

# E11 – Skineffekt

2. November 2015

---

Versuchsleiter: Raphael Frey  
Assistent: Jeffrey Gantner

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Arbeitsgrundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Grundidee . . . . .	1
1.2 Vollzylinder . . . . .	1
1.3 Hohlzylinder . . . . .	3
<b>2 Durchführung</b>	<b>5</b>
2.1 Versuchsanordnung . . . . .	5
2.2 Versuchsablauf . . . . .	5
<b>3 Auswertung</b>	<b>6</b>
3.1 Vollzylinder . . . . .	6
3.2 Hohlzylinder . . . . .	13
<b>4 Fehlerrechnung</b>	<b>22</b>
<b>Anhang A Stützpunkte</b>	<b>23</b>
<b>Anhang B Messprotokolle</b>	<b>23</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>29</b>

## **Versionsgeschichte**

*20.10.2015: Version 1*

# 1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [1].

## 1.1 Grundidee

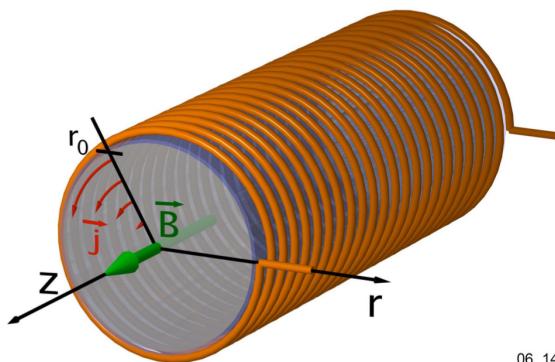
Hochfrequente Wechselströme haben die Eigenschaft, dass sie v.a. an der Oberfläche eines Leiters fliessen und nicht tief in den Leiter eindringen. Dieses als *Skineffekt* bekannte Phänomen soll in diesem Versuch experimentell nachgewiesen werden.

Wird ein Leiter in ein wechselndes Magnetfeld eingeführt, werden in ihm Wirbelströme induziert. Ist die Frequenz des externen Magnetfelds niedrig, verteilen sich diese Wirbelströme auf den gesamten Querschnitt (wenn auch nicht gleichmäßig). Wird die Frequenz des externen Magnetfelds erhöht, so verlagern sich die Wirbelströme in den Oberflächenbereich des Leiters. Da sie der Änderung des externen Feldes gemäss der Lenz'schen Regel [2] entgegenwirken, schwächen sie im Innern des Leiters das externe Feld ab, es gibt einen Abschirmeffekt. Je höher die Frequenz des externen Feldes, um so ausgeprägter ist diese Abschirmung.

Als Versuchsobjekte dienen die Fälle eines eingeführten Hohlzylinders und eines eingeführten Vollzylinders. Es werden sowohl gängige Näherungen wie auch die exakten Lösungen aus der Theorie mit den Messergebnissen verglichen.

Es sei hier noch angemerkt, dass auch der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  sowie der Ohm'sche Widerstand  $R$  der Konfiguration aus Spule und eingeführtem Leiter verändert werden. Aus Zeitgründen wurde dieses Verhalten in diesem Versuch nicht gemessen, jedoch werden in Abschnitt trotzdem einige Schlussfolgerungen aus den erfassten Daten gezogen.

## 1.2 Vollzylinder



06\_14

Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder Quelle: Skript zum Versuch [1]

### 1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega \mu_0 \sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \quad (1)$$

wobei:

$r$ : Distanz zu Zylinderachse

$\hat{B}$ : gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)

$\omega$ : Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes

$\sigma$ : spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \quad (2)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$$

$r_0$ : Radius des eingeführten Zylinders

$\hat{B}_0$ : Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)

$J_0(z)$ : Besselfunktion erster Art (siehe auch [3])

Beachte:  $\hat{B}(r)$  ist eine komplexe Zahl!

### 1.2.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

wobei

$$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$$

Die Lösung brauchbar ist für  $s_{skin} \ll r_0$ .

### 1.2.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + L_{Rand} \quad (4)$$

wobei

$l$ : Länge der Zylinderspule

$N_0$ : Anzahl Windungen der Zylinderspule

$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l}$  mit  $r_{Sp}$ : Radius Zylinderspule

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

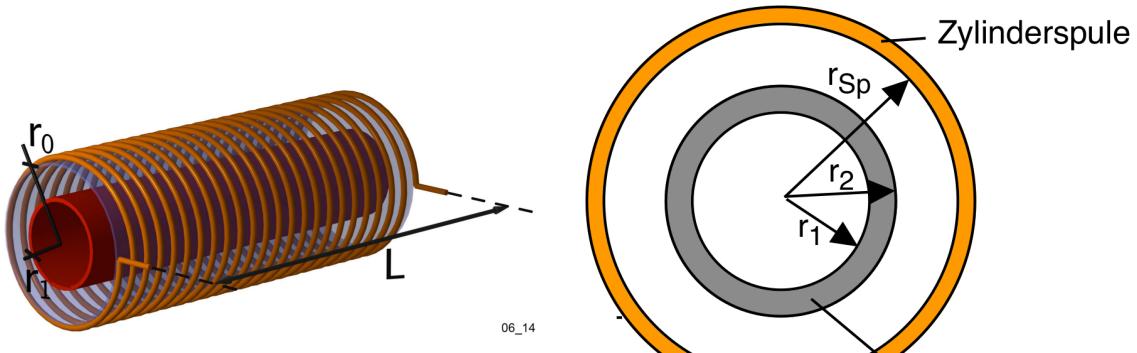
Wobei  $R_{\Omega,0}$  der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahts, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierten magnetischen Fluss:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left( \frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

Auch für diese Werte gibt es Näherungslösungen. Da aber bei der Durchführung des Versuches das Gewicht auf das B-Feld gelegt wurde, wird an dieser Stelle nicht weiter auf diese eingegangen. Näherungen sind primär interessant beim Vergleich mit Messwerten und Beobachtungen; das Vergleichen einiger Kurven basierend auf Gleichungen ohne Referenzwerte aus dem Labor ist in den Augen des Autors weniger aufschlussreich und wird daher weggelassen, um diesen Bericht in seinem Umfang nicht allzu sehr wachsen zu lassen.

### 1.3 Hohlzylinder



**Abbildung 2:** Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

**Abbildung 3:** Spule mit Hohlzylinder, Querschnitt *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

#### 1.3.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = \text{konst.} \quad (7)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (8)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = \text{konst.} \quad (9)$$

Mit  $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$  und  $k$  gemäss Abschnitt zum Vollzyliner.

#### 1.3.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe  $s_{skin}$ , kann das Rohr als dünnwandig betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left( \frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

wobei:

$r_1$ : mittlerer Radius des Metallrohrs

$d$ : Wandstärke des Metallrohrs

### 1.3.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left( r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} + \frac{2 r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \quad (11)$$

$$L = Re \left( \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) \quad (12)$$

$$R = -\omega \cdot Im \left( \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} \right) + R_{\Omega,0} \quad (13)$$

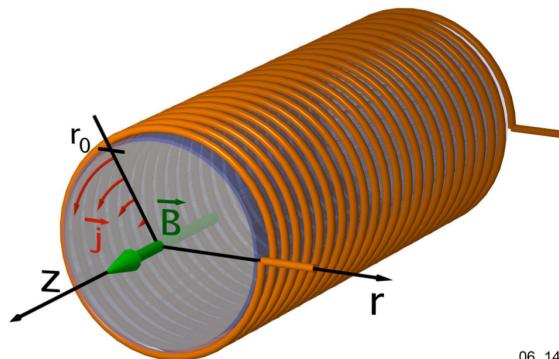
## 2 Durchführung

In diesem Kapitel wird die Durchführung des Versuches beschrieben.

### 2.1 Versuchsanordnung

### 2.2 Versuchsablauf

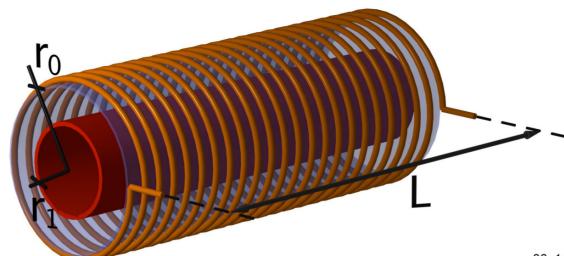
#### 2.2.1 Hohlzylinder



06\_14

Abbildung 4: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

#### 2.2.2 Vollzylinder



06\_14

Abbildung 5: Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

## 3 Auswertung

### 3.1 Vollzylinder

*Anmerkung zu den Messprotokollen:* Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen nicht immer konsistent.

