Ayudantía 11 - Procesamiento Digital de Señales

1. Considere un filtro pasa-bajo análogo Butterworth $H_c(s)$ de cuarto orden con una frecuencia de corte (3 dB) en 20 Hz. Determine y bosqueje los polos de $H_c(s)$.

Solución:

Derivación En general, el filtro de Butterworth de orden N cumple

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \tag{1}$$

Considerando $s = j\Omega$, $-1 = e^{j(2k-1)\pi}$, y $j = e^{j\pi/2}$ los N polos del filtro cumplen con:

$$1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0 \tag{2}$$
$$(s/j\Omega_c)^{2N} = -1 \tag{3}$$
$$(s/j\Omega_c)^{2N} = e^{j(2k-1)\pi} \tag{4}$$
$$s/j\Omega_c = e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} \tag{5}$$
$$s = j\Omega_c e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} \tag{6}$$
$$s = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)} \tag{7}$$

Esta ecuación tiene $2N$ soluciones $k = 1,\ 2, \ldots,\ 2N$. Sin embargo el filtro tiene N polos. Como se desea un filtro con respuesta impulso estable, se escogen los polos con $k = 1,\ 2, \ldots,\ N$, que se encuentran en el SP izquierdo.

Polos del filtro Butterworth y F. de T. Así, dados Ω_c (frecuencia de corte) y N (orden del filtro), los polos y función de transferencia son:

$$\boxed{p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)}} \quad \boxed{H(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}} \quad \boxed{k = 1,\ 2, \ldots,\ N} \tag{8}$$

Los polos cubren el lado izquierdo de una circunferencia de radio Ω_c.

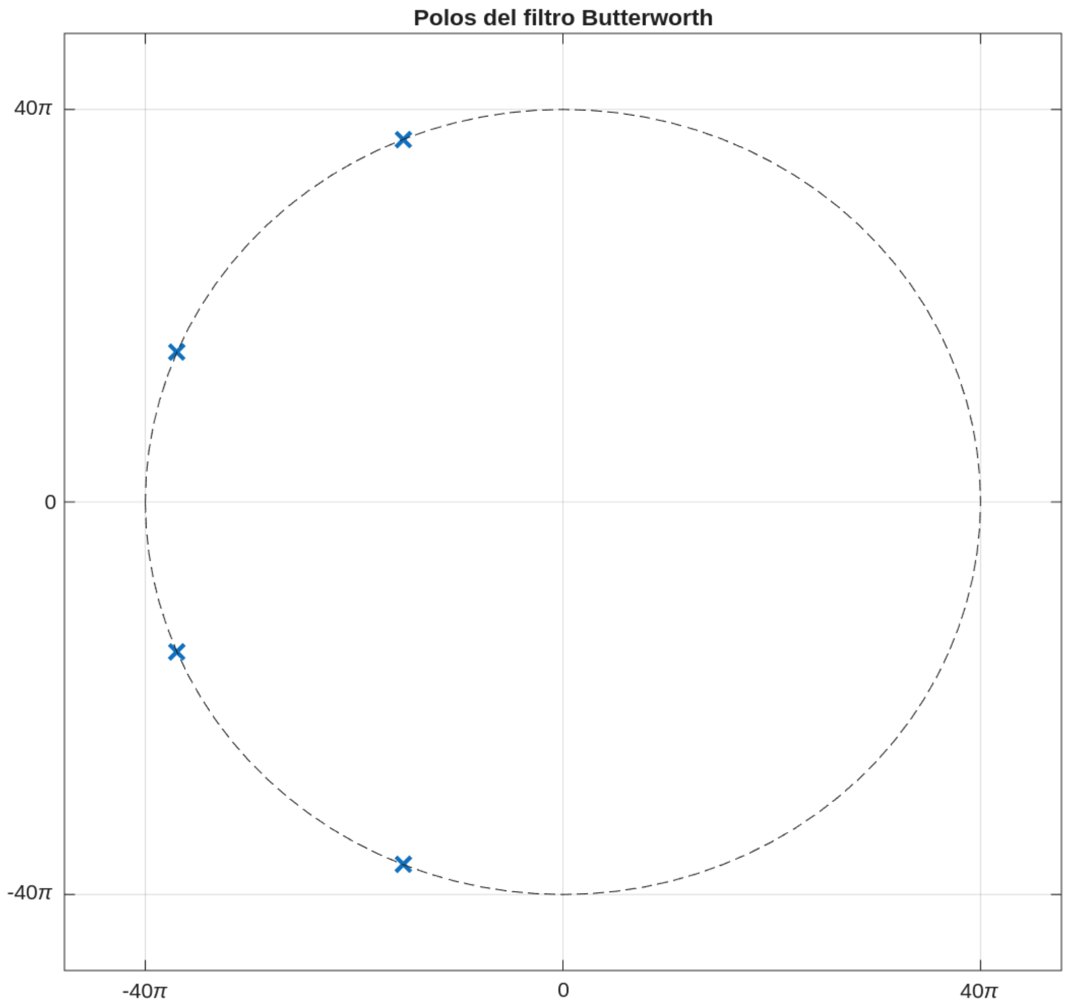
Ahora sí, el problema Con orden $N = 4$, y frecuencia de corte $F_c = 20$ Hz, tenemos $\Omega_c = 2\pi F_c = 40\pi$ y $2N = 8$. Por lo tanto:

