

## Ayudantía 10 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere el filtro FIR con respuesta a impulso  $h[n] = u[n] - u[n - 4]$ .

(a) Determine el tipo de filtro FIR (I, II, III o IV)

**Solución:** La respuesta a impulso puede ser reescrita como  $h[n] = \{1, 1, 1, 1\}$ . Dado que es simétrica ( $h[n] = h[M - n]$ ) y de orden par ( $M = 3$ ), se trata de un filtro FIR tipo II.

(b) Determine y bosqueje la respuesta de magnitud  $|H(e^{j\omega})|$

**Solución:** De la respuesta a impulso:

$$h[n] = u[n] - u[n - 4] \quad (1)$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - z^{-4} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2)$$

$$= \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} \quad (3)$$

$\downarrow z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-4j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \quad (4)$$

Bosquejar la magnitud a partir de esta expresión es complicado. Factorizando numerador y denominador por exponenciales complejas:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-4j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \quad (5)$$

$$= \frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \left( \frac{e^{-2j\omega}}{e^{-j\omega/2}} \right) \quad (6)$$

Usando  $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta)$ :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \left( \frac{e^{-2j\omega}}{e^{-j\omega/2}} \right) \quad (7)$$

$$= \frac{2j \sin(2\omega)}{2j \sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} \quad (8)$$

$$= \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} \quad (9)$$

$\downarrow |\cdot|$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right| \left| e^{-\frac{3}{2}j\omega} \right| \quad (10)$$

$$= \left| \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (11)$$

Evaluando la expresión se obtienen valores para el bosquejo (para el caso  $\omega = 0$  se usa el límite):

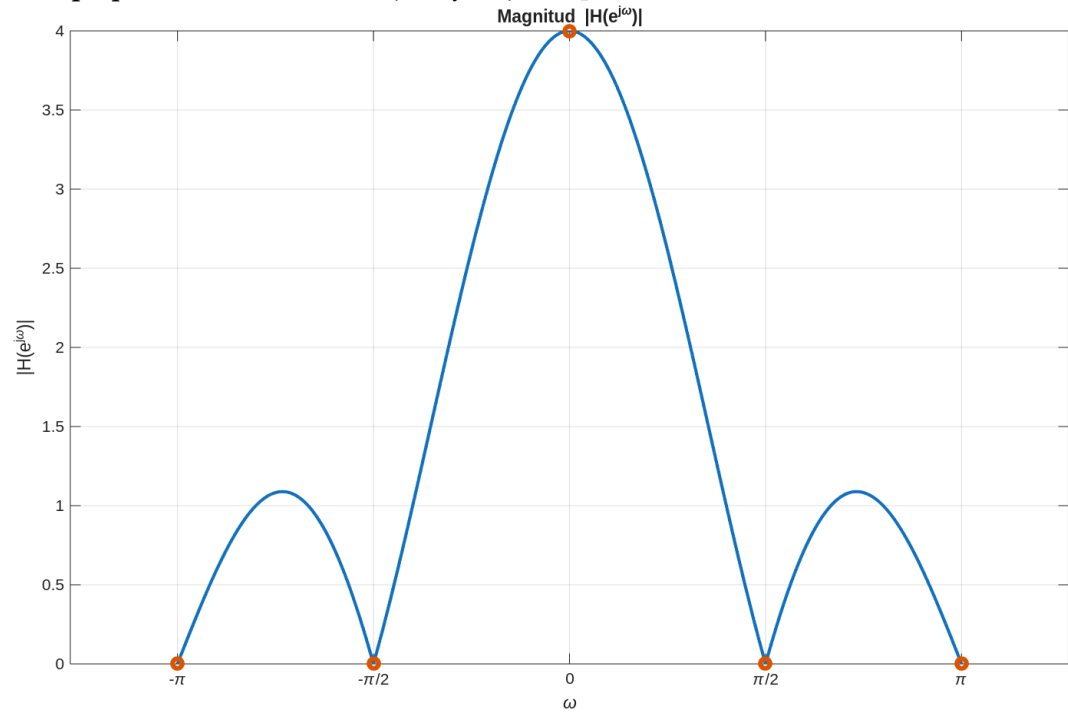
$$\omega = 0 \qquad \omega = \pm\pi/2 \qquad \omega = \pm\pi \qquad (12)$$

$$\left| \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right| \approx \left| \frac{2\omega}{\omega/2} \right| \qquad \left| \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right| = \left| \frac{\sin(\pm\pi)}{\sin(\pm\pi/4)} \right| \qquad \left| \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right| = \left| \frac{\sin(\pm 2\pi)}{\sin(\pm\pi/2)} \right| \qquad (13)$$

$$= |4| \qquad = \left| \frac{0}{\sin(\pm\pi/4)} \right| \qquad = \left| \frac{0}{\sin(\pm\pi/2)} \right| \qquad (14)$$

$$= 4 \qquad = 0 \qquad = 0 \qquad (15)$$

La respuesta de magnitud tiene un lóbulo principal entre  $[-\pi/2, \pi/2]$ , y dos lóbulos más pequeños entre  $[-\pi, -\pi/2]$ , y  $[\pi/2, \pi]$ :



(c) Determine y bosqueje la respuesta de amplitud  $A(e^{j\omega})$

**Solución:** A partir de la expresión de la respuesta en frecuencia hallada en el punto anterior, se deduce la respuesta de amplitud  $A(e^{j\omega})$ :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} = A(e^{j\omega}) e^{j\Psi(\omega)} \qquad (16)$$

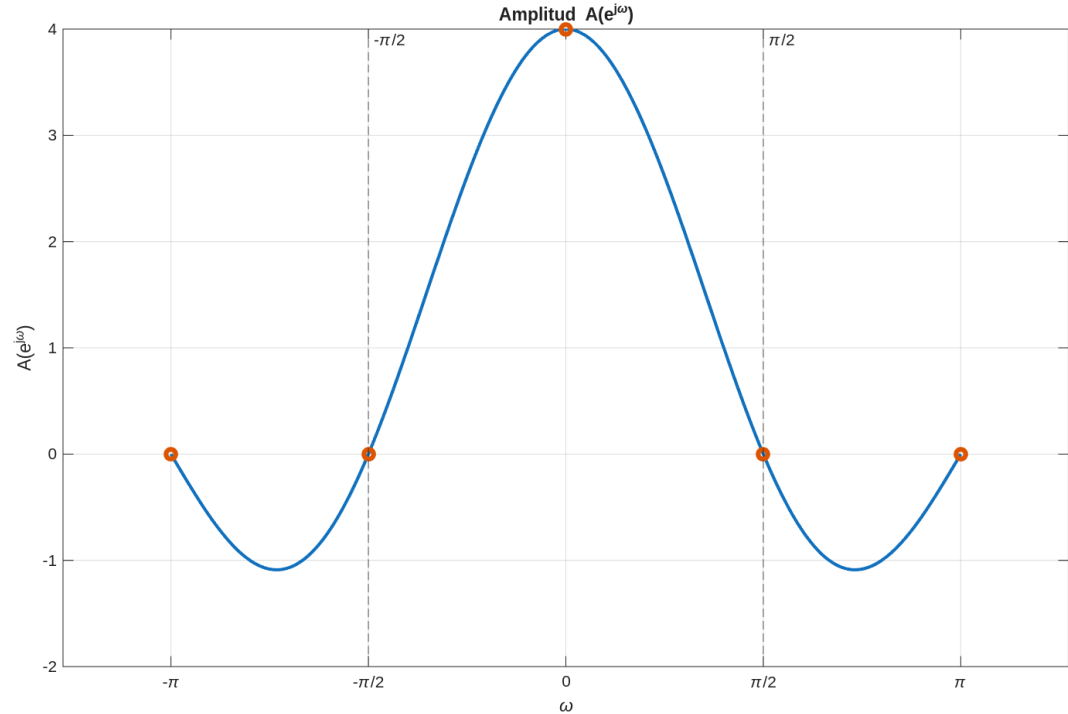
↓

$$A(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \qquad (17)$$

Como  $|A(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$ , los ceros que se vieron en el punto anterior se vuelven a utilizar para el bosquejo. Para dibujar los l6bulos se debe tener en cuenta el signo de la expresi6n:

$$-\pi < \omega < -\pi/2 \quad -\pi/2 < \omega < 0 \quad 0 < \omega < \pi/2 \quad \pi/2 < \omega < \pi \quad (18)$$

$$\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0 \quad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} > 0 \quad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} > 0 \quad \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0 \quad (19)$$



