualdad $F_s \geq 2F_H$ no se cumple y no se cumple el teorema de muestreo.

- (c) Dibuje el espectro $X(e^{j\Omega T})$ de la señal muestreada $x[n]$ en el rango $-30\pi \leq \Omega \leq 30\pi$.

Solución: El espectro corresponde a la sumatoria de copias desplazadas en $2\pi/T = 2\pi F_s = 16\pi$ del espectro original.

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - j16\pi k) \quad (2)$$



2. Se tiene una señal continua $x_c(t) = 2 \cos(150\pi t)$.

(a) Escoja una frecuencia de muestreo adecuada para la señal.

Solución: La frecuencia de Nyquist (máxima frecuencia) es $150\pi = 75 \cdot 2\pi$ (es decir 75 Hz). Al escoger una frecuencia de muestreo, utilizamos como criterio el teorema de muestreo (o de Nyquist): $F_s \geq 2F_H$.

Por lo tanto:

$$F_s \geq 2F_H = 2 \cdot 75 \quad (3)$$

$$\geq 150 \text{ Hz} \quad (4)$$

Escogiendo una tasa de muestreo sobre 150 Hz, seremos capaces de recuperar la señal sin aliasing. Podemos escoger por ejemplo, $F_s = 300$ Hz.

(b) La señal se muestrea, y posteriormente se reconstruye utilizando un retentor de orden cero y un filtro ideal que bloquea frecuencias por encima de la frecuencia de Nyquist. Bosqueje la señal en cada paso y determine la señal reconstruida.

Solución: Se considera $F_s = 300$ Hz ($T = 1/300$).

La señal original $x_c(t)$ se muestrea cada $t = nT$.

$$x[n] = x_c(nT) = 2 \cos(150\pi nT) \quad (5)$$

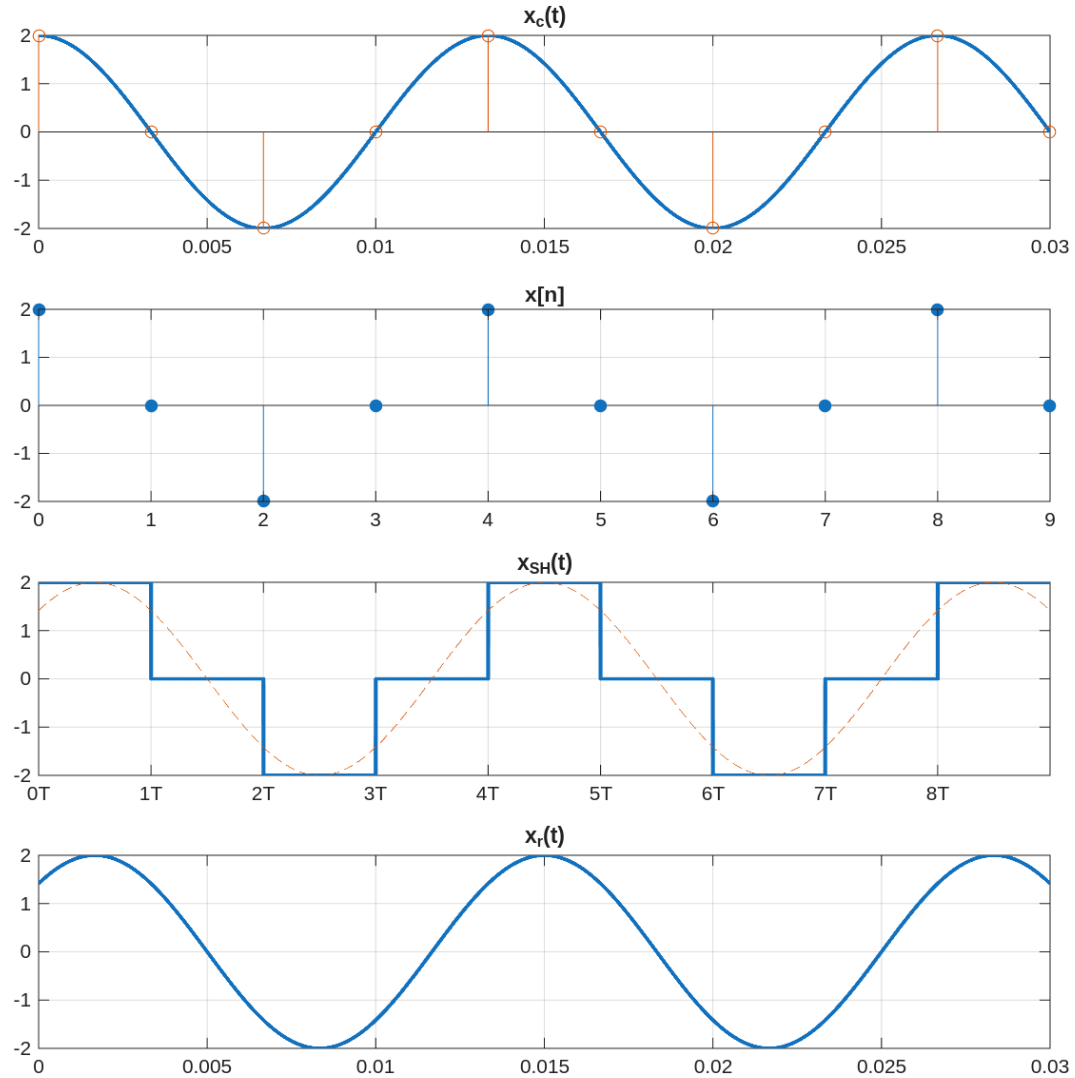
$$= 2 \cos\left(\frac{150}{300}\pi n\right) \quad (6)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (7)$$

Tras el retentor de orden cero, la señal $x_{SH}(t)$ mantiene el valor de cada muestra por $T = 1/300$ tiempo.

El filtro elimina las frecuencias $F > \frac{F_s}{2}$ introducidas por el retentor y el muestreo. Como se cumple el teorema de muestreo, la señal recuperada es la original con un retardo de $T/2 = 1/600$ (debido al retentor de orden cero):

$$x_r(t) = x_c(t - T/2) = 2 \cos(150\pi[t - T/2]) = 2 \cos(150\pi t - \pi/4)$$



Nota: Se asume que el filtro compensa la atenuación de la señal causada por este.

3. Considere la siguiente señal tiempo continuo:

$$x_c(t) = 5 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi t)$$

(a) Determine las frecuencias (en Hz) presentes en la señal.

Solución: Las frecuencias presentes en la señal se hallan mediante inspección:

$$x_c(t) = 5 \cos \left(200\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin(400\pi t) \quad (8)$$

$$= 5 \cos \left(\underbrace{100}_{F_1} \cdot 2\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin \left(\underbrace{200}_{F_2} \cdot 2\pi t \right) \quad (9)$$

Las frecuencias son $F_1 = 100$ Hz, y $F_2 = 200$ Hz.

- (b) Determine la frecuencia de Nyquist, y tasa de muestreo para un muestreo sin aliasing.

Solución: La frecuencia de Nyquist F_H corresponde a la mayor frecuencia en la señal. En este caso $F_2 = 200$ Hz es la mayor frecuencia, por lo que $F_H = 200$ Hz.

Para una tasa de muestreo sin aliasing, consideramos el teorema de Nyquist.

$$F_s \geq 2F_H \quad (10)$$

$$\geq 400 \text{ Hz} \quad (11)$$

Para una tasa de muestreo sin aliasing, esta debe ser mayor o igual a 400 Hz.

- (c) La señal se muestrea con $F_s = 500$ Hz (ADC ideal). Determine el espectro $|X(e^{j\Omega T})|$ de la señal muestreada $x[n]$ y grafique su magnitud como función de la frecuencia F en Hz.

Solución: Nota: $\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 t}\} = \pi \delta(\Omega - \Omega_0)$

Notemos que la señal se puede descomponer en exponenciales complejas:

