Annexes Examens

Étienne Marceau, PhD, ASA
Professeur titulaire, École d'actuariat

24 septembre 2019

Table des matières

1 Symboles, abréviations et limites 3
- 1.1 Symboles . . . 3
- 1.2 Abréviations . . . 3
- 1.3 Limites . . . 3
- 1.4 Séries de Taylor connues . . . 3

2 Définitions utiles 4

3 Théorèmes 5

4 Lois continues à support positif 6
- 4.1 Loi uniforme . . . 6
- 4.2 Loi exponentielle . . . 7
- 4.3 Loi gamma . . . 8
- 4.4 Loi béta . . . 9
- 4.5 Loi Erlang . . . 11
- 4.6 Loi Erlang généralisée . . . 12
- 4.7 Loi de Weibull . . . 14
- 4.8 Loi lognormale . . . 15
- 4.9 Loi inverse gaussienne . . . 16
- 4.10 Loi Pareto . . . 18
- 4.11 Loi F-généralisée . . . 19
- 4.12 Loi Burr . . . 20
- 4.13 Loi log-logistique . . . 21

5 Lois continues à support réel 22
- 5.1 Loi normale . . . 22
- 5.2 Loi de Student . . . 23

6 Lois discrètes 24
- 6.1 Loi avec support arithmétique . . . 24
- 6.2 Loi de Poisson . . . 25
- 6.3 Loi binomiale . . . 26
- 6.4 Loi de Bernoulli . . . 27
- 6.5 Loi binomiale négative . . . 28

6.6 Loi géométrique . . . 29
6.7 Loi logarithmique . . . 30

7 Lois univariées avec mélange **31**
7.1 Loi mélange d'exponentielles . . . 31
7.2 Loi mélange d'Erlang . . . 32

8 Tables de la loi normale **33**
8.1 Fonction de répartition . . . 33
8.2 Valeurs de la fonction quantile . . . 34

9 Tables de la loi gamma **35**
9.1 Fonction de répartition . . . 35
9.2 Fonction quantile . . . 37

10 Tables de la loi de Poisson **39**
10.1 Fonction de répartition . . . 39
10.2 Fonction stop-loss . . . 40

11 Table de la loi du khi-deux **41**

12 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$ **42**

13 Relation récursive pour somme de v.a. discrètes i.i.d. **44**

14 Algorithmes récursifs et fonctions R **45**
14.1 Convolution directe (2 v.a. indépendantes) . . . 45
14.2 Convolution directe (n v.a. indépendantes) . . . 45
14.3 Algorithme récursif – DePril (n v.a. i.i.d.) . . . 46
14.4 Algorithme de Panjer – Poisson composée . . . 47
14.5 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale composée . . . 47
14.6 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (1) . . . 48
14.7 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (2) . . . 48

15 Variables aléatoires discrètes, fgp, fonctions caractéristiques et méthode FFT **49**
15.1 Contexte . . . 49
15.2 Fonction caractéristique . . . 49
15.3 Définition de deux vecteurs . . . 49
15.4 Construction : $\underline{f}_X$ vers $\underline{\phi}_X$ . . . 50
15.5 Inversion : $\underline{\phi}_X$ vers $\underline{f}_X$ . . . 50
15.6 Remarque . . . 50
15.7 Algorithme FFT . . . 50

16 FFT et fonctions R **51**
16.1 FFT – Somme de deux v.a. discrètes indépendantes. . . . 51
16.2 FFT – Somme de n v.a. discrètes indépendantes . . . 51
16.3 FFT – Somme aléatoire (loi Poisson composée) . . . 52

1 Symboles, abréviations et limites

1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant {0})
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C}$ = $\{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

1.2 Abréviations

1. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
2. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
3. fmp = fonction de masses de probabilité
4. fgp = fonction génératrice des probabilités
5. fgm = fonction génératrice des moments
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes
7. MMV = méthode du maximum de vraisemblance

1.3 Limites

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{m\times n} = \mathrm{e}^{mt}$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t}$

1.4 Séries de Taylor connues

1. Développement : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$
   - approximation du premier ordre (intéressante pour des petites valeurs de $|x|$) :
     $$e^x \simeq 1 + x$$
   - exemples :
     $$\begin{array}{lll} 1.1 & \simeq & \mathrm{e}^{0.1} = 1.105171 \\ 1.01 & \simeq & \mathrm{e}^{0.01} = 1.010050 \\ 0.9 & \simeq & \mathrm{e}^{-0.1} = 0.904837 \\ 0.99 & \simeq & \mathrm{e}^{-0.01} = 0.990050 \end{array}$$
2. Développement : $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \frac{x^k}{k!}$ $(|x| < 1)$

2 Définitions utiles

1. Fonction quantile : Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X. La fonction quantile F_X^{-1} de X est définie par

$$F_X^{-1}(u) = \inf(x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq u)$$

pour $u \in (0,1)$.

2. Mesure TVaR (pour "Tail-VaR") : Soit une v.a. X, où $E[X] < \infty$, avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. Le mesure TVaR de X est définie par

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$

pour $u \in (0,1)$.

3. Mesure LTVaR (pour "Left Tail -VaR") : Soit une v.a. X, où $E[X] < \infty$, avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. Le mesure LTVaR de X est définie par

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$

pour $u \in (0,1)$. On utilise parfois la notation "$ES_\kappa(X)$" au lieu de "$LTVaR_\kappa(X)$", où "ES" est un acronyme pour "Expected-Shortfall".

3 Théorèmes

Théorème 1. ***Théorème de la fonction quantile*** *Soit une v.a.* X *avec fonction de répartition* F_X *et fonction quantile* F_X^{-1}*. Soit une v.a.* $U \sim U\left(0,1\right)$*. Alors, la fonction de répartition de* $F_X^{-1}\left(U\right)$ *est* F_X*, i.e.,* $F_X^{-1}\left(U\right) \sim X$*.*

4 Lois continues à support positif

4.1 Loi uniforme

- Notation : $X \sim Unif(a, b)$
- Paramètres : $-\infty < a < b < \infty$
- Support : $x \in [a, b]$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{b-a} \times 1_{\{x \in [a,b]\}}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$
- Espérance : $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{d^2 - a^2}{2(b-a)}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = a + (b-a)\kappa$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = a + \frac{(b-a)}{2}(1+\kappa)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{(b-d)^2}{2(b-a)}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{b-d}{2}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{d^2 - a^2}{2(b-a)} + d\frac{b-d}{b-a}$

4.2 Loi exponentielle

- Notation : $X \sim Exp(\beta)$
- Paramètre : $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta d}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1 - \kappa)$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + E[X]$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d} = E[X]\,\overline{F}(d)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_X(d) = \frac{1}{\beta}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right)$

4.3 Loi gamma

- Notation : $X \sim Ga(\alpha, \beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : notée $H(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Fonction de survie : notée $\overline{H}(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $\alpha \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(d; \alpha+1, \beta) - d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) + d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Lois associées :
  - la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma (avec $\alpha = 1$) ;
  - la loi du khi-deux avec paramètre $\nu \in \mathbb{N}^+$ (nombre de degrés de liberté) correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = \frac{\nu}{2}$ et $\beta = 2$;
  - la loi Erlang avec paramètre $n \in \mathbb{N}^+$ correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = n$ et β.

4.4 Loi béta

- Notation : $X \sim Bêta(\alpha, \beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in [0,1]$
- Fonction bêta incomplète : $I(x;\alpha,\beta) = \int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u$, $x \in [0,1]$
- Fonction bêta complète : $I(\alpha,\beta) = I(1;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{1}{I(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \times 1_{\{x\in[0,1]\}}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \frac{I(x;\alpha,\beta)}{I(\alpha,\beta)}$, notée $B(x;\alpha,\beta)$
  - Si $\beta = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\alpha}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
  - Si $\alpha = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^{\beta}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
  - Si α, $\beta \in \mathbb{N}^{+}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{j=\alpha}^{\alpha+\beta-1} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{j!(\alpha+\beta-1-j)!} x^{j}(1-x)^{\alpha+\beta-1-j}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
- Fonction génératrice des moments :

$$\mathcal{M}_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\alpha+j}{\alpha+\beta+j}\right)\frac{t^k}{k!}$$

- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+k)}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(d;\alpha+1,\beta)$, $\alpha \leq d \leq \beta$
  - Si $\beta = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \frac{\alpha d^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
  - Si $\alpha = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = -d(1-d)^{\beta} + \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation
  - Si $\beta = 1$, $VaR_{\kappa}(X) = \kappa^{\frac{1}{\alpha}}$
  - Si $\alpha = 1$, $VaR_{\kappa}(X) = 1-(1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{(1-\kappa)}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-B(VaR_{\kappa}(X);\alpha+1,\beta))$
  - Si $\beta = 1$, $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{(1-\kappa)}\frac{\alpha}{\alpha+1}(1-\kappa^{(\alpha+1)/\alpha})$

- Si $\alpha = 1$, $TVaR_{\kappa}(X) = 1 - \frac{\beta}{\beta+1}(1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - B(d;\alpha+1,\beta)) - d(1 - B(d;\alpha,\beta))$, $d \in [0,1]$

  - Si $\beta = 1$, $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1}(1 - d^{\alpha+1}) - d(1 - d^{\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $\pi_d(X) = \frac{(1-d)^{\beta+1}}{1+\beta}$

- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1-B(d;\alpha+1,\beta)}{1-B(d;\alpha,\beta)} - d$, $d \in [0,1]$

  - Si $\beta = 1$, $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1-d^{\alpha+1}}{1-d^{\alpha}} - d$
  - Si $\alpha = 1$, $e_d(X) = \frac{(1-d)}{1+\beta}$

- Espérance limitée : $E[\min(X;d)] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(d;\alpha+1,\beta) + \beta(1 - B(d;\alpha,\beta))$, $d \in [0,1]$

  - Si $\beta = 1$, $E[\min(X;d)] = \frac{\alpha}{\alpha+1}d^{\alpha+1} + d(1 - d^{\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $E[\min(X;d)] = \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$

- Loi associée : la loi uniforme avec $a = 0$ et $b = 1$ est un cas particulier de la loi bêta avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

4.5 Loi Erlang

- Notation : $X \sim Erl(n, \beta)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}^{+}$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$
- Espérance : $E[X] = \frac{n}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(n+i)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{n}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta d)^j}{j!}\right)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $n \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \frac{n}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta VaR_\kappa(X))^j}{j!}\right)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{n}{\beta}\overline{H}(d; n+1, \beta) - d\overline{H}(d; n, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{n}{\beta} \frac{\overline{H}(d; n+1, \beta)}{\overline{H}(d; n, \beta)} - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{n}{\beta} H(d; n+1, \beta) + d\overline{H}(d; n, \beta)$

4.6 Loi Erlang généralisée

- Notation : $X \sim ErlG(\beta_1, ..., \beta_n)$
- Paramètres : $\beta_1, ..., \beta_n > 0$ et $\beta_1, ..., \beta_n$ distincts
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité de X :

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$$

- Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$$

- Fonction de survie de X : $\overline{F}_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \mathrm{e}^{-\beta_i x}$
- Espérance de X : $E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}$
- Variance de X : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^2}$
- Fonction génératrice des moments de X : $\mathcal{M}_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k+1)}{\beta_i^k}$
- Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(-d\mathrm{e}^{-\beta_i d} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(VaR_\kappa(X) \mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}}{\beta_i} \right)$$

- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)}$

- Remarques :
    - les termes $\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\dfrac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)$ sont négatifs ou positifs et $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\dfrac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)=1$;
    - la loi Erlang généralisée de la v.a. X est l'équivalent de la loi d'une somme de n v.a. indépendantes Y_1, ..., Y_n de lois exponentielles indépendantes avec paramètres β_1, ..., β_n, e.g. $X=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ où $Y_i\sim Exp\left(\beta_i\right)$ pour $i=1,...,n$.

4.7 Loi de Weibull

- Notation : $X \sim We\left(\tau, \beta\right)$
- Paramètres : $\tau > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f\left(x\right) = \beta\tau\left(\beta x\right)^{\tau-1} \mathrm{e}^{-(\beta x)^{\tau}}$
- Fonction de répartition : $F\left(x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-(\beta x)^{\tau}}$
- Fonction de survie : $\overline{F}\left(x\right) = \mathrm{e}^{-(\beta x)^{\tau}}$
- Espérance : $E\left[X\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)$
- Variance : $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{1}{\beta^{2}}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \left(\frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right)^{2}$
- Fonction génératrice des moments (pour $\alpha > 1$) :

$$\mathcal{M}_{X}\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k}}{\beta^{k}k!}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right)$$

- Moments d'ordre k : $E\left[X^{k}\right] = \frac{1}{\beta^{k}}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right)$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})H(d^{\tau}; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^{\tau})$
- Mesure VaR : $VaR_{\kappa}\left(X\right) = \frac{1}{\beta}(-\ln\left(1-\kappa\right))^{\frac{1}{\tau}}$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_{\kappa}\left(X\right) = \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(-\ln(1-\kappa); 1 + \frac{1}{\tau}, 1)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_{d}\left(X\right) = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(d^{\tau}; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^{\tau}) - d\mathrm{e}^{-(\beta d)^{\tau}}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_{d}\left(X\right) = \frac{\mathrm{e}^{(\beta d)^{\tau}}}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(d^{\tau}; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^{\tau}) - d$
- Espérance limitée : $E\left[\min\left(X; d\right)\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})H(d^{\tau}; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^{\tau}) + d\mathrm{e}^{-(\beta d)^{\tau}}$
- Cas particuliers :
  - la loi exponentielle est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 1$;
  - la loi Raleigh est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 2$.

4.8 Loi lognormale

- Notation : $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})$
- Espérance : $E[X] = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$
- Fonction génératrice des moments : forme non analytique
- Moments d'ordre k : $E[X^k] = \mathrm{e}^{k\mu + k^2\frac{\sigma^2}{2}}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \le d\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \exp(\mu + \sigma VaR_\kappa(Z))$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma))$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{1}{[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d$$

- Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}) + d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

- Loi associée : $X = \mathrm{e}^Y$, où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, impliquant $E[X^k] = M_Y(k)$

4.9 Loi inverse gaussienne

- Notation : $X \sim IG(\mu, \beta)$
- Paramètres : $\mu, \beta \in \mathbb{R}^+$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta x}(x-\mu)^2\right)$
- Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x-\mu)\right) + \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x+\mu)\right)$$

- Espérance : $E[X] = \mu$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mu\beta$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = e^{\frac{\mu}{\beta}\left(1-\sqrt{(1-2\beta t)}\right)}$
- Espérance tronquée :

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \le d\}}\right] &= d - (2d-\mu)\Phi\Bigg((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg) \\ &\quad -(2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\Bigg(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg) \end{aligned}$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - d + (2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}\left((2d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right), \end{aligned}$$

  avec $d = VaR_\kappa(X)$
- Fonction *stop-loss* :

$$\begin{aligned} \pi_d(X) &= (\mu-d)\left(1-\Phi\Bigg((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg)\right) \\ &\quad +(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\Bigg(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg) \end{aligned}$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$\begin{aligned} e_d(X) &= \frac{(\mu-d)\left(1-\Phi\Bigg((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg)\right)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right)+\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \\ &\quad + \frac{+(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\Bigg(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\Bigg)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right)+\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \end{aligned}$$

- Espérance limitée :

$$\begin{aligned} E\left[\min\left(X; d\right)\right] &= d - (d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \\ &\quad -(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

4.10 Loi Pareto

- Notation : $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$
- Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$
- Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k (pour $\alpha > k \in \mathbb{N}^{+}$) : $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$, si $-1 < k < \alpha$
- Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}$$

- Mesure VaR : $VaR_{\kappa}(X) = \lambda\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
- Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) : $TVaR_{\kappa}(X) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
- Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) : $\pi_d(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}$
- Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) : $e_d(X) = \frac{\lambda+d}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$
- Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) : $E[\min(X; d)] = \frac{\lambda}{\alpha-1}[1 - (\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}]$

4.11 Loi F-généralisée

- Notation : $X \sim FG\left(\alpha, \lambda, \tau\right)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f_X\left(x\right) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)\lambda^{\alpha}x^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(\lambda+x)^{\alpha+\tau}}$
- Fonction de répartition : $F_X\left(x\right) = B(\frac{x}{\lambda+x}; \tau, \alpha)$
- Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E\left[X\right] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}$
- Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{\lambda^2\tau(\tau-\alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k (pour $\alpha > k$) : $E\left[X^k\right] = \lambda^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\tau+i)}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$
- Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1} B\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) :

$$TVaR_{\kappa}\left(X\right) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{VaR_{\kappa}(X)}{\lambda+VaR_{\kappa}(X)}; \tau+1, \alpha-1\right)$$

- Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) :

$$\pi_d\left(X\right) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) - d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

- Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) :

$$e_d\left(X\right) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\frac{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right)}{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha\right)} - d$$

- Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[\min\left(X; d\right)\right] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}B\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) + d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

- Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi F-généralisée avec $\tau = 1$.
- Remarque : la loi F-généralisée est parfois appelée la loi de Pareto généralisée.

4.12 Loi Burr

- Notation : $X \sim Burr\left(\alpha, \lambda, \tau\right)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f_X\left(x\right) = \frac{\alpha\tau\lambda^{\alpha}x^{\tau-1}}{(\lambda+x^{\tau})^{\alpha+1}}$
- Fonction de répartition : $F_X\left(x\right) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x^{\tau}}\right)^{\alpha}$
- Espérance : $E\left[X\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})$
- Variance : $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{\lambda^{2/\tau}}{\Gamma(\alpha)}\left(\Gamma(1+\frac{2}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{2}{\tau}) - \frac{(\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau}))^2}{\Gamma(\alpha)}\right)$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{k/\tau}\Gamma(1+\frac{k}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{k}{\tau})$, $-\tau < k < \alpha\tau$
- Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})B(\frac{d^{\tau}}{\lambda+d^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau})$$

- Mesure VaR : $VaR_{\kappa}\left(X\right) = (\lambda\left\{(1-\kappa)^{-1/\alpha}-1\right\})^{1/\tau}$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_{\kappa}\left(X\right) = \frac{1}{(1-\kappa)\Gamma(\alpha)}\left(\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})\overline{B}\left(\frac{VaR_{\kappa}(X)^{\tau}}{\lambda+VaR_{\kappa}(X)^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d\left(X\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})\overline{B}(\frac{d^{\tau}}{\lambda+d^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) - d(\frac{\lambda}{\lambda+d^{\tau}})^{\alpha}$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$e_d\left(X\right) = \frac{(\lambda+d^{\tau})^{\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})}{\lambda^{\alpha-1/\tau}\Gamma(\alpha)}\overline{B}(\frac{d^{\tau}}{\lambda+d^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) - d$$

- Espérance limitée :

$$E\left[\min\left(X;d\right)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})B(\frac{d^{\tau}}{\lambda+d^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) + d(\frac{\lambda}{\lambda+d^{\tau}})^{\alpha}$$

- Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi Burr avec $\tau = 1$.

4.13 Loi log-logistique

- Notation : $X \sim LL(\lambda, \tau)$
- Paramètres : $\lambda, \tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\frac{\tau}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}\right)^2} = \frac{\tau\lambda^\tau x^{\tau-1}}{(\lambda^\tau+x^\tau)^2}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}} = \frac{x^\tau}{\lambda^\tau+x^\tau} = 1 - \frac{\lambda^\tau}{\lambda^\tau+x^\tau}$
- Espérance (pour $\tau > 1$) : $E[X] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$
- Variance (pour $\tau > 2$) :

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\tau}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\right)^2\right)$$

- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \lambda^k\Gamma\left(1+\frac{k}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\tau}\right)$, $-\tau < k < \tau$
- Espérance tronquée (pour $\tau > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \lambda\left(\kappa^{-1}-1\right)^{-1/\tau}$
- Mesure $TVaR$ (pour $\tau > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\lambda}{1-\kappa}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\kappa; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

- Fonction *stop-loss* (pour $\tau > 1$) :

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad -\frac{d\lambda^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}\end{aligned}$$

- Fonction d'excès-moyen (pour $\tau > 1$) :

$$e_d(X) = \frac{\lambda^\tau+d^\tau}{\lambda^{\tau-1}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) - d$$

- Espérance limitée (pour $\tau > 1$) :

$$\begin{aligned}E[\min(X;d)] &= \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad +\frac{d\lambda^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}\end{aligned}$$

5 Lois continues à support réel

5.1 Loi normale

- Notation : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction de répartition : notée $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, forme non explicite
- Espérance : $E[X] = \mu$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \mathrm{e}^{t\mu + t^2 \frac{\sigma^2}{2}}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \mu\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z)$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z)$$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = (\mu + d)(1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \mu + d - \frac{1}{1-\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \mu\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}} + d[1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})]$
- Remarque :
  - lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit par convention que X obéit à une loi normale standard ;
  - par convention, Φ est la notation pour la fonction de répartition d'une loi normale standard.

5.2 Loi de Student

- Notation : $X \sim St(\nu)$
- Paramètre : $\nu > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$
  - Si $\nu = 1$, $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}$
  - Si $\nu = 2$, $f(x) = \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- Fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu}; \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

  désignée par $t_\nu(x)$
  - Si $\nu = 1$, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$
  - Si $\nu = 2$, $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu}; \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- Espérance : $E[X] = 0$, $\nu > 1$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$, $\nu > 2$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k :

$$E\left[X^k\right] = \begin{cases} 0, & 0 < k \text{ impair} < \nu \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right) \nu^{\frac{k}{2}}\right), & 0 < k \text{ pair} < \nu \end{cases}$$

- Espérance tronquée (pour $\nu > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d > 0 \end{cases}$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$ (pour $\nu > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \begin{cases} -\frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) < 0 \\ \frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) > 0 \end{cases}$$

- Espérance limitée (pour $\nu > 1$) :

$$E[\min(X; d)] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d > 0 \end{cases}$$

- Note : la loi de Student converge en loi vers la loi normale lorsque $\nu \to \infty$.

6 Lois discrètes

6.1 Loi avec support arithmétique

- Support : $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$
- Fonction de masse de probabilité : $f(kh) = \Pr(X = kh)$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^+$
- Espérance : $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} khf_X(kh)$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (kh - E[X])^2 f_X(kh)$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tkh} f_X(kh)$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{kh} f_X(kh)$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq k_0 h\}}\right] = \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh)$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left\{E[X] - \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh) + k_0 h\left(\Pr(X \leq k_0 h) - \kappa\right)\right\},$$

où $VaR_\kappa(X) = k_0 h$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$

6.2 Loi de Poisson

- Notation : $M \sim Pois(\lambda)$
- Paramètre : $\lambda > 0$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Espérance : $E\left[M\right] = \lambda$
- Variance : $\mathrm{Var}\left(M\right) = \lambda$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{P}(t) = \exp\bigl\{\lambda(e^t - 1)\bigr\}$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$

6.3 Loi binomiale

- Notation : $M \sim Bin(n, q)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \{0, 1, ..., n\}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{n}{k} (q)^k (1 - q)^{n-k}$
- Espérance : $E[M] = nq$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = nq(1 - q)$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \left(q\mathrm{e}^t + 1 - q\right)^n$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = (qt + 1 - q)^n$
- Loi associée : la loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

6.4 Loi de Bernoulli

- Notation : $M \sim Bern(q) \sim Bin(1, q)$
- Paramètre : $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \{0, 1\}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = (q)^k \, (1 - q)^{1-k}$
- Espérance : $E\left[M\right] = q$
- Variance : $\mathrm{Var}\left(M\right) = q(1 - q)$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \left(q\mathrm{e}^t + 1 - q\right)$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = (qt + 1 - q)$

6.5 Loi binomiale négative

Selon les auteurs, on rencontre deux paramétrisations pour la loi binomiale négative qui sont équivalentes.

Les principales caractéristiques pour la première paramétrisation sont :

- Notation : $M \sim BN(r, q)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1-q)^k$
- Espérance : $E[M] = r\frac{1-q}{q}$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = r\frac{1-q}{q^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\mathrm{e}^t}\right)^r$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r$

Les principales caractéristiques pour la deuxième paramétrisation sont :

- Notation : $M \sim BN(r, \beta)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(X = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$
- Espérance : $E[X] = r\beta$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = r\beta(1+\beta)$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(1 - \beta(\mathrm{e}^t - 1)\right)^{-r}$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}_X(t) = (1 - \beta(t-1))^{-r}$
- Lien entre la 1^{re} paramétrisation et la 2^e paramétrisation : $q = \frac{1}{1+\beta}$ ou $\beta = \frac{1-q}{q}$
- Note :
  - si $r \in \mathbb{N}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Pascal ;
  - si $r \in \mathbb{R}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Polya.
- Loi associée : la loi géométrique est un cas particulier de la loi binomiale négative avec $r = 1$.

6.6 Loi géométrique

- Notation : $M \sim Geom(q)$
- Paramètre : $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = q\,(1-q)^k$
- Espérance : $E\,[M] = \frac{1-q}{q}$
- Variance : $\mathrm{Var}\,(M) = \frac{1-q}{q^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \frac{q}{(1-(1-q)\mathrm{e}^t)}$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \frac{q}{(1-(1-q)t)}$

6.7 Loi logarithmique

- Notation : $M \sim Log(\gamma)$
- Paramètre : $\gamma \in]0,1[$
- Support : $k \in \mathbb{N}^+$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M=k) = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)}\frac{\gamma^k}{k}$
- Espérance : $E\left[M\right] = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)}\frac{\gamma}{1-\gamma}$
- Variance : $\operatorname{Var}\left(M\right) = \frac{\gamma+\ln(1-\gamma)}{(1-\gamma)^2(\ln(1-\gamma))^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \frac{\ln(1-\gamma e^t)}{\ln(1-\gamma)}$
- Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \frac{\ln(1-\gamma t)}{\ln(1-\gamma)}$

7 Lois univariées avec mélange

7.1 Loi mélange d'exponentielles

- Notation : $X \sim MxExp(\{(p_i, \beta_i), i = 1, 2, ..., n\})$
- Paramètres : $\beta_i > 0$, $0 \leq p_i \leq 1$, $p_1 + ... + p_n = 1$
- Fonction de densité : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$, $x > 0$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
- Espérance : $E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{2}{\beta_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\right)^2$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\right)^k k!$
- Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}\right) + d\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}\right)$$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i} \mathrm{e}^{-\beta_i d}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$

7.2 Loi mélange d'Erlang

- Notation : $X \sim MxErl(\{(p_k, \beta), k = 1, 2, ...\})$
- Paramètres : $\beta > 0$, $0 \leq p_k \leq 1$ ($k = 1, 2, ...$), $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$
- Fonction de densité : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x; k, \beta)$, $x > 0$
- Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H(x; k, \beta)$, $x > 0$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \overline{H}(x; k, \beta)$, $x > 0$
- Espérance : $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)}{\beta} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}\right)^2$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)^k$
- Moments m : $E[X^m] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)...(k+m-1)}{\beta}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} H(d; k+1, \beta)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); k+1, \beta)$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{k}{\beta} \overline{H}(d; k+1, \beta) - d\overline{H}(d; k, \beta)\right)$$

- Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{k}{\beta} H(d; k+1, \beta) + d\overline{H}(d; k, \beta)\right)$$

- Note : $H(x; k, \beta)$, $\overline{H}(x; k, \beta)$ et $h(x; k, \beta)$ sont les fonctions de répartition, de survie et de densité de la loi Erlang (k, β).

8 Tables de la loi normale

8.1 Fonction de répartition

TABLE 1: Valeurs de la fonction de répartition de la loi normale standard à $(x + u)$

$x \setminus u$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

8.2 Valeurs de la fonction quantile

TABLE 2: Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.5	0.0000	0.0251	0.0502	0.0753	0.1004	0.1257	0.1510	0.1764	0.2019	0.2275
0.6	0.2533	0.2793	0.3055	0.3319	0.3585	0.3853	0.4125	0.4399	0.4677	0.4959
0.7	0.5244	0.5534	0.5828	0.6128	0.6433	0.6745	0.7063	0.7388	0.7722	0.8064
0.8	0.8416	0.8779	0.9154	0.9542	0.9945	1.0364	1.0803	1.1264	1.1750	1.2265
0.9	1.2816	1.3408	1.4051	1.4758	1.5548	1.6449	1.7507	1.8808	2.0537	2.3263

TABLE 3: Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

TABLE 4: Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
0.999	3.0902	3.1214	3.1559	3.1947	3.2389	3.2905	3.3528	3.4316	3.5401	3.7190

9 Tables de la loi gamma

9.1 Fonction de répartition

TABLE 5: Valeurs de la fonction de répartition d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $x \in [0.1, 5]$

$x \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.1	0.3453	0.0952	0.0224	0.0047	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.4729	0.1813	0.0598	0.0175	0.0047	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
0.3	0.5614	0.2592	0.1036	0.0369	0.0120	0.0036	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
0.4	0.6289	0.3297	0.1505	0.0616	0.0230	0.0079	0.0026	0.0008	0.0002	0.0001
0.5	0.6827	0.3935	0.1987	0.0902	0.0374	0.0144	0.0052	0.0018	0.0006	0.0002
0.6	0.7267	0.4512	0.2470	0.1219	0.0551	0.0231	0.0091	0.0034	0.0012	0.0004
0.7	0.7633	0.5034	0.2945	0.1558	0.0757	0.0341	0.0144	0.0058	0.0022	0.0008
0.8	0.7941	0.5507	0.3406	0.1912	0.0988	0.0474	0.0214	0.0091	0.0037	0.0014
0.9	0.8203	0.5934	0.3851	0.2275	0.1239	0.0629	0.0299	0.0135	0.0058	0.0023
1	0.8427	0.6321	0.4276	0.2642	0.1509	0.0803	0.0402	0.0190	0.0085	0.0037
1.1	0.8620	0.6671	0.4681	0.3010	0.1792	0.0996	0.0521	0.0257	0.0121	0.0054
1.2	0.8787	0.6988	0.5064	0.3374	0.2085	0.1205	0.0656	0.0338	0.0165	0.0077
1.3	0.8931	0.7275	0.5425	0.3732	0.2386	0.1429	0.0806	0.0431	0.0219	0.0107
1.4	0.9057	0.7534	0.5765	0.4082	0.2692	0.1665	0.0971	0.0537	0.0283	0.0143
1.5	0.9167	0.7769	0.6084	0.4422	0.3000	0.1912	0.1150	0.0656	0.0357	0.0186
1.6	0.9264	0.7981	0.6382	0.4751	0.3308	0.2166	0.1341	0.0788	0.0442	0.0237
1.7	0.9348	0.8173	0.6660	0.5068	0.3614	0.2428	0.1543	0.0932	0.0537	0.0296
1.8	0.9422	0.8347	0.6920	0.5372	0.3917	0.2694	0.1755	0.1087	0.0643	0.0364
1.9	0.9487	0.8504	0.7161	0.5663	0.4214	0.2963	0.1975	0.1253	0.0759	0.0441
2	0.9545	0.8647	0.7385	0.5940	0.4506	0.3233	0.2202	0.1429	0.0886	0.0527
2.1	0.9596	0.8775	0.7593	0.6204	0.4790	0.3504	0.2435	0.1614	0.1022	0.0621
2.2	0.9641	0.8892	0.7786	0.6454	0.5066	0.3773	0.2673	0.1806	0.1168	0.0725
2.3	0.9680	0.8997	0.7965	0.6691	0.5334	0.4040	0.2914	0.2007	0.1323	0.0838
2.4	0.9715	0.9093	0.8130	0.6916	0.5592	0.4303	0.3156	0.2213	0.1486	0.0959
2.5	0.9747	0.9179	0.8282	0.7127	0.5841	0.4562	0.3400	0.2424	0.1657	0.1088
2.6	0.9774	0.9257	0.8423	0.7326	0.6080	0.4816	0.3644	0.2640	0.1835	0.1226
2.7	0.9799	0.9328	0.8553	0.7513	0.6310	0.5064	0.3887	0.2859	0.2019	0.1371
2.8	0.9820	0.9392	0.8672	0.7689	0.6529	0.5305	0.4128	0.3081	0.2208	0.1523
2.9	0.9840	0.9450	0.8782	0.7854	0.6738	0.5540	0.4367	0.3304	0.2402	0.1682
3	0.9857	0.9502	0.8884	0.8009	0.6938	0.5768	0.4603	0.3528	0.2601	0.1847
3.1	0.9872	0.9550	0.8977	0.8153	0.7128	0.5988	0.4834	0.3752	0.2803	0.2018
3.2	0.9886	0.9592	0.9063	0.8288	0.7308	0.6201	0.5061	0.3975	0.3007	0.2194
3.3	0.9898	0.9631	0.9142	0.8414	0.7479	0.6406	0.5283	0.4197	0.3213	0.2374
3.4	0.9909	0.9666	0.9214	0.8532	0.7641	0.6603	0.5500	0.4416	0.3421	0.2558
3.5	0.9918	0.9698	0.9281	0.8641	0.7794	0.6792	0.5711	0.4634	0.3629	0.2746
3.6	0.9927	0.9727	0.9342	0.8743	0.7938	0.6973	0.5916	0.4848	0.3837	0.2936
3.7	0.9935	0.9753	0.9398	0.8838	0.8074	0.7146	0.6115	0.5058	0.4045	0.3128
3.8	0.9942	0.9776	0.9450	0.8926	0.8203	0.7311	0.6308	0.5265	0.4251	0.3322
3.9	0.9948	0.9798	0.9497	0.9008	0.8324	0.7469	0.6494	0.5468	0.4456	0.3516
4	0.9953	0.9817	0.9540	0.9084	0.8438	0.7619	0.6674	0.5665	0.4659	0.3712
4.1	0.9958	0.9834	0.9579	0.9155	0.8544	0.7762	0.6847	0.5858	0.4859	0.3907
4.2	0.9962	0.9850	0.9616	0.9220	0.8645	0.7898	0.7014	0.6046	0.5056	0.4102
4.3	0.9966	0.9864	0.9649	0.9281	0.8739	0.8026	0.7173	0.6228	0.5250	0.4296
4.4	0.9970	0.9877	0.9679	0.9337	0.8827	0.8149	0.7327	0.6406	0.5441	0.4488
4.5	0.9973	0.9889	0.9707	0.9389	0.8909	0.8264	0.7473	0.6577	0.5627	0.4679
4.6	0.9976	0.9899	0.9733	0.9437	0.8987	0.8374	0.7614	0.6743	0.5810	0.4868
4.7	0.9978	0.9909	0.9756	0.9482	0.9059	0.8477	0.7748	0.6903	0.5988	0.5054
4.8	0.9981	0.9918	0.9777	0.9523	0.9126	0.8575	0.7876	0.7058	0.6162	0.5237
4.9	0.9983	0.9926	0.9797	0.9561	0.9189	0.8667	0.7998	0.7207	0.6331	0.5418
5	0.9984	0.9933	0.9814	0.9596	0.9248	0.8753	0.8114	0.7350	0.6495	0.5595