(d) Determine y bosqueje la respuesta de fase  $\angle H(e^{j\omega})$

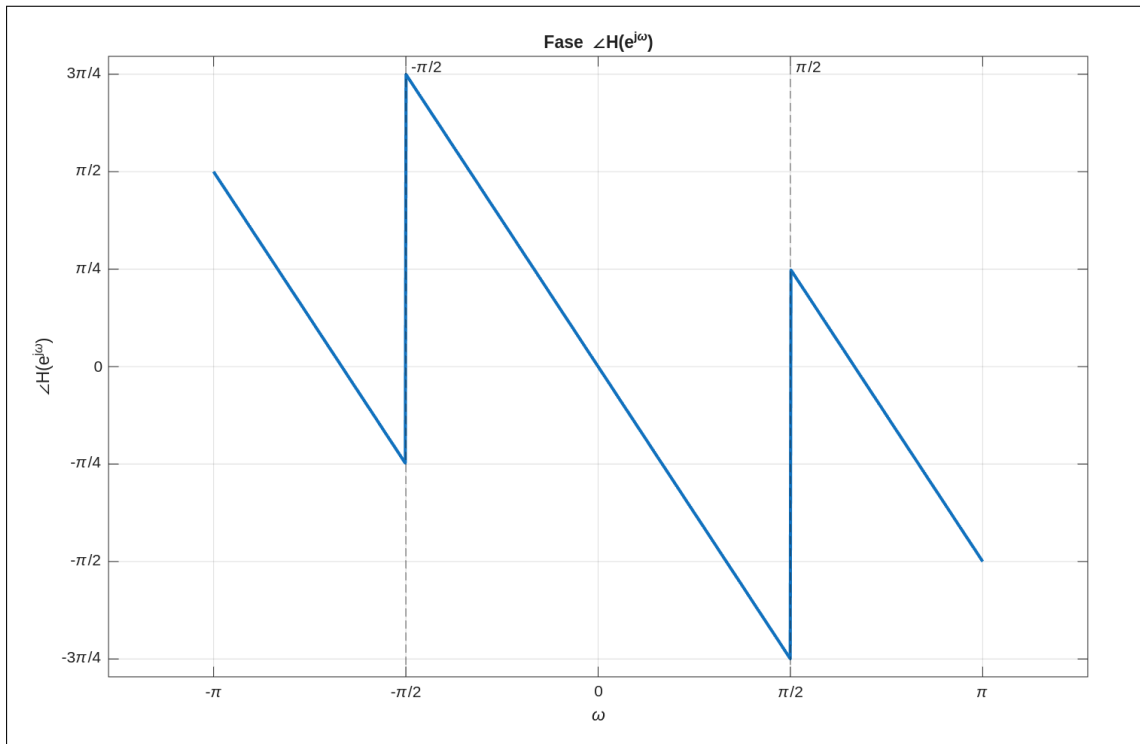
**Soluci6n:** Tenemos que:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left( \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} \right) \quad (20)$$

$$= \angle \left( \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \right) - \frac{3}{2}\omega \quad (21)$$

Cuando  $\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} < 0$ , su fase toma el valor  $\pm\pi$ :

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\pi - \frac{3}{2}\omega & -\pi < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{3}{2}\omega & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \frac{3}{2}\omega & \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \end{cases} \quad (22)$$



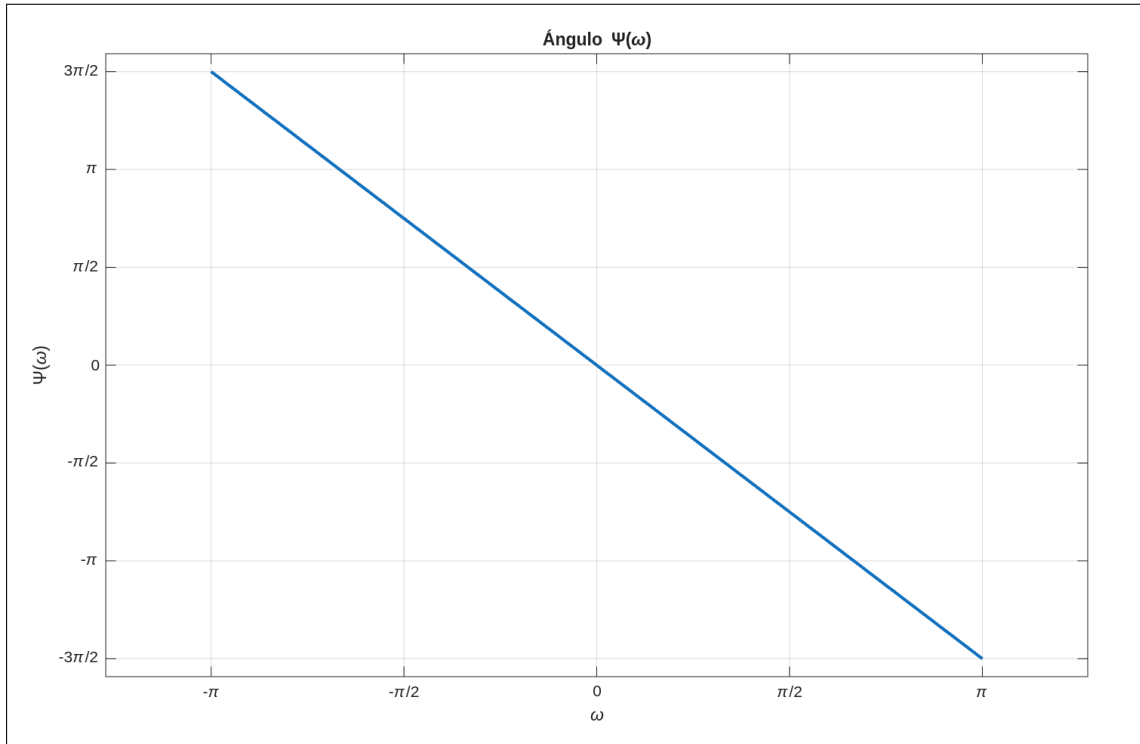
(e) Determine y bosqueje la respuesta de ángulo  $\Psi(\omega)$

**Solución:** La respuesta de ángulo  $\Psi(\omega)$  se deduce de  $H(e^{j\omega})$ :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-\frac{3}{2}j\omega} = A(e^{j\omega}) e^{j\Psi(\omega)} \quad (23)$$

$$\downarrow$$

$$\Psi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega \quad (24)$$



2. Se requiere un filtro digital pasa-alto para procesar una señal de sonido:

- La señal se muestrea a 48 kHz.
- Frecuencia borde de la banda de rechazo:  $F_s = 10.8$  kHz
- Frecuencia borde de la banda de paso:  $F_p = 12$  kHz
- Atenuación de banda de rechazo  $A_s = 42$  dB
- Ripple en banda de paso  $A_p = 0.2$  dB

**Table 10.3** Properties of commonly used windows ( $L = M + 1$ ).

Window name	Side lobe level (dB)	Approx. $\Delta\omega$	Exact $\Delta\omega$	$\delta_p \approx \delta_s$	$A_p$ (dB)	$A_s$ (dB)
Rectangular	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	0.75	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.45	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.055	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.019	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0017	74

- (a) Determine las especificaciones absolutas  $\delta_s$  y  $\delta_p$ , y las frecuencias normalizadas  $\omega_s$  y  $\omega_p$  para el diseño del filtro.

