

E11 – Skineffekt

7. November 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

Inhaltsverzeichnis

1	Arbeitsgrundlagen	1
1.1	Grundidee	1
1.2	Vollzylinder	1
1.3	Hohlzylinder	3
2	Durchführung	5
2.1	Versuchsanordnung	5
2.2	Versuchsablauf	5
3	Auswertung	6
3.1	Methodik	6
3.2	Vollzylinder	7
3.3	Hohlzylinder	15
4	Fehlerrechnung	31
	Literaturverzeichnis	32

Versionsgeschichte

7. November 2015 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [1].

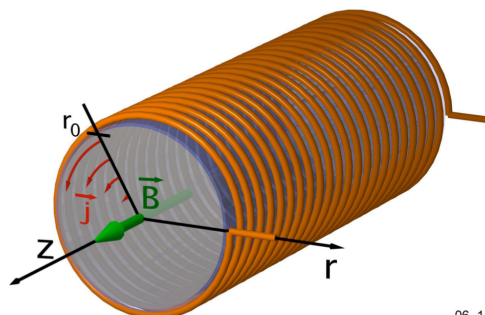
1.1 Grundidee

Hochfrequente Wechselströme haben die Eigenschaft, dass sie v.a. an der Oberfläche eines Leiters fließen und nicht tief in den Leiter eindringen. Dieses als *Skinneffekt* bekannte Phänomen soll in diesem Versuch experimentell nachgewiesen werden.

Wird ein Leiter in ein wechselndes Magnetfeld eingeführt, werden in ihm Wirbelströme induziert. Ist die Frequenz des externen Magnetfelds niedrig, verteilen sich diese Wirbelströme (ungleichmässig) auf den gesamten Querschnitt. Bei höheren Frequenzen des externen Magnetfeldes verlagern sich die Wirbelströme in den Oberflächenbereich des Leiters. Da sie der Änderung des externen Feldes gemäss der Lenz'schen Regel [2] entgegenwirken, schwächen sie im Innern des Leiters das externe Feld ab. Ebenfalls werden der Ohm'sche Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration von Spule und Zylinder geändert, sowie der magnetische Fluss im Innern des Zylinders.

Als Versuchsfälle dienen die Fälle eines eingeführten Hohlzylinders und eines eingeführten Vollzylinders. Es werden sowohl gängige Näherungen wie auch die exakten Lösungen aus der Theorie mit den Messergebnissen verglichen.

1.2 Vollzylinder



06_14

Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega \mu_0 \sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \quad (1)$$

wobei:

r : Distanz zu Zylinderachse

\hat{B} : gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)

ω : Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes

σ : spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \quad (2)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$$

r_0 : Radius des eingeführten Zylinders

\hat{B}_0 : Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)

$J_0(z)$: Besselfunktion erster Art (siehe auch [3])

Beachte: $\hat{B}(r)$ ist eine komplexe Zahl!

1.2.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

wobei

$$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$$

Die Lösung brauchbar ist für $s_{skin} \ll r_0$.

1.2.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + L_{Rand} \quad (4)$$

wobei

l : Länge der Zylinderspule

N_0 : Anzahl Windungen der Zylinderspule

$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l}$ mit r_{Sp} : Radius Zylinderspule

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Wobei $R_{\Omega,0}$ der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahts, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierten magnetischen Fluss:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

1.3 Hohlzylinder

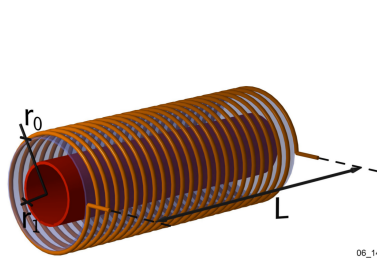


Abbildung 2: Spule mit Hohlzylinder
Quelle: Skript zum Versuch [1]

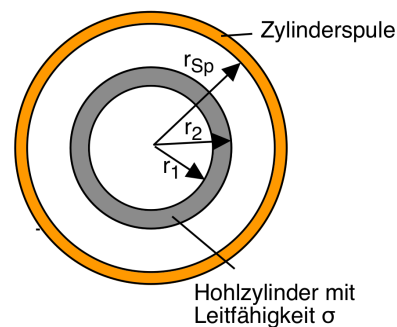


Abbildung 3: Spule mit Hohlzylinder, Querschnitt
Quelle: Skript zum Versuch [1]

1.3.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = konst. \quad (7)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (8)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = konst. \quad (9)$$

Mit $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$ und k gemäss Abschnitt zum Vollzylinder.

1.3.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe s_{skin} , kann das Rohr als dünnwandig betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

wobei:

r_1 : mittlerer Radius des Metallrohrs

d : Wandstärke des Metallrohrs

1.3.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\ &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\ &+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\ &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$L = Re \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \quad (12)$$

$$R = -\omega \cdot Im \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0} \quad (13)$$

2 Durchführung

In diesem Kapitel wird die Durchführung des Versuches beschrieben.

2.1 Versuchsanordnung

2.2 Versuchsablauf

2.2.1 Hohlzylinder

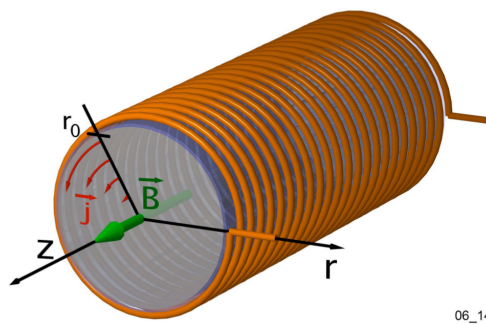


Abbildung 4: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

2.2.2 Vollzylinder

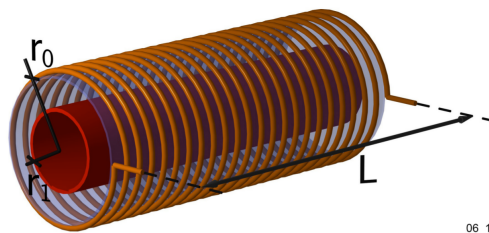


Abbildung 5: Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

3 Auswertung

Anmerkung zu den Messprotokollen: Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen nicht immer konsistent.

3.1 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Grössen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *QtiPlot* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes). Die Fitfunktion wird dabei optisch an die Messpunkte angepasst, nicht mit strikten mathematischen Methoden.

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Tools an; der Autor hat sich hier aus Gründen der persönlichen Präferenz für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante).

3.1.1 Vorgehen Manuelles Fitting

Im Allgemeinen wurde dabei folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
 - Die Leitfähigkeit σ des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
 - und den Betrag $|B_0|$ des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von $|B_0|$ abhängt (ersichtlich aus Gleichung 2 auf Seite 2 sowie Gleichung 7 auf Seite 4), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von σ einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, kann man mittels Tunen von $|B_0|$ die Kurve für die Messpunkte von $|\hat{B}|$ anpassen.
- Abschliessend kann man noch iterativ optimieren, bis die Fitfunktion den Verlauf der Messpunkte optisch zufriedenstellend repräsentiert.

Für die genaue algorithmische Implementierung sei hier auf den Python-Quellcode verwiesen.

3.1.2 Listings

Die Listings mit den Parametern, welche zum Erstellen eines bestimmten Plots benutzt worden sind, sind in Tabellen in der Nähe der zugehörigen Plots aufgeführt.

Die Werte werden direkt von den Python-Scripts in `*.tex`-Files geschrieben und in dieses Dokument integriert. Dies garantiert, dass die Plots und die aufgesisteten Parameter übereinstimmen; Tippfehler beim Abschreiben der Werte werden vermieden (und es erspart Arbeit).

Die Werte in den Tabellen sind jeweils gerundet, Python arbeitet natürlich mit viel mehr Dezimalstellen. Die Werte sind in ihrer vollen Präzision im L^AT_EX-Quellcode zu finden [4].

3.2 Vollzylinder

Mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder wurden drei Messreihen durchgeführt:

- Frequenzgang des B-Feldes,
- radialer Verlauf des B-Feldes bei niedriger Frequenz (30 Hz),
- und radialer Verlauf des B-Feldes bei hoher Frequenz (450 Hz).

Dabei wurden jeweils Betrag und Phase des Magnetfeldes ausgemessen. Zu den Messwerten wurden anschliessend folgende Fitkurven erstellt:

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- radialer Verlauf bei tiefer Frequenz, exakte Lösung,
- Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf niedrige Frequenz (Überprüfung, dass es auch tatsächlich eine Hochfrequenznäherung ist),
- radialer Verlauf bei hoher Frequenz, exakte Lösung,
- sowie die Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf hohe Frequenz.

Zudem wurden als Ergänzung noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Vollzylinder erstellt, basierend auf den Werten für die Leitfähigkeit und das externe Magnetfeld, welche aus den Fitfunktionen ermittelt worden waren.

3.2.1 Frequenzgang

Es wurde die Stärke des B-Feldes im Innern des Aluzylinders in Abhängigkeit der Frequenz des äusseren B-Feldes gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden, die Platzierung der Sonde war axial und radial zentriert fixiert (siehe Abbildung 6). Tabelle 2 enthält die Parameter für den Fit aus Abbildung 7.

Tabelle 1: Vollzylinder aus Aluminium, frequenzabhängig

Frequenz (Hz)	Phase (°)	Amplitude (mV)
1	5.4	69
5	26	65
10	50	57
15	69	48
20	85	40
30	111	28.5
40	132	21
60	166	12.5
80	196	8
100	220	5.4
120	243	3.6
160	283	1.9
200	320	1
250	350	0.6

Tabelle 2: Paramaterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

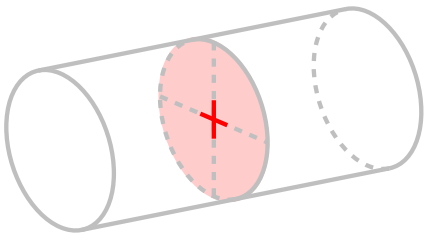


Abbildung 6: Sensorplatzierung während Messung

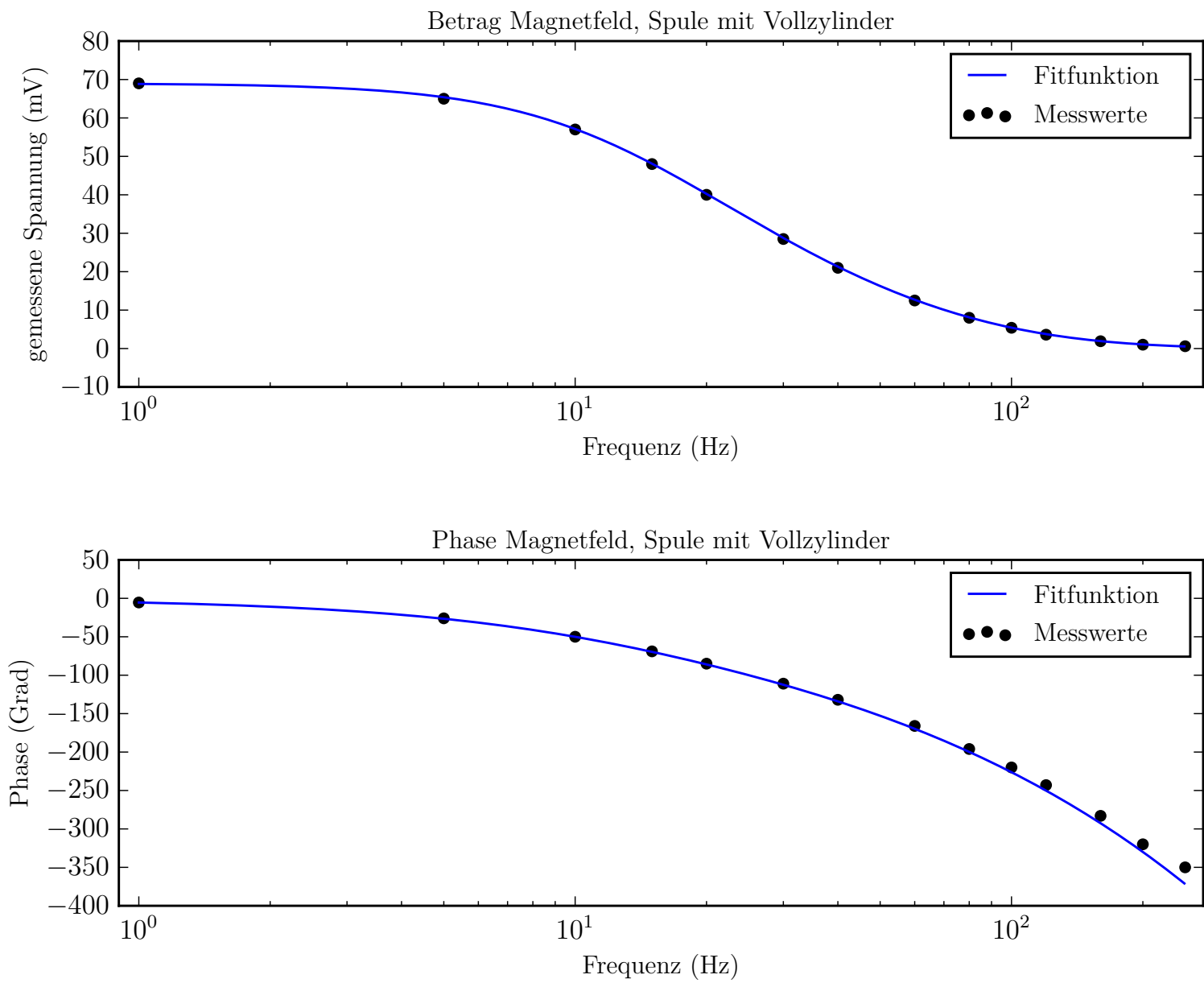


Abbildung 7: Frequenzgang Zylinderspule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

3.2.2 Positionsbezogener Verlauf, niedrige Frequenz

In dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten (30 Hz), und die Position der Messsonde wurde radial variiert zwischen Zylinderachse und Aussenrand. Der Skineffekt ist hierbei sichtbar, aber verglichen mit höheren Frequenzen (siehe Abschnitt 3.2.3, p.11) merklich schwächer ausgeprägt. Der letzte Messpunkt war nicht mehr innerhalb des Zylinders und wurde deshalb nicht im Plot berücksichtigt, da er für die Fitfunktion nicht relevant ist.

Tabelle 3: Vollzylinder aus Aluminium, 30 Hz

Radius (mm)	Phase (°)	Amplitude (mV)
0	111	28.6
5	109	28.5
10	104	28.7
15	94	29
20	81	30
25	65	33
30	48.5	38
35	32	45
40	16	54
45	2.7	62
50	0	37

Tabelle 4: Paramaterwerte für Fitfunktion des radialen Verlaufs des B-Feldes bei 30 Hz

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$22 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	0 m
B_0	$62 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	30 Hz

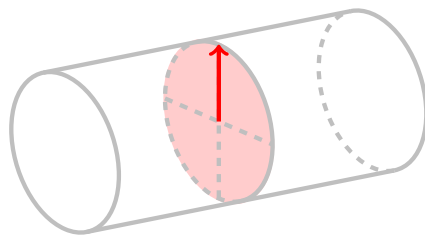


Abbildung 8: Sensorplatzierung während Messung

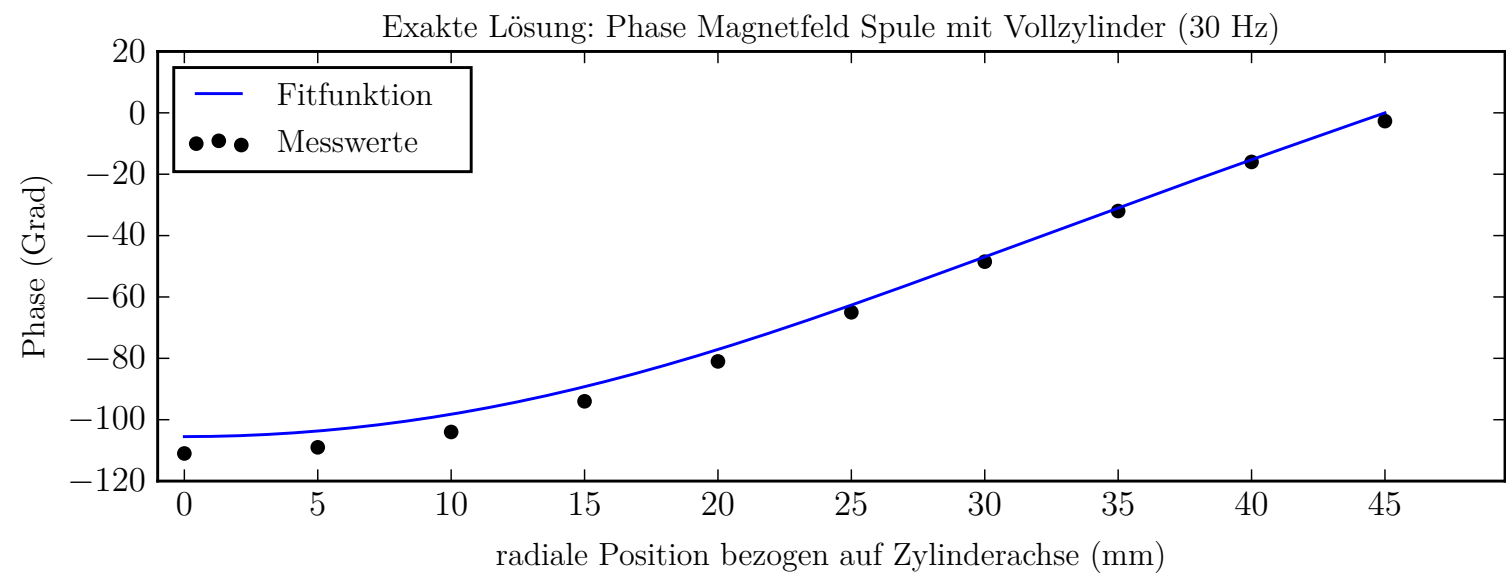
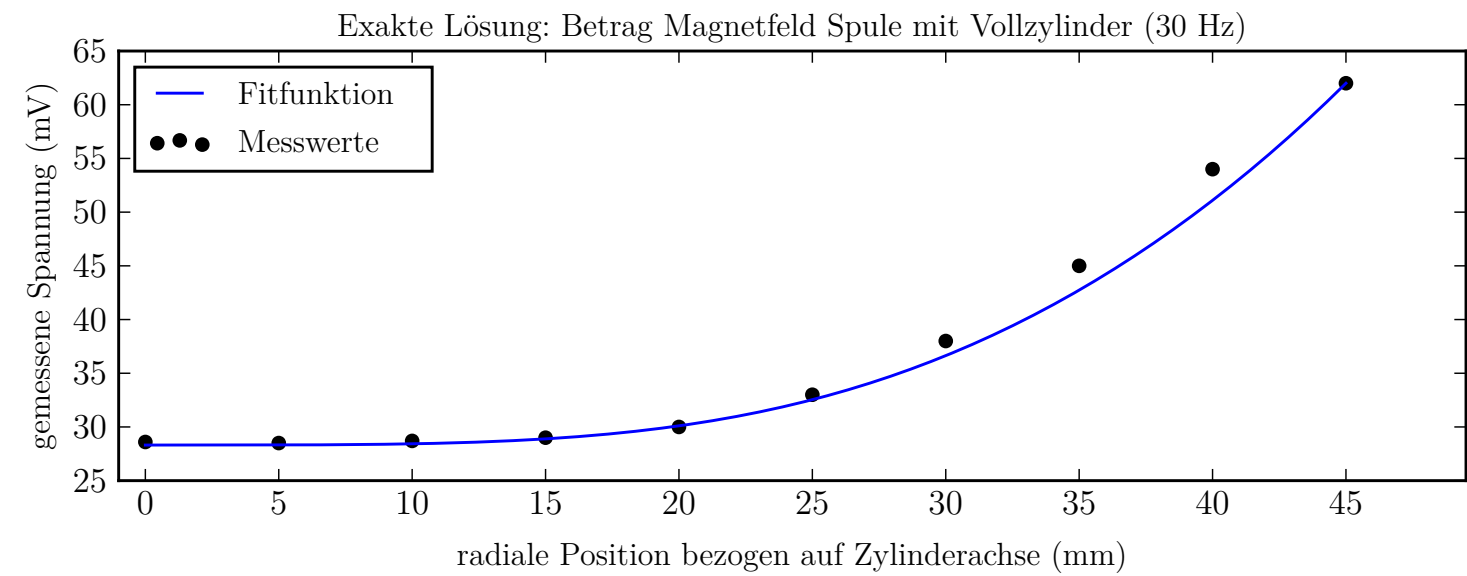


