OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA I
PROYECTO II

Condiciones para entregar el proyecto

Cada equipo debe

1. tener entre de 2 o 3 miembros.
2. debe entregar su código en Python.
3. Si alguien quiere cambiar de grupo, entonces les pido que me envíen un correo electrónico avisándome. Esto es para que yo pueda configurar la entrega vía CANVAS.
4. implementar un método de la selección (abajo).
5. implementar otras funciones y *scripts* que ayudan a resolver los problemas descritos abajo.
6. los *scripts* y funciones solo deben imprimir lo que es requerido para comparar los resultados de los distintos problemas.
7. documentar los resultados (en un PDF) para los problemas descritos abajo.
   Obligatorio: Dependiendo como documentan los resultados deben entregar uno o varios *scripts* (de Python) que reproduce(n) los resultados que incluyeron en el documento.
   NO quiero cambiar nada en el código para reproducir los resultados en su documentación.
   Favor de no incluir código en la documentación.

Otras condiciones:

- Fecha: Miércoles 30 de Noviembre a las 23:55 en CANVAS (tareas).
- Entregar todo en CANVAS, el código (métodos, funciones auxiliares y *scripts*) en un archivo `zip` y **por separado** el documento PDF que documenta los resultados.

Dr. Andreas Wachtel, Otoño 2021.

1. Contexto

En este proyecto se trata de comparar los siguientes modelos para optimización de Portafolios.

- Minimizar el riesgo pidiendo una ganancia mínima α :

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}} \\
\text{sujeto a} \quad & \vec{\boldsymbol{\mu}}^\top \vec{\boldsymbol{x}} \geq \alpha\,, \\
& \mathbb{1}^\top \vec{\boldsymbol{x}} = 1\,, \\
& \vec{\boldsymbol{x}} \geq \vec{\mathbf{0}}\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

- Maximizar la ganancia esperada sujeto a un riesgo acotado por β :

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \vec{\boldsymbol{\mu}}^\top \vec{\boldsymbol{x}} \\
\text{sujeto a} \quad & \vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}} \leq \beta\,, \\
& \mathbb{1}^\top \vec{\boldsymbol{x}} = 1\,, \\
& \vec{\boldsymbol{x}} \geq \vec{\mathbf{0}}\,.
\end{aligned} \tag{2}
$$

- Maximizar la ganancia y penalizando el riesgo:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & -\vec{\boldsymbol{\mu}}^\top \vec{\boldsymbol{x}} + \gamma\, \vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}} \\
\text{sujeto a} \quad & \mathbb{1}^\top \vec{\boldsymbol{x}} = 1\,, \\
& \vec{\boldsymbol{x}} \geq \vec{\mathbf{0}}\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

El problema (2) se debe resolver con el nuevo método (que les pido en **E2**, abajo).

Los problemas (1) y (3) se pueden resolver con su método del conjunto activo (del proyecto 1 si fue correctamente implementado), o con el método de puntos interiores ver Ejercicios T2.3 (ej 1) o con el método que implementan para **E2**, abajo).

Sugiero que verifiquen su algoritmo con problemas de los cuales conocen la solución exacta.

2. Lo que deben hacer

Deben resolver y documentar resultados para los siguientes “ejercicios”:

E1) Hay que escribir una función que construye los parámetros comunes de los 3 tipos de problemas, es decir, la matriz de co-varianzas $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y la ganancia esperada de cada activo $\vec{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^n$. La función debe

- tener la dimensión n como parámetro.
- construir $C = R^\top R$ donde $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior e invertible y tiene entradas aleatorias como sigue:
  - en la diagonal deben pertenecer al intervalo $[1/100,\, 4/10]$.
  - arriba de la diagonal deben pertenecer al intervalo $[-2/10,\, 2/10]$.
- construir un vector aleatorio $\vec{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^n$ con entradas en el intervalo $[2\,\%, 10\,\%]$.

Para poder reproducir sus resultados debe usar un *seed*.

E2) Implementar SOLO UNO de los siguientes algoritmos para resolver el segundo problema del contexto (maximizar ganancia con riesgo acotado).

- El algoritmo presentado en Tema 4 (clase 1) e implementado (para igualdades en clase 2).
- O Algoritmo 19.1 (pagina 568, Nocedal y Wright).
  Ayuda: Hicimos código para puntos interiores con desigualdades en clase.

Si quieren, pueden especializar la implementación al problema (para evitar la aproximación de derivadas y hessiana).

E3) *Comparar soluciones de distintos problemas con los mismos datos* $C, \vec{\boldsymbol{\mu}}$.

a) Usando **E1)** genera los datos C y $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ una vez para un $n \geq 10$ de tu elección.
Esos datos se consideran fijos para los problemas (1), (2), (3).

b) Resuelve el problema (1) dos veces (con los parámetros $C, \vec{\boldsymbol{\mu}}$ de a):

- una vez con $\alpha = \min\{\mu_i \colon i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- una vez con $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Documentar los resultados ($\vec{\boldsymbol{x}}$, la ganancia $\vec{\boldsymbol{x}}^\top \vec{\boldsymbol{\mu}}$, la varianza $\vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}}$) en el pdf.

c) Resuelve el problema (3) tres veces (con los parámetros $C, \vec{\boldsymbol{\mu}}$ de a):

- una vez con $\gamma = 1$.
- una vez con $\gamma = 10$.
- una vez con $\gamma = 100$.

Documentar los resultados ($\vec{\boldsymbol{x}}$, la ganancia $\vec{\boldsymbol{x}}^\top \vec{\boldsymbol{\mu}}$, la varianza $\vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}}$) en el pdf.

d) Para que el problema (2) (con los parámetros $C, \vec{\boldsymbol{\mu}}$ de a) tenga conjunto factible $\Omega \neq \emptyset$, se requiere una β suficientemente grande.

- proponga dos parámetros $\beta_2 > \beta_1 > 0$ y justifique con teoría que $\Omega \neq \emptyset$.
- Resuelve el problema (2) con β_1.
- Resuelve el problema (2) con β_2.
- construye un problema de optimización cuyo valor óptimo es el mínimo β tal que la restricción $\vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}} \leq \beta$ se cumple para todos los $\vec{\boldsymbol{x}}$ que satisfacen las otras restricciones.

Documentar la teoría y los resultados ($\vec{\boldsymbol{x}}$, la ganancia $\vec{\boldsymbol{x}}^\top \vec{\boldsymbol{\mu}}$, la varianza $\vec{\boldsymbol{x}}^\top C \vec{\boldsymbol{x}}$) en el pdf.