

Laborjournal

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

| DATUM DURCH- FÜHRUNG | VERSUCH | DATUM ABGABE | AKZEPTIERT, NOTE |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------|---------------------|
| 07.10.2015 | C – Auswertung mit Computer | 14.10.2015 | |
| 21.10.2015 | E11 – Skineffekt | 04.11.2015 | |
| 18.11.2015 | M6 – MTM-Tensor | 09.12.2015 | |

C – Computerversuch

20. Oktober 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Arbeitsgrundlagen | 1 |
| 1.1 | Typen von Messfehlern | 1 |
| 1.2 | Angabe der Genauigkeit von Messresultaten | 1 |
| 1.3 | Die Fehlerbestimmung für einzelne Grössen | 1 |
| 1.4 | Fehlerfortpflanzung und Auswertung | 4 |
| 2 | Durchführung | 5 |
| 3 | Auswertung | 6 |
| 3.1 | Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeit | 6 |
| 3.2 | Aufgabe 2: Eisengehalt | 9 |
| 3.3 | Aufgabe 3: Federkonstante | 11 |
| 3.4 | Aufgabe 4: Pendel | 14 |
| 3.5 | Aufgabe 5: RC-Glied (Tiefpass) | 17 |
| 4 | Resultate und Diskussion | 21 |
| 4.1 | Schallgeschwindigkeit | 21 |
| 4.2 | Eisengehalt | 23 |
| 4.3 | Federkonstante | 24 |
| 4.4 | Pendel | 25 |
| 4.5 | Tiefpass | 27 |
| | Anhang A Spreadsheet zu Aufgabe 1 | 29 |
| | Anhang B Spreadsheet zu Aufgabe 2 | 31 |
| | Anhang C Spreadsheet zu Aufgabe 3 | 32 |
| | Literaturverzeichnis | 33 |

Versionsgeschichte

20.10.2015: Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler*: Verursacht durch Versuchsanordnung, Versuchsumgebung, Messvorgang. Bewirken entweder eine systematische *Abweichung* des Messergebnisses vom eigentlichen Wert oder eine *Unsicherheit* der Messgrösse. Falls sie erkannt werden können sie meist korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler*: Immer vorhanden, auch bei einer von systematischen Fehlern freien Anordnung. Lassen sich durch mehrmalige Wiederholung derselben Messung beliebig verkleinern.

1.2 Angabe der Genauigkeit von Messresultaten

Bestimmung von Fehlern sind Abschätzungen. Daher ist es sinnlos, sie genauer als ca. 10%, also etwa 1 signifikante Ziffer, anzugeben.

Mittelwert der Messungen: $\bar{T} = 147.85 \text{ s}$

absoluter Fehler: $s_T = 4.9 \text{ s}$

relativer Fehler: $r_T = \frac{s_T}{\bar{T}} = 0.033 = 3.3\%$

Messresultat: $T = (148 \pm 5) \text{ s}$

unsinnig: $T = (147.8532 \pm 4.8700) \text{ s}$

Merke:

- Zufällige Fehler aus einer Messreihe werden mit s bezeichnet, auf Abschätzungen beruhende Unsicherheiten mit Δ .
- Üblicherweise werden relative Fehler in %, ‰ oder **ppm** (**p**arts **p**er **m**illion) angegeben.
- Eine Messgenauigkeit von 1 % gilt als gut, 1‰ ist sehr gut, 1ppm astronomisch gut.

1.3 Die Fehlerbestimmung für einzelne Grössen

1 Einmalige Messung einer Grösse

Fehler wird abgeschätzt. Erfahrungssache. Wird mit Δ bezeichnet (z.B. ΔT)

2 Wiederholte Messung einer Grösse

Seien N Messergebnisse x_1, x_2, \dots, x_N unter gleichen Bedingungen ermittelt worden. Dann wird der arithmetische Mittelwert dem wahren Wert x_0 umso näher kommen, je grösser N wird.

Arithmetischer Mittelwert aller Messergebnisse: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Fehler dieses Mittelwertes: $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}$

Ergebnis: $x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$

Merke:

- Messwerte, die extrem vom Mittelwert abweichen, werden als Fehlmessungen (Ausreisser) betrachtet und nicht in die Fehlerrechnung einbezogen.
- Wahrscheinlichkeitstheorie: wahrer Wert T_0 liegt mit Wahrscheinlichkeit 68 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm s_T$, mit Wahrscheinlichkeit 95 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm 2s_T$ und mit Wahrscheinlichkeit 99 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm 3s_T$

3 Mittelwertbildung mit Gewichten

Resultate mit unterschiedlichen Genauigkeiten:

$$x_1 = \overline{x_1} \pm s_{\overline{x_1}}$$

$$x_2 = \overline{x_2} \pm s_{\overline{x_2}}$$

...

$$x_n = \overline{x_n} \pm s_{\overline{x_n}}$$

Wahrscheinlichster Wert \bar{x} wird durch Bildung des gewichteten Mittelwerts erreicht:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\overline{x_i}} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\overline{x_i}}}$$

Mit den Gewichten: $g_{\overline{x_i}} = \frac{1}{s_{\overline{x_i}}^2}$

Fehler des gewichteten Mittelwerts: $s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\overline{x_i}}}}$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

4 Fehlertheorie

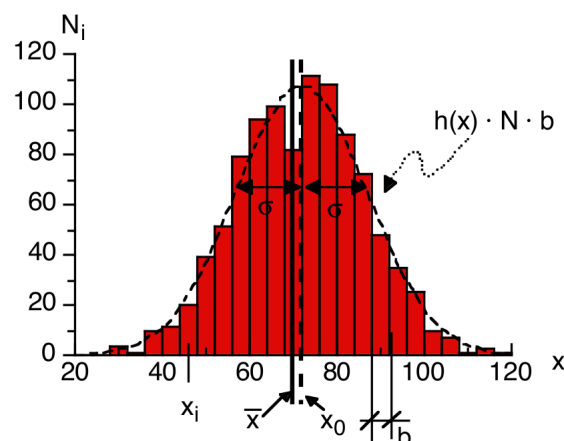


Abbildung 1: Histogramm mit Gauss'scher Normalverteilung. **Quelle:** Skript "Arbeitsunterlagen", p13.

Die in Abbildung 1 gezeigte Kurve $h(x)$ kann beschrieben werden mit:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

wobei

x_0 Erwartungswert (wahrer Wert)

σ Standardabweichung

Für steigendes N geht der gemessene Mittelwert \bar{x} gegen den wahren Wert x_0 .

$$\text{experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen σ . Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\bar{T}}$ des Mittelwertes stehen in folgender Beziehung:

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}}$$

Daraus folgt z.B., dass der Mittelwert einer Serie von 100 Messungen die zehnfache Genauigkeit der Einzelmessung aufweist.

5 Regression (“Fitten”)

$$\chi^2(a_0, a_1, \dots) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots)]^2}{\sigma_i^2} : \text{minimal}$$

wobei:

$f(x, a_0, a_1)$: gegebene Gesetzmässigkeit/Funktion

x_i, y_i : Messwertpaare

- *Nichtlineare Funktionen* f : Nichtlineare Regression. Gute Startwerte erforderlich für a_i .
- *Polynomiale Funktion* f : Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.
- *Verwendung einer Software zum Fitten*: x-Werte sollen als Stellgrösse (absolut genau) betrachtet werden, y-Werte als fehlerbehaftet (Messgrösse).

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots))^2}{N-m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter a_0, \dots, a_m bezeichnet. Die Parameter a_i müssen aus dem Fit herausgelesen werden.

1.4 Fehlerfortpflanzung und Auswertung

1 Indirekte Messung, das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Seien:

Resultatgrösse: $R = R(x, y, z, \dots)$
 Argumente (gemessen und/oder aus Literatur):

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

$$y = \bar{y} \pm s_{\bar{y}}$$

$$z = \bar{z} \pm s_{\bar{z}}$$

Gesucht: Mittelwert \bar{R} und mittlerer Fehler $s_{\bar{R}}$

$$\bar{R} = R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

Mittlerer, absoluter Fehler (statistischer Fehler): Bestimmen mittels dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots}$$

Wobei $\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}}$ für die partielle Ableitung der Funktion R nach der Variablen z , ausgewertet an der Stelle der Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ steht.

Der Fehler $\pm s_R$ bezeichnet die Intervallbreite, in welcher der wahre Wert mit 68 % Wahrscheinlichkeit liegt.

2 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ("Rezepte")

- *Addition und Subtraktion*: $s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$. Es werden die absoluten Fehler quadratisch addiert.
- *Multiplikation und Division*: $r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$. Es werden die relativen Fehler quadratisch addiert.
- *Potenzen*: $r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x$. Der relative Fehler der Messgrösse wird mit dem Exponenten multipliziert.

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

2 Durchführung

Die Daten des Versuches sind vom Dozenten zur Verfügung gestellt. Die verwendeten Tools beinhalten Taschenrechner und Tabellenkalkulation sowie QtiPlot.

Der \LaTeX -Quellcode dieses Dokuments steht auf github zur Verfügung, falls eine genauere Inspektion erwünscht ist [1].

3 Auswertung

Da der Punkt dieses Versuches die Fehlerrechnung selbst ist, beinhaltet dieses Kapitel ausnahmsweise auch die Fehlerrechnung. Üblicherweise ist diese jedoch in einem separaten Kapitel zu finden.

3.1 Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeit

1 Daten

- *Länge der Messstrecke:* $(2.561 \pm 0.003) \text{ m}$
- *Raumtemperatur:* $\vartheta = 23^\circ\text{C}$

Messprotokoll:

| Messung | Laufzeit t_i (ms) | Messung | Laufzeit t_i (ms) |
|---------|---------------------|---------|---------------------|
| 1 | 6.83 | 11 | 7.36 |
| 2 | 7.41 | 12 | 7.31 |
| 3 | 7.32 | 13 | 7.56 |
| 4 | 7.31 | 14 | 7.14 |
| 5 | 7.23 | 15 | 6.94 |
| 6 | 7.68 | 16 | 7.32 |
| 7 | 7.33 | 17 | 7.34 |
| 8 | 7.7 | 18 | 7.28 |
| 9 | 7.93 | 19 | 7.01 |
| 10 | 7.54 | 20 | 7.76 |

2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

Mittlere Laufzeit:

$$\bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = 7.37 \text{ ms}$$

Fehler des Mittelwertes:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.062 \text{ ms}$$

Standardabweichung:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.28 \text{ ms}$$

3 Wert und Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit

Es sind hier zwei Vergleichswerte aufgeführt. Der eine ist ein Tabellenwert aus Horst Kuchling's *Taschenbuch der Physik* [2]. Der andere Wert errechnet sich aus einer Formel für die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft, abhängig von der Temperatur. Die Formel kann sowohl auf Wikipedia [3] wie auch in Kuchling's Werk [4] gefunden werden.

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \vartheta) \text{ m s}^{-1} = (331.3 + 0.606 \cdot 23) \text{ m s}^{-1} = 345.24 \text{ m s}^{-1}$$

Der Tabellenwert aus Kuchling's Buch ist 344 m s^{-1} , also ziemlich nahe beim errechneten Wert.

Berechnung der mittleren Geschwindigkeit:

$$c = \frac{s}{t}$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = \frac{2.561 \text{ m}}{7.37 \text{ ms}} = 347.73 \text{ m s}^{-1}$$

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots}$$

In diesem Fall ist $R(x, y, z, \dots) := c(s, t) = \frac{s}{t}$. Es ergibt sich die Formel:

$$\begin{aligned} s_{c(s,t)} &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial c}{\partial s}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial c}{\partial t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} \frac{s}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial}{\partial t} \frac{s}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{1}{t}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{7.37 \text{ ms}} \cdot 3 \text{ mm}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(7.37 \text{ ms})^2} \cdot 0.062 \text{ ms}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{0.00737 \text{ s}} \cdot 0.003 \text{ m}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(0.00737 \text{ s})^2} \cdot 0.000062 \text{ s}\right)^2} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \\ &= 2.95 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat mittels Eintippen der obigen Zahlen in Taschenrechner)} \end{aligned}$$

Ausgerechnet mit vereinfachtem Rezept für Division:

$$\begin{aligned} s_{c(s,t)} &= \sqrt{\left(\frac{s_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{\bar{c}}\right)^2} \cdot \overline{c(s,t)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.003 \text{ m}}{2.561 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{0.06 \text{ ms}}{7.37 \text{ ms}}\right)^2} \cdot \overline{c(s,t)} \\ &= \sqrt{0.001^2 + 0.008^2} \cdot 347.7 \text{ m s}^{-1} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \end{aligned}$$

4 QtiPlot

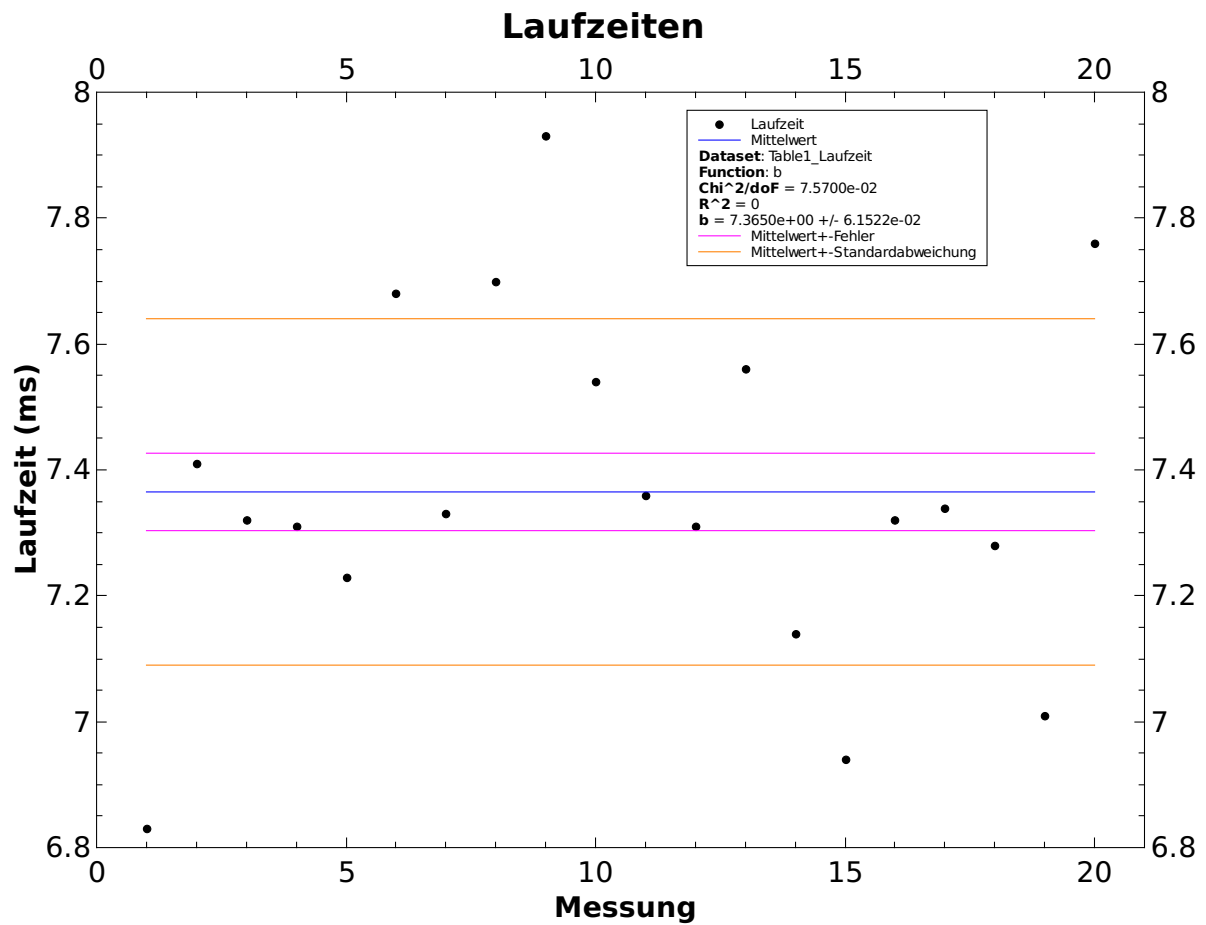


Abbildung 2: Messdaten und Auswertung zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

13 der 20 Messpunkte (also 65%) liegen innerhalb des Mittelwerts \pm die Standardabweichung, was ziemlich nahe beim theoretischen Wert von 68% ist. Mit einer grösseren Anzahl Messungen sollte sich dieser Wert noch besser an 68% annähern.

3.2 Aufgabe 2: Eisengehalt

1 Daten

| Messung | Eisengehalt (%) | absoluter Fehler (%) |
|---------|-----------------|----------------------|
| 1 | 20.3 | 1.2 |
| 2 | 21.9 | 1.3 |
| 3 | 21.1 | 1.1 |
| 4 | 19.6 | 0.8 |
| 5 | 19.9 | 1.3 |
| 6 | 18.0 | 1.3 |
| 7 | 19.4 | 1.0 |
| 8 | 22.2 | 2.0 |
| 9 | 21.6 | 0.8 |

2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert ergibt sich als:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 20.44 \%$$

Mit dem zugehörigen Fehler:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2}{9 \cdot 8}} = 0.46 \%$$

3 Gewichteter Mittelwert

Der gewichtete Mittelwert errechnet sich gemäss:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 g_{x_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^9 g_{x_i}} = \frac{156.24}{7.67} \% = 20.37 \%$$

Der zugehörige Fehler beträgt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^9 g_{x_i}} = 0.36 \%$$

4 QtiPlot

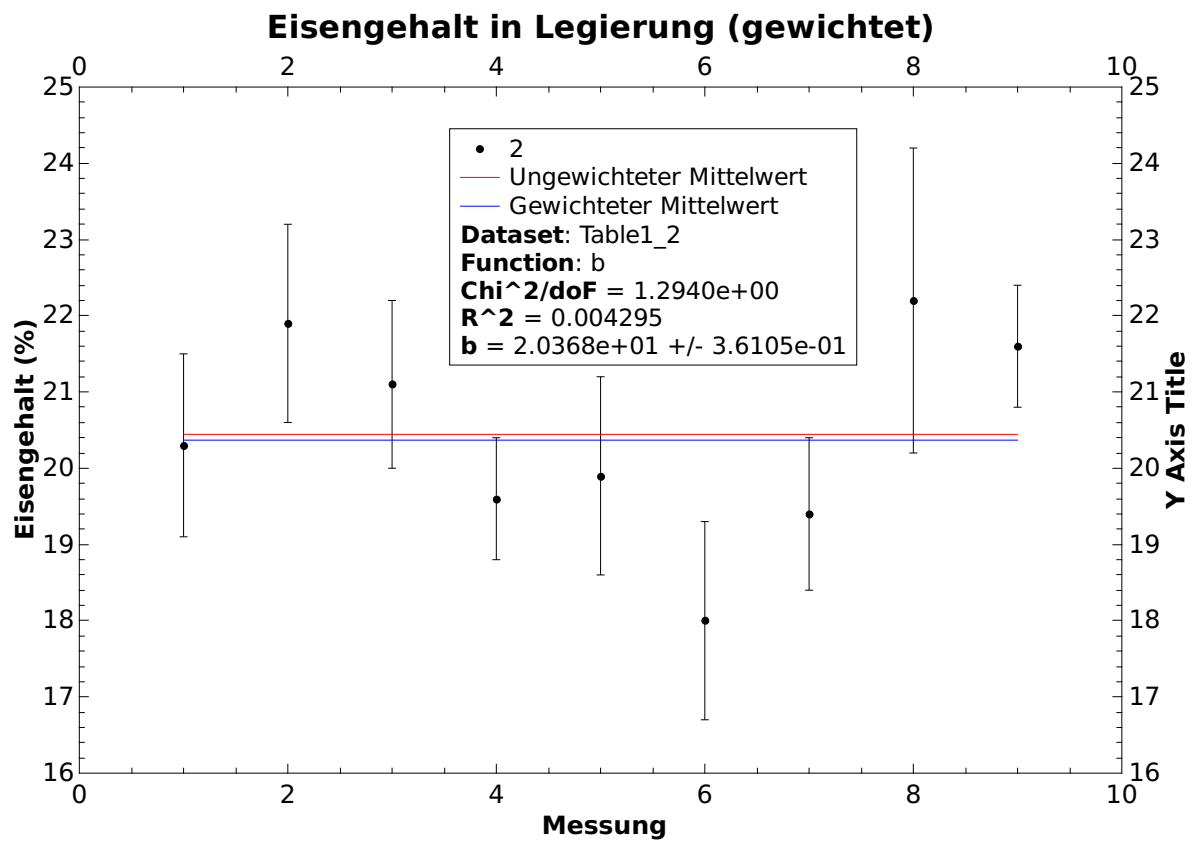


Abbildung 3: Messdaten mit Fehlerbalken, gewichteter und ungewichteter Mittelwert zum Versuch *Eisengehalt*

3.3 Aufgabe 3: Federkonstante

1 Daten

| F (N) | z (m) |
|-------|-------|
| 3.83 | 0.20 |
| 7.79 | 0.35 |
| 8.08 | 0.42 |
| 9.7 | 0.46 |
| 10.58 | 0.51 |
| 12.33 | 0.54 |
| 12.23 | 0.59 |
| 14.43 | 0.67 |
| 15.51 | 0.71 |
| 17.09 | 0.80 |

2 Rechnung mittels Tabellenkalkulation

Zum Vergleich mit dem Resultat des Taschenrechners und QtiPlot sei hier noch eine lineare Regression mit Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt gemäss der Anleitung im deutschen Wikipedia-Artikel zur linearen Regression [5].

| F (N) | z (m) | | | | | | $\hat{F}(N)$ |
|--------|-------|-----------------|-----------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|---------------|
| y_i | x_i | $y_i - \bar{y}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | \hat{y} |
| 3.83 | 0.20 | -7.33 | -0.32 | 2.38 | 53.68 | 0.11 | 3.82 |
| 7.79 | 0.35 | -3.37 | -0.17 | 0.59 | 11.34 | 0.03 | 7.21 |
| 8.08 | 0.42 | -3.08 | -0.10 | 0.32 | 9.47 | 0.01 | 8.79 |
| 9.70 | 0.46 | -1.46 | -0.06 | 0.09 | 2.12 | 0.00 | 9.69 |
| 10.58 | 0.51 | -0.58 | -0.01 | 0.01 | 0.33 | 0.00 | 10.82 |
| 12.33 | 0.54 | 1.17 | 0.02 | 0.02 | 1.38 | 0.00 | 11.50 |
| 12.23 | 0.59 | 1.07 | 0.07 | 0.07 | 1.15 | 0.00 | 12.62 |
| 14.43 | 0.67 | 3.27 | 0.15 | 0.47 | 10.71 | 0.02 | 14.43 |
| 15.51 | 0.71 | 4.35 | 0.19 | 0.81 | 18.95 | 0.03 | 15.33 |
| 17.09 | 0.80 | 5.93 | 0.28 | 1.63 | 35.20 | 0.08 | 17.36 |
| 111.57 | 5.25 | 0.00 | 0.00 | 6.40 | 144.33 | 0.29 | Summen |
| 11.16 | 0.52 | | | | | | Durchschnitte |

Die Steigung der Regressionsgeraden errechnet sich als:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{144.33}{6.4} \text{ N m}^{-1} = 22.57 \text{ N m}^{-1}$$

Den Achsenabschnitt F_0 erhält man aus:

$$F_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} = 11.16 \text{ N} - 22.57 \text{ N m}^{-1} \cdot 0.52 \text{ m} = -0.69 \text{ N}$$

Die empirische Korrelation beträgt:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6.40}{\sqrt{144.33 \cdot 0.29}} = 0.99364$$

Das Bestimmtheitsmass betragt:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0.98732$$

3 Taschenrechner

Ergebnisse ermittelt mittels TI-89 und Anleitung aus Quelle [6] (um Einheiten ergänzt).

$$F = k \cdot z + F_0$$

$$k = 22.280\,962\,\text{N m}^{-1}$$

$$F_0 = -0.540\,505\,\text{N}$$

$$\text{corr} = 0.993638$$

$$R^2 = 0.987316$$

4 QtiPlot

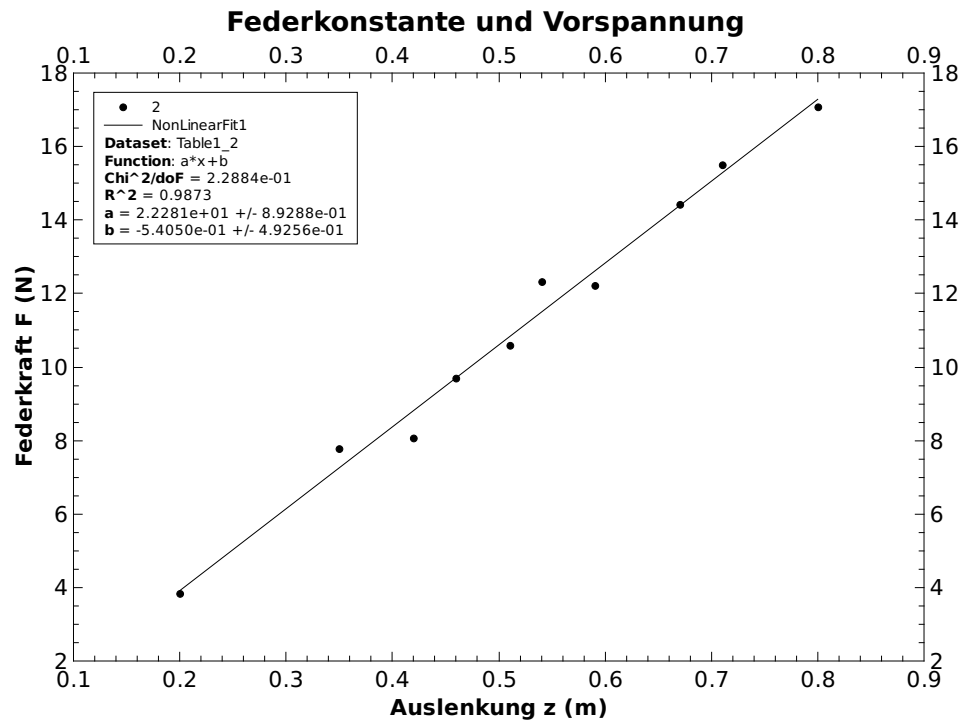


Abbildung 4: Regressionsgerade mit Messpunkten zu Aufgabe *Federkonstante*

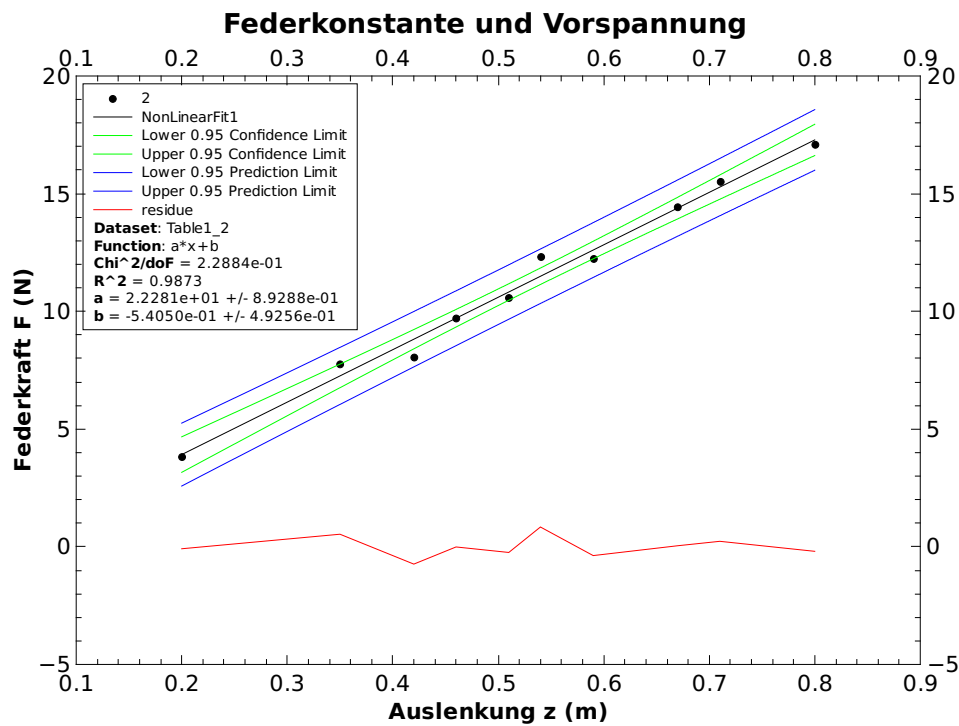


Abbildung 5: Regressionsgerade mit Messpunkten, 95% Confidence Band, Prediction Band und Residuals zu Aufgabe *Federkonstante*

