

Laborjournal

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

| DATUM DURCH- FÜHRUNG | VERSUCH | DATUM ABGABE | AKZEPTIERT, NOTE |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------|---------------------|
| 07.10.2015 | C – Auswertung mit Computer | 14.10.2015 | |
| 21.10.2015 | E11 – Skineffekt | 04.11.2015 | |
| 18.11.2015 | M6 – MTM-Tensor | 09.12.2015 | |

C – Computerversuch

20. Oktober 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Arbeitsgrundlagen | 1 |
| 1.1 Typen von Messfehlern | 1 |
| 1.2 Angabe der Genauigkeit von Messresultaten | 1 |
| 1.3 Die Fehlerbestimmung für einzelne Größen | 1 |
| 1.4 Fehlerfortpflanzung und Auswertung | 4 |
| 2 Durchführung | 5 |
| 3 Auswertung | 6 |
| 3.1 Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeit | 6 |
| 3.2 Aufgabe 2: Eisengehalt | 9 |
| 3.3 Aufgabe 3: Federkonstante | 11 |
| 3.4 Aufgabe 4: Pendel | 14 |
| 3.5 Aufgabe 5: RC-Glied (Tiefpass) | 17 |
| 4 Resultate und Diskussion | 21 |
| 4.1 Schallgeschwindigkeit | 21 |
| 4.2 Eisengehalt | 23 |
| 4.3 Federkonstante | 24 |
| 4.4 Pendel | 25 |
| 4.5 Tiefpass | 27 |
| Anhang A Spreadsheet zu Aufgabe 1 | 29 |
| Anhang B Spreadsheet zu Aufgabe 2 | 31 |
| Anhang C Spreadsheet zu Aufgabe 3 | 32 |
| Literaturverzeichnis | 33 |

Versionsgeschichte

20.10.2015: Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler:* Verursacht durch Versuchsordnung, Versuchsumgebung, Messvorgang. Bewirken entweder eine systematische *Abweichung* des Messergebnisses vom eigentlichen Wert oder eine *Unsicherheit* der Messgröße. Falls sie erkannt werden können sie meist korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler:* Immer vorhanden, auch bei einer von systematischen Fehlern freien Anordnung. Lassen sich durch mehrmalige Wiederholung derselben Messung beliebig verkleinern.

1.2 Angabe der Genauigkeit von Messresultaten

Bestimmung von Fehlern sind Abschätzungen. Daher ist es sinnlos, sie genauer als ca. 10%, also etwa 1 signifikante Ziffer, anzugeben.

$$\text{Mittelwert der Messungen: } \bar{T} = 147.85 \text{ s}$$

$$\text{absoluter Fehler: } s_T = 4.9 \text{ s}$$

$$\text{relativer Fehler: } r_T = \frac{s_T}{\bar{T}} = 0.033 = 3.3\%$$

$$\text{Messresultat: } T = (148 \pm 5) \text{ s}$$

$$\text{unsinnig: } T = (147.8532 \pm 4.8700) \text{ s}$$

Merke:

- Zufällige Fehler aus einer Messreihe werden mit s bezeichnet, auf Abschätzungen beruhende Unsicherheiten mit Δ .
- Üblicherweise werden relative Fehler in %, ‰ oder **ppm** (parts per million) angegeben.
- Eine Messgenauigkeit von 1 % gilt als gut, 1‰ ist sehr gut, 1ppm astronomisch gut.

1.3 Die Fehlerbestimmung für einzelne Größen

1 Einmalige Messung einer Größe

Fehler wird abgeschätzt. Erfahrungssache. Wird mit Δ bezeichnet (z.B. ΔT)

2 Wiederholte Messung einer Größe

Seien N Messergebnisse x_1, x_2, \dots, x_N unter gleichen Bedingungen ermittelt worden. Dann wird der arithmetische Mittelwert dem wahren Wert x_0 umso näher kommen, je grösser N wird.

$$\text{Arithmetischer Mittelwert aller Messergebnisse: } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\text{Fehler dieses Mittelwertes: } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

$$\text{Ergebnis: } x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

Merke:

- Messwerte, die extrem vom Mittelwert abweichen, werden als Fehlmessungen (Ausreisser) betrachtet und nicht in die Fehlerrechnung einbezogen.
- Wahrscheinlichkeitstheorie: wahrer Wert T_0 liegt mit Wahrscheinlichkeit 68 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm s_T$, mit Wahrscheinlichkeit 95 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm 2s_T$ und mit Wahrscheinlichkeit 99 % innerhalb des Intervalls $T_0 \pm 3s_T$

3 Mittelwertbildung mit Gewichten

Resultate mit unterschiedlichen Genauigkeiten:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$$

...

$$x_n = \bar{x}_n \pm s_{\bar{x}_n}$$

Wahrscheinlichster Wert \bar{x} wird durch Bildung des gewichteten Mittelwerts erreicht:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}$$

$$\text{Mit den Gewichten: } g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2}$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwertes: } s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}}$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

4 Fehlertheorie

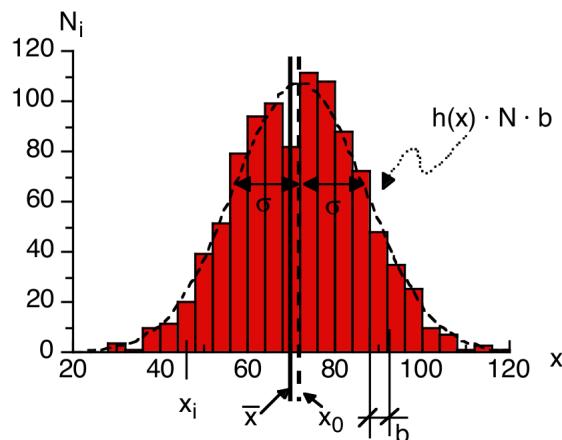


Abbildung 1: Histogramm mit Gauss'scher Normalverteilung. **Quelle:** Skript "Arbeitsunterlagen", p13.

Die in Abbildung 1 gezeigte Kurve $h(x)$ kann beschrieben werden mit:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

wobei

x_0 Erwartungswert (wahrer Wert)

σ Standardabweichung

Für steigendes N geht der gemessene Mittelwert \bar{x} gegen den wahren Wert x_0 .

$$\text{experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \rightarrow D\infty$ gegen σ . Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\bar{T}}$ des Mittelwertes stehen in folgender Beziehung:

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}}$$

Daraus folgt z.B., dass der Mittelwert einer Serie von 100 Messungen die zehnfache Genauigkeit der Einzelmessung aufweist.

5 Regression (“Fitten”)

$$\chi^2(a_0, a_1, \dots) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots)]^2}{\sigma_i^2} : \text{minimal}$$

wobei:

$f(x, a_0, a_1)$: gegebene Gesetzmässigkeit/Funktion

x_i, y_i : Messwertpaare

- *Nichtlineare Funktionen f*: Nichtlineare Regression. Gute Startwerte erforderlich für a_i .
- *Polynomiale Funktion f*: Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.
- *Verwendung einer Software zum Fitten*: x-Werte sollen als Stellgrösse (absolute genau) betrachtet werden, y-Werte als fehlerbehaftet (Messgrösse).

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots))^2}{N - m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter a_0, \dots, a_m bezeichnet. Die Parameter a_i müssen aus dem Fit herausgelesen werden.

1.4 Fehlerfortpflanzung und Auswertung

1 Indirekte Messung, das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Seien:

Resultatgrösse: $R = R(x, y, z, \dots)$

Argