Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TÍTULO TENTATIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ARTURO ALONSO SANTAELLA ORTEGA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JAIME BESPROSVANY FRIDZON

México, D.F. 2016

Índice general

Notación

A continuación se presenta un listado de las convenciones de notación, signo, etc., utilizadas en el presente texto, con el objetivo de eliminar ambigüedades asociadas a la multiplicidad de éstas en actual utilización en la literatura del tema.

- Se utilizan unidades tales que $\hbar = c = 1$, siendo las primeras secciones del capítulo 1 la excepción a esta regla. (*Unidades naturales*)
- La métrica de Minkowski es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  en coincidencia con [7], [2] y [6], por ejemplo, pero en discrepancia con [8], [10] y [12]. Además, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (g^{-1})^{\mu\nu}$.
- Índices en letras latinas (e.g. i, j, k, etc.) toman valores en $\{1,2,3\}$ mientras que índices en letras griegas (e.g. α, β, μ, ν, etc.) toman valores en $\{0,1,2,3\}$. Excepciones a lo anterior se harán explícitas.
- Se asume la suma sobre parejas de índices repetidos en una misma expresión (e.g. $u_\alpha v^\alpha \equiv \sum_\alpha u_\alpha v^\alpha$). (*Convención de suma de Einstein*)
- Los vectores contravariantes se escriben con índices arriba: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$; los vectores covariantes con índices abajo: $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = g_{\mu\nu}x^\nu$. La 4-posición y el 4-momento son: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ y $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p})$, respectivamente.
- Se define $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, con lo cual $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ es el operador D'Alambertiano; el *operador* de 4-momento es: $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla) = (\hat{E}, \hat{\mathbf{p}})$.

Capítulo 1

Mecánica cuántica relativista

1.1. Introducción

La descripción de fenómenos físicos a altas energías requiere de una teoría cuántica consistente con la relatividad especial. La transición de una teoría no relativista a la relativista requiere de la re-formulación de algunos conceptos en la teoría no relativista, en particular:

1. Las coordenadas temporales y espaciales deben ser tratadas de manera equivalente. Lo anterior no sucede en la en la mecánica cuántica no-relativista al aparecer $\frac{\partial}{\partial t}$ pero no $\overline{\nabla}$, sino ∇^2 en la ecuación de Schrödinger.

2. El principio de incertidumbre de Heisenberg implica que si la posición de una partícula es incierta entonces también el tiempo y la energía lo son:

$$\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c} \sim \frac{\hbar}{2c\Delta p} \sim \frac{\hbar}{2mc^2};$$

   la posición de una partícula no puede ser determinada con mayor precisión que su longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$, de otro modo $E > 2mc^2$ y se presenta la creación y aniquilación de pares.

3. A energías relativistas se presenta la creación y aniquilación de partículas en pares de partícula y antipartícula, por lo que la conservación del número de partículas deja de ser válida. Lo anterior ocurre, por ejemplo, para partículas moviéndose a velocidades comparables a la velocidad de la luz.

Como primer paso en la introducción de una teoría cuántica relativista seguimos el proceso histórico comenzando con el estudio de ecuaciones de onda relativistas de una partícula, i.e. ecuaciones de onda invariantes ante transformaciones de Lorentz[1].

1.2. Ecuación de Klein-Gordon

La energía clásica de una partícula no relativista con masa m, posición $\mathbf{x}$ y momento $\mathbf{p}$, sujeta a un potencial $V(\mathbf{x})$ es

$$\begin{aligned} E &= H \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) encapsula la dinámica entera del sistema; la utilización del formalismo apropiado —i.e. Newton, Lagrange, Hamilton— permite la determinación de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}$, tras lo cual el sistema queda completamente descrito.[2]

En la mecánica cuántica no-relativista un sistema ha sido enteramente descrito cuando se conoce $\Psi(\mathbf{x})$, solución de la *ecuación de onda de Schrödinger*:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x},t)\right)\Psi(\mathbf{x},t). \tag{1.2}$$

La ecuación de Schrödinger (1.2) puede también considerarse una consecuencia de (1.1) si en ésta se efectúa la siguiente transcripción operadores:

$$\begin{aligned} E \to \hat{E} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} &= -i\hbar\bar{\nabla}, \\ H \to \hat{H} &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

La mecánica descrita por (1.1)—y en consecuencia por (1.2)— es claramente no-relativista: basta observar que E y $\mathbf{p}$ no aparecen en igualdad de condiciones; los distintos órdenes de las derivadas evidencain que esta expresión no puede ser invariante ante transformaciones de Lorentz. Lo anterior sugiere la posibilidad de obtener una ecuación de onda invariante ante transformaciones de Lorentz (de ahora en adelante, *Lorentz-covariante*) partiendo de una relación relativista para la energía análoga a (1.1). De acuerdo con la relatividad especial, la energía de una partícula relativista libre

[1]Éstas se introducen propiamente en la sección (1.4)
[2]En general $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$, ó $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$.

de masa m está dada por

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m^2c^2. \tag{1.4}$$

Al sustituir p^μ por el operador de 4-momento $\hat{p}^\mu$,

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}_0, \hat{\mathbf{p}}) = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.5}$$

se obtiene la ecuación de *Klein-Gordon* para una partícula libre:

$$\left(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2c^2\right)\psi = 0. \tag{1.6}$$

Es posible reescribir (1.6) con la ayuda de (1.5) para obtener

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi \equiv \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0. \tag{1.7}$$

Se verifica de inmediato la Lorentz-covariancia de (1.6) y (1.7) al ser $\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu$ Lorentz-covariante. Las soluciones libres de la ecuación de Klein-Gordon son ondas planas de la forma

$$\psi = N\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)\right], \tag{1.8}$$

con N una constante de normalización. La inserción de (1.8) en la ecuación de Klein-Gordon arroja la relación

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2,$$

de donde

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}. \tag{1.9}$$

Lo anterior muestra que la ecuación de Klein-Gordon admite soluciones con energía tanto positiva como negativa. Las soluciones con energía negativa inicialmente representaron un obstáculo para la teoría, no obstante, éstas fueron posteriormente interpretadas con éxito en términos de antipartículas al reinterpretar (1.6) en el marco de una teoría cuántica de campos.

Finalmente, se hace notar que es posible la construcción de una 4-corriente j^μ:

$$j^\mu = (c\rho, -\mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*), \tag{1.10}$$

asociada a la ecuación de onda (1.6), que de manera análoga al caso no relativista satisface

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{1.11}$$

La identidad (1.11) sugiere naturalmente la posibilidad de interpretar ρ como una densidad de probabilidad; esta interpretación resulta imposible al observar que ψ y $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ pueden tomar valores arbitrarios, con lo cual ρ no satisface ser positivo-definida. Esta situación, así como las antes mencionadas soluciones de energía negativa motivaron la búsqueda de ecuaciones de onda relativistas adicionales, algunas de las cuales se introducirán más adelante. Por último se menciona que la corriente j_μ se interpretó posteriormente y de manera exitosa como una corriente de carga $\pm e j_\mu$ asociada a tres soluciones correspondientes a partículas de carga positiva, negativa y neutra, para cada valor de $\mathbf{p}$.[6, cap. 1]

1.3. Ecuación de Dirac

1.3.1. Motivación

En la sección (1.2) se mencionaron algunas de las deficiencias que la ecuación de Klein-Gordon presenta como ecuación de onda relativista. En la ecuación de Schrödinger la derivada temporal $\hat{E} = i\hbar\partial_t$ aparece en un término lineal; la equivalencia relativista entre las coordenadas espaciales y temporales (sec. 1.1) requiere que toda ecuación de onda de la forma de Schrödinger $\hat{E} = \hat{H}$ Lorentz-covariante sea lineal en las derivadas espaciales. Con base en lo anterior en 1928 Paul M. Dirac propuso[3] una ecuación de la forma general

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right) + \beta mc^2\psi. \tag{1.12}$$

Es claro que en la ecuación (1.12) los —todavía no determinados— coeficientes α_i no pueden ser escalares; de serlo ésta no sería invariante aún ante simples rotaciones espaciales. Dirac propuso (1.12) como una ecuación matricial con α_i, β matrices de $N \times N$ y $\psi(\mathbf{x}, t)$ un vector columna:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

De esta manera, se convierte a la ecuación de Dirac en un sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. El valor de N —la dimensionalidad de ψ— se determinará posteriormente. Las soluciones de (1.12) de la forma (1.13) se denominan *espinores* en analogía con las soluciones de la ecuación de Pauli para partículas de espín $1/2$.[3] Para considerar a (1.12) como una ecuación de onda físicamente aceptable requerimos que se satisfaga lo siguiente:

(a) La relación energética relativista para partículas libres

$$E^2 = \mathbf{p}^2 m^2 + m^2 c^4.$$

(b) Admisión de una 4-corriente j^μ con su correspondiente ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$. El término temporal de j^μ debe ser positivo-definido.

(c) Covariancia de Lorentz, i.e. la forma de (1.12) debe ser invariante frente a transformaciones de Lorentz de un sistema inercial a otro.

La condición (a) equivale a requerir que cada componente de (1.13) satisfaga la ecuación de Klein-Gordon (ver sec. 1.2):

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)\psi_\sigma. \tag{1.14}$$

La composición del hamiltoniano H de la ecuación de Dirac arroja:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial t^2} = & \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x^i \partial x^j} \\ & - i\hbar m c^3 \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^2 \psi_\sigma. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Las expresiones (1.14) y (1.15) sólo coincidirán si se exije adicionalmente que las matrices α_i, β satisfagan

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} \equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j), \tag{1.16a}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} \equiv \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \tag{1.16b}$$

$$\alpha_i{}^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \quad (\text{Matriz identidad } N \times N) \tag{1.16c}$$

Las relaciones en (1.16) se denominan relaciones de anticonmutación. El requerimiento adicional de que α_i y β sean hermitianas —siendo así H hermitiano— determina α_i y β hasta una transformación unitaria; los valores propios de α_i y β deben ser reales, y por (1.16c) éstos deben ser ± 1. La propiedad (1.16b) implica que

$$-\alpha_i = \beta \alpha \beta$$

[3] La ecuación de Dirac se reduce en el límite no relativista a la ecuación de Pauli. Si bien esto se argumentará de manera distinta, este hecho permite concluir que la ecuación de Dirac describe a partículas de espín 1/2; ver [2, p. 10].

y por lo tanto

$$\mathrm{Tr}(\alpha_i) = \mathrm{Tr}(\beta\beta\alpha_i) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = \mathrm{Tr}(-\alpha_i), \tag{1.17}$$

de donde se obtiene

$$\mathrm{Tr}(\alpha_i) = \mathrm{Tr}(\beta) = 0. \tag{1.18}$$

En (1.17) se utilizó $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. La ecuación (1.18) nos dice que las matrices α_i y β deben tener el mismo número de valores propios positivos $(+1)$ y negativos (-1) en su diagonal, por lo que N —la dimensión de ψ— debe ser par. En el caso $N = 2$ el máximo número de matrices que satisfacen (1.16a-1.16c) es 3, e.g. las matrices de Pauli σ_i.[4]El mínimo N para el cual (1.16) se satisface es $N = 4$. Una representación explícita de las matrices α_i, β es

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

La representación (1.19) es sólo una de las múltiples representaciones admisibles; cualquier conjunto $\alpha'_i = U\alpha_i U^{-1}, \beta' = U\beta U^{-1}$ con U una matriz unitaria así mismo satisfará (1.16). La siguiente subsección provee mayores detalles sobre la relación entre distintas representaciones.

1.3.2. La ecuación de Dirac y las matrices γ^μ

La invarianza relativista de la ecuación de Dirac (sec. 1.4) no es evidente en la forma de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ (1.12); se observa una clara distinción entre el término temporal y los términos espaciales. En la subsecuente discusión resultará beneficioso re-expresar (1.12) de manera explícitamente covariante, por lo que multiplicamos (1.12) por $\frac{\beta}{c}$ y definimos

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i. \tag{1.20}$$

La ecuación de Dirac resulta

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^0\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi + mc\psi = 0. \tag{1.21}$$

Introduciendo la notación de barra (*slash*) de Feynman para 4-vectores: $\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$, así como unidades naturales $\hbar = c = 1$, la ecuación de Dirac se escribe de manera compacta como:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = (\not{p} - m)\psi = 0. \tag{1.22}$$

[4]Un conjunto de matrices A_i que satisfagan (1.16) debe ser linealmente independiente y satisfacer $\mathrm{Tr}(A_i) = 0$ para toda i. La dimensión del subespacio de matrices M de 2×2 para las cuales $\mathrm{Tr}(M) = 0$ es 3, por lo que esa es la máxima cantidad de matrices 2×2 que satisfacen (1.16).

En la representación (1.19) las matrices γ^μ son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

y satisfacen las relaciones de anticonmutación y hermiticidad[5]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\mathbb{1}, \tag{1.24a}$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\ (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \tag{1.24b}$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1},\ (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}. \tag{1.24c}$$

El objeto g que aparece en (1.24) es la generalización relativista de la métrica euclidiana δ_{ij} y se conoce como *métrica de Minkowski* o simplemente *tensor métrico* [relativista]. Matemáticamente:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

La métrica g encapsula la «estructura» relativista del espacio-tiempo y permite la construcción de objetos físicos invariantes en todo sistema de referencia inercial (sec. 1.4).

El mismo argumento utilizado para α_i y β muestra que cualquier conjunto de matrices γ'^μ unitariamente equivalentes —i.e. $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$— a (1.23) satisfará así mismo (1.24). Inversamente, en las referencias [4, 6] se muestra que todas las familias de matrices 4×4 que satisfacen (1.24) son unitariamente equivalentes. De lo anterior se desprende el que las conclusiones físicas obtenidas de la ecuacióne (1.12) y (1.22) serán independientes de la selección particular de α_i y β, y γ^μ, respectivamente, mas la selección juiciosa de dicha representación posibilita la simplificación de los cálculos involucrados.

La forma (1.22) de la ecuación de Dirac permite la inmediata inserción de una interacción con un potencial externo A^μ mediante la «sustitución mínima» $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$:[6]

$$(\gamma_\mu(p^\mu - eA^\mu) - m)\psi = (i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi = 0. \tag{1.26}$$

[5] Se dice que las matrices γ^μ forman un *álgebra de Clifford*.[14] Sus conmutadores son generadores del grupo de Lorentz,[10] este hecho se usará para mostrar la Lorentz-covariancia de la ecuación de Dirac en la sección 1.4.

En el contexto de la invarianza relativista de la ecuación de Dirac, si p^μ es un 4-vector entonces $p^\mu - eA^\mu$ también lo será, por lo que en (1.4) bastará verificar la covariancia de Lorentz de (1.22); la covariancia de (1.26) será una consecuencia directa del primer caso.

1.3.3. Ecuación de continuidad

El carácter vectorial de las soluciones de (1.12), (1.13) sugiere la utilización de formas bilineares en ψ para la construcción de una corriente conservada $(\rho, \mathbf{j})$ con componente temporal ρ positiva-definida.[7] En efecto, partiendo de la ecuación de Dirac (1.12) y su transpuesta conjugada:[8]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right) + \beta mc^2\psi, \tag{1.27a}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i}\left({\alpha_1}^\dagger\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^1} + {\alpha_2}^\dagger\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^2} + {\alpha_3}^\dagger\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^3}\right) + \beta^\dagger mc^2\psi^\dagger. \tag{1.27b}$$

La multiplicación de (1.27a) por $\psi^\dagger$ en la derecha, de (1.27b) por ψ en la izquierda y la sustracción de lo resultante arroja

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\psi = \sum_1^3 \frac{\hbar c}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi^\dagger\alpha_i\psi\right), \tag{1.28}$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \tag{1.29}$$

con densidad $\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_1^4 \psi_i^*\psi_i \geq 0$ definida-positiva y $\mathbf{j} = c\psi^\dagger\alpha_i\psi$.

La expresión (1.29) puede reescribirse en términos de las matrices γ^μ (ver sub. 1.3.2) introduciendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ el *espinor adjunto* de ψ. En unidades naturales ($\hbar = c = 1$):

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{1.30}$$

de manera que (1.29) se convierte simplemente en

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1.31}$$

En la sección 1.4 se mostrará que j^μ es un 4-vector, haciendo así a la ecuación de continuidad (1.31) un invariante de Lorentz.

[6] También llamado «acoplamiento mínimo».

[7] La palabra *vector* se utiliza aquí en el sentido usual de álgebra lineal; físicamente ψ es un *espinor*.

[8] Para una matriz arbitraria $M_{n\times m}$: $M^\dagger = (M^T)^*$. En particular: $\psi^\dagger = ({\psi_1}^*, \ldots, {\psi_4}^*)$.

1.4. Covariancia de la ecuación de Dirac

1.4.1. Transformaciones de Lorentz

La relatividad especial establece la existencia de una clase de sistemas de referencia, llamados *inerciales*, completamente equivalentes para la descripción de fenómenos físicos; dos observadores en sistemas de referencia inerciales O y O' con coordenadas $x^\mu = (t, x, y, z)$ y $x'^\mu = (t', x', y', z')$, no necesariamente iguales, llegarán a las mismas conclusiones tras la observación de un fenómeno físico.[9] La relación entre las coordenadas x^μ y x'^μ de ambos sistemas de referencia está dada por

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \text{[10]} \tag{1.32}$$

sujeta a la restricción

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau g^{\sigma\tau} = g^{\mu\nu}. \tag{1.33}$$

El objeto g que aparece en (1.33) es el *tensor métrico* [relativista] o la *métrica de Minkwoski* —ya previamente encontrado en la sección 1.3.1— y se define por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

La condición (1.33) garantiza la constancia del «producto interior»: $u_\mu v^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu v^{mu}$, y la «norma» o *intervalo invariante* inducida por éste: $u^2 = u_\mu u^\mu$, en ambos sistemas de referencia; la constancia de la velocidad de la luz se sigue directamente del caso particular en el que $x^2 = 0 = x'^2$. La transformación lineal y homogénea Λ en (1.32) y (1.33) lleva por nombre el de *transformación de Lorentz*. Los coeficientes $\Lambda^\mu{}_\nu$ de Λ dependen de las velocidades y orientaciones relativas de los sistemas coordenados de O y O'.

Es físicamente claro que para todo sistema de referencia O existe una transformación Λ —en este caso la identidad $\mathbb{1}$— que conecta el sistema coordenado de O consigo mismo, y que si Λ_1 conecta a O con O' y Λ_2 conecta O' con O'', entonces $\Lambda_1\Lambda_2$ realiza el cambio de coordenadas de O a O''. La simetría del sistema —con respecto a los observadores—sugiere además que si Λ conecta la descripción de O con la de O', entonces debe existir una transformación inversa Λ^{-1}

[9] x^μ es un *evento* en el *espacio-tiempo* o *espacio de Minkowski* $3 + 1$-dimensional. En lo subsecuente se adopta la convención $c = \hbar = 1$, anteriormente utilizada en la subsección 1.3.2.

[10] Como se describe en la sección sobre notación, a reserva de especificar lo contrario, se hace uso de la convención de suma de Einstein en la que índices repetidos se suman.

que realice la conexión en el sentido inverso. De lo anterior se extrae que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz forma un grupo, el *grupo de Lorentz*, denotado $\mathrm{SO}(1,3)$.[11] El grupo de Lorentz contiene como subgrupo a las isometrías usuales del espacio tridimensional —los grupos de rotaciones $\mathrm{SO}(2), \mathrm{SO}(3)$ y las reflexiones o inversiones del espacio—, las inversiones temporales ($t \mapsto -t$) y los *boosts* —si bien éstos no forman un grupo— que transforman un sistema inercial en otro con una velocidad relativa con respecto a éste.[12]

1.4.2. Propiedades de transformación de la ecuación de Dirac

Dados dos observadores inerciales O y O' con sus respectivos sistemas coordenados x^μ y x'^μ, conectados por una transformación de Lorentz ($x' = \Lambda x$), el requerimiento de que la ecuación de Dirac sea Lorentz-covariante se traduce en las siguientes condiciones:

(a) Si $\psi(x)$, solución de (1.21), describe un estado físico en el sistema O y $\psi'(x')$ describe el mismo estado físico en el sistema O', debe existir una transformación $S(\Lambda)$ que permita el cálculo de ψ' a partir de ψ, y viceversa.

(b) ψ' debe satisfacer la correspondiente ecuación de Dirac en el sistema O':

$$i\left(\gamma'^0 \frac{\partial}{\partial x'^0} + \gamma'^1 \frac{\partial}{\partial x'^1} + \gamma'^2 \frac{\partial}{\partial x'^2} + \gamma'^3 \frac{\partial}{\partial x'^3}\right)\psi'(x') + m\psi'(x') = 0. \tag{1.35}$$

Adicionalmente, el conjunto de matrices γ' en O' debe satisfacer el álgebra de Clifford (1.24), de lo contrario sería posible distinguir los sistemas O y O'. La referencia [4] mencionada en la subsec. 1.3.2 establece que todas las matrices 4×4 que satisfacen (1.24) son unitariamente equivalentes; se desprende que es posible prescindir de las primas en (1.35) y utilizar el mismo conjunto de matrices de Dirac γ.

La linealidad de las transformaciones de Lorentz y de la ecuación de Dirac sugiere que la transformación $S(\Lambda)$ debe ser lineal; se busca entonces una matriz 4×4 $S(\Lambda)$ tal que

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x'). \tag{1.36}$$

[11] La notación $\mathrm{SO}(1,3)$ proviene del hecho de que el grupo es «parecido» a $\mathrm{SO}(4)$: en $\mathrm{SO}(4)$ la métrica es $\delta_{\mu\nu}$, que induce la norma euclidiana usual en cuatro dimensiones; en el grupo de Lorentz la métrica g difiere de δ en el cambio de signo entre los términos espaciales y temporales del intervalo invariante d^2x; $\mathrm{SO}(4)$ y $\mathrm{SO}(1,3)$ exhiben la misma «geometría» tras la sustitución de las rotaciones circulares del tiempo y el espacio por «rotaciones» hiperbólicas. [10]

[12] El grupo de Lorentz es, a su vez, subgrupo del *grupo de Poincaré* o *grupo inhomogéneo de Lorentz*, el cual contiene además transformaciones de la forma $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$. Es claro que la transformación de la ecuación de Dirac y sus soluciones ψ ante una traslación $x^\mu + a^\mu$ es un simple cambio de coordenadas, por lo que las propiedades de transformación estudiadas en la presente sección se restringirán a transformaciones homogéneas de Lorentz.

La equivalencia entre los dos observadores inerciales requiere que O' sea capaz de calcular $\psi(x)$ a partir de $\psi'(x')$; la transformación $S(\Lambda)$ debe tener inversa $S^{-1}(\Lambda)$. Por otro lado, Λ^{-1} lleva a cabo la transformación $O' \to O$. Lo anterior, en conjunto con (1.36), permite realizar la identificación

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda).\text{[13]} \tag{1.37}$$

La condición que determina S se deduce de aplicar $S(\Lambda)$ por la izquierda en (1.21) y escribir $\psi(x)$ como $S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$:

$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0. \tag{1.38}$$

Adicionalmente, de (1.32) se deduce que $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \dfrac{\partial}{\partial x'^\nu}$; se re-escribe entonces (1.38) como:

$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m\right)\psi'(x') = 0. \tag{1.39}$$

La identificación de (1.39) con la ecuación de Dirac para $\psi'(x')$, (1.21) permite concluir la condición fundamental sobre S:

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda). \tag{1.40}$$

El la existencia de una solución S de (1.40) constituirá la prueba de la Lorentz-covariancia de la ecuación de Dirac; las condiciones (a) y (b) para ésta se satisfarán de manera inmediata por una S con dicha propiedad.

El problema de encontrar una solución S de (1.40) se simplifica enormemente para transformaciones de Lorentz «pequeñas» o cercanas a la identidad $a^\mu{}_\nu$:[14]

$$a^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu, \tag{1.41}$$

con $\Delta\omega$ una transformación antisimétrica: $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$. La antisimetría de $\Delta\omega^{\mu\nu}$ es consecuencia de la invertibilidad de la transformación a:

$$\begin{aligned} a^\mu{}_\nu a_\mu{}^\lambda = \delta^\lambda_\nu &= (\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu)(\delta^\lambda_\mu + \Delta\omega_\mu{}^\lambda) \\ &\approx \delta^\lambda_\nu + \Delta\omega^\lambda{}_\nu + \Delta\omega_\nu{}^\lambda. \end{aligned}$$

al ignorar términos de segundo orden. La antisimetría de la matriz $\Delta\omega^{\mu\nu}$ restringe la cantidad de sus coeficientes independientes a seis: las tres entradas $(\Delta\omega)^{0i} = \Delta v_i$ generarán los *boosts* con velocidad Δv_i en la dirección x_i; las tres entradas restantes $(\Delta\omega)^{ij} = \Delta\varphi_k$ generarán rotaciones de ángulo $\Delta\varphi_k$ alrededor del eje x_k —i, j y k cíclicos—. $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\varphi}$ se denominan *ángulos de rotación generalizados*

[13] Esto es parte del más general hecho de que S forma una *representación* (espinorial) del grupo (homogéneo) de Lorentz, esto se explora con detenimiento en el capítulo 2 de [12].

ω y comprenden los ángulos de rotación usuales en tres dimensiones, así como los «ángulos» de los *boosts* —rotaciones hiperbólicas— que mezclan coordenadas espaciales y temporales.

Dada una transformación de Lorentz a cercana a la identidad, resulta físicamente razonable asumir que la transformación $S(a)$ lo estará también; en otras palabras, que la dependencia de S en a es continua. Matemáticamente lo anterior equivale a la asunción de que $S(a)$ admite una expansión *a primer orden* en potencias de $\Delta\omega$:

$$S(a) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \tag{1.42}$$

con

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}.$$

Cada uno de los seis «coeficientes» $\sigma_{\mu\nu}$ en (1.42) es una matriz 4×4 y éstos se conocen como los *generadores* de la representación S. El factor $-\frac{i}{4}$ se incluye para simplificar cálculos posteriores. Insertando (1.41) y (1.42) en la condición fundamental (1.40) se obtiene, a primer orden en $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\nu}).$$

La antisimetría de $\Delta\omega$ permite la manipulación del lado izquierdo de lo anterior para obtener la condición que las matrices $\sigma_{\alpha\beta}$ han de satisfacer:

$$[\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^{\mu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\mu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha}). \tag{1.43}$$

Para transformaciones de Lorentz cercanas a la identidad, el problema de hallar S que satisfaga (1.40) queda entonces reducido al de encontrar un conjunto de seis matrices que satisfagan (1.43). De la relación de anticonmutación (1.24a) se sigue que

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right] \tag{1.44}$$

satisface (1.43) y por tanto es el conjunto de matrices buscado. La transformación $S(a)$ con a *infinitesimal* es entonces:

$$S(a) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} = \mathbb{1} + \frac{1}{8}\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right]\Delta\omega^{\mu\nu} \tag{1.45}$$

La construcción de $S(\Lambda)$ para transformaciones de Lorentz Λ con un ángulo de rotación finito

[14] Esto nos obliga a trabajar en la región conexa del grupo de Lorentz que contiene a la transformación identidad: el grupo de las transformaciones de Lorentz *propias*. El grupo de las transformaciones propias satisface $\det \Lambda = +1$, para toda Λ. Las transformaciones Λ para las cuales $\det \lambda = -1$ se denominan transformaciones de Lorentz *impropias*; las inversiones espaciales y las temporales son ejemplos de éstas.

ω se efectúa mediante la sucesiva aplicación de la transformación infinitesimal (1.45). Para realizar lo anterior resulta útil re-escribir (1.41) como

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega (I_n)^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.46}$$

donde se expresa a a como una rotación infinitesimal de ángulo generalizado $\Delta\omega$ en la dirección $\boldsymbol{n}$ en el espacio de Minkowski; $(I_n)^{\mu}{}_{\nu}$ es la matriz 4×4 que genera dicha rotación unitaria en la dirección $\boldsymbol{n}$. Las transformaciones finitas correspondientes se obtienen a través una sucesión de aplicaciones de (1.46) mediante

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\omega}{N} I_n \right)^N = \exp\left(\omega I_n\right) \qquad \left(\Delta\omega = \frac{\omega}{N} \right) \tag{1.47}$$

La transformación para espinores $S(\Lambda)$ con Λ finita se sigue de (1.36), (1.46) y (1.47):

$$\begin{aligned} \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) &= \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4}\frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} I_n^{\mu\nu} \right)^N \psi(x) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu} I_n^{\mu\nu} \right) \psi(x) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Resulta ilustrativo ejemplificar lo anterior:

Ejemplo 1 *Boost de velocidad v en la dirección x. En este caso la transformación infinitesimal es*

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta v & 0 & 0 \\ -\Delta v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \Delta v \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

de donde se deduce que

$$(I_x)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I_y)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I_z)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

Adicionalmente, las matrices $I_{x,y,z}$ satisfacen:

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad I^3 = I \tag{1.51}$$

Utilizando la propiedad anterior se itera (1.49) con $\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$ para recuperar el boost de velocidad v en la dirección x:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + \frac{\omega}{N} I_x\right)^N \\
&= \exp\left(\omega I_x\right) = \cosh\left(\omega I_x\right) + \sinh\left(\omega I_x\right) \\
&= \mathbb{1} - I_x^2 + I_x^2 \cosh\omega + I_x \sinh\omega \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

correspondiente a un boost con $v = \tanh\omega$ y $\cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. La transformación espinorial (1.48) correspondiente al boost es:

$$\begin{aligned}
\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) =& \exp\left(-\frac{i}{4}\omega\left(\sigma_{01}{I_x}^{01} + \sigma_{10}{I_x}^{10}\right)\right)\psi(x) \\
=& \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}\right)\psi(\Lambda^{-1}x) \\
=& \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\left[\gamma_0, \gamma_1\right]\right)\psi(\Lambda^{-1}x')
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Ejemplo 2 *Rotación de ángulo φ alrededor de x_3. La transformación infinitesimal es*

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \Delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \Delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

y por lo tanto

$$(I_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Las matrices I_1, I_2 que generan rotaciones alrededor de los ejes x_1 y x_2 son análogas; I_3 además satisface

$$I_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_3^3 = -I_3, \ \text{y} \ I_3^4 = -I_3^2 \tag{1.55}$$

[15] *Aplicando sucesivamente (1.53) se recuperan las rotaciones usuales:*

$$\begin{aligned}\Lambda &= \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1}+\frac{\omega}{N}I_3\right)^N \\ &= \exp\left(\omega I_3\right) = I_3^4\cos\omega + I_3\sin\omega \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega & 0\\ 0 & \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En el presente caso $\omega=\varphi$. La transformación espinorial correspondiente a la rotación es:

$$\begin{aligned}\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) &= \exp\left(-\frac{i}{4}\varphi\left(\sigma_{12}{I_3}^{12}+\sigma_{21}{I_3}^{21}\right)\right)\psi(x) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma_{12}\right)\psi(\Lambda^{-1}x) = \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma^{12}\right)\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\Sigma_3\right)\psi(\Lambda^{-1}x')\end{aligned} \tag{1.56}$$

con

$$\sigma^{ij} = \left[\gamma^i,\gamma^j\right] \equiv \Sigma_k \equiv \begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix} \quad (i,j,k \text{ cícilicos}) \tag{1.57}$$

La generalización de (1.56) para una rotación general de ángulo $|\boldsymbol{\varphi}|$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ es directa:

$$\psi'(x') = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{1.58}$$

La presencia del factor $1/2$ en (1.58) es característica de las transformaciones espinoriales y tiene por consecuencia el que se requiera de una rotación de 4π, y no 2π, para retornar ψ a su estado inicial, por lo que se hace evidente la necesidad de potencias pares —u órdenes pares superiores— para la construcción de observables físicos a partir de ψ.

Las transformaciones (1.52) y (1.58) satisfacen:

$$S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0, \tag{1.59}$$

consecuencia de (1.43) al expandir S como serie de potencias. Es finalmente posible establecer la covariancia de la 4-corriente $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ —ver subsección 1.3.3—:

[15] Obsérvese que I_3 y I_3^4 se comportan como las versiones matriciales de i y 1, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
j^{\mu\prime}(x') &= \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\gamma^\mu\psi'(x') \\
&= \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S\psi(x) \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma^0\left(S^{-1}\gamma^\mu S\right)\psi(x) \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma^0\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

donde se ha utilizado la condición fundamental (1.40) al pasar del tercer al cuarto renglón. Se concluye que la corriente j^μ es un 4-vector y la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$ es invariante ante transformaciones de Lorentz.

Capítulo 2

Ecuación de Bargmann-Wigner

2.1. Ecuación de Bargmann-Wigner libre

2.1.1. Introducción

Las ecuaciones de Bargmann-Wigner[1] describen un sistema de ecuaciones de onda relativistas de espín arbitrario. En el formalismo de Bargmann-Wigner el estado de un sistema cuántico relativista, de masa m y espín $s \geq 1/2$ queda descrito por un *multiespinor* totalmente simétrico de grado $2s$: [6, 8]

$$\psi_{\alpha\beta\ldots\tau}(x^\mu)$$

que satisface ecuaciones tipo Dirac en cada uno de sus $2s$ índices:

$$\begin{gathered}
(i\not{\partial} - m)_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'\beta\ldots\tau} = 0 \\
(i\not{\partial} - m)_{\beta\beta'} \psi_{\alpha\beta'\ldots\tau} = 0 \\
\vdots
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Se observa que cuando $s = 1/2$ el sistema (2.1) se reduce a la ecuación de Dirac (1.22).

2.1.2. Caso libre con $s = 1$ (Ec. Proca)†

En el caso $s = 1$ el sistema (2.1) se reduce a la pareja de ecuaciones

†El contenido de esta subsección traza fielmente el procedimiento seguido por [8] en la realización del mismo cálculo; la presente subsec. puede considerarse una traducción a lenguaje covariante moderno de lo realizado en dicha fuente.

$$\begin{aligned}(i\partial\!\!\!/ - m)_{\alpha\alpha'}\,\psi_{\alpha'\beta} &= 0,\\ (i\partial\!\!\!/ - m)_{\beta\beta'}\,\psi_{\alpha\beta'} &= 0,\end{aligned} \tag{2.2}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi &= 0,\\ \psi(i\gamma^{\mu T}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - m) &= 0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde se reescribió al biespinor $\psi_{\alpha\beta}$ como una matriz simétrica ψ de 4×4 y se utilizó el hecho de que $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$.

El significado físico de las ecuaciones (2.3) se hace visible al desarrollar la matriz ψ en términos de las diez matrices simétricas $\gamma^{\mu}C$ y $\sigma^{\mu\nu}C$:

$$\psi(x) = mA_{\lambda}(x)\gamma^{\lambda}C + \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(x)\sigma^{\lambda\nu}C \tag{2.4}$$

donde C es el operador de conjugación de carga, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$, y A_{μ} y $F_{\mu\nu}$ son campos vectoriales y tensoriales antisimétricos de segundo orden, respectivamente. Insertando (2.4) en (2.3) y sumando las ecuaciones resultantes se obtiene

$$\begin{aligned}im\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\lambda}\right]C\partial_{\mu}A_{\lambda} + \tfrac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\sigma^{\lambda\nu}\right]C\partial_{\mu}F_{\lambda\nu}&\\ -2m^2\gamma^{\lambda}CA_{\lambda} - m\sigma^{\lambda\nu}CF_{\lambda\nu} &= 0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde adicionalmente se utilizó la relación $\gamma^{\mu T} = -C^{-1}\gamma^{\mu}C$. Haciendo uso de $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{m}u,\gamma^{\nu}\right]$ y $\left[\gamma^{\mu},\sigma^{\lambda\nu}\right] = 2i(\eta^{\mu\lambda}\gamma^{\nu} - \eta^{\mu\nu}\gamma^{\lambda})$ se deduce entonces

$$-2\gamma^{\nu}C(\partial^{\lambda}F_{\lambda\nu} + m^2A_{\nu}) - m\sigma^{\lambda\nu}C(2\partial_{\nu}A_{\lambda} + F_{\nu\lambda}) = 0 \tag{2.6}$$

de donde se extraen las **ecuaciones de Maxwell masivas**:

$$F_{\lambda\nu} = \partial_{\lambda}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\lambda} \tag{2.7a}$$

$$\partial^{\lambda}F_{\lambda\nu} = -m^2A_{\nu}. \tag{2.7b}$$

Las ecuaciones (2.7) son mejor conocidas como las **ecuaciones de Proca**[6, 9]. En el caso masivo ($m \neq 0$), (2.7b) permite *deducir* la condición de norma de Lorenz:

$$\partial^{\mu}A_{\mu} = 0 \tag{2.8}$$

con lo cual es posible expresar (2.7a-2.7b) en términos únicamente dependientes del potencial vectorial A^μ:

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \tag{2.9a}$$

$$\partial^2 A_\mu = -m^2 A_\mu. \tag{2.9b}$$

2.1.3. Caso libre con $m = 0$ (Electromagnetismo)

Cuando $m = 0$ las ecuaciones (2.7) reproducen las las ecuaciones de Maxwell usuales en el vacío:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.10a}$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.10b}$$

o equivalentemente, en función sólo de potencial vectorial:

$$\partial^2 A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0. \tag{2.11}$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) son invariantes ante una transformación de norma $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \phi$ con la cual es posible reproducir la condición (2.8), obteniéndose así la ecuación de onda usual del potencial electromagnético en el vacío

$$\partial^2 A_\mu = 0. \tag{2.12}$$

En la obtención de (2.12) la condición de Lorenz no es consecuencia de las ecuaciones para F y A, sino que debe de ser impuesta adicionalmente a través de la transformación de norma correspondiente, y la selección de una transformación de norma distinta (e.g. norma de radiación) modificaría la forma final de la ecuación de onda.[8]

2.2. Ecuación de Bargmann-Wigner con interacción

El análisis del efecto de un campo externo B_μ sobre el sistema de estudio se realiza mediante la inserción de la sustitución mínima (ver subsec. 1.3.2): $p_\mu \to p_\mu - eB_\mu$[1], donde e es un coficiente que mide la intensidad de la interacción de *psi* con B. En el caso del sistema con $s = 1$ descrito en la sección (2.1.1) la sustitución mínima arroja la pareja de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}B_{\mu} - m)\,\psi &= 0, \\ \psi(i\gamma^{\mu T}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - e\gamma^{\mu T}B_{\mu} - m) &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Expandiendo ψ en lo anterior como en (2.4): $\psi = mA_{\lambda}\gamma^{\lambda}C + \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}C$, con $\gamma^{\mu T} = -C^{-1}\gamma^{\mu}C$ y sumando ambos miembros de (2.13) se obtiene, tras las manipulaciones correspondientes, la pareja de ecuaciones:

$$F_{\lambda\nu} = \partial_{\lambda}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\lambda} - ie(A_{\lambda}B_{\nu} - A_{\nu}B_{\lambda}) \tag{2.14a}$$

$$(\partial^{\lambda} + ieB^{\lambda})F_{\lambda\nu} = -m^2A_{\nu}. \tag{2.14b}$$

Las expresiones (2.14) son las ecuaciones de movimiento para los campos A y F asociados a ψ en el formalismo de Bargmann-Wigner, donde adicionalmente se ha introducido en (2.3) una interacción mínima con un campo vectorial B.

La pareja de ecuaciones (2.14a-2.14b) puede expresarse de manera compacta mediante el uso de la **derivada covariante de norma**:

$$D^{\mu} \equiv (\partial^{\mu} + ieB^{\mu}), \tag{2.15}$$

con lo cual (2.14) adquiere la forma (2.7) con la sustitución $\partial \to D$:

$$F_{\lambda\nu} = D_{\lambda}A_{\nu} - D_{\nu}A_{\lambda}, \tag{2.16a}$$

$$D^{\lambda}F_{\lambda\nu} = -m^2A_{\nu}. \tag{2.16b}$$

La sustitución $\partial \to D$ introduce algunas sutilezas que impiden copiar el análisis realizado la sección 2.1.1 para el caso libre; si $m \neq 0$ la aplicación de D^{ν} a (2.16b) en general **no** permite deducir una «condición de Lorenz generalizada»:

$$D^{\mu}A_{\mu} \neq 0. \tag{2.17}$$

Lo anterior se debe a que en general D^{μ} y D^{ν} no conmutan entre sí. Insertando (2.14a) en (2.16b) se obtiene la «ecuación de onda» que rige el comportamiento de nuestro sistema masivo con

[1] Se utiliza B en lugar del usual A para el potencial externo debido a que A será, como en las secs. 2.1.2 y 2.1.3, el campo vectorial en términos del cual se expandirá ψ.

espín 1 en el caso interactivo:

$$D^2 A_\mu - D_\mu (D^\nu A_\nu) = -m^2 A_\nu. \tag{2.18}$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) son análogas a la pareja (2.9) con la aplicación de la traducción $\partial \to D$.

En el caso no masivo ($m = 0$) las ecuaciones (2.16) se simplifican:

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu, \tag{2.19a}$$

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.19b}$$

o en función sólo del potencial vectorial:

$$D^2 A_\mu - D_\mu (D^\nu A_\nu) = 0. \tag{2.20}$$

Al igual que en el caso sin interacción con el campo externo B, cuando $m = 0$ resulta imposible obtener la condición de «norma» (2.17) como consecuencia de las ecuaciones de movimiento. (ANOTACIONES: ¿Ésta puede ser impuesta, bajo qué condiciones? ¿Cómo se ven las nuevas transformaciones de norma, si es que las hay?).

MÁS COSAS A INVESTIGAR: ¿Qué chingados significa físicamente la traducción $\partial \to D$? y ¿qué jodidos nos dice del comportamiento físico del sistema en presencia de B?

Bibliografía

[1] Bargmann, V. y E. P. Wigner: *Group theoretical discussion of relativistic wave equations.* Proceedings of the National Academy of Sciences, 34(5):211–223, 1948.

[2] Bjorken, J. y S. Drell: *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, 1964.

[3] Dirac, P. A. M.: *The Quantum Theory of the Electron.* Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 117(778):610–624, 1928.

[4] Good, R. H.: *Properties of the Dirac Matrices.* Rev. Mod. Phys., 27:187–211, Apr 1955.

[5] Greiner, W.: *Quantum Mechanics–An Introduction.* Springer-Verlag, 3ª ed., 1994, ISBN 3-540-58079-4.

[6] Greiner, W.: *Relativistic Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, 2ª ed., 1997, ISBN 3-540-61621-7.

[7] Itzykson, C. y J. B. Zuber: *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill, 1985, ISBN 0-07-032071-3.

[8] Lurie, D.: *Particles and Fields.* John Wiley & Sons, 1968.

[9] Proca, A.: *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs.* J. Phys. Radium, 7(8):347–353, 1936.

[10] Robinson, M.: *Symmetry and the Standard Model.* Springer-Verlag New York, 2011.

[11] Tung, W. K.: *Group Theory in Physics.* World Scientific, 1985.

[12] Weinberg, S.: *Quantum Theory of Fields*, vol. 1. Cambridge University Press, 1995.

[13] Wigner, E.: *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group.* Annals of Mathematics, 40(1):149–204, 1939.

[14] Zee, A.: *Quantum Field Theory in a Nutshell.* Princeton University Press, 2010.