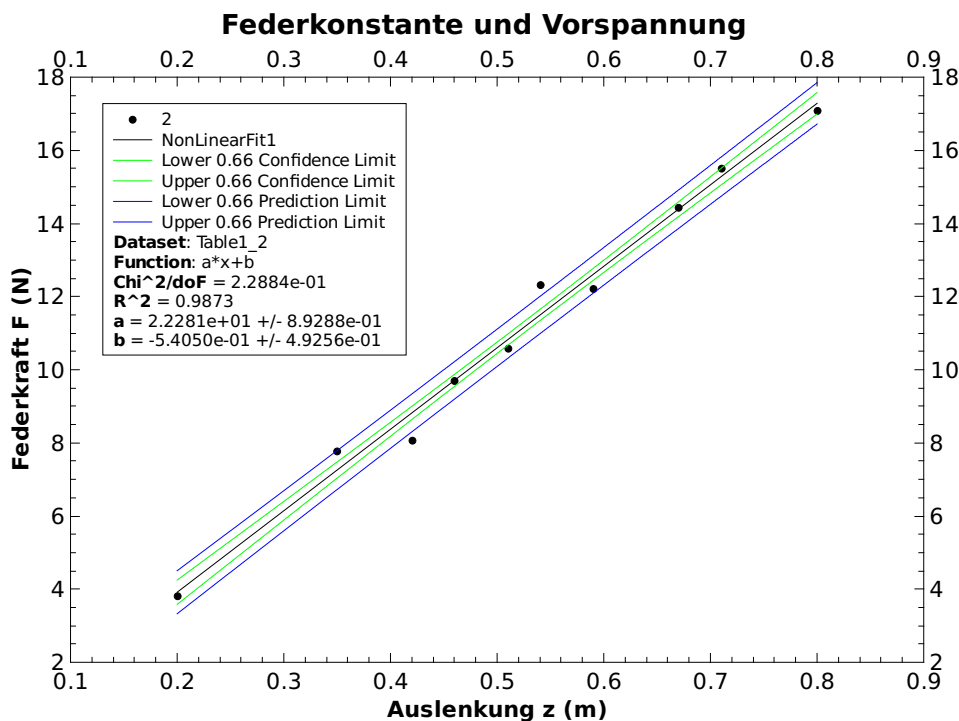


Abbildung 6: Regressionsgerade mit Messpunkten, 66% Confidence Band und Prediction Band zu Aufgabe *Federkonstante*

3.4 Aufgabe 4: Pendel

1 Theorie

Die gedämpfte Schwingung eines Pendels kann folgendermassen beschrieben werden:

$$y(t) = A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \quad (1)$$

Nun soll eine Funktion mittels QtiPlot auf die unten stehenden Messdaten gefittet werden, um die Parameter dieser Gleichung zu bestimmen.

Dabei wird von QtiPlot eine nichtlineare Regression ausgeführt. Es muss also das Minimum der folgenden Funktion gefunden werden:

$$\chi^2(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N)]^2}{\sigma_i} \quad (2)$$

σ_i sind dabei die Fehler der einzelnen Messungen y_i .

Es gilt nun, geeignete Startwerte für die nichtlineare Regression zu finden. Ansonsten wird QtiPlot entweder kein Resultat erhalten (Algorithmus konvergiert nicht) oder ein Nebenminimum der χ^2 -Funktion finden, welches nicht die bestmögliche Annäherung an die gesuchte Gesetzmässigkeit ist.

2 Messdaten

(von Aufgabenblatt kopiert)

| $t(s)$ | $y(m)$ | $t(s)$ | $y(m)$ | $t(s)$ | $y(m)$ | $t(s)$ | $y(m)$ | $t(s)$ | $y(m)$ | $t(m)$ | $y(m)$ |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | -0.418 | 8.0 | 0.594 | 15.5 | -0.577 | 23.0 | 0.417 | 30.5 | -0.132 | 38.0 | 0.152 |
| 1.0 | -0.07 | 8.5 | 0.632 | 16.0 | -0.48 | 23.5 | 0.423 | 31.0 | -0.123 | 38.5 | 0.058 |
| 1.5 | 0.082 | 9.0 | 0.435 | 16.5 | -0.414 | 24.0 | 0.45 | 31.5 | -0.075 | 39.0 | 0.193 |
| 2.0 | 0.19 | 9.5 | 0.366 | 17.0 | -0.46 | 24.5 | 0.389 | 32.0 | -0.373 | 39.5 | 0.070 |
| 2.5 | 0.494 | 10 | 0.123 | 17.5 | -0.187 | 25.0 | 0.488 | 32.5 | -0.146 | 40.0 | 0.235 |
| 3.0 | 0.566 | 10.5 | 0.064 | 18.0 | -0.171 | 25.5 | 0.317 | 33.0 | -0.176 | 40.5 | 0.084 |
| 3.5 | 0.753 | 11.0 | -0.084 | 18.5 | -0.03 | 26.0 | 0.344 | 33.5 | -0.193 | 41.0 | 0.248 |
| 4.0 | 0.913 | 11.5 | -0.152 | 19.0 | -0.072 | 26.5 | 0.363 | 34.0 | -0.138 | 41.5 | 0.319 |
| 4.5 | 0.869 | 12.0 | -0.299 | 19.5 | -0.011 | 27.0 | 0.218 | 34.5 | -0.259 | 42.0 | 0.052 |
| 5.0 | 0.977 | 12.5 | -0.506 | 20.0 | 0.082 | 27.5 | 0.084 | 35.0 | -0.078 | 42.5 | 0.159 |
| 5.5 | 0.956 | 13.0 | -0.479 | 20.5 | 0.109 | 28.0 | 0.113 | 35.5 | 0.018 | 43.0 | 0.134 |
| 6.0 | 0.996 | 13.5 | -0.576 | 21.0 | 0.25 | 28.5 | 0.166 | 36.0 | -0.059 | 43.5 | 0.079 |
| 6.5 | 0.971 | 14.0 | -0.662 | 21.5 | 0.404 | 29.0 | 0.02 | 36.5 | 0.056 | 44.0 | 0.097 |
| 7.0 | 0.827 | 14.5 | -0.498 | 22.0 | 0.272 | 29.5 | -0.032 | 37.0 | 0.004 | 44.5 | 0.162 |
| 7.5 | 0.784 | 15.0 | -0.654 | 22.5 | 0.317 | 30.0 | 0.011 | 37.5 | 0.042 | 45.0 | 0.030 |

3 QtiPlot

Die Pendelgleichung wurde in QtiPlot folgendermassen definiert:

$$A \cdot \exp(-G \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x - d) + y_0$$

Die Startwerte wurden mit folgender Methodik bestimmt:

- $A = 1$: Anhand des Funktionswertes des ersten Ausschlages des Pendels abgeschätzt.
- $\Gamma = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \cdot \frac{1}{T} = \ln\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot \frac{1}{20} = 0.035$: Die Abklingkonstante Γ wurde abgeschätzt mittels des logarithmischen Dekrements und der Periode. Dabei ist A_1 die Amplitude des ersten Schwingvorgangs, A_2 die Amplitude des 2. Schwingvorgangs und T die Periode der unterliegenden Sinus-Schwingung. Natürlich sind all diese Werte eher grob aus dem Scatter-Plot abgelesen und nicht hochpräzise (was aber für diesen Schritt auch nicht notwendig ist). Genaueres kann in den Quellen [7], [8] und [9] gefunden werden.
- Die Periode der Sinus-Schwingung wird aus den Peaks der zwei ersten Schwingungen auf ungefähr 20 Sekunden geschätzt, womit man für die Frequenz $\frac{1}{20\text{s}} = 0.05\text{ Hz}$ erhält.
- Der Nulldurchgang der ersten Schwingung liegt ungefähr bei einer Sekunde, wie man auf dem Scatter-Plot erkennen kann. Dies entspricht der Forderung, dass $\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} - \delta) = 0$ ist, bzw. weil $\sin(0) = 0$, muss gelten: $2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} - \delta = 0$. Aufgelöst ergibt dies: $\delta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot 1\text{s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20\text{s}} \cdot 1\text{s} = 0.31$.
- Der Offset y_0 wird vorerst auf null gesetzt.

Somit sind die Startwerte bestimmt und werden wie folgt in QtiPlot eingesetzt:

```
A = 1
G = 0.035
f = 0.05
d = 0.31
y0 = 0
```

Dies liefert:

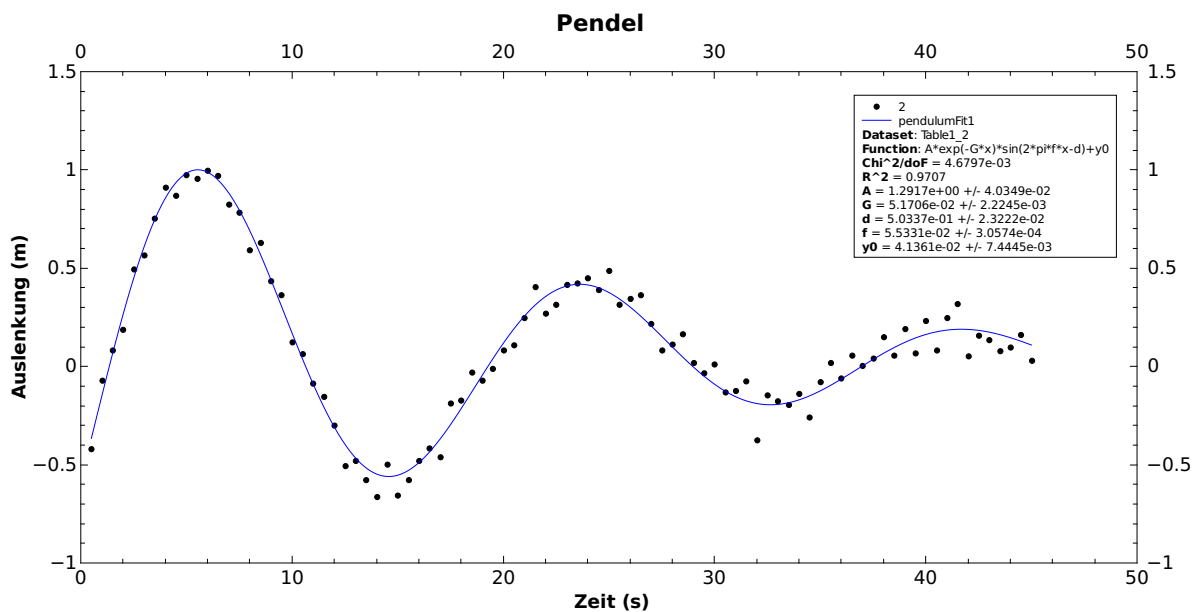


Abbildung 7: Fit zur Aufgabe *Pendel*, mit den gesuchten Gleichungsparametern (siehe Legende)

Die von QtiPlot bestimmten Gleichungsparameter sind gemäss Legende aus Abbildung 7 somit (mit Einheiten ergänzt):

$$\begin{aligned} A &= (1.291\,700 \pm 0.040\,349) \text{ m} \\ \Gamma &= (-0.051\,706\,0 \pm 0.002\,224\,5) \text{ s}^{-1} \\ f &= (0.053\,310\,00 \pm 0.000\,305\,74) \text{ Hz} \\ \delta &= 0.503\,370 \pm 0.023\,222 \\ y_0 &= (0.041\,361\,0 \pm 0.007\,444\,5) \text{ m} \end{aligned}$$

Sinnvoll gerundet und mit Einheiten in Gleichung 1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \\ &= (1.29 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \exp\left((-0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \sin(2\pi \cdot (0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz} \cdot t - 0.50 \pm 0.02) \\ &\quad + (0.041 \pm 0.007) \text{ m} \end{aligned}$$

3.5 Aufgabe 5: RC-Glied (Tiefpass)

Es soll das Verhalten eines Tiefpasses untersucht werden:

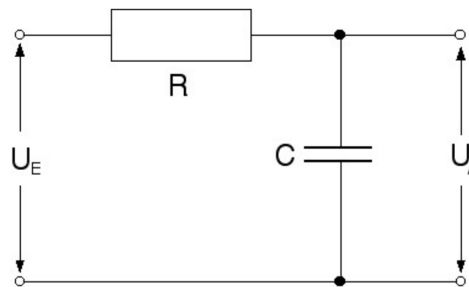


Abbildung 8: Tiefpass. Quelle: Versuchsunterlagen “Auswertung mit Computer”, p.6

1 Versuchsdurchführung und Messdaten

Aus der Aufgabenstellung übernommen:

Am Eingang des RC-Tiefpasses wurde eine sinusförmige Wechselspannung mit konstanter Spannung $U_E = 4 V_{pp}$ (Peak-Peak = PP) und variabler Frequenz angelegt. Sodann wurde die Ausgangsspannung U_A (PP-Werte) sowie die Phasenverschiebung φ in Funktion der Frequenz f mit Hilfe eines Kathodenstrahloszilloskopes (KO) gemessen. Der Widerstand R wurde zu $R = 500 \Omega$ bestimmt. Dabei wurde untenstehendes Messprotokoll erstellt.

| Messprotokoll “Tiefpass” | | | |
|--------------------------------|----------|---------------------|----------------|
| Datum: 1. Okt. 1999 | | | |
| Versuchsleiterin: Ruth Metzler | | | |
| $f(Hz)$ | $U_a(V)$ | $\varphi(^{\circ})$ | $\varphi(rad)$ |
| 100 | 4.000 | -3.24 | -0.05655 |
| 500 | 3.800 | -16.9 | -0.295 |
| 1000 | 3.300 | -31.3 | -0.5463 |
| 1500 | 2.800 | -43.6 | -0.761 |
| 5000 | 1.140 | -72.4 | -1.264 |
| 10000 | 0.580 | -82.5 | -1.44 |
| 100000 | 0.075 | -90.0 | -1.571 |
| 1592 | 2.700 | -44.0 | -0.7679 |

Anmerkung: Das Messprotokoll wurde noch um eine Spalte mit der Phase in radians ergänzt, welche in QtiPlot für die Auswertung benutzt wird.

2 Funktionsgleichungen

Ausgangs- und Eingangsspannung verhalten sich wie folgt zueinander:

$$U_A = \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2 + R^2}} \cdot U_E \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega \cdot C)^2} + R^2}} \cdot U_E \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}} \cdot U_E \quad (5)$$

Für die Phase zwischen Aus- und Eingangsspannung gilt folgender Zusammenhang:

$$\varphi = \arctan(-\omega RC) \quad (6)$$

Diese Gleichungen wurden in QtiPlot als folgende Funktionen definiert:

```
1/sqrt(1+(2*pi*x*C*R)^2)*Ue
atan(-2*pi*x*R*C)
```

3 QtiPlot

Die Startwerte für U_E , C und R wurden folgendermassen festgelegt:

- Der Widerstand wurde gemäss Aufgabenstellung auf $R = 500 \Omega$ fixiert und in den Einstellungen als *constant* markiert, damit QtiPlot nicht versucht, diesen Wert zu “optimieren”.
- Die Eingangsspannung beträgt gemäss den Angaben zur Versuchsdurchführung 4 V. Sie wurde ebenfalls als *constant* definiert.
- Der Startwert für die Kapazität C wurde mithilfe eines Wertepaares aus der Messwerttafel gefunden.

Dazu wurde das Wertepaar $U_A = 2.8 \text{ V}$ und $f = 1500 \text{ Hz}$ in Gleichung 5 eingesetzt und die Gleichung nach C aufgelöst.

Also: $2.8 \text{ V} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 1500 \text{ Hz} \cdot C \cdot 500 \Omega)^2}} \cdot 4 \text{ V}$ bzw. $C = 0.216 \mu\text{F}$ (die quadratische Gleichung liefert natürlich auch den betragsgleichen negativen Wert für C , welcher als physikalisch unsinnig nicht weiter verwendet wird).

Es sei hier insbesondere noch erwähnt, dass sinnvollerweise ein Wertepaar aus dem mittleren Bereich des Scatter-Plots ausgewählt wird, da dort für eine Änderung der Frequenz eine viel grössere Änderung der Ausgangsspannung erreicht wird. Prinzipiell kann die Rechnung mit jedem beliebigen Wertepaar durchgeführt werden, jedoch ist bei kleinerem Hebel zwischen Frequenz und Ausgangsspannung die Genauigkeit des erhaltenen Startwertes für C geringer, und somit macht die Verwendung solcher Wertepaare nicht sehr viel Sinn solange man Wertepaare mit grösserem Hebel zur Verfügung hat (siehe hierzu auch Abbildung 9).

In QtiPlot wurden somit folgende Werte als Startwerte eingesetzt:

```
C = 2.16e-7
R = 500 (constant)
Ue = 4 (constant)
```

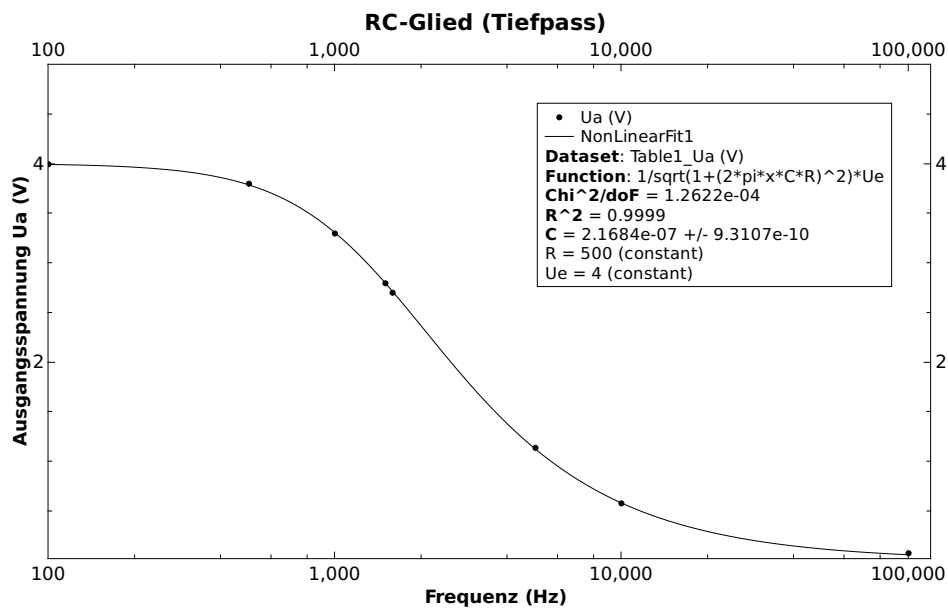


Abbildung 9: Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Für den Fit der Phase wurden ebenfalls diese Werte für C und R verwendet, U_E wurde dafür natürlich nicht benötigt, da es in der Formel für φ nicht vorkommt.

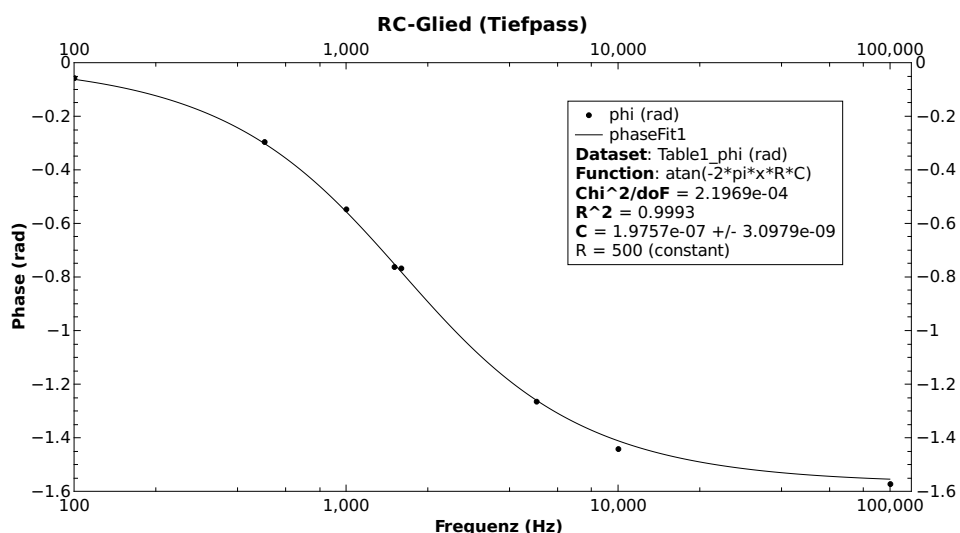
Der Fit für den Zusammenhang zwischen Ausgangsspannung U_A und Frequenz f ist in Abbildung 9 zu sehen. Der Fit für Phase φ und Frequenz f ist in Abbildung 10 dargestellt.