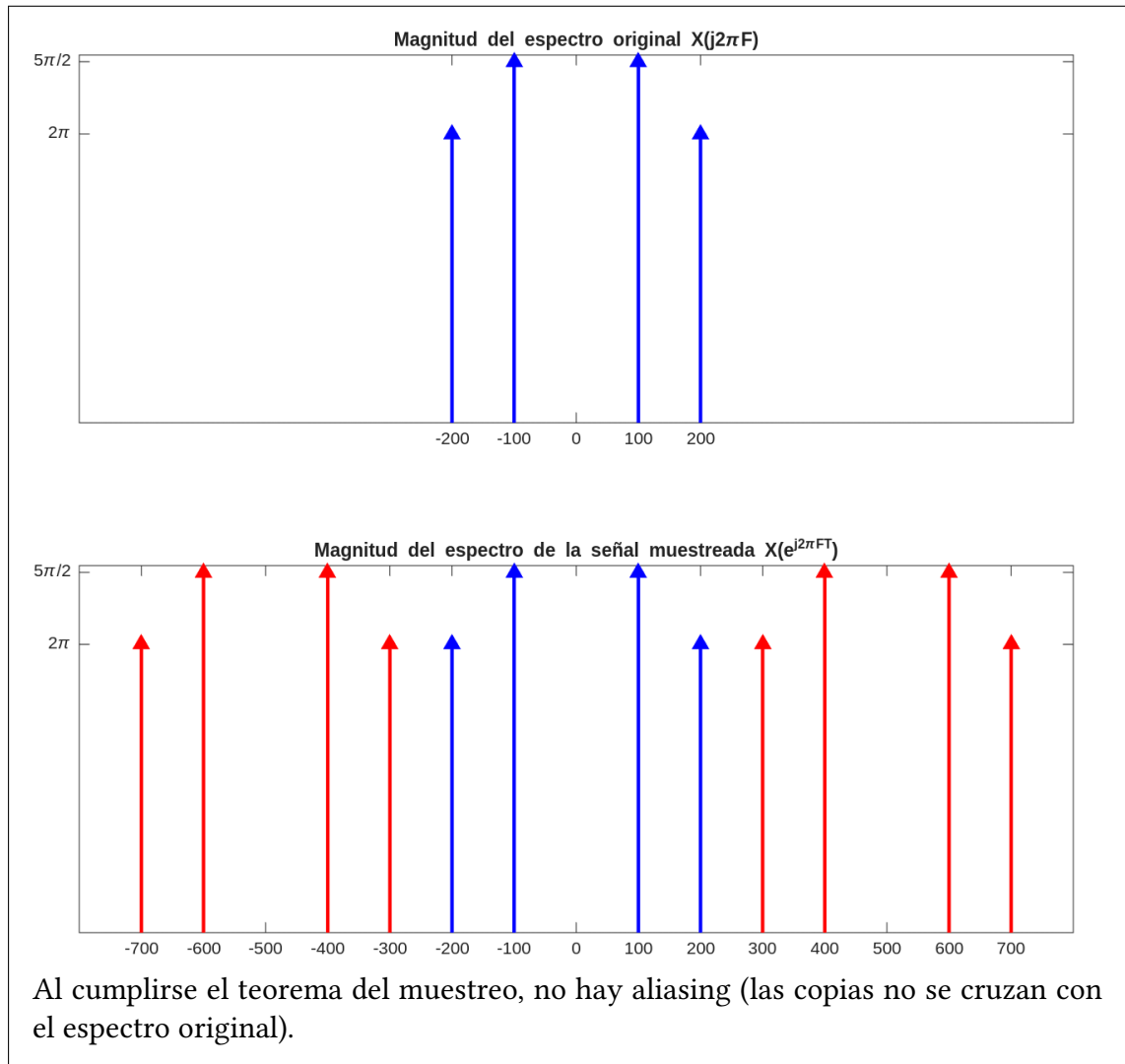
$$x_c(t) = 5 \cos \left(200\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin(400\pi t) \quad (12)$$

$$= \frac{5e^{j\pi/6}}{2} e^{j200\pi t} + \frac{5e^{-j\pi/6}}{2} e^{-j200\pi t} + \frac{4}{2} e^{j400\pi t} - \frac{4}{2} e^{-j400\pi t} \quad (13)$$

El espectro original tiene picos en las frecuencias $\pm 200\pi$ y $\pm 400\pi$. En Hz, estas son ± 100 Hz, y ± 200 Hz.

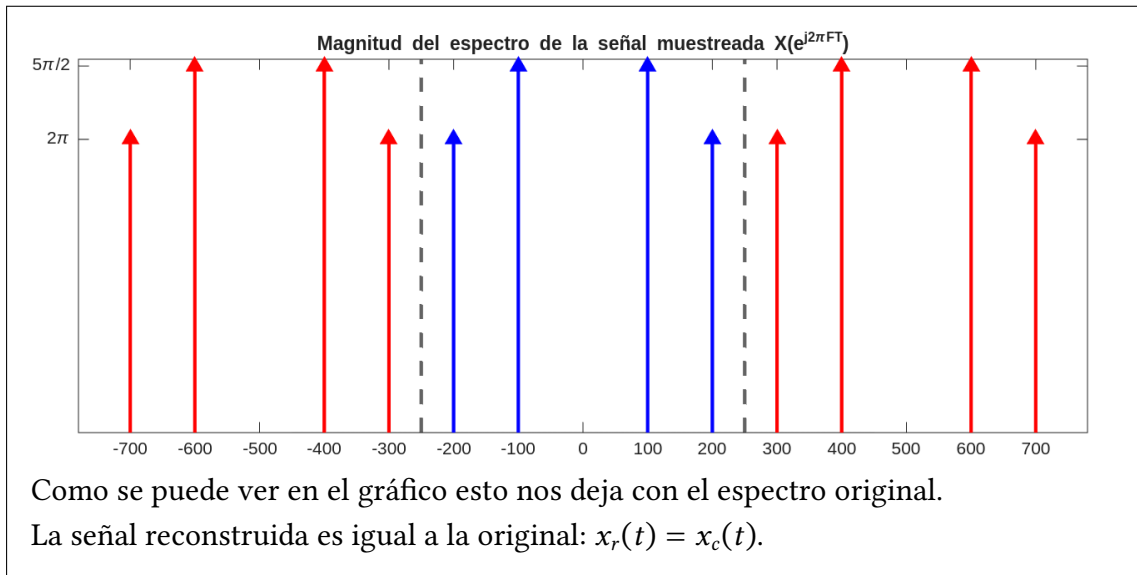
Al muestrear la señal, el espectro se hace periódico. Aparecen copias del espectro original desplazadas en $2\pi/T = 2\pi F_s = 1000\pi$ hacia la izquierda y hacia la derecha. En Hz, las copias se desplazan $F_s = 500$ Hz hacia los lados.

En el gráfico, las copias debido al muestreo se muestran en rojo.



(d) Determine la señal $x_r(t)$ reconstruida utilizando un DAC ideal.

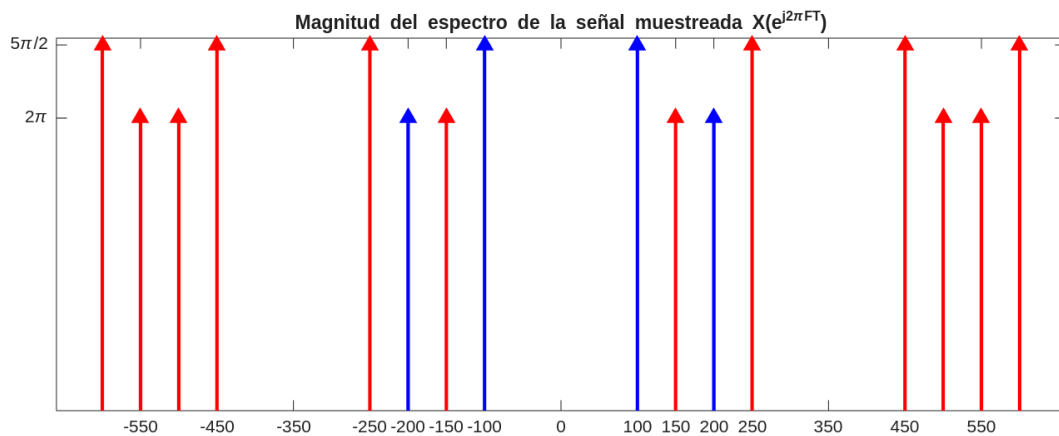
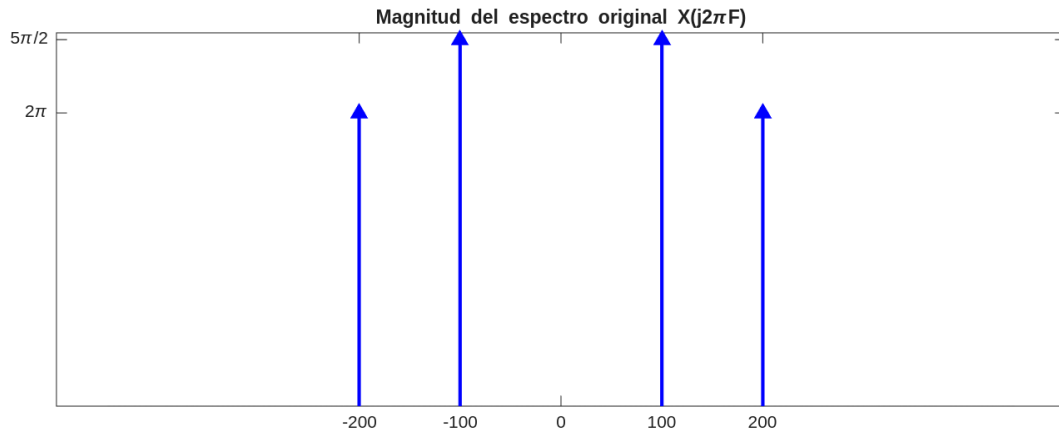
Solución: Dado que se cumple el teorema del muestreo (con $F_s = 500 \text{ Hz} > 400 \text{ Hz}$), se recupera la señal original (DAC ideal).
 DAC ideal reconstruye la señal tomando las frecuencias $|F| \leq F_s/2 = 250 \text{ Hz}$.



(e) Repita (c) y (d), muestreando la señal con $F_s = 350$ Hz.

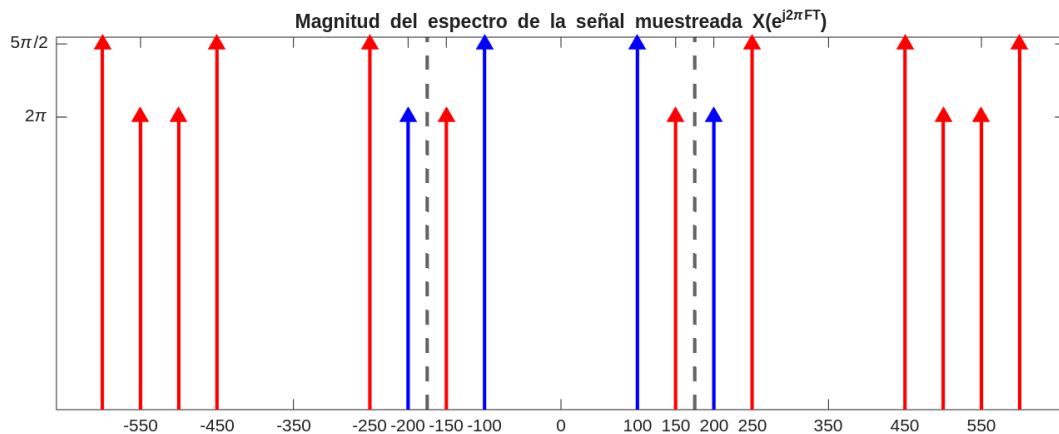
Solución: Al muestrear con $F_s = 350$ Hz, no se cumple el teorema del muestreo ($350 \text{ Hz} < 400 \text{ Hz}$).

Las copias del espectro original se desplazan $F_s = 350$ Hz hacia la izquierda y hacia la derecha.



Como se puede ver, el espectro de las copias se cruza con el espectro original. Hay aliasing.

Al reconstruir la señal, el DAC ideal toma las frecuencias $|F| < F_s/2 = 175$ Hz.



El espectro dentro de las líneas punteadas ya no es el espectro original.

Para hallar la respuesta reconstruida, consideramos la formula de interpolación del

DAC ideal (banda limitada):

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]g_{BL}(t - nT) \quad (14)$$

$$g_{BL}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (15)$$

En este caso al tratarse de señales sinusoidales, se puede encontrar de una manera un poco más cualitativa:

1. Aplicamos el muestreo.

$$x[n] = x_c(nT) = 5 \cos\left(200\pi nT + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin(400\pi nT) \quad (16)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n\right) \quad (17)$$

2. En el dominio discreto la frecuencia es periódica. Llevamos todas las frecuencias al intervalo $[-\pi, \pi]$. Vemos que $400\pi/350 > \pi$:

$$x[n] = 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n\right) \quad (18)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n - 2\pi n\right) \quad (19)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\frac{400}{350}\pi n - \frac{700}{350}\pi n\right) \quad (20)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(-\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (21)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (22)$$

$$(23)$$

3. El DAC ideal “deshace” la sustitución $t = nT = n/350$:

$$x[n] = 5 \cos\left(\frac{200}{350}\pi n - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{300}{350}\pi n\right) \quad (24)$$

$$\downarrow t = n/350$$

$$x_r(t) = 5 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin(300\pi t) \quad (25)$$

En la señal reconstruida, desaparece la frecuencia 200 Hz (400π), y aparece otra frecuencia a 150 Hz (300π) producto del aliasing. Esto concuerda con el gráfico mostrado anteriormente.