

E11 – Skineffekt

7. November 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

Inhaltsverzeichnis

1	Arbeitsgrundlagen	1
1.1	Grundidee	1
1.2	Vollzylinder	1
1.3	Hohlzylinder	3
2	Durchführung	5
2.1	Versuchsanordnung	5
2.2	Versuchsablauf	5
3	Auswertung	6
3.1	Methodik	6
3.2	Vollzylinder	7
3.3	Hohlzylinder	15
4	Fehlerrechnung	25
	Literaturverzeichnis	26

Versionsgeschichte

7. November 2015 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [1].

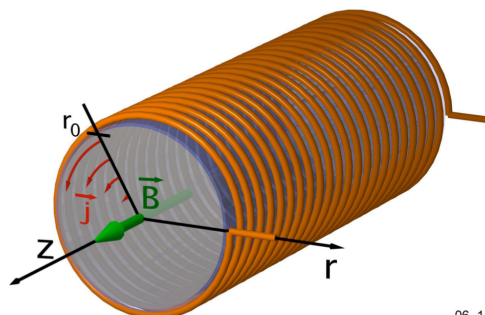
1.1 Grundidee

Hochfrequente Wechselströme haben die Eigenschaft, dass sie v.a. an der Oberfläche eines Leiters fließen und nicht tief in den Leiter eindringen. Dieses als *Skinneffekt* bekannte Phänomen soll in diesem Versuch experimentell nachgewiesen werden.

Wird ein Leiter in ein wechselndes Magnetfeld eingeführt, werden in ihm Wirbelströme induziert. Ist die Frequenz des externen Magnetfelds niedrig, verteilen sich diese Wirbelströme (ungleichmässig) auf den gesamten Querschnitt. Bei höheren Frequenzen des externen Magnetfeldes verlagern sich die Wirbelströme in den Oberflächenbereich des Leiters. Da sie der Änderung des externen Feldes gemäss der Lenz'schen Regel [2] entgegenwirken, schwächen sie im Innern des Leiters das externe Feld ab. Ebenfalls werden der Ohm'sche Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration von Spule und Zylinder geändert, sowie der magnetische Fluss im Innern des Zylinders.

Als Versuchsfälle dienen die Fälle eines eingeführten Hohlzylinders und eines eingeführten Vollzylinders. Es werden sowohl gängige Näherungen wie auch die exakten Lösungen aus der Theorie mit den Messergebnissen verglichen.

1.2 Vollzylinder



06_14

Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega \mu_0 \sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \quad (1)$$

wobei:

r : Distanz zu Zylinderachse

\hat{B} : gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)

ω : Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes

σ : spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \quad (2)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$$

r_0 : Radius des eingeführten Zylinders

\hat{B}_0 : Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)

$J_0(z)$: Besselfunktion erster Art (siehe auch [3])

Beachte: $\hat{B}(r)$ ist eine komplexe Zahl!

1.2.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

wobei

$$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$$

Die Lösung brauchbar ist für $s_{skin} \ll r_0$.

1.2.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + L_{Rand} \quad (4)$$

wobei

l : Länge der Zylinderspule

N_0 : Anzahl Windungen der Zylinderspule

$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l}$ mit r_{Sp} : Radius Zylinderspule

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Wobei $R_{\Omega,0}$ der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahts, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierten magnetischen Fluss:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

1.3 Hohlzylinder

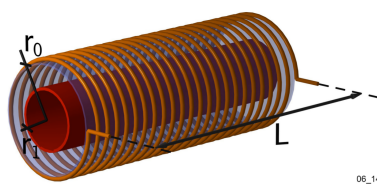


Abbildung 2: Spule mit Hohlzylinder
Quelle: Skript zum Versuch [1]

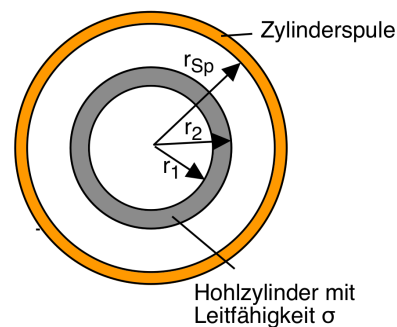


Abbildung 3: Spule mit Hohlzylinder, Querschnitt
Quelle: Skript zum Versuch [1]

1.3.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = konst. \quad (7)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (8)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = konst. \quad (9)$$

Mit $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$ und k gemäss Abschnitt zum Vollzylinder.

1.3.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe s_{skin} , kann das Rohr als dünnwandig betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

wobei:

r_1 : mittlerer Radius des Metallrohrs

d : Wandstärke des Metallrohrs

1.3.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\ &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\ &+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\ &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$L = Re \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \quad (12)$$

$$R = -\omega \cdot Im \left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0} \quad (13)$$

2 Durchführung

In diesem Kapitel wird die Durchführung des Versuches beschrieben.

2.1 Versuchsanordnung

2.2 Versuchsablauf

2.2.1 Hohlzylinder

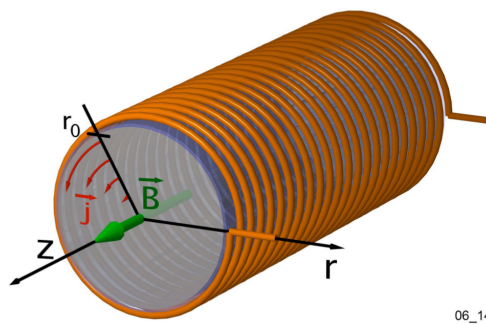


Abbildung 4: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

2.2.2 Vollzylinder

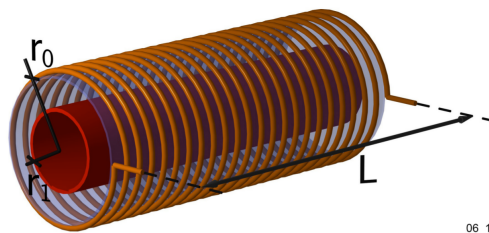


Abbildung 5: Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

3 Auswertung

Anmerkung zu den Messprotokollen: Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen nicht immer konsistent.

3.1 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Grössen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *QtiPlot* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes). Die Fitfunktion wird dabei optisch an die Messpunkte angepasst, nicht mit strikten mathematischen Methoden.

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Tools an; der Autor hat sich hier aus Gründen der persönlichen Präferenz für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante).

3.1.1 Vorgehen Manuelles Fitting

Im Allgemeinen wurde dabei folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
 - Die Leitfähigkeit σ des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
 - und den Betrag $|B_0|$ des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von $|B_0|$ abhängt (ersichtlich aus Gleichung 2 auf Seite 2 sowie Gleichung 7 auf Seite 4), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von σ einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, kann man mittels Tunen von $|B_0|$ die Kurve für die Messpunkte von $|\hat{B}|$ anpassen.
- Abschliessend kann man noch iterativ optimieren, bis die Fitfunktion den Verlauf der Messpunkte optisch zufriedenstellend repräsentiert.

Für die genaue algorithmische Implementierung sei hier auf den Python-Quellcode verwiesen.

3.1.2 Listings

Die Listings mit den Parametern, welche zum Erstellen eines bestimmten Plots benutzt worden sind, sind in Tabellen in der Nähe der zugehörigen Plots aufgeführt.

Die Werte werden direkt von den Python-Scripts in `*.tex`-Files geschrieben und in dieses Dokument integriert. Dies garantiert, dass die Plots und die aufgesisteten Parameter übereinstimmen; Tippfehler beim Abschreiben der Werte werden vermieden (und es erspart Arbeit).

Die Werte in den Tabellen sind jeweils gerundet, Python arbeitet natürlich mit viel mehr Dezimalstellen. Die Werte sind in ihrer vollen Präzision im L^AT_EX-Quellcode zu finden [4].

3.2 Vollzylinder

Mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder wurden drei Messreihen durchgeführt:

- Frequenzgang des B-Feldes,
- radialer Verlauf des B-Feldes bei niedriger Frequenz (30 Hz),
- und radialer Verlauf des B-Feldes bei hoher Frequenz (450 Hz).

Dabei wurden jeweils Betrag und Phase des Magnetfeldes ausgemessen. Zu den Messwerten wurden anschliessend folgende Fitkurven erstellt:

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- radialer Verlauf bei tiefer Frequenz, exakte Lösung,
- Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf niedrige Frequenz (Überprüfung, dass es auch tatsächlich eine Hochfrequenznäherung ist),
- radialer Verlauf bei hoher Frequenz, exakte Lösung,
- sowie die Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf hohe Frequenz.

Zudem wurden als Ergänzung noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Vollzylinder erstellt, basierend auf den Werten für die Leitfähigkeit und das externe Magnetfeld, welche aus den Fitfunktionen ermittelt worden waren.

3.2.1 Frequenzgang

Die Sonde war fix positioniert gemäss Abbildung 6. Gemessen wurden Betrag und Phase des B-Feldes an dieser Position bei ansteigender Frequenz (Tabelle 1).

Tabelle 1: Messwerte Frequenzgang Vollzylinder

f (Hz)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
1	5.4	69
5	26	65
10	50	57
15	69	48
20	85	40
30	111	28.5
40	132	21
60	166	12.5
80	196	8
100	220	5.4
120	243	3.6
160	283	1.9
200	320	1
250	350	0.6

Tabelle 2: Parameter für Fitfunktion aus Abbildung 6

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$22 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

Als Fit-Funktion wurde Gleichung 2 benutzt, jedoch mit der Frequenz statt des Radius variierend. Für mehr Informationen siehe Kapitel *Arbeitsgrundlagen* ab Seite 2 sowie der Python-Code der Implementation [4]. Tabelle 2 listet die eingesetzten Parameter und einen Referenzwert aus der Literatur (Kuchling [5]) auf.

$$\hat{B}(f) = \frac{J_0(k(f) \cdot r)}{J_0(k(f) \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Phase und Betrag des B-Feldes wurden separat gefittet, die beiden ermittelten Leitfähigkeiten $\sigma_{Fit,|\hat{B}|}$ und $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ liegen relative nahe zusammen, weichen jedoch stark von Kuchlings Literaturwert σ_{Kuch} ab.

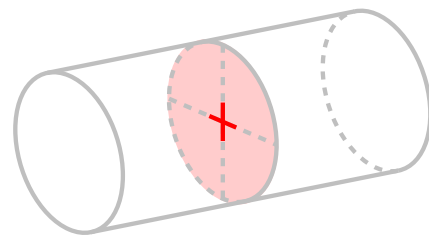


Abbildung 6: Sensorplatzierung während Messung

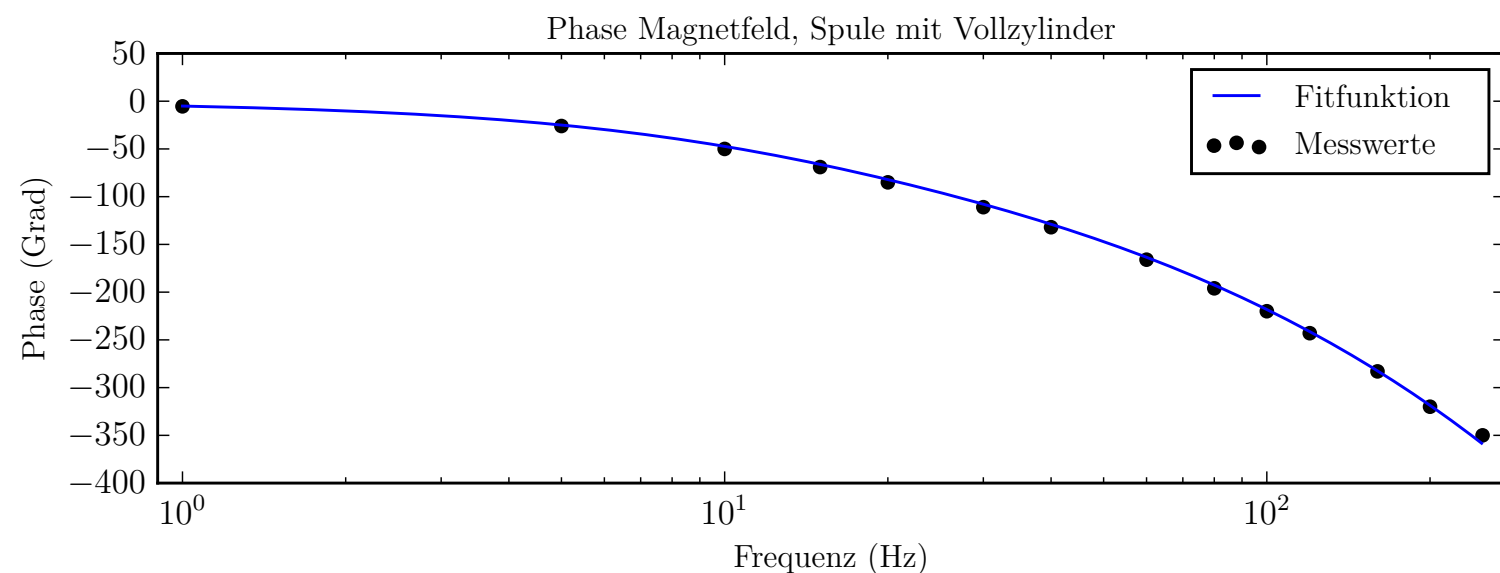
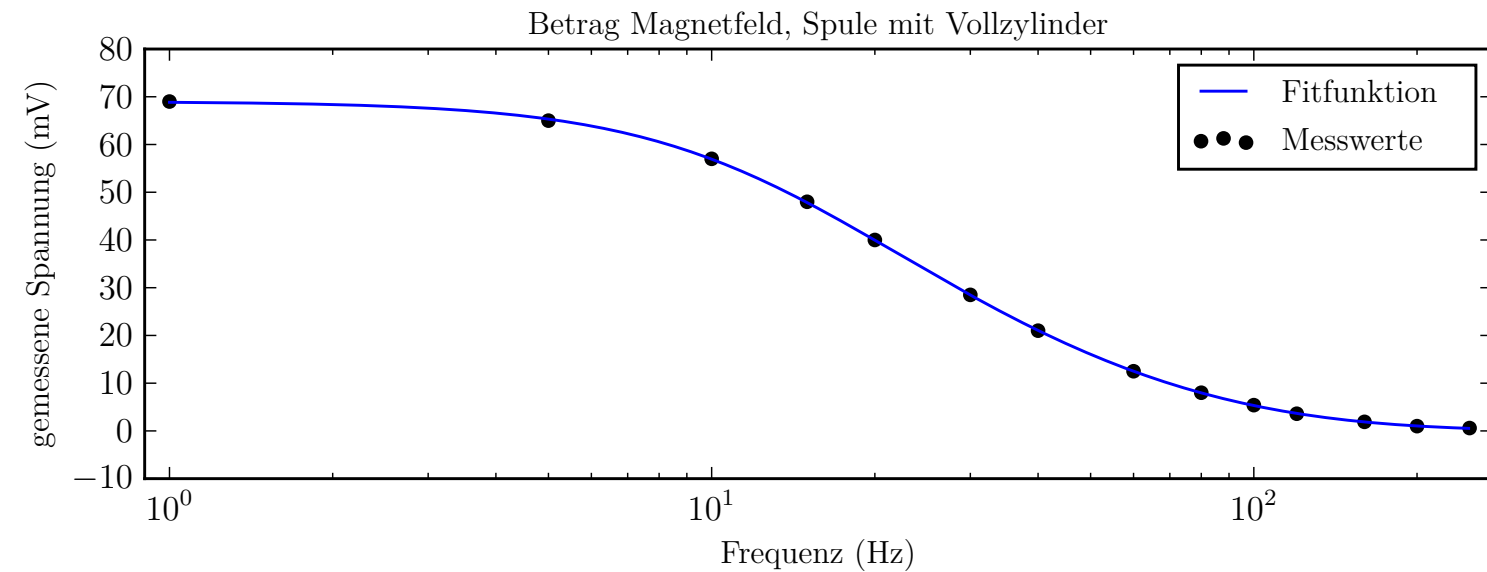


Abbildung 7: Frequenzgang Zylinderspule mit eingeführttem Aluminium-Vollzylinder. Betrag und Phase wurden jeweils separat gefittet, was zwei leicht verschiedene Werte für die Leitfähigkeit des verwendeten Aluminiums liefert.

3.2.2 Positionsbezogener Verlauf, niedrige Frequenz

In dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten (30 Hz), und die Position der Messsonde wurde radial variiert zwischen Zylinderachse und Aussenrand (Abbildung 11).

Der Skineffekt ist merklich schwächer als bei höheren Frequenzen (Abschnitt 3.2.3, Seite 11).

Tabelle 3: Messwerte für Vollzylinder bei 30 Hz

r (mm)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
0	111	28.6
5	109	28.5
10	104	28.7
15	94	29
20	81	30
25	65	33
30	48.5	38
35	32	45
40	16	54
45	2.7	62
50	0	37

Tabelle 4: Parameter für Fitfunktion aus Abbildung 11

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$23 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	0 m
B_0	$66 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	30 Hz

Als Fit-Funktion wurde wiederum Gleichung 2 von Seite 2 benutzt, diesmal mit dem Radius als Variable. Tabelle 4 listet die eingesetzten Parameter und einen Referenzwert aus der Literatur (Kuchling [5]) auf.

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Es konnte eine sehr zufriedenstellende Fit-Funktion für die Messwerte gefunden werden. Jedoch weicht die daraus bestimmte Leitfähigkeit σ_{Fit} recht beträchtlich von Kuchlings Wert σ_{Kuch} ab.

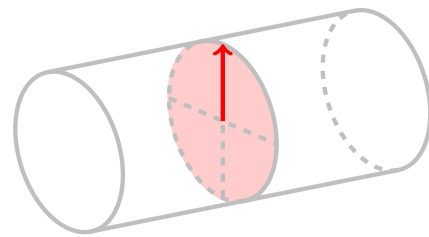


Abbildung 8: Sensorplatzierung während Messung

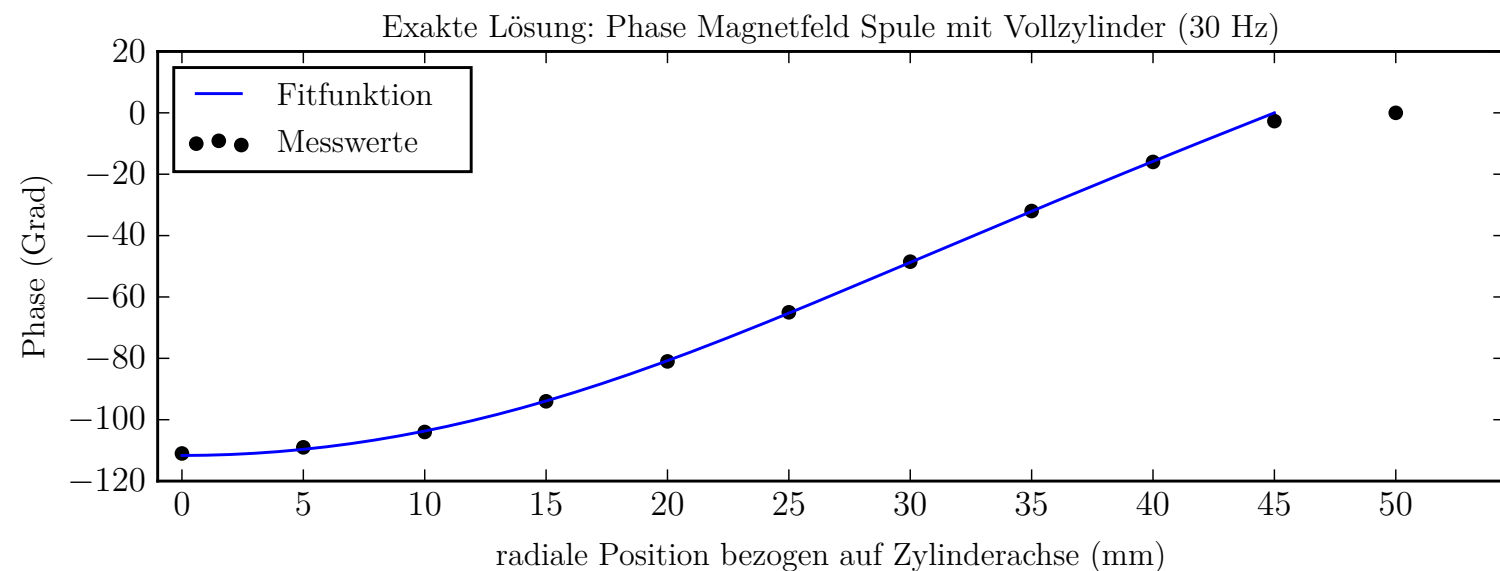
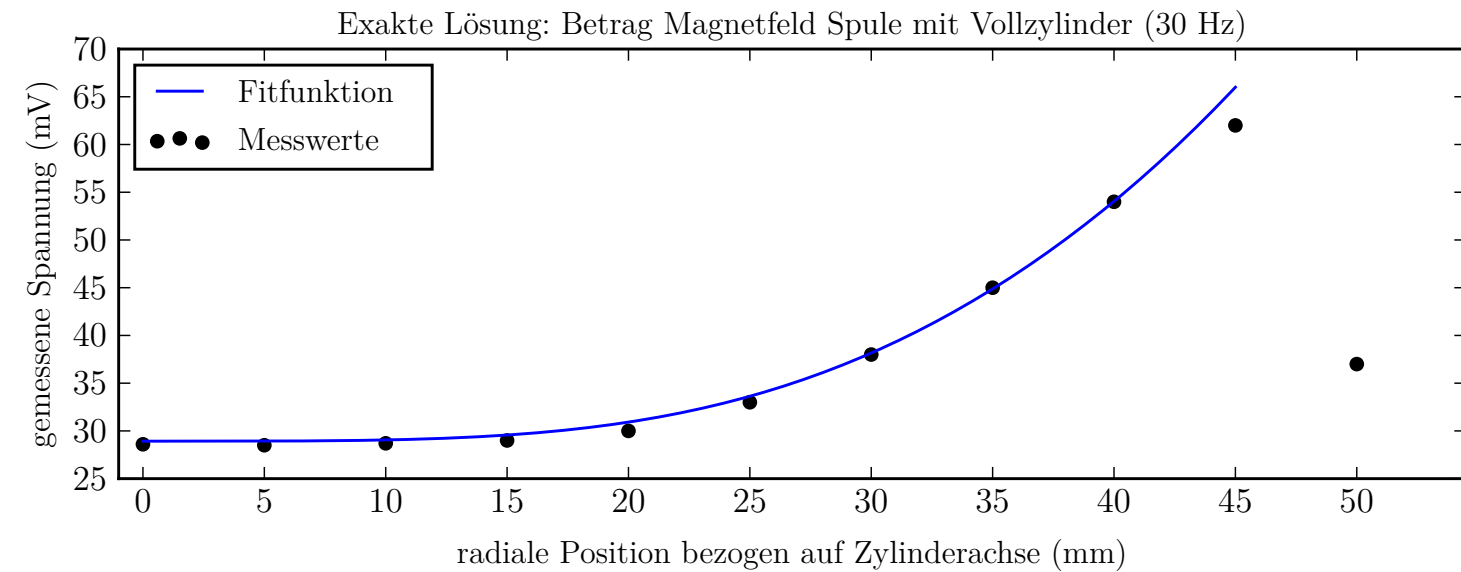


Abbildung 9: Radialer Verlauf des B-Feldes bei einer Frequenz von 30 Hz. Betrag und Phase wurden wie beim Frequenzgang separat gefittet. Der Radius des Zylinders betrug 45 mm, womit der Messpunkt an dieser Position in den Augen des Autors aufgrund von Randeffekten mit Vorsicht zu geniessen ist, und der äusserste Messpunkt wurde für den Fit nicht berücksichtigt.

Da in den Augen des Autors auch ruhig mal verifiziert werden darf, dass eine Herangehensweise nicht funktioniert, wurde hier aus Neugier ebenfalls ebenfalls noch die Hochfrequenznäherung auf den radialen Verlauf bei 30 Hz angewandt. Wenig überraschend erwies sich die Methode in der Tat als ungeeignet für diesen Frequenzbereich.

Es konnte keine Kombination für B_0 und σ ermittelt werden, welche einen zufriedenstellenden Fit für die Messwerte ergeben hätte. Selbst wenn solche Parameter hätten gefunden werden können, wären sie vermutlich so stark von den mit den restlichen Fits ermittelten Werten abgewichen, dass sie unbrauchbar gewesen wären (siehe Tabelle 5). Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 5: Paramaterwerte für Fitfunktion aus Abbildung 10

σ_{Fit}	$17 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$17 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	0 m
B_0	$62 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	30 Hz

Wie man feststellen kann, weicht der ermittelte Wert für die Leitfähigkeit doch beträchtlich von den bisher gesehenen Werten ab.

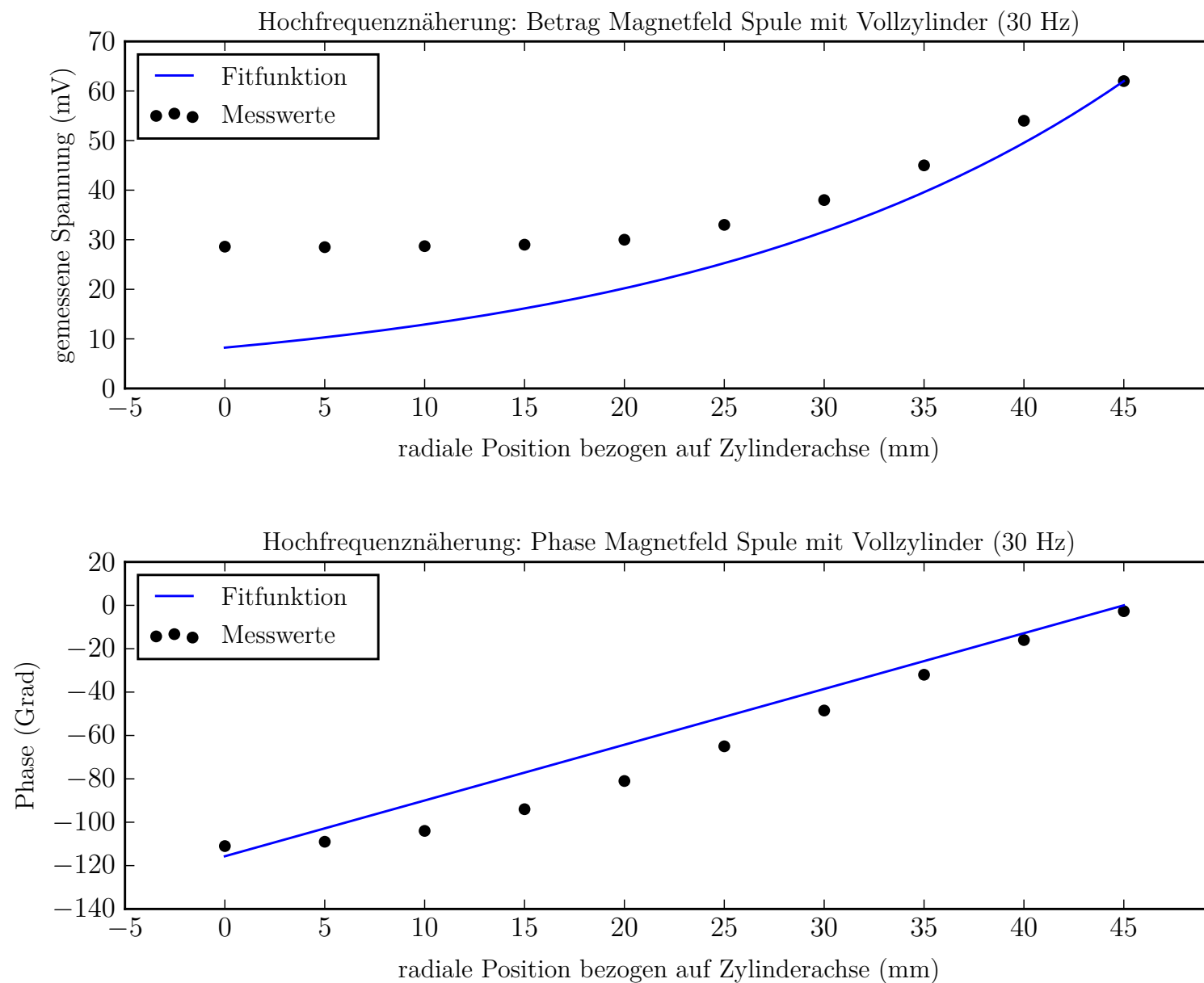


Abbildung 10: Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf des B-Feldes angewandt auf 30 Hz. Da mit keiner Kombination von σ und B_0 für Phase oder Betrag ein zufriedenstellender Fit erreicht werden konnte, wurde auf einen separaten Fit von Phase und Betrag verzichtet.

3.2.3 Hohe Frequenzen

Auch in dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten, jedoch 450 Hz. Zudem wurde nicht der gleiche radiale Bereich ausgemessen: Die Sonde wurde auf halbem Radius positioniert, ansschliessend wurde die Frequenz des externen B-Feldes so weit erhöht, bis gerade noch brauchbare Messwerte abgelesen werden konnten.

Tabelle 6: Messwerte Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz

r (mm)	$\angle \hat{B}(f)$ (°)	$ \hat{B}(f) $ (mV)
25	215	1.5
27.5	183	2.2
30	152	3.6
32.5	125	5.9
35	100	9.5
37.5	73	15.5
40	47	25
42.5	24	39
45	5.2	55
47.5	0.2	57.5
50	0	38

Tabelle 7: Parameter für Fitfunktion aus Abbildung 12.

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$21 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$60 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

Bei der so ermittelten Frequenz wurde dann der radiale Verlauf des B-Feldes auf der restlichen Hälfte gegen den Aussenrand des Vollzylinders ausgemessen (siehe Abbildung 11).

Die erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 6 zu finden.

Als Fit-Funktion wurde hier ebenfalls die Gleichung 2 von Seite 2 benutzt, wobei der Radius die Variable war.

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

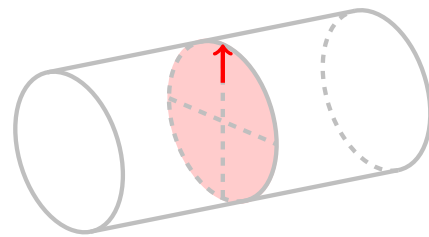


Abbildung 11: Sondenposition während Messung

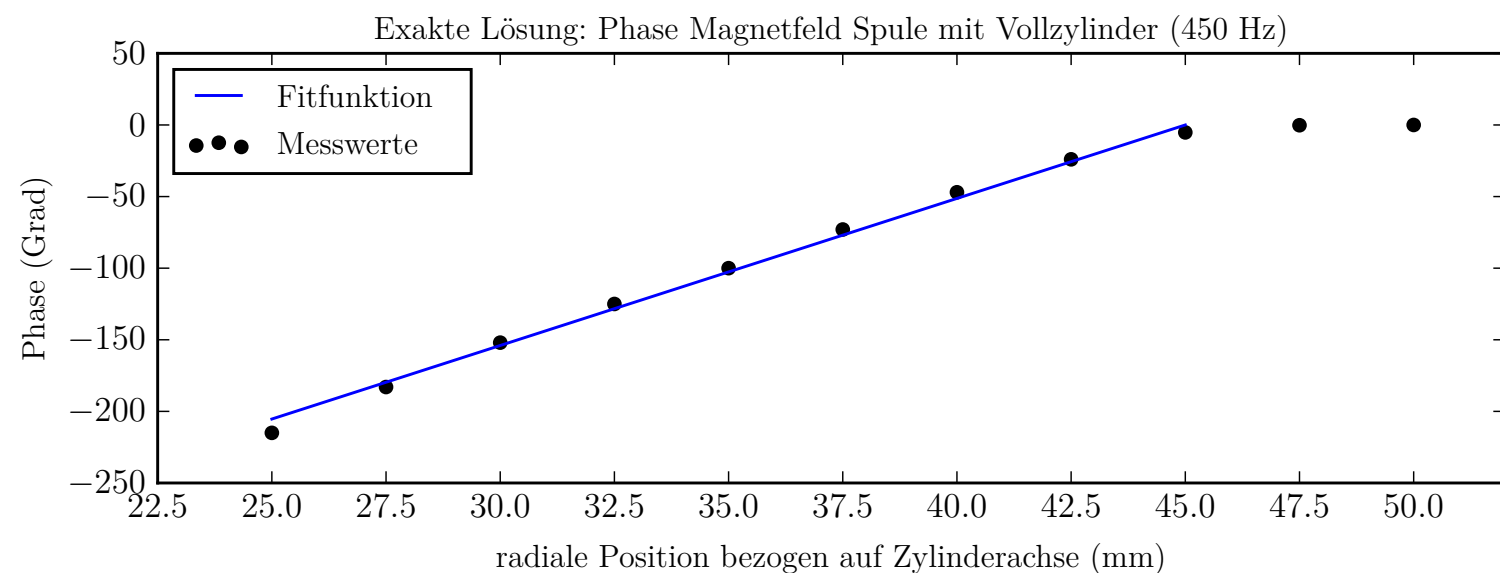
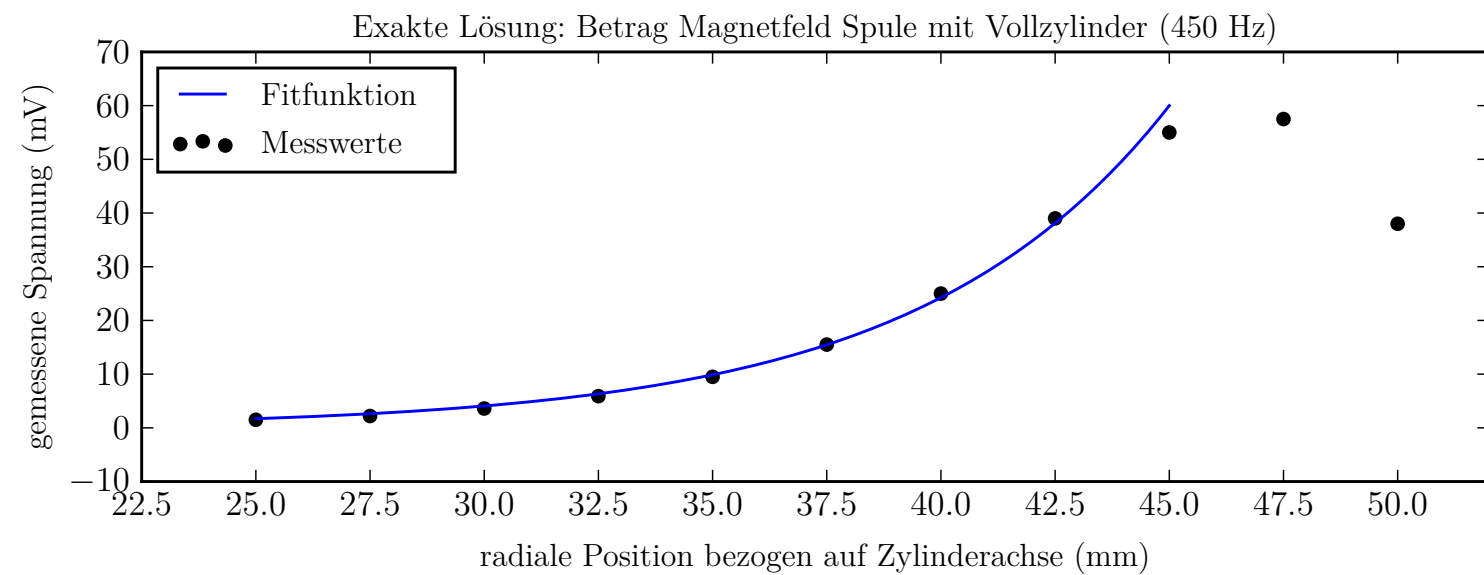


Abbildung 12: Radialer Verlauf des B-Feldes bei 450 Hz. Es gelten die gleichen Überlegungen zu den Randeffekten wie bei 30 Hz. Es fällt auf, dass die Phase nicht ganz optimal passt, und dass der erhaltene Wert $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ für die Leitfähigkeit einiges tiefer als die bisher gesehenen Werte liegt. Der Autor führt dies darauf zurück, dass bei diesem Versuch die Phase im Allgemeinen sehr stark oszillierte (auch der Betrag, wenn auch weniger), was ein genaues Auswerten erschwerte. Man genieße diese Werte daher mit etwas Vorsicht.

Bei dieser Frequenz liefert die Hochfrequenznäherung nun sehr zufriedenstellende Lösungen, wie in Abbildung 13 zu sehen ist. Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 8: Parameterwerte für Fitfunktion aus Abbildung 13

$\sigma_{Fit, \hat{B} }$	$19 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$	$18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
σ_{Kuch}	$37 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$60 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f	450 Hz

Es fällt auf, dass sowohl Phase wie auch Betrag einen etwas tieferen Wert für σ ergeben als die beim Frequenzgang und bei der radialen Auswertung bei 30 Hz gefundenen Werte. Der Autor führt dies darauf zurück, dass dies einerseits trotz relativ gut passendem Fit immer noch eine Näherungslösung ist, und dass wie bei Abbildung 12 erwähnt das Auslesen der Messwerte bei 450 Hz generell etwas schwieriger war als bei tieferen Frequenzen oder beim Frequenzgang im Zentrum des Zylinders.

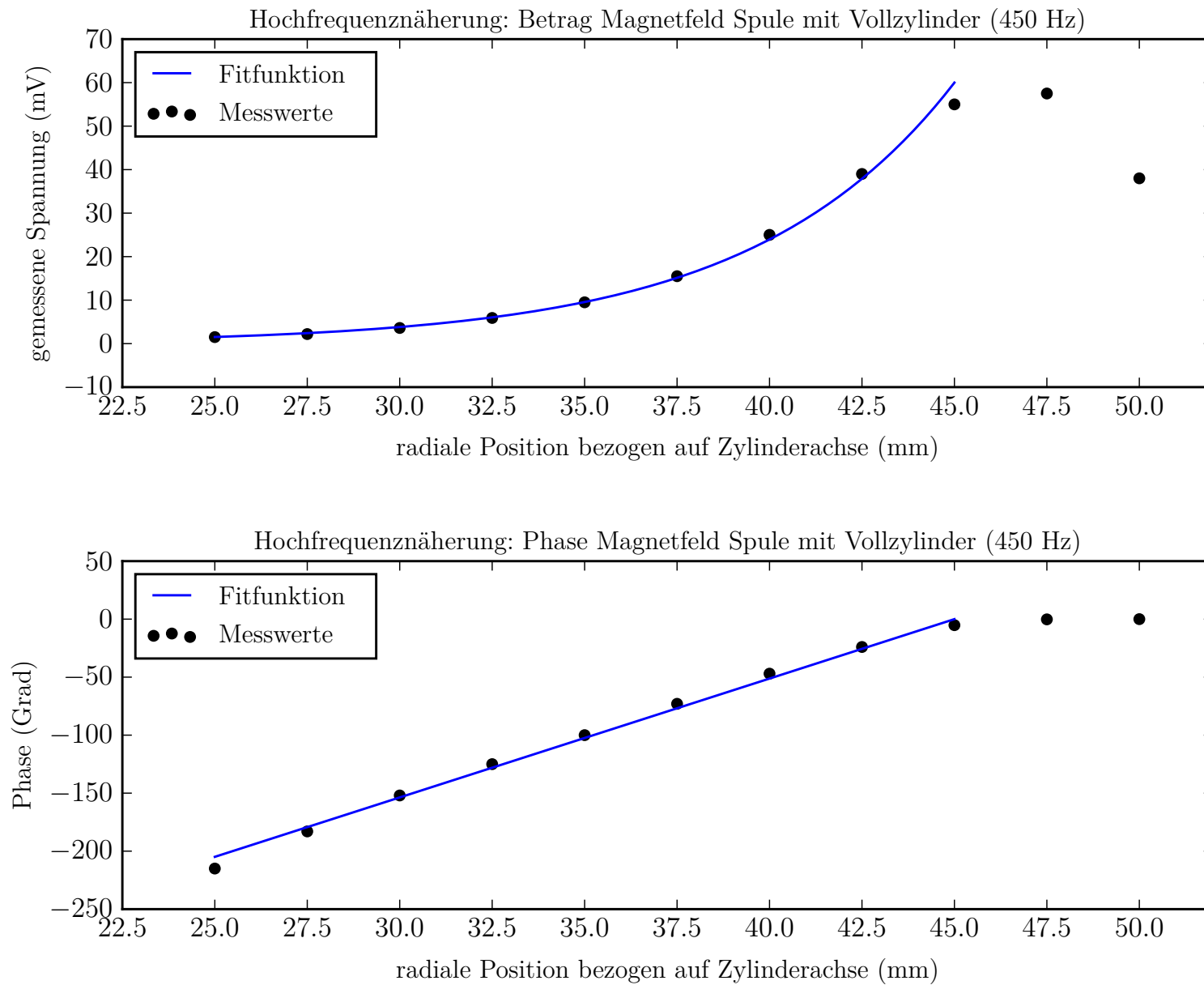


Abbildung 13: Hochfrequenznäherung für 450 Hz. Es gelten die bereits erwähnten Überlegungen betreffend Randeffekten und Ableseschwierigkeiten

3.2.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie erwähnt, wurden keine direkten Messungen von $L_{Spule+Zylinder}$ und $R_{Spule+Zylinder}$ durchgeführt. Mit den Informationen aus den Fits (also primär der dort bestimmten Leitfähigkeit) können jedoch trotzdem Plots erstellt werden.

Es sei hier noch angemerkt, dass die gewählten Werte für B_0 und σ nicht auf strikten Berechnungen begründen. Es wurden anhand der auf die Messwerte angepassten Fits "typische" Werte ausgewählt. Da bei L , R , und dem magnetischen Fluss sowieso keine Messwerte vorhanden sind, ist bei diesen Kurven auch der Verlauf viel wichtiger als die absoluten Werte, womit dieses Verfahren in den Augen des Autors gerechtfertigt ist.

Als Fit-Funktionen wurden die Gleichungen 4 und 5 von Seite 3 verwendet:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + L_{Rand} \quad (4)$$

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} \right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Tabelle 9: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 14, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m	r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$	B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570	N_0	570
f_{min}	1 Hz	f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz	f_{max}	250 Hz

Tabelle 10: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 15, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m	r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$	B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570	N_0	570
f_{min}	1 Hz	f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz	f_{max}	250 Hz

