

# C – Computerversuch

18. Oktober 2015

---

Versuchsleiter: Raphael Frey  
Assistent: Jeffrey Gantner

# 1 Arbeitsgrundlagen

## 1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler*: Verursacht durch Versuchsandordnung, Versuchsumgebung, Messvorgang. Bewirken entweder eine systematische *Abweichung* des Messergebnisses vom eigentlichen Wert oder eine *Unsicherheit* der Messgrösse. Falls sie erkannt werden können sie meist korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler*: Immer vorhanden, auch bei einer von systematischen Fehlern freien Anordnung. Lassen sich durch mehrmalige Wiederholung derselben Messung beliebig verkleinern.

## 1.2 Angabe der Genauigkeit von Messresultaten

Bestimmung von Fehlern sind Abschätzungen. Daher ist es sinnlos, sie genauer als ca. 10%, also etwa 1 signifikante Ziffer, anzugeben.

$$\text{Mittelwert der Messungen: } \bar{T} = 147.85 \text{ s} \quad (1)$$

$$\text{absoluter Fehler: } s_T = 4.9 \text{ s} \quad (2)$$

$$\text{relativer Fehler: } r_T = \frac{s_T}{\bar{T}} = 0.033 = 3.3\% \quad (3)$$

$$\text{Messresultat: } T = (148 \pm 5) \text{ s} \quad (4)$$

$$\text{unsinnig: } T = (147.8532 \pm 4.8700) \text{ s} \quad (5)$$

Merke:

- Zufällige Fehler aus einer Messreihe werden mit  $s$  bezeichnet, auf Abschätzungen beruhende Unsicherheiten mit  $\Delta$ .
- Üblicherweise werden relative Fehler in %, ‰ oder **ppm** (**p**arts **p**er **m**illion) angegeben.
- Eine Messgenauigkeit von 1 % gilt als gut, 1‰ ist sehr gut, 1ppm astronomisch gut.

## 1.3 Die Fehlerbestimmung für einzelne Grössen

### 1 Einmalige Messung einer Grösse

Fehler wird abgeschätzt. Erfahrungssache. Wird mit  $\Delta$  bezeichnet (z.B.  $\Delta T$ )

### 2 Wiederholte Messung einer Grösse

Seien  $N$  Messergebnisse  $x_1, x_2, \dots, x_N$  unter gleichen Bedingungen ermittelt worden. Dann wird der arithmetische Mittelwert dem wahren Wert  $x_0$  umso näher kommen, je grösser  $N$  wird.

$$\text{Arithmetischer Mittelwert aller Messergebnisse: } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

$$\text{Fehler dieses Mittelwertes: } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \quad (7)$$

$$\text{Ergebnis: } x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (8)$$

Merke:

- Messwerte, die extrem vom Mittelwert abweichen, werden als Fehlmessungen (Ausreisser) betrachtet und nicht in die Fehlerrechnung einbezogen.
- Wahrscheinlichkeitstheorie: wahrer Wert  $T_0$  liegt mit Wahrscheinlichkeit 68 % innerhalb des Intervalls  $T_0 \pm s_T$ , mit Wahrscheinlichkeit 95 % innerhalb des Intervalls  $T_0 \pm 2s_T$  und mit Wahrscheinlichkeit 99 % innerhalb des Intervalls  $T_0 \pm 3s_T$

### 3 Mittelwertbildung mit Gewichten

Resultate mit unterschiedlichen Genauigkeiten:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1} \quad (9)$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2} \quad (10)$$

$$\dots \quad (11)$$

$$x_n = \bar{x}_n \pm s_{\bar{x}_n} \quad (12)$$

Wahrscheinlichster Wert  $\bar{x}$  wird durch Bildung des gewichteten Mittelwerts erreicht:

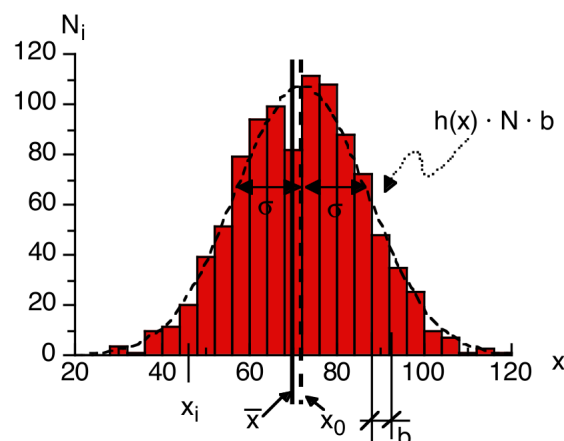
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}} \quad (13)$$

$$\text{Mit den Gewichten: } g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} \quad (14)$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwerts: } s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}} \quad (15)$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

### 4 Fehlertheorie



**Abbildung 1:** Histogramm mit Gauss'scher Normalverteilung. **Quelle:** Skript "Arbeitsunterlagen", p13.

Die in Abbildung 6 gezeigte Kurve  $h(x)$  kann beschrieben werden mit:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (16)$$

$$\text{wobei} \quad (17)$$

$$x_0 \text{ Erwartungswert (wahrer Wert)} \quad (18)$$

$$\sigma \text{ Standardabweichung} \quad (19)$$

Für steigendes  $N$  geht der gemessene Mittelwert  $\bar{x}$  gegen den wahren Wert  $x_0$ .

$$\text{experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (20)$$

Die experimentelle Standardabweichung  $s$  konvergiert für  $N \rightarrow D\infty$  gegen  $\sigma$ . Der Fehler der Einzelmessung  $s_{T_i}$  und der Fehler  $s_{\bar{T}}$  des Mittelwertes stehen in folgender Beziehung:

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}} \quad (21)$$

Daraus folgt z.B., dass der Mittelwert einer Serie von 100 Messungen die zehnfache Genauigkeit der Einzelmessung aufweist.

## 5 Regression (“Fitten”)

$$\chi^2(a_0, a_1, \dots) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots)]^2}{\sigma_i^2} : \text{minimal} \quad (22)$$

$$\text{wobei:} \quad (23)$$

$$f(x, a_0, a_1): \text{ gegebene Gesetzmässigkeit/Funktion} \quad (24)$$

$$x_i, y_i: \text{ Messwertpaare} \quad (25)$$

- *Nichtlineare Funktionen*  $f$ : Nichtlineare Regression. Gute Startwerte erforderlich für  $a_i$ .
- *Polynomiale Funktion*  $f$ : Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für  $a_i$  daher nicht relevant.
- *Verwendung einer Software zum Fitten*: x-Werte sollen als Stellgrösse (absolute genau) betrachtet werden, y-Werte als fehlerbehaftet (Messgrösse).

Berechnung des Fehlers  $\sigma_i$  der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots))^2}{N-m}} \quad (26)$$

Wobei  $N$  die Anzahl Messergebnisse,  $m$  die Anzahl Parameter  $a_0, \dots, a_m$  bezeichnet. Die Parameter  $a_i$  müssen aus dem Fit herausgelesen werden.

## 1.4 Fehlerfortpflanzung und Auswertung

### 1 Indirekte Messung, das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Seien:

$$\text{Resultatgrösse: } R = R(x, y, z, \dots) \quad (27)$$

$$\text{Argumente (gemessen und/oder aus Literatur):} \quad (28)$$

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (29)$$

$$y = \bar{y} \pm s_{\bar{y}} \quad (30)$$

$$z = \bar{z} \pm s_{\bar{z}} \quad (31)$$

Gesucht: Mittelwert  $\bar{R}$  und mittlerer Fehler  $s_{\bar{R}}$

$$\bar{R} = R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (32)$$

Mittlerer, absoluter Fehler (statistischer Fehler): Bestimmen mittels dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (33)$$

Wobei  $\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}}$  für die partielle Ableitung der Funktion  $R$  nach der Variablen  $z$ , ausgewertet an der Stelle der Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$  steht.

Der Fehler  $\pm s_R$  bezeichnet die Intervallbreite, in welcher der wahre Wert mit 68 % Wahrscheinlichkeit liegt.

### 2 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ("Rezepte")

- *Addition und Subtraktion*:  $s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ . Es werden die absoluten Fehler quadratisch addiert.
- *Multiplikation und Division*:  $r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ . Es werden die relativen Fehler quadratisch addiert.
- *Potenzen*:  $r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x$ . Der relative Fehler der Messgrösse wird mit dem Exponenten multipliziert.

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

## 2 Durchführung

Die Daten des Versuches sind vom Dozenten zur Verfügung gestellt. Die verwendeten Tools beinhalten Taschenrechner und Tabellenkalkulation, sowie QTIPlot.

### 3 Auswertung

Da der Punkt dieses Versuches die Fehlerrechnung selbst ist, beinhaltet dieses Kapitel ausnahmsweise auch die Fehlerrechnung. Üblicherweise ist diese jedoch in einem separaten Kapitel zu finden.

#### 3.1 Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeit

##### 1 Daten

- *Länge der Messstrecke:*  $(2.561 \pm 0.003) \text{ m}$
- *Raumtemperatur:*  $\vartheta = 23^\circ\text{C}$

Messprotokoll:

Messung	Laufzeit $t_i$ (ms)	Messung	Laufzeit $t_i$ (ms)
1	6.83	11	7.36
2	7.41	12	7.31
3	7.32	13	7.56
4	7.31	14	7.14
5	7.23	15	6.94
6	7.68	16	7.32
7	7.33	17	7.34
8	7.7	18	7.28
9	7.93	19	7.01
10	7.54	20	7.76

##### 2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

Mittlere Laufzeit:

$$\bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = 7.37 \text{ ms} \quad (34)$$

Fehler des Mittelwertes:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.062 \text{ ms} \quad (35)$$

Standardabweichung:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.28 \text{ ms} \quad (36)$$

##### 3 Wert und Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit

Es sind hier zwei Vergleichswerte aufgeführt. Der eine ist ein Tabellenwert aus Horst Kuchling's *Taschenbuch der Physik* [1]. Der andere Wert errechnet sich aus einer Formel für die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft, abhängig von der Temperatur. Die Formel kann sowohl auf Wikipedia [2] wie auch in Kuchling's Werk [3] gefunden werden.

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \vartheta) \text{ m s}^{-1} = (331.3 + 0.606 \cdot 23) \text{ m s}^{-1} = 345.24 \text{ m s}^{-1} \quad (37)$$

Der Tabellenwert aus Kuchling's Buch ist  $344 \text{ m s}^{-1}$ , also ziemlich nahe beim errechneten Wert.

Berechnung der mittleren Geschwindigkeit:

$$c = \frac{s}{t} \quad (38)$$

$$\bar{c} = \frac{s}{\bar{t}} = \frac{2.561 \text{ m}}{7.37 \text{ ms}} = 347.73 \text{ m s}^{-1} \quad (39)$$

$$(40)$$

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (41)$$

In diesem Fall ist  $R(x, y, z, \dots) := c(s, t) = \frac{s}{t}$ . Es ergibt sich die Formel:

$$\begin{aligned} s_{c(s,t)} &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial c}{\partial s}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial c}{\partial t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} \frac{s}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial}{\partial t} \frac{s}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{1}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{7.37 \text{ ms}} \cdot 3 \text{ mm}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(7.37 \text{ ms})^2} \cdot 0.062 \text{ ms}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{0.00737 \text{ s}} \cdot 0.003 \text{ m}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(0.00737 \text{ s})^2} \cdot 0.000062 \text{ s}\right)^2} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \\ &= 2.95 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat mittels Eintippen der obigen Zahlen in Taschenrechner)} \end{aligned}$$

Ausgerechnet mit vereinfachtem Rezept für Division:

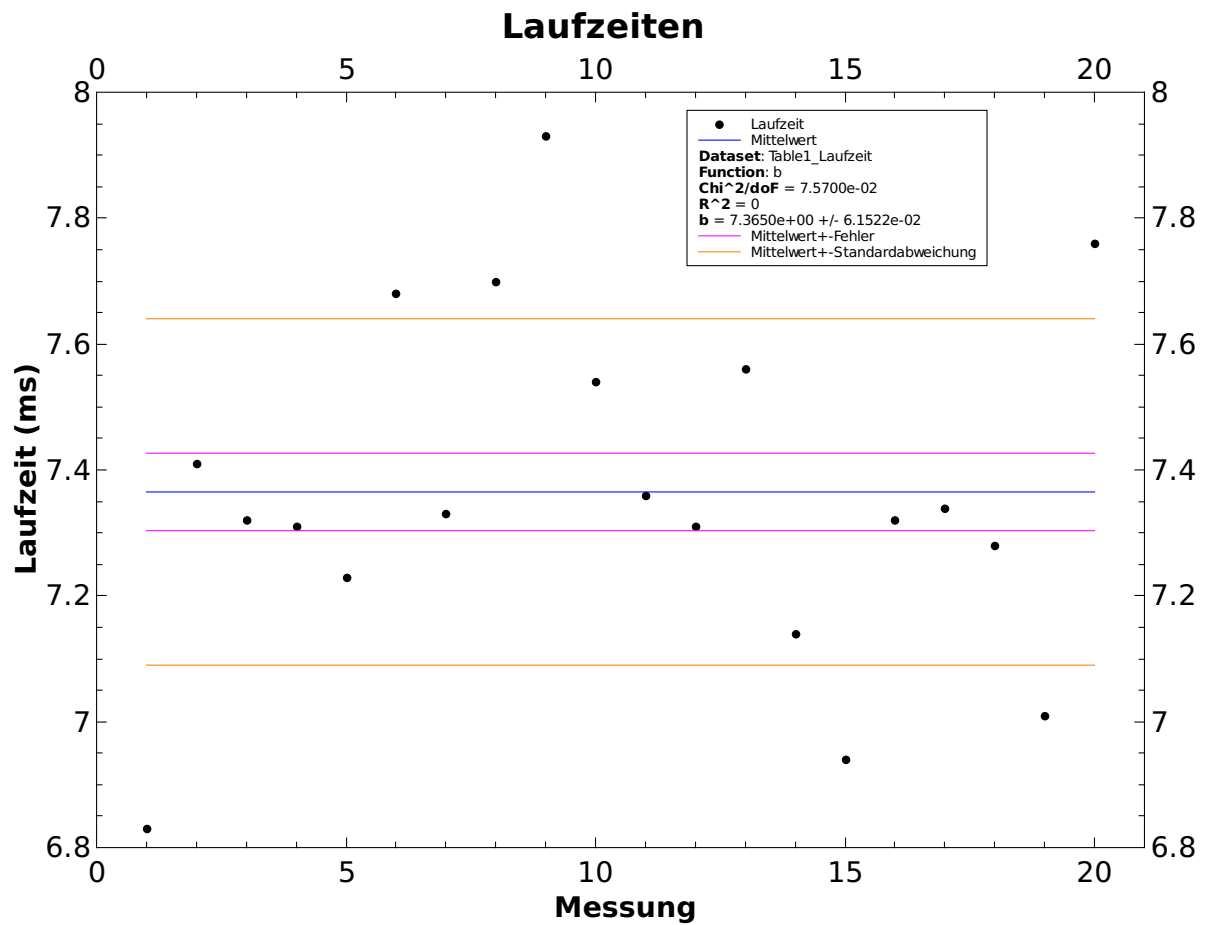
$$\begin{aligned} s_{c(s,t)} &= \sqrt{\left(\frac{s_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{\bar{c}}\right)^2 \cdot \overline{c(s,t)}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.003 \text{ m}}{2.561 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{0.06 \text{ ms}}{7.37 \text{ ms}}\right)^2 \cdot \overline{c(s,t)}} \\ &= \sqrt{0.001^2 + 0.008^2} \cdot 347.7 \text{ m s}^{-1} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \end{aligned}$$

Folglich:

$$c_{luft} = \overline{c_{luft}} \pm s_{\overline{c_{luft}}} = (347 \pm 3) \text{ m s}^{-1} \quad (42)$$



## 4 QtiPlot

Abbildung 2: Messdaten und Auswertung zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

13 der 20 Messpunkte (also 65%) liegen innerhalb des Mittelwerts  $\pm$  die Standardabweichung, was ziemlich nahe beim theoretischen Wert von 68% ist. Mit einer grösseren Anzahl Messungen sollte sich dieser Wert noch besser an 68% annähern.

### 3.2 Aufgabe 2: Eisengehalt

#### 1 Daten

Messung	Eisengehalt (%)	absoluter Fehler (%)
1	20.3	1.2
2	21.9	1.3
3	21.1	1.1
4	19.6	0.8
5	19.9	1.3
6	18.0	1.3
7	19.4	1.0
8	22.2	2.0
9	21.6	0.8

#### 2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert ergibt sich als:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 20.44 \% \quad (43)$$

Mit dem zugehörigen Fehler:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^9 (x_i - \bar{x})^2}{9 \cdot 8}} = 0.46 \% \quad (44)$$

#### 3 Gewichteter Mittelwert

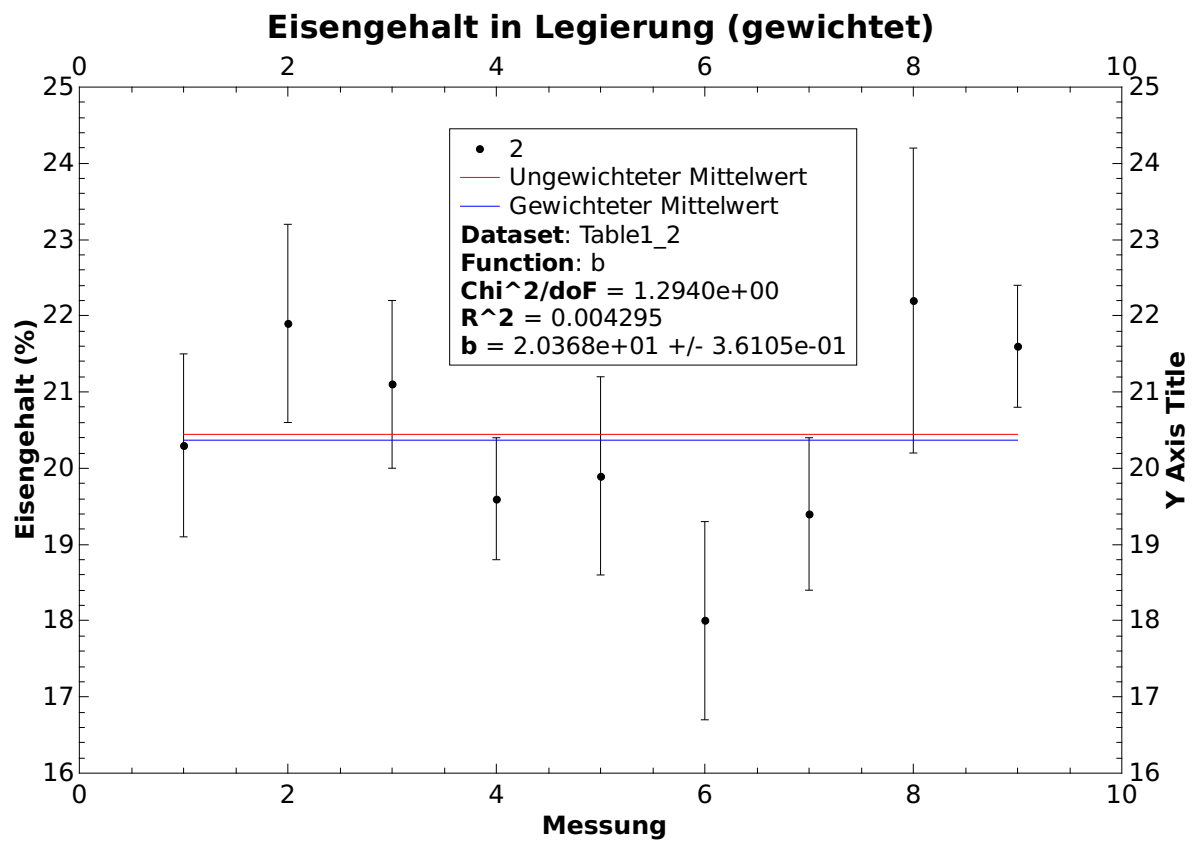
Der gewichtete Mittelwert errechnet sich gemäss:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^9 g_{x_i} \cdot x_i}{\sum_1^9 g_{x_i}} = \frac{156.24}{7.67} \% = 20.37 \% \quad (45)$$

Der zugehörige Fehler beträgt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sum_1^9 g_{x_i}} = 0.36 \% \quad (46)$$

## 4 QtiPlot



**Abbildung 3:** Messdaten mit Fehlerbalken, gewichteter und ungewichteter Mittelwert zum Versuch *Eisengehalt*

### 3.3 Aufgabe 3: Federkonstante

#### 1 Daten

F (N)	z (m)
3.83	0.20
7.79	0.35
8.08	0.42
9.7	0.46
10.58	0.51
12.33	0.54
12.23	0.59
14.43	0.67
15.51	0.71
17.09	0.80

#### 2 Rechnung mittels Tabellenkalkulation

Zum Vergleich mit dem Resultat des Taschenrechners und QtiPlot sei hier noch eine lineare Regression mit Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt gemäss der Anleitung im deutschen Wikipedia-Artikel zur linearen Regression [4].

F (N)	z (m)						$\hat{F}(N)$
$y_i$	$x_i$	$y_i - \bar{y}$	$x_i - \bar{x}$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\hat{y}$
3.83	0.20	-7.33	-0.32	2.38	53.68	0.11	3.82
7.79	0.35	-3.37	-0.17	0.59	11.34	0.03	7.21
8.08	0.42	-3.08	-0.10	0.32	9.47	0.01	8.79
9.70	0.46	-1.46	-0.06	0.09	2.12	0.00	9.69
10.58	0.51	-0.58	-0.01	0.01	0.33	0.00	10.82
12.33	0.54	1.17	0.02	0.02	1.38	0.00	11.50
12.23	0.59	1.07	0.07	0.07	1.15	0.00	12.62
14.43	0.67	3.27	0.15	0.47	10.71	0.02	14.43
15.51	0.71	4.35	0.19	0.81	18.95	0.03	15.33
17.09	0.80	5.93	0.28	1.63	35.20	0.08	17.36
111.57	5.25	0.00	0.00	6.40	144.33	0.29	Summen
11.16	0.52						Durchschnitte

Die Steigung der Regressionsgeraden errechnet sich als:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{144.33}{6.4} \text{ N m}^{-1} = 22.57 \text{ N m}^{-1} \quad (47)$$

Den Achsenabschnitt  $F_0$  erhält man aus:

$$F_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} = 11.16 \text{ N} - 22.57 \text{ N m}^{-1} \cdot 0.52 \text{ m} = -0.69 \text{ N} \quad (48)$$

Die empirische Korrelation beträgt:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6.40}{\sqrt{144.33 \cdot 0.29}} = 0.99364 \quad (49)$$

Das Bestimmtheitsmass betragt:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0.98732 \quad (50)$$

### 3 Taschenrechner

Ergebnisse ermittelt mittels TI-89 und Anleitung aus Quelle [5].

$$F = k \cdot z + F_0$$

$$k = 0.044\,312\,\text{N m}^{-1}$$

$$F_0 = 0.030\,61\,\text{N}$$

$$\text{corr} = 0.993638$$

$$R^2 = 0.987316$$

### 4 QtiPlot

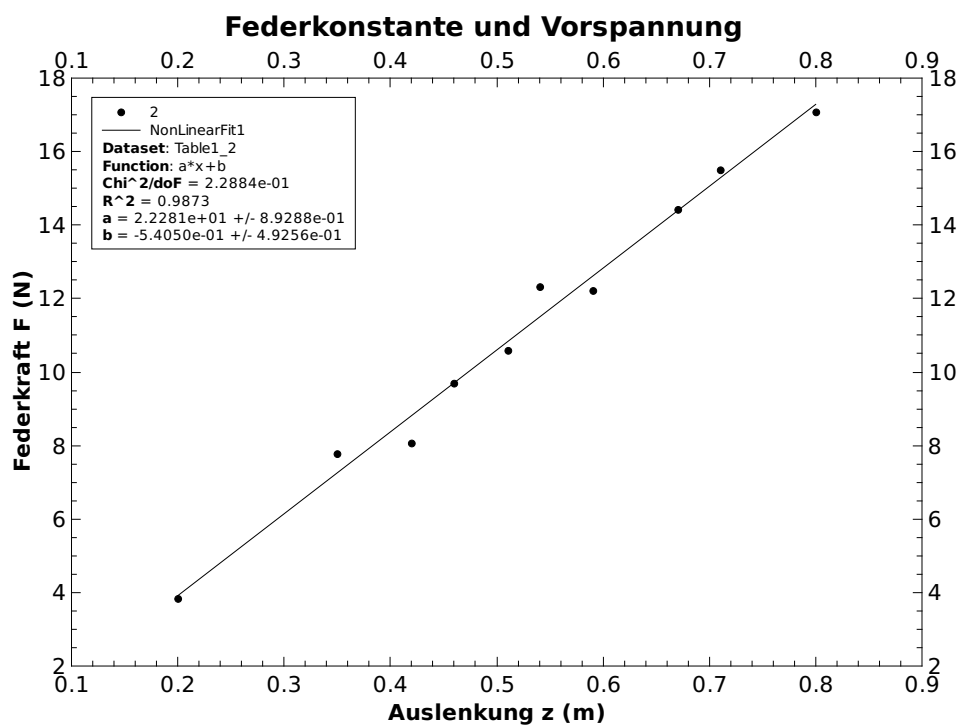
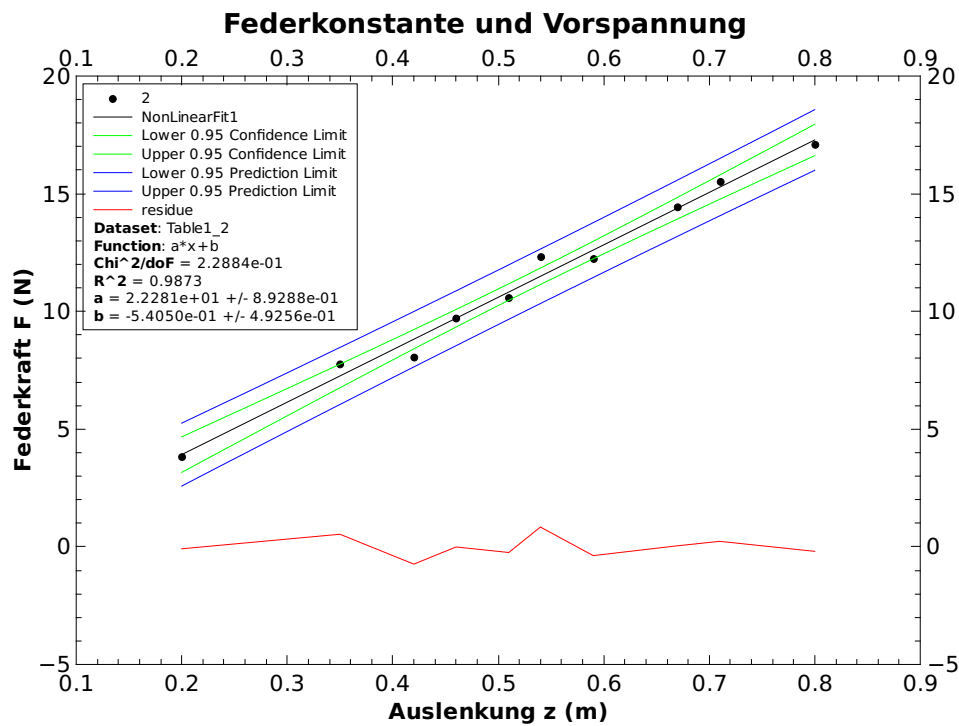
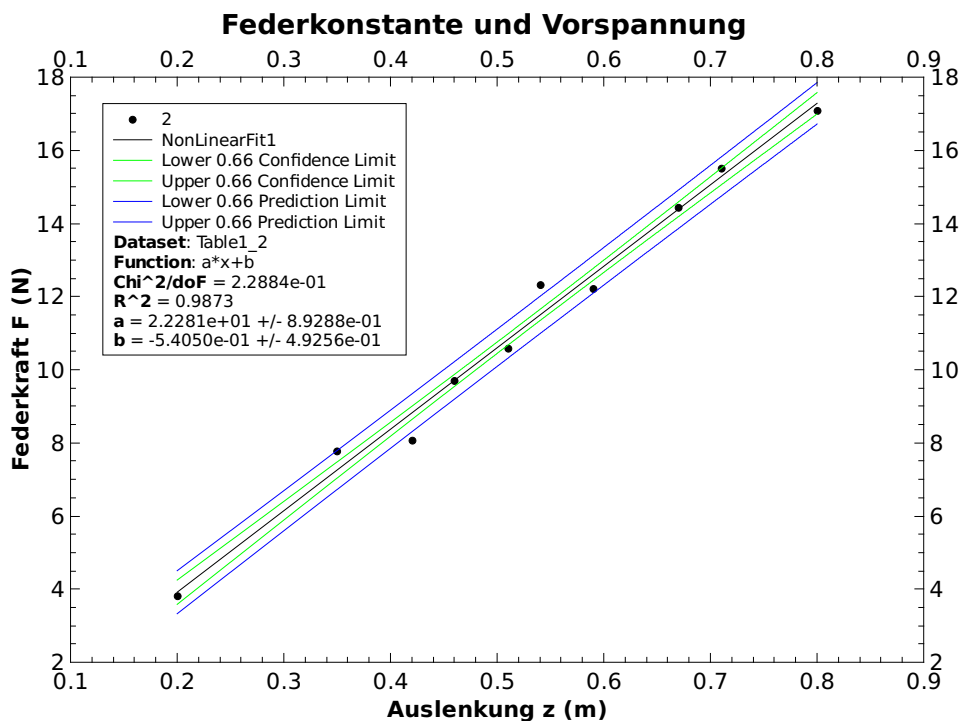


Abbildung 4: Regressionsgerade mit Messpunkten zu Aufgabe *Federkonstante*



**Abbildung 5:** Regressionsgerade mit Messpunkten, 95% Confidence Band, Prediction Band und Residuals zu Aufgabe *Federkonstante*



**Abbildung 6:** Regressionsgerade mit Messpunkten, 66% Confidence Band und Prediction Band zu Aufgabe *Federkonstante*

### 3.4 Aufgabe 4: Pendel

#### 1 Theorie

Die gedämpfte Schwingung eines Pendels kann folgendermassen beschrieben werden:

$$y(t) = A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \quad (51)$$

Nun soll eine Funktion mittels QtiPlot auf die unten stehenden Messdaten gefittet werden, um die Parameter dieser Gleichung zu bestimmen.

Dabei wird von QtiPlot eine nichtlineare Regression ausgeführt. Es muss also das Minimum der folgenden Funktion gefunden werden:

$$\chi^2(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N)]^2}{\sigma_i} \quad (52)$$

$\sigma_i$  sind dabei die Fehler der einzelnen Messungen  $y_i$ .

Es gilt nun, geeignete Startwerte für die nichtlineare Regression zu finden. Ansonsten wird QtiPlot entweder kein Resultat erhalten (Algorithmus konvergiert nicht) oder ein Nebenminimum der  $\chi^2$ -Funktion finden, welches nicht die bestmögliche Annäherung an die gesuchte Gesetzmässigkeit ist.

#### 2 Messdaten

(von Aufgabenblatt kopiert)

$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(m)$	$y(m)$
0.5	-0.418	8.0	0.594	15.5	-0.577	23.0	0.417	30.5	-0.132	38.0	0.152
1.0	-0.07	8.5	0.632	16.0	-0.48	23.5	0.423	31.0	-0.123	38.5	0.058
1.5	0.082	9.0	0.435	16.5	-0.414	24.0	0.45	31.5	-0.075	39.0	0.193
2.0	0.19	9.5	0.366	17.0	-0.46	24.5	0.389	32.0	-0.373	39.5	0.070
2.5	0.494	10	0.123	17.5	-0.187	25.0	0.488	32.5	-0.146	40.0	0.235
3.0	0.566	10.5	0.064	18.0	-0.171	25.5	0.317	33.0	-0.176	40.5	0.084
3.5	0.753	11.0	-0.084	18.5	-0.03	26.0	0.344	33.5	-0.193	41.0	0.248
4.0	0.913	11.5	-0.152	19.0	-0.072	26.5	0.363	34.0	-0.138	41.5	0.319
4.5	0.869	12.0	-0.299	19.5	-0.011	27.0	0.218	34.5	-0.259	42.0	0.052
5.0	0.977	12.5	-0.506	20.0	0.082	27.5	0.084	35.0	-0.078	42.5	0.159
5.5	0.956	13.0	-0.479	20.5	0.109	28.0	0.113	35.5	0.018	43.0	0.134
6.0	0.996	13.5	-0.576	21.0	0.25	28.5	0.166	36.0	-0.059	43.5	0.079
6.5	0.971	14.0	-0.662	21.5	0.404	29.0	0.02	36.5	0.056	44.0	0.097
7.0	0.827	14.5	-0.498	22.0	0.272	29.5	-0.032	37.0	0.004	44.5	0.162
7.5	0.784	15.0	-0.654	22.5	0.317	30.0	0.011	37.5	0.042	45.0	0.030

### 3 QtiPlot

Die Pendelgleichung wurde in QtiPlot folgendermassen definiert:

$$A \cdot \exp(-G \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x - d) + y_0$$

Die Startwerte wurden mit folgender Methodik bestimmt:

- $A = 1$ : Anhand des Funktionswertes des ersten Ausschlages des Pendels abgeschätzt.
- $\Gamma = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \cdot \frac{1}{T} = \ln\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot \frac{1}{20} = 0.035$ : Die Abklingkonstante  $\Gamma$  wurde abgeschätzt mittels des logarithmischen Dekrements und der Periode. Dabei ist  $A_1$  die Amplitude des ersten Schwingvorgangs,  $A_2$  die Amplitude des 2. Schwingvorgangs und  $T$  die Periode der unterliegenden Sinus-Schwingung. Natürlich sind all diese Werte eher grob aus dem Scatter-Plot abgelesen und nicht hochpräzise (was aber für diesen Schritt auch nicht notwendig ist). Genauer kann in den Quellen [6], [7] und [8] gefunden werden.
- Der Nulldurchgang der ersten Schwingung liegt ungefähr bei einer Sekunde, wie man auf dem Scatter-Plot erkennen kann. Dies entspricht der Forderung, dass  $\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1 \text{ s} - \delta) = 0$  ist, bzw. weil  $\sin(0) = 0$ , muss gelten:  $2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1 \text{ s} - \delta = 0$ . Aufgelöst ergibt dies:  $\delta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1 \text{ s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20 \text{ s}} \cdot 1 \text{ s} = 0.31$ .
- Die Periode der Sinus-Schwingung wird aus den Peaks der zwei ersten Schwingungen auf ungefähr 20 Sekunden geschätzt, womit man für die Frequenz  $\frac{1}{20 \text{ s}} = 0.05 \text{ Hz}$  erhält.
- Der Offset  $y_0$  wird vorerst auf null gesetzt.

Somit sind die Startwerte bestimmt und werden wie folgt in QtiPlot eingesetzt:

```
A = 1
G = 0.035
f = 0.05
d = 0.31
y0 = 0
```

Dies liefert:

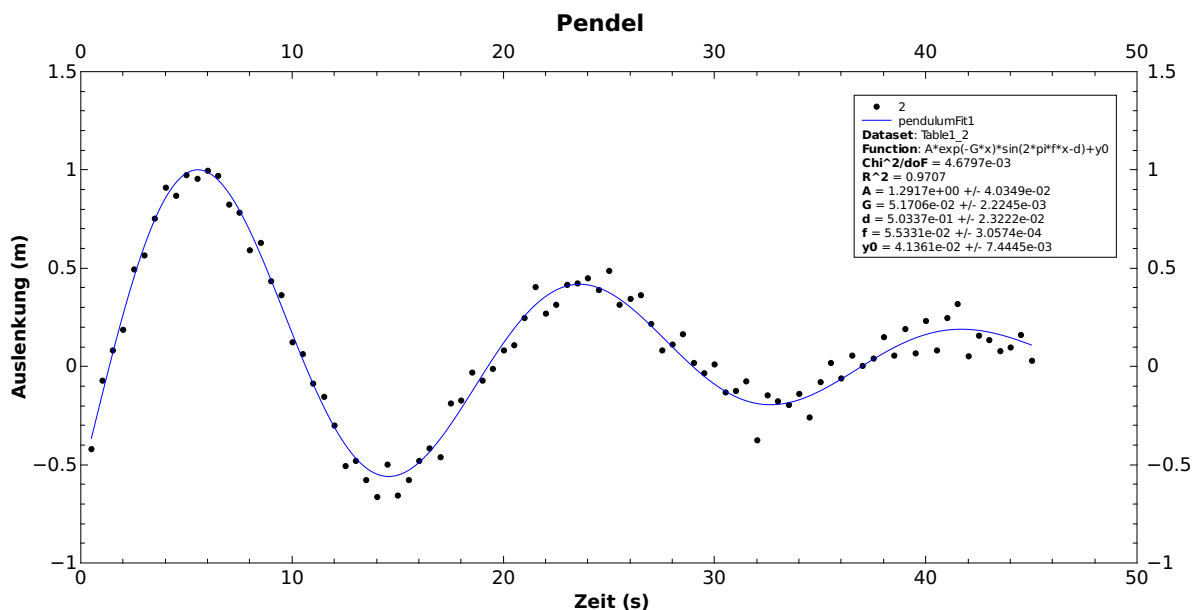


Abbildung 7: Fit zur Aufgabe *Pendel*, mit den gesuchten Gleichungsparametern (siehe Legende)



Die von QtiPlot bestimmten Gleichungsparameter sind gemäss Legende aus Abbildung 7 somit (mit Einheiten ergänzt):

$$\begin{aligned} A &= (1.291\,700 \pm 0.040\,349) \text{ m} \\ \Gamma &= (-0.051\,706\,0 \pm 0.002\,224\,5) \text{ s}^{-1} \\ f &= (0.053\,310\,00 \pm 0.000\,305\,74) \text{ Hz} \\ \delta &= 0.503\,370 \pm 0.023\,222 \\ y_0 &= (0.041\,361\,0 \pm 0.007\,444\,5) \text{ m} \end{aligned}$$

Sinnvoll gerundet und mit Einheiten in Gleichung 51 eingesetzt:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \\ &= (1.29 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \exp\left((-0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \sin(2\pi \cdot (0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz} \cdot t - 0.50 \pm 0.02) \\ &\quad + (0.041 \pm 0.007) \text{ m} \end{aligned}$$

### 3.5 Aufgabe 5: RC-Glied (Tiefpass)

Es soll das Verhalten eines Tiefpasses untersucht werden:

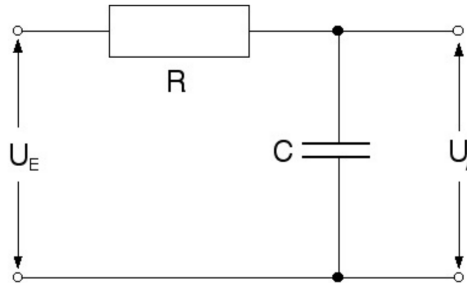


Abbildung 8: Tiefpass. Quelle: Versuchsunterlagen “Auswertung mit Computer”, p.6

#### 1 Versuchsdurchführung und Messdaten

Aus der Aufgabenstellung übernommen:

Am Eingang des RC-Tiefpasses wurde eine sinusförmige Wechselspannung mit konstanter Spannung  $U_E = 4 V_{pp}$  (Peak-Peak = PP) und variabler Frequenz angelegt. Sodann wurde die Ausgangsspannung  $U_A$  (PP-Werte) sowie die Phasenverschiebung  $\varphi$  in Funktion der Frequenz  $f$  mit Hilfe eines Kathodenstrahloszilloskopes (KO) gemessen. Der Widerstand  $R$  wurde zu  $R = 500 \Omega$  bestimmt. Dabei wurde untenstehendes Messprotokoll erstellt.

Messprotokoll “Tiefpass”			
Datum: 1. Okt. 1999			
Versuchsleiterin: Ruth Metzler			
$f(Hz)$	$U_a(V)$	$\varphi(^{\circ})$	$\varphi(rad)$
100	4.000	-3.24	-0.05655
500	3.800	-16.9	-0.295
1000	3.300	-31.3	-0.5463
1500	2.800	-43.6	-0.761
5000	1.140	-72.4	-1.264
10000	0.580	-82.5	-1.44
100000	0.075	-90.0	-1.571
1592	2.700	-44.0	-0.7679

**Anmerkung:** Das Messprotokoll wurde noch um eine Spalte mit der Phase in radians ergänzt, welche in QtiPlot für die Auswertung benutzt wird.

## 2 Funktionsgleichungen

Ausgangs- und Eingangsspannung verhalten sich wie folgt zueinander:

$$U_A = \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2 + R^2}} \cdot U_E \quad (53)$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega \cdot C)^2} + R^2}} \cdot U_E \quad (54)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}} \cdot U_E \quad (55)$$

Für die Phase zwischen Aus- und Eingangsspannung gilt folgender Zusammenhang:

$$\varphi = \arctan(-\omega RC) \quad (56)$$

Diese Gleichungen wurden in QtiPlot als folgende Funktionen definiert:

```
1/sqrt(1+(2*pi*x*C*R)^2)*Ue
atan(-2*pi*x*R*C)
```

## 3 Startwerte

Die Startwerte für  $U_E$ ,  $C$  und  $R$  wurden folgendermassen festgelegt:

- Der Widerstand wurde gemäss Aufgabenstellung auf  $R = 500 \Omega$  festgelegt und in den Einstellungen als *constant* markiert, damit QtiPlot nicht versucht, diesen Wert zu “optimieren”.
- Die Eingangsspannung beträgt gemäss den Angaben zur Versuchsdurchführung 4 V. Sie wurde ebenfalls als *constant* definiert.
- Der Startwert für die Kapazität  $C$  wurde mithilfe eines Wertepaares aus der Messwertta-  
belle gefunden.

Dazu wurde das Wertepaar  $U_A = 2.8 \text{ V}$  und  $f = 1500 \text{ Hz}$  in Gleichung 55 eingesetzt und die Gleichung nach  $C$  aufgelöst.

Also:  $2.8 \text{ V} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 1500 \text{ Hz} \cdot C \cdot 500 \Omega)^2}} \cdot 4 \text{ V}$  bzw.  $C = 0.216 \mu\text{F}$  (die quadratische Gleichung liefert natürlich auch den betragsgleichen negativen Wert für  $C$ , welcher als physikalisch unsinnig nicht weiter verwendet wird).

Es sei hier insbesondere noch erwähnt, dass sinnvollerweise ein Wertepaar aus dem mittleren Bereich des Scatter-Plots ausgewählt wird, da dort für eine Änderung der Frequenz eine viel grössere Änderung der Ausgangsspannung erreicht wird. Prinzipiell kann die Rechnung mit jedem beliebigen Wertepaar durchgeführt werden, jedoch ist bei kleinerem Hebel zwischen Frequenz und Ausgangsspannung die Genauigkeit des erhaltenen Startwertes für  $C$  geringer, und somit macht die Verwendung solcher Wertepaare nicht sehr viel Sinn solange man Wertepaare mit grösserem Hebel zur Verfügung hat (siehe hierzu auch Abbildung 9).

