

E11 – Skineffekt

9. November 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

Inhaltsverzeichnis

1	Arbeitsgrundlagen	1
1.1	Vollzylinder	1
1.2	Hohlzylinder	3
2	Durchführung	5
2.1	Versuchsordnung	5
2.2	Messvorgang/Messmethoden	7
2.3	Proben	8
2.4	Messungen	8
3	Auswertung	10
3.1	Methodik	10
3.2	Vollzylinder	11
3.3	Hohlzylinder	19
4	Fehlerrechnung	31
	Literaturverzeichnis	34

Versionsgeschichte

9. November 2015 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [1].

1.1 Vollzylinder

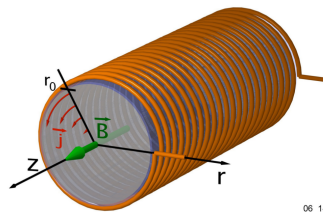


Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

1.1.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega \mu_0 \sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \quad (1)$$

wobei:

r : Distanz zu Zylinderachse

\hat{B} : gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)

ω : Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes

σ : spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \quad (2)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$$

r_0 : Radius des eingeführten Zylinders

\hat{B}_0 : Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)

$J_0(z)$: Besselfunktion erster Art (siehe auch [2])

Beachte: $\hat{B}(r)$ ist eine komplexe Zahl!

1.1.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

wobei

$$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$$

Die Lösung brauchbar ist für $s_{skin} \ll r_0$.

1.1.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + L_{Rand} \quad (4)$$

wobei

l : Länge der Zylinderspule

N_0 : Anzahl Windungen der Zylinderspule

$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l}$ mit r_{Sp} : Radius Zylinderspule

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Wobei $R_{\Omega,0}$ der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahts, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierten magnetischen Fluss:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0\right) \quad (6)$$

1.2 Hohlzylinder

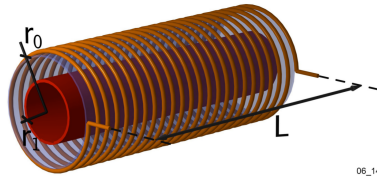


Abbildung 2: Spule mit Hohlzylinder
Quelle: Skript zum Versuch [1]

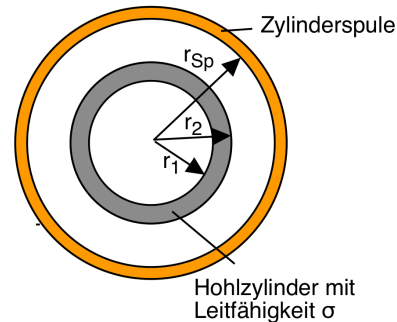


Abbildung 3: Spule mit Hohlzylinder, Querschnitt
Quelle: Skript zum Versuch [1]

1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = \text{konst.} \quad (7)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (8)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = \text{konst.} \quad (9)$$

Mit $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$ und k gemäss Abschnitt zum Vollzylinder.

1.2.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe s_{skin} , kann das Rohr als dünnwandig betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

wobei:

r_1 : mittlerer Radius des Metallrohrs

d : Wandstärke des Metallrohrs

1.2.3 B-Feld, Näherungslösung für numerische Probleme

Bei hohen Frequenzen können sich für numerische Software Probleme ergeben, wenn ihre Rechenpräzision nicht ausreicht. Da hier Python benutzt wurde, war dies zwar kein Problem, aber die folgenden Formeln wurden zum Vergleich mit der exakten Lösung trotzdem implementiert:

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = konst. \quad (11)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{(\frac{u_1}{2} + 1) \cdot \exp(u - u_1) - (\frac{u_1}{2} - 1) \cdot \exp(-u + u_1)}{(\frac{u_1}{2} + 1) \cdot \exp(u_2 - u_1) - (\frac{u_1}{2} - 1) \cdot \exp(-u_2 + u_1)} \cdot B_0 \quad (12)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = konst. \quad (13)$$

wobei:

$$u_{1,2} = i \cdot k \cdot r_{1,2}$$

$$u = i \cdot k \cdot r$$

1.2.4 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Die exakten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = & \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right. \\ & \left. + \frac{2 r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$L = Re \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \quad R = -\omega \cdot Im \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0} \quad (15)$$

$$(16)$$

Näherungen für numerische Problemfälle:

$$\begin{aligned} enum = & \left(\frac{u_1}{2} + 1 \right) \cdot \left((u_2 - 1) \cdot \exp(u_2 - u_1) - (u_1 - 1) \right) \\ & + \left(\frac{u_1}{2} - 1 \right) \cdot \left((u_2 + 1) \cdot \exp(-u_2 + u_1) - (u_1 + 1) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$denom = \left(\frac{u_1}{2} + 1 \right) \cdot \exp(u_2 - u_1) - \left(\frac{u_1}{2} - 1 \right) \cdot \exp(-u_2 + u_1) \quad (18)$$

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(2 \cdot \frac{r_1^2}{denom} - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{enum}{denom} + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \quad (19)$$

$$(20)$$

Die Beziehung zwischen dem normierten Fluss und L und R ist identisch wie bei der exakten Lösung.

2 Durchführung

Das Herzstück des Versuches bildet eine zylindrische Kupferspule (Draht aufgewickelt auf einen Acrylglas-Zylinder), in deren Mitte eine kleine Öffnung eingelassen ist, durch die eine Messsonde eingeführt werden kann.

In diese Zylinderspule werden die Versuchsproben eingeführt (Hohl- oder Vollzylinder), wobei diese ebenfalls Aussparungen für das Einführen der Messsonde aufweisen. Der Vollzylinder ist dabei in zwei Hälften (geschnitten im Querschnitt) ausgewührt.

Der Messbereich ist axial zentriert, um Randeffekte beim Magnetfeld der Zylinderspule vernachlässigen zu können.

Der Messsensor ist an einer Schublehre (auch bekannt als Messschieber) angebracht, womit seine radiale Position gemessen werden kann.

Die Einheit der Messwerte, welche das Oszilloskop an den Benutzer ausgibt, ist Volt, daher wird diese auch auf sämtlichen Tabellen und Plots benutzt. Da es beim Versuch um das Fitten von Kurven in ihrer *Form* an Messwerte und nicht um die absoluten Werte des B-Feldes geht, ist dies nicht weiter tragisch.

2.1 Versuchsanordnung

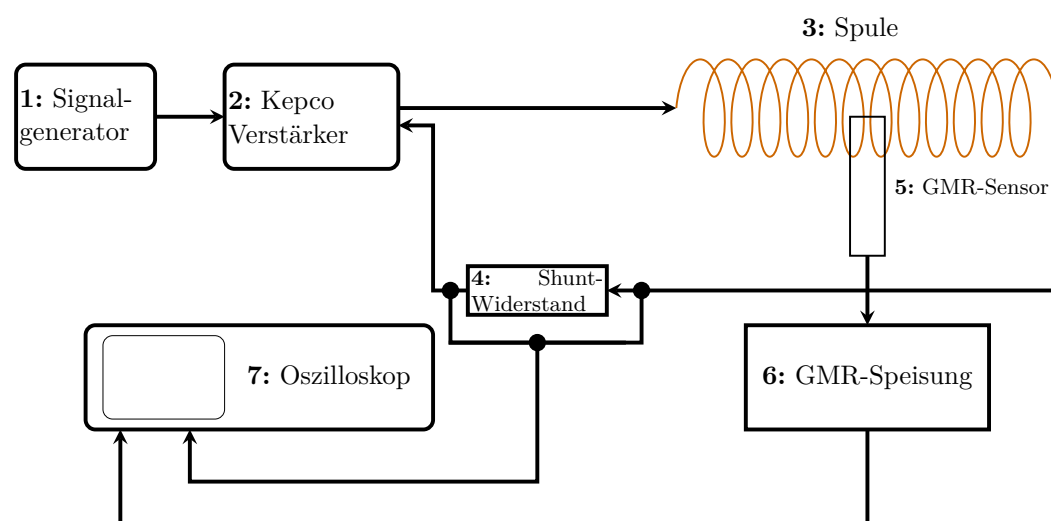


Abbildung 4: Versuchsanordnung, schematisch

Im Vergleich zur Versuchsanleitung wurde die Versuchsanordnung etwas aktualisiert (insbesondere wurde das Oszilloskop durch ein moderneres Gerät ersetzt), daher ist das dortige Schema des Versuchsaufbaus nicht mehr ganz aktuell. Abbildung

4 enthält deshalb ein Schema, das dem Aufbau am Tag des Versuchs entspricht (Abbildungen 5 und 6).

Die Nummerierung der Geräte in den Abbildungen 4, 5 und 6 und in der folgenden Auflistung ist konsistent.

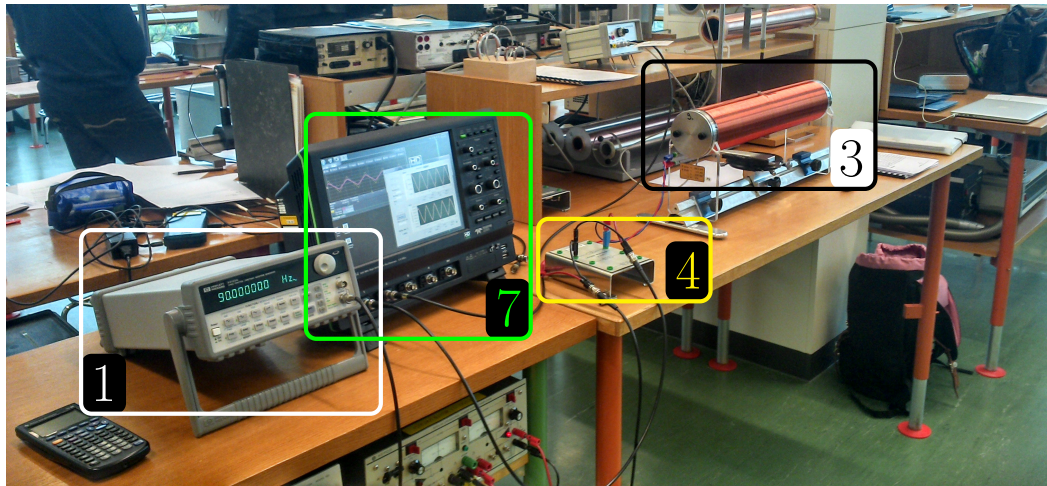


Abbildung 5: Versuchsanordnung

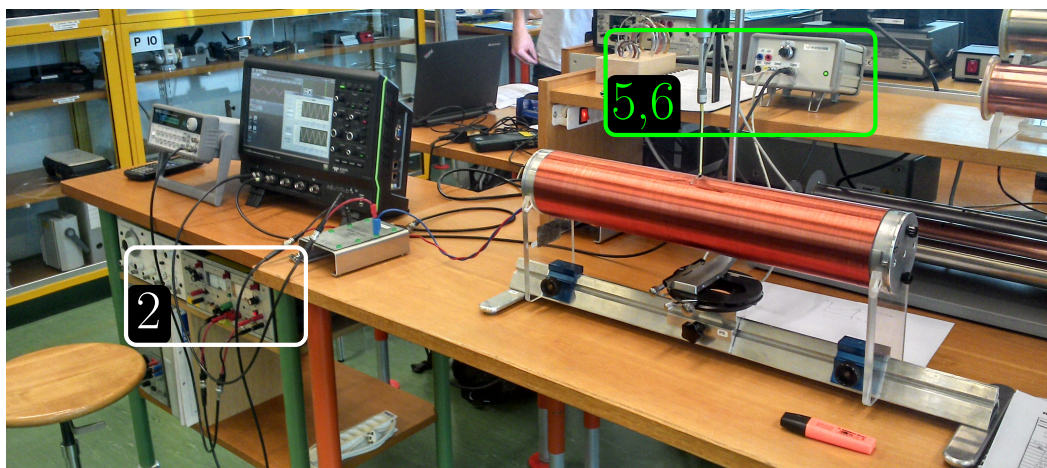


Abbildung 6: Versuchsanordnung

Die verwendeten Geräte waren:

1. Signalgenerator: Hewlett-Packard 33120A
2. Verstärker: Kepco
3. Zylinderspule aus Kupferdraht:

- 98 mm Innendurchmesser
 - 0.8 mm Drahtdurchmesser
 - 500 mm Länge
 - 574 Windungen
4. Shunt-Widerstand: $1\ \Omega$, 50 W
 5. GMR-Sonde Honeywell SS94A1F
 6. GMR-Speisebox zugehörig zu Sonde Honeywell SS94A1F
 7. Oszilloskop: Teledyne Lecroy HD06054

2.2 Messvorgang/Messmethoden

Bei der Messung wurde jeweils eine Messprobe ins Innere der Zylinderspule eingeführt wie in den Abbildungen 1 und 2 auf Seite 1 respektive 3 dargestellt.

Anschliessend wurden folgende Messungen zur Erfassung des B-Feldes durchgeführt:

- Vollzylinder Aluminium:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)
 - über den ganzen Radius variierende Position, axial zentriert, bei fixierter tiefer Frequenz (30 Hz) (Abbildung 8) und
 - über die äussere Hälfte des Radius variierende Position, axial zentriert, bei fixierter hoher Frequenz (450 Hz) (Abbildung 9).
- Hohlzylinder Kupfer:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)
- Hohlzylinder rostfreier Stahl:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)

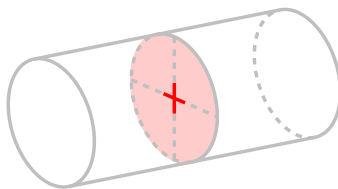


Abbildung 7: Sonde ist axial und radial zentriert fixiert.

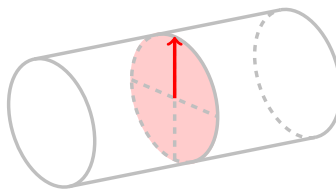


Abbildung 8: Sonde läuft den gesamten Radius ab, axial zentriert.

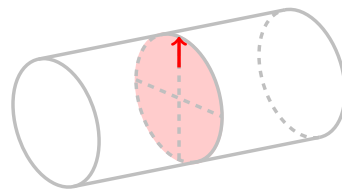


Abbildung 9: Sonde läuft den halben Radius ab, axial zentriert.

2.3 Proben

Es wurden drei Versuchsobjekte benutzt:

- Hohlzylinder aus Kupfer:
 - 70 mm Aussendurchmesser
 - 60 mm Innendurchmesser
 - 500 mm Länge
- Hohlzylinder aus rostfreiem Stahl:
 - 70 mm Aussendurchmesser
 - 60 mm Innendurchmesser
 - 500 mm Länge
- Vollzylinder aus Aluminium:
 - 90 mm Durchmesser
 - 500 mm Länge (verteilt auf zwei Hälften)

Die Leitwerte der Proben waren nicht bekannt und sollten via Fit an die Messpunkte bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Literaturwerte und die experimentell bestimmten Werte beträchtlich voneinander abweichen können (je nach Herstellungsprozess können Metalle, insbesondere Aluminium, stark variierende elektrische Leitfähigkeiten aufweisen). Siehe dazu das Kapitel *Auswertung*.

2.4 Messungen

Die Messwerte wurden auf dem Oszilloskop mit einer vom Dozenten geschriebenen Spezialsoftware ausgelesen. Diese wertet dabei die rohen Messpunkte (Spannung, welche von der GMR-Sonde via Speisegerät an das Oszilloskop geliefert wird) aus und errechnet einen passenden Fit an diese Spannungswerte.

Die Amplitude dieses Fits sowie die Phasenverschiebung zwischen dem Fit an die GMR-Messwerte und dem Fit an die zum äusseren B-Feld gehörenden Messwerte (repräsentiert durch die Shunt-Spannung) werden anschliessend an den Benutzer ausgegeben. Es sind diese Werte, welche in den Messprotokollen erfasst sind.

Die Shunt-Spannung wurde konstant bei 200 mV gehalten (somit der Spulenstrom bei 200 mA. Bei der ersten Messreihe wurde sie zur Kontrolle erfasst, anschliessend nicht mehr. Die ermittelten Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden.

Tabelle 1: Frequenz und Shunt-Spannung beim Frequenzgang von Zylinderspule mit Kupferrohr

Frequenz (Hz)	$V_{R_{Shunt}}$ (mV)	Frequenz (Hz)	$V_{R_{Shunt}}$ (mV)
1	195.3	200	200.0
10	200.0	400	200.0
20	200.0	600	199.7
40	200.3	800	200.5
80	200.0	1000	200.2
120	200.1	1200	200.0
160	200.1	1500	199.9

Bei gewissen Versuchen die schwankten die ausgegebenen Werte merklich (die Phase war davon stärker betroffen als die Amplitude), was ein gutes Auslesen zeitweise erschwerte. Bei den betroffenen Messungen ist dies im Kapitel *Auswertung* jeweils angemerkt.

Im Allgemeinen war das Durchführen des Versuches dank der Software jedoch eine komfortable Angelegenheit, und wie man im Kapitel *Auswertung* sehen wird, decken sich die ermittelten Messwerte im Grossen und Ganzen zufriedenstellend mit der Theorie und sind anscheinend von guter Qualität.

Die Messprotokolle sind in Anhang zu finden.

3 Auswertung

Anmerkung zu den Messprotokollen: Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen nicht immer konsistent.

3.1 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Grössen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *QtiPlot* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes). Die Fitfunktion wird dabei optisch an die Messpunkte angepasst, nicht mit strikten mathematischen Methoden.

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Tools an; der Autor hat sich hier aus Gründen der persönlichen Präferenz für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante).

3.1.1 Vorgehen Manuelles Fitting

Im Allgemeinen wurde dabei folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
 - Die Leitfähigkeit σ des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
 - und den Betrag $|B_0|$ des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von $|B_0|$ abhängt (ersichtlich aus Gleichung 2 auf Seite 1 sowie Gleichung 7 auf Seite 3), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von σ einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, kann man mittels Tunen von $|B_0|$ die Kurve für die Messpunkte von $|\vec{B}|$ anpassen.
- Abschliessend kann man noch iterativ optimieren, bis die Fitfunktion den Verlauf der Messpunkte optisch zufriedenstellend repräsentiert.

Für die genaue algorithmische Implementierung sei hier auf den Python-Quellcode verwiesen.

3.1.2 Listings

Die Listings mit den Parametern, welche zum Erstellen eines bestimmten Plots benutzt worden sind, sind in Tabellen in der Nähe der zugehörigen Plots aufgeführt.

Die Werte werden direkt von den Python-Scripts in `*.tex`-Files geschrieben und in dieses Dokument integriert. Dies garantiert, dass die Plots und die aufgesisteten Parameter übereinstimmen; Tippfehler beim Abschreiben der Werte werden vermieden (und es erspart Arbeit).

Die Werte in den Tabellen sind jeweils gerundet, Python arbeitet natürlich mit viel mehr Dezimalstellen. Die Werte sind in ihrer vollen Präzision im \LaTeX -Quellcode zu finden [3].

3.2 Vollzylinder

Mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder wurden drei Messreihen durchgeführt:

- Frequenzgang des B-Feldes,
- radialer Verlauf des B-Feldes bei niedriger Frequenz (30 Hz),
- und radialer Verlauf des B-Feldes bei hoher Frequenz (450 Hz).

Dabei wurden jeweils Betrag und Phase des Magnetfeldes ausgemessen. Zu den Messwerten wurden anschliessend folgende Fitkurven erstellt:

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- radialer Verlauf bei tiefer Frequenz, exakte Lösung,
- Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf niedrige Frequenz (Überprüfung, dass es auch tatsächlich eine Hochfrequenznäherung ist),
- radialer Verlauf bei hoher Frequenz, exakte Lösung,
- sowie die Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf hohe Frequenz.

Zudem wurden als Ergänzung noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Vollzylinder erstellt, basierend auf den Werten für die Leitfähigkeit und das externe Magnetfeld, welche aus den Fitfunktionen ermittelt worden waren.

3.2.1 Frequenzgang

Die Sonde war fix positioniert gemäss Abbildung 10. Gemessen wurden Betrag und Phase des B-Feldes an dieser Position bei ansteigender Frequenz (Tabelle 2).

Tabelle 2: Messwerte Frequenzgang Vollzylinder

f (Hz)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
1	5.4	69
5	26	65
10	50	57
15	69	48
20	85	40
30	111	28.5
40	132	21
60	166	12.5
80	196	8
100	220	5.4
120	243	3.6
160	283	1.9
200	320	1
250	350	0.6

Tabelle 3: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 10

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$22 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

Als Fit-Funktion wurde Gleichung 2 benutzt, jedoch mit der Frequenz statt des Radius variierend. Für mehr Informationen siehe Kapitel *Arbeitsgrundlagen* ab Seite 2 sowie der Python-Code der Implementation [3]. Tabelle 3 listet die eingesetzten Parameter und einen Referenzwert aus der Literatur (Kuchling [4]) auf.

$$\hat{B}(f) = \frac{J_0(k(f) \cdot r)}{J_0(k(f) \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Phase und Betrag des B-Feldes wurden separat gefittet, die beiden ermittelten Leitfähigkeiten $\sigma_{Fit,|\hat{B}|}$ und $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ liegen relative nahe zusammen, weichen jedoch stark von Kuchlings Literaturwert σ_{Kuch} ab.

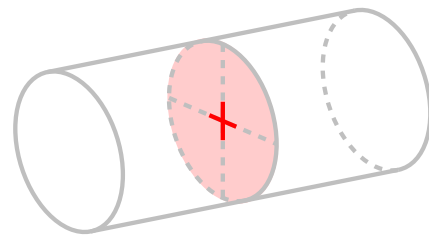


Abbildung 10: Sensorplatzierung während Messung

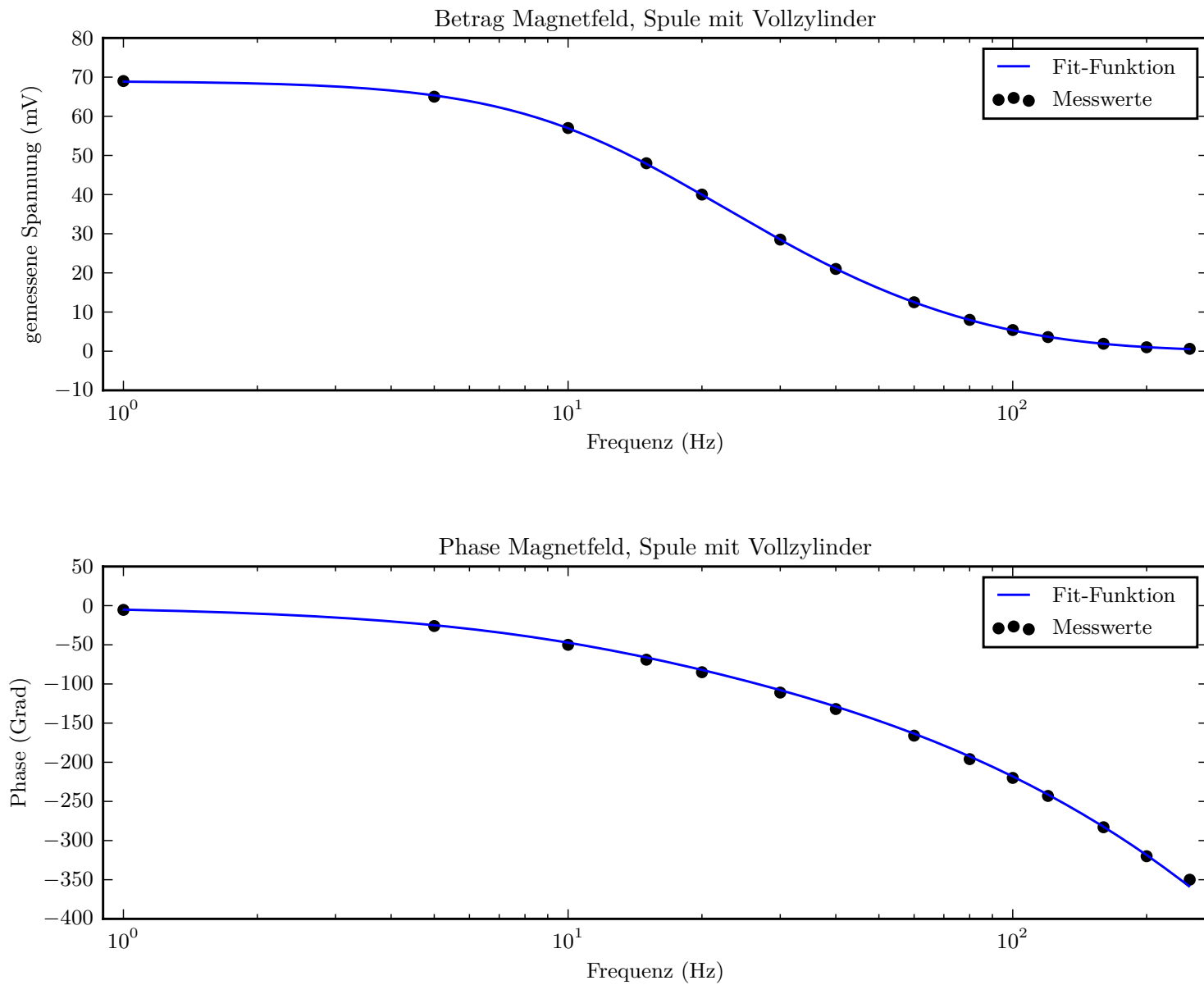


Abbildung 11: Frequenzgang Zylinderspule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder. Betrag und Phase wurden jeweils separat gefittet, was zwei leicht verschiedene Werte für die Leitfähigkeit des verwendeten Aluminiums liefert.

3.2.2 Positionsbezogener Verlauf, niedrige Frequenz

In dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten (30 Hz), und die Position der Messsonde wurde radial variiert zwischen Zylinderachse und Aussenrand (Abbildung 15). Der Skineffekt ist merklich schwächer als bei höheren Frequenzen (Abschnitt 3.2.3, Seite 15).

Tabelle 4: Messwerte für Vollzylinder bei 30 Hz

r (mm)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
0	111	28.6
5	109	28.5
10	104	28.7
15	94	29
20	81	30
25	65	33
30	48.5	38
35	32	45
40	16	54
45	2.7	62
50	0	37

Tabelle 5: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 15

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$23 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	0 m
B_0	$66 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	30 Hz

Als Fit-Funktion wurde wiederum Gleichung 2 von Seite 2 benutzt, diesmal mit dem Radius als Variable. Tabelle 5 listet die eingesetzten Parameter und einen Referenzwert aus der Literatur (Kuchling [4]) auf.

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Es konnte eine sehr zufriedenstellende Fit-Funktion für die Messwerte gefunden werden. Jedoch weicht die daraus bestimmte Leitfähigkeit σ_{Fit} recht beträchtlich von Kuchlings Wert σ_{Kuch} ab.

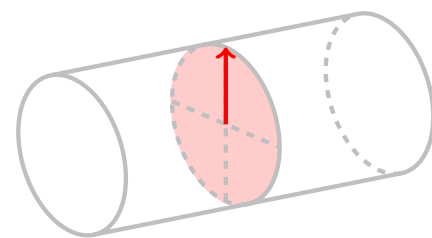


Abbildung 12: Sensorplatzierung während Messung

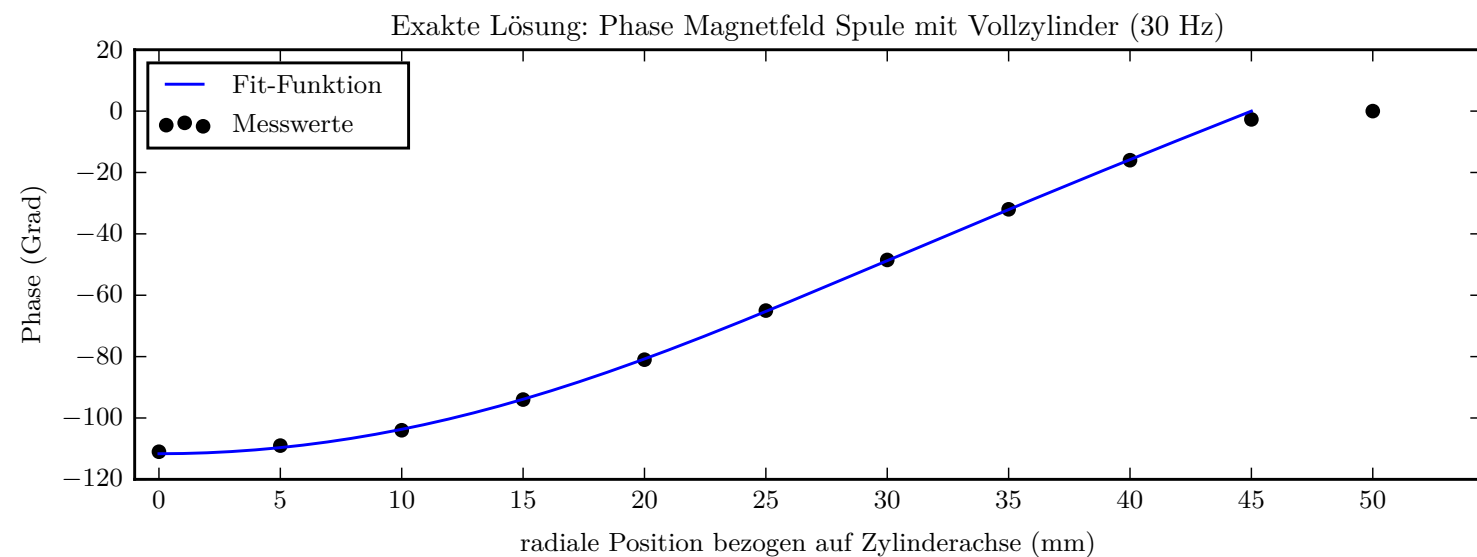
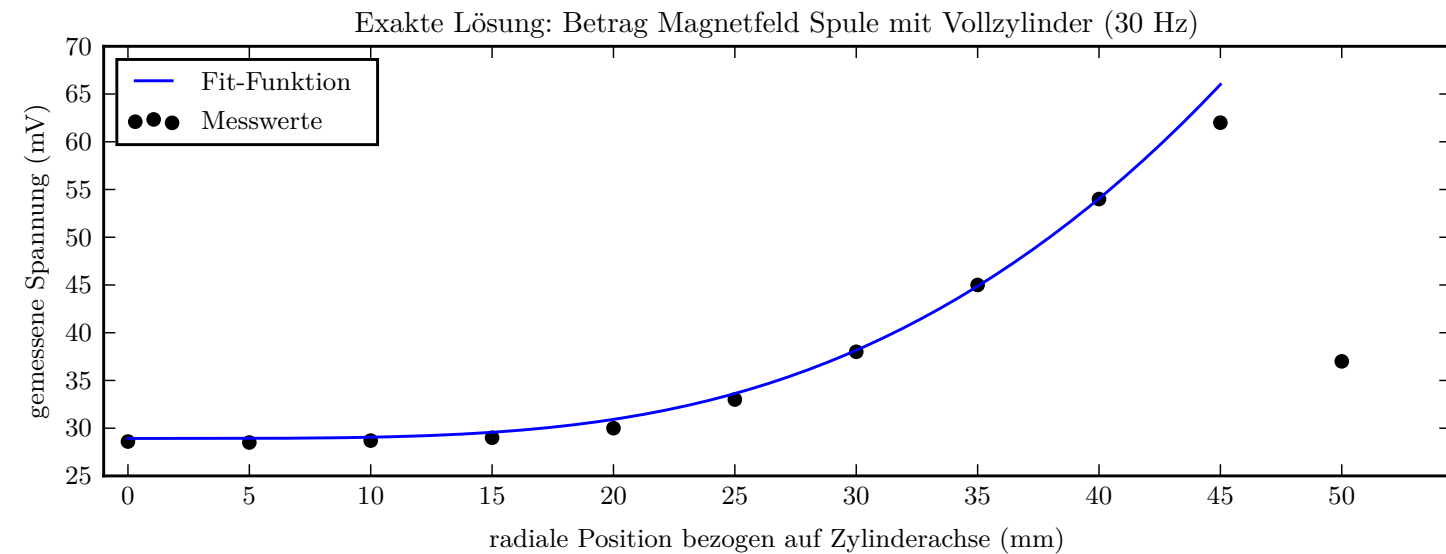


Abbildung 13: Radialer Verlauf des B-Feldes bei einer Frequenz von 30 Hz. Betrag und Phase wurden wie beim Frequenzgang separat gefittet. Der Radius des Zylinders betrug 45 mm, womit der Messpunkt an dieser Position in den Augen des Autors aufgrund von Randeffekten mit Vorsicht zu genießen ist, und der äusserste Messpunkt wurde für den Fit nicht berücksichtigt.

Da in den Augen des Autors auch ruhig mal verifiziert werden darf, dass eine Herangehensweise nicht funktioniert, wurde hier aus Neugier ebenfalls ebenfalls noch die Hochfrequenznäherung auf den radialen Verlauf bei 30 Hz angewandt. Wenig überraschend erwies sich die Methode in der Tat als ungeeignet für diesen Frequenzbereich.

Es konnte keine Kombination für B_0 und σ ermittelt werden, welche einen zufriedenstellenden Fit für die Messwerte ergeben hätte. Selbst wenn solche Parameter hätten gefunden werden können, wären sie vermutlich so stark von den mit den restlichen Fits ermittelten Werten abgewichen, dass sie unbrauchbar gewesen wären (siehe Tabelle 6). Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 6: Paramaterwerte für Fit-Funktion aus Abbildung 14

σ_{Fit}	$17 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$17 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	0 m
B_0	$62 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	30 Hz

Wie man feststellen kann, weicht der ermittelte Wert für die Leitfähigkeit doch beträchtlich von den bisher gesehenen Werten ab.

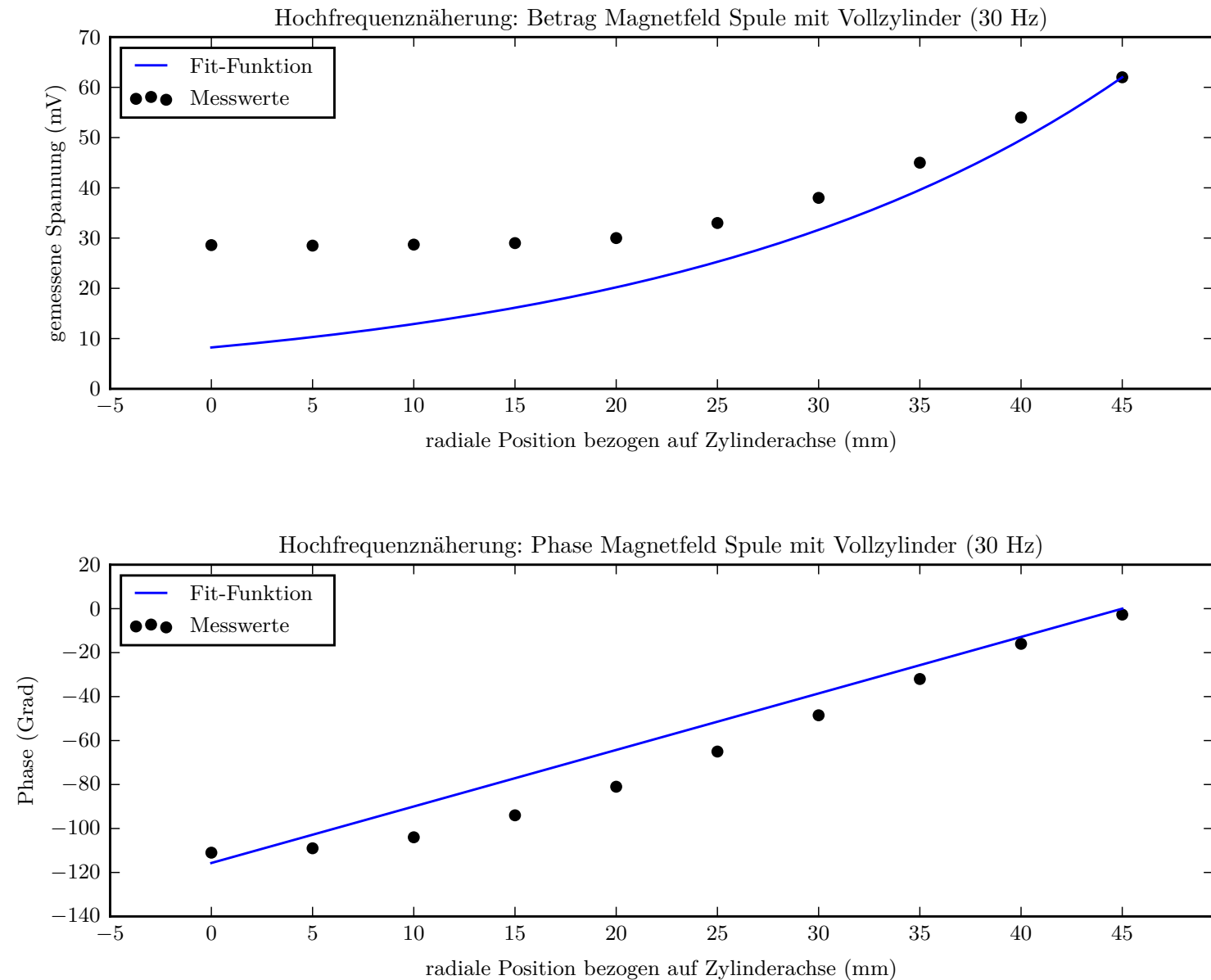


Abbildung 14: Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf des B-Feldes angewandt auf 30 Hz. Da mit keiner Kombination von σ und B_0 für Phase oder Betrag ein zufriedenstellender Fit erreicht werden konnte, wurde auf einen separaten Fit von Phase und Betrag verzichtet.

3.2.3 Hohe Frequenzen

Auch in dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten, jedoch 450 Hz. Zudem wurde nicht der gleiche radiale Bereich ausgemessen: Die Sonde wurde auf halbem Radius positioniert, ansschliessend wurde die Frequenz des externen B-Feldes so weit erhöht, bis gerade noch brauchbare Messwerte abgelesen werden konnten.

Tabelle 7: Messwerte Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz

r (mm)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
25	215	1.5
27.5	183	2.2
30	152	3.6
32.5	125	5.9
35	100	9.5
37.5	73	15.5
40	47	25
42.5	24	39
45	5.2	55
47.5	0.2	57.5
50	0	38

Tabelle 8: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 16.

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$21 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$60 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

Bei der so ermittelten Frequenz wurde dann der radiale Verlauf des B-Feldes auf der restlichen Hälfte gegen den Aussenrand des Vollzylinders ausgemessen (siehe Abbildung 15).

Die erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 7 zu finden.

Als Fit-Funktion wurde hier ebenfalls die Gleichung 2 von Seite 2 benutzt, wobei der Radius die Variable war.

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

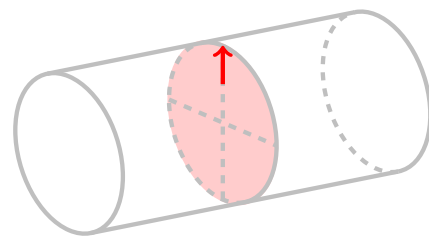


Abbildung 15: Sondenposition während Messung

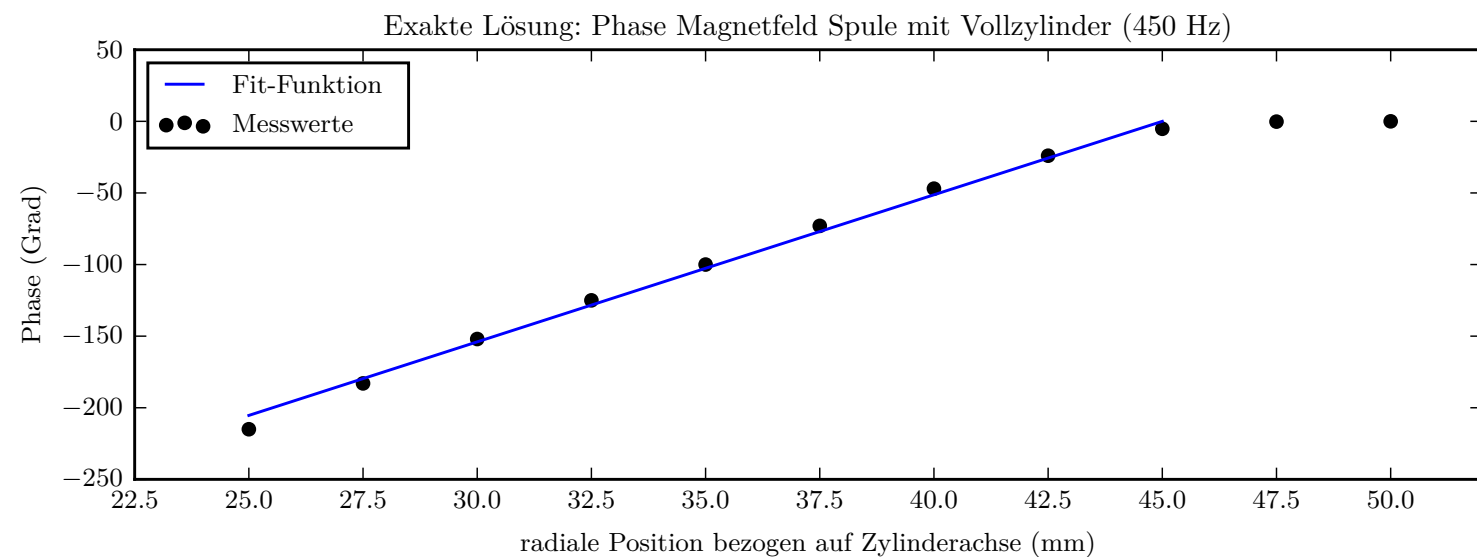
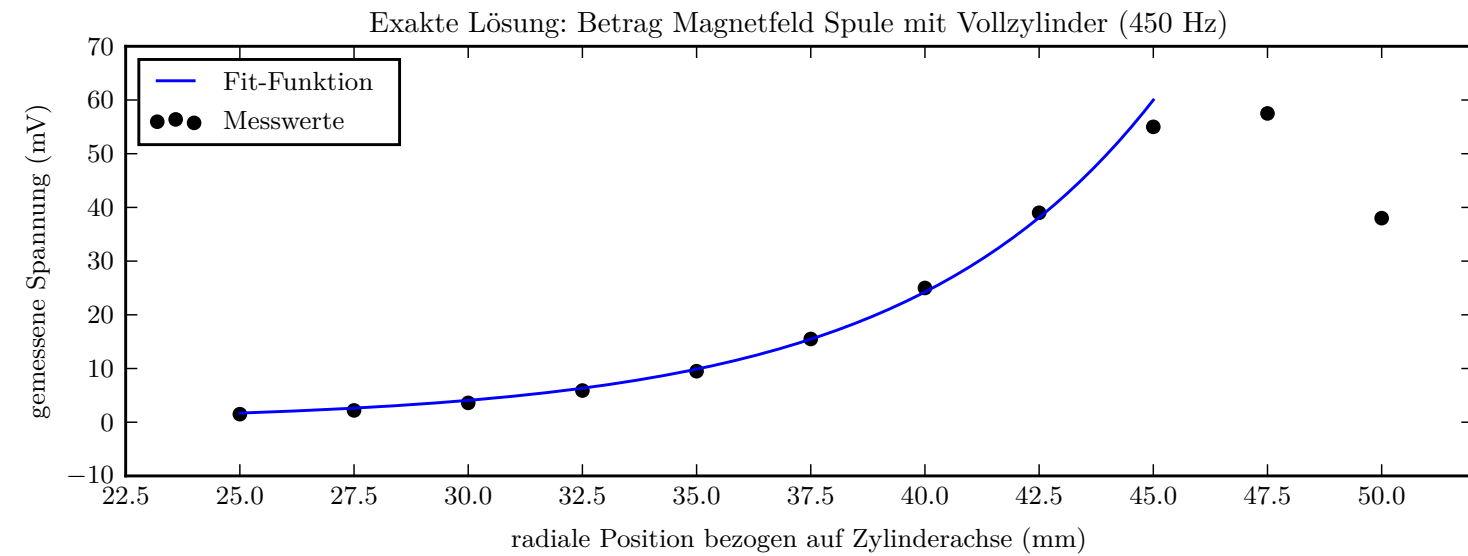


Abbildung 16: Radialer Verlauf des B-Feldes bei 450 Hz. Es gelten die gleichen Überlegungen zu den Randeffekten wie bei 30 Hz. Es fällt auf, dass die Phase nicht ganz optimal passt, und dass der erhaltene Wert $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ für die Leitfähigkeit einiges tiefer als die bisher gesehenen Werte liegt. Der Autor führt dies darauf zurück, dass bei diesem Versuch die Phase im Allgemeinen sehr stark oszillierte (auch der Betrag, wenn auch weniger), was ein genaues Auswerten erschwerte. Man geniesse diese Werte daher mit etwas Vorsicht.

Bei dieser Frequenz liefert die Hochfrequenznäherung nun sehr zufriedenstellende Lösungen, wie in Abbildung 17 zu sehen ist. Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 9: Parameterwerte für Fit-Funktion aus Abbildung 17

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$19 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$60 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

Es fällt auf, dass sowohl Phase wie auch Betrag einen etwas tieferen Wert für σ ergeben als die beim Frequenzgang und bei der radialen Auswertung bei 30 Hz gefundenen Werte. Der Autor führt dies darauf zurück, dass dies einerseits trotz relativ gut passendem Fit immer noch eine Näherungslösung ist, und dass wie bei Abbildung 16 erwähnt das Auslesen der Messwerte bei 450 Hz generell etwas schwieriger war als bei tieferen Frequenzen oder beim Frequenzgang im Zentrum des Zylinders.

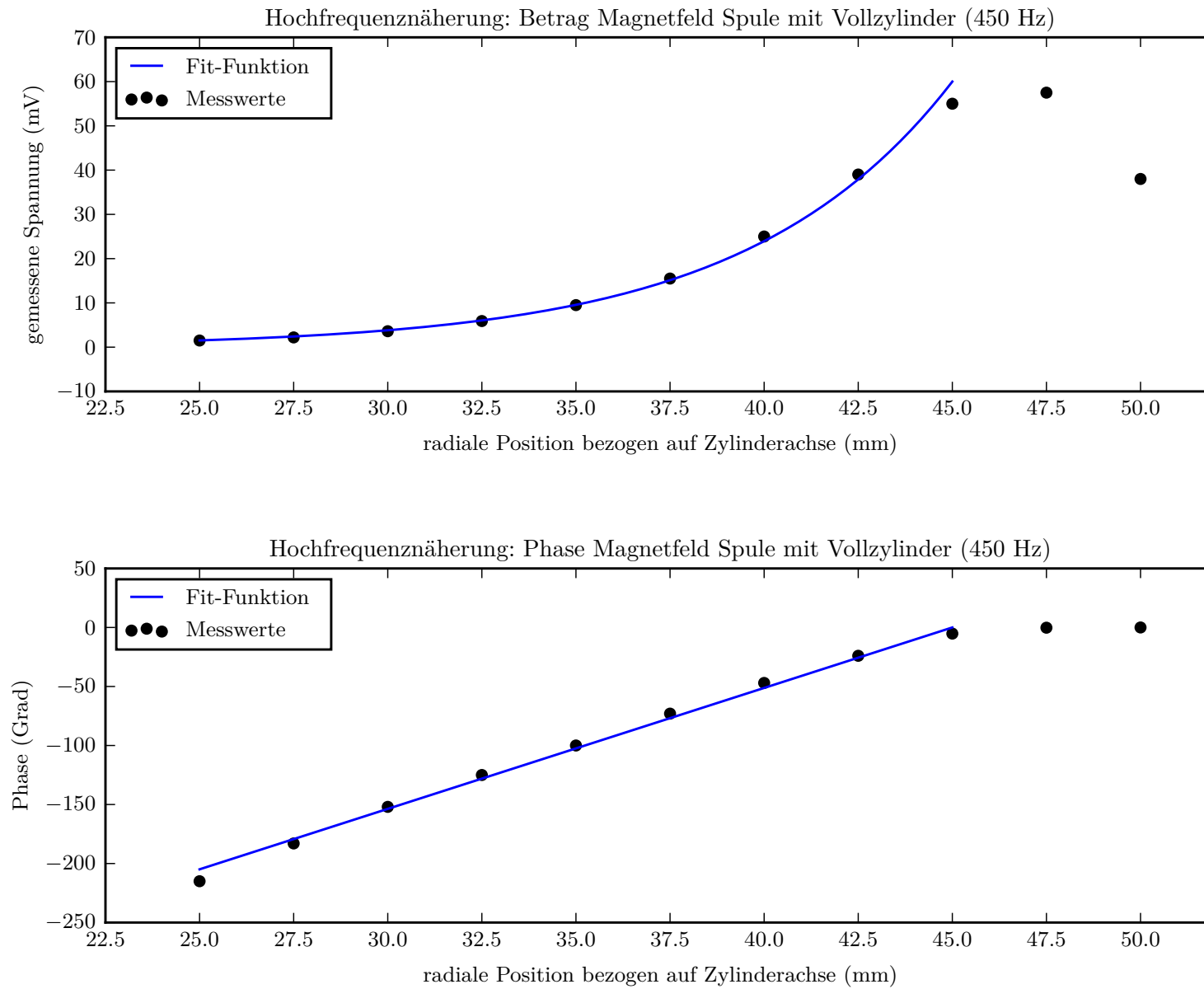


Abbildung 17: Hochfrequenznäherung für 450 Hz. Es gelten die bereits erwähnten Überlegungen betreffend Randeffekten und Ableseschwierigkeiten

3.2.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie erwähnt, wurden keine direkten Messungen von $L_{Spule+Zylinder}$ und $R_{Spule+Zylinder}$ durchgeführt. Mit den Informationen aus den Fits (also primär der dort bestimmten Leitfähigkeit) können jedoch trotzdem Plots erstellt werden.

Es sei hier noch angemerkt, dass die gewählten Werte für B_0 und σ nicht auf strikten Berechnungen begründen. Es wurden anhand der auf die Messwerte gepassten Fits "typische" Werte ausgewählt. Da bei L , R , und dem magnetischen Fluss sowieso keine Messwerte vorhanden sind, ist bei diesen Kurven auch der Verlauf viel wichtiger als die absoluten Werte, womit dieses Verfahren in den Augen des Autors gerechtfertigt ist.

Als Fit-Funktionen wurden die Gleichungen 4 und 5 von Seite 2 verwendet:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + L_{Rand} \quad (4)$$

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Tabelle 10: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 18, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m	r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$	B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570	N_0	570
f_{min}	1 Hz	f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz	f_{max}	250 Hz

Tabelle 11: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 19, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m	r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$	B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570	N_0	570
f_{min}	1 Hz	f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz	f_{max}	250 Hz

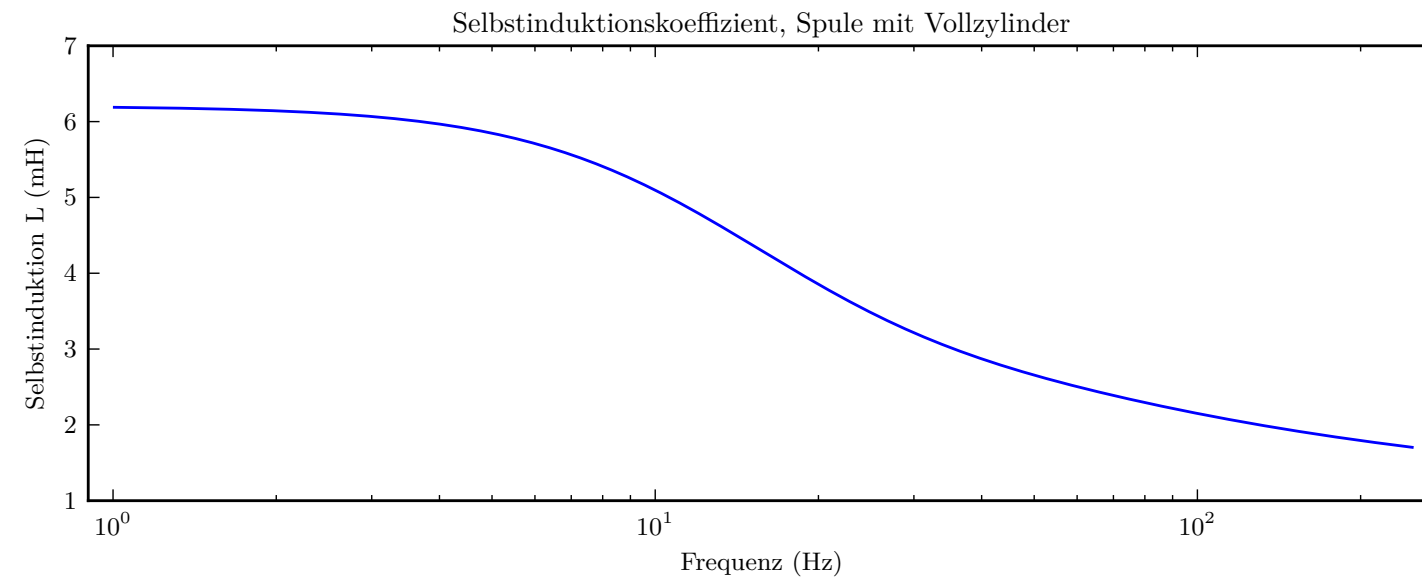


Abbildung 18: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

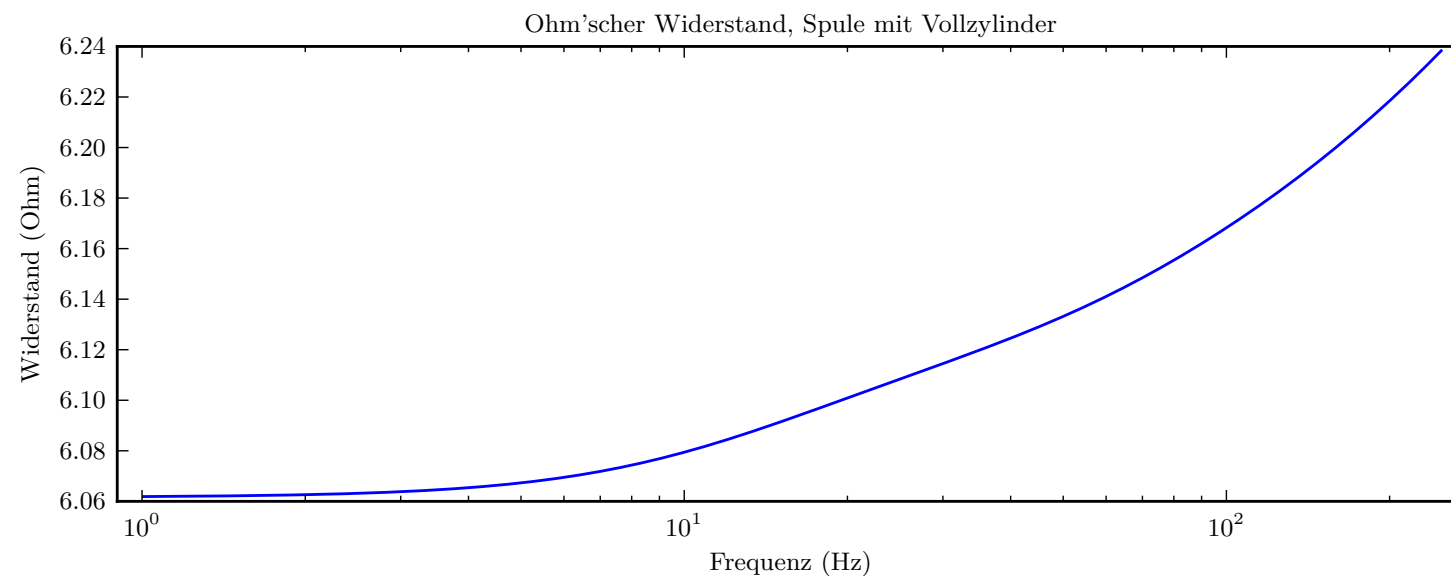


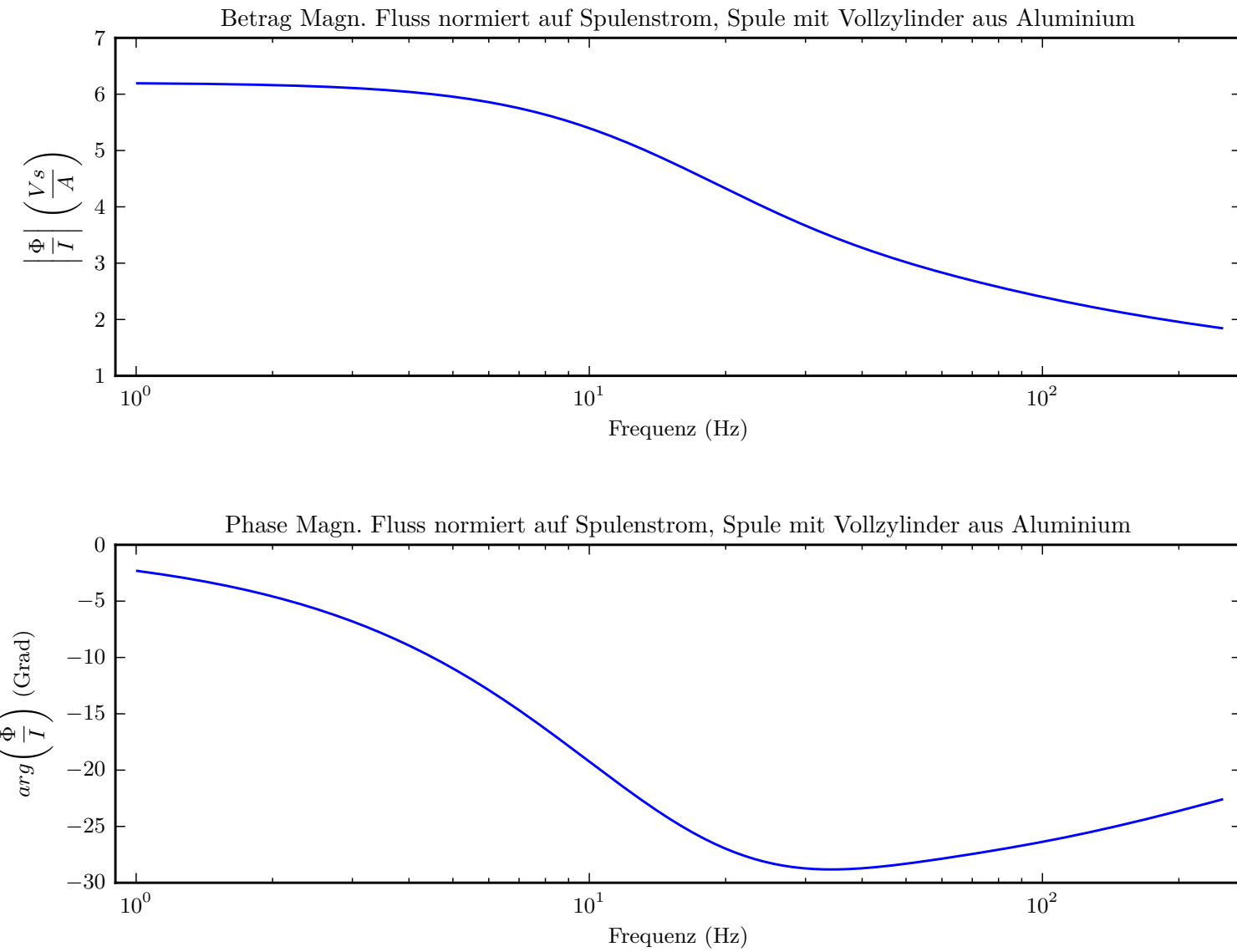
Abbildung 19: Änderung des Ohm'schen Widerstandes von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 12: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 20, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_{PTS}	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

Als Fit-Funktion wurde hier Gleichung 6 von Seite 2 verwendet:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

**Abbildung 20:** Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

3.3 Hohlzylinder

Es wurde die Konfiguration aus Zylinderspule mit einem eingeführten Hohlzylinder ausgemessen, und zwar für zwei Zylinder, einen aus Kupfer und einen aus rostfreiem Stahl.

