

Ayudantía 2 - Procesamiento Digital de Señales

1. Sea $x(t) = 2 + 4 \sin(3\pi t) + 6 \cos(8\pi t + \pi/3)$:

(a) Determine la frecuencia fundamental Ω_0 de $x(t)$

Solución: Para encontrar la frecuencia fundamental Ω_0 (rad/s), basta con mirar las frecuencias presentes en nuestra señal original, y hallar el "máximo común divisor".

$$2 + \underbrace{4 \sin(3\pi t)}_{3\pi} + \underbrace{6 \cos(8\pi t + \pi/3)}_{8\pi} \quad (1)$$

Como $\text{mcd}(3\pi, 8\pi) = \pi$, la frecuencia fundamental sería $\Omega_0 = \pi$.

(b) Determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier. Bosquejar magnitud y fase como función de $k\Omega_0$.

Solución: Como la señal periódica está compuesta por sinusoidales de frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental, se hallan los coeficientes por inspección. Recordemos que:

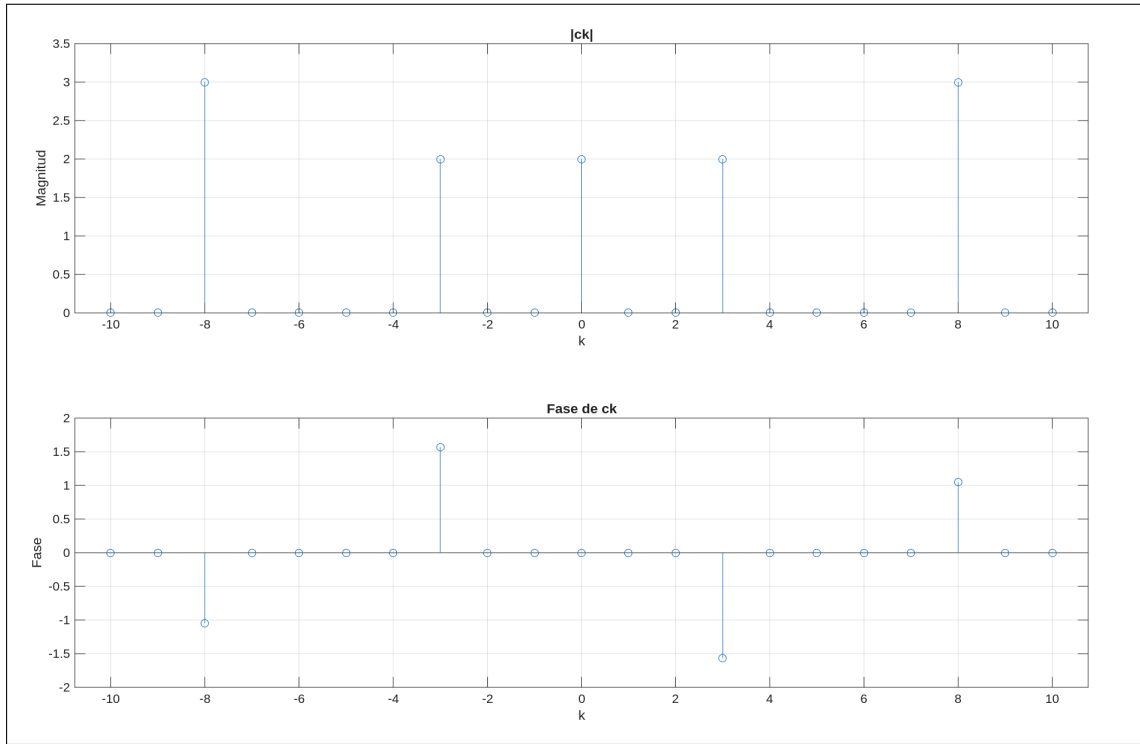
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} = x(t) \quad (2)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t} = 2 + 4 \sin(3\pi t) + 6 \cos(8\pi t + \pi/3) \quad (3)$$

$$= 2 + \frac{4}{2j} [e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}] + \frac{6}{2} [e^{j8\pi t + j\pi/3} + e^{-j\pi t - j\pi/3}] \quad (4)$$

$$= \underbrace{2}_{c_0} e^{j(0)\pi t} + \underbrace{-2j}_{c_3} e^{j(3)\pi t} + \underbrace{2j}_{c_{-3}} e^{j(-3)\pi t} + \underbrace{3e^{j\pi/3}}_{c_8} e^{j(8)\pi t} + \underbrace{3e^{-j\pi/3}}_{c_{-8}} e^{j(-8)\pi t} \quad (5)$$

Por lo tanto tenemos: $c_{-8} = 3e^{-j\pi/3}$, $c_{-3} = 2j$, $c_0 = 2$, $c_3 = -2j$, $c_8 = 3e^{j\pi/3}$ y $c_k = 0$ para cualquier otro k .



2. Considere la señal aperiódica $x(t)$ y la señal periódica $\tilde{x}(t)$ definidas por:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 2k)$$

(a) Obtenga la transformada de Laplace de $x(t)$.

Solución:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6)$$

$$= \int_{-1}^1 e^{-t} e^{-st} dt \quad (7)$$

$$= \frac{e^{s+1}}{s+1} - \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \quad (8)$$

(b) Calcule la transformada de Fourier $X(j\Omega)$ de $x(t)$.

Solución:

$$X(j\Omega) = X(s)|_{s=j\Omega} \quad (9)$$

$$= \frac{e^{j\Omega+1}}{j\Omega+1} - \frac{e^{-(j\Omega+1)}}{j\Omega+1} \quad (10)$$

- (c) Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. Verifique la relación $c_k = \left. \frac{1}{T_0} X(j\Omega) \right|_{\Omega=k\Omega_0}$.

Solución: Los coeficientes se calculan por medio de la expresión:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (11)$$

En nuestro caso, la señal $\tilde{x}(t)$ se forma tomando la señal $x(t)$ como periodo base, desplazándola sucesivamente en 2 unidades. El periodo viene dado por $T_0 = 2$. En cuanto a la frecuencia angular: $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi/T_0 = \pi$. Sustituyendo en la expresión, y escogiendo como intervalo de integración $[-1,1]$:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-t} e^{-jk\pi t} dt \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jk\pi+1}}{jk\pi+1} - \frac{e^{-(jk\pi+1)}}{jk\pi+1} \right] \quad (13)$$

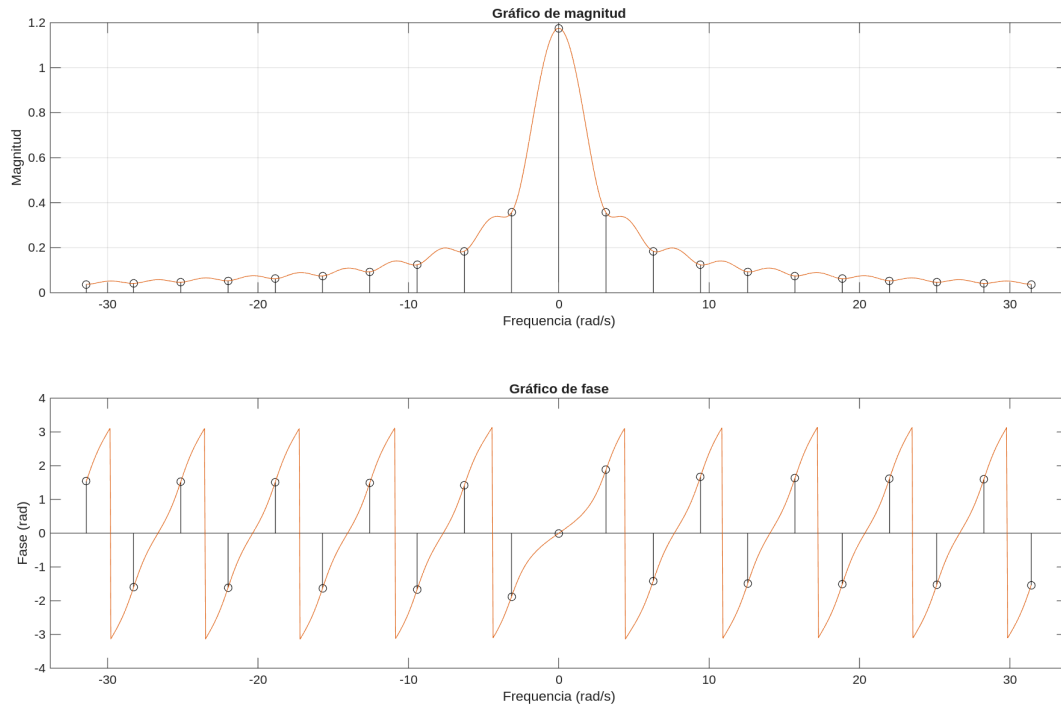
Finalmente verificamos que al evaluar la expresión $\left. \frac{1}{T_0} X(j\Omega) \right|_{\Omega=k\Omega_0}$ obtenemos:

$$\left. \frac{1}{T_0} X(j\Omega) \right|_{\Omega=k\Omega_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j\Omega+1}}{j\Omega+1} - \frac{e^{-(j\Omega+1)}}{j\Omega+1} \right]_{\Omega=k\pi} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jk\pi+1}}{jk\pi+1} - \frac{e^{-(jk\pi+1)}}{jk\pi+1} \right] = c_k \quad (15)$$

- (d) Grafique magnitud y fase de ambas en Matlab.

Solución:



```

%% 2 d)
X = @(om) ( exp(1j*om+1) - exp(-1j*om-1) )./(1j*om+1);
c = @(k) ( exp(1j*k*pi + 1) - exp(-1j*k*pi - 1) )./(2j*k*pi+2);

om_0 = pi;

k = -10:1:10;
om = linspace(-10*om_0, 10*om_0, 1000);

% Magnitud
figure
subplot(2,1,1)
stem(k*om_0, abs(c(k)), 'o', 'color', 'k');
hold on;
%plot(om, abs(X(om)), '-');
plot(om, abs(X(om))/2, '-');
title('Gráfico de magnitud');
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
grid on; hold on;

% Fase
subplot(2,1,2)

```

```

stem(k*om_0, angle(c(k)), 'o', 'color', 'k');
hold on;
%plot(om, angle(X(om)), '-')
plot(om, angle(X(om)/2), '-')
title('Gráfico de fase');
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Fase (rad)');

```

3. Determine el espectro de magnitud y fase de la TFTD de las siguientes señales:

(a) $x_1[n] = (1/3)^n u[n - 1]$

Solución: Se calcula la TFTD a partir de la transformada Z.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n - 1] \quad (16)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n - 1] \quad (17)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}\{\} \quad (18)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{3} z^{-1} \frac{z}{z - 1/3} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 1/3} \quad (20)$$

$$\downarrow z = e^{j\omega} \quad (21)$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \quad (22)$$

La magnitud viene dada por:

$$|X_1(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \right| \quad (23)$$

$$= \frac{1}{3} \left| \frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \right| \quad (24)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{|\cos \omega + j \sin \omega - 1/3|} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{3 \sqrt{(\cos \omega - 1/3)^2 + \sin^2 \omega}} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{3 \sqrt{\cos^2 \omega - 2/3 \cos \omega + 1/9 + \sin^2 \omega}} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{3 \sqrt{10/9 - 2/3 \cos \omega}} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10 - 6 \cos \omega}} \quad (29)$$