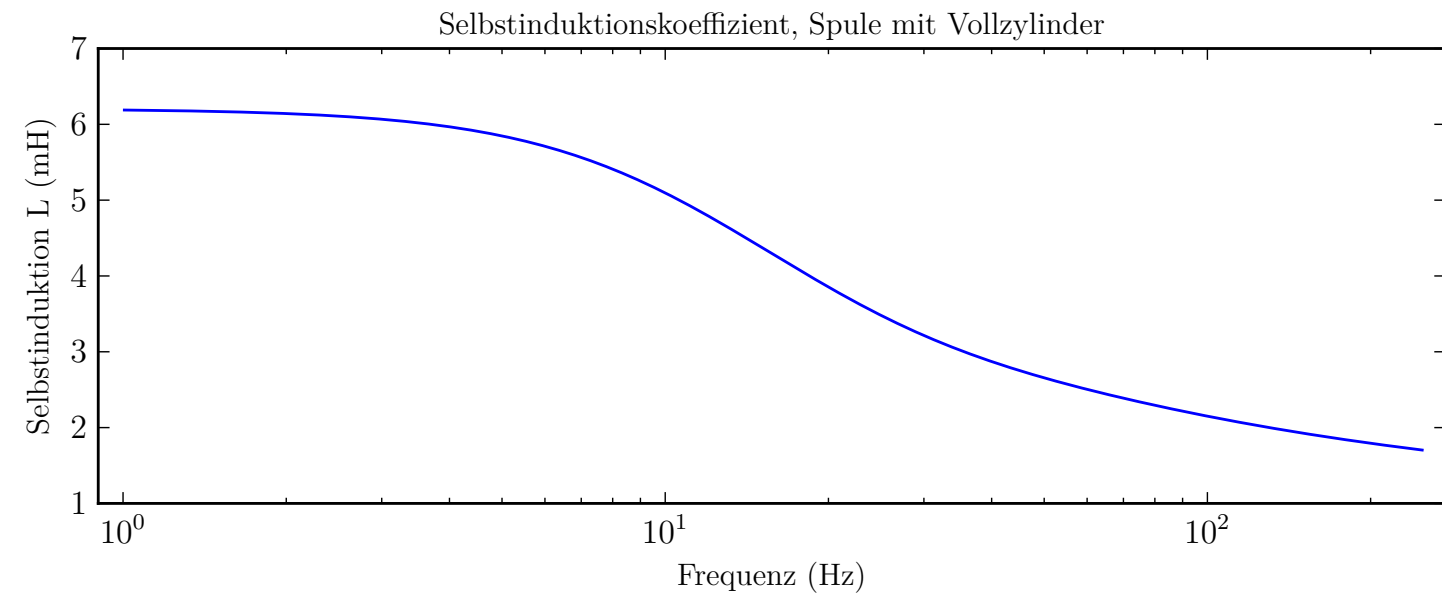


Abbildung 14: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

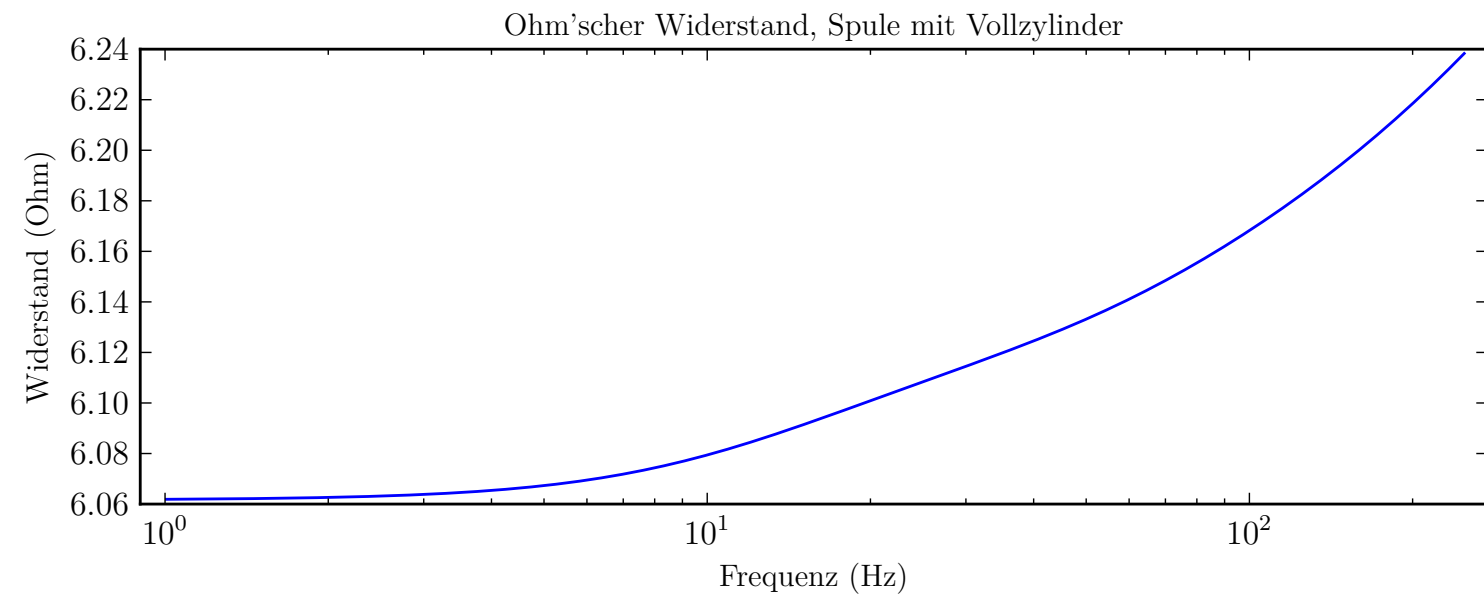


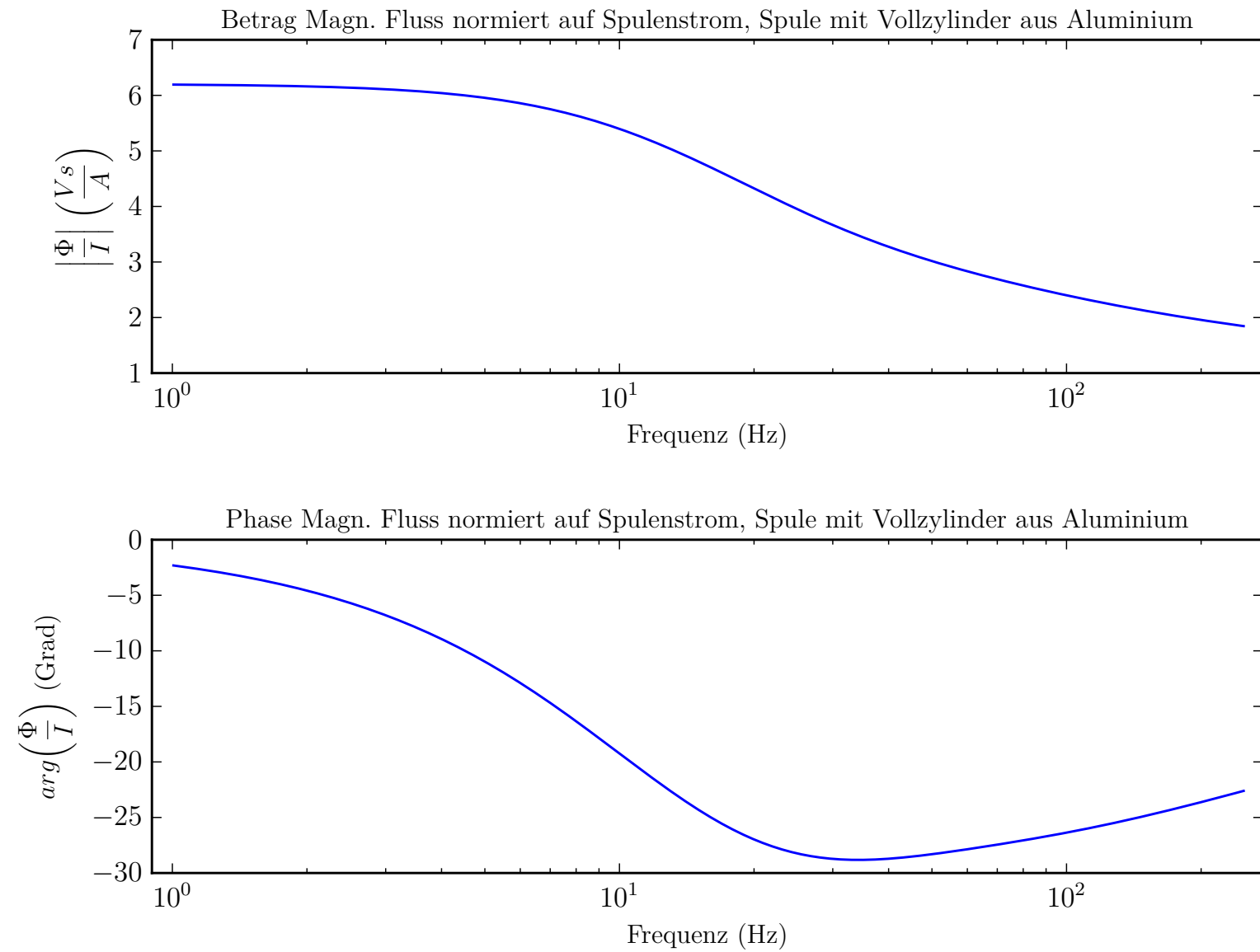
Abbildung 15: Änderung des Ohm'schen Widerstandes von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 11: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 16, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$24 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r	0 m
r_0	$45 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
N_0	570
f_{min}	1 Hz
f_{max}	250 Hz

Als Fit-Funtion wurde hier Gleichung 6 von Seite 3 verwendet:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

**Abbildung 16:** Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

3.3 Hohlzylinder

Es wurde die Konfiguration aus Zylinderspule mit einem eingeführten Hohlzylinder ausgemessen, und zwar für zwei Zylinder, einen aus Kupfer und einen aus rostfreiem Stahl.

Da das Magnetfeld im Innenraum des Hohlzylinders konstant ist (siehe Abschnitt 1.3), macht es nicht viel Sinn, radiale Messungen vorzunehmen. Man könnte zwar das variierende radiale Feld innerhalb der Zylinderwand ausmessen, jedoch ist die hier verwendete Versuchsanordnung nicht dazu geeignet. Die Wandstärke ist im Vergleich zur Sondengrösse nicht dick genug und die Messung der Sondenposition nicht präzise genug, um eine vernünftige Anzahl Messungen mit akzeptabler Genauigkeit in der Sondenposition vorzunehmen.

Deshalb wurden bei diesen zwei Versuchsreihen lediglich die Frequenzgänge des B-Feldes im Innenraum der Hohlzylinder gemessen.

Folgende Fitkurven wurden anschliessend erstellt (je für den Kupferzylinder und den Stahlzylinder):

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- und Frequenzgang, Näherungslösung.

Wie beim Vollzylinder wurden auch hier noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Hohlzylinder erstellt, basierend auf den mittels Fits ermittelten Parametern.

3.3.1 Kupfer

Da dies die erste durchgeführte Messreihe war, wurde als Kontrolle die Spannung über dem Shunt-Widerstand gemessen. Um den Strom durch die Spule von Messung zu Messung möglichst konstant zu halten (und somit auch das externe Magnetfeld B_0), wurde angestrebt, diese Spannung möglichst bei 200 mV zu halten, was mit dem Widerstandswert von $1\,\Omega$ einen Spulenstrom I_0 von 200 mA ergab. Wie man erkennen kann, funktionierte das Justieren dieses Wertes sehr gut, weshalb bei den übrigen Messungen auf seine Erfassung verzichtet wurde.

Tabelle 12: Messwerte Kupferrohr

Frequenz (Hz)	Phase (°)	Amplitude (mV)	$V_{R_{Shunt}}$ (mV)
1	2	70.0	195.3
10	19.2	66.0	200.0
20	35.5	57.8	200.0
40	56.7	41.8	200.3
80	76.7	24.4	200.0
120	87	16.9	200.1
160	94	12.7	200.1
200	100	10.0	200.0
400	121	4.8	200.0
600	140	2.9	199.7
800	155	1.9	200.5
1000	170	1.4	200.2
1200	180	1.0	200.0
1500	200	0.7	199.9

Tabelle 13: Parameter für Fitfunktion in Abbildung 18

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

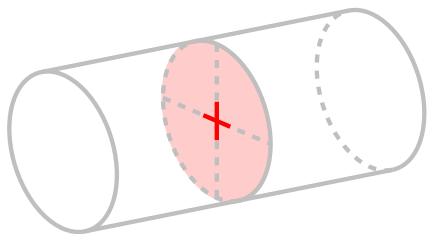


Abbildung 17: Sensorposition während Messung

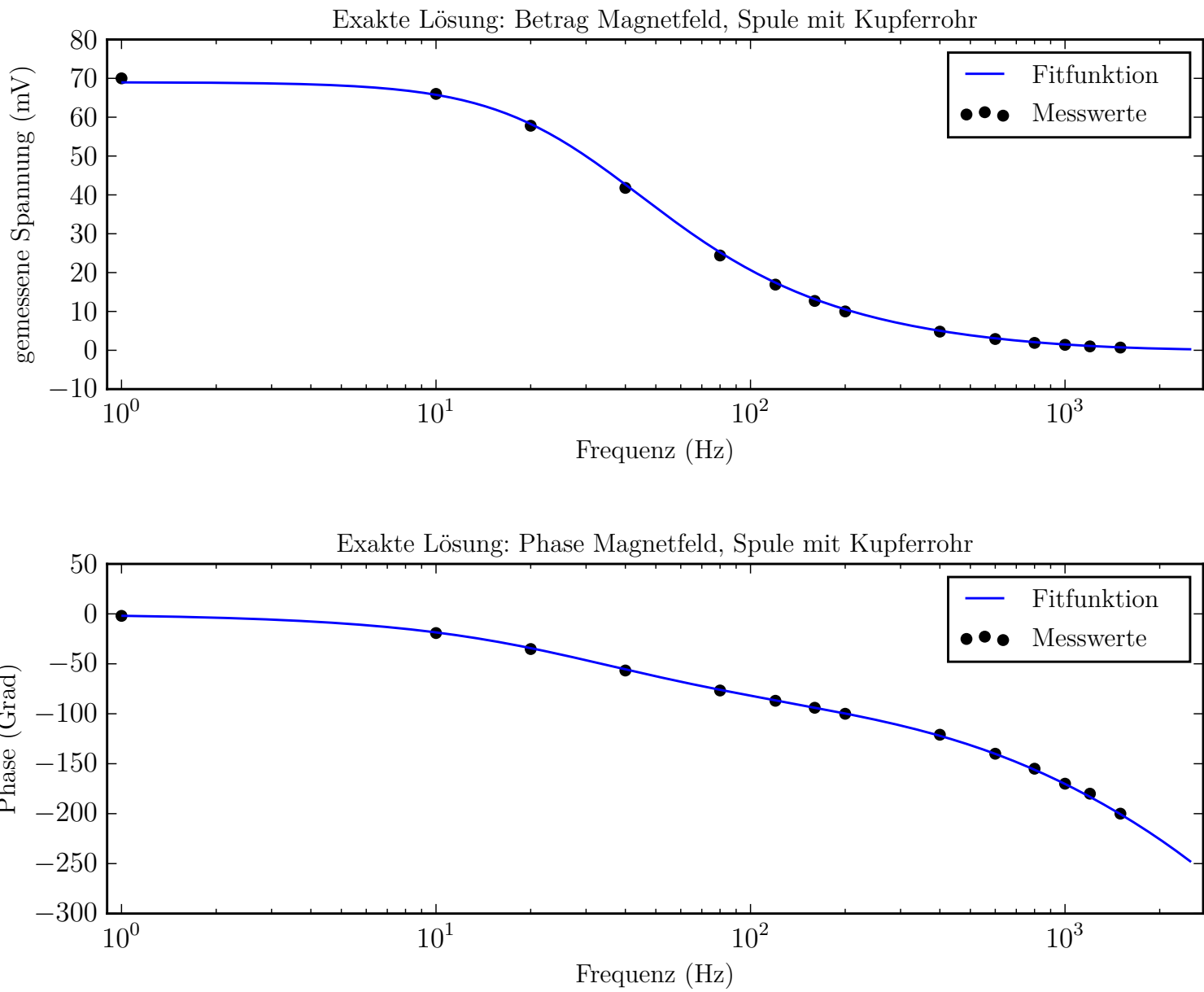


Abbildung 18: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

Bei der genäherten Fit-Funktion fällt auf, dass der Betrag der Näherungslösung über den gesamten Frequenzbereich ziemlich genau ist und nicht bedeutend von den Messwerten abweicht. Der Phasenverlauf divergiert jedoch stark von den Messwerten, sobald die Wanddicke des Zylinderrohrs grösser als die Eindringtiefe s_{skin} wird (was sich auch mit der Theorie deckt).

In Abbildung 19 ist daher das Verhältnis von Wandstärke und Eindringtiefe ebenfalls dargestellt.

Tabelle 14: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 19

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

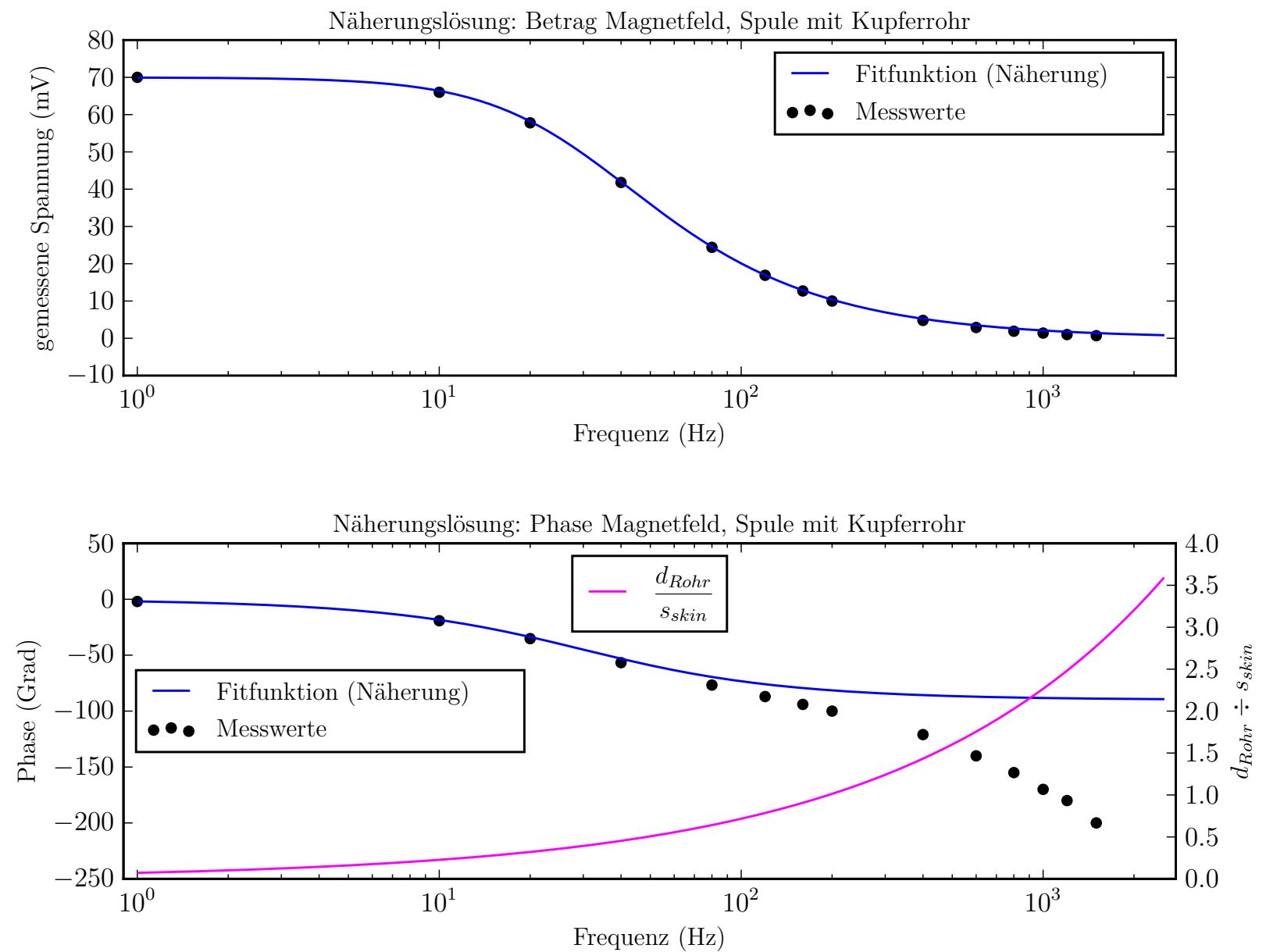


Abbildung 19: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

3.3.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\hat{\Phi}}{I}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

Tabelle 15: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 20, gerundet.		Tabelle 16: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 21, gerundet.	
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570	$R_{\Omega,0}$	6Ω
f_{min}	1 Hz	$NPTS$	1.0×10^3
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$	f_{min}	1 Hz
		f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

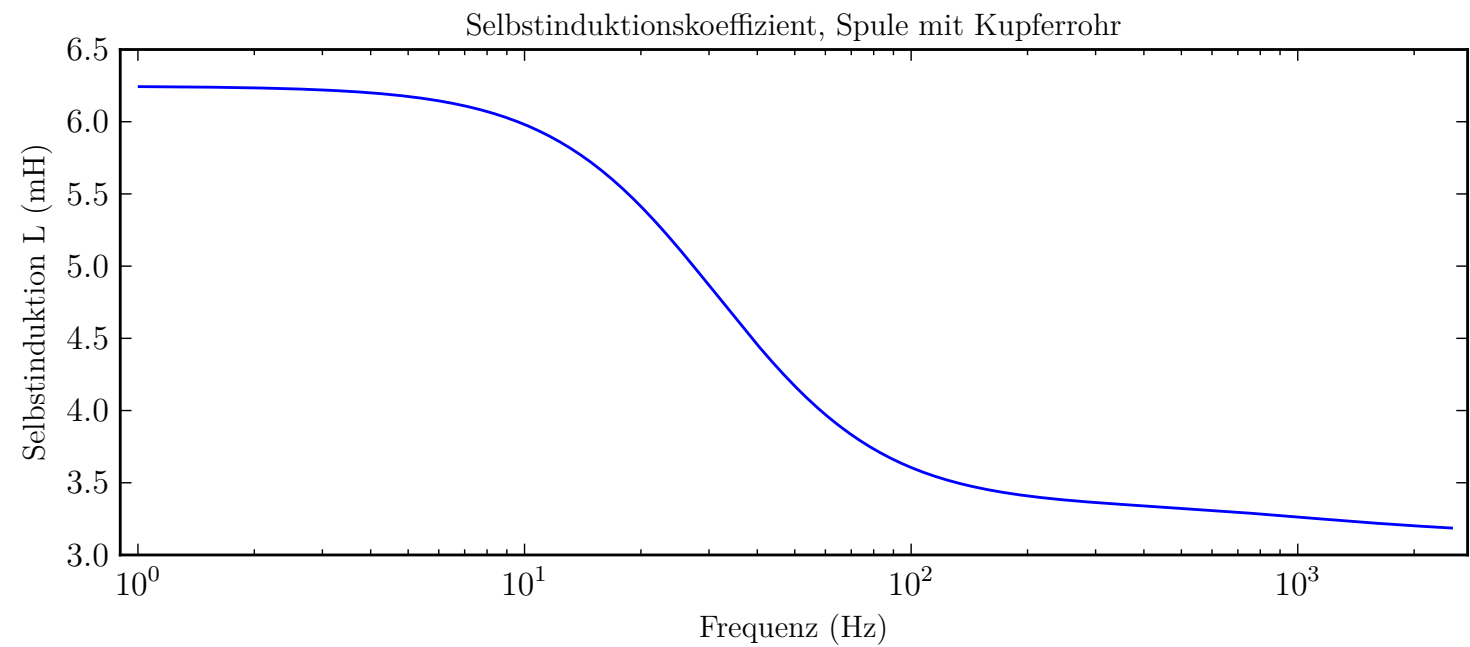


Abbildung 20: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

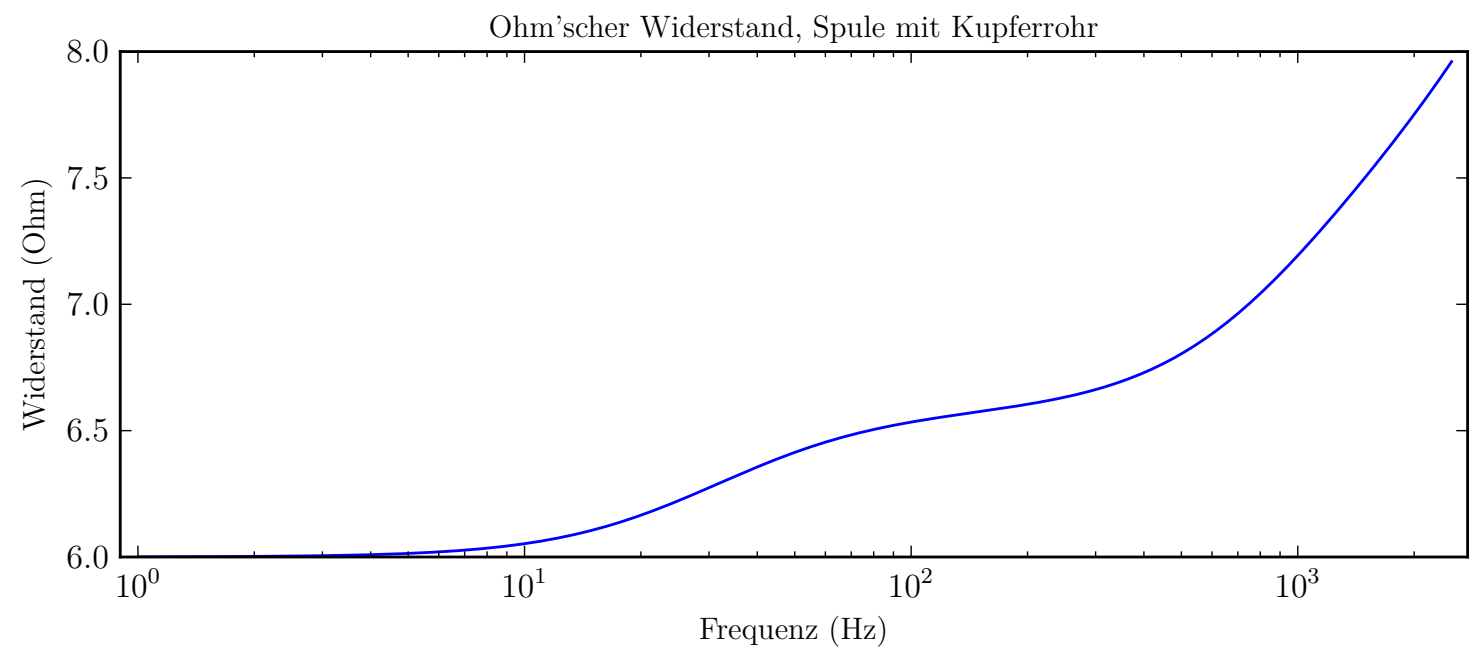


Abbildung 21: Änderung des Ohm'schen Widerstandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

Tabelle 17: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 29 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$52 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$2.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

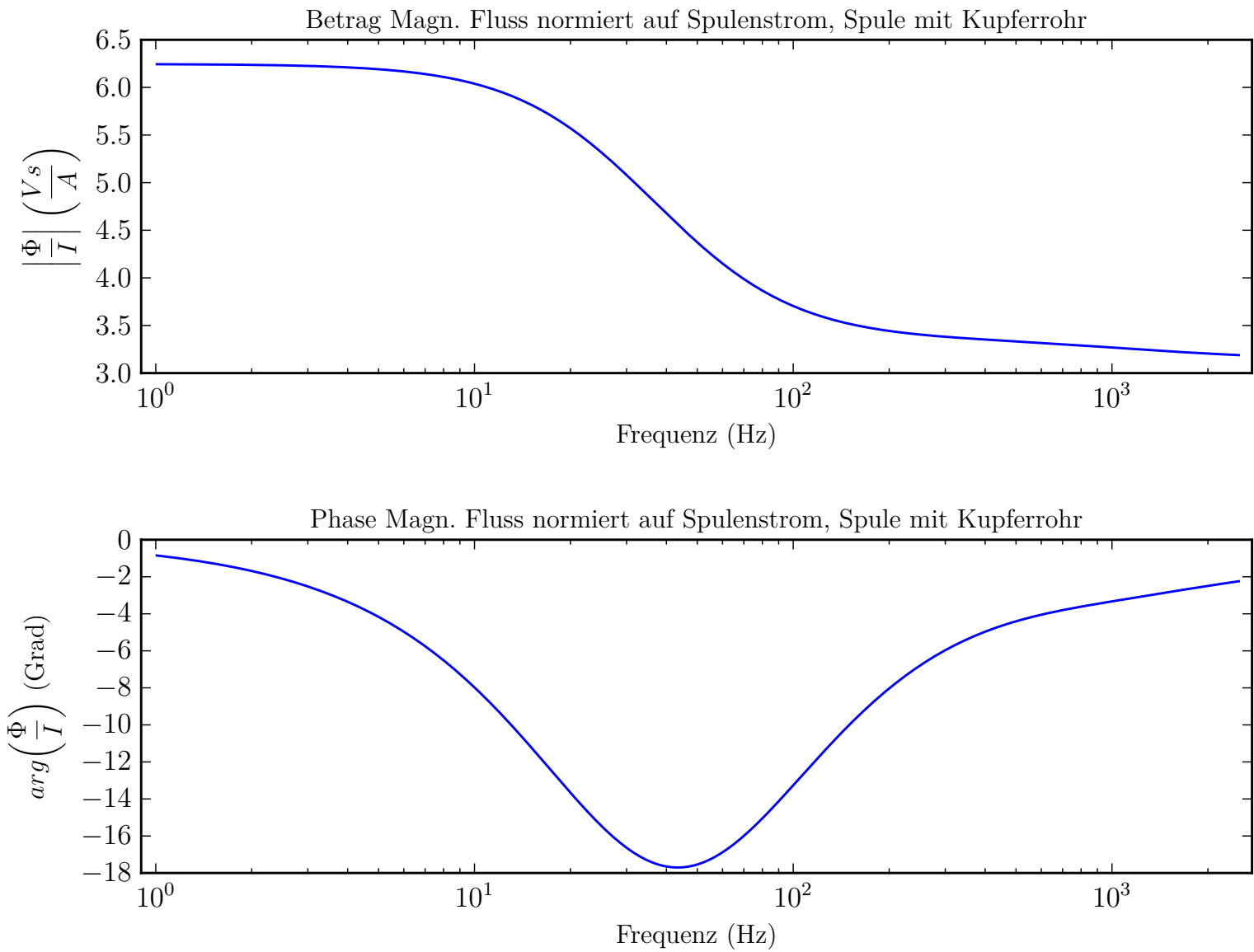


Abbildung 22: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Kupfer-Hohlzylinder

3.3.3 Rostfreier Stahl

Das Vorgehen beim Stahlrohr war identisch zum Kupferrohr, und auch in diesem Fall wurde ein Fit mittels der Näherung und mittels der exakten Funktion erstellt.

Ein wichtiger Unterschied zum Kupferrohr bestand darin, dass die Frequenz, ab welcher der Skineffekt wirklich zum Tragen kommt, bedeutend höher lag, weshalb der Messbereich entsprechend angepasst wurde. Bei 7.5 kHz war jedoch Schluss, da der Funktionsgenerator nicht mehr genügend Spannung liefern konnte, um die Shunt-Spannung auf den geforderten 200 mV zu halten.