Der aus diesem Fit erhaltene Wert für die Kapazität beträgt:

$$C = (0.216\,840\,00 \pm 0.000\,931\,07) \mu\text{F}$$

Gerundet:

$$\underline{\underline{C = (216.8 \pm 0.9) \text{ nF}}}$$

Abbildung 10: Phase φ zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

In diesem Fit wurde die Kapazität errechnet auf:

$$\underline{\underline{C = (0.197\,570\,0 \pm 0.003\,097\,9) \, \mu\text{F}}}$$

Gerundet:

$$C = (198 \pm 3) \, \text{nF}$$

Mehr zu diesen Werten ist im Abschnitt 4.5 ab Seite 27 zu finden.

4 Resultate und Diskussion

Allgemeine Anmerkung: Nicht alle benutzten Verfahren liefern Resultate mit Unsicherheiten. In den graphischen Vergleichen der Ergebnisse (siehe Abbildungen 11, 12, 13, 14, 15 und 16) haben diese Resultate sowie allfällige Startwerte deshalb keine Unsicherheiten eingetragen. Dies bedeutet natürlich nicht, dass diese Resultate genauer oder verlässlicher sind (im Gegenteil: Da man keine Angaben über die Unsicherheiten hat, sind diese Resultate eher mit grösserer Vorsicht zu geniessen).

4.1 Schallgeschwindigkeit

Die Diskussion wird sich hier v.a. um zwei Aspekte drehen:

- Den Vergleich zwischen Literaturwerten und den Ergebnissen aus den Messdaten,
- sowie den Vergleich der Ergebnisse der “vollen” Fehlerfortpflanzungsrechnung und der vereinfachten Variante.

Zur Rekapitulation nochmals die Ergebnisse zusammengefasst:

- Literaturwert, Tabelle: 344 m s^{-1}
- Formel:

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \vartheta) \text{ m s}^{-1} = 345.24 \text{ m s}^{-1} \approx 345 \text{ m s}^{-1} \quad (7)$$

- Mittlere Geschwindigkeit aus Messresultaten:

$$\bar{c} = 347.73 \text{ m s}^{-1}$$

- Unsicherheit, volles Gauss’sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{\overline{c(s,t)}} = 2.93 \text{ m s}^{-1}$$

- Unsicherheit, Kurzformel für Fehlerfortpflanzung in Multiplikation/Division:

$$s_{\overline{c(s,t)}} = 2.93 \text{ m s}^{-1}$$

Sinnvoll gerundet erhalten wir aus den Messergebnissen also:

$$\underline{\underline{c_{luft} = \overline{c_{luft}} \pm s_{\overline{c_{luft}}} = (348 \pm 3) \text{ m s}^{-1}}} \quad (8)$$

Diese Ergebnisse sind in Abbildung 11 graphisch dargestellt.

Es stechen dabei folgende Punkte heraus:

- Der Tabellenwert stimmt relativ genau mit dem aus Formel 7 errechneten Wert überein. Da beide Verfahren aus der Fachliteratur stammen, ist dies meines Erachtens auch zu erwarten.
- Berechnet man die Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit mittels der Faustformel $s_{\overline{c(s,t)}} = \sqrt{\left(\frac{s_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{c}\right)^2} \cdot \overline{c(s,t)}$, ist die Differenz zum mit dem vollen Gauss’schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelten Werte in diesem Falle bedeutungslos (siehe auch Anhang A). Die Faustformel ist also hier hinreichend genau. Da die Faustformel im Allgemeinen bei simplen physikalischen Zusammenhängen akzeptable Ergebnisse liefert, ist dies auch nicht weiter erstaunlich ($c = \frac{s}{t}$ gehört sicherlich zu dieser Kategorie von Gesetzmässigkeiten).

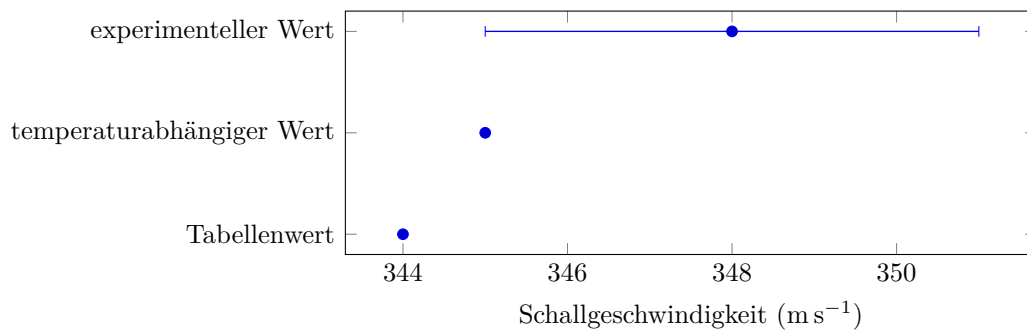


Abbildung 11: graphische Darstellung der Ergebnisse zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

- Wie bereits erwähnt und in Abbildung 2 auf Seite 8 ersichtlich, liegen 13 der 20 Messpunkte innerhalb des Intervalls Mittelwert \pm die Standardabweichung. Dies entspricht einem Anteil von 65%, was ziemlich nahe beim theoretischen Wert von 68% liegt. Würde man die Anzahl (korrekt durchgeführter) Messungen erhöhen, würden sich diese beiden Werte weiter annähern.
- Bezieht man die Unsicherheit der aus den Messresultaten bestimmten Schallgeschwindigkeit mit ein, ist die untere Grenze des experimentellen Wertes (345 m s^{-1}) lediglich 1 m s^{-1} höher als der Tabellenwert von 344 m s^{-1} , und der mittels Formel 7 bestimmte Wert liegt sogar innerhalb des Unsicherheitsbereichs. Für die verbleibende Differenz vermute ich folgende Gründe:
 - Die Werte aus der Fachliteratur haben keine Unsicherheit angegeben. Es ist also durchaus möglich, dass bei Berücksichtigung dieser Unsicherheit die Intervalle der Literaturwerte inklusive Unsicherheit mit den hier bestimmten experimentellen Ergebnissen inklusive Unsicherheiten überlappen.
 - Die Anzahl Messpunkte des Tabellenwertes aus der Fachliteratur ist vermutlich höher.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise mit teureren (genaueren) Messapparaten bestimmt als die hier vorliegenden Daten.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise unter besser kontrollierten Bedingungen gemessen als die hier vorliegenden Daten.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise mit anderen Methoden bestimmt als der hier ausgeführte Versuch.

Alles in allem ist das Resultat aus diesem Versuch meiner Ansicht nach ziemlich gut, die Resultate plausibel und von zufriedenstellender Qualität.

4.2 Eisengehalt

Die erhaltenen Werte tabellarisch und graphisch (siehe Abbildung 12) zusammengefasst:

| | ungewichtet | gewichtet | QtiPlot, gewichtet |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Mittelwert | 20.44 % | 20.37 % | 20.37 % |
| Unsicherheit | 0.46 % | 0.36 % | 0.36 % |
| Gerundet | $(20.4 \pm 0.5) \%$ | $(20.4 \pm 0.4) \%$ | $(20.4 \pm 0.4) \%$ |

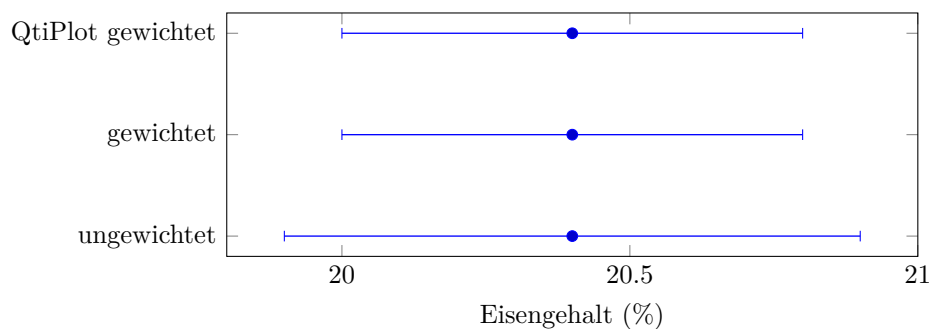


Abbildung 12: graphische Darstellung der Ergebnisse zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

Der Unterschied zwischen gewichteten Resultaten und ungewichteten Resultaten ist hier beim Mittelwert nicht besonders gross (Abweichungen im Promillebereich: $1 - \frac{20.37}{20.44} \approx 0.003$ bzw. $1 - \frac{20.44}{20.36} \approx -0.003$). Die relative Abweichung bei der Unsicherheit ist hingegen grösser ($1 - \frac{0.36}{0.46} \approx 0.22$ bzw. $1 - \frac{0.46}{0.36} \approx -0.28$). Jedoch ist diese Abweichung im Vergleich zum Mittelwert immer noch nicht besonders hoch.

Ob diese Abweichungen von Bedeutung sind, hängt schlussendlich natürlich davon ab, wofür diese Resultate verwendet werden sollen.

Es ist ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit den von QtiPlot bestimmten Werten festzustellen (siehe Abbildungen 3 auf Seite 10 und 12).

4.3 Federkonstante

Die Resultate tabellarisch und graphisch zusammengefasst:

| | Handrechnung/Spreadsheet | TI-89 | QtiPlot |
|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| Federkonstante k | 22.6 N m^{-1} | 22.3 N m^{-1} | $(22.3 \pm 0.9) \text{ N m}^{-1}$ |
| Vorspannung F_0 | -0.7 N | -0.5 N | $(-0.5 \pm 0.5) \text{ N}$ |
| empirische Korrelation r_{xy} | 0.99364 | 0.993638 | k.A. |
| Bestimmtheitsmass R^2 | 0.98732 | 0.987316 | 0.9873 |

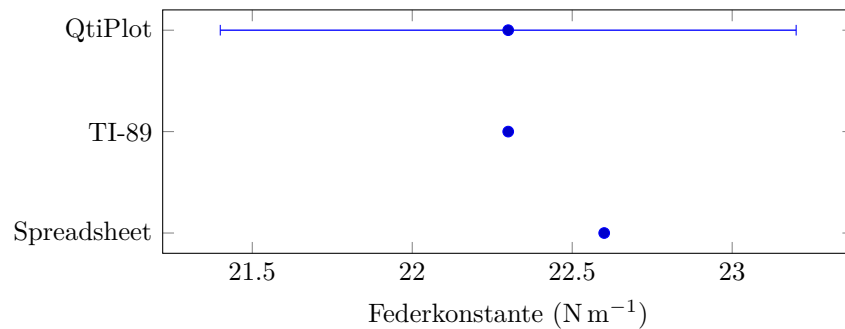


Abbildung 13: Graphische Darstellung der Federkonstante zum Versuch *Federkonstante*. Auch wenn die Methode mittels Spreadsheet und TI-89 keine Unsicherheiten liefern, liegen sie innerhalb des Unsicherheitsbereiches des Resultats von QtiPlot, was ich also zufriedenstellend beurteile.