In QtiPlot wurden somit folgende Werte als Startwerte eingesetzt:

```
C = 2.16e-7
R = 500 (constant)
Ue = 4 (constant)
```

Für den Fit der Phase wurden ebenfalls diese Werte für  $C$  und  $R$  verwendet,  $U_E$  wurde dafür natürlich nicht benötigt, da es in der Formel für  $\varphi$  nicht vorkommt.

#### 4 QtiPlot

Der Fit für den Zusammenhang zwischen Ausgangsspannung  $U_A$  und Frequenz  $f$  ist in Abbildung 9 zu sehen. Der Fit für Phase  $\varphi$  und Frequenz  $f$  ist in Abbildung 10 dargestellt.

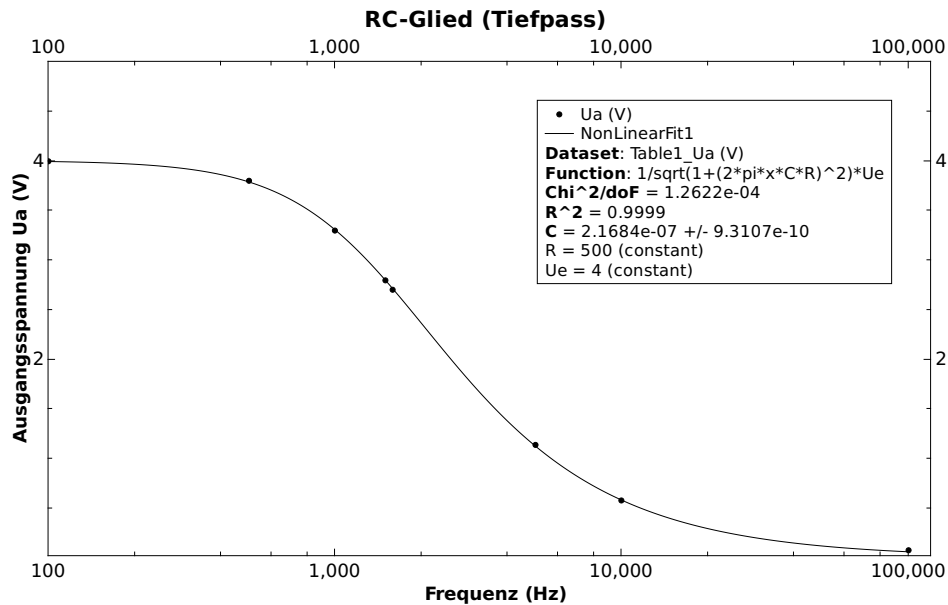


Abbildung 9: Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Der aus diesem Fit erhaltene Wert für die Kapazität beträgt:

$$C = (0.216\,840\,00 \pm 0.000\,931\,07) \mu\text{F}$$

Gerundet:

$$C = (216.8 \pm 0.9) \text{ nF}$$

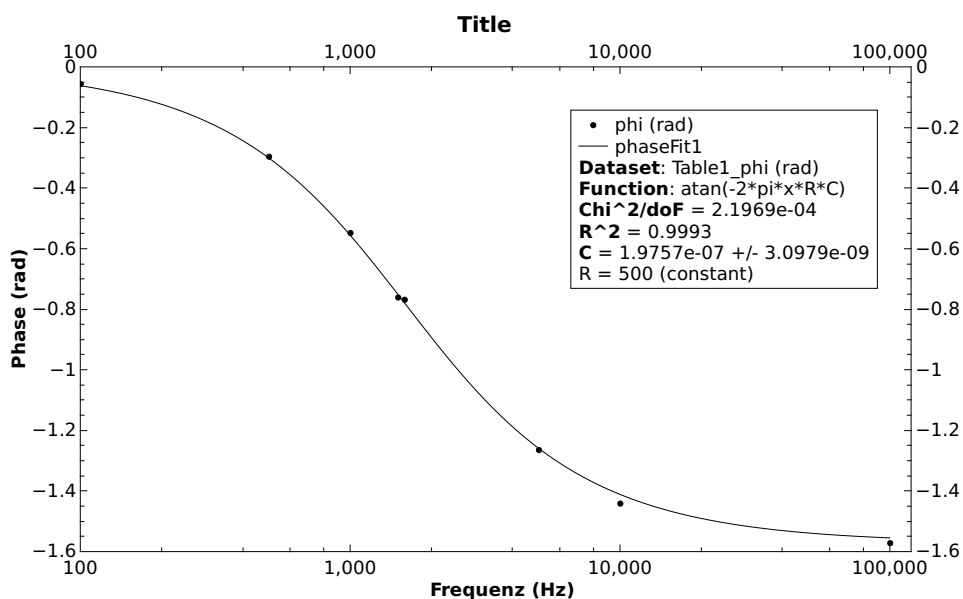


Abbildung 10: Phase  $\varphi$  zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

In diesem Fit wurde die Kapazität errechnet auf:

$$C = (0.197\,570\,0 \pm 0.003\,097\,9) \mu\text{F}$$

Gerundet:

$$C = (198 \pm 3) \text{ nF}$$

Mehr zu diesen Werten siehe im Abschnitt zur Diskussion der Ergebnisse.

## Literatur

- [1] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 641.
- [2] Speed of Sound. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://en.wikipedia.org/wiki/Speed\\_of\\_sound#Practical\\_formula\\_for\\_dry\\_air](https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound#Practical_formula_for_dry_air) [Stand: 18. Oktober 2015].
- [3] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 332.
- [4] Lineare Regression. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare\\_Regression](https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Regression) [Stand: 18. Oktober 2015].
- [5] Linear Regression Using the TI-89 Calculator. Flathead Valley Community College. [Online]. Verfügbar: <http://home2.fvcc.edu/~erady/Classes/Calc-F07/ti89regression.pdf> [Stand: 18. Oktober 2015].
- [6] Abklingkonstante. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: <https://de.wikipedia.org/wiki/Abklingkonstante> [Stand: 16. Oktober 2015].
- [7] Periode (Physik). Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Periode\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Periode_(Physik)) [Stand: 16. Oktober 2015].
- [8] Logarithmisches Dekrement. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmisches\\_Dekrement](https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmisches_Dekrement) [Stand: 16. Oktober 2015].