Abbildung 9: Radialer Verlauf des B-Feldes bei einer Frequenz von 30 Hz

Da in den Augen des Autors auch ruhig mal verifiziert werden darf, dass eine Herangehensweise nicht funktioniert, wurde hier aus Neugier ebenfalls ebenfalls noch die Hochfrequenznäherung auf den radialen Verlauf bei 30 Hz angewandt. Wenig überraschend erwies sich die Methode in der Tat als ungeeignet für diesen Frequenzbereich.

Es konnte keine Kombination für B_0 und σ ermittelt werden, welche einen zufriedenstellenden Fit für die Messwerte ergeben hätte (und selbst wenn solche Parameter hätten gefunden werden können, wären sie vermutlich so stark von den mit den restlichen Fits ermittelten Werten abgewichen, dass sie unbrauchbar gewesen wären).

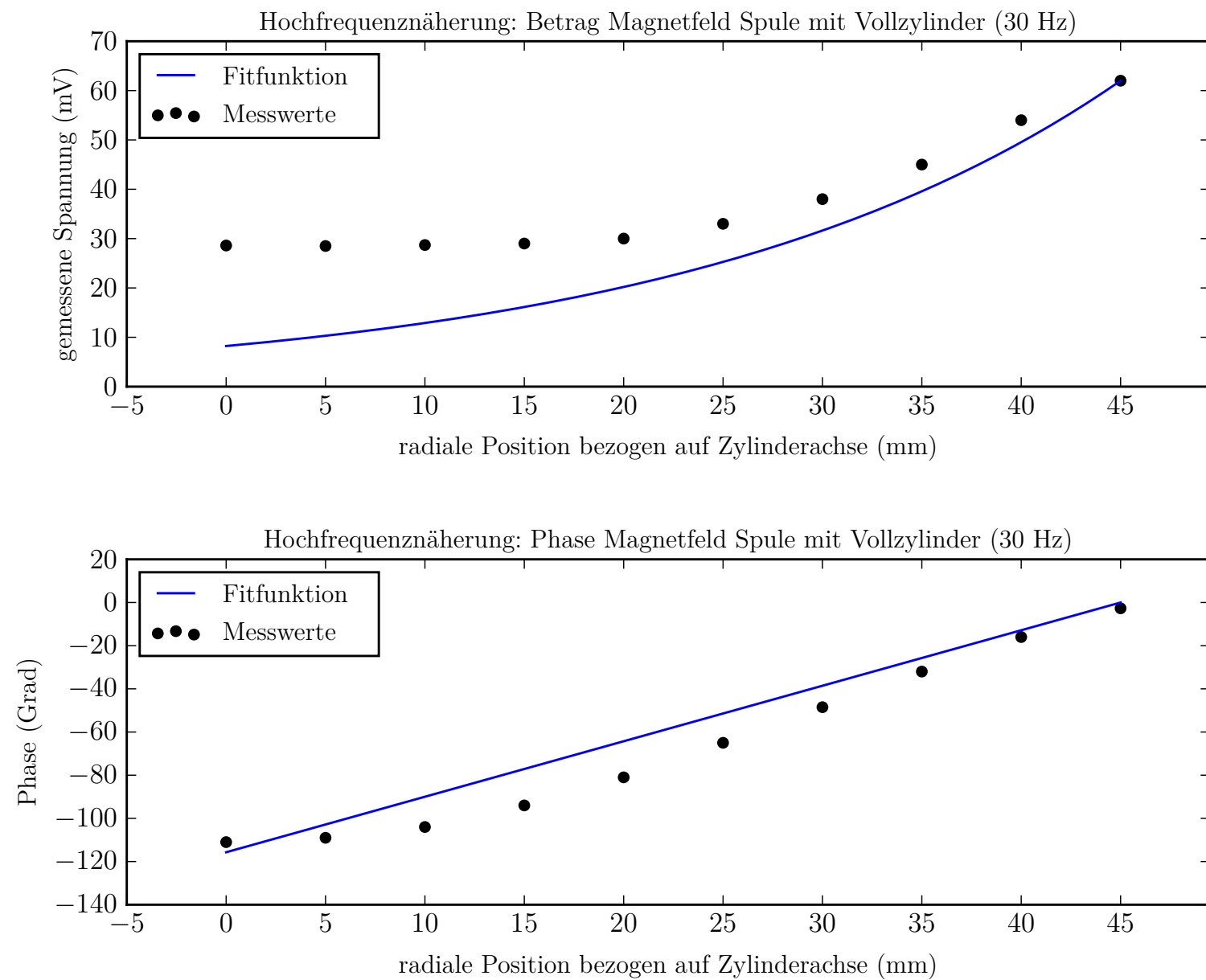


Abbildung 10: Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf des Be-Feldes angewandt auf 30 Hz.

3.2.3 Hohe Frequenzen

Auch in dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten, jedoch 450 Hz. Zudem wurde nicht der gleiche radiale Bereich ausgemessen: Die Sonde wurde auf halbem Radius positioniert, ansschliessend wurde die Frequenz des externen B-Feldes so weit erhöht, bis gerade noch brauchbare Messwerte abgelesen werden konnten. Bei der so ermittelten Frequenz wurde dann der radiale Verlauf des B-Feldes auf der restlichen Hälfte gegen den Aussenrand des Vollzylinders ausgemessen (siehe Abbildung 11). Die Messwerte sind in Tabelle 5 zu finden.

Tabelle 5: Messwerte Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz		
Radius (mm)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)
25	215	1.5
27.5	183	2.2
30	152	3.6
32.5	125	5.9
35	100	9.5
37.5	73	15.5
40	47	25
42.5	24	39
45	5.2	55
47.5	0.2	57.5
50	0	38

Tabelle 6: Parameter für Fitfunktion aus Abbildung 12.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$55 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

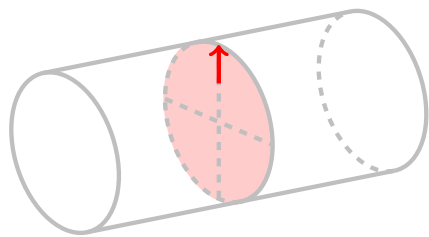


Abbildung 11: Sensorplatzierung während Messung

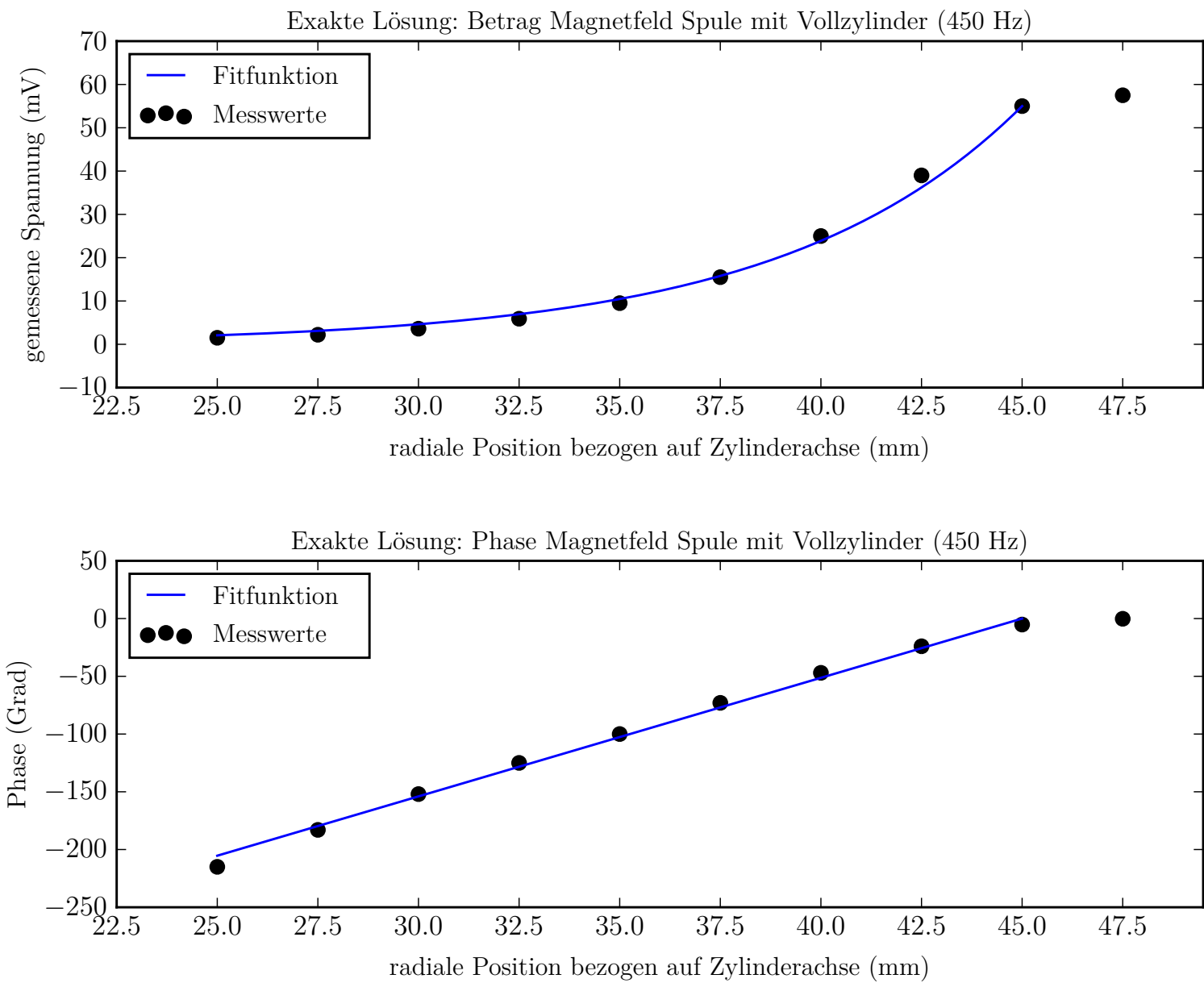


Abbildung 12: radialer Verlauf des B-Feldes bei 450 Hz

Bei dieser Frequenz liefert die Hochfrequenznäherung nun sehr zufriedenstellende Lösungen, wie in Abbildung 13 zu sehen ist.

Tabelle 7: Paramaterwerte für Fitfunktion basierend auf der Näherungslösung für hohe Frequenzen.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$55 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

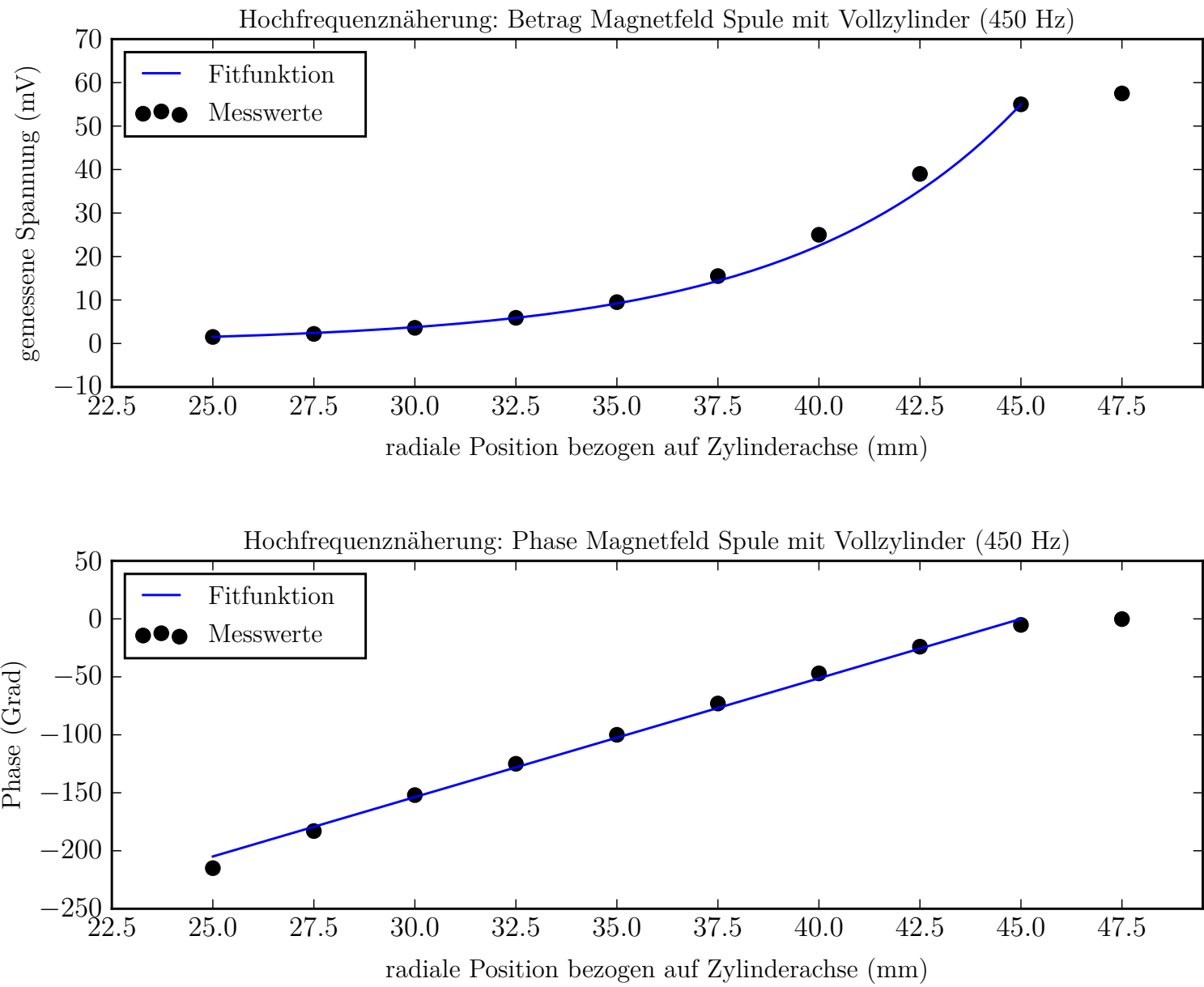


Abbildung 13: mittels Hochfrequenznäherung erstellter Fit für 450 Hz

3.2.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie erwähnt, wurden keine direkten Messungen von $L_{Spule+Zylinder}$ und $R_{Spule+Zylinder}$ durchgeführt. Mit den Informationen aus den Fits (also primär der dort bestimmten Leitfähigkeit) können jedoch trotzdem Plots erstellt werden.

Tabelle 8: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 14, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

Tabelle 9: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 15, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

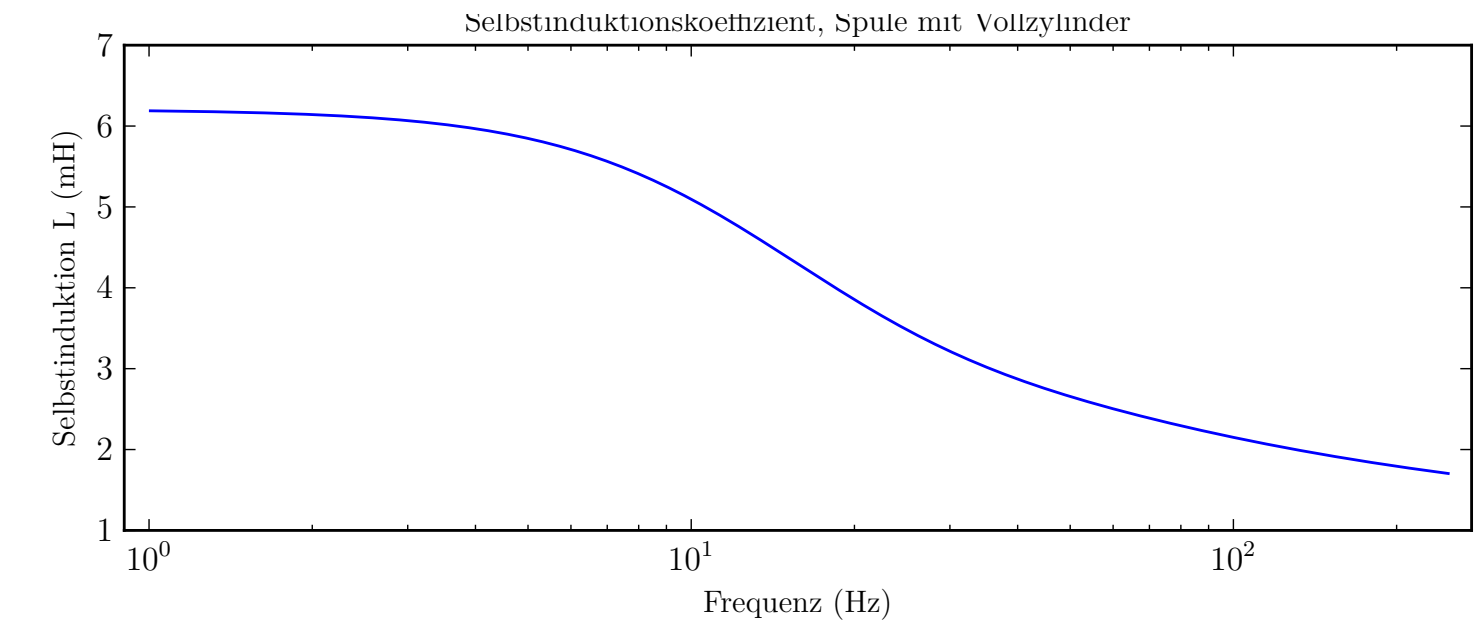


Abbildung 14: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

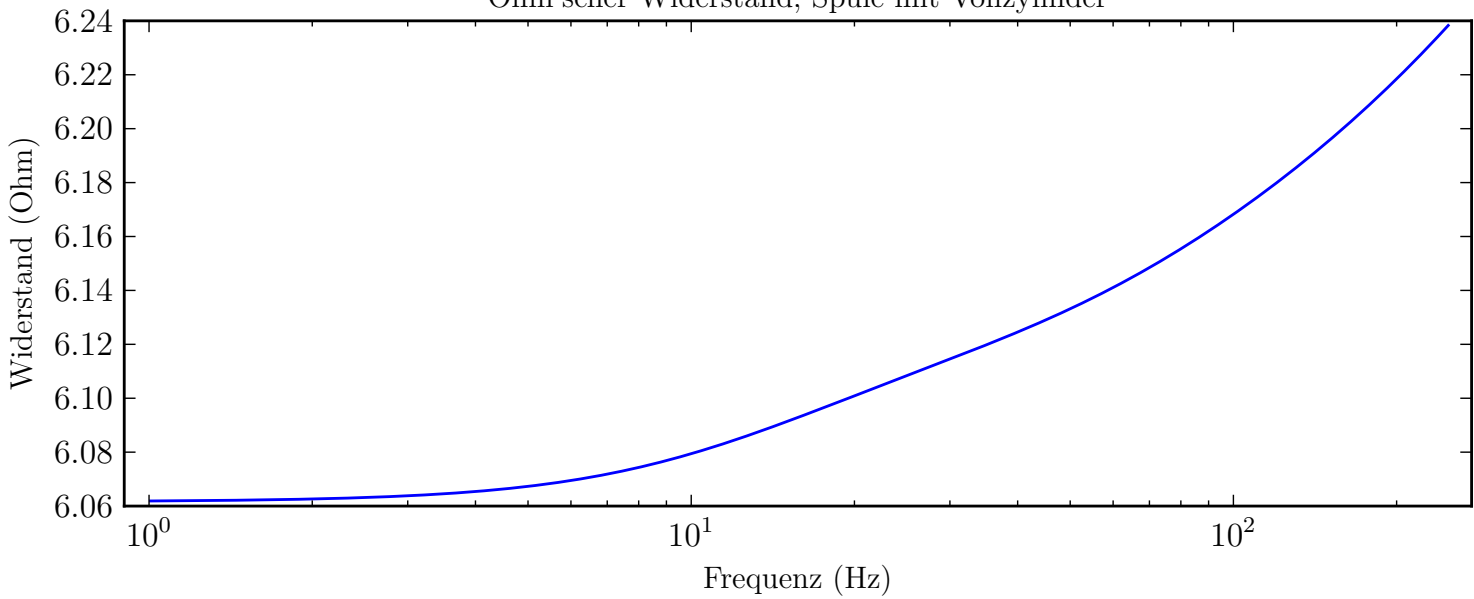
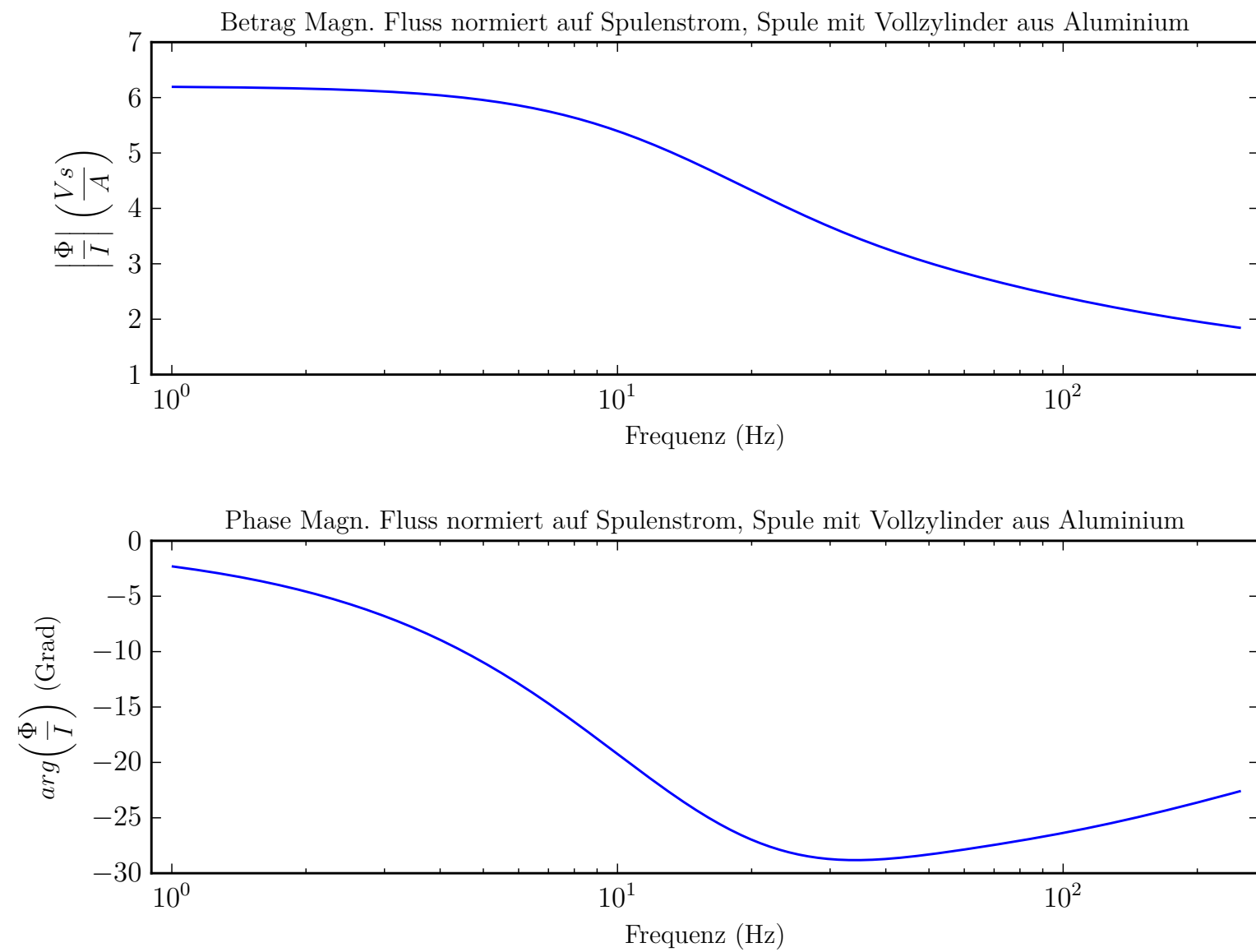


Abbildung 15: Änderung des Ohm'schen Widerstandes von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 10: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 16, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

**Abbildung 16:** Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

3.3 Hohlzylinder

3.3.1 Kupfer

Tabelle 11: Messwerte Kupferrohr

Frequenz (Hz)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)	Shunt-Spannung (mV)
1	2	70.0	195.3
10	19.2	66.0	200.0
20	35.5	57.8	200.0
40	56.7	41.8	200.3
80	76.7	24.4	200.0
120	87	16.9	200.1
160	94	12.7	200.1
200	100	10.0	200.0
400	121	4.8	200.0
600	140	2.9	199.7
800	155	1.9	200.5
1000	170	1.4	200.2
1200	180	1.0	200.0
1500	200	0.7	199.9

Es wurde eine Messreihe durchgeführt und zwei Fits erstellt: Einmal mit der Näherungslösung, und einmal mit der exakten Lösung. Dabei fällt auf, dass der Betrag der Näherungslösung über den gesamten Frequenzbereich ziemlich genau ist und nicht bedeutend von den Messwerten abweicht. Der Phasenverlauf divergiert jedoch stark von den Messwerten, sobald die Wanddicke des Zylinderrohrs grösser als die Eindringtiefe s_{skin} wird.