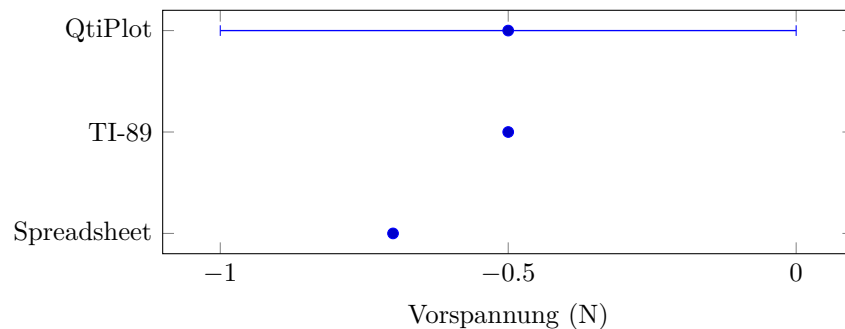


Abbildung 14: Graphische Darstellung der Vorspannung zum Versuch *Federkonstante*. Auch hier liegen die Werte des TI-89 und des Spreadsheets innerhalb des Unsicherheitsbereichs des Resultats von QtiPlot.

Vergleicht man die Ergebnisse von QtiPlot mit den Ergebnissen des Taschenrechners, kann man eine sehr gute Übereinstimmung feststellen. Ich führe dies darauf zurück, dass vermutlich sowohl QtiPlot wie auch der TI-89 die gleichen Algorithmen zur Bestimmung der Regressionsgeraden verwenden. Konsequenterweise ist es naheliegend, dass sie aus den gleichen Daten auf das gleiche Ergebnis kommen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen QtiPlot und dem Taschenrechner ist jedoch, dass der TI-89 keine Unsicherheiten ausgibt.

Zur Ergänzung und aus Neugier habe ich noch eine Berechnung von Hand bzw. mit Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt (siehe auch Anhang C).

Da dieses Verfahren (zumindest soweit ich herausfinden kann) nicht der gleiche Algorithmus ist, wie er von QtiPlot und dem TI-89 verwendet wird, sind die damit erhaltenen Resultate auch nicht ganz identisch. Sie sind jedoch genügend nahe, dass ich sie als plausibel beurteile und damit zufrieden bin.

4.4 Pendel

Zur Rekapitulation hier nochmals die Pendelgleichung mit gerundeten Parametern:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \\ &= (1.29 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \exp\left((-0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \sin(2\pi \cdot (0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz} \cdot t - 0.50 \pm 0.02) \\ &\quad + (0.041 \pm 0.007) \text{ m} \end{aligned}$$

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe liegt darin, gute Startwerte für die nichtlineare Regression in QtiPlot zu finden. Die dazu benutzte Verfahrensweise ist ausführlich in Abschnitt 3.4 erklärt.

Interessant ist dabei, dass die mit eigentlich ziemlich groben Methoden ermittelten Startwerte gar nicht so weit von den anschliessend mittels Iteration von QtiPlot bestimmten Werten entfernt liegen. Eine rasche Analyse eines Scatter-Plots mittels Augenmass und einiger kurzer Rechnungen kann also je nach Datensatz bereits ziemlich starke Aussagen über die gesuchte Gesetzmässigkeit machen.

Dies kann insbesondere bei der Beurteilung der Plausibilität der Resultate, die von einem Computerprogramm geliefert werden, hilfreich oder sogar notwendig sein. Im vorliegenden Falle macht mir das Resultat einen zufriedenstellenden Eindruck.

| | Startwert | Endwert |
|-----------------------------|------------------------|------------------------------------|
| Amplitude A | 1 m | $(1.29 \pm 0.04) \text{ m}$ |
| Dämpfung Γ | 0.035 s^{-1} | $(0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}$ |
| Frequenz f | 0.05 Hz | $(0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz}$ |
| Phasenverschiebung δ | 0.31 | 0.50 ± 0.02 |
| Anfangsauslenkung y_0 | 0 m | $(0.041 \pm 0.007) \text{ m}$ |

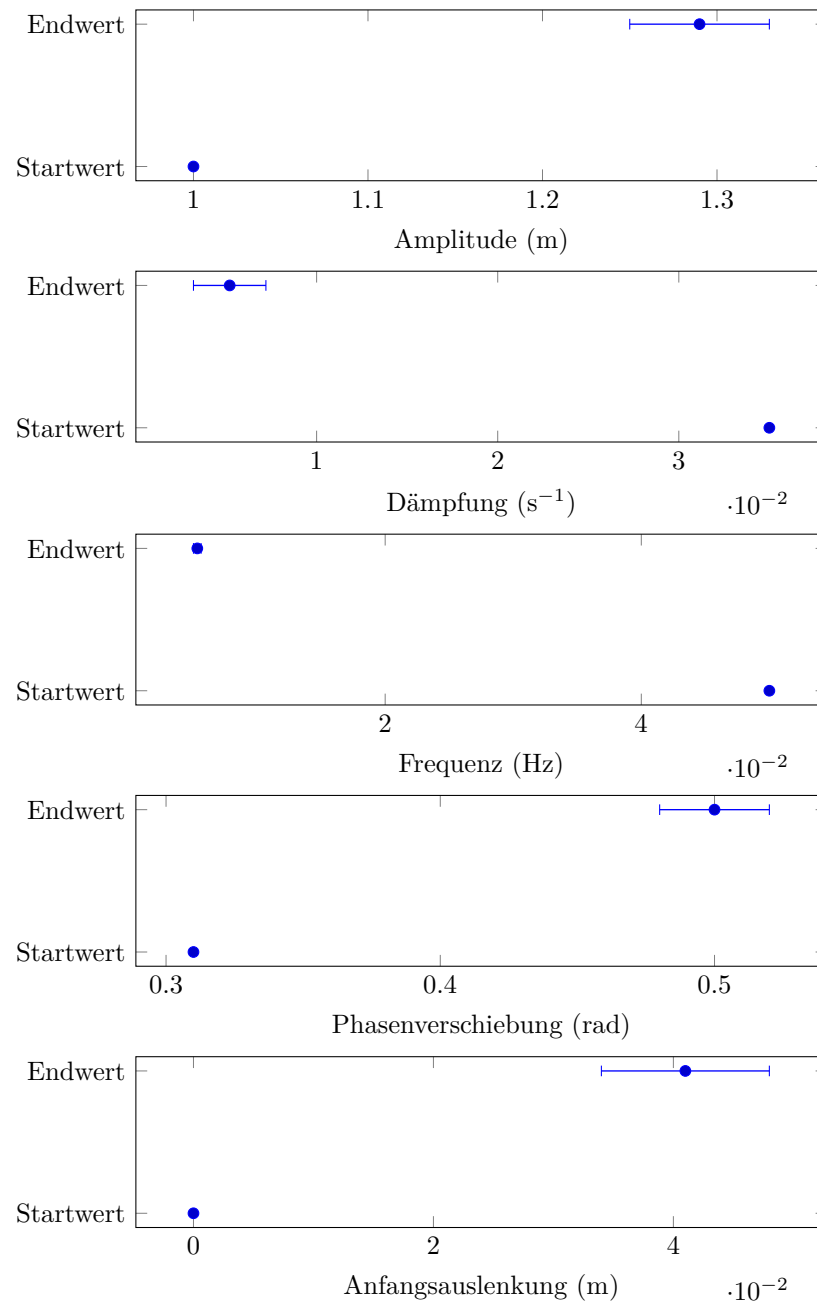


Abbildung 15: Graphischer Vergleich der Start- und Endwerte.

4.5 Tiefpass

Auch bei diesem Versuch stellt die Ermittlung von geeigneten Startwerten für die nichtlineare Regression den hauptsächlichen Aufwand dar. Da es sich um eine andere Gesetzmässigkeit als diejenige der vorangegangenen Aufgabe handelt, sind die dazu benutzten Methoden auch anders. Sie können im Abschnitt 3 nachgelesen werden. Ein wenig vereinfachend ist in diesem Versuch, dass nur eine Grösse geschätzt werden muss.

Aus den gegebenen Daten lassen sich Regressionen auf zwei Wegen durchführen: Einerseits kann die Ausgangsspannung gegen die Frequenz dargestellt werden, andererseits kann dies aber auch mit der Phase getan werden. Die beiden Varianten liefern nicht genau die gleichen Ergebnisse für die Kapazität C .

| | Startwert | Endwert via Spannung | Endwert via Phase |
|---------------|-----------|----------------------|-------------------|
| Kapazität C | 216 nF | (216.8 ± 0.9) nF | (198 ± 3) nF |

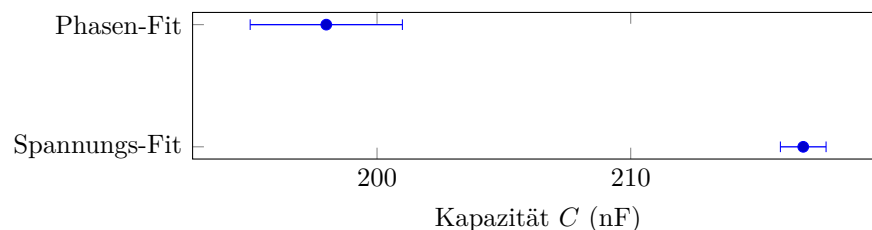


Abbildung 16: Graphischer Vergleich der Werte für die Kapazität C , bestimmt aus dem Fit von Ausgangsspannung und Frequenz respektive dem Fit von Phasenverschiebung an Frequenz.