Da das Magnetfeld im Innenraum des Hohlzylinders konstant ist (siehe Abschnitt 1.2), macht es nicht viel Sinn, radiale Messungen vorzunehmen. Man könnte zwar das variierende radiale Feld innerhalb der Zylinderwand ausmessen, jedoch ist die hier verwendete Versuchsanordnung nicht dazu geeignet. Die Wandstärke ist im Vergleich zur Sondengrösse nicht dick genug und die Messung der Sondenposition nicht präzise genug, um eine vernünftige Anzahl Messungen mit akzeptabler Genauigkeit in der Sondenposition vorzunehmen.

Deshalb wurden bei diesen zwei Versuchsreihen lediglich die Frequenzgänge des B-Feldes im Innenraum der Hohlzylinder gemessen.

Folgende Fitkurven wurden anschliessend erstellt (je für den Kupferzylinder und den Stahlzylinder):

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- und Frequenzgang, Näherungslösung.

Wie beim Vollzylinder wurden auch hier noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Hohlzylinder erstellt, basierend auf den mittels Fits ermittelten Parametern.

3.3.1 Kupfer

Es wurde das B-Feld in Abhängigkeit der Frequenz gemessen, wobei die Messsonde axial und radial zentriert im Innern des Hohlzylinders war (siehe Abbildung 21).

Als Formel für die Fit-Funktion wurde Gleichung 7 von Seite 3 benutzt:

$$\hat{B}(r=0) = \hat{B}(r=r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (7)$$

Tabelle 20 beinhaltet die in die Gleichung eingesetzten Parameter, zusammen mit einem Literaturwert für die Leitfähigkeit von Kupfer aus Horst Kuchlings *Taschenbuch der Physik* [4].

Tabelle 13: Messwerte Kupferrohr

f (Hz)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
1	2	70.0
10	19.2	66.0
20	35.5	57.8
40	56.7	41.8
80	76.7	24.4
120	87	16.9
160	94	12.7
200	100	10.0
400	121	4.8
600	140	2.9
800	155	1.9
1000	170	1.4
1200	180	1.0
1500	200	0.7

Tabelle 14: Parameter für Fit-Funktion in Abbildung 22

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$53 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$58 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

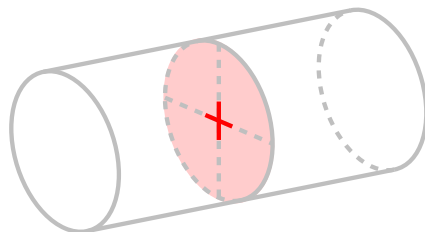


Abbildung 21: Sensorposition während Messung

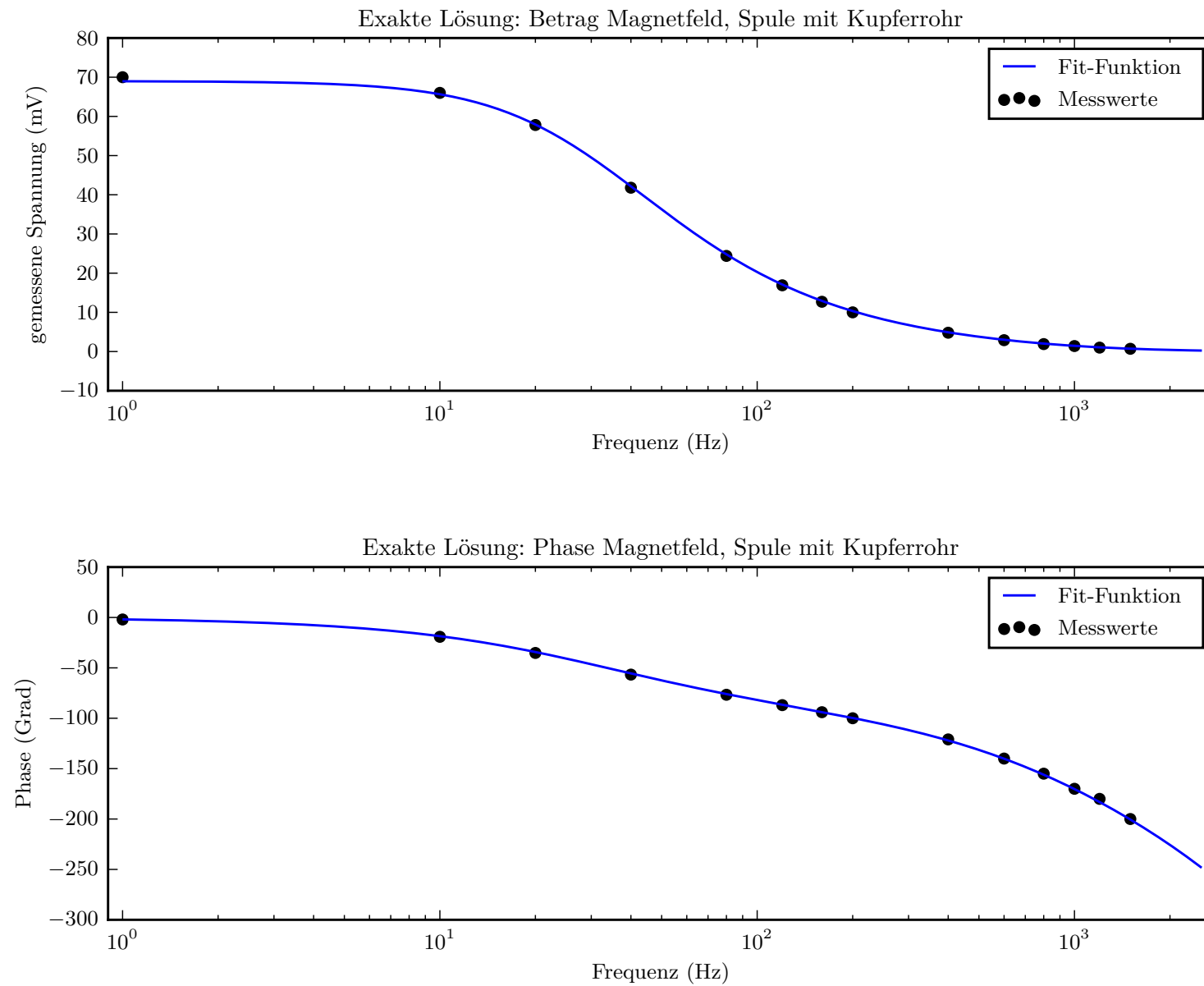


Abbildung 22: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Es wurde für den Betrag und die Phase jeweils ein Fit durchgeführt, wobei sich die beiden Werte $\sigma_{Fit,|\hat{B}|}$ und $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ nicht stark unterscheiden und beide auch nicht besonders weit vom Literaturwert σ_{Kuch} entfernt liegen (insb. verglichen mit dem Aluminium-Vollzylinder).

Für die Näherung eines dünnwandigen Rohres (also bei tiefen Frequenzen) wurde Gleichung 10 von Seite 3 benutzt:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

Bei der genäherten Fit-Funktion fällt auf, dass der Betrag der Näherungslösung über den gesamten Frequenzbereich ziemlich genau ist und nicht bedeutend von den Messwerten abweicht. Der Phasenverlauf divergiert jedoch stark von den Messwerten, sobald die Wanddicke des Zylinderrohrs grösser als die Eindringtiefe s_{skin} wird (was sich auch mit der Theorie deckt).

In Abbildung 23 ist daher das Verhältnis von Wandstärke und Eindringtiefe ebenfalls dargestellt.

Tabelle 15: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 23

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$53 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$58 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

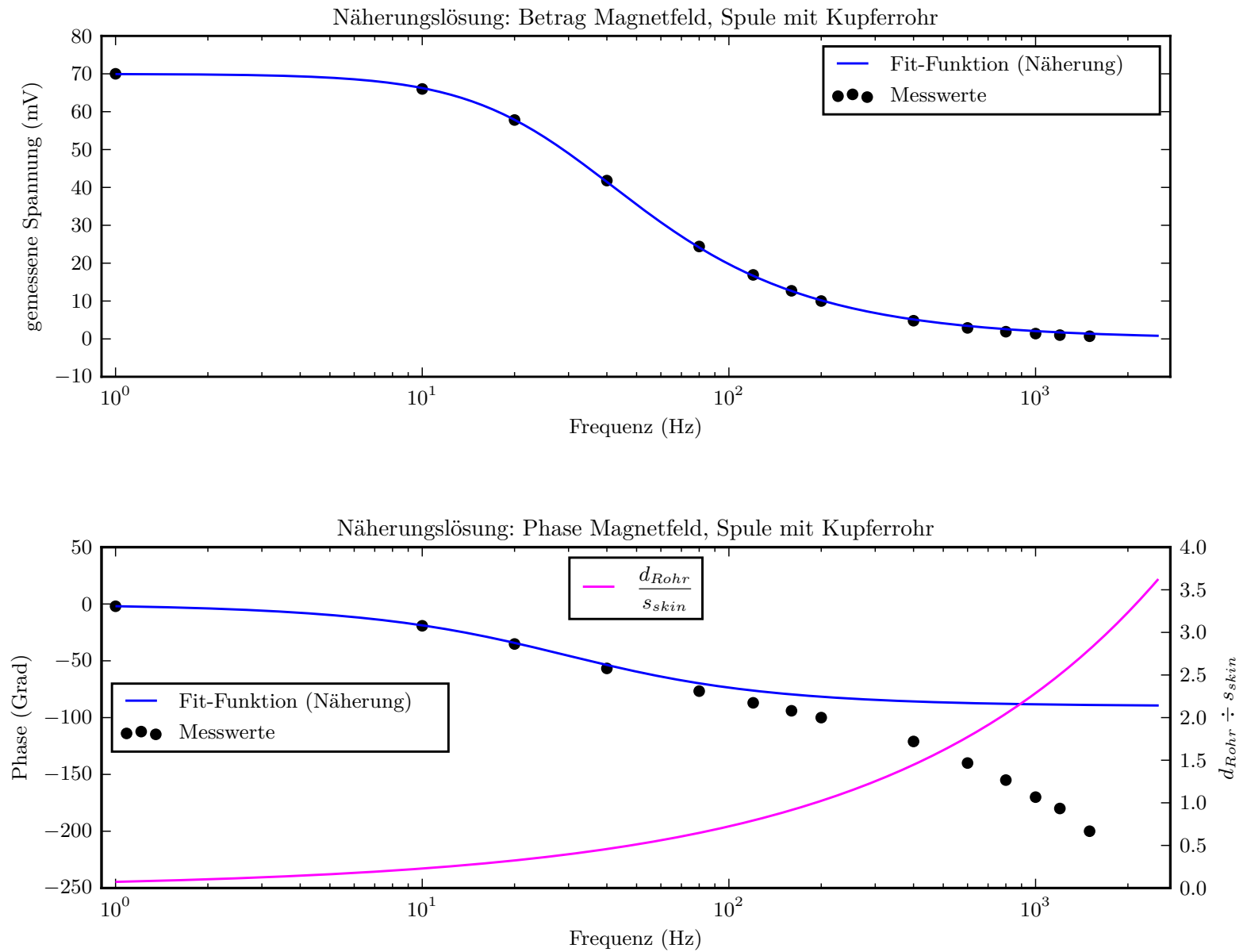


Abbildung 23: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Es wurde nur auf den Betrag gefittet wegen der starken Abweichung der Phase von den Messwerten, daher lieferte diese Näherung lediglich einen Wert für σ .

Bei hohen Frequenzen können numerische Probleme für gewisse Softwarepakete auftreten (Division durch die Differenz zweier beinahe gleicher Zahlen führt zu Stellenauslöschung und Division durch null). Für solche Fälle kann man die Näherungen aus den Gleichungen 11 von Seite 4 verwenden.

Für Python ist dies grundsätzlich nicht wirklich ein Problem, da man die Präzision ohne Probleme auf tausende von Dezimalstellen hinaufschrauben kann (natürlich mit entsprechend verlängerter Berechnungszeit), aber der Vollständigkeit halber wurden die Näherungsfunktionen trotzdem ausgewertet, um zu überprüfen, wie nahe sie an die exakte Lösung kommen.

Siehe auch die magenta-farbenen Kurvenverläufe in Abbildungen 25, 26 und 27 auf den Seiten 23 und 24.

Tabelle 16: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 24

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$53 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$53 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$58 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

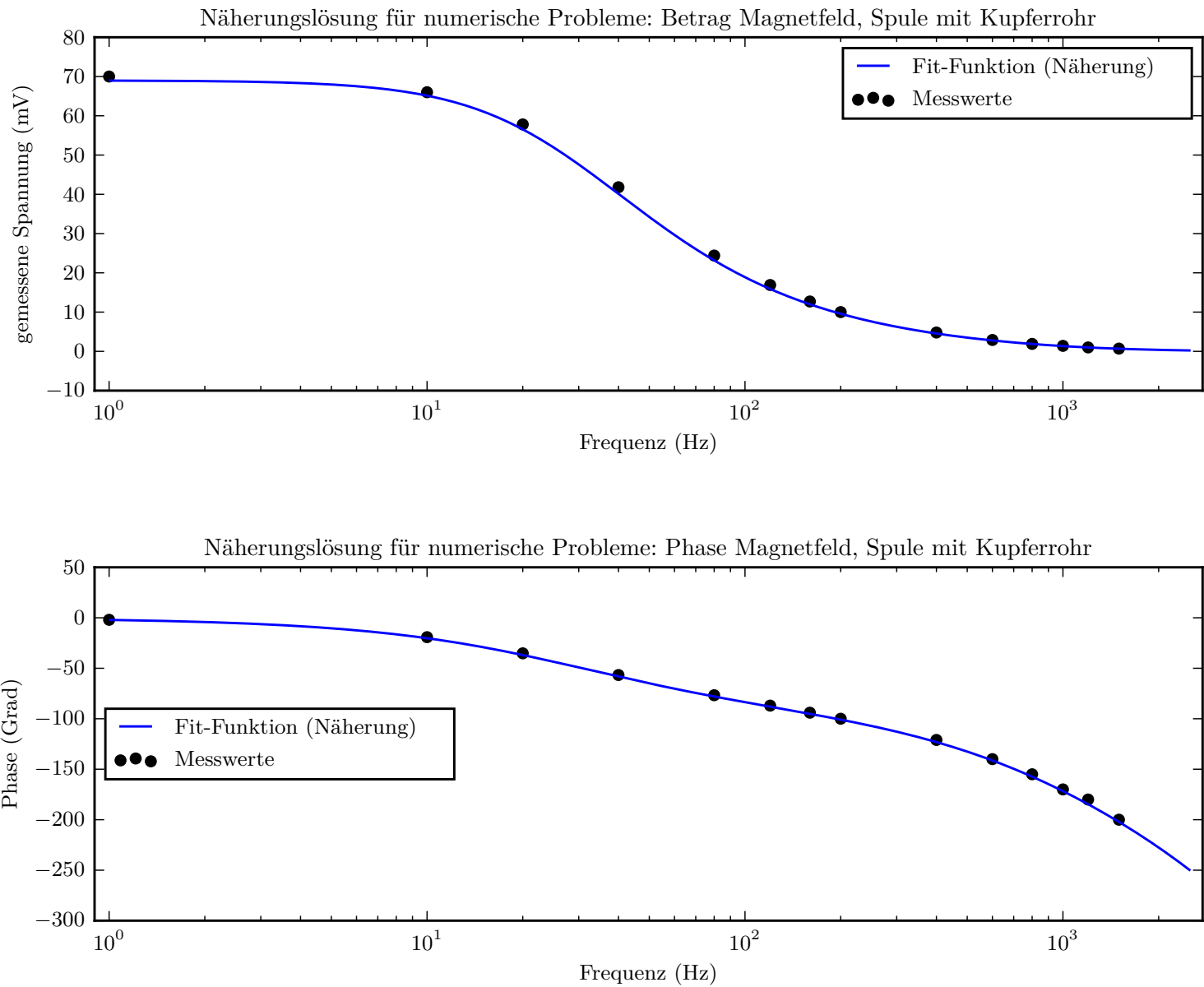


Abbildung 24: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Betrag und Phase wurden separat gefittet.