En cuanto a la fase:

$$\angle X_1(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \right) \quad (30)$$

$$= \angle \left(\frac{1}{e^{j\omega} - 1/3} \right) \quad (31)$$

$$= -\angle(e^{j\omega} - 1/3) \quad (32)$$

$$= -\angle(\cos \omega + j \sin \omega - 1/3) \quad (33)$$

$$= -\text{atan2}(\sin \omega, \cos \omega - 1/3) \quad (34)$$

(b) $x_2[n] = \sin(0.1\pi n)(u[n] - u[n - 10])$

Solución: Calculamos la TFTD del mismo modo:

$$x_2[n] = \sin(0.1\pi n)(u[n] - u[n - 10]) \quad (35)$$

$$= \sin(0.1\pi n)u[n] - \sin(0.1\pi n)u[n - 10] \quad (36)$$

$$= \sin(0.1\pi n)u[n] - \sin(0.1\pi[n - 10] + \pi)u[n - 10] \quad (37)$$

$$\boxed{-\sin(x + \pi) = \sin(x)} \quad (38)$$

$$= \sin(0.1\pi n)u[n] + \sin(0.1\pi[n - 10])u[n - 10] \quad (39)$$

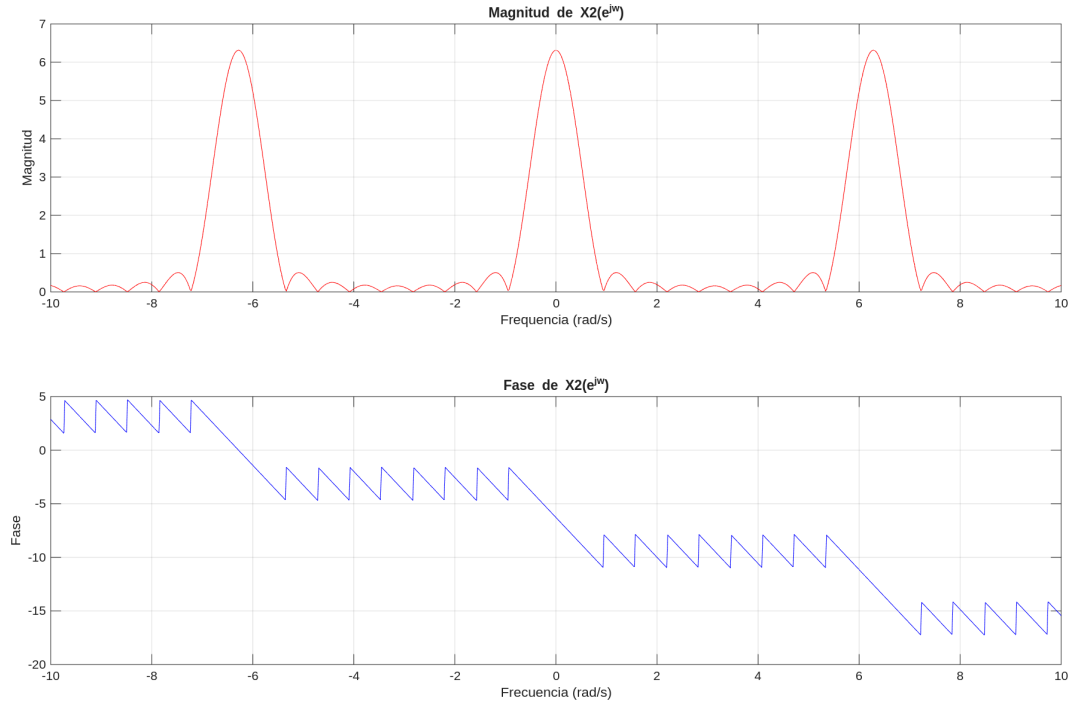
$$\downarrow \mathcal{Z}\{\} \quad (40)$$

$$X_2(z) = \frac{z \sin 0.1\pi}{z^2 - 2z \cos 0.1\pi + 1} (1 + z^{-10}) \quad (41)$$

$$\downarrow z = e^{j\omega} \quad (42)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} \sin 0.1\pi}{e^{j2\omega} - 2e^{j\omega} \cos 0.1\pi + 1} (1 + e^{-j10\omega}) \quad (43)$$

Aquí un desarrollo analítico de magnitud y fase es más complicado que para el caso anterior. Involucra factorizar la función de transferencia, utilizar propiedades trigonométricas, y propiedades de módulo y ángulo para números complejos.



4. Determine los coeficientes de Fourier de las siguientes señales periódicas:

(a) $x_1[n] = \cos(2\pi[3/10]n)$

Solución: Primero determinamos el periodo de la señal periódica. Recordando que \cos es 2π -periódica, notamos que el menor $n \neq 0$ a partir del cual la señal se comienza a repetir es $N = 10$.

Encontramos los coeficientes por inspección. Recordemos que —en general— una señal se reconstruye a partir de los coeficientes mediante la expresión:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = x[n] \quad (44)$$

Sustituyendo el periodo y nuestra señal, desarrollando se hallan los coeficientes:

$$\sum_{k=0}^9 c_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn} = \cos(2\pi[3/10]n) \quad (45)$$

$$= \frac{e^{j\frac{2\pi}{10}3n} + e^{-j\frac{2\pi}{10}3n}}{2} \quad (46)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_3} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-3}^?} e^{j\frac{2\pi}{10}(-3)n} \quad (47)$$

Aquí ya podemos obtener un coeficiente. El otro parece ser c_{-3} , sin embargo $0 \leq k \leq 9$. Aquí debemos considerar la periodicidad de la exponencial compleja, simplemente sumamos $N = 10$, hasta que se ajuste al dominio de k :

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{10}(-3+10)n} \quad (48)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_3} e^{j\frac{2\pi}{10}(3)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_7} e^{j\frac{2\pi}{10}(7)n} \quad (49)$$

Luego $c_3 = 1/2$, $c_7 = 1/2$, y $c_k = 0$ en otro caso.

(b) $x_2[n] = 1 - \sin(\pi n/4)$, con $0 \leq n \leq 11$ un periodo.

Solución: En este caso no podemos obtener los coeficientes por inspección pues el periodo $N = 12$, no es múltiplo de del periodo de la sinusoidal (8). En este caso encontraremos los coeficientes mediante la expresión:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (50)$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} [1 - \sin(\pi n/4)] e^{-j \frac{2\pi}{12} kn} \quad (51)$$

$$= \frac{1}{12} \left[\sum_{n=0}^{11} e^{-j \frac{2\pi}{12} kn} - \sum_{n=0}^{11} \sin(\pi n/4) e^{-j \frac{2\pi}{12} kn} \right] \quad (52)$$

$$= \frac{1}{12} \left[12\delta[k] - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{11} (e^{j\pi n/4} e^{-j \frac{2\pi}{12} kn} - e^{-j\pi n/4} e^{-j \frac{2\pi}{12} kn}) \right] \quad (53)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{11} \left([e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}]^n - [e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}]^n \right) \quad (54)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{24} \left(\frac{1 - e^{j12(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}}{1 - e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}} - \frac{1 - e^{-j12(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}}{1 - e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}} \right) \quad (55)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{24} \left(\frac{1 - e^{j(3\pi - 2\pi k)}}{1 - e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}} - \frac{1 - e^{-j(3\pi + 2\pi k)}}{1 - e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}} \right) \quad (56)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{24} \left(\frac{1 - e^{j3\pi}}{1 - e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}} - \frac{1 - e^{-j3\pi}}{1 - e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}} \right) \quad (57)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{24} \left(\frac{2}{1 - e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}} - \frac{2}{1 - e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}} \right) \quad (58)$$

$$= \delta[k] + j \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1 - e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{12} k)}} - \frac{1}{1 - e^{-j(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{12} k)}} \right) \quad (59)$$

Este proceso como se puede ver es bastante engorroso. En la próxima ayudantía se verá como encontrar los coeficientes utilizando una propiedad análoga a la utilizada en 2(c) para señales discretas. Con matlab, los coeficientes se encuentran con sencillez, definiendo la secuencia de un periodo base y aplicando la función `fft`.

```
%% 4(b)
k = 0:11;
x = 1-sin(pi*k/4);
N = 12;

c_k = 1/N * fft(x)
```