Es stehen folgende Punkte hervor:

- Der Startwert liegt erstaunlich nahe beim mittels des Spannungs-Fits ermittelten Wert für die Kapazität C .
- Der mittels Fit von Phase an Frequenz ermittelte Wert für C weicht selbst mit Berücksichtigung der angegebenen Unsicherheit merklich von den anderen beiden Werten ab. Ich vermute, dass die Lage der Messpunkte für den Fit von Ausgangsspannung an Frequenz besser geeignet ist, und dass die Arkustangens-Funktion des Fits von Phase an Frequenz hier einfach benachteiligt ist. Allenfalls könnte durch die Erhöhung der Anzahl Messpunkte (natürlich bei besserer Verteilung) Abhilfe geschaffen werden. Es könnte auch sein, dass der Algorithmus von QtiPlot mit der Arkustangens-Funktion einfach weniger gut funktioniert, als mit der Division und Quadratwurzel des Zusammenhangs zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz. Letztlich ist es natürlich auch möglich, dass der Startwert und das Resultat des Spannungs-Fits weniger korrekt sind, als das Resultat des Phasen-Fits, allerdings halte ich dies für die weniger wahrscheinliche Variante, da diese beiden Werte so nahe beieinander liegen.

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 20. Oktober 2015.

Anhang A Spreadsheet zu Aufgabe 1

Die zugehörigen Spreadsheet-Files sind auch auf Dropbox zu finden. Idealerweise werden sie mit `sc-im` oder `sc` (siehe Quellen [10] und [11]) editiert, können zur Not aber auch mit einem Texteditor geöffnet werden, wobei die Tabellendarstellung jedoch nicht funktioniert.

Es sind auch entsprechende `*.txt`-Files vorhanden, welche auf den Daten des Spreadsheet-Programms beruhen und in entsprechender Form in folgenden Abschnitten eingebunden sind.

`sc-im`).

| Messung | Laufzeit (ms) | Differenz zu Mittelwert | Quadrat der Differenz |
|---------|---------------|----------------------------|--------------------------|
| 1 | 6.83 | -0.54 | 0.29 |
| 2 | 7.41 | 0.04 | 0.00 |
| 3 | 7.32 | -0.04 | 0.00 |
| 4 | 7.31 | -0.06 | 0.00 |
| 5 | 7.23 | -0.13 | 0.02 |
| 6 | 7.68 | 0.31 | 0.10 |
| 7 | 7.33 | -0.04 | 0.00 |
| 8 | 7.70 | 0.33 | 0.11 |
| 9 | 7.93 | 0.56 | 0.32 |
| 10 | 7.54 | 0.17 | 0.03 |
| 11 | 7.36 | -0.00 | 0.00 |
| 12 | 7.31 | -0.06 | 0.00 |
| 13 | 7.56 | 0.19 | 0.04 |
| 14 | 7.14 | -0.23 | 0.05 |
| 15 | 6.94 | -0.42 | 0.18 |
| 16 | 7.32 | -0.04 | 0.00 |
| 17 | 7.34 | -0.03 | 0.00 |
| 18 | 7.28 | -0.08 | 0.01 |
| 19 | 7.01 | -0.36 | 0.13 |
| 20 | 7.76 | 0.39 | 0.16 |

Summe: 147.30

Mittelwert: 7.37

Summe der Fehlerquadrate: 1.44

Fehler des Mittelwertes 0.06

Fehler des Mittelwerts, mehr Dezimalstellen 0.061522353661

Standardabweichung 0.28

Standardabweichung, mehr Dezimalstellen 0.275136329844

Erwartete Schallgeschwindigkeit aus Formel (m/s): 345.24

(siehe englische Wikipedia, "Speed of Sound"
und Kuchling, p.332, Formel A 22.5)


```
-----
Laenge der Teststrecke (meter):                2.56
Unsicherheit der Teststrecke (meter):           0.003

```

```
-----
Durchschnittsgeschwindigkeit (meter/s)         347.73
(aus Messergebnissen)
-----

```

```

Unsicherheit aus dem Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz, alle
Rechenschritte in einem Zug ausgefuehrt (m/s)    2.93

```

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz, schrittweise:

```

Erster Term, GFFPG                0.41
Zweiter Term, GFFFP               -2.90
Quadrat erster Term                0.17
Quadrat, zweiter Term              8.44
Summe der Quadrate                 8.60
Quadratwurzel (m/s)                2.93
Unsicherheit, mehr Dezimalstellen  2.933093187589

```

```
-----
Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz, Faustformel fuer Division:

```

```

Wurzel aus der Summe der relativen Fehlerquadrate    0.01
Multipliziert mit Durchschnittsgeschwindigkeit      2.93
Unsicherheit, mehr Dezimalstellen                    2.933093187589

```

Anhang B Spreadsheet zu Aufgabe 2

| Nr. | Eisen - gehalt (%) | absoluter Fehler (%) | Gewicht | Gewicht * Messwert | Differenz eMw - Mw | Quadrat d. Diff. |
|-----|------------------------|--------------------------|---------|------------------------|------------------------|----------------------|
| 1 | 20.30 | 1.20 | 0.69 | 14.10 | -0.14 | 0.02 |
| 2 | 21.90 | 1.30 | 0.59 | 12.96 | 1.46 | 2.12 |
| 3 | 21.10 | 1.10 | 0.83 | 17.44 | 0.66 | 0.43 |
| 4 | 19.60 | 0.80 | 1.56 | 30.62 | -0.84 | 0.71 |
| 5 | 19.90 | 1.30 | 0.59 | 11.78 | -0.54 | 0.30 |
| 6 | 18.00 | 1.30 | 0.59 | 10.65 | -2.44 | 5.98 |
| 7 | 19.40 | 1.00 | 1.00 | 19.40 | -1.04 | 1.09 |
| 8 | 22.20 | 2.00 | 0.25 | 5.55 | 1.76 | 3.08 |
| 9 | 21.60 | 0.80 | 1.56 | 33.75 | 1.16 | 1.34 |

*Differenz einfacher Mittelwert - Messwert

| | |
|-----------------------------------|--------|
| Summe der Einzelwerte | 184.00 |
| Einfacher Mittelwert | 20.44 |
| Fehler des einfachen Mittelwertes | 0.46 |

| | |
|--|-------|
| Summe der Gewichte, multipliziert mit Einzelmesswert | 156.2 |
| Summe der Gewichte | 7.67 |

| | |
|-------------------------------------|-------|
| Gewichteter Mittelwert | 20.37 |
| Fehler des gewichteten Mittelwertes | 0.36 |

Anhang C Spreadsheet zu Aufgabe 3

| Nr. | F (N) | z (m) | \bar{x} | \bar{y} | $(\bar{x} - x_i)$ | $(\bar{y} - y_i)$ | $(\bar{x} - x_i) * (\bar{y} - y_i)$ | $(\bar{x} - x_i)^2$ | $(\bar{y} - y_i)^2$ | \hat{y}_i |
|---------------|--------|-------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------------------------|---------------------|---------------------|-------------|
| | x_i | y_i | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | | | | | | |
| 1 | 3.83 | 0.20 | -7.33 | -0.32 | | | 2.38 | 53.68 | 0.11 | 3.82 |
| 2 | 7.79 | 0.35 | -3.37 | -0.17 | | | 0.59 | 11.34 | 0.03 | 7.21 |
| 3 | 8.08 | 0.42 | -3.08 | -0.10 | | | 0.32 | 9.47 | 0.01 | 8.79 |
| 4 | 9.70 | 0.46 | -1.46 | -0.06 | | | 0.09 | 2.12 | 0.00 | 9.69 |
| 5 | 10.58 | 0.51 | -0.58 | -0.01 | | | 0.01 | 0.33 | 0.00 | 10.82 |
| 6 | 12.33 | 0.54 | 1.17 | 0.02 | | | 0.02 | 1.38 | 0.00 | 11.50 |
| 7 | 12.23 | 0.59 | 1.07 | 0.07 | | | 0.07 | 1.15 | 0.00 | 12.62 |
| 8 | 14.43 | 0.67 | 3.27 | 0.15 | | | 0.47 | 10.71 | 0.02 | 14.43 |
| 9 | 15.51 | 0.71 | 4.35 | 0.19 | | | 0.81 | 18.95 | 0.03 | 15.33 |
| 10 | 17.09 | 0.80 | 5.93 | 0.28 | | | 1.63 | 35.20 | 0.08 | 17.36 |
| Summen | | | | | | | | | | |
| | 111.57 | 5.25 | 0.00 | 0.00 | | | 6.40 | 144.33 | 0.29 | |
| Durchschnitte | | | | | | | | | | |
| | 11.16 | 0.52 | | | | | | | | |

| | |
|--|---------|
| Steigung k der Regressionsgeraden | 22.57 |
| Achsenabschnitt F_0 der Regressionsgeraden | -0.69 |
| Empirische Korrelation | 0.99364 |
| Bestimmtheitsmass R^2 | 0.98732 |

Literatur

- [1] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].
- [2] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 641.
- [3] Speed of Sound. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound#Practical_formula_for_dry_air [Stand: 18. Oktober 2015].
- [4] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 332.
- [5] Lineare Regression. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Regression [Stand: 18. Oktober 2015].
- [6] Linear Regression Using the TI-89 Calculator. Flathead Valley Community College. [Online]. Verfügbar: <http://home2.fvcc.edu/~erady/Classes/Calc-F07/ti89regression.pdf> [Stand: 18. Oktober 2015].
- [7] Abklingkonstante. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: <https://de.wikipedia.org/wiki/Abklingkonstante> [Stand: 16. Oktober 2015].
- [8] Periode (Physik). Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Periode_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Periode_(Physik)) [Stand: 16. Oktober 2015].
- [9] Logarithmisches Dekrement. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmisches_Dekrement [Stand: 16. Oktober 2015].
- [10] SC-IM. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/andmarti1424/sc-im> [Stand: 18. Oktober 2015].
- [11] sc: the Venerable Spreadsheet Calculator. linuxjournal. [Online]. Verfügbar: <http://www.linuxjournal.com/article/10699> [Stand: 18. Oktober 2015].