

Reto: La Pelota Rellena

Alonso Montagut^{*}

Angie Sandoval^{**}

Alexandra Peña^{***}

Universidad Industrial de Santander

20 de febrero del 2025

1. Planteamiento del Problema

El estudio del comportamiento de los objetos en movimiento ha sido un tema central en la física, especialmente en la mecánica clásica. Dentro de esta se encuentra el análisis de colisiones, ya que permite comprender la interacción entre cuerpos en movimiento, la conservación del momento y la energía en distintos sistemas [1]. Uno de los conceptos derivados del estudio de colisiones es el coeficiente de restitución, el cual describe la capacidad de un cuerpo para recuperar su movimiento después de un impacto [2].

Un caso que ocasionalmente se estudia cuando de colisiones se trata es el de una partícula en un choque, similar al de una pelota que, dependiendo de su coeficiente de restitución, rebota [1]. Sin embargo, la mayoría de los estudios se enfocan en pelotas huecas y no consideran el efecto de introducir líquidos en su interior. La adición de un líquido modifica la distribución de masa, la disipación de energía y la dinámica del impacto, lo que podría alterar significativamente la altura del rebote y el coeficiente de restitución [3].

Dado que los líquidos pueden tener diferentes viscosidades y densidades, surge la necesidad de estudiar cómo estas propiedades afectan el comportamiento de la pelota durante su rebote. La presente investigación busca responder a la pregunta: ¿Cómo afectan la viscosidad y la densidad de un líquido interno a la altura máxima de rebote de una pelota de ping-pong? Para ello, se analizará la relación entre la cantidad y la viscosidad del líquido en el interior de la pelota y su efecto sobre la altura del rebote a través del coeficiente de restitución para la colisión.

^{*} Código: 2211077

^{**} Código: 2210728

^{***} Código: 2210721

2. Objetivo General

Determinar el coeficiente de restitución y la altura máxima de rebote de una pelota de ping-pong cuando está llena de líquido.

3. Objetivos Específicos

- Encontrar el coeficiente de restitución elástico del sistema pelota-líquido y compararlo cuando la cantidad de líquido varía.
- Determinar la relación entre la cantidad de líquido dentro de la pelota y la altura máxima alcanzada.
- Determinar si hay una relación entre la viscosidad del líquido y la altura máxima alcanzada.

4. Marco Teórico

El fenómeno del rebote de una pelota ha sido analizado ampliamente debido a su relevancia en la comprensión de la conservación del momento y la energía. Un concepto clave en este contexto es el coeficiente de restitución, el cual caracteriza la capacidad de un cuerpo para recuperar su energía cinética tras un impacto.

4.1. Coeficiente de restitución.

El coeficiente de restitución (ϵ) es un parámetro adimensional que cuantifica la pérdida de energía en una colisión. Se define como la razón entre la velocidad relativa de separación y la velocidad relativa de aproximación entre dos cuerpos en colisión. En este caso, como la superficie de rebote es fija, el coeficiente de restitución se expresa como:

$$\epsilon = \frac{v_f}{v_i}, \quad (1)$$

donde v_f es la velocidad después del impacto y v_i es la velocidad antes del impacto. Para colisiones perfectamente elásticas, $\epsilon = 1$, mientras que para colisiones completamente inelásticas, $\epsilon = 0$. En el caso de una pelota de ping-pong, este coeficiente depende de la superficie de impacto y la composición del material.

4.2. Dinámica del rebote.

El comportamiento de una pelota de ping-pong tras su impacto con el suelo sigue un patrón de decaimiento exponencial en la altura de rebote. Según el estudio presentado en el artículo "*The Exponential Nature of a Bouncing Ping-Pong Ball*" [4], la altura del rebote h_n después del n -ésimo impacto sigue la relación:

$$h_n = h_0 e^{-\lambda n}, \quad (2)$$

donde λ es una constante de decaimiento que depende del material de la pelota y la superficie de impacto. Dicho estudio indica que la altura de rebote disminuye de manera bien definida, lo que sugiere la aplicabilidad de modelos exponenciales para describir su comportamiento.

A partir del análisis presentado en los artículos "*Dynamic Behavior of a Bouncing Ball*" [5] y "*The Exponential Nature of a Bouncing Ping-Pong Ball*" [4], la dinámica del rebote de una pelota de ping-pong puede verse como una partícula bajo la acción de la gravedad para hablar de un modelo teórico. Así, tras el impacto con el suelo, la velocidad de la pelota se reduce en función del coeficiente de restitución ϵ :

$$v_{n+1} = \epsilon v_n. \quad (3)$$

Dado que la altura del rebote depende del cuadrado de la velocidad, la relación entre alturas consecutivas se expresa como:

$$h_{n+1} = \epsilon^2 h_n. \quad (4)$$

Sin embargo, en el presente estudio, el análisis se enfocará únicamente en el primer rebote, ya que el objetivo principal es examinar cómo varía el coeficiente de restitución y comparar las alturas alcanzadas en el primer impacto para diferentes líquidos. Dado que la pelota se deja caer desde el reposo, su velocidad inicial es cero. En consecuencia, las ecuaciones de interés se simplifican a:

$$h_1 = \epsilon^2 h_0, \quad (5)$$

donde h_0 corresponde a la altura inicial antes del impacto, mientras que h_1 representa los valores después del primer rebote. Este enfoque permitirá evaluar cómo la adición de líquidos con diferentes viscosidades afecta la disipación de energía y, en consecuencia, la altura máxima alcanzada tras el primer rebote.

4.3. Efecto de la adición de Líquido.

La introducción de un líquido en el interior de la pelota altera su distribución de masa y afecta la disipación de energía en cada impacto. En el estudio [5], se analiza cómo factores externos, como la frecuencia de vibración de la superficie de impacto, influyen en la dinámica de una pelota en rebote. Sin embargo, en la presente investigación se estudiará específicamente el efecto de la adición de líquido, examinando cómo varían el coeficiente de restitución y la altura del rebote a medida que la pelota continúa impactando contra la superficie.

La viscosidad del líquido desempeña un papel fundamental en este fenómeno. Un fluido de alta viscosidad provoca una mayor disipación de energía en cada impacto, lo que puede disminuir tanto el coeficiente de restitución como la altura del rebote. En contraste, un fluido de baja viscosidad podría comportarse más como una masa en movimiento solidario con la pelota, reduciendo su efecto sobre la dinámica del impacto.

5. Metodología

El montaje experimental consistió en dejar caer pelotas de ping-pong rellenas a un porcentaje dado de su volumen total con líquidos de diferente viscosidad (agua y aceite de girasol). Las pelotas

se dejaban caer sostenidas con una pinza fija a la altura determinada por una mesa, como se puede ver en la imagen 1. En la parte inferior de la mesa se ubicó una regla, tal que funcionó como vara de calibración para, posteriormente, grabar cada tirada de las pelotas y pasarlo por el software Tracker.

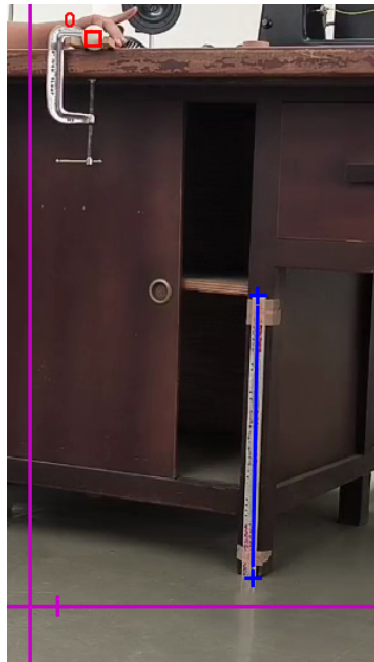


Figura 1: Montaje experimental visto desde tracker donde se ven: la pelota (cuadrado rojo), los ejes coordenados (líneas púrpura) y la regla de calibración para las distancias (línea azul).

En el software **Tracker** se analizaron 13 videos (tiradas) por cada pelota, buscando obtener el valor de la altura máxima alcanzada luego del primer rebote para obtener el coeficiente de restitución elástico. Así, se consideraron 4 niveles de llenado para cada líquido. Con los valores de la altura inicial y la altura máxima alcanzada (altura del primer rebote), se calcularon los respectivos coeficientes de restitución para cada tirada a partir de la ecuación 5.

5.1. Tratamiento de datos

En la tabla 1 se muestran los niveles de llenado seleccionados y el promedio de las alturas obtenidas para el primer rebote de las pelotas. Además, se realizó el mismo análisis para la pelota vacía, obteniendo una altura máxima promedio de $0,7243[m]$ para el aceite y una altura máxima promedio de $0,6983[m]$ para el agua. Los datos obtenidos se encuentran disponibles en el enlace adjunto [6].

Cuadro 1: Porcentaje de llenado de la pelota y su altura promedio alcanzada

% Aceite	Altura (m)	% Agua	Altura (m)
100	0.7190	100	0.6983
61	0.3665	61	0.4156
45	0.2845	45	0.1906
30	0.2168	30	0.1159

En la siguiente tabla 2 se presentan los valores promedio del coeficiente de restitución calculados para cada uno de los casos analizados en este estudio: los correspondientes al agua y aceite. Cada valor se acompaña de su respectiva desviación estándar. Estos resultados permiten cuantificar cómo varía el comportamiento de rebote en función del porcentaje de líquido contenido en la pelota.

%	PromAceite ϵ	Desv. est.	Err. est.	% Error	PromAgua ϵ	Desv. est.	Err. est.	% Error
100	0.8550	0.0204	0.0057	0.66 %	0.8586	0.0090	0.0025	0.29 %
61	0.6066	0.0736	0.0212	3.50 %	0.6348	0.1891	0.0413	6.50 %
45	0.5306	0.0941	0.0261	4.92 %	0.3520	0.2717	0.0523	14.85 %
30	0.4296	0.1950	0.0487	11.35 %	0.2674	0.2219	0.0484	18.11 %

Cuadro 2: Resumen estadístico del coeficiente de restitución para dsitintas cantidades de liquido (agua y aceite) en la pelota de ping pong.

Además, se consideró el caso en el que la pelota no contiene líquido, es decir, una pelota de ping-pong convencional rellena únicamente de aire. Los resultados obtenidos para este caso se presentan en la Tabla 3.

Contenido	Promedio ϵ	Desviación estándar	Error estándar	Error % del promedio ϵ
Aire	0.8603	0.0045	0.0013	0.15 %

Cuadro 3: Resumen estadístico del coeficiente de restitución en la pelota estandar de ping-pong.

Como se observa en la tabla 2, el porcentaje de error y la desviación estándar tienden a aumentar a medida que disminuye el líquido en la pelota.

6. Análisis de Resultados

Con el objetivo de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos, se elaboró una gráfica comparativa que muestra el comportamiento de una pelota de ping-pong estándar (rellena de aire) frente a pelotas modificadas con diferentes porcentajes de aceite y agua en su interior (Fig. 2). Además, se muestra la variación del coeficiente de restitución en función del porcentaje de llenado para cada caso, incluyendo barras de error que representan el error estándar de cada medición. En esta gráfica se observa una disminución progresiva del coeficiente al aumentar la cantidad de fluido,

siendo más pronunciada en el caso del agua. Es claro ver que, cuando la pelota está totalmente rellena, el coeficiente de restitución es similar al de la pelota vacía y que, mientras la pelota se encontrase rellena por menos de la mitad, la altura alcanzada era mayor por el aceite. Esto refiere a las viscosidades de los fluidos.

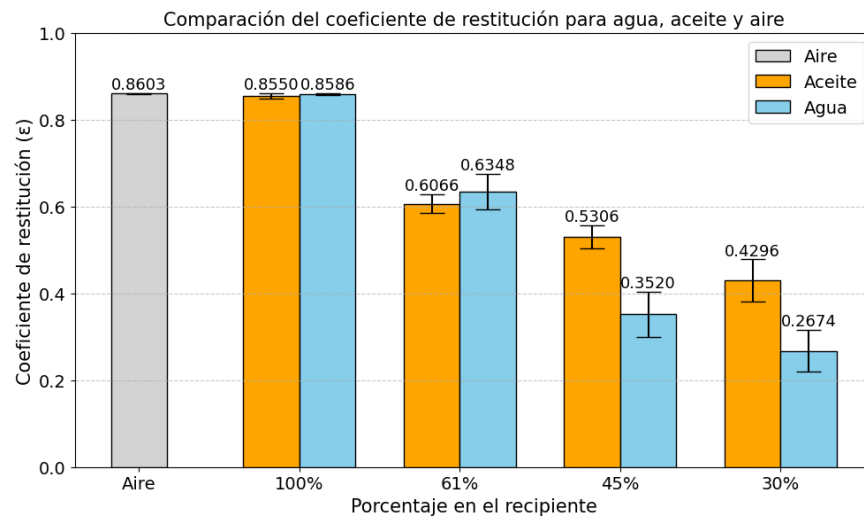
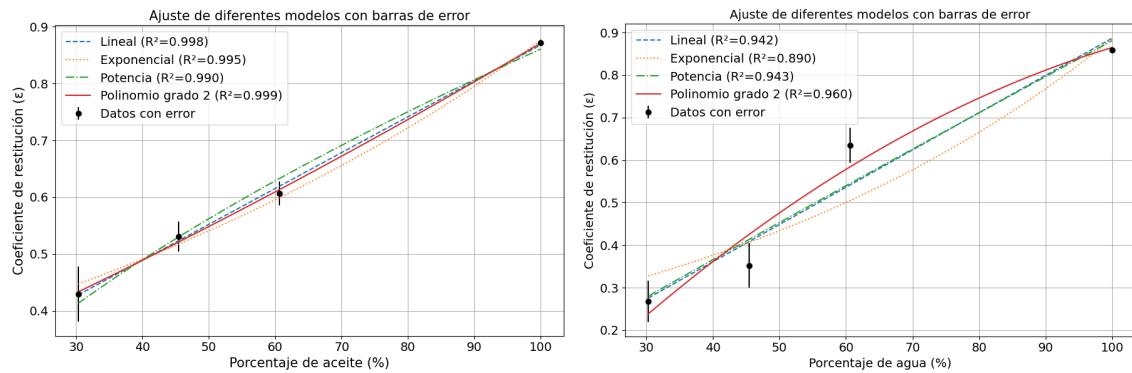


Figura 2: Comparación del coeficiente de restitución (ϵ) en función del porcentaje del líquido en el recipiente para tres medios distintos: aire, aceite y agua. Se incluyen barras de error que representan el error estándar de cada medición experimental.

Por otro lado, las Figuras 3a y 3b presentan el ajuste de diferentes modelos matemáticos (lineal, exponencial, potencial y polinómico de segundo grado) a los datos experimentales. También se incluyen las barras de error correspondientes y los valores de R^2 , que indican el grado de ajuste de cada modelo. En ambos casos (pelotas con agua y con aceite), el modelo que mejor se ajustó a los datos experimentales fue un polinomio de segundo grado. La Figura 4 muestra las curvas de ajuste para cada fluido, junto con los datos experimentales y sus barras de error correspondientes. A partir de estos resultados, se evidencia la variación del coeficiente de restitución (ϵ) en función del porcentaje de líquido dentro de la pelota. Esto indica que la relación entre la fricción para ambos fluidos y la pérdida de energía en el rebote es no lineal y que existe una aceleración en la caída de ϵ a medida que disminuye la cantidad de fluido dentro de la pelota, especialmente en los porcentajes más bajos. Este comportamiento puede atribuirse al aumento de la complejidad en la dinámica interna del líquido y su interacción con las paredes del recipiente durante el rebote.



(a) Ajuste para los datos experimentales del aceite (b) Ajuste para los datos experimentales del agua

Figura 3: Ajuste de distintos modelos matemáticos (lineal, exponencial, potencia y polinómico de segundo grado) a los datos experimentales del coeficiente de restitución en función del porcentaje de líquido en la pelota. Se incluyen barras de error correspondientes al error estándar de cada medición. El valor de R^2 indica el grado de ajuste de cada modelo

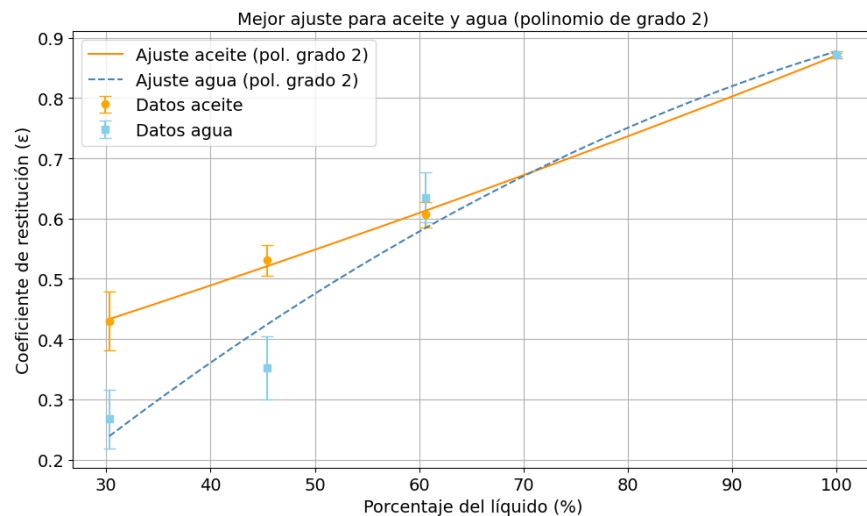


Figura 4: Ajuste mediante un polinomio de segundo grado del coeficiente de restitución (ϵ) en función del porcentaje de líquido (agua y aceite) en el recipiente. Los puntos representan los datos experimentales con sus respectivas barras de error, mientras que las curvas muestran la tendencia modelada para cada fluido.

De la gráfica 2 se puede hacer un análisis respecto a las viscosidades de los fluidos. A temperatura ambiente ($\sim 25^\circ\text{C}$), la viscosidad dinámica del agua de grifo en Bucaramanga, Santander, Colombia, es aproximadamente 0.89mPas , mientras que la del aceite de girasol se sitúa entre 35 y 40mPas . Esta diferencia significativa se refleja claramente en los valores del coeficiente de restitución elástica

(ϵ) observados experimentalmente. Un fluido con mayor viscosidad, como el aceite de girasol, presenta a menos de la mitad del volumen total de la pelota un coeficiente de restitución más alto, lo que indica una menor disipación energética durante el rebote. En contraste, el agua, con menor viscosidad, muestra una caída más rápida en ϵ , evidenciando una mayor pérdida de energía. Esto sugiere que la viscosidad es un factor clave que afecta la dinámica interna del fluido y la transferencia de energía en sistemas donde la interacción líquido-sólido es relevante, influyendo directamente en la elasticidad del rebote.

Con respecto a los errores presentados, se nota un aumento considerable en las barras de error conforme el porcentaje de líquido se reduce, lo que sugiere que la dinámica interna del líquido dentro del recipiente se vuelve más compleja y variable, afectando la reproducibilidad y precisión de los resultados experimentales.

7. Conclusiones

El coeficiente de restitución ϵ del sistema **pelota-líquido** varía significativamente con la cantidad de fluido. Para llenado completo (100 %), ϵ se aproxima al valor de la pelota vacía ($\epsilon_{\text{aire}} = 0,8603 \pm 0,0045$), mientras que a menor llenado (30 %), ϵ decrece hasta 0,4296 (aceite) y 0,2674 (agua). Así, la comparación entre líquidos revela que el aceite (mayor viscosidad) mantiene valores de ϵ más altos que el agua en todos los porcentajes, especialmente en llenados parciales ($\epsilon_{61\% \text{ aceite}} = 0,6066$ vs $\epsilon_{61\% \text{ agua}} = 0,6348$).

Aparte, la altura máxima de rebote (h_1) presenta una dependencia no lineal con el porcentaje de llenado, describiéndose óptimamente mediante un modelo polinómico de segundo grado ($R^2 > 0,98$). Para llenados completos (100 %), las alturas de rebote fueron similares a las de la pelota vacía (~ 0.70 m), mientras que al 30 % de llenado disminuyeron hasta 0.22 m (aceite) y 0.12 m (agua), evidenciando mayor disipación energética.

Finalmente, la viscosidad demostró ser determinante: el aceite (35-40 mPa·s) permitió rebotes $\sim 80\%$ más altos que el agua (0.89 mPa·s) en igual porcentaje de llenado (30 %). Los mayores errores experimentales con agua (hasta 18.11 % vs 11.35 % para aceite) sugieren que fluidos menos viscosos generan dinámicas internas más caóticas durante el impacto.

Referencias

- [1] Marcelo Alonso y Edward J Finn. *Física: Volumen I: Mecánica*. Bogotá FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, 1970.
- [2] Francis Weston Sears et al. *Física universitaria*. Fondo Educativo Interamericano Naucalpan de Juárez, México, 1986.
- [3] Frank M White. *Fluid Mechanics, 8th edition*. McGraw-Hill Education, 2017.
- [4] Anonymous. “The Exponential Nature of a Bouncing Ping-Pong Ball”. En: *Physics Teacher Support Material* (2023). Educational resource without defined authorship.
- [5] Shu Karube, Takuji Kousaka y Yuya Kawazu. “Dynamic Behavior of a Bouncing Ball”. En: *IEICE Proceedings Series* 48.A2L-E-1 (2016).

- [6] Alonso Montagut and Angie Sandoval and Alexandra Peña. *Datos experimentales del informe*. Retos Científicos UIS. 2025. URL: <https://drive.google.com/drive/folders/1dtURaOVyFMqUmPaNP12Gs060usp=sharing>.