#### 3.1.1 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Größen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *Qtiplot* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes).

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Lösungen an, der Autor hat sich hier für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante).

Im Allgemeinen wurde dabei folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
  - Die Leitfähigkeit  $\sigma$  des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
  - und den Betrag  $|B_0|$  des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von  $|B_0|$  abhängt (siehe Gleichung 2 auf Seite 2 sowie Gleichung 7 auf Seite 3), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von  $\sigma$  einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, kann man mittels Tunen von  $|B_0|$  die Kurve für die Messpunkte von  $|\hat{B}|$  anpassen.
- Anschliessend kann man noch iterativ optimieren, bis die Fitfunktion den Verlauf der Messpunkte zufriedenstellend repräsentiert.

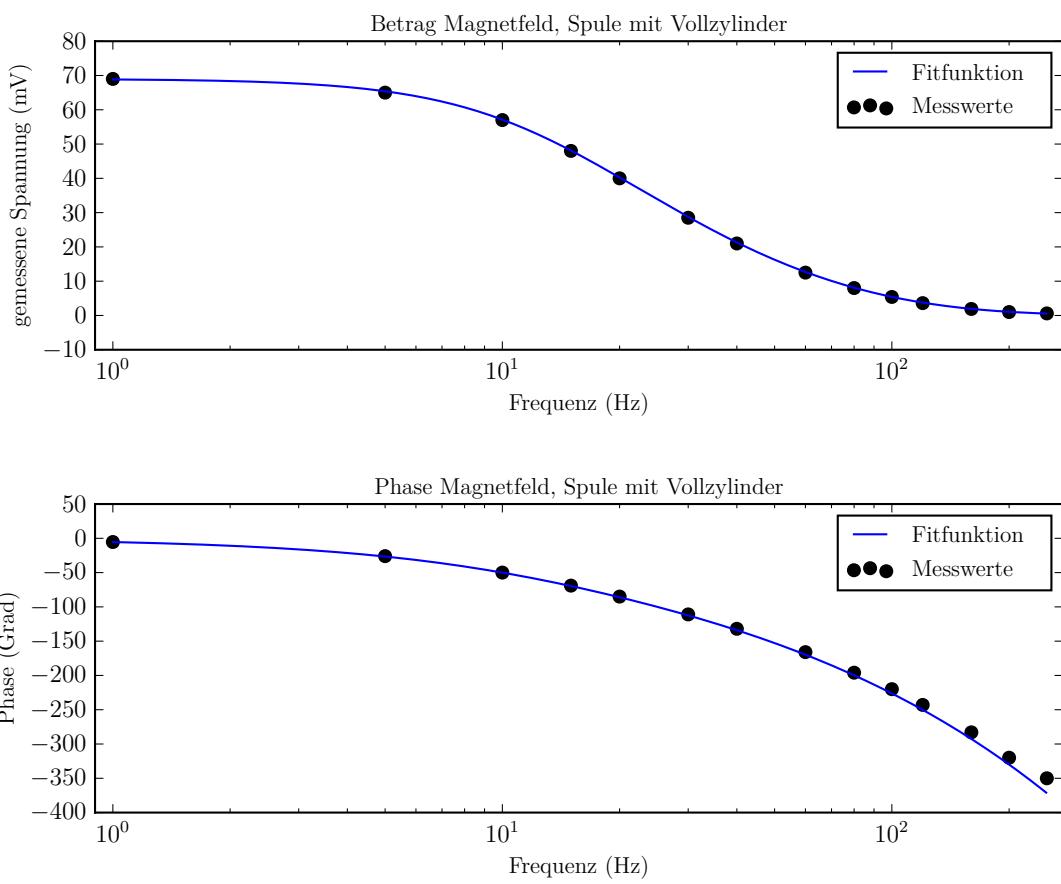
Für die genaue algorithmische Implementierung sei hier auf den Python-Quellcode verwiesen.

#### 3.1.2 Frequenzgang

Die Messdaten für den Frequenzgang des B-Felds in einem Vollzylinder sind in Tabelle 1 zu sehen.

**Tabelle 1:** Vollzylinder aus Aluminium, frequenzabhängig

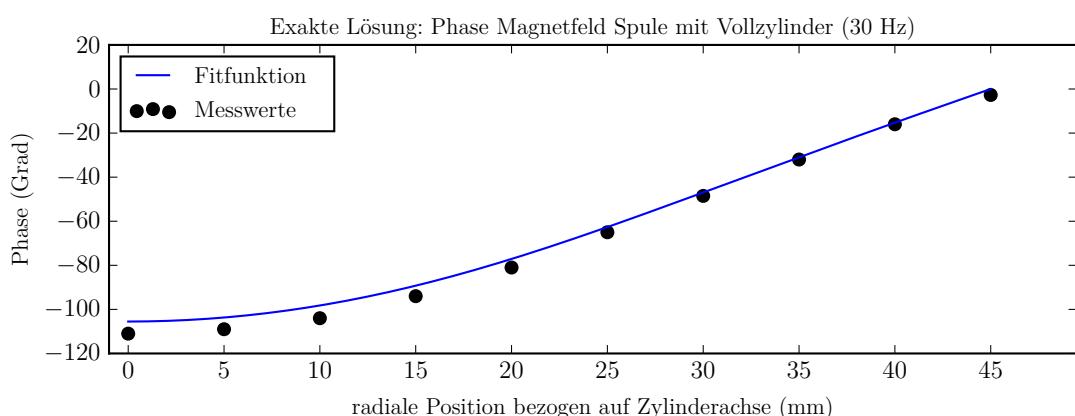
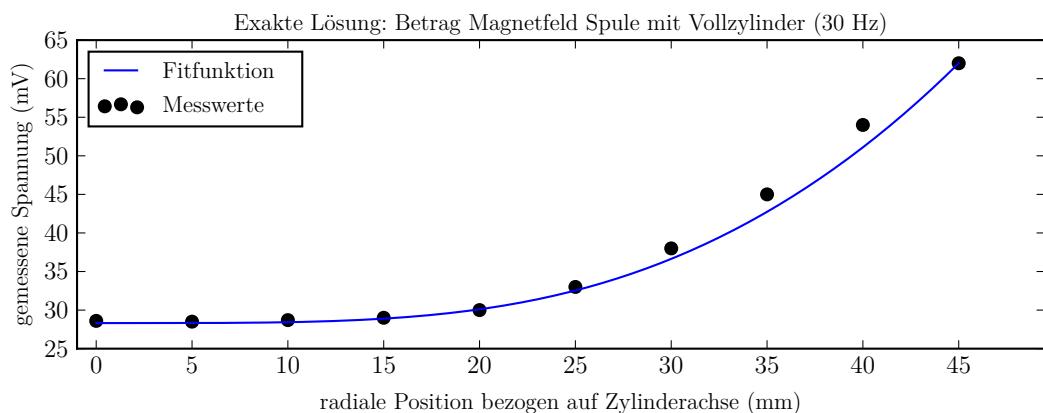
Frequenz (Hz)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)
1	5.4	69
5	26	65
10	50	57
15	69	48
20	85	40
30	111	28.5
40	132	21
60	166	12.5
80	196	8
100	220	5.4
120	243	3.6
160	283	1.9
200	320	1
250	350	0.6