3.3.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter. Es gelten auch hier die dort bereits erwähnten Überlegungen zu der Wahl von σ und B_0 , und die Wichtigkeit der Kurvenformen vor absoluten Werten.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\Phi}{I}$ wurden die Formeln von Seite 4 verwendet, sowohl für die exakte wie auch die genäherte Lösung. Es soll aus Platzgründen an dieser Stelle nicht der ganze Formelberg nochmals notiert werden.

Tabelle 17: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 25, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$53 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

Tabelle 18: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 26, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$R_{\Omega,0}$	6Ω
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

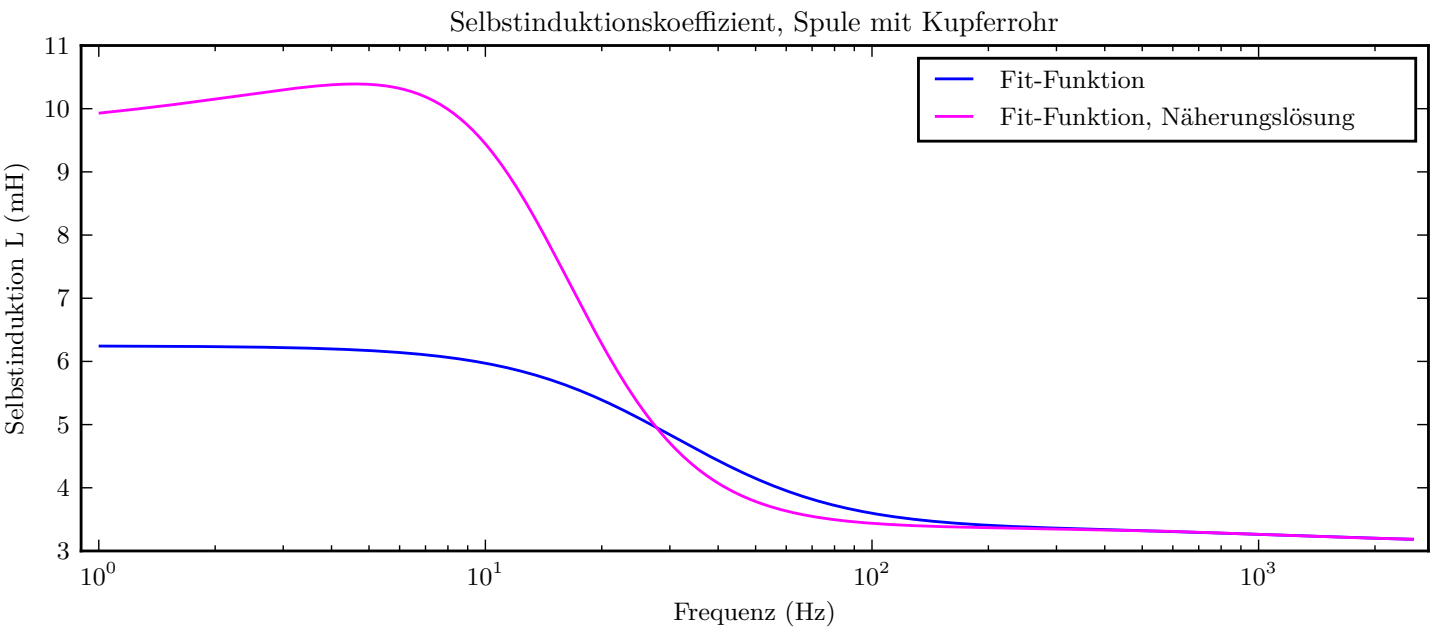


Abbildung 25: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

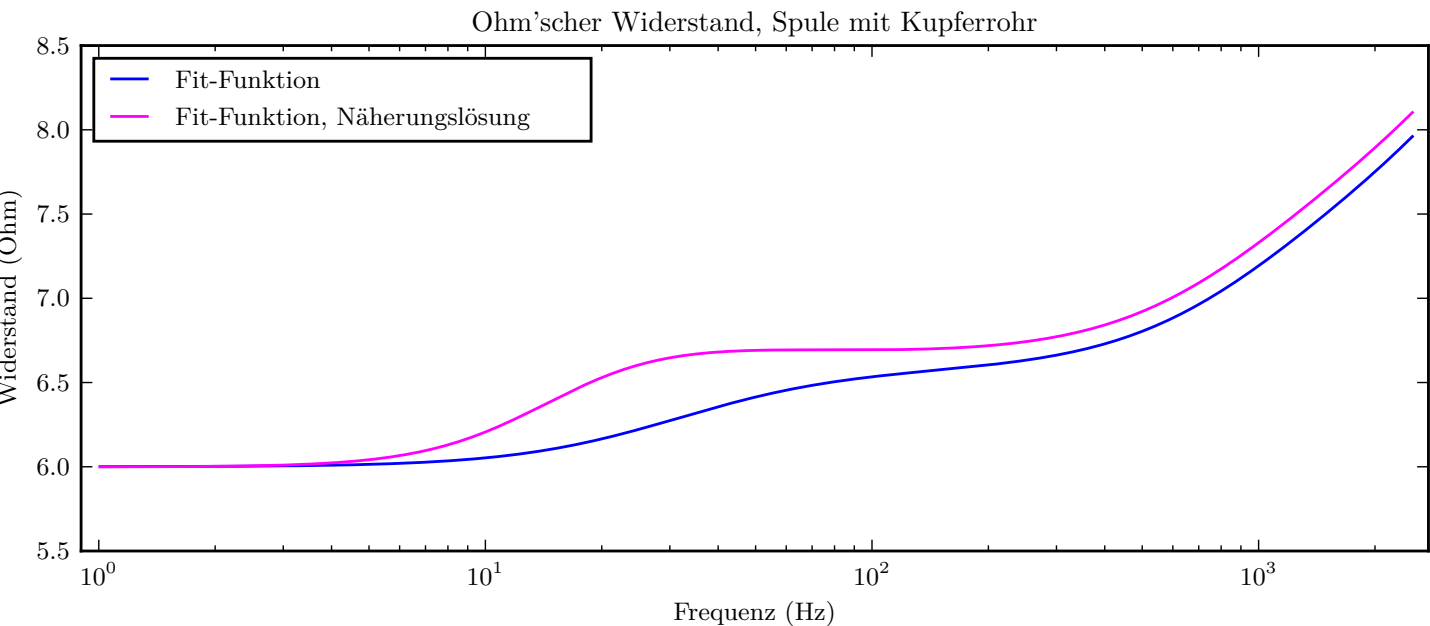


Abbildung 26: Änderung des Ohm'schen Widerstandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

Tabelle 19: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 27 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

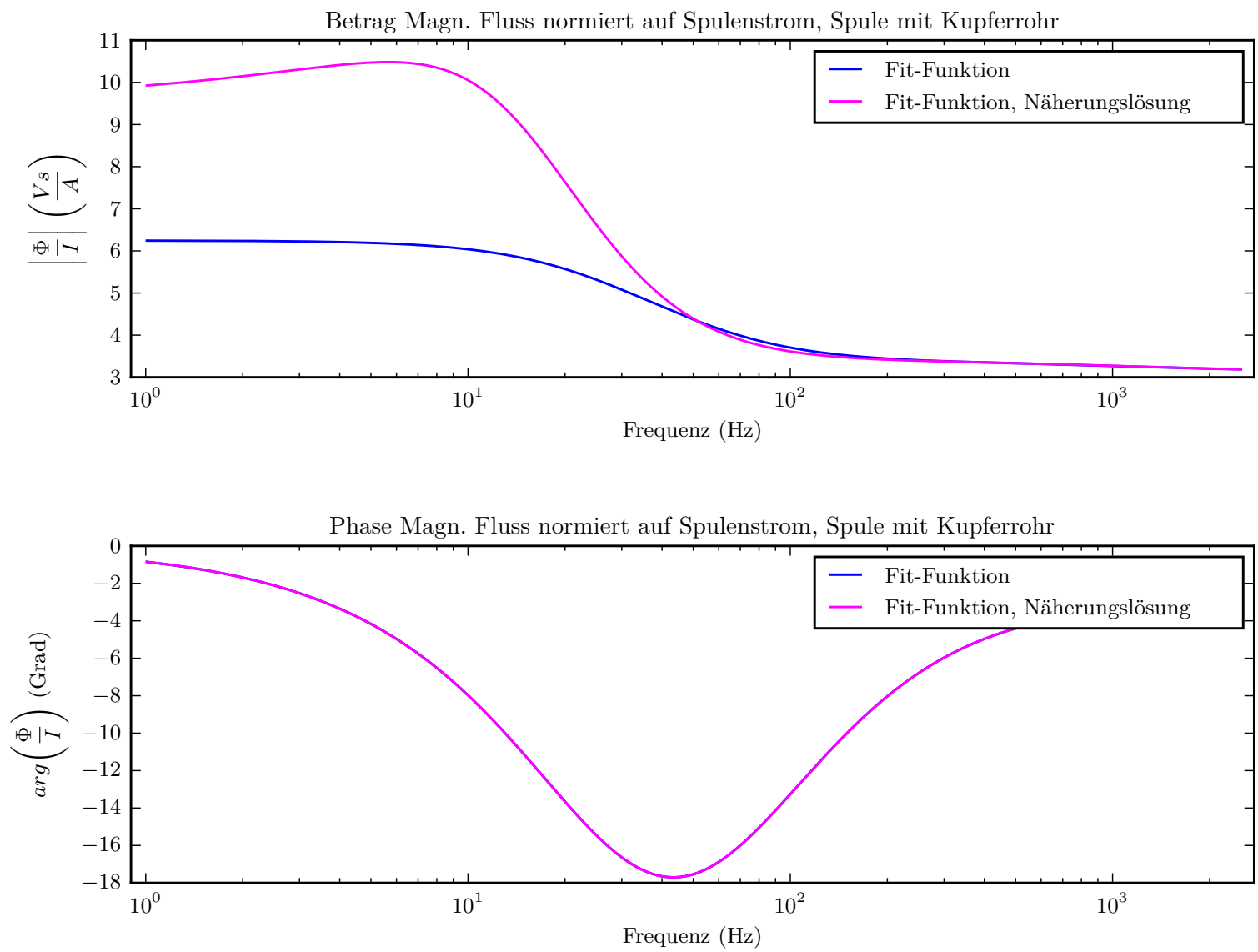


Abbildung 27: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Kupfer-Hohlzylinder

3.3.3 Rostfreier Stahl

Das Vorgehen beim Stahlrohr war identisch zum Kupferrohr. Aufgrund der schlechteren Leitfähigkeit von Stahl kommt der Skineffekt jedoch hier erst bei bedeutend höheren Frequenzen richtig zum Tragen (die zum Induzieren der Wirbelströme benötigte Veränderung des magnetischen Flusses muss schneller erfolgen).

Der Messbereich wurde daher entsprechend angepasst, wie im Kapitel zur Durchführung angemerkt.

Bei höheren Frequenzen schwankten die Messwerte (insbesondere die Phase) recht stark, was ein genaues Ablesen erschwerte. Die Abweichung zwischen dem Fit der Phase und den Messwerten im oberen Frequenzbereich ist möglicherweise darauf zurückzuführen.

Die Messwerte sind in Tabelle 21 auf Seite 26 zu finden.

Für den Literaturwert σ_{Ref} wurden Werte aus den drei Quellen [5], [6] und [7] miteinander verrechnet. Da es sehr viele Stahllegierungen mit unterschiedlichen Eigenschaften auf dem Markt gibt, existiert *ein* Literaturwert per se natürlich nicht, aber diese Vorgehensweise sollte einen genügend guten Wert zum Vergleich liefern, anhand dessen das experimentelle Resultat auf seine Plausibilität überprüft werden kann.

Tabelle 20: Parameter für Fit-Funktion in Abbildung 29

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$1.2 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Ref}	$1.4 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$7.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