Zusätzlich schwankten die Messwerte (insbesondere die Phase) bei den höheren Frequenzen sehr stark. Ein genaues Ablesen durch *Mitteln durch Augenmass* war nicht mehr möglich, sodass es keinen grossen Sinn machte, die Frequenz weiter zu erhöhen, selbst wenn der Funktionsgenerator noch weiter hätte gehen können.

Die Messwerte sind in Tabelle 19 auf Seite 21 zu finden.

Tabelle 18: Parameter für Fitfunktion in Abbildung 24

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$7.5 \times 10^3 \text{ Hz}$

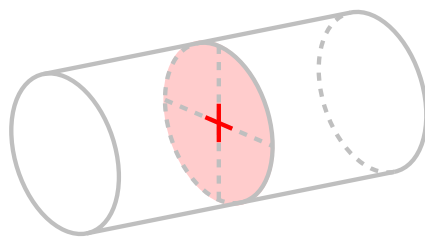


Abbildung 23: Sensorposition während Messung

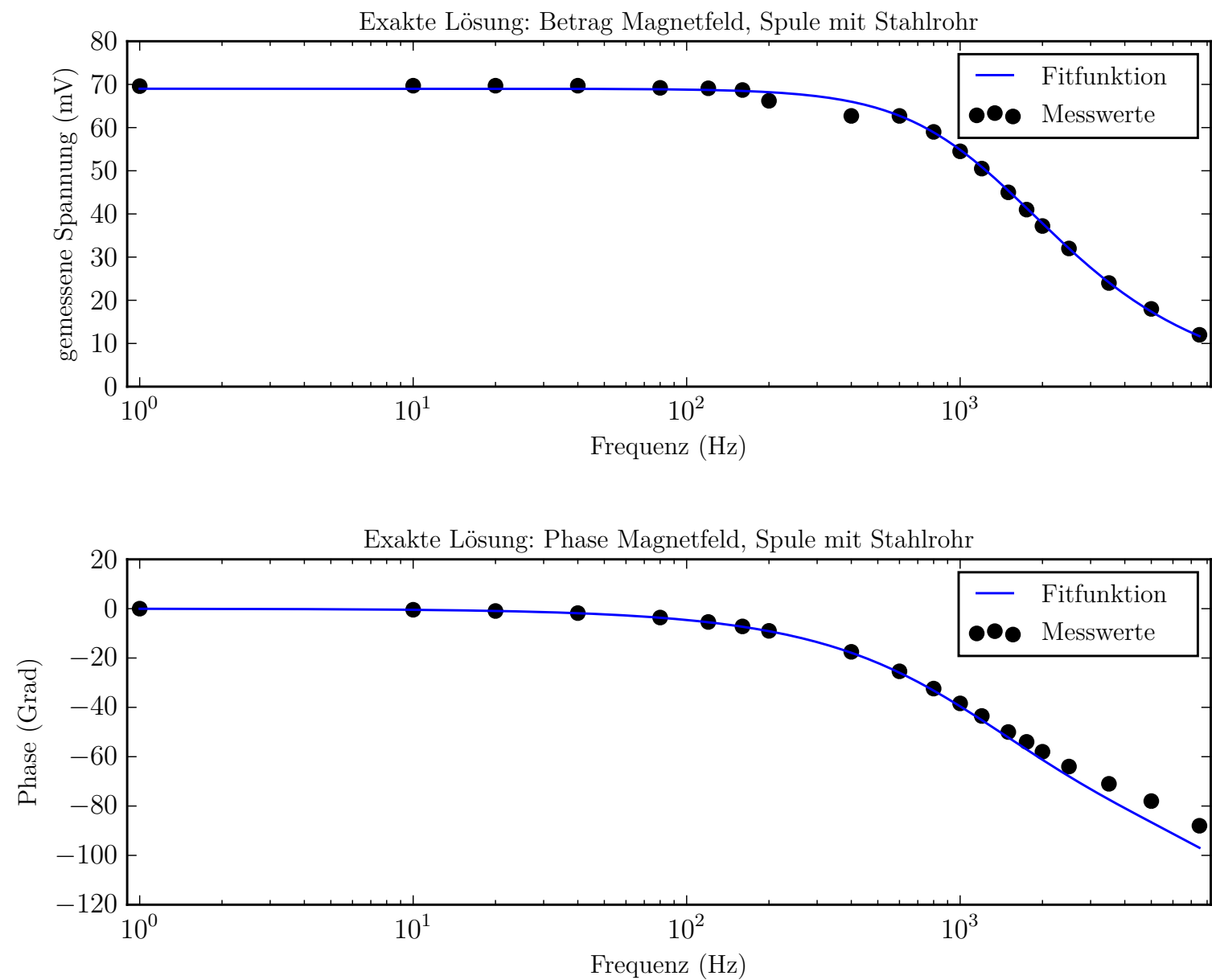


Abbildung 24: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl)

Tabelle 19: Messwerte Rohr aus rostfreiem Stahl

Frequenz (Hz)	Phase (°)	Amplitude (mV)
40	1.8	68.7
120	5.4	69.1
200	9	68.7
400	17.5	66.2
600	25.4	62.7
800	32.4	59
1000	38.4	54.5
1200	43.5	50.5
1500	50	45
1750	54	41
2000	58	37.2
2500	64	32
3500	71	24
5000	78	18
7500	88	12

Weil der in den Messungen abgedeckte Frequenzbereich nicht ganz genug hoch ging, um den typischen Kurvenverlauf mit dem Abfall des Betrags in der optischen Mitte des Plots darzustellen, wurde auch die Fit-Funktion über einen erweiterten Frequenzbereich geplottet. Natürlich ist der nicht mit Messungen abgedeckte Bereich der Kurve nicht ganz so aussagekräftig wie das messtechnisch erfasste Frequenzspektrum, da die experimentelle Bestätigung fehlt.

Tabelle 20: Parameter für Fitfunktion in Abbildung 25

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r	0 m
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
B_0	$69 \times 10^{-3} \text{ T}$
$NPTS$	1.0×10^3
$f_{min_{opt}}$	80 Hz
$f_{max_{opt}}$	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

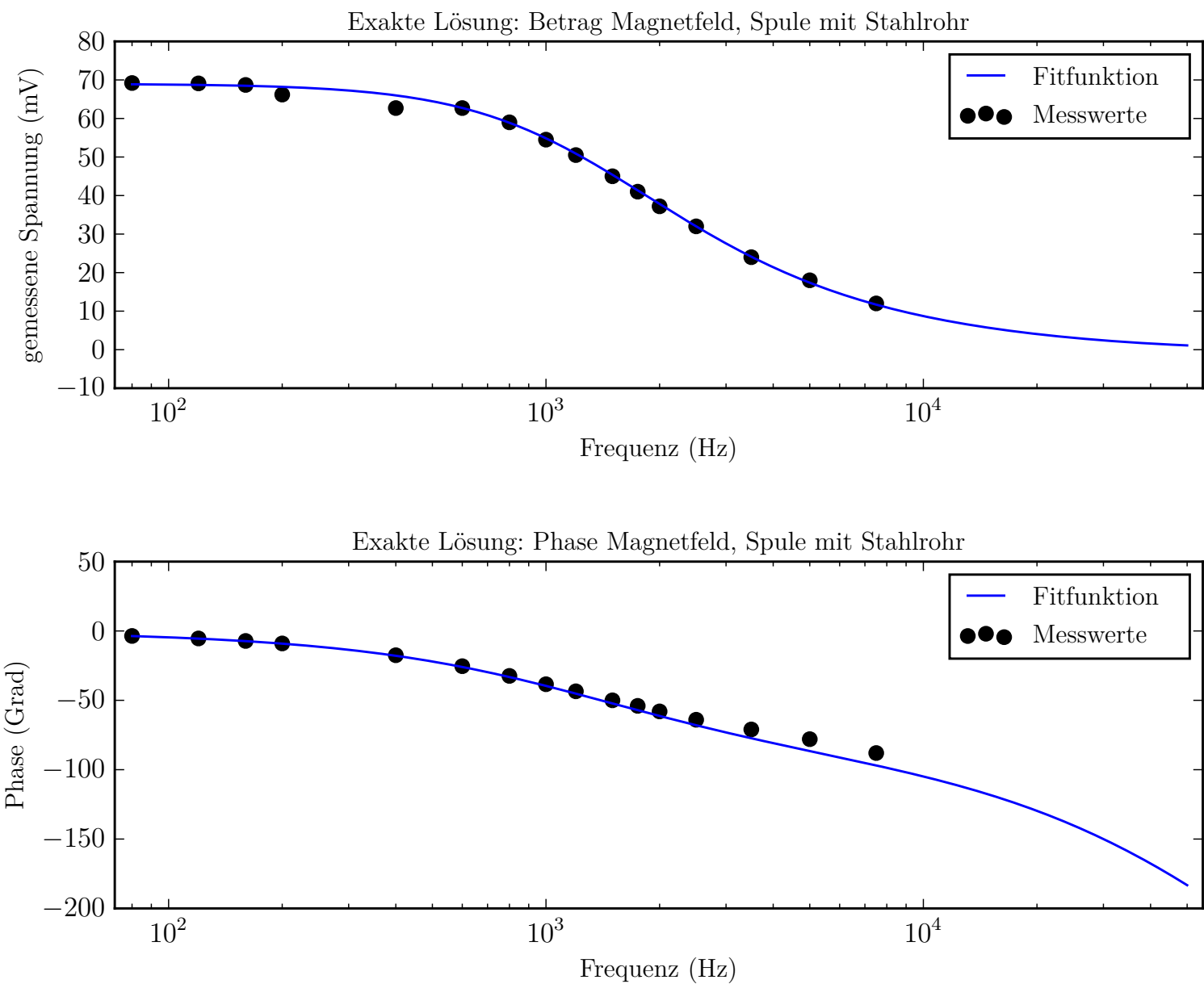


Abbildung 25: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder, erweiterter Frequenzbereich (rostfreier Stahl)

Bei der Näherungslösung ist wie auch beim Kupferrohr zu erkennen, dass die Phase der Fit-Funktion von den Messwerten zu divergieren beginnt wenn die Wanddicke des Rohres grösser wird als die Eindringtiefe s_{skin} (magenta Kurve in Abbildung 26). Der Frequenzbereich wurde auch hier ein wenig über den Messbereich erweitert, um dieses divergierende Verhalten besser erkennbar zu machen.

Tabelle 21: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 26

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3} \text{ m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	1 Hz
f_{max}	$25 \times 10^3 \text{ Hz}$

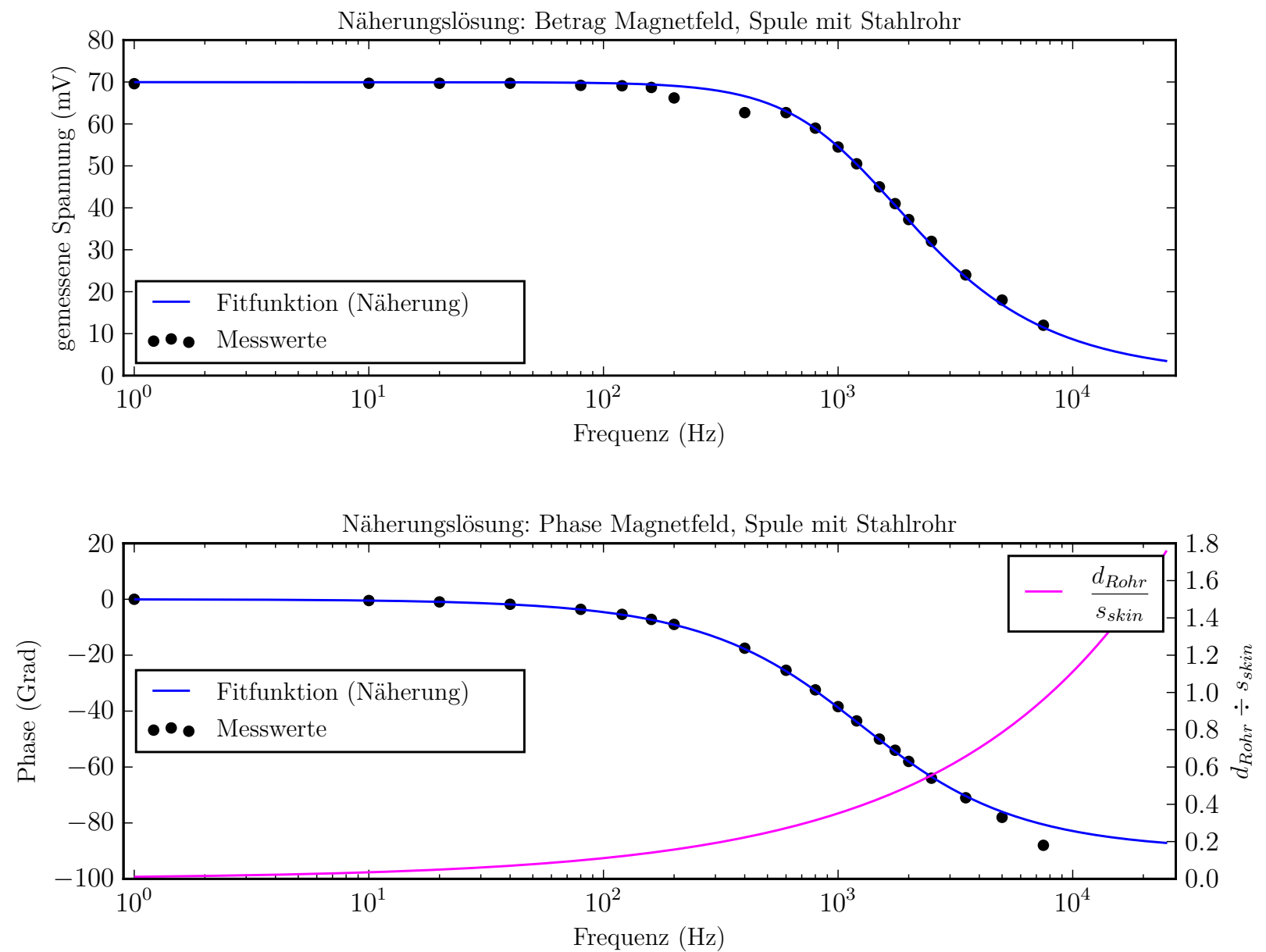


Abbildung 26: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl)