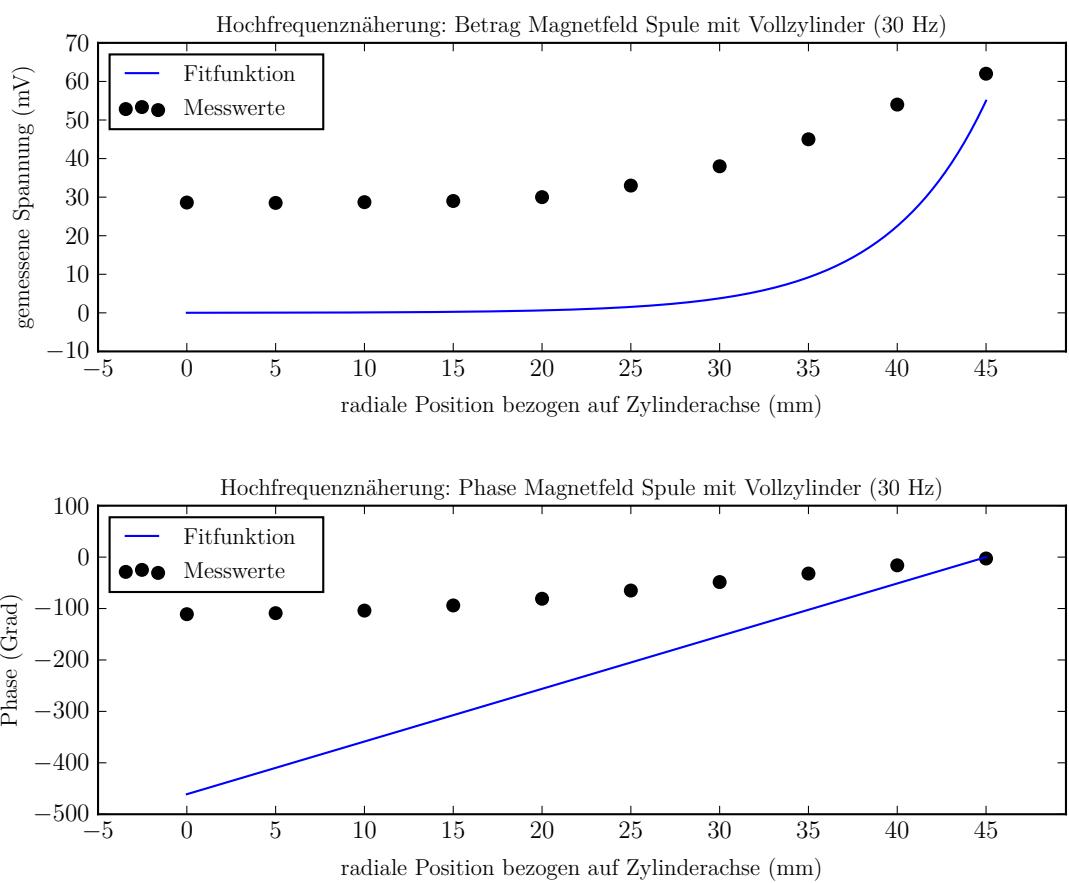


**Tabelle 2:** Vollzylinder aus Aluminium, 30 Hz

Radius (mm)	Phasenverschiebung ( $^{\circ}$ )	Amplitude (mV)
0	111	28.6
5	109	28.5
10	104	28.7
15	94	29
20	81	30
25	65	33
30	48.5	38
35	32	45
40	16	54
45	2.7	62
50	0	37

### 3.1.3 Niedrige Frequenzen

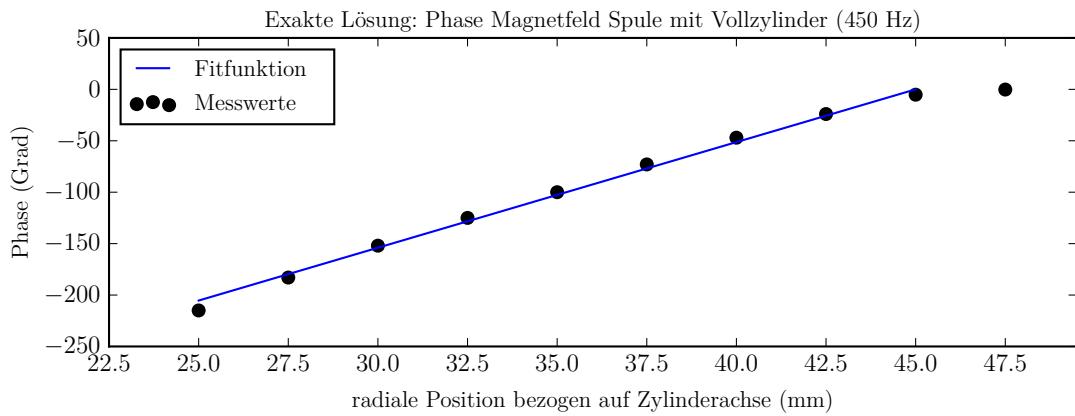
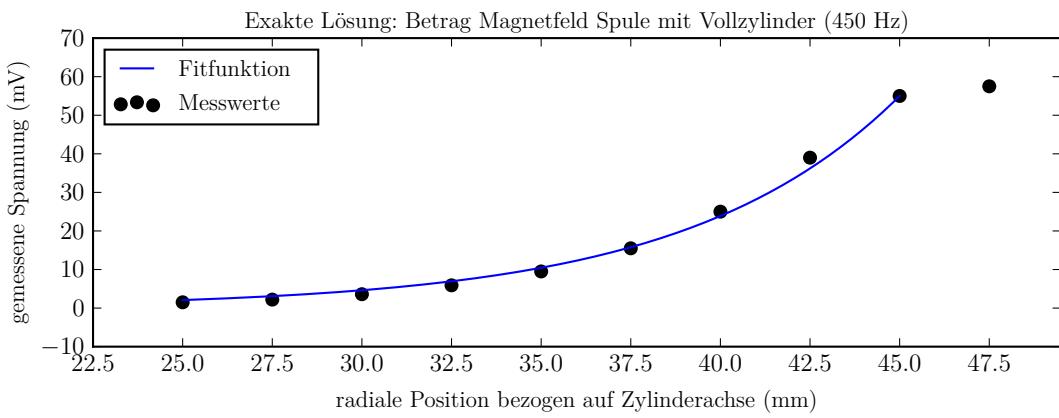




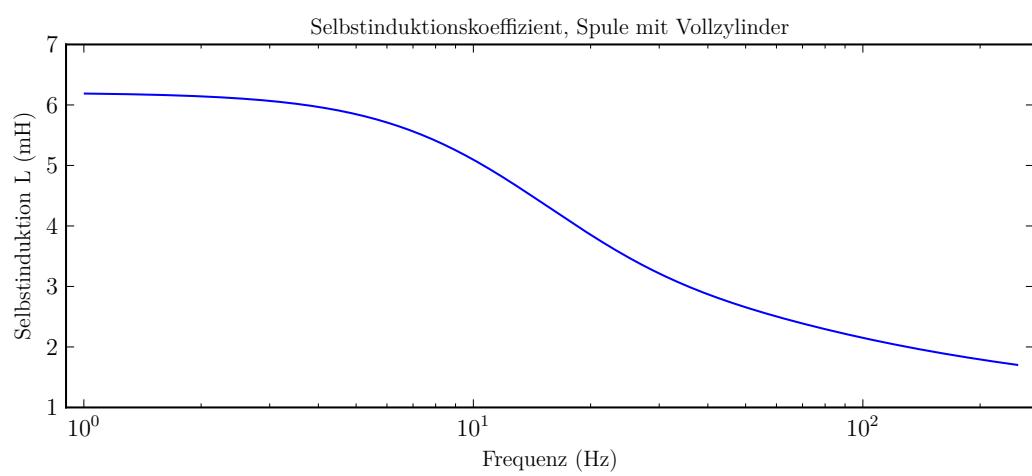
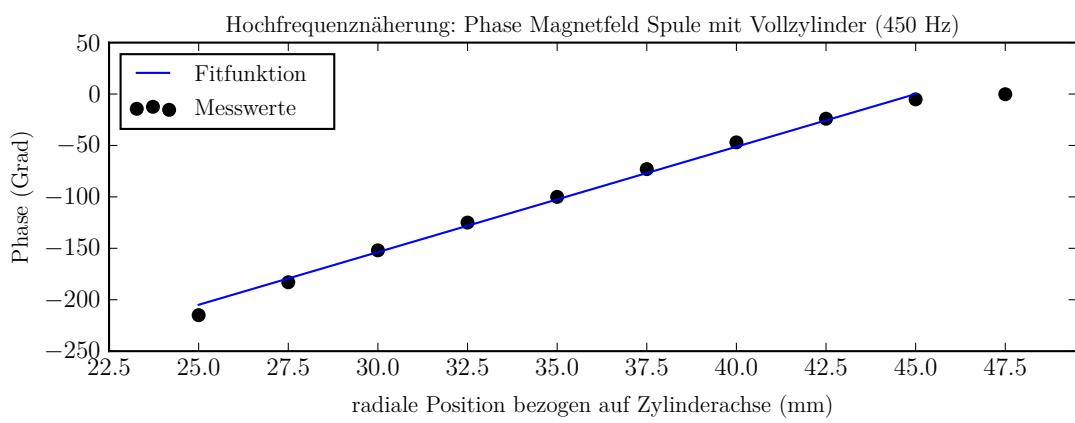
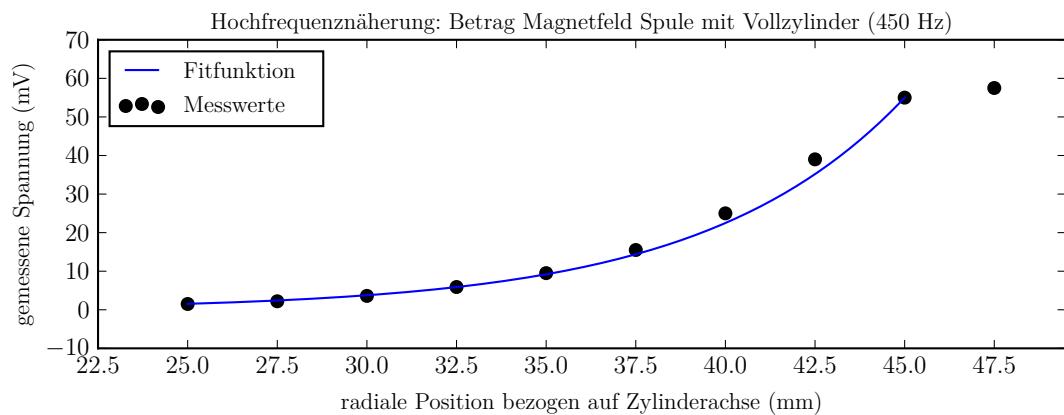
**Tabelle 3:** Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz

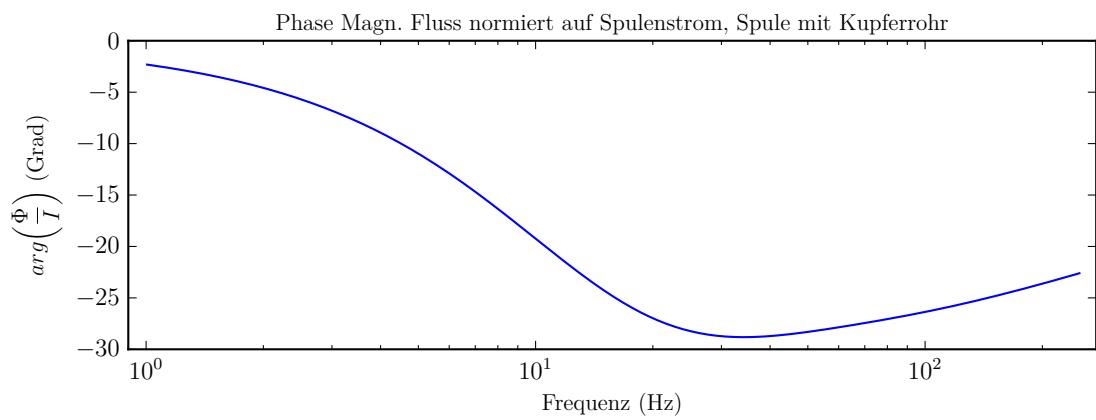
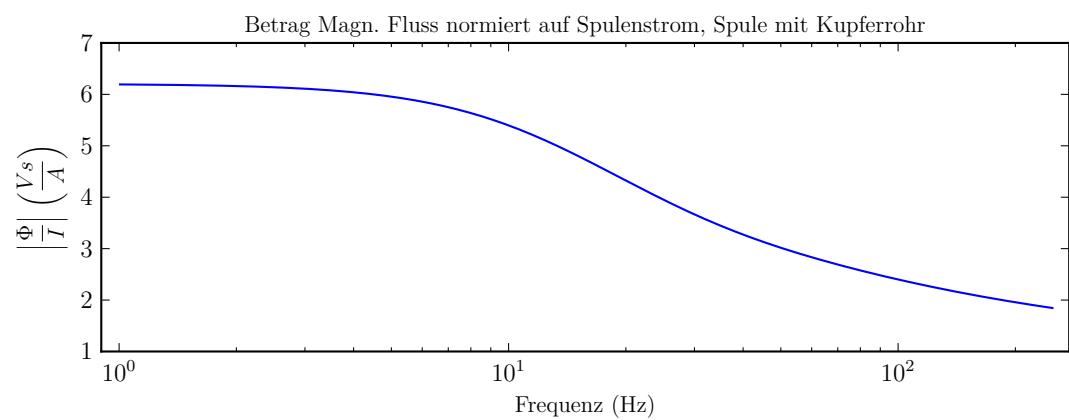
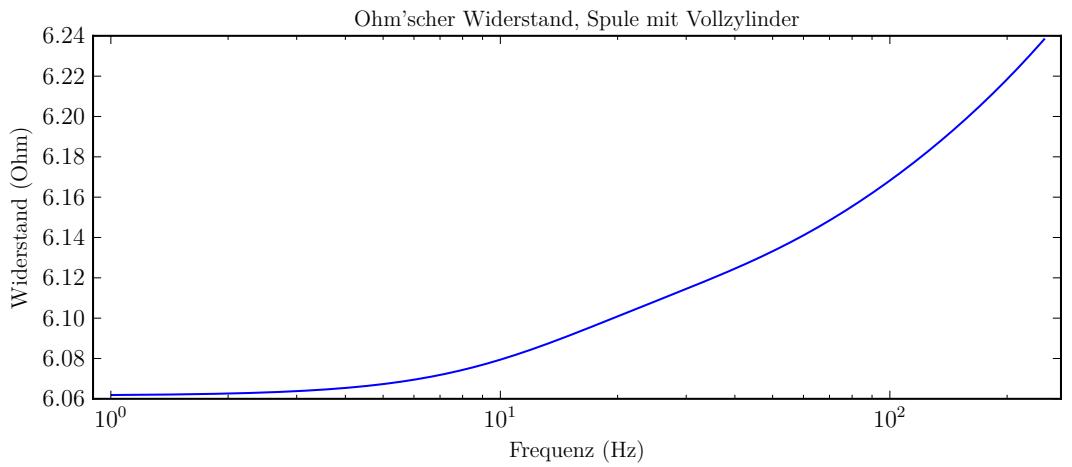
Radius (mm)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)
25	215	1.5
27.5	183	2.2
30	152	3.6
32.5	125	5.9
35	100	9.5
37.5	73	15.5
40	47	25
42.5	24	39
45	5.2	55
47.5	0.2	57.5
50	0	38

### 3.1.4 Hohe Frequenzen



### 3.1.5 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand



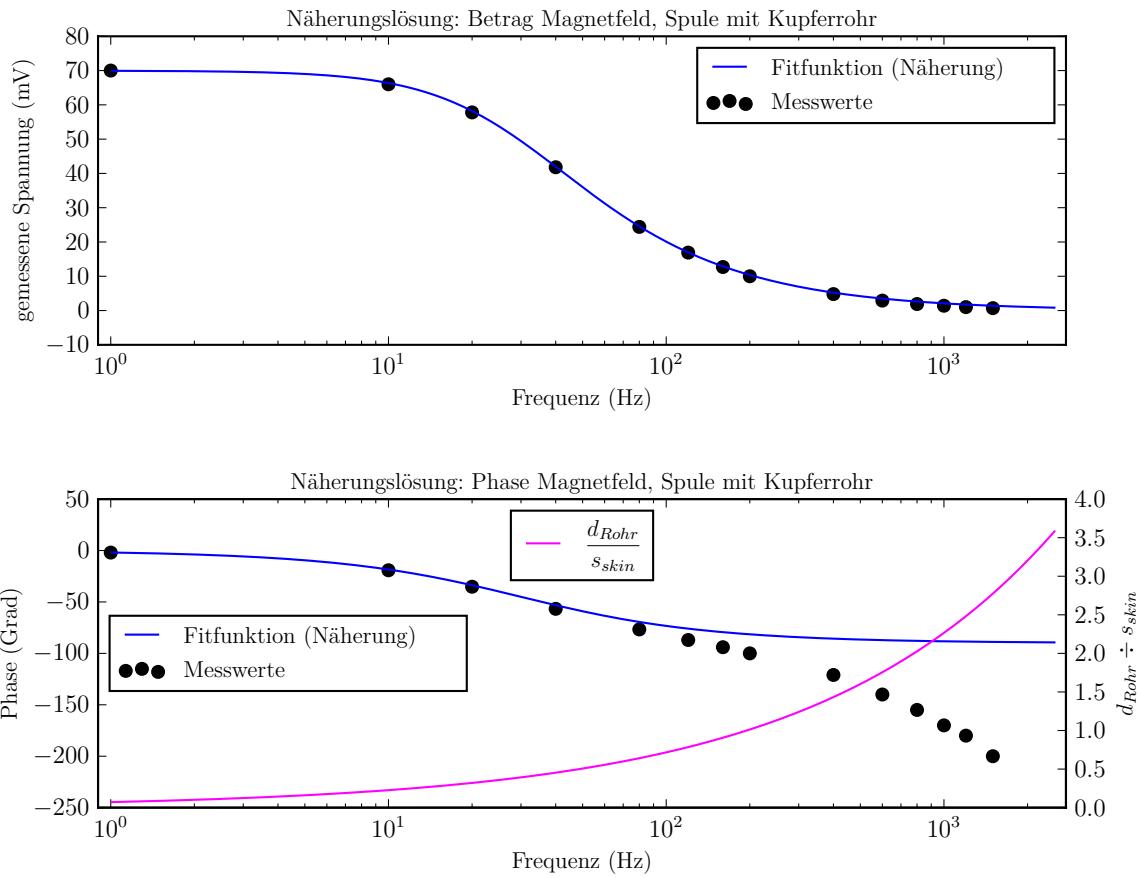


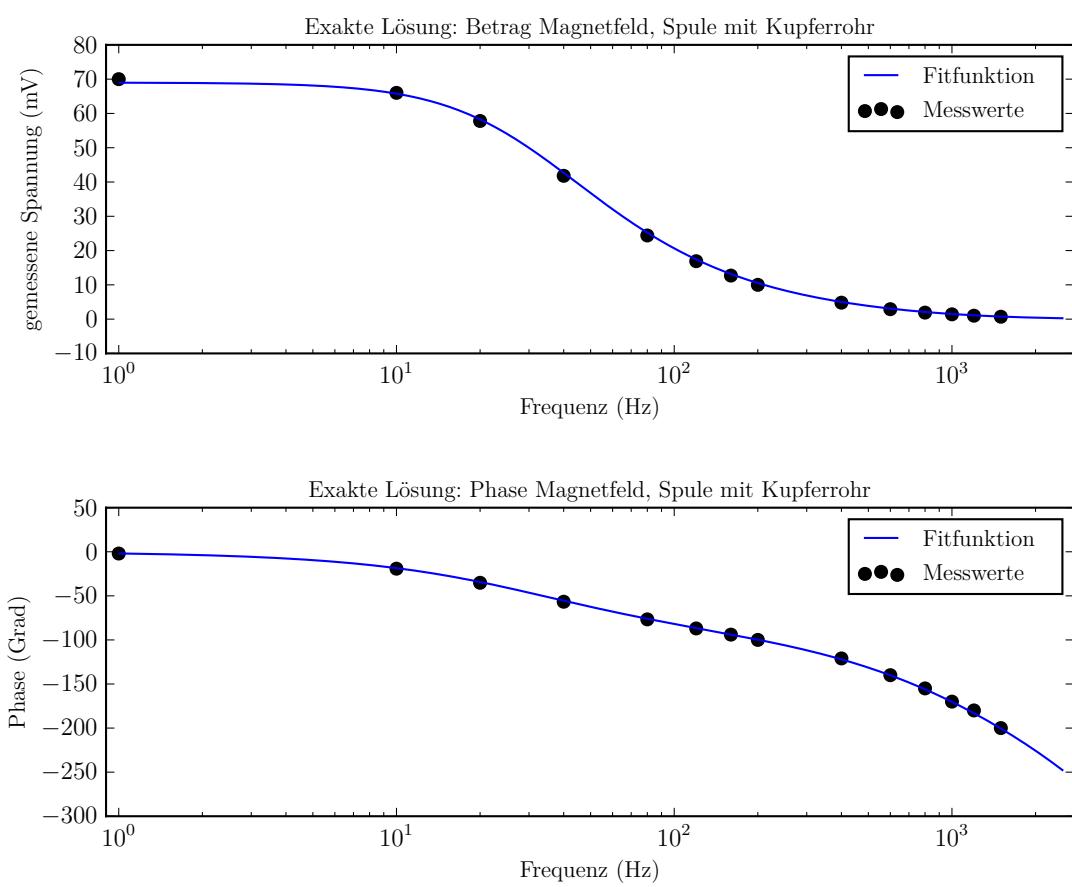
**Tabelle 4:** Kupferrohr

Frequenz (Hz)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)	Shunt-Spannung (mV)
1	2	70.0	195.3
10	19.2	66.0	200.0
20	35.5	57.8	200.0
40	56.7	41.8	200.3
80	76.7	24.4	200.0
120	87	16.9	200.1
160	94	12.7	200.1
200	100	10.0	200.0
400	121	4.8	200.0
600	140	2.9	199.7
800	155	1.9	200.5
1000	170	1.4	200.2
1200	180	1.0	200.0
1500	200	0.7	199.9

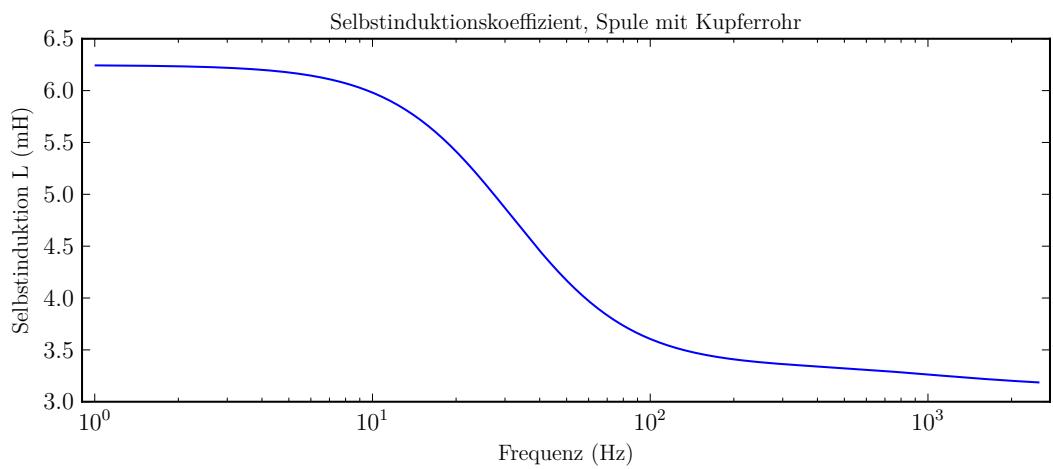
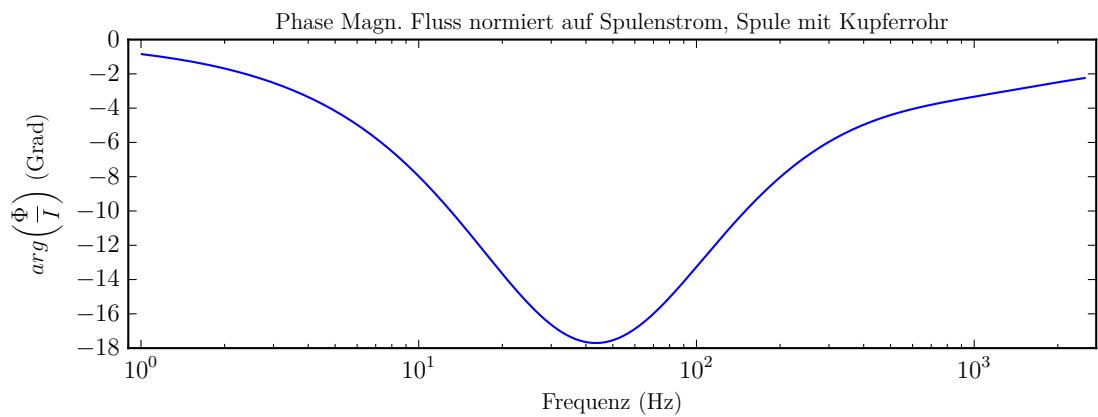
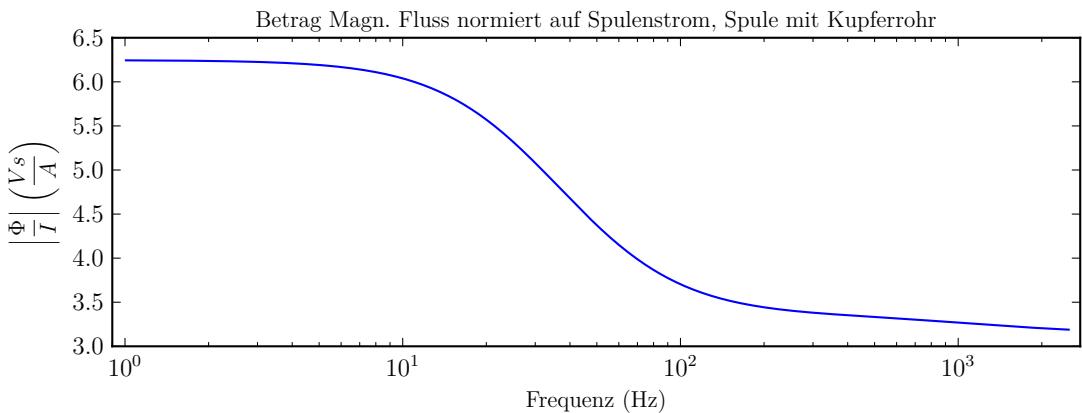
## 3.2 Hohlzylinder

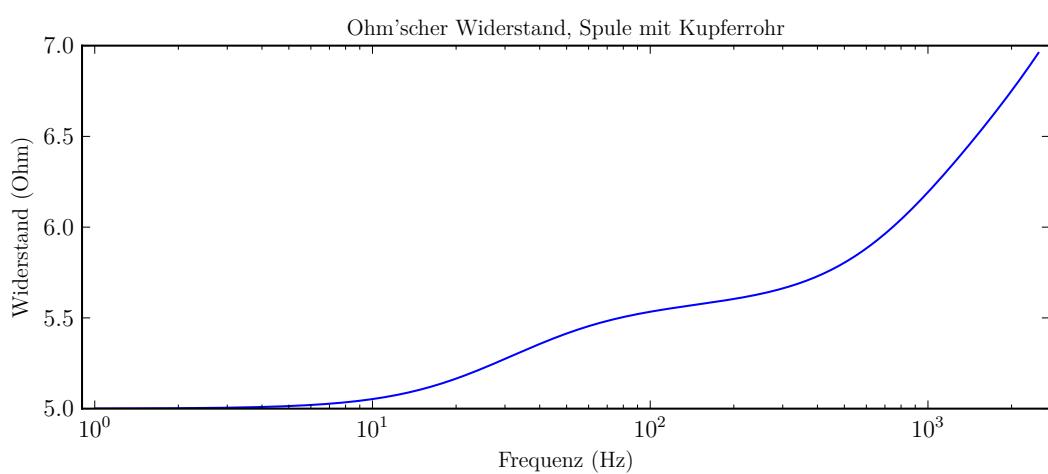
### 3.2.1 Kupfer





### 3.2.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

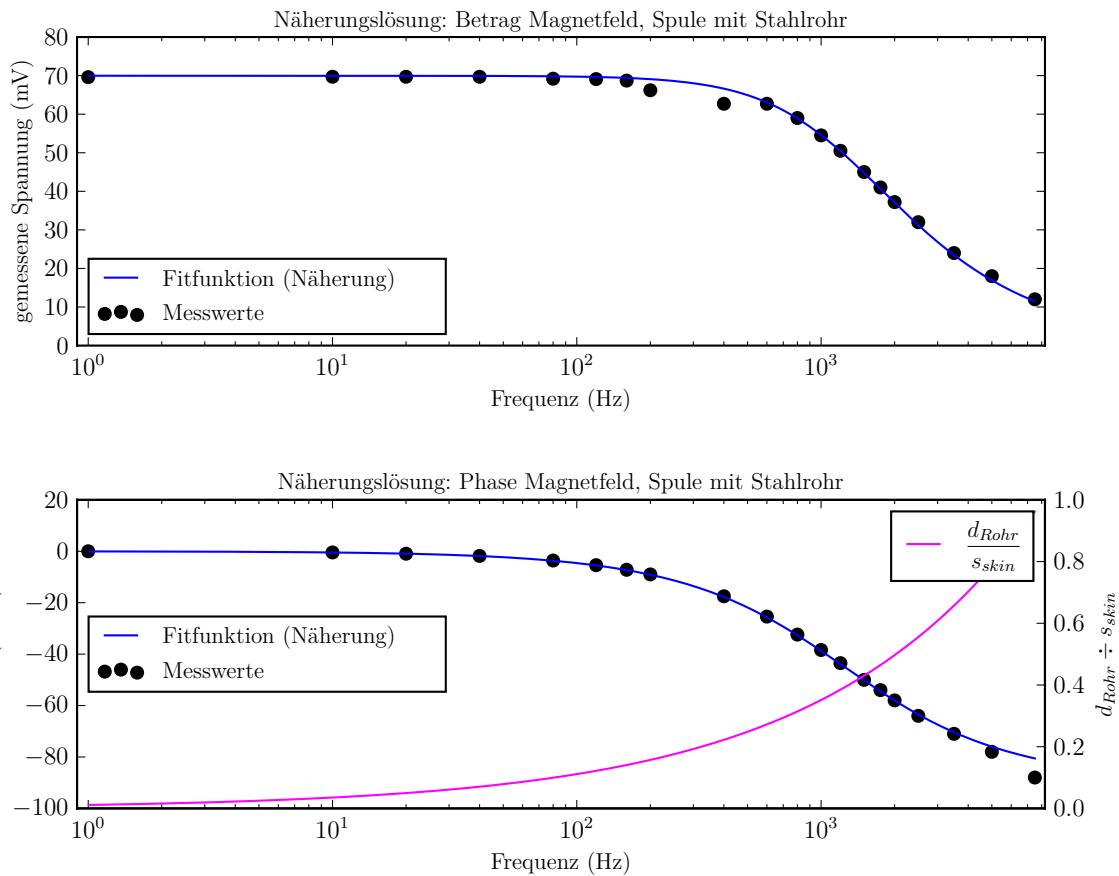


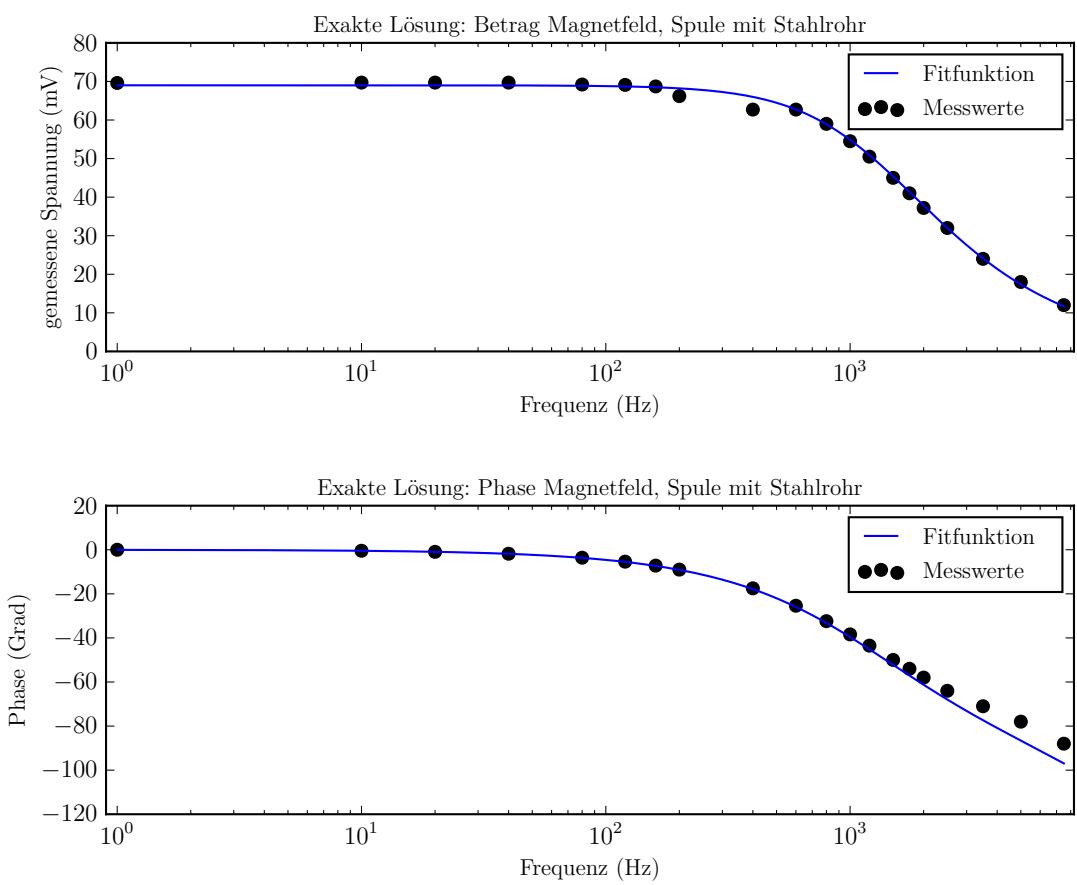


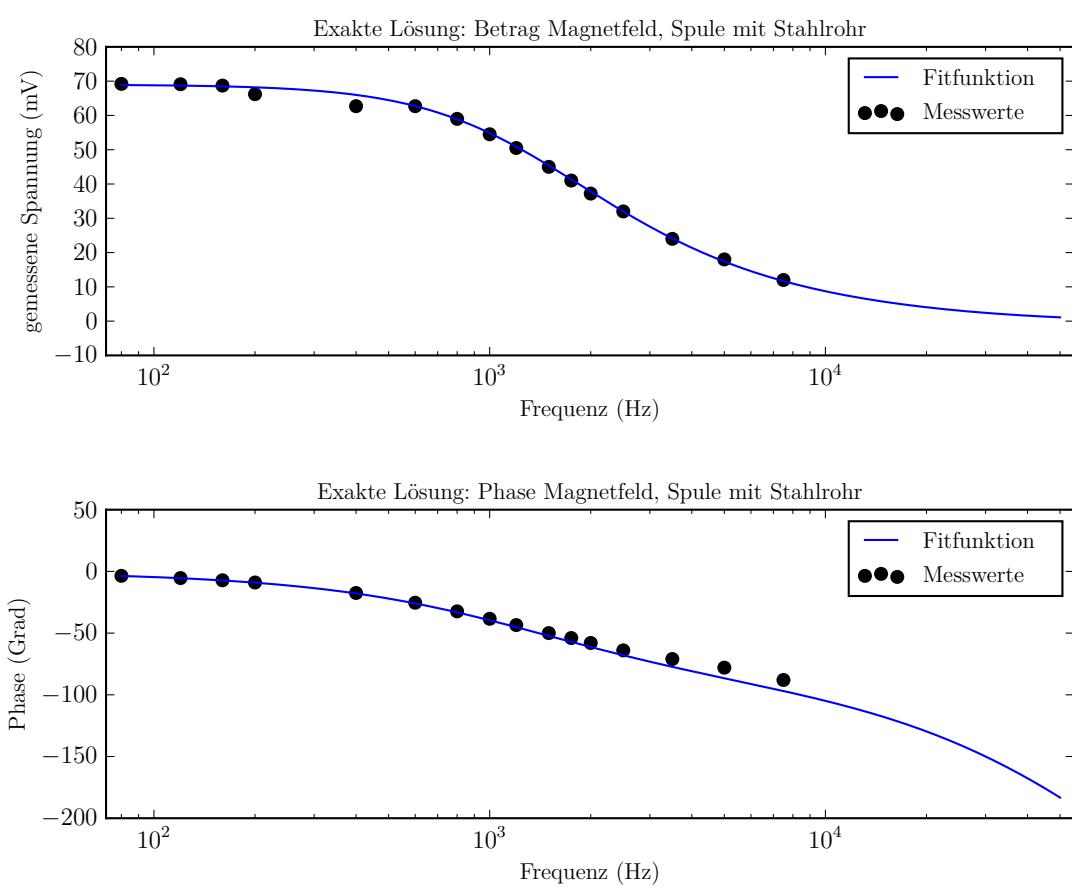
**Tabelle 5:** Rohr aus rostfreiem Stahl

Frequenz (Hz)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)
40	1.8	68.7
120	5.4	69.1
200	9	68.7
400	17.5	66.2
600	25.4	62.7
800	32.4	59
1000	38.4	54.5
1200	43.5	50.5
1500	50	45
1750	54	41
2000	58	37.2
2500	64	32
3500	71	24
5000	78	18
7500	88	12

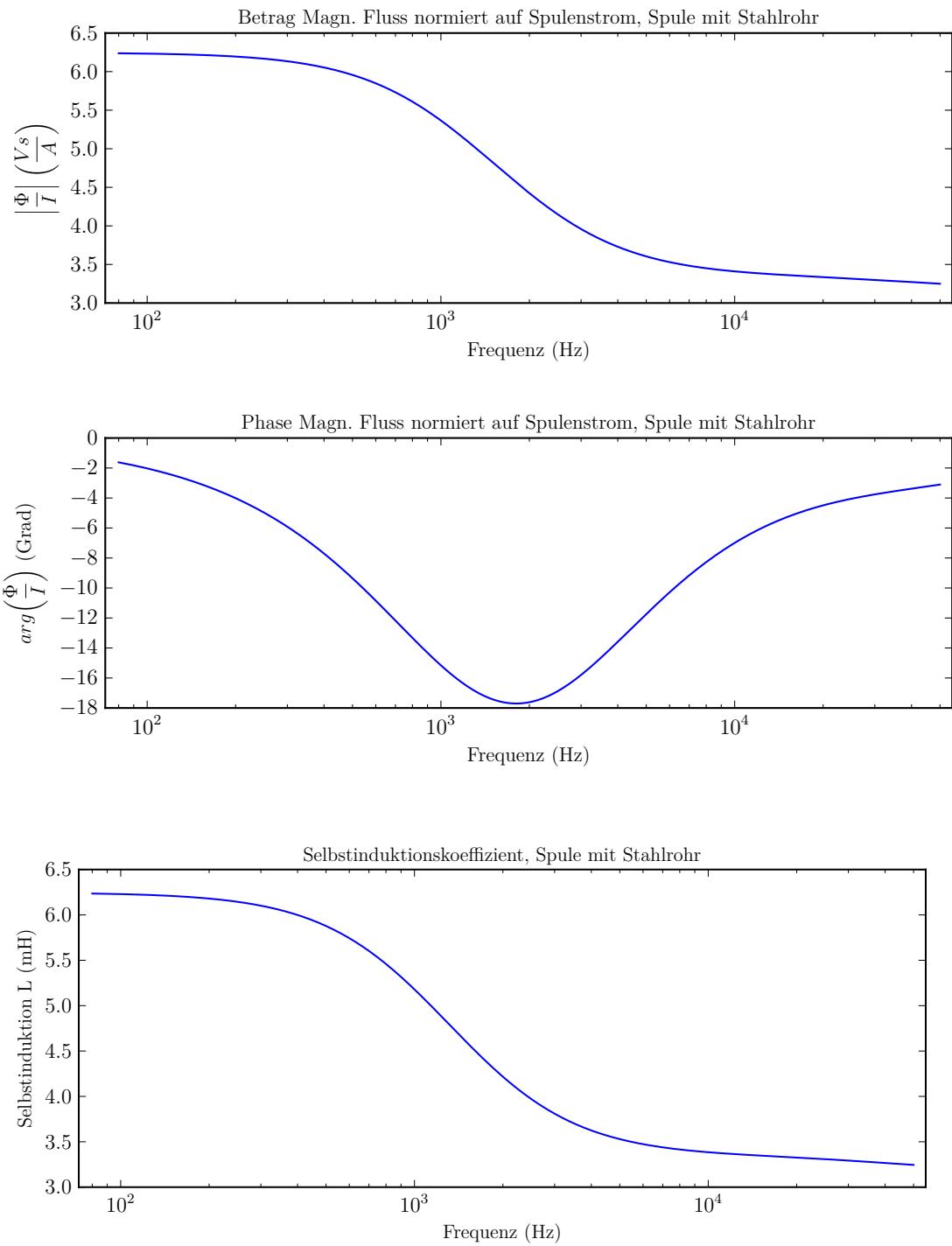
### 3.2.3 Rostfreier Stahl

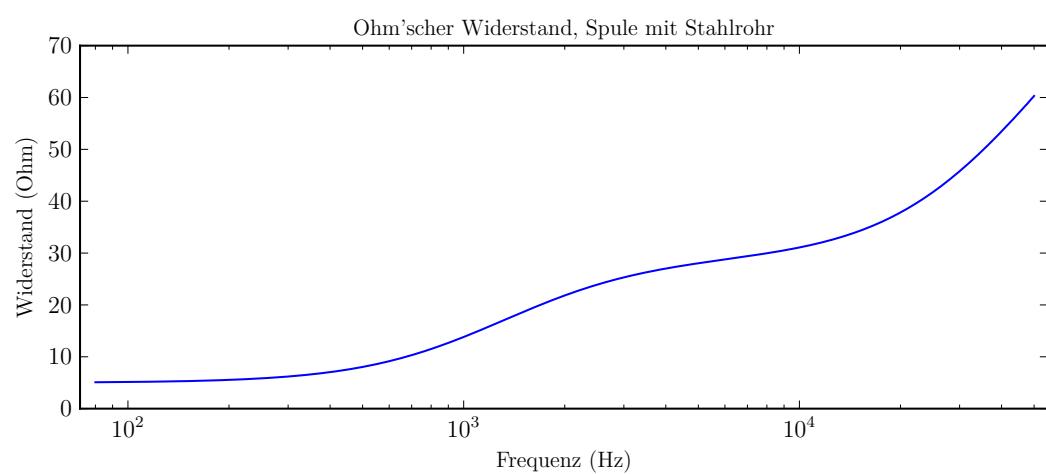






### 3.2.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

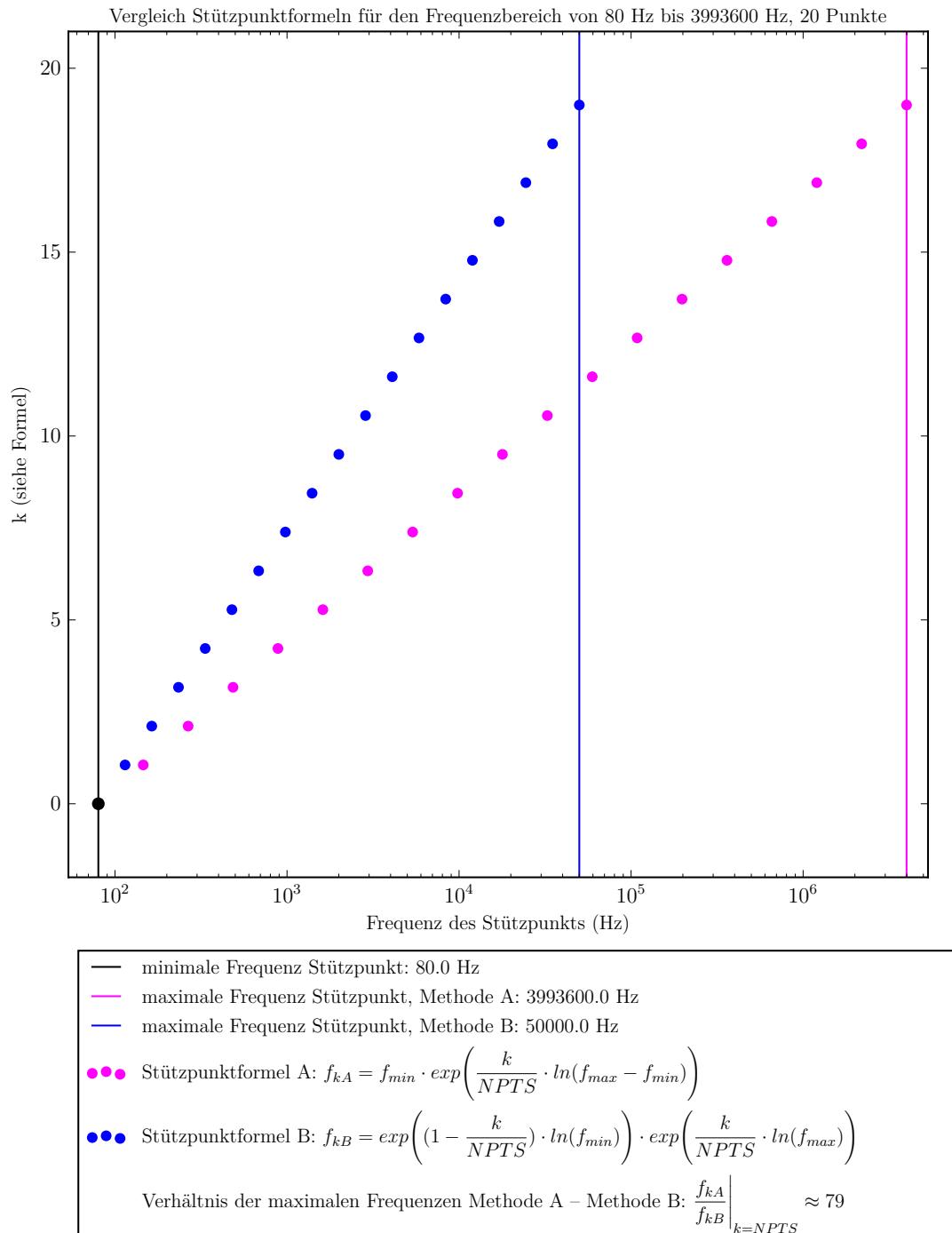




## 4 Fehlerrechnung

Auf die Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

## Anhang A Stützpunkte



## Anhang B Messprotokolle

Versuch / Probe: Alum. Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

Shunt: 1-2

Anfangen bei  $r = 25\text{ mm}$  (Position der Sonde)

Maxim. Frequenz = 450 Hz = konstant

Radius [mm]	Phasenversch. [ $^{\circ}$ ]	A [V]			
25	215	1,5E-3			
27,5	183	2,2E-3			
30	152	3,6E-3			
32,5	125	5,9E-3			
35	100	9,5E-3			
37,5	73	1,55E-2			
40	47	2,5E-2			
42,5	24	3,9E-2			
45	5,2	5,5E-2			
47,5	0,2	5,75E-2			
50	0	3,8E-2			

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Kupferrohr gross

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen: Kupferrohr gross

Shunt: 1-2

Sonde in Mitte

von Tige  
gewichtet  
A [V]von Tige  
gewichtet

Freq. [Hz]	Phasen- versch. [°]	A [V]	<del>V<sub>Shunt</sub> [V]</del>	<del>I<sub>eing</sub> [mA]</del>	Phasen- versch. [°]
1	2,0229	6,775E-2	1,953E-1	7E-2	2
10	19,246	6,614E-2	2,000E-1	6,6E-2	19,2
20	35,426	5,795E-2	2,000E-1	5,78E-2	35,4
40	56,718	4,176E-2	2,003E-1	4,18E-2	56,7
80	76,906	2,456E-2	2,000E-1	2,44E-2	76,7
120	86,834	1,694E-2	2,001E-1	1,69E-2	87
160	93,861	1,274E-2	2,001E-1	1,27E-2	94
200	99,467	1,008E-2	2,000E-1	1E-2	100
400	122,28	4,646E-3	2,000E-1	4,8E-3	121
600	137,61	2,829E-3	2,1997E-1	2,9E-3	140
800	155,45	2,038E-3	2,005E-1	1,9E-3	155
1000	168,64	1,529E-3	2,002E-1	1,4E-3	170
1200	186,16	<del>1,074E-3</del>	2,000E-1	1E-3	180
1500	<del>200</del>	<del>1,999E-1</del>	1,999E-1	7E-4	200

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Aluminium Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

$$V_{Shunt} = 2E-1 \text{ V} = \text{konstant}$$

Shunt 1:2

Sonde in der Mitte

Freq [Hz]	Phasenversch [°]	A [V]	Freq [Hz]	Phasenversch [°]	A [V]
1	5,4	6,9 E-2	5	26	6,5 E-2
10	50	5,7 E-2	15	69	4,8 E-2
20	85	4 E-2	30	111	2,85 E-2
40	132	2,1 E-2	60	166	1,25 E-2
80	16196	8 E-3	100	220	5,4 E-3
120	243	3,6 E-3			
160	283	1,9 E-3			
200	320	1 E-3			
250	350	6 E-4			
600					
800					
1000					
1200					
1500					

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Rostfreier Stahl gross

Datum: 21. 10. 15

Parameter / Einstellungen:

Shunt 1 Ω

Sonde in Mitte

konst auf  
 $f = 2 \times 10^{-1}$ 

Freq [Hz]	Phasenversch [°]	A [V]	V <sub>shunt</sub> [V]	Freq [Hz]	Phasenversch [°]	A [V]
1	0	6,96E-2				
10	0,45	6,97E-2	4800			
20	10,35	6,97E-2	1750	54	4,1E-2	
40	1,8	6,97E-2	2000	58	3,72E-2	
80	3,6	6,92E-2	2500	64	3,2E-2	
120	5,4	6,91E-2	3500	71	2,4E-2	
160	7,2	6,87E-2	5000	78	1,8E-2	
200	9	6,87E-2	7500	88	1,2E-2	
400	17,5	6,62E-2	*			
600	25,4	6,27E-2				
800	32,4	5,9E-2				
1000	38,4	5,45E-2				
1200	43,5	5,05E-2				
1500	50	4,5E-2				

Beobachtungen/Bemerkungen:

\* Obenhalb dieser Frequenz: Nicht möglich,  
Spulenstrom konstant bei Zoomed zu  
halten.

Versuch / Probe: Alum. Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

Shunt: 1-2

Radius  $\hat{=}$  Position der Sonde

Freq = 30 Hz = konstant

$$V_{shunt} = 2 \text{ E-1 V} = \text{konstant}$$

Zylinder:  
 $\phi_{\text{innen}} = 38 \text{ mm}$   
 $\phi_{\text{draht}} = 0,8 \text{ mm}$

Radius [mm]	Phasenversch. [°]	A [V]			
0	111	2,86E-2			
5	109	2,85E-2			
10	104	2,87E-2			
15	94	2,9E-2			
20	81	3E-2			
25	65	3,3E-2			
30	48,5	3,8E-2			
35	32	4,5E-2			
40	16	5,4E-2			
45	<del>2,7</del>	6,2E-2			
50	0	3,7E-2			

Beobachtungen/Bemerkungen:

## Literatur

- [1] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt*. Windisch: FHNW Aargau, 2015.
- [2] Lenz'sche Regel. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche\\_Regel](https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel) [Stand: 02. November 2015].
- [3] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche\\_Differentialgleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung) [Stand: 02. Oktober 2015].