In Abbildung 17 ist daher das Verhältnis von Wandstärke und Eindringtiefe ebenfalls dargestellt.

Für die exakte Lösung konnte ein sehr zufriedenstellender Fit erstellt werden (Abbildung 18).

Da dies die erste durchgeführte Messreihe war, wurde als Kontrolle noch die Spannung über dem Shunt-Widerstand gemessen. Um den Strom durch die Spule von Messung zu Messung möglichst konstant zu halten (und somit auch das externe Magnetfeld B_0), wurde angestrebt, diese Spannung möglichst bei 200 mV zu halten, was mit dem Widerstandswert von $1\ \Omega$ einen Spulenstrom I_0 von 200 mA ergab. Wie man erkennen kann, funktionierte das Justieren dieses Wertes sehr gut, weshalb bei den übrigen Messungen auf seine Erfassung verzichtet wurde.

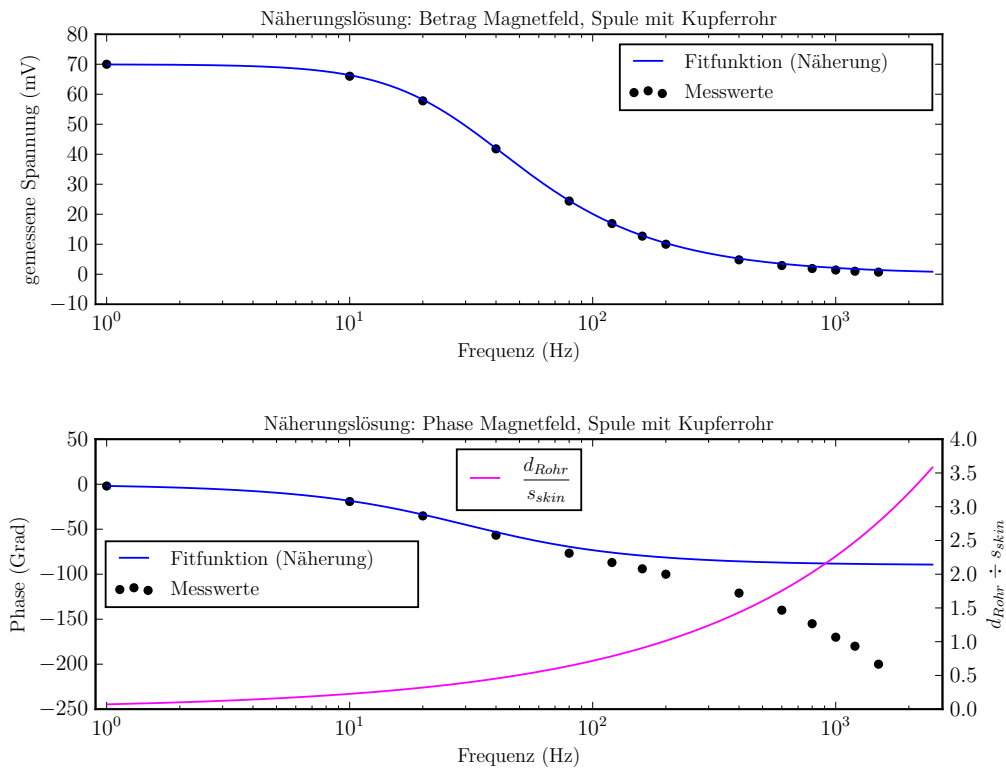


Abbildung 17: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

Tabelle 12: Paramterwerte für Fitfunktion, Direktimport aus Python-Script, gerundet (die Präzision von Python ist natürlich höher). Die ungerundeten Zahlen können bei Interesse auch im L^AT_EX-Quelltext gefunden werden.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

Tabelle 13: Paramterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Kupferrohr. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

Als Fitfunktion wurde Gleichung 10 (Seite 4) verwendet.

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right)$$

Als Fitfunktion wurde die Formel für $r_1 < r < r_2$ aus Gleichung 7 (Seite 4) verwendet, mit $r = r_1$. Für genauere Informationen über den Aufbau der Formel und die Verwendung der in Tabelle 19 gelisteten Parameter siehe das entsprechende Kapitel.

$$\hat{B}(r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0$$

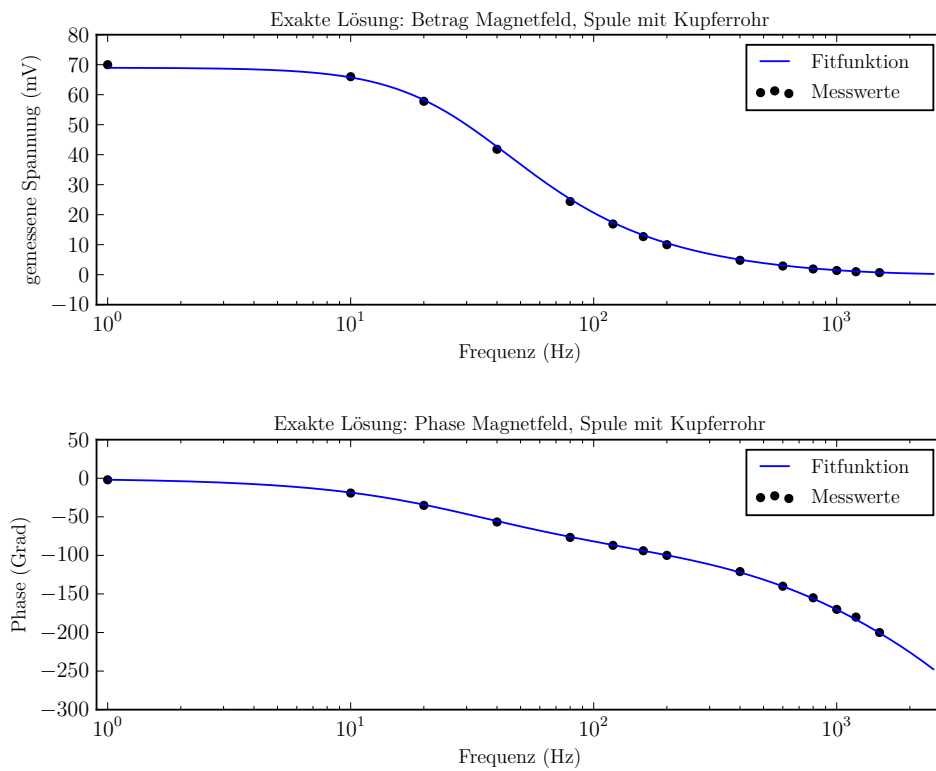


Abbildung 18: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

3.3.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parametern.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\
 &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\
 &+ \frac{2 r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{k \cdot \frac{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}}} \\
 &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \\
 L &= Re \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \\
 R &= -\omega \cdot Im \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0}
 \end{aligned} \tag{11}$$

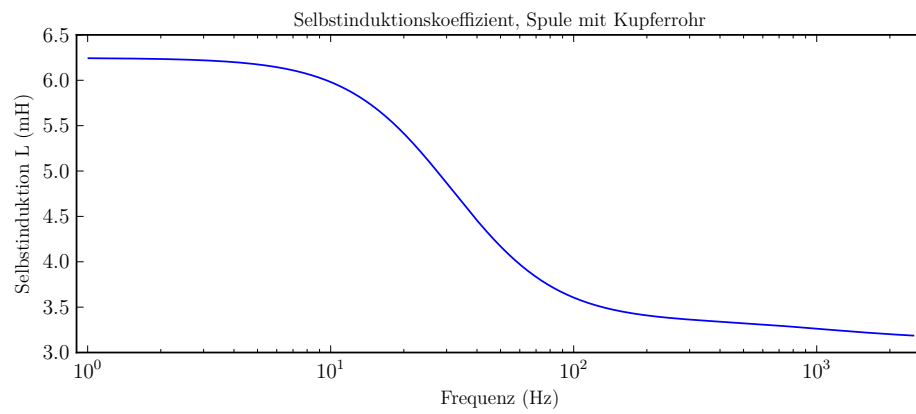


Abbildung 19: Frequenzverlauf des Selbstinduktionskoeffizienten; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 14 zu finden.

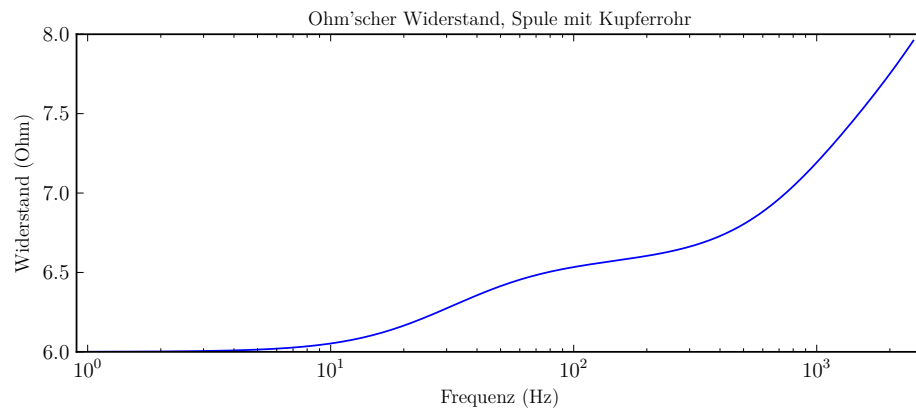


Abbildung 20: Frequenzverlauf des Ohm'schen Widerstandes; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 15 zu finden.

Tabelle 14: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 19, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

Tabelle 15: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 20, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$R_{\Omega,0}$	6 Ω
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

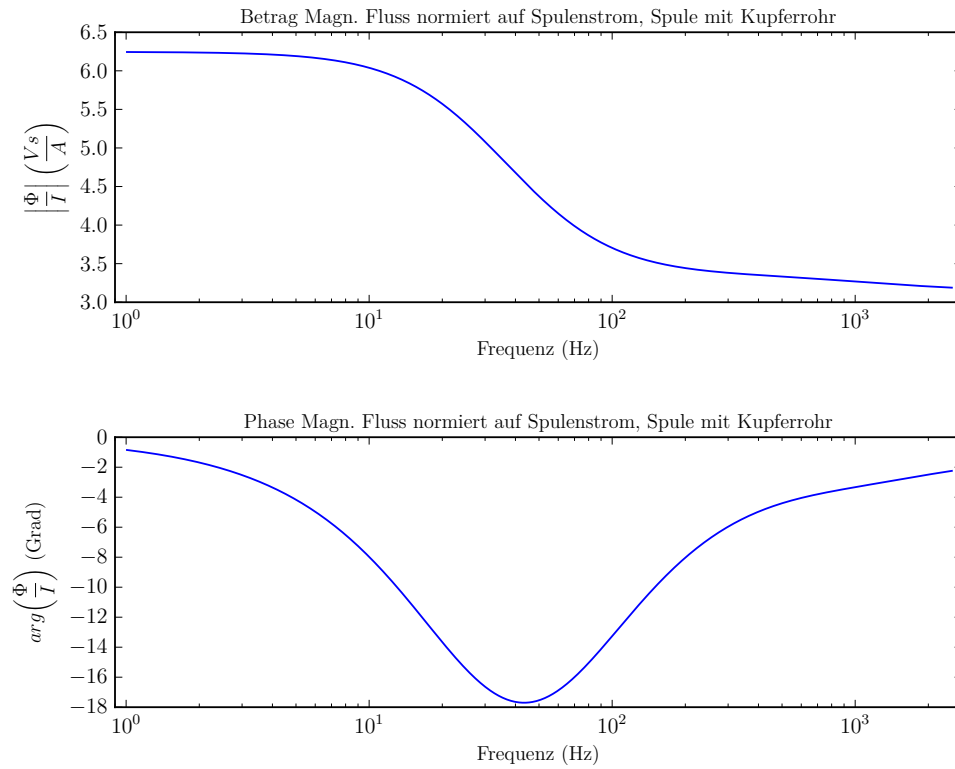


Abbildung 21: Frequenzverlauf des auf den Strom genormten magnetischen Flusses; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 16 zu finden.

Tabelle 16: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 21 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

3.3.3 Rostfreier Stahl

Tabelle 17: Messwerte Rohr aus rostfreiem Stahl

Freq. (Hz)	Phase (°)	Ampl. (mV)	Freq. (Hz)	Phase (°)	Ampl. (mV)
40	1.8	68.7	1500	50	45
120	5.4	69.1	1750	54	41
200	9	68.7	2000	58	37.2
400	17.5	66.2	2500	64	32
600	25.4	62.7	3500	71	24
800	32.4	59	5000	78	18
1000	38.4	54.5	7500	88	12
1200	43.5	50.5			

Das Vorgehen beim Stahlrohr war identisch zum Kupferrohr, und auch in diesem Fall wurde ein Fit mittels der Näherung und mittels der exakten Funktion erstellt.

Ein wichtiger Unterschied zum Kupferrohr bestand darin, dass die Frequenz, ab welcher der Skineffekt wirklich zum Tragen kommt, bedeutend höher lag, weshalb der Messbereich entsprechend angepasst wurde. Bei 7.5 kHz war jedoch Schluss, da der Funktionsgenerator nicht mer genügend Spannung liefern konnte, um die Shunt-Spannung auf den geforderten 200 mV zu halten.

Zusätzlich schwankten die Messwerte (insbesondere die Phase) bei den höheren Frequenzen sehr stark. Ein genaues Ablesen mittels *Mitteln durch Augenmass* war nicht mehr möglich, sodass es keinen grossen Sinn machte, die Frequenz weiter zu erhöhen, selbst wenn der Funktionsgenerator noch weiter hätte gehen können.

Tabelle 18: Paramterwerte für Fitfunktion, Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	10
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$7.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

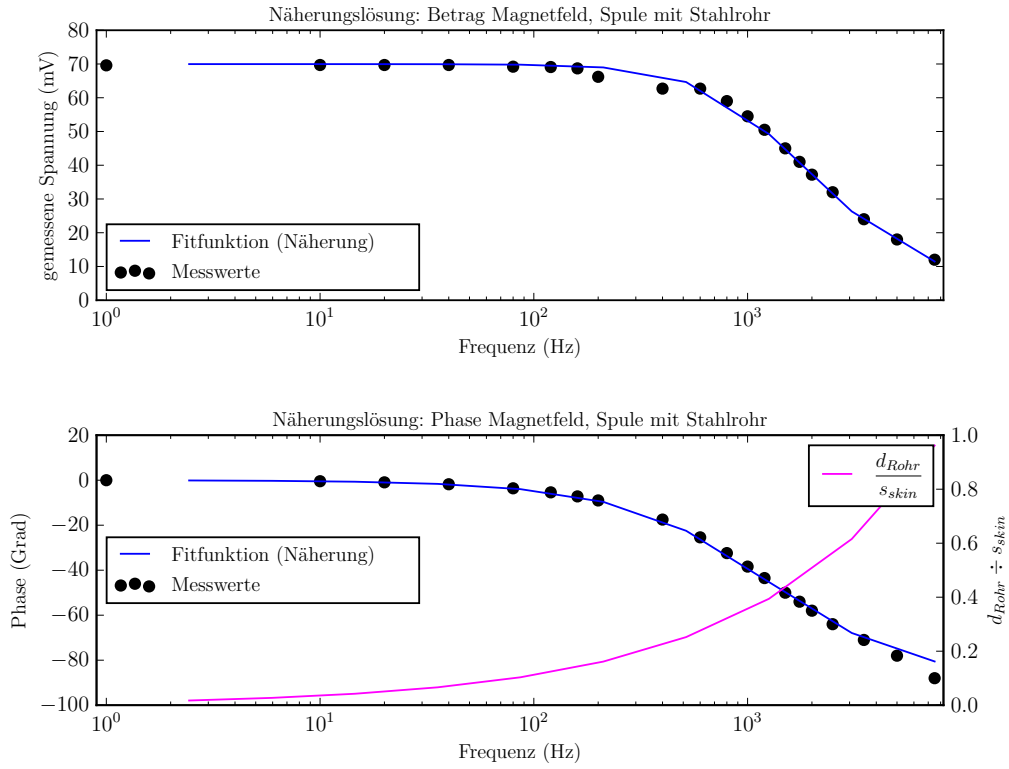


Tabelle 19: Parameterwerte für exakte Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Stahlrohr, Frequenzbereich deckt nur den Messbereich ab. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$7.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

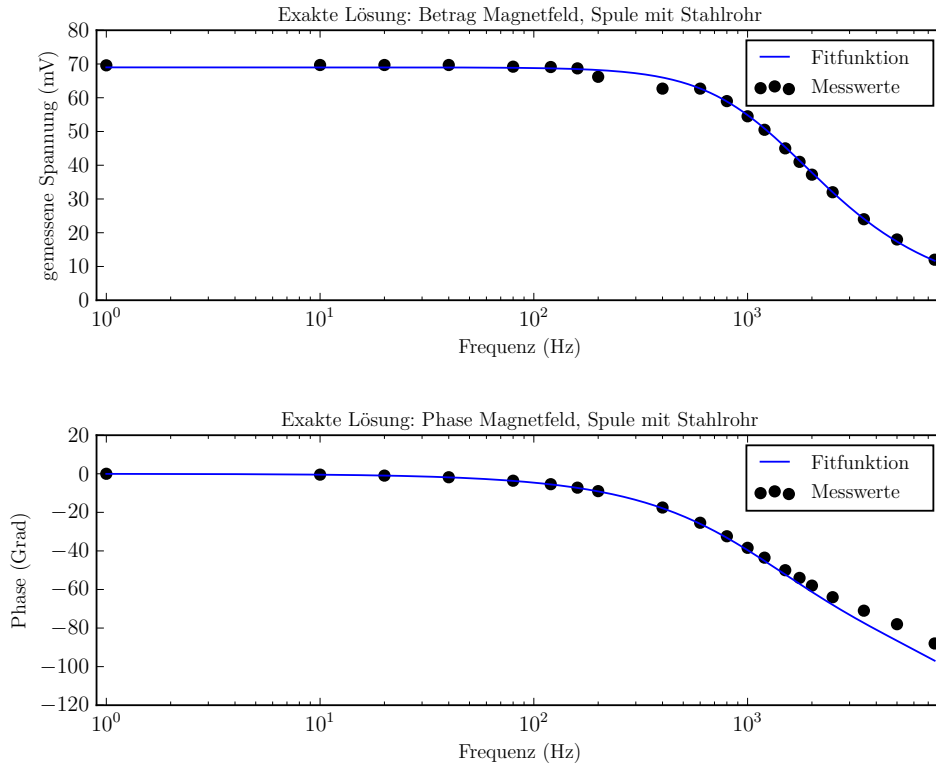
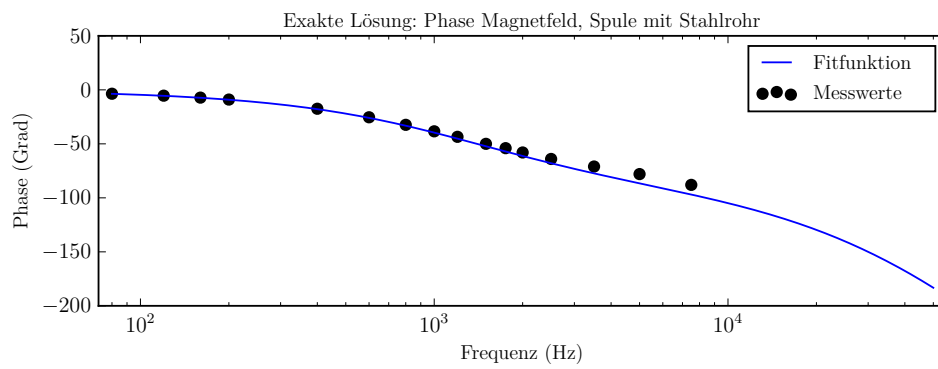
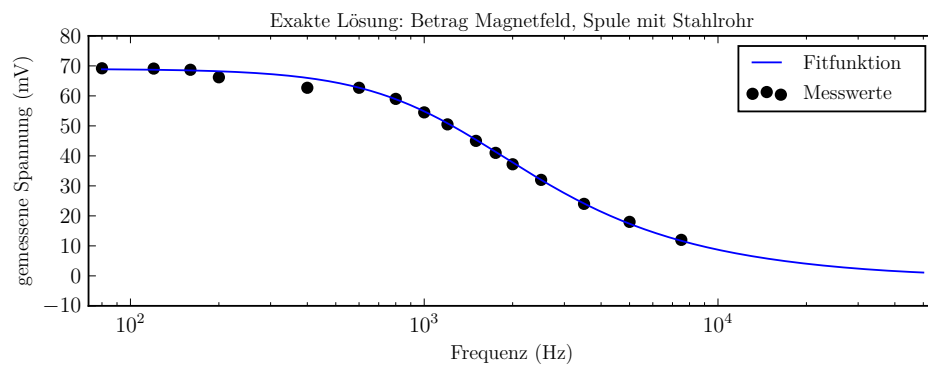


Tabelle 20: Parameterwerte für exakte Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes), Direktimport aus Python-Script, gerundet, für optimierten Frequenzbereich. Parameterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Stahlrohr. Der Frequenzbereich wurde für diesen Plot weit über den Messbereich geschoben, um die "typische" Form einer solchen Kurve abzubilden. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
$f_{min_{opt}}$	80 Hz
$f_{max_{opt}}$	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$



3.3.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parametern.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\
 &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\
 &+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\
 &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \\
 L &= Re \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \\
 R &= -\omega \cdot Im \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Tabelle 21: Parameterwerte für Frequenzgang des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder, innerhalb des Stahlzylinders. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Der dargestellte Frequenzbereich wurde so ausgewählt, um einen "sinnvollen" Kurvenverlauf zu erhalten, und ist somit bedeutend grösser als der Messbereich.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

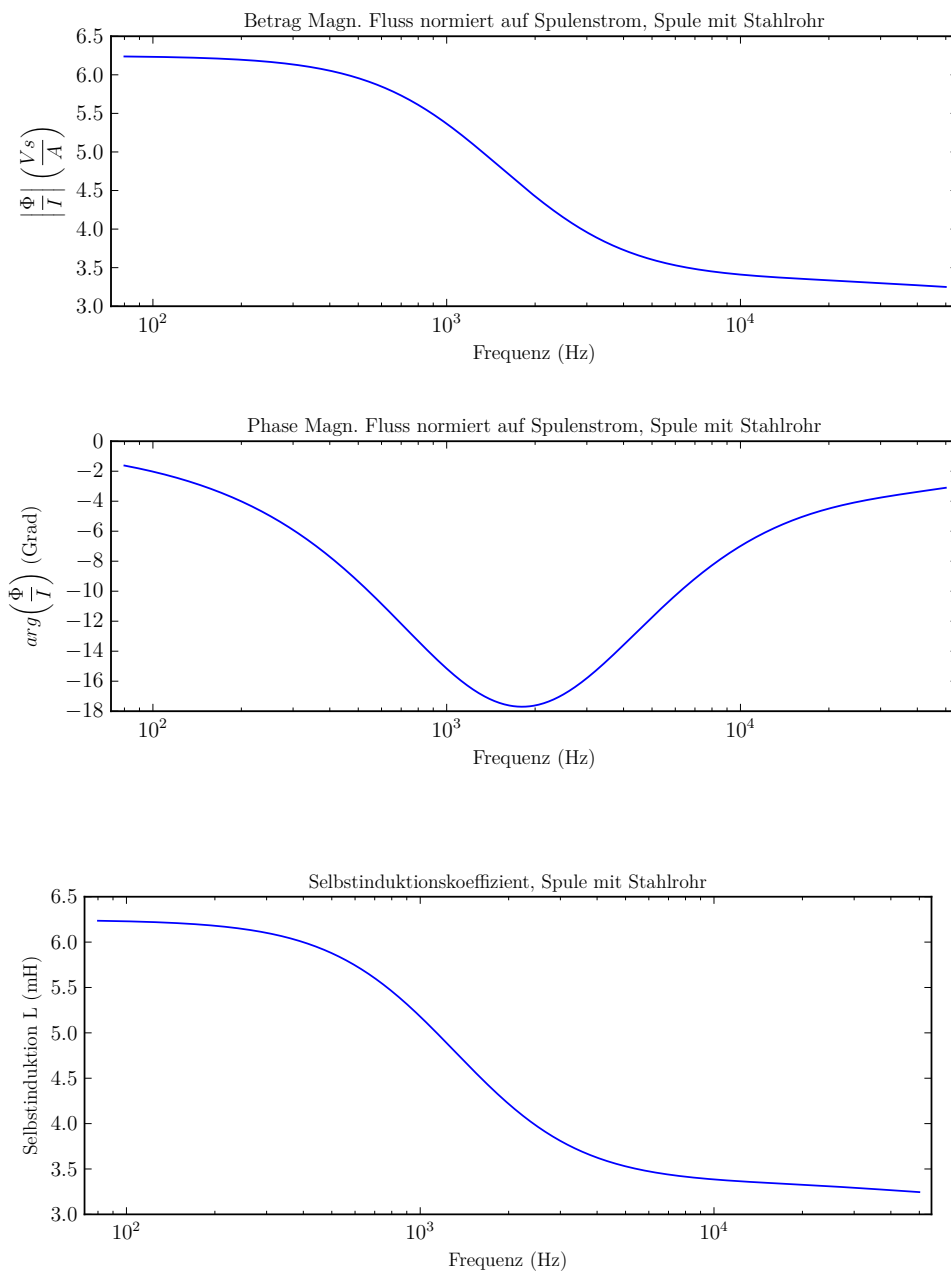


Tabelle 22: Parameterwerte für Frequenzgang des Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Für den abgedeckten Frequenzbereich gelten die gleichen Überlegungen wie bei Tabelle 21 erwähnt.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

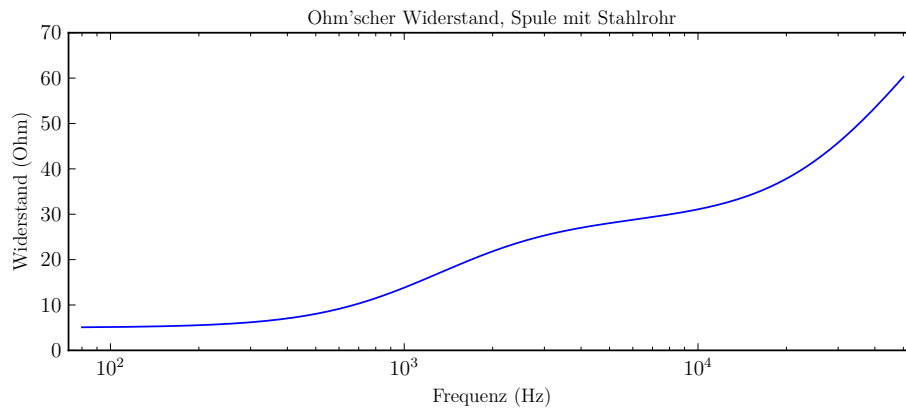


Tabelle 23: Parameterwerte für Frequenzgang des Ohm'schen Widerstandes der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Für den abgedeckten Frequenzbereich gelten die gleichen Überlegungen wie bei Tabelle 21 erwähnt.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$R_{\Omega,0}$	5Ω
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

4 Fehlerrechnung

Auf die Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

Literatur

- [1] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt*. Windisch: FHNW Aargau, 2015.
- [2] Lenz'sche Regel. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel [Stand: 02. November 2015].
- [3] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [Stand: 02. Oktober 2015].
- [4] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].