Relation : $H(x; \alpha, \beta) = H(x\beta; \alpha, 1)$. Exemple : $H(0.5; 0.5, 10) = H(5; 0.5, 1) = 0.9984$.

TABLE 6: Valeurs de la fonction de répartition d'une v.a. $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, 1)$ à $x \in [5.1, 10]$

$x \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
5.1	0.9986	0.9939	0.9831	0.9628	0.9302	0.8835	0.8225	0.7487	0.6655	0.5769
5.2	0.9987	0.9945	0.9845	0.9658	0.9353	0.8912	0.8330	0.7619	0.6809	0.5939
5.3	0.9989	0.9950	0.9859	0.9686	0.9401	0.8984	0.8430	0.7746	0.6959	0.6105
5.4	0.9990	0.9955	0.9871	0.9711	0.9445	0.9052	0.8524	0.7867	0.7103	0.6267
5.5	0.9991	0.9959	0.9883	0.9734	0.9486	0.9116	0.8614	0.7983	0.7243	0.6425
5.6	0.9992	0.9963	0.9893	0.9756	0.9524	0.9176	0.8699	0.8094	0.7378	0.6578
5.7	0.9993	0.9967	0.9903	0.9776	0.9560	0.9232	0.8779	0.8200	0.7507	0.6728
5.8	0.9993	0.9970	0.9911	0.9794	0.9593	0.9285	0.8855	0.8300	0.7632	0.6873
5.9	0.9994	0.9973	0.9919	0.9811	0.9624	0.9334	0.8927	0.8396	0.7752	0.7013
6	0.9995	0.9975	0.9926	0.9826	0.9652	0.9380	0.8994	0.8488	0.7867	0.7149
6.1	0.9995	0.9978	0.9933	0.9841	0.9679	0.9423	0.9058	0.8575	0.7977	0.7281
6.2	0.9996	0.9980	0.9939	0.9854	0.9703	0.9464	0.9119	0.8658	0.8083	0.7408
6.3	0.9996	0.9982	0.9944	0.9866	0.9726	0.9502	0.9175	0.8736	0.8184	0.7531
6.4	0.9997	0.9983	0.9949	0.9877	0.9747	0.9537	0.9229	0.8811	0.8281	0.7649
6.5	0.9997	0.9985	0.9954	0.9887	0.9766	0.9570	0.9279	0.8882	0.8374	0.7763
6.6	0.9997	0.9986	0.9958	0.9897	0.9784	0.9600	0.9326	0.8948	0.8462	0.7873
6.7	0.9997	0.9988	0.9962	0.9905	0.9801	0.9629	0.9371	0.9012	0.8547	0.7978
6.8	0.9998	0.9989	0.9965	0.9913	0.9816	0.9656	0.9412	0.9072	0.8627	0.8080
6.9	0.9998	0.9990	0.9968	0.9920	0.9831	0.9680	0.9451	0.9129	0.8704	0.8177
7	0.9998	0.9991	0.9971	0.9927	0.9844	0.9704	0.9488	0.9182	0.8777	0.8270
7.1	0.9998	0.9992	0.9974	0.9933	0.9856	0.9725	0.9523	0.9233	0.8846	0.8359
7.2	0.9999	0.9993	0.9976	0.9939	0.9867	0.9745	0.9555	0.9281	0.8912	0.8445
7.3	0.9999	0.9993	0.9978	0.9944	0.9878	0.9764	0.9585	0.9326	0.8975	0.8527
7.4	0.9999	0.9994	0.9980	0.9949	0.9887	0.9781	0.9613	0.9368	0.9034	0.8605
7.5	0.9999	0.9994	0.9982	0.9953	0.9896	0.9797	0.9640	0.9409	0.9091	0.8679
7.6	0.9999	0.9995	0.9983	0.9957	0.9905	0.9812	0.9665	0.9446	0.9144	0.8751
7.7	0.9999	0.9995	0.9985	0.9961	0.9912	0.9826	0.9688	0.9482	0.9195	0.8819
7.8	0.9999	0.9996	0.9986	0.9964	0.9919	0.9839	0.9710	0.9515	0.9243	0.8883
7.9	0.9999	0.9996	0.9988	0.9967	0.9926	0.9851	0.9730	0.9547	0.9288	0.8945
8	0.9999	0.9997	0.9989	0.9970	0.9932	0.9862	0.9749	0.9576	0.9331	0.9004
8.1	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9937	0.9873	0.9766	0.9604	0.9372	0.9060
8.2	0.9999	0.9997	0.9991	0.9975	0.9942	0.9882	0.9783	0.9630	0.9410	0.9113
8.3	1.0000	0.9998	0.9991	0.9977	0.9947	0.9891	0.9798	0.9654	0.9446	0.9163
8.4	1.0000	0.9998	0.9992	0.9979	0.9951	0.9900	0.9813	0.9677	0.9481	0.9211
8.5	1.0000	0.9998	0.9993	0.9981	0.9955	0.9907	0.9826	0.9699	0.9513	0.9256
8.6	1.0000	0.9998	0.9994	0.9982	0.9959	0.9914	0.9838	0.9719	0.9543	0.9299
8.7	1.0000	0.9998	0.9994	0.9984	0.9962	0.9921	0.9850	0.9738	0.9572	0.9340
8.8	1.0000	0.9998	0.9995	0.9985	0.9965	0.9927	0.9861	0.9756	0.9599	0.9379
8.9	1.0000	0.9999	0.9995	0.9986	0.9968	0.9932	0.9871	0.9772	0.9624	0.9416
9	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9971	0.9938	0.9880	0.9788	0.9648	0.9450
9.1	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9942	0.9889	0.9802	0.9671	0.9483
9.2	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9975	0.9947	0.9897	0.9816	0.9692	0.9514
9.3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9977	0.9951	0.9905	0.9828	0.9712	0.9544
9.4	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9979	0.9955	0.9912	0.9840	0.9731	0.9571
9.5	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9981	0.9958	0.9918	0.9851	0.9748	0.9597
9.6	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9962	0.9924	0.9862	0.9765	0.9622
9.7	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9984	0.9965	0.9930	0.9871	0.9780	0.9645
9.8	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9967	0.9935	0.9880	0.9795	0.9667
9.9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9986	0.9970	0.9940	0.9889	0.9808	0.9688
10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9821	0.9707

Relation : $H(x; \alpha, \beta) = H(x\beta; \alpha, 1)$. Exemple : $H(0.5; 0.5, 10) = H(5; 0.5, 1) = 0.9984$.

