

Compte-rendu TP Pollution

MIE : Approche variationnelle et Éléments finis

Cours : Guillaume Chiavassa

Auteur : Duc DANG VU



Centrale Marseille
2022-2023

Table des matières

Introduction	2
Création du code	2
Création et maillage du conduit	2
Modélisation du liquide circulant dans le conduit	2
Modélisation de la circulation de l'agent polluant	3
Résultat final	4
Images de la simulation numérique	4
Observations et interprétations	5
Conclusion : où doit se cacher le poisson ?	5

Introduction

L'objectif de ce TP est de modéliser la diffusion d'un agent polluant au sein d'un conduit, dans lequel s'écoule un liquide. Nous utiliserons le logiciel *FreeFem* ainsi que les éléments théoriques appris en cours de MIE. Ce document présentera les étapes de construction du code ainsi que les interprétations du résultat final.

Création du code

Création et maillage du conduit

La première étape est de modéliser le conduit en respectant la géométrie donnée par l'énoncé. En procédant avec des équations paramétriques, on y arrive sans grandes difficultés. Ces lignes de codes sont suivies par quelques lignes permettant d'effectuer le maillage du domaine. Voici le code ainsi que son résultat :

```
border a(t=-x2,-x1){x=t; y=y1; }
border b(t=y1,0){x=-x1; y=t; }
border c(t=-x1,x1){x=t; y=0; }
border d(t=0,y1){x=x1; y=t; }
border e(t=x1,x2){x=t; y=y1; }
border f(t=y1,y2){x=x2; y=t; }
border g(t=x2,-x2){x=t; y=y2; }
border h(t=y2,y1){x=-x2; y=t; }

int n=5; // unite du nombre de noeuds

// maillage du domaine avec n noeuds sur le bord a,...

mesh Th=buildmesh( a(3*n)+b(3*n)+c(8*n)+d(3*n)+e(3*n)+f(2*n)+g(15*n)+h(2*n) );
```

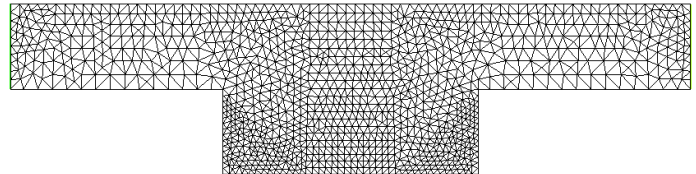


FIGURE 1 – Création et maillage du conduit

Modélisation du liquide circulant dans le conduit

À l'intérieur de ce conduit circule un liquide. L'écoulement de ce liquide est supposé permanent, laminaire et est donc régi par les lois de Stokes. On impose un profil parabolique à l'entrée du conduit et on impose une vitesse nulle sur tout les autres bords sauf celui à la sortie. Les lignes de code correspondantes sont disponibles dans la littérature *FreeFem* (inutile de les présenter ici). Le champ de vitesse obtenu est le suivant :

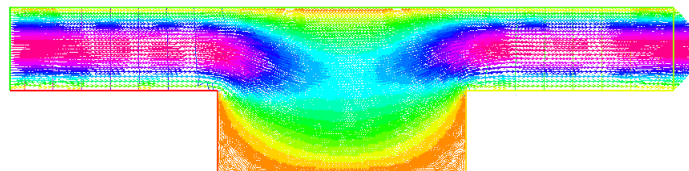


FIGURE 2 – Champ de vitesse régnant dans le conduit

Modélisation de la circulation de l'agent polluant

Il faut à présent modéliser la circulation de l'agent polluant au sein du conduit. La concentration Φ du polluant est régie par des équations d'advection-diffusion données dans l'énoncé. On effectue une discrétisation en temps par la méthode d'Euler implicite : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{dt}$ avec dt constant tel que $t_{n+1} = t_n + dt$. On obtient alors le problème suivant :

$$\Phi^{n+1} + dt \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{n+1} - \nu \Delta \Phi^{n+1} \right) = \Phi^n$$

On traduit ce problème avec une approche variationnelle grâce à la méthode de Galerkin. On cherche alors une solution approchée Φ_h appartenant à l'espace d'approximation V_h tel que pour tout $v_h \in V_h$:

$$\int_{\Omega} \Phi_h^{n+1} v_h + dt \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi_h^{n+1} v_h - \nu \int_{\Omega} \Delta \Phi_h^{n+1} v_h \right) = \int_{\Omega} \Phi_h^n v_h$$

En utilisant la formule de Green et sachant que sur le bord du domaine, on a $\vec{\nabla} \Phi_h \cdot \vec{n} = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \Phi_h^{n+1} v_h + dt \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi_h^{n+1} v_h + \nu \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Phi_h^{n+1} \cdot \vec{\nabla} v_h \right) = \int_{\Omega} \Phi_h^n v_h$$

Ces étapes sont traduites dans le logiciel *FreeFem* grâce aux lignes de code suivantes :

```
// definition de l'espace d'approximation

espace Vh(Th,P2);          // P1 ou P2 FE space
Vh phi_h,vh,phin;          // inconnues et fct test.

//DEFINIR LE PROBLEME chaleur()

problem pollution(phi_h,vh) =                                // definition du probleme
  int2d(Th)(phi_h*vh)
  +int2d(Th)( dt*nu*( dx(phi_h)*dx(vh) + dy(phi_h)*dy(vh) ) ) // forme bilineaire
  +int2d(Th)( dt*u1*dx(phi_h)*vh)
  +int2d(Th)( dt*u2*dy(phi_h)*vh)
  + int2d(Th)( -phi_h*vh )                                     // forme lineaire
  +on(a,b,c,d,e,g,h,phi_h=0);
```

FIGURE 3 – Formulation variationnelle dans le logiciel *FreeFem*

On a imposé une concentration de polluant nulle sur tout les bords excepté ceux de droite et de gauche (on considère que le conduit est fermé).

Il ne reste plus qu'à introduire la concentration à $t = 0$, puis à écrire la boucle de temps :

```
// Boucle en temps

phin=exp(-10*((x-xs)*(x-xs)+(y-ys)*(y-ys)));

while (t<Tfinal)
{
  pollution; // resoudre le pb variationnel
  plot(phi_h,fill=1,value=true,nbiso=40);
  phin=phin; // reinitialiser Un
  t=t+dt;
}
plot(phi_h,wait=1,fill=1,value=true,nbiso=40);
```

FIGURE 4 – Boucle de temps

Résultat final

Images de la simulation numérique

On lance la modélisation avec $dt = 0.05$ et $v_{max} = 1$. Voici quelques images de la progression de l'agent polluant, en fonction de différentes valeurs du coefficient de diffusion ν :

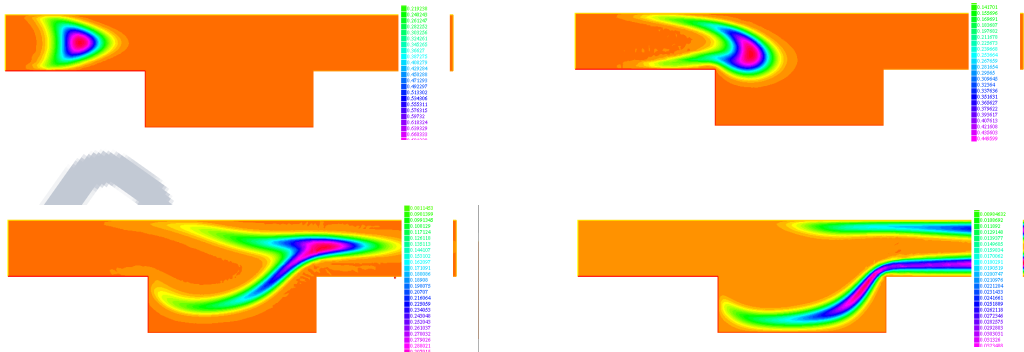


FIGURE 5 – Évolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\nu = 0.001$)

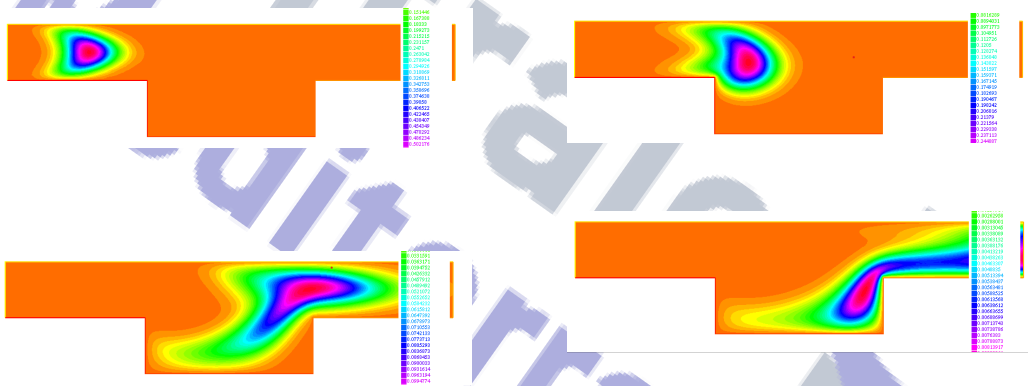


FIGURE 6 – Évolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\nu = 0.01$)

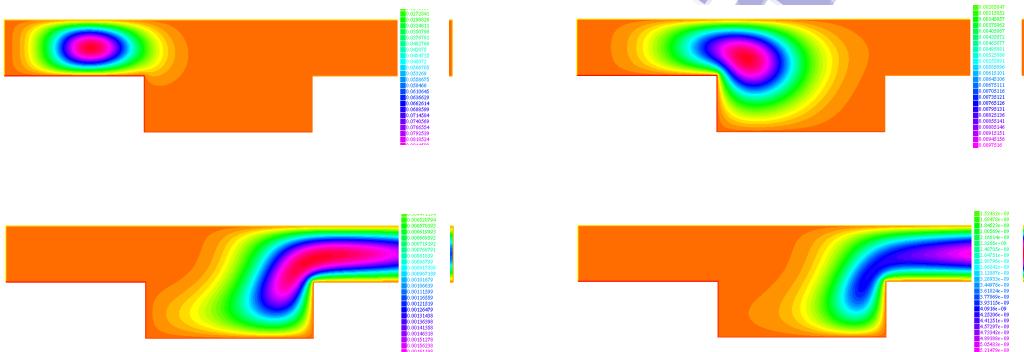


FIGURE 7 – Évolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\nu = 0.1$)

Observations et interprétations

On peut faire plusieurs observations suite à ces modélisations :

- Plus l'on augmente la valeur de v_{max} , plus le polluant se déplace à une grande vitesse. Ceci est normal puisque cette valeur correspond à la valeur maximale de l'écoulement du fluide qui circule dans le conduit.
- Plus on augmente la valeur du coefficient de diffusion ν , plus l'agent polluant se diffusera, et donc prendra de la place dans le conduit. Ceci confirme l'exactitude du terme de diffusion dans l'équation d'advection-diffusion : plus il est grand, plus la diffusion sera importante.
- Le polluant garde une trajectoire similaire quelle que soit la valeur du coefficient de diffusion ν . Ceci s'explique par la nature de l'écoulement au sein du conduit : puisqu'il est laminaire et permanent, il ne varie pas au cours du temps, et donc le polluant garde sa trajectoire même s'il se diffuse de manière plus importante.
- On remarque que dans tout les cas, les coins inférieurs droit et gauche du conduit sont épargnés par l'agent polluant : ces zones ne sont pas atteintes par ce dernier. Ceci s'explique par la présence de tourbillons dans ces coins ; conséquences des équations de Stokes qui régissent l'écoulement, ainsi que les conditions de vitesse nulles sur les bords.

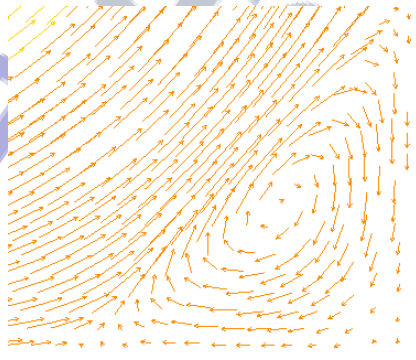


FIGURE 8 – Tourbillons présents dans le coin du conduit

Conclusion : où doit se cacher le poisson ?

Ainsi, forts de ces observations, nous pouvons répondre à la question posée par l'énoncé :

Le poisson doit se cacher dans les coins inférieurs droit et gauche du conduit pour avoir le plus de chances de survivre.

En effet, c'est à ces endroits précis que l'agent polluant ne passe pas.