**Solución:** Para convertir de especificaciones relativas a absolutas usamos:

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \quad \delta_s = \frac{1 + \delta_p}{10^{A_s/20}} \quad (25)$$

Reemplazando por los datos se obtiene:

$$\delta_p = \frac{10^{0.2/20} - 1}{10^{0.2/20} + 1} \quad \delta_s = \frac{1 + 0.0115}{10^{42/20}} \quad (26)$$

$$= 0.0115 \quad = 0.0080 \quad (27)$$

Se convierte de las frecuencias en Hz, a frecuencia normalizada usando  $\omega = 2\pi \frac{F}{F_m}$ :

$$\omega_s = 2\pi \frac{F_s}{F_m} \quad \omega_p = 2\pi \frac{F_p}{F_m} \quad (28)$$

$$= 2\pi \frac{10.8}{48} \quad = 2\pi \frac{12}{48} \quad (29)$$

$$= 0.45\pi \quad = 0.5\pi \quad (30)$$

- (b) Determine la respuesta a impulso ideal para el diseño de un filtro FIR por medio de ventana.

**Solución:**

**Filtro pasa-bajo** Recordando que

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad h_{LP}[n] = \frac{\sin(\omega_c[n - \alpha])}{\pi[n - \alpha]} \quad (31)$$

Es la respuesta de un filtro pasa-bajo ideal y su respuesta a impulso. Se deducen las las respuestas a impulso de otros tipos de filtro.

**Filtro pasa-banda** Un filtro pasa banda ideal con frecuencias de corte  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , se obtiene restando dos pasabajos:

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_{c1} \\ e^{-j\alpha\omega} & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0 & \omega_{c2} < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad h_{BP}[n] = \frac{\sin(\omega_{c2}[n - \alpha])}{\pi[n - \alpha]} - \frac{\sin(\omega_{c1}[n - \alpha])}{\pi[n - \alpha]} \quad (32)$$

**Filtro pasa-alto** Un filtro pasa-alto con frecuencia de corte  $\omega_c$  se obtiene restando un pasa-bajos de un impulso:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\alpha\omega} & \omega_c < |\omega| \end{cases} \leftrightarrow h_{HP}[n] = \delta[n - \alpha] - \frac{\sin(\omega_c[n - \alpha])}{\pi[n - \alpha]} \quad (33)$$

Para el diseño del filtro, escogemos la frecuencia de corte  $\omega_c$  en el punto medio de la banda de transición  $[\omega_s, \omega_p]$ :

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{0.45\pi + 0.5\pi}{2} = 0.475\pi \quad (34)$$

La respuesta a impulso ideal a utilizar para el filtro FIR de orden  $M$  (por definir) es:

$$h_{HP}[n] = \delta[n - M/2] - \frac{\sin(0.475\pi[n - M/2])}{\pi[n - M/2]} \quad (35)$$

- (c) Escoja una ventana apropiada de la tabla y utilice esta para determinar el filtro FIR en Matlab.

### Solución:

**Selección de ventana** Considerando las especificaciones calculadas en (a):

$$\delta_s = 0.0080 \quad \delta_p = 0.0115 \quad \omega_s = 0.45 \quad \omega_p = 0.5$$

Obtenemos un ripple mínimo y lo convertimos a atenuación en dB para la elección de la ventana:

$$\delta = \min\{\delta_s, \delta_p\} \quad A = -20 \log(0.0080) \quad (36)$$

$$= 0.0080 \quad = 42 \text{ dB} \quad (37)$$

De la columna “ $A_s$  (dB)” de la tabla escogemos la ventana. Con  $A = 42 < 44$  dB, se escoge la ventana de Hann.

**Selección de orden  $M$**  Para hallar el orden  $M = L - 1$  se iguala la banda de transición requerida ( $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s = 0.05\pi$ ) con la banda producida por la ventana escogida (columna **Exact**  $\Delta\omega$  de la tabla). Para la ventana Hann.

Así, tenemos:

$$\Delta\omega = 0.05\pi = \frac{6.2\pi}{L} \rightarrow M = L - 1 = 123 \quad (38)$$

**Ajuste de  $M$**  Al tener  $M = 123$  **impar**, aplicar la ventana produce un filtro **FIR tipo II**. Este tipo de filtro tiene la restricción  $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0$ . Esto es malo considerando que diseñamos un pasa-alto.

Por esta razón, aumentamos en 1 el orden para obtener  $M = 124$  **par**, que produce un filtro **FIR tipo I**, que no tiene esta restricción.

**Respuesta a impulso final** Considerando lo anterior, la respuesta a impulso del filtro FIR queda como:

$$h[n] = h_{HP}[n] \cdot w_{\text{Hann}}[n] \quad (39)$$

$$= \left( \delta[n - 62] - \frac{\sin(0.475\pi[n - 62])}{\pi[n - 62]} \right) w_{\text{Hann}}[n] \quad (40)$$

Con

$$w_{\text{Hann}}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M) & 0 \leq n \leq M = 124 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad (41)$$

Esto se puede realizar de forma manual en Matlab, o bien, utilizando la función `fir1` de Matlab:

```
M = 124;
wc = 0.475*pi;

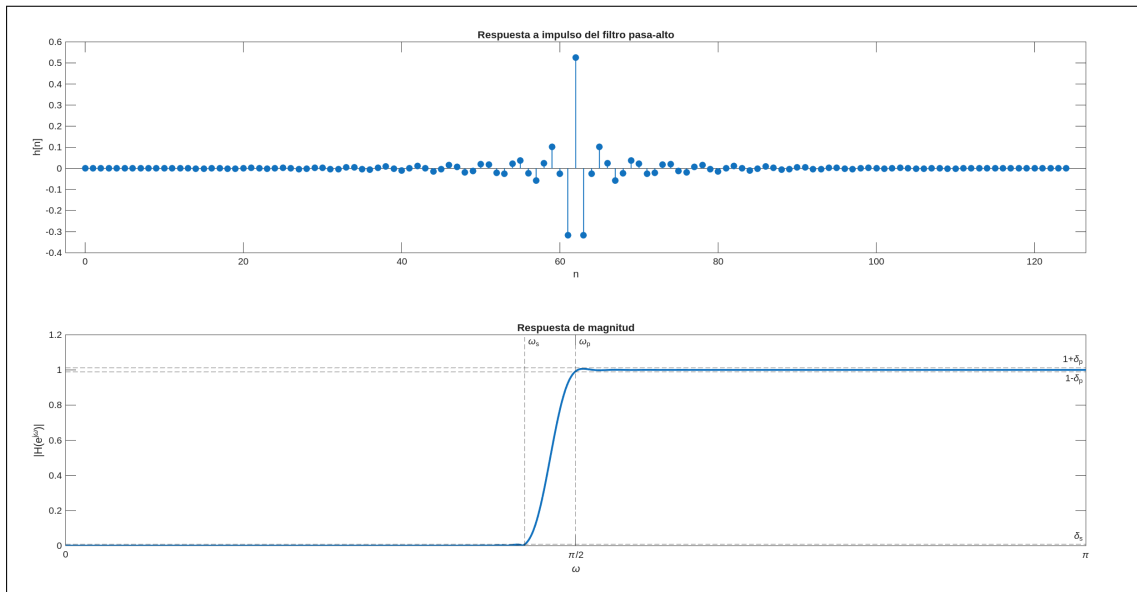
% Forma manual
n=0:M;
h_ideal = -sin(wc*(n-M/2))./(pi*(n-M/2));
%h_ideal = sin(pi*(n-M/2))./(pi*(n-M/2))-sin(wc*(n-M/2))./(pi*(n-M/2));
h_ideal(isnan(h_ideal)) = -wc/pi;
h_ideal(M/2+1) = h_ideal(M/2+1) + 1; % M/2+1 porque matlab indexa desde uno.

h_HP = h_ideal.*hann(M+1)';

% Usando fir1
h_fir1 = fir1(M,wc/pi,"high",hann(M+1));
```

Al graficar respuesta a impulso y magnitud:

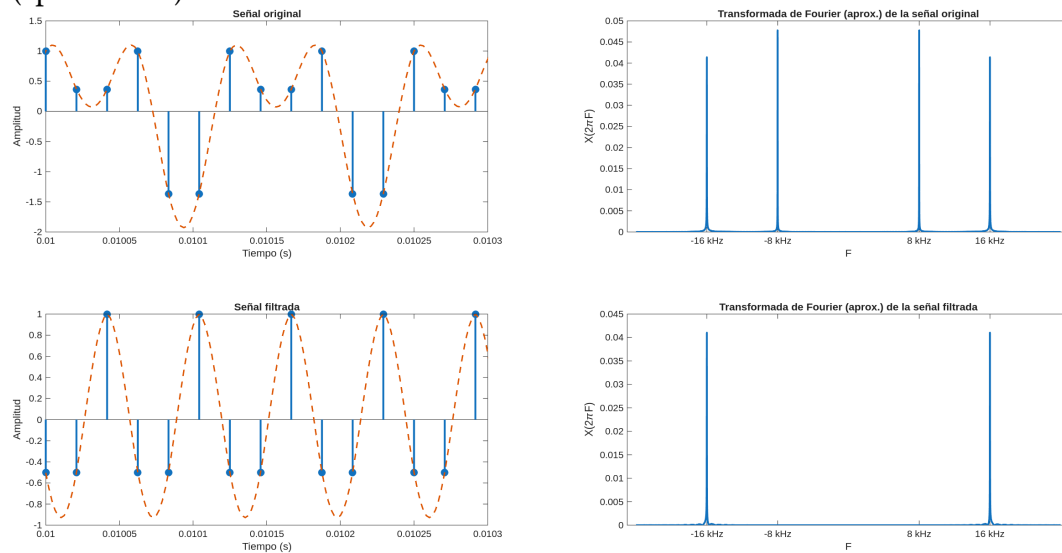




- (d) Compruebe el filtro en Matlab con una señal de prueba  $\cos(2\pi F_1 t) + \sin(2\pi F_2 t)$ . (Con  $F_1 = 16\text{kHz}$ ,  $F_2 = 8\text{kHz}$ )

**Solución:** Al testear el filtro con la señal de prueba, vemos como la componente de 8 kHz se reduce en amplitud, siendo imperceptible en la señal filtrada. La otra componente se mantiene prácticamente intacta.

Para la señal original y filtrada, se grafica la forma de onda y transformada de Fourier (aproximada):



% 2 (d)

```
F1 = 16000; F2 = 8000;
% Señal continua
x_cont = @(t) cos(2*pi*F1*t) + sin(2*pi*F2*t);
```

```

% Muestreo
Fm = 48000; % Frec. muestreo
T = 1/Fm;
nT = 0:T:0.1;
x_muestreada = x_cont(nT);

x_filtrada = filter(h_HP, 1, x_muestreada);

% Aproximacion de TFTC
f_m = abs(fftshift(fft(x_muestreada)*T));
f_f = abs(fftshift(fft(x_filtrada)*T));

% Ploteamos una porción de la señal
n = 0:1000;
x_muestreada = x_muestreada(n+1);
x_filtrada = x_filtrada(n+1);

x_m_dac = interp(x_muestreada, 10);
x_f_dac = interp(x_filtrada, 10);
n_dac = (0:length(x_m_dac)-1) / 10;

% ploteo fourier
N = length(f_m);
F = (-N/2:N/2-1)*(1/(N*T));

figure;
% Ploteo de la señal filtrada
subplot(2,2,1)
stem(n*T, x_muestreada, 'filled', 'LineWidth', 2); hold on
plot(n_dac*T, x_m_dac, '--', Linewidth=1.5)
xlim([0.01 0.0103])
xlabel("Tiempo (s)")
ylabel("Amplitud")
title("Señal original")

subplot(2,2,2)
plot(F, f_m, LineWidth=2)
title("Transformada de Fourier (aprox.) de la señal original")
xlabel("F")
ylabel("X(2{\pi}F)")
xticks([-16 -8 8 16]*1000)
xticklabels(["-16 kHz" "-8 kHz" "8 kHz" "16 kHz"])

subplot(2,2,3)
stem(n*T, x_filtrada, 'filled', LineWidth=2); hold on
plot(n_dac*T, x_f_dac, '--', Linewidth=1.5)
xlim([0.01 0.0103])
xlabel("Tiempo (s)")
ylabel("Amplitud")
title('Señal filtrada')

```

```
subplot(2,2,4)
plot(F, f_f, LineWidth=2)
title("Transformada de Fourier (aprox.) de la señal filtrada")
xlabel("F")
ylabel("X(2{\pi}F)")
xticks([-16 -8 8 16]*1000)
xticklabels(["-16 kHz" "-8 kHz" "8 kHz" "16 kHz"])
```