9.2 Fonction quantile

TABLE 7: Valeurs de la fonction quantile d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $\kappa \in [0.01, 0.50]$

$\kappa \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.01	0.0001	0.0101	0.0574	0.1486	0.2771	0.4360	0.6195	0.8232	1.0440	1.2791
0.02	0.0003	0.0202	0.0924	0.2147	0.3759	0.5672	0.7821	1.0162	1.2662	1.5295
0.03	0.0007	0.0305	0.1225	0.2675	0.4515	0.6648	0.9008	1.1550	1.4242	1.7060
0.04	0.0013	0.0408	0.1501	0.3136	0.5157	0.7462	0.9986	1.2683	1.5523	1.8483
0.05	0.0020	0.0513	0.1759	0.3554	0.5727	0.8177	1.0837	1.3663	1.6626	1.9701
0.06	0.0028	0.0619	0.2006	0.3942	0.6250	0.8825	1.1602	1.4540	1.7607	2.0784
0.07	0.0039	0.0726	0.2244	0.4308	0.6736	0.9423	1.2305	1.5341	1.8502	2.1767
0.08	0.0050	0.0834	0.2475	0.4657	0.7195	0.9984	1.2961	1.6086	1.9331	2.2675
0.09	0.0064	0.0943	0.2700	0.4993	0.7632	1.0514	1.3578	1.6785	2.0107	2.3524
0.1	0.0079	0.1054	0.2922	0.5318	0.8052	1.1021	1.4166	1.7448	2.0841	2.4326
0.11	0.0096	0.1165	0.3140	0.5634	0.8456	1.1507	1.4727	1.8080	2.1540	2.5088
0.12	0.0114	0.1278	0.3355	0.5942	0.8849	1.1976	1.5268	1.8687	2.2210	2.5817
0.13	0.0134	0.1393	0.3568	0.6244	0.9231	1.2431	1.5791	1.9273	2.2854	2.6518
0.14	0.0156	0.1508	0.3779	0.6540	0.9604	1.2874	1.6298	1.9840	2.3478	2.7194
0.15	0.0179	0.1625	0.3989	0.6832	0.9969	1.3306	1.6791	2.0391	2.4083	2.7850
0.16	0.0204	0.1744	0.4197	0.7120	1.0328	1.3729	1.7274	2.0928	2.4671	2.8488
0.17	0.0230	0.1863	0.4405	0.7405	1.0681	1.4144	1.7745	2.1453	2.5246	2.9109
0.18	0.0259	0.1985	0.4612	0.7687	1.1029	1.4552	1.8208	2.1967	2.5808	2.9717
0.19	0.0289	0.2107	0.4819	0.7966	1.1373	1.4954	1.8663	2.2472	2.6359	3.0312
0.2	0.0321	0.2231	0.5026	0.8244	1.1713	1.5350	1.9112	2.2968	2.6900	3.0895
0.21	0.0355	0.2357	0.5233	0.8520	1.2049	1.5742	1.9554	2.3457	2.7433	3.1469
0.22	0.0390	0.2485	0.5439	0.8794	1.2383	1.6130	1.9990	2.3939	2.7958	3.2034
0.23	0.0427	0.2614	0.5647	0.9068	1.2715	1.6514	2.0422	2.4415	2.8476	3.2592
0.24	0.0467	0.2744	0.5854	0.9341	1.3045	1.6895	2.0850	2.4886	2.8988	3.3142
0.25	0.0508	0.2877	0.6063	0.9613	1.3373	1.7273	2.1274	2.5353	2.9494	3.3686
0.26	0.0551	0.3011	0.6272	0.9885	1.3700	1.7649	2.1695	2.5816	2.9996	3.4225
0.27	0.0596	0.3147	0.6482	1.0157	1.4026	1.8023	2.2114	2.6275	3.0494	3.4758
0.28	0.0642	0.3285	0.6693	1.0428	1.4351	1.8396	2.2530	2.6732	3.0988	3.5288
0.29	0.0691	0.3425	0.6905	1.0701	1.4675	1.8767	2.2944	2.7185	3.1478	3.5814
0.3	0.0742	0.3567	0.7118	1.0973	1.5000	1.9138	2.3357	2.7637	3.1967	3.6336
0.31	0.0795	0.3711	0.7333	1.1247	1.5324	1.9508	2.3768	2.8087	3.2452	3.6856
0.32	0.0851	0.3857	0.7549	1.1521	1.5648	1.9877	2.4179	2.8536	3.2937	3.7373
0.33	0.0908	0.4005	0.7767	1.1796	1.5973	2.0247	2.4589	2.8983	3.3419	3.7889
0.34	0.0968	0.4155	0.7987	1.2073	1.6299	2.0616	2.4998	2.9430	3.3901	3.8403
0.35	0.1030	0.4308	0.8208	1.2350	1.6626	2.0986	2.5408	2.9876	3.4381	3.8916
0.36	0.1094	0.4463	0.8431	1.2630	1.6953	2.1357	2.5818	3.0323	3.4862	3.9429
0.37	0.1160	0.4620	0.8656	1.2910	1.7282	2.1729	2.6229	3.0769	3.5342	3.9940
0.38	0.1229	0.4780	0.8884	1.3193	1.7612	2.2101	2.6640	3.1216	3.5822	4.0452
0.39	0.1301	0.4943	0.9114	1.3478	1.7944	2.2475	2.7053	3.1664	3.6303	4.0965
0.4	0.1375	0.5108	0.9346	1.3764	1.8277	2.2851	2.7466	3.2113	3.6785	4.1477
0.41	0.1452	0.5276	0.9581	1.4053	1.8613	2.3228	2.7881	3.2563	3.7268	4.1991
0.42	0.1531	0.5447	0.9818	1.4344	1.8951	2.3607	2.8298	3.3015	3.7752	4.2506
0.43	0.1613	0.5621	1.0058	1.4638	1.9291	2.3989	2.8717	3.3469	3.8239	4.3023
0.44	0.1699	0.5798	1.0301	1.4935	1.9634	2.4373	2.9139	3.3925	3.8727	4.3541
0.45	0.1787	0.5978	1.0547	1.5235	1.9980	2.4759	2.9563	3.4383	3.9217	4.4062
0.46	0.1878	0.6162	1.0797	1.5537	2.0328	2.5149	2.9989	3.4844	3.9710	4.4585
0.47	0.1972	0.6349	1.1050	1.5844	2.0680	2.5541	3.0419	3.5308	4.0206	4.5111
0.48	0.2069	0.6539	1.1306	1.6153	2.1036	2.5937	3.0852	3.5775	4.0705	4.5640
0.49	0.2170	0.6733	1.1566	1.6466	2.1394	2.6337	3.1289	3.6246	4.1208	4.6173
0.5	0.2275	0.6931	1.1830	1.6783	2.1757	2.6741	3.1729	3.6721	4.1714	4.6709

TABLE 8: Valeurs de la fonction quantile d'une v.a. $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, 1)$ à $\kappa \in [0.51, 0.99]$

$\kappa \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.51	0.2383	0.7133	1.2098	1.7105	2.2124	2.7148	3.2174	3.7199	4.2225	4.7250
0.52	0.2494	0.7340	1.2370	1.7430	2.2496	2.7560	3.2623	3.7683	4.2740	4.7795
0.53	0.2610	0.7550	1.2647	1.7761	2.2872	2.7977	3.3077	3.8171	4.3260	4.8345
0.54	0.2729	0.7765	1.2929	1.8096	2.3253	2.8399	3.3536	3.8664	4.3785	4.8900
0.55	0.2853	0.7985	1.3215	1.8436	2.3639	2.8826	3.4000	3.9163	4.4316	4.9461
0.56	0.2981	0.8210	1.3507	1.8781	2.4030	2.9259	3.4470	3.9667	4.4853	5.0028
0.57	0.3114	0.8440	1.3804	1.9132	2.4428	2.9698	3.4946	4.0178	4.5396	5.0602
0.58	0.3252	0.8675	1.4107	1.9489	2.4832	3.0143	3.5429	4.0696	4.5946	5.1182
0.59	0.3394	0.8916	1.4416	1.9853	2.5242	3.0595	3.5919	4.1220	4.6503	5.1770
0.6	0.3542	0.9163	1.4731	2.0223	2.5659	3.1054	3.6416	4.1753	4.7068	5.2366
0.61	0.3695	0.9416	1.5053	2.0600	2.6084	3.1521	3.6921	4.2293	4.7642	5.2971
0.62	0.3854	0.9676	1.5382	2.0985	2.6516	3.1995	3.7435	4.2842	4.8224	5.3584
0.63	0.4018	0.9943	1.5718	2.1378	2.6957	3.2479	3.7957	4.3400	4.8816	5.4207
0.64	0.4189	1.0217	1.6063	2.1779	2.7407	3.2971	3.8489	4.3968	4.9417	5.4841
0.65	0.4367	1.0498	1.6416	2.2188	2.7865	3.3474	3.9031	4.4547	5.0030	5.5486
0.66	0.4552	1.0788	1.6777	2.2608	2.8334	3.3987	3.9583	4.5136	5.0654	5.6142
0.67	0.4744	1.1087	1.7148	2.3037	2.8813	3.4510	4.0147	4.5738	5.1290	5.6811
0.68	0.4945	1.1394	1.7529	2.3477	2.9304	3.5046	4.0724	4.6352	5.1940	5.7494
0.69	0.5153	1.1712	1.7921	2.3929	2.9807	3.5594	4.1314	4.6980	5.2603	5.8191
0.7	0.5371	1.2040	1.8324	2.4392	3.0322	3.6156	4.1917	4.7622	5.3282	5.8904
0.71	0.5598	1.2379	1.8740	2.4869	3.0851	3.6732	4.2536	4.8280	5.3977	5.9633
0.72	0.5835	1.2730	1.9168	2.5359	3.1396	3.7323	4.3171	4.8955	5.4689	6.0380
0.73	0.6084	1.3093	1.9610	2.5865	3.1956	3.7932	4.3823	4.9648	5.5420	6.1147
0.74	0.6344	1.3471	2.0068	2.6387	3.2533	3.8558	4.4494	5.0361	5.6171	6.1934
0.75	0.6617	1.3863	2.0542	2.6926	3.3128	3.9204	4.5186	5.1094	5.6944	6.2744
0.76	0.6903	1.4271	2.1033	2.7485	3.3744	3.9871	4.5899	5.1851	5.7740	6.3579
0.77	0.7204	1.4697	2.1544	2.8063	3.4382	4.0561	4.6637	5.2632	5.8563	6.4440
0.78	0.7522	1.5141	2.2075	2.8665	3.5043	4.1276	4.7400	5.3441	5.9414	6.5330
0.79	0.7857	1.5606	2.2629	2.9290	3.5730	4.2018	4.8193	5.4279	6.0295	6.6253
0.8	0.8212	1.6094	2.3208	2.9943	3.6446	4.2790	4.9016	5.5150	6.1211	6.7210
0.81	0.8588	1.6607	2.3815	3.0625	3.7194	4.3596	4.9875	5.6058	6.2163	6.8206
0.82	0.8988	1.7148	2.4452	3.1341	3.7976	4.4438	5.0771	5.7005	6.3158	6.9244
0.83	0.9415	1.7720	2.5123	3.2092	3.8797	4.5321	5.1711	5.7996	6.4198	7.0330
0.84	0.9871	1.8326	2.5833	3.2885	3.9662	4.6250	5.2698	5.9038	6.5290	7.1470
0.85	1.0361	1.8971	2.6585	3.3724	4.0576	4.7231	5.3739	6.0135	6.6440	7.2670
0.86	1.0890	1.9661	2.7387	3.4616	4.1546	4.8270	5.4842	6.1297	6.7657	7.3938
0.87	1.1463	2.0402	2.8244	3.5569	4.2580	4.9377	5.6016	6.2532	6.8949	7.5285
0.88	1.2087	2.1203	2.9167	3.6591	4.3688	5.0562	5.7271	6.3852	7.0330	7.6722
0.89	1.2771	2.2073	3.0167	3.7695	4.4883	5.1838	5.8621	6.5271	7.1813	7.8266
0.9	1.3528	2.3026	3.1257	3.8897	4.6182	5.3223	6.0085	6.6808	7.3418	7.9936
0.91	1.4372	2.4079	3.2457	4.0217	4.7605	5.4740	6.1686	6.8487	7.5171	8.1758
0.92	1.5325	2.5257	3.3793	4.1683	4.9183	5.6417	6.3456	7.0342	7.7105	8.3767
0.93	1.6415	2.6593	3.5302	4.3332	5.0955	5.8300	6.5439	7.2418	7.9269	8.6013
0.94	1.7687	2.8134	3.7034	4.5222	5.2981	6.0448	6.7699	7.4782	8.1730	8.8566
0.95	1.9207	2.9957	3.9074	4.7439	5.5352	6.2958	7.0336	7.7537	8.4595	9.1535
0.96	2.1089	3.2189	4.1556	5.0128	5.8222	6.5989	7.3515	8.0854	8.8041	9.5104
0.97	2.3546	3.5066	4.4736	5.3559	6.1873	6.9838	7.7545	8.5052	9.2398	9.9610
0.98	2.7059	3.9120	4.9187	5.8339	6.6941	7.5166	8.3112	9.0841	9.8395	10.5804
0.99	3.3174	4.6052	5.6724	6.6384	7.5431	8.4059	9.2377	10.0451	10.8330	11.6046

10 Tables de la loi de Poisson

10.1 Fonction de répartition

TABLE 9: Valeurs de la fonction de répartition de la v.a. $X \sim Pois(\lambda)$

$k\|\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.9098	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9856	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9982	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9998	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	1.0000	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

10.2 Fonction stop-loss

TABLE 10: Valeurs de la fonction *stop-loss* de la v.a. $X \sim Pois(\lambda)$

$k\|\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000	4.5000	5.0000
1	0.1065	0.3679	0.7231	1.1353	1.5821	2.0498	2.5302	3.0183	3.5111	4.0067
2	0.0163	0.1036	0.2810	0.5413	0.8694	1.2489	1.6661	2.1099	2.5722	3.0472
3	0.0019	0.0233	0.0898	0.2180	0.4132	0.6721	0.9869	1.3480	1.7458	2.1718
4	0.0002	0.0043	0.0242	0.0751	0.1708	0.3194	0.5236	0.7815	1.0881	1.4368
5	0.0000	0.0007	0.0056	0.0225	0.0619	0.1346	0.2490	0.4103	0.6202	0.8773
6	0.0000	0.0001	0.0011	0.0059	0.0199	0.0507	0.1066	0.1954	0.3231	0.4933
7	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0057	0.0172	0.0413	0.0848	0.1542	0.2555
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0053	0.0146	0.0336	0.0676	0.1221
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0047	0.0123	0.0273	0.0540
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0041	0.0102	0.0222
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0085
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0030
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0010
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

11 Table de la loi du khi-deux

TABLE 11: Valeurs critiques calculées pour la loi du khi-deux et avec un niveau de confiance de 5% (note : valeur critique à 5% = $F_Z^{-1}(0.95)$, où Z obéit à une loi du khi-deux

Degrés de liberté	$\mathbf{F_Z^{-1}(0.95)}$
1	3.841458821
2	5.991464547
3	7.814727903
4	9.487729037
5	11.070497694
6	12.591587244
7	14.067140449
8	15.507313056
9	16.918977605
10	18.307038053
11	19.675137573
12	21.026069817
13	22.362032495
14	23.684791305
15	24.995790140
16	26.296227605
17	27.587111638
18	28.869299430
19	30.143527206
20	31.410432844

12 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$

Définition de la v.a. X selon l'approche fréquence sévérité

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} B_i, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Panjer s'applique à la condition que la loi de N fasse partie de la classe $(a, b, 0)$.

Relations récursive pour la fonction de masses de probabilité de N

$$f_N(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_N(k-1),$$

pour $k = 1, 2, ...$

Seules les lois Poisson, Binomiale et Binomiale Négative sont membres de cette famille.

On indique les valeurs de a et b pour les membres de la famille $(a, b, 0)$:

- loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;
- loi binomiale négative (1ère paramétrisation) : $a = 1 - q$ et $b = (1-q)(r-1)$;
- loi binomiale négative (2e paramétrisation) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$et $b = \frac{\beta}{1+\beta}(r-1)$;
- loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n+1)\frac{q}{1-q}$.

Fonction de masse de probabilité de B :

$$\Pr(B = hj) = f_B(hj),$$

pour $y = 0, 1, 2, ...$ où h est une coefficient positif plus petit (0.1) ou plus grand (10000) que 1.

1. **Algorithme de Panjer – Forme générale**
   Point de départ :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \Pr(X = 0) \\ &= P_N\{f_B(0))\} \end{aligned}$$

   Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + \frac{bj}{k}\right) f_B(hj) f_X(h(k-j))}{1 - af_B(0)}$$

   pour $k = 1, 2, ...$

2. **Loi Poisson** :

$$N \sim Pois(\lambda).$$

   Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = e^{-\lambda(1-f_B(0))}.$$

   Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k}(j) f_B(hj) f_X(h(k-j)),$$

   pour $k = 1, 2, ...$

3. **Loi Binomiale Négative** ($1^{ère}$ paramétrisation) :

$$N \sim BNeg(r, q).$$

Point de départ :

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\, f_B(0)}\right)^r$$

Relation récursive :

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right) f_B(jh) f_X((k-j)\, h)}{1-(1-q)\, f_B(0)},$$

pour $k = 1, 2, ...$

4. **Loi Binomiale Négative** (2^e paramétrisation) :

$$N \sim BNeg(r, \beta).$$

Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X=0) = \left(\frac{1}{(1-\beta((f_B(0))-1))}\right)^r$$

Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{k}\right) f_B(hj) f_X(h\,(k-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)},$$

pour $k = 1, 2, ...$

Note : Il suffit de remplacer $\beta = \frac{1-q}{q}$ dans les deux relations pour retrouver les relations correspondantes pour la 1ère paramétrisation de la loi binomiale négative. □

5. **Loi Binomiale** :

$$N \sim Binom(n, q).$$

Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X=0) = (1-q+qf_B\,(0))^n$$

Relation récursive :

$$\begin{aligned} f_X(hk) &= \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{q}{q-1}+\frac{(n+1)qj}{(1-q)k}\right) f_B(j) f_X(k-j)}{1+\frac{q}{1-q} f_B(0)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(hj) f_X(h\,(k-j))}{1-q+qf_B(0)}, \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, ...$ □

13 Relation récursive pour somme de v.a. discrètes i.i.d.

On considère une v.a. X discrète où $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ avec

$$f_X(kh) = \Pr(X = kh)$$

pour $k = 0, 1, ...$.

On définit

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. et se comportent comme la v.a. X.

Relation récursive pour calculer $f_{S_n}(kh)$ pour $k = 0, 1, 2, ...$:

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(jh) f_{S_n}((k-j)h)$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n .$$

14 Algorithmes récursifs et fonctions R

14.1 Convolution directe (2 v.a. indépendantes)

```
directconvo<-function(ff1,ff2)
{
# convolution de deux fns de masses de probabilité
l1<-length(ff1)
l2<-length(ff2)
ffs<-ff1[1]*ff2[1]
smax<-l1+l2-2
ff1<-c(ff1,rep(0,smax-l1+1))
ff2<-c(ff2,rep(0,smax-l2+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,sum(ff1[1 :j]*ff2[j :1]))
}
return(ffs)
}
```

14.2 Convolution directe (n v.a. indépendantes)

```
directconvo.nrisks<-function(matff=rbind(...))
{
    # convolution de n fns de masses de probabilité
    # supports de longueur égale – sinon ajouter des 0
    # utiliser rbind pour mettre ensemble les vecteurs de
    # fns de masses de probabilite
nbrisks<-dim(matff)[1]
ffs<-matff[1,]
for (i in 2 :nbrisks)
{
ffx<-matff[i,]
ffs<-directconvo(ffs,ffx)
}
return(ffs)
}
```

14.3 Algorithme récursif – DePril (n v.a. i.i.d.)

```
recur.nrisks<-function(ff,nn=5,smax=100)
{
     # convolution de n fns de masses de probabilité avec
# elle-meme
     # premier algorihtme de DePril
ll<-length(ff)
ffs<-ff[1]^nn
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/ff[1])*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*((nn+1)*(1 :i)/i-1)))
}
return(ffs)
}
```

14.4 Algorithme de Panjer – Poisson composée

```
# Algorithme récursif de Panjer–Poisson
panjer.poisson<-function(lam,ff,smax)
{
aa<-0
bb<-lam
ll<-length(ff)
ffs<-exp(lam*(ff[1]-1))
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

14.5 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale composée

```
panjer.binom<-function(nn,qq,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale
# Loi discrete pour B
aa<- -qq/(1-qq)
bb<- -(nn+1)*aa
ll<-length(ff)
ffs<-(1-qq+qq*ff[1])^nn
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

14.6 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (1)

```
panjer.nbinom1<-function(rr,qq,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale negative 1
# Loi discrete pour B
aa<-1-qq
bb<-aa*(rr-1)
ll<-length(ff)
ffs<-(qq/(1-(1-qq)*ff[1]))^rr
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

14.7 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (2)

```
panjer.nbinom2<-function(rr,beta,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale negative 2
# Loi discrete pour B
aa<-beta/(1+beta)
bb<-aa*(rr-1)
ll<-length(ff)
qq<-1/(1+beta)
ffs<-(qq/(1-(1-qq)*ff[1]))^rr
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

15 Variables aléatoires discrètes, fgp, fonctions caractéristiques et méthode FFT

15.1 Contexte

Soit la v.a. discrète positive X définie sur $\{0, 1, ..., n-1\}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k)$$

pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

La fgp est donnée par

$$P_X(t) = f_X(0) + f_X(1)\, t^1 + ... + f_X(n-1)\, t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, t^k,$$

pour $t \geq 0$.

Pour identifer la valeur $f_X(k)$ à partir de $P_X(t)$, on a

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} P_X(t)\bigg|_{t=0}.$$

15.2 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique de la v.a. X est

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, e^{itk},$$

Selon la formule d'Euler, on a

$$e^{itk} = \cos(tk) + i \times \sin(tk).$$

La méthode FFT permet d'idenfier $f_X(k)$ à partir de $\varphi_X(t)$.

15.3 Définition de deux vecteurs

On définit le vecteur des fonctions de masse de probabilité de la v.a. X par

$$\underline{f}_X = (f_X(0), f_X(1), ..., f_X(n-1)).$$

On définit un vecteur correspondant avec les valeurs de $\varphi_X(t)$ aux points $t = t_j = 2\pi\frac{j}{n}$, pour $j = 0, 1, ..., n-1$, par

$$\underline{\phi}_X = (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{n-1})) = \left(\varphi_X\left(2\pi\frac{0}{n}\right), \varphi_X\left(2\pi\frac{1}{n}\right), ..., \varphi_X\left(2\pi\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

15.4 Construction : $\underline{f}_X$ vers $\underline{\phi}_X$

Chaque élément de $\underline{\phi}_X$ est obtenu avec

$$\varphi_X(t_j) = \varphi_X\left(2\pi\frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)$$

pour $j = 0, 1, ..., n-1$.

Chaque élément de $\underline{\phi}_X$ est un nombre complexe i.e.

$$\varphi_X(t_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\cos\left(2\pi\frac{j}{n}k\right) + i \times \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\sin\left(2\pi\frac{j}{n}k\right).$$

15.5 Inversion : $\underline{\phi}_X$ vers $\underline{f}_X$

On dispose du vecteur

$$\underline{\phi}_X = (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{n-1}))$$

et on vise à identifier les valeurs de

$$\underline{f}_X = (f_X(0), f_X(1), ..., f_X(n-1)).$$

Cette procédure est appelée inversion de la fonction caractéristique et les composantes de $\underline{f}_X$ sont obtenues avec

$$f_X(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_X(t_j)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}k\right), \text{ par } k = 0, 1, ..., n-1.$$

15.6 Remarque

La construction et l'inversion fonctionne pour tout $n \geq 1$.

15.7 Algorithme FFT

La méthode FFT est un algorithme permettant d'effectuer les calculs de façon efficace numériquement. L'algorithme est préprogrammé en R et dans plusieurs autres logiciels. Il est important que $n = 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$.

16 FFT et fonctions R

16.1 FFT – Somme de deux v.a. discrètes indépendantes.

```
fft.directconvo<-function(m=16, fx, fy)
{
    aa <- 2^m
    nx <- length(fx)
    ny <- length(fy)
    ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
    fty <- fft(c(fy, rep(0, aa - ny)))
    fs <- Re(fft(ftx*fty, TRUE))/aa
    return(fs)
}
```

16.2 FFT – Somme de n v.a. discrètes indépendantes

```
fft.nrisks<-function(matff,v.n,m=14)
{
aa <- 2^m
nbrisks<-dim(matff)[1]
fx<-matff[1,]
nx <- length(fx)
ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
fts<-(ftx)^v.n[1]
    for (i in 2:nbrisks)
        {
        fx<-matff[i,]
        nx <- length(fx)
        ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
        fts<-fts*(ftx^v.n[i])
    }
    ffs <- Re(fft(fts, TRUE))/aa
return(ffs)
}
```

16.3 FFT – Somme aléatoire (loi Poisson composée)

```
fft.poiscomposee<-function(lam, n, fx)
{
# 2**n = longueur du vecteur
# prendre n eleve (ex: n=12 ou plus)
# premiere masse de fx est Pr(X=0)
   aa <- 2^n
   nx <- length(fx)
   ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
   fts<-exp(lam * (ftx - 1))
   fs <- Re(fft(fts, T))/aa
   return(fs)
}
```