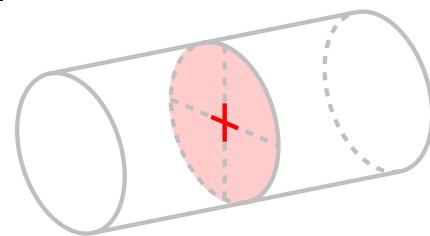


Abbildung 28: Sensorposition während Messung

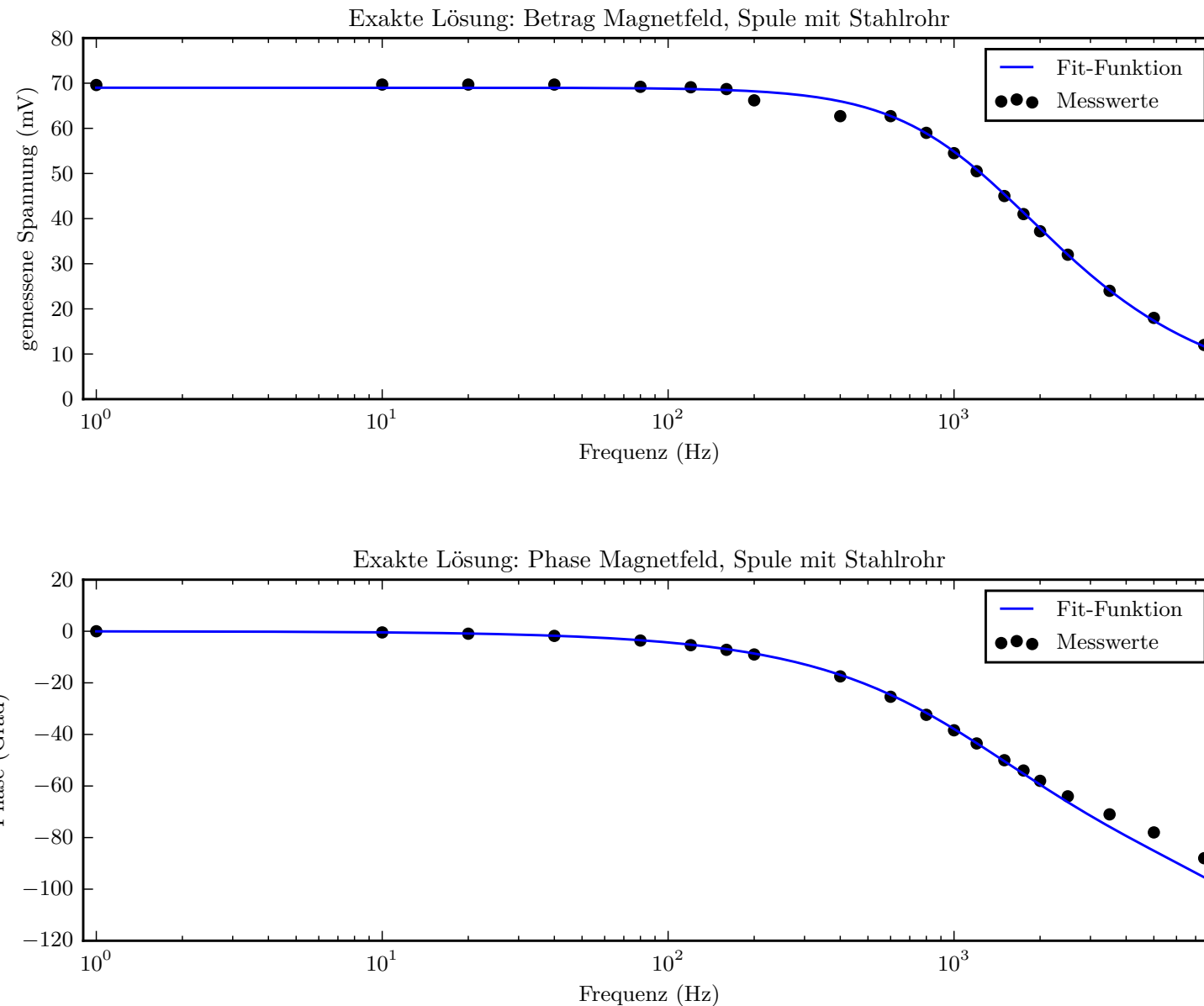


Abbildung 29: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). Die Messpunkte bei 200 Hz und bei 400 Hz wurden als Ausreisser (vermutlich aufgrund von Ablesefehlern) betrachtet und nicht in den Verlauf der Fit-Funktion mit einbezogen. Phase und Betrag wurden individuell gefittet, daher erhält man auch zwei (leicht) unterschiedliche Leitwerte σ in Tabelle 20.

Die für Abbildungen 29 und 30 benutzte Funktion ist Gleichung 7 von Seite 3:

$$\hat{B}(r=0) = \hat{B}(r=r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (7)$$

Tabelle 21: Messwerte Rohr aus rostfreiem Stahl

f (Hz)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
40	1.8	68.7
120	5.4	69.1
200	9	68.7
400	17.5	66.2
600	25.4	62.7
800	32.4	59
1000	38.4	54.5
1200	43.5	50.5
1500	50	45
1750	54	41
2000	58	37.2
2500	64	32
3500	71	24
5000	78	18
7500	88	12

Tabelle 22: Parameter für Fit-Funktion in Abbildung 30

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$1.2 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Ref}	$1.4 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
$f_{min_{opt}}$	80 Hz
$f_{max_{opt}}$	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

Weil der in den Messungen abgedeckte Frequenzbereich nicht ganz genug hoch ging, um den typischen Kurvenverlauf mit dem Abfall des Betrags in der optischen Mitte des Plots darzustellen, wurde auch die Fit-Funktion über einen erweiterten Frequenzbereich geplottet. Natürlich ist der nicht mit Messungen abgedeckte Bereich der Kurve nicht ganz so aussagekräftig wie das messtechnisch erfasste Frequenzspektrum, da die experimentelle Bestätigung fehlt.

Die Resultate für σ aus den Fits in den Abbildungen 29 und 30 sind natürlich identisch, da es die gleiche Kurve ist, lediglich der dargestellte Frequenzbereich variiert.

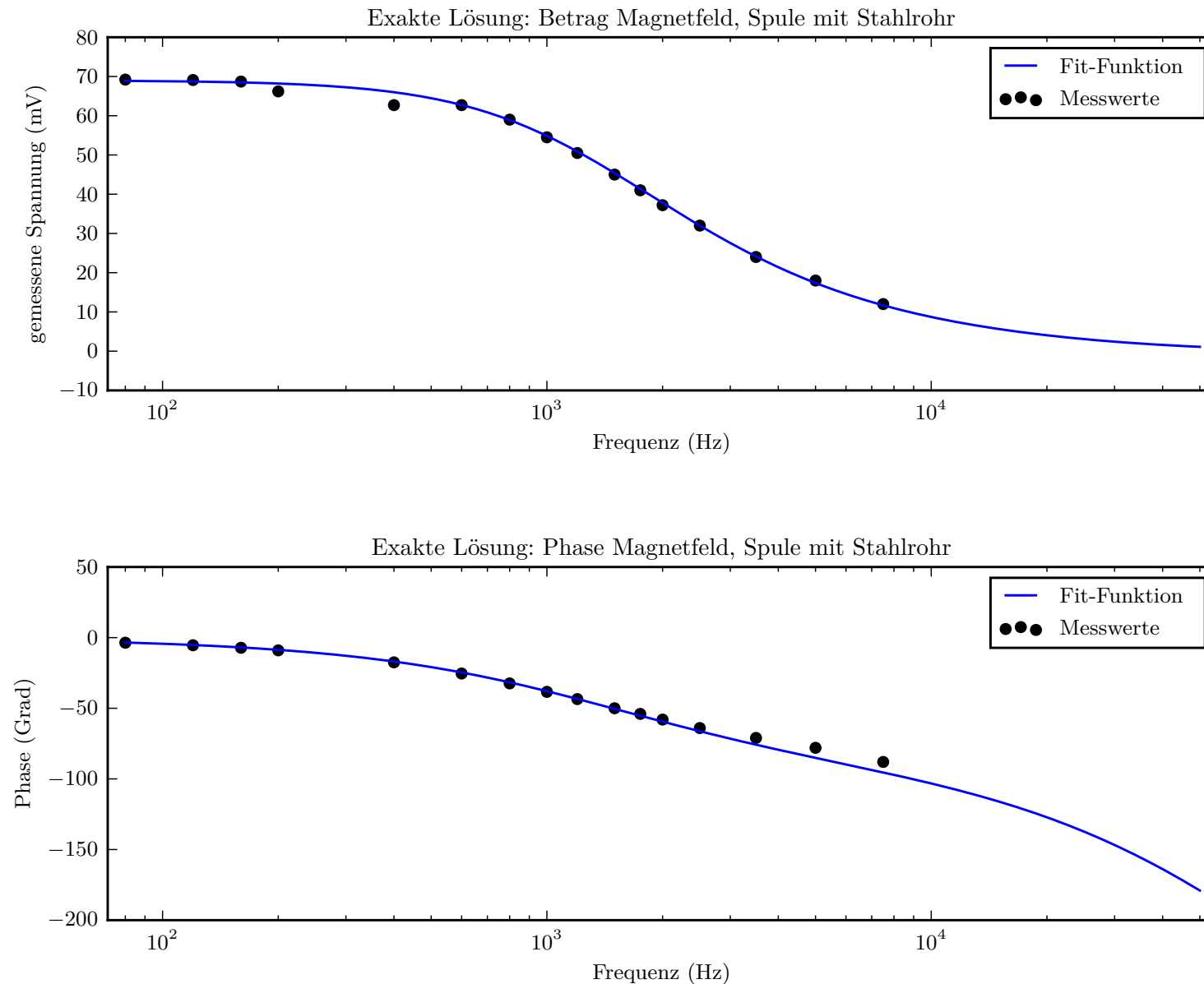


Abbildung 30: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder, erweiterter Frequenzbereich (rostfreier Stahl)

Bei der Näherungslösung ist wie auch beim Kupferrohr zu erkennen, dass die Phase der Fit-Funktion von den Messwerten zu divergieren beginnt wenn die Wanddicke des Rohres grösser wird als die Eindringtiefe s_{skin} (magenta Kurve in Abbildung 31). Der Frequenzbereich wurde auch hier ein wenig über den Messbereich erweitert, um dieses divergierende Verhalten besser erkennbar zu machen.

Tabelle 23: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 31

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Ref}	$1.4 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$25 \times 10^3 \text{ Hz}$

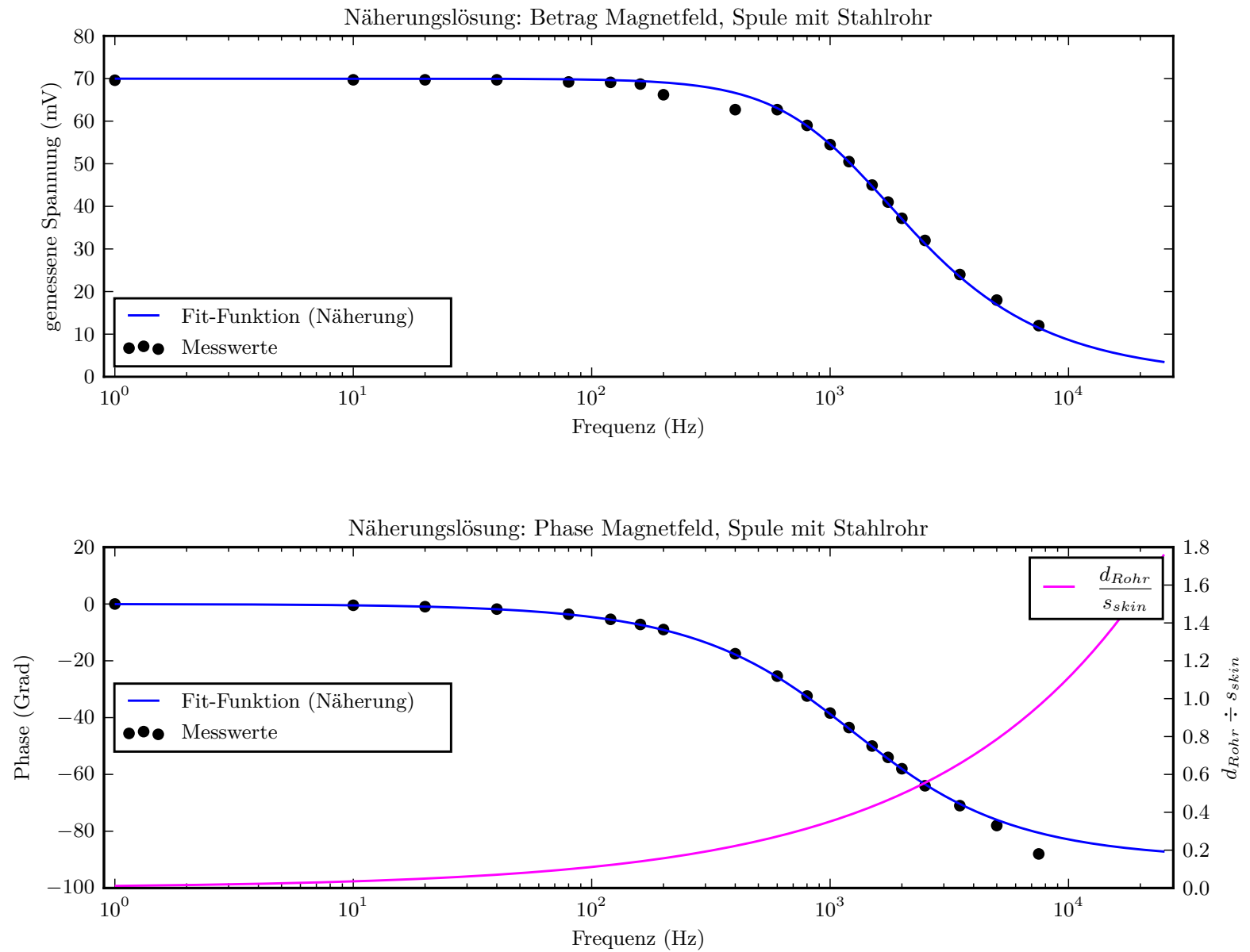


Abbildung 31: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). Wie auch beim Kupfer wurde lediglich auf den Betrag gefittet.

Tabelle 24: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 32

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$1.2 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$1.1 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$58 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$25 \times 10^3 \text{ Hz}$

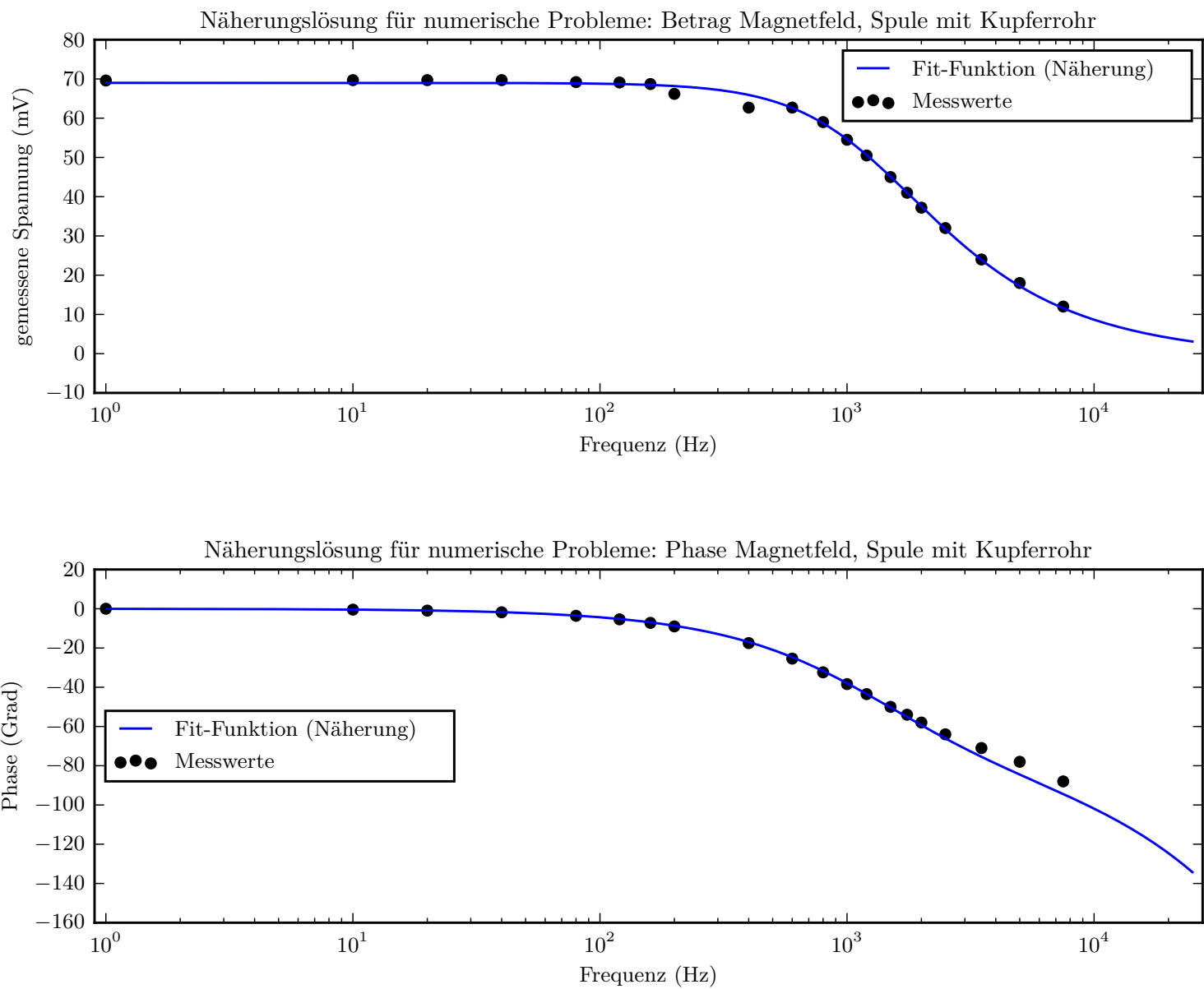


Abbildung 32: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). Betrag und Phase wurden zwar separat getifftet, allerdings resultierte aus beiden Fits der gleich Wert für σ

3.3.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Es gelten die bereits erwähnten Überlegungen zu diesen Plots. Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\Phi}{I}$ wurden wiederum die Formeln von Seite 4 verwendet.

Tabelle 25: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 33, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

Tabelle 26: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 34, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$R_{\Omega,0}$	5Ω
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

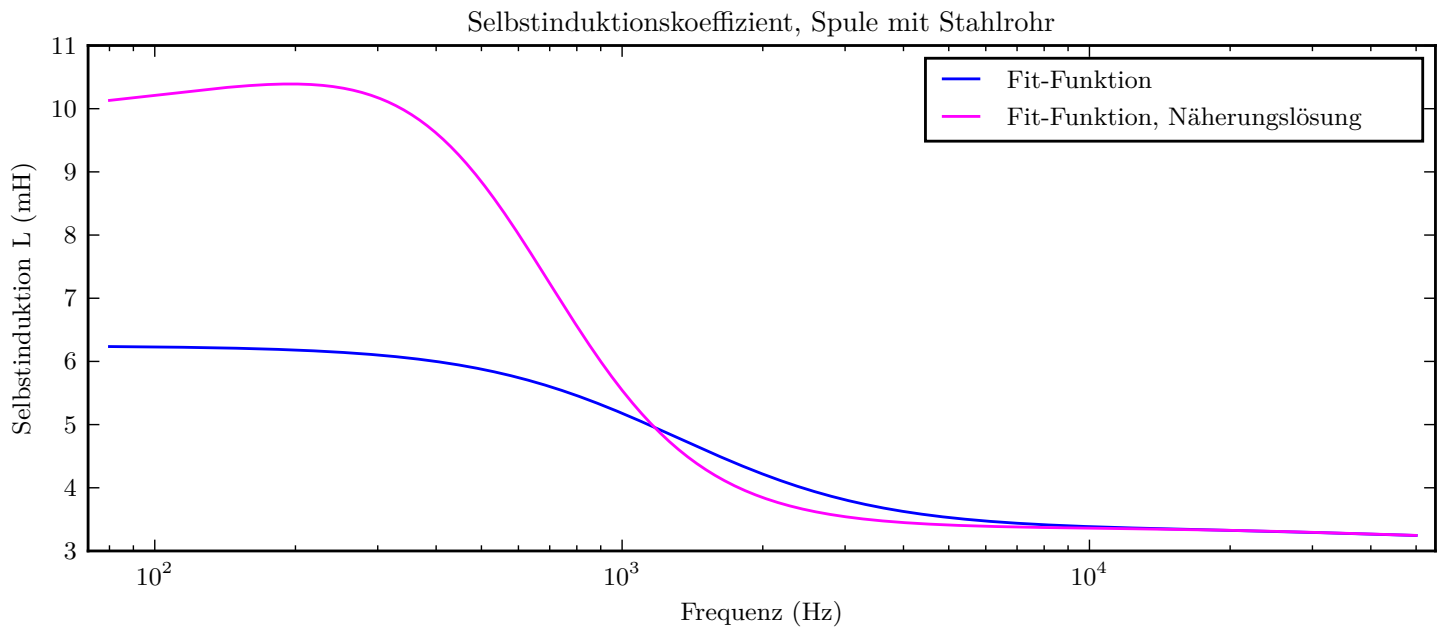


Abbildung 33: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

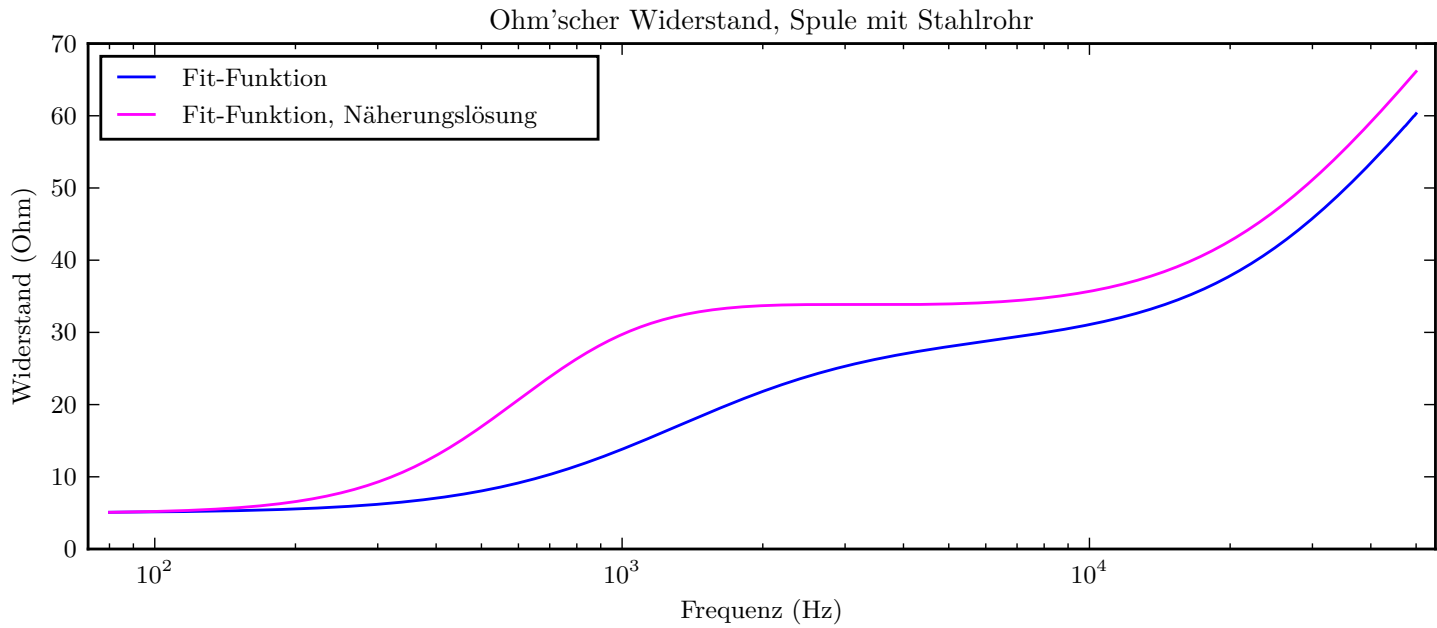


Abbildung 34: Änderung des Ohm'schen Widerstandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

Tabelle 27: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 27 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

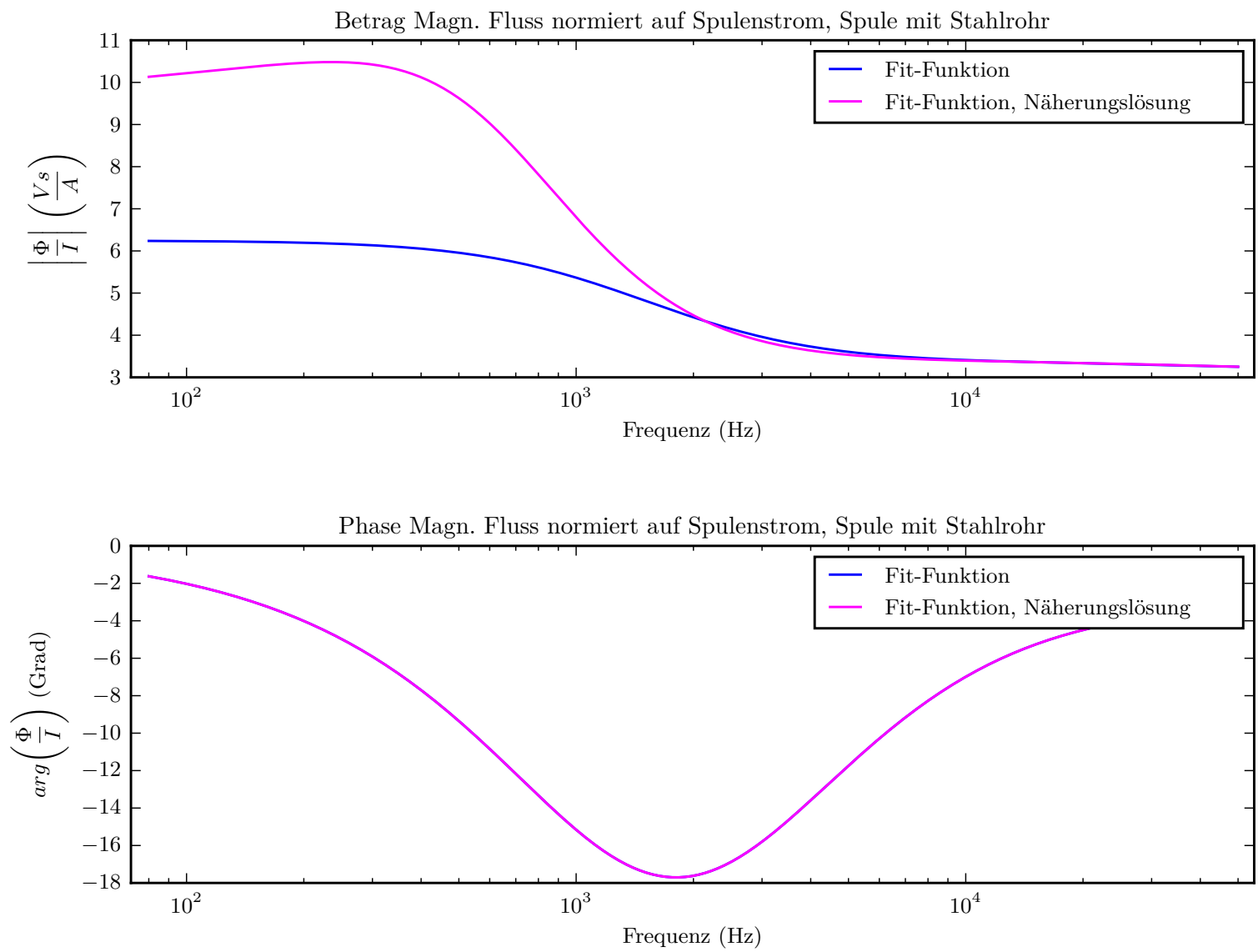


Abbildung 35: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

4 Fehlerrechnung

Auf eine Ausführliche Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet, die Messtoleranzen des experimentellen Aufbaus und der Geräte wurden daher auch nicht erfasst.

Aus den unterschiedlichen Werten der Leitfähigkeiten können aber trotzdem Mittelwerte, Fehler und Standardabweichungen bestimmt werden.

Dazu wurden die gängigen Formeln benutzt; Tabelle 28 enthält eine Auflistung der Resultate. Es wurden sämtliche gemachten Fits berücksichtigt (also Näherungen und exakte Lösungen), die Berechnung erfolgte in einem Python-Script, das seine Werte aus den Scripts für die Fits erhält. Somit ist sichergestellt, dass zur Berechnung auch wirklich die Werte verwendet werden, mit welchen die Plots erstellt worden sind. Der L^AT_EX-Code für die Ergebnisse wurde ebenfalls aus diesem Script generiert, wie auch bei den Listings für die Fits.

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert: } \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ \text{absoluter Fehler: } s_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \\ \text{relativer Fehler: } r &= \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \\ \text{Standardabweichung: } s_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \end{aligned}$$

Tabelle 28: Mittelwerte, Fehler und Standardabweichung für die Leitfähigkeiten

$\bar{\sigma}_{Alu}$	$21.03 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$s_{\bar{\sigma}_{Alu}}$	$856.2 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$r_{\bar{\sigma}_{Alu}}$	40.71×10^{-3}
$sdev_{\bar{\sigma}_{Alu}}$	$2.422 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\bar{\sigma}_{Cu}$	$52.80 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$s_{\bar{\sigma}_{Cu}}$	$200.0 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$r_{\bar{\sigma}_{Cu}}$	3.788×10^{-3}
$sdev_{\bar{\sigma}_{Cu}}$	$447.2 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\bar{\sigma}_{St}$	$1.190 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$s_{\bar{\sigma}_{St}}$	$28.11 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$r_{\bar{\sigma}_{St}}$	23.62×10^{-3}
$sdev_{\bar{\sigma}_{St}}$	$62.85 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$

Man könnte jetzt natürlich noch evaluieren, inwiefern die Berücksichtigung der Werte aus den Näherungen und den exakten Lösungen gerechtfertigt ist, oder ob allenfalls nur die Werte aus den exakten Lösungen zu berücksichtigen wären, oder ob beide jeweils mit einer Gewichtung berücksichtigt werden sollten.

Aus Zeitgründen wird hier auf diese Ausführungen verzichtet. Es sei jedoch angemerkt, dass keine der Näherungen extrem dramatisch von den Werten der exakten Lösungen abweicht. Wollte man wirklich penibel sein, wäre in den Augen des Autors sowieso eine "richtige" Fehlerrechnung mit Berücksichtigung der Unsicherheiten in Geräten und Versuchsaufbau durchzuführen.

Schlussendlich ist nicht das Erlangen exaktest-möglicher Zahlen das primäre Ziel dieses Versuches, sondern die Demonstration des Skineffektes und die experimentelle Bestätigung, dass Leitwerte für Materialien aus der Literatur nicht als absolut gegeben betrachtet werden sollten, oder zumindest ist dies die Ansicht des Autors. Beides ist in seinen Augen gut demonstriert worden.

Literatur

- [1] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt*. Windisch: FHNW Aargau, 2015.
- [2] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [Stand: 02. Oktober 2015].
- [3] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].
- [4] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 649.
- [5] G. Elert. Resistivity of Steel. Hypertextbook.com. [Online]. Verfügbar: <http://hypertextbook.com/facts/2006/UmrnUgur.shtml> [Stand: 08. November 2015].
- [6] Datasheet – 304/304L Stainless Steel. AK Steel Corporation. [Online]. Verfügbar: http://www.aksteel.com/pdf/markets_products/stainless/austenitic/304_304L_Data_Sheet.pdf [Stand: 08. November 2015].
- [7] Datenblatt – Nichtrostender austenitischer Stahl. Deutsche Edelstahlwerke. [Online]. Verfügbar: http://www.dew-stahl.com/fileadmin/files/dew-stahl.com/documents/Publikationen/Werkstoffdatenblaetter/RSH/1.4301_de.pdf [Stand: 08. November 2015].