$$p_k = 40\pi e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{8}\pi\right)} = \begin{cases} p_1 = 40\pi e^{j5\pi/8} \\ p_2 = 40\pi e^{j7\pi/8} \\ p_3 = 40\pi e^{j9\pi/8} \\ p_4 = 40\pi e^{j11\pi/8} \end{cases} \tag{9}$$

Y la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{(40\pi)^4}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)} \tag{10}$$

Para bosquejar los polos, se dibuja una circunferencia de radio $\Omega_c = 40\pi$ como guía, y se ubican los polos en los ángulos que indican las exponenciales complejas. Los polos siempre "cubren" la mitad izquierda de la circunferencia



2. Con ayuda de Matlab, diseñe un pasa-bajo análogo Butterworth con las especificaciones:

- Frecuencia borde de banda de paso: $F_p = 50$ Hz
- Ripple en banda de paso: $A_p = 0.5$ dB
- Frecuencia borde de banda de rechazo $F_s = 80$ Hz
- Atenuación en banda de rechazo: $A_s = 45$ dB

(a) Obtenga el orden N del filtro.

Solución: Se tiene

$$F_p = 50 \text{ Hz} \longrightarrow \Omega_p = 2\pi F_p = 100\pi \tag{11}$$
$$F_s = 80 \text{ Hz} \longrightarrow \Omega_s = 2\pi F_s = 160\pi \tag{12}$$

La fórmula para hallar el orden N del filtro de Butterworth es:

$$\boxed{N \geq \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \qquad \boxed{\beta = \frac{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}}{\sqrt{10^{A_p/10} - 1}}} \tag{13}$$

Reemplazando:

$$\alpha = \frac{160\pi}{100\pi} \qquad \beta = \frac{\sqrt{10^{45/10} - 1}}{\sqrt{10^{0.5/10} - 1}} \qquad N \geq \frac{\ln 1.6}{\ln 509.7} \tag{14}$$
$$= 1.6 \qquad = 509.7 \qquad \geq 13.26 \tag{15}$$
$$N = 14 \tag{16}$$

(b) Obtenga la frecuencia de corte Ω_c para el diseño del filtro.

Solución: Una vez obtenido el orden N, se utiliza

$$\boxed{\Omega_p \left(10^{A_p/10} - 1\right)^{-1/2N} \leq \Omega_c \leq \Omega_s \left(10^{A_s/10} - 1\right)^{-1/2N}} \tag{17}$$

Para escoger la frecuencia de corte. Cualquier valor dentro del intervalo sirve. Al reemplazar:

$$100\pi \left(10^{45/10} - 1\right)^{-1/28} \leq \Omega_c \leq 160\pi \left(10^{0.5/10} - 1\right)^{-1/28} \tag{18}$$
$$338.67 \leq \Omega_c \leq 347.18 \tag{19}$$

Escogiendo el límite superior $\Omega_c = 347.18$, se obtiene mejor ripple en la banda de paso.

(c) Obtener en Matlab los polos.

Solución: Matlab realiza el procedimiento de diseño (encontrar Ω_c y N), mediante el comando `buttord`:

```
Omegap = 100*pi;
Omegas = 160*pi;
Ap = 0.5;
```

```
As = 45;

[N, Omegac] = buttord(Omegap, Omegas, Ap, As, 's')

N =

    14

Omegac =

  347.1811
```

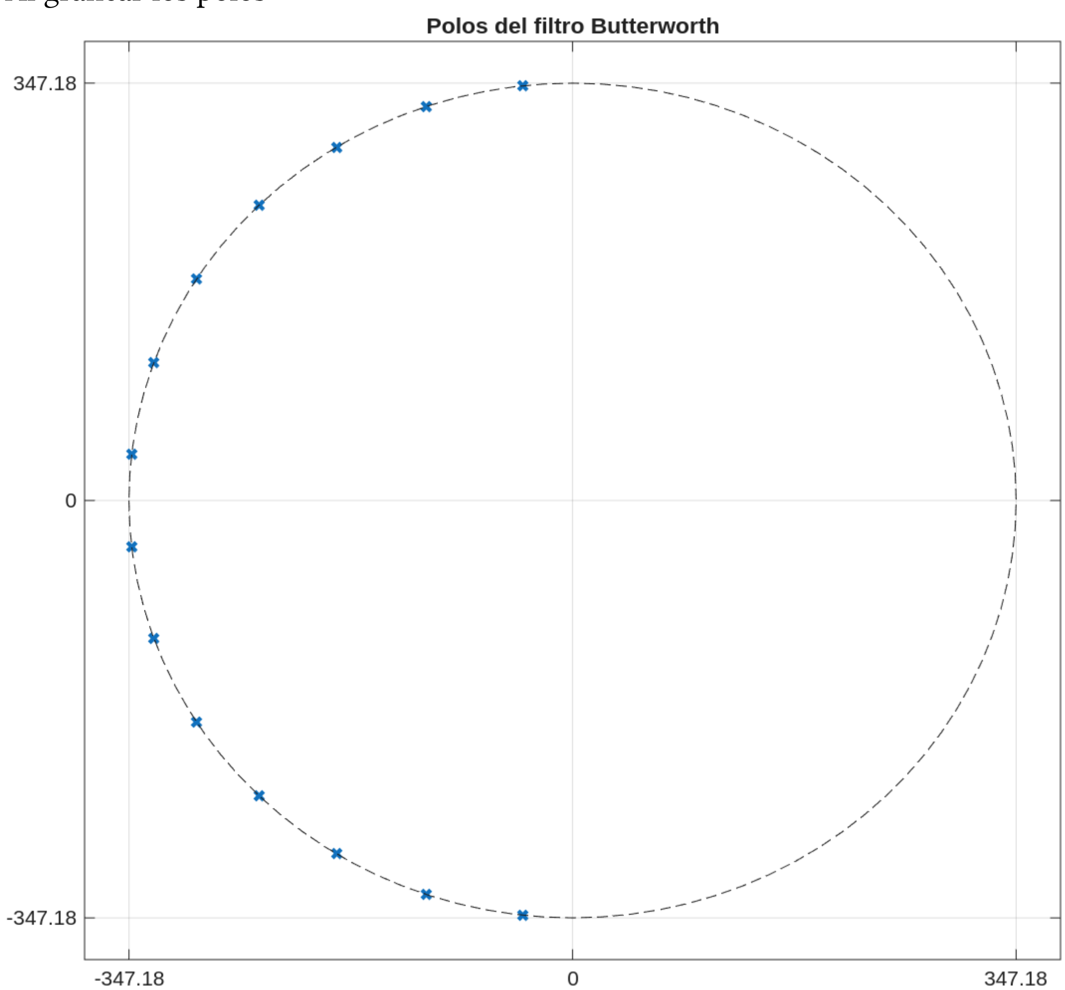
Y se obtienen los polos con el comando `butter`:

```
[z, p, k] = butter(N, Omegac, 's')
```

Equivalente a:

$$p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{2N}\pi\right)} = 347.18 e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{28}\pi\right)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 14 \tag{20}$$

Al graficar los polos:

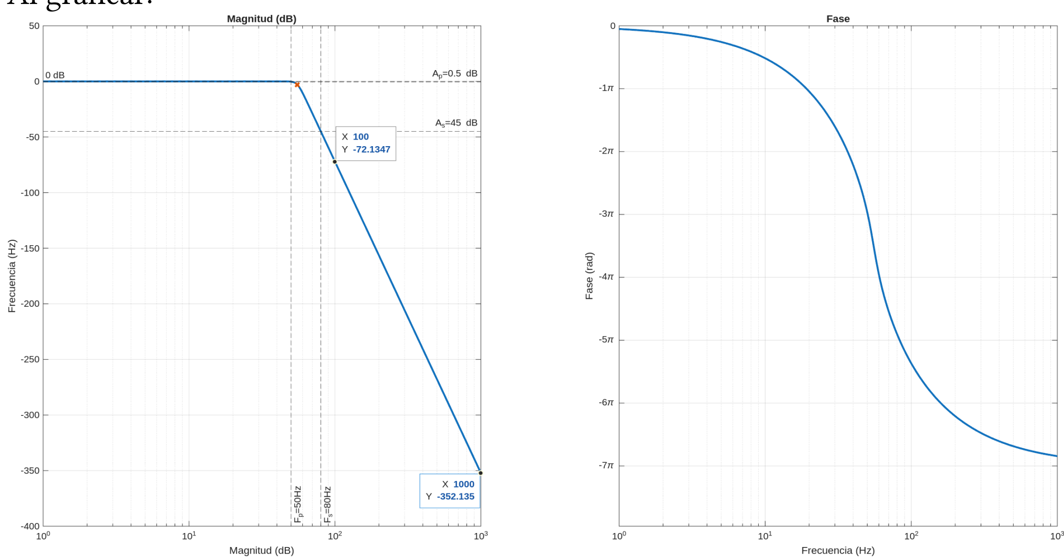


(d) Gragicar magnitud y fase.

Solución: Se obtiene magnitud y fase con

```
[b, a] = zp2tf(z,p,k);
h = freqs(b,a,Omega);
h_mag = abs(h);
h_fase = angle(h);
```

Al graficar:



La magnitud tiene una pendiente de $-20N = -280$ dB por octava, y fase disminuye en $-\frac{\pi}{2}N = -7\pi$.

(e) Obtener un filtro digital mediante transformación impulso invariante, y graficar magnitud y fase

Solución:

Transformación impulso invariante La transformación impulso invariante se obtiene realizando:

$$\boxed{h[n] = T_d h_c(nT_d), \quad T_d \text{ Periodo de muestreo}} \tag{21}$$

Y la respuesta en frecuencia pasa a ser

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)} \tag{22}$$

Es decir, hay aliasing debido al muestreo. A medida que T_d decrece, el aliasing se vuelve despreciable.

Las frecuencias y los polos se mapean:

$$\boxed{\omega = \Omega T_d} \qquad\qquad \boxed{p_k = e^{s_k T_d}} \tag{23}$$

Asumiendo que se filtran frecuencias hasta 500 Hz, se escoge $F_d = 1000$ Hz por el teorema de muestreo. Es decir $T_d = 1/1000$:

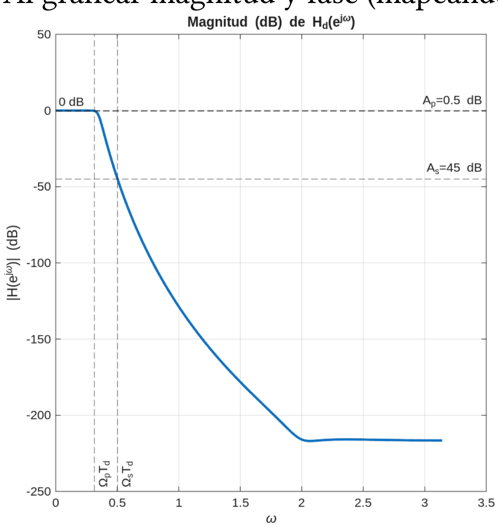
$$h[n] = \frac{1}{1000} h_c \left(\frac{n}{1000} \right) \tag{24}$$

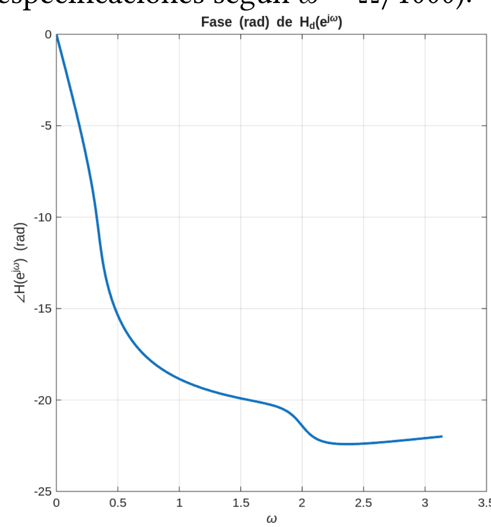
En Matlab:

```
Td = 1/1000;
[bz, az] = impinvar(b,a, 1/Td);

t = linspace(0,0.12,1000);
[ht, tout] = impulse(tf(b, a), t);
[hn, nT]= impz(bz, az, 120, 1/Td);
```

Al graficar magnitud y fase (mapeando las especificaciones según $\omega = \Omega/1000$):





En la banda de paso y transición, la diferencia con el filtro original es despreciable

3. Con ayuda de Matlab y usando transformación bilinear, diseñe un filtro pasa-bajo de Chebyshev I que cumpla:

   - Frecuencia borde de banda de paso: $\omega_p = 0.2\pi$
   - Ripple en banda de paso: $A_p = 1$ dB
   - Frecuencia borde de banda de rechazo $\omega_s = 0.3\pi$
   - Atenuación en banda de rechazo: $A_s = 60$ dB

(a) Obtener las frecuencias Ω_p y Ω_s equivalentes pare el diseño del filtro.

Solución: Aplicar la transformación bilinear mapea las frecuencias de acuerdo a:

$$\boxed{\omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{T_d}{2}\Omega\right)} \longleftrightarrow \boxed{\Omega = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad T_d \text{ arbitrario.} \tag{25}$$

Escogiendo $T_d = 2$ a conveniencia:

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \qquad \Omega_s = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \tag{26}$$

$$= \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) \qquad = \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \tag{27}$$

$$= 0.325 \qquad = 0.509 \tag{28}$$

(b) Obtener ϵ y A para el diseño.

Solución: Se utilizan las ecuaciones de conversion de especificaciones relativas a análogas:

$$\boxed{\epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}} \qquad \boxed{A = 10^{A_s/20}} \tag{29}$$

Sustituyendo:

$$\epsilon = \sqrt{10^{1/10} - 1} \qquad A = 10^{60/20} \tag{30}$$

$$= 0.509 \qquad = 1000 \tag{31}$$

(c) Obtener orden del filtro N y frecuencia de corte Ω_c.

Solución: Se selecciona $\Omega_c = \Omega_p = 0.325$
El orden N se obtiene de acuerdo a las ecuaciones de diseño

$$\boxed{N \geq \frac{\ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \qquad \boxed{\beta = \frac{1}{\epsilon}\sqrt{A^2 - 1}} \tag{32}$$

Reemplazando:

$$\alpha = \frac{0.509}{0.325} \qquad \beta = \frac{1}{0.509}\sqrt{1000^2 - 1} \qquad N \geq \frac{\ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \tag{33}$$

$$= 1.5661 \qquad = 1968.5 \qquad \geq 8.12 \tag{34}$$

$$N = 9 \tag{35}$$

(d) Obtener en Matlab la función de transferencia y el filtro digital usando `bilinear`, y graficar magnitud y fase de este.

Solución: La selección de orden $N = 9$ y frecuencia de corte $\Omega_c = 0.325$ se comprueba en Matlab mediante

```
Omegap = 0.325;
Ap = 1;
Omegas = 0.509;
As = 60;
[N, Omegac] = cheb1ord(Omegap, Omegas, Ap, As, 's')

N =

     9

Omegac =

    0.3250
```

La función de transerencia y respuesta en frecuencia del filtro digital (aplicando transformación bilinear) se obtiene mediante

```
[b, a] = cheby1(N, Ap, Omegac, 's');
[bz, az] = bilinear(b, a, 1/Td)
[hz, w]= freqz(bz, az, 1024);

bz =

   1.0e-04 *

  Columns 1 through 7

    0.0019    0.0167    0.0667    0.1556    0.2333    0.2333    0.1556

  Columns 8 through 10

    0.0667    0.0167    0.0019

az =

  Columns 1 through 7

    1.0000   -7.5802   26.2987  -54.7173   75.1516  -70.6047   45.3539

  Columns 8 through 10

  -19.2051    4.8651   -0.5620
```

Donde `bz` y `az` son numerador y denominador de la función de transferencia:

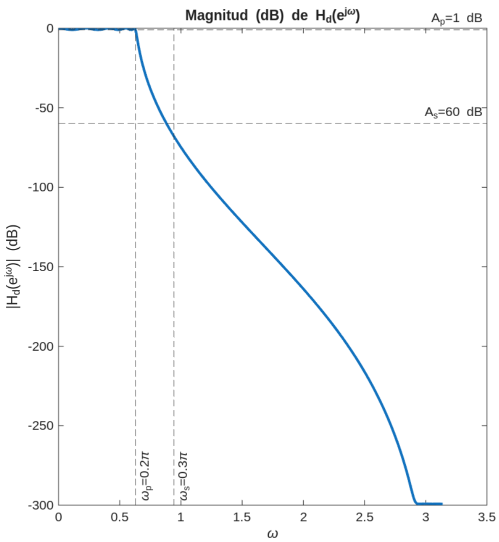
$$H_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_9 z^{-9}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_9 z^{-9}} \tag{36}$$

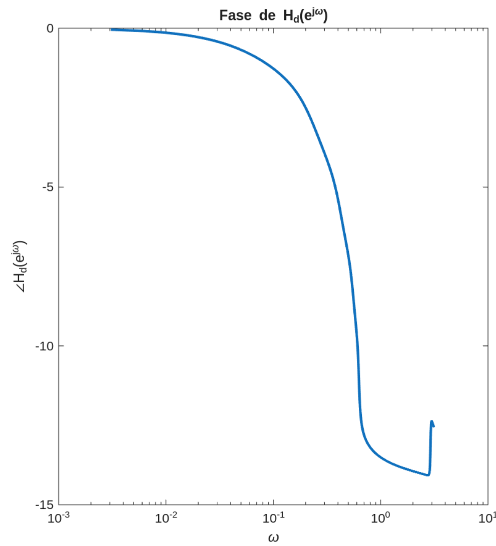
Esto es equivalente a sustituir en la función de transferencia continua $H_c(s)$ por $s = \frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:

$$H_c(s) \longrightarrow H_d(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{37}$$

$$= H_c\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{38}$$

Al graficar magnitud y fase:





La magnitud cumple con las especificaciones. Al tratarse de un filtro de Chebyshev tipo I, el filtro exhibe ripple en la banda de paso: