一般形式的基于误差的迭代卡尔曼滤波算法

李春静

2022.10.21

1. 系统方程  
    系统状态方程如下，这里采样周期是，使用零阶保持器离散化连续系统，于高阶离散化方法，比如龙格库塔方法相比，当采样周期足够小，也就是采样频率足够高的时候，零阶保持器的离散化误差也就很小了，基本可以忽略，系统方程如下：

(1)

其中是流型上的状态变量，状态变量使用列向量表示，维度是n，是流型上的观测向量，维度是m。是输入向量，是过程噪声向量，是观测噪声向量，过程噪声向量和观测噪声向量都服从正态分布，方差分别是和。

1. 状态预测  
    使用系统方程（1），将过程噪声向量设置成0，进行状态预测，

(2)

1. 基于误差的状态方程  
    使用基于误差的状态方程来避免过参数化，每一步的状态预测误差定义如下：  
     
    (3)

其中，是状态真值，是时刻的状态预测值。

计算+1时刻的估计误差，

根据(3)，，意思是真值等于预测值+预测误差，可得

-----------下一时刻状态真值----------------- --下一时刻状态预测值--

(4)

| | |

上式就是基于状态误差的新的状态方程，他表示的是状态误差是如何变化的，表示的是和之间的时间变化关系。这个新的误差状态方程从开始，每次IMU测量值到来时进行状态预测，每次观测值到来时进行状态更新，每次状态更新后，reset上述误差系统，这种形式的误差方程可以限制状态变量的演进轨迹都在0值附近。

1. 基于误差的状态方程线性化  
    对误差状态方程（4）进行阶线性化近似，可用一阶泰勒公式进行展开，忽略高阶小项，可得到如下公式  
     
    (5)  
     
    其中是误差状态方程（4）对的偏导数在=0时的值，是误差状态方程（4）对的偏导数在时的值。  
     
     
     
     
     
     
     
     
    其中，和如下式计算：  
     
     
     
      
     
    最后计算误差状态的协方差矩阵经过上述（5）预测测下一步误差状态的协方差矩阵按如下方程进行传播：  
     
    (6)  
     
      
    基于误差的状态方程的一阶线性近似方程(5)中的是状态转移矩阵，是过程噪声驱动矩阵，这两部分的计算过程需要计算和**，**这两个矩阵的计算只与流型的形式有关，而与具体的系统结构没有关系，而系统中常用的几种流型的和的计算方法如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

另外两部分矩阵计算 和需要根据具体的系统结构形式进行推导。

1. 状态预测的先验分布  
    前面的状态预测部分在每个输入变量到来一次预测一次，使用（5）预测，使用（6）评估这一步预测的质量，也就是一步预测误差方差阵。直到一组新的观测量到来时进行状态更新。在进行状态更新时，前面的状态预测部分给出了状态变量的先验分布，同时新的测量值给出了状态变量的一组观测值，结合状态变量的先验分布和观测量，可以计算状态的最大后验分布了。  
    状态变量的先验分布使用和来描述：  
    (6)
2. 观测模型  
    状态更新过程使用迭代过程一步步更新，直到迭代过程收敛，或者达到了最大的迭代次数。假定下一时刻时刻的观测值是，如（1）中所示，观测值是一个维的向量类型的流型，观测值在不同的系统中是不同的，也就是（1）式中的函数的形式是不同的。比如在使用GPS位置观测的系统中，观测值就是一个GPS给出的3维的位置向量，其中函数就是将状态变量映射成3维的位置向量的一个观测矩阵。再比如fast-lio2中使用雷达的测量点，距离历史地图点中最近的一个平面的距离值是一个观测值，由于先验信息，这个雷达测量点大概率在这个平面上，也就是雷达测量点距离这个平面的距离值为0，所以这个应用中观测值是0，如果一帧雷达数据有个测量点，那么这个就是一个的元素全为零的列向量。  
    状态更新过程使用迭代过程，假设第次迭代以后的状态变量是，状态更新的迭代过程从时刻状态预测值开始迭代，也就是。  
    由于状态观测方程可能是非线性的，所以需要在每次迭代过程都需要对观测方程进行一阶线性化。这里对观测值的残差进行线性化，观测值测残差使用观测值减去观测值的预测值来计算，观测值的预测值使用每次迭代更新得到的状态变量来计算，这个线性化过程使用的二元函数的一阶泰勒展开，如下式：  
     
     
     
     
    (7)   
    其中，  
      
    注意在计算和的过程中，由于观测向量，和计算出的结果都是类型的流型观测向量，所以其中计算过程中向量类型的“”运算就是“”。同时与随机变量无关，是一个常量，计算偏导数时结果是0。  
    由于观测噪声服从正态分布  
      
    所以  
      
     
    由于（6）式中状态变量的先验分布是以表示的，并且是在的齐次空间中表示的。但是状态变量的观测模型是以形式表示的，并且是在的齐次空间中表示的。为了计算后验分布，需要将先验分布和观测模型的似然分布映射到同一个齐次空间中，这里将映射到的齐次空间中：  
      
    其中，  
     
    由上面的公式可得  
     
    所以
3. 待续。。