3.3.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\hat{\Phi}}{I}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

Tabelle 22: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 27, gerundet.		Tabelle 23: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 28, gerundet.	
μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$	d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$	r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$	l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3	$R_{\Omega,0}$	5Ω
N_0	570	$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz	f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$	f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

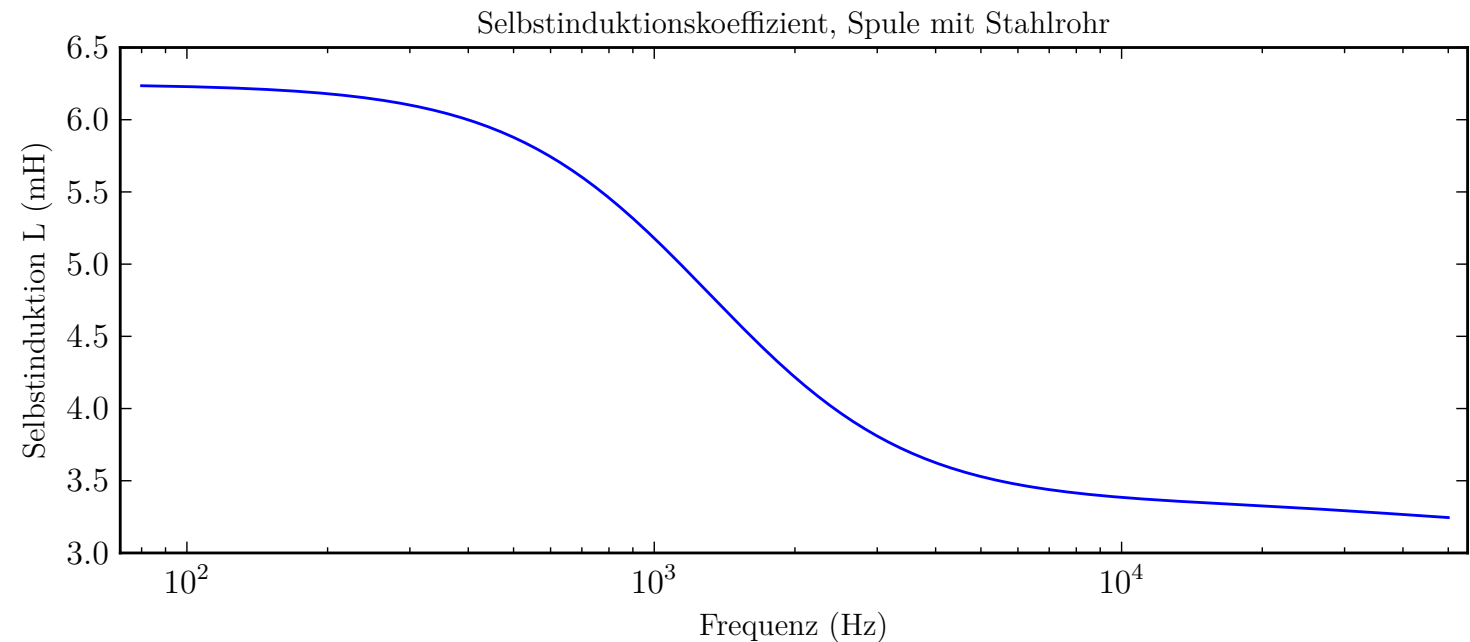


Abbildung 27: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

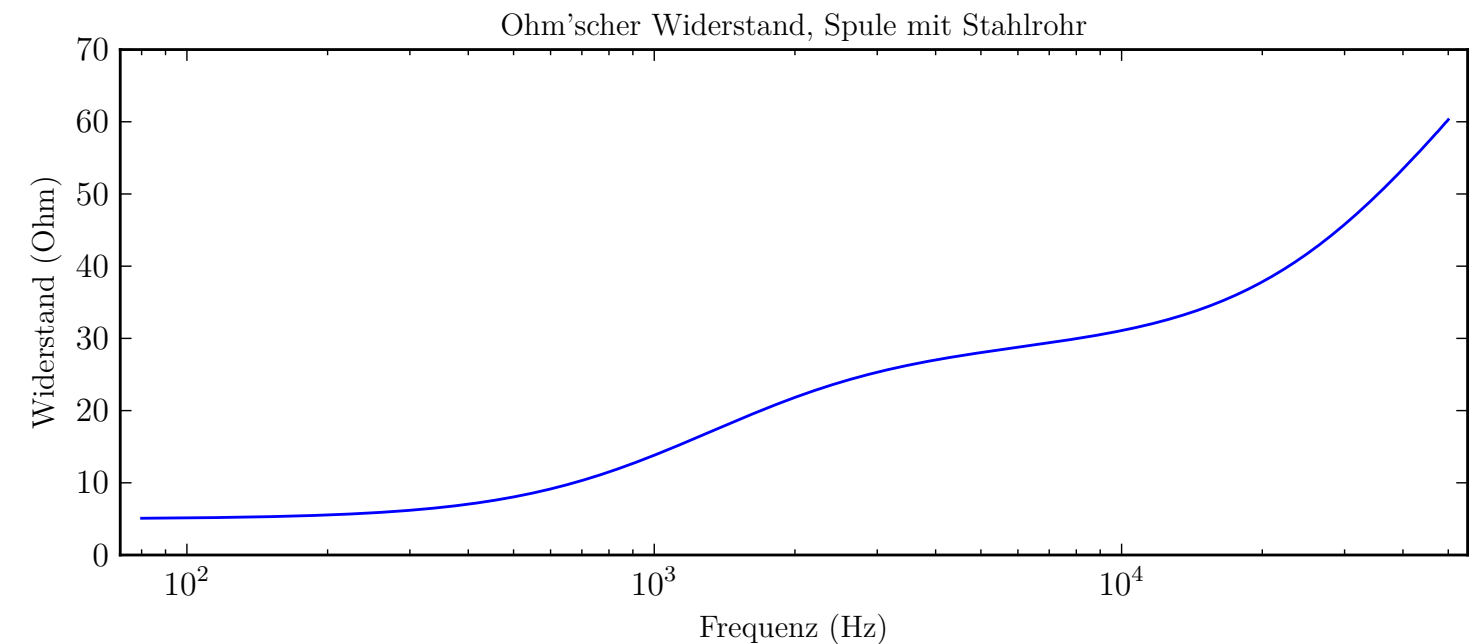


Abbildung 28: Änderung des Ohm'schen Widerstandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

Tabelle 24: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 29 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
σ	$1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_1	$30 \times 10^{-3} \text{ m}$
r_2	$35 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
l	$500 \times 10^{-3} \text{ m}$
$NPTS$	1.0×10^3
f_{min}	80 Hz
f_{max}	$50 \times 10^3 \text{ Hz}$

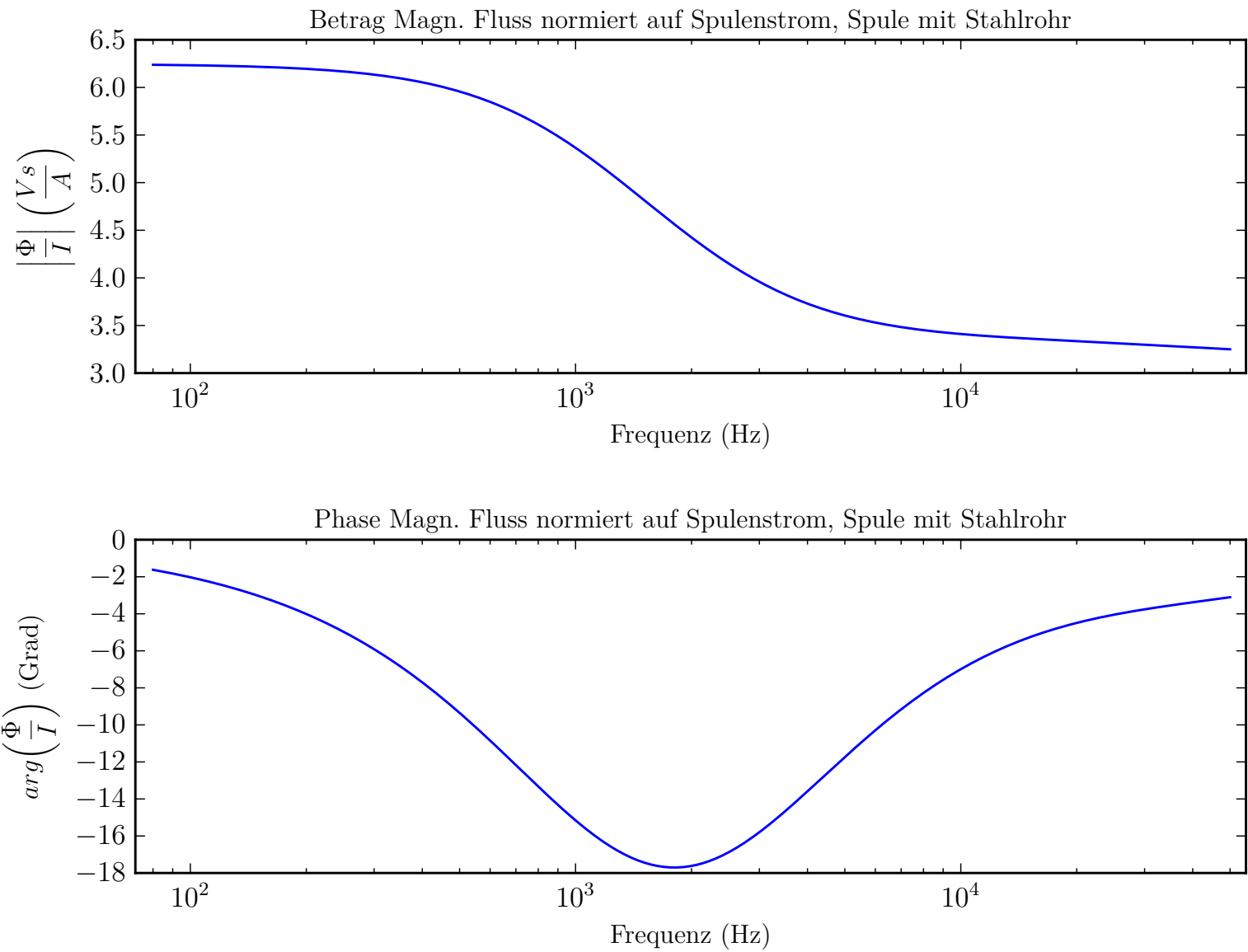


Abbildung 29: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

4 Fehlerrechnung

Auf die Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

Literatur

- [1] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt*. Windisch: FHNW Aargau, 2015.
- [2] Lenz'sche Regel. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel [Stand: 02. November 2015].
- [3] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [Stand: 02. Oktober 2015].
- [4] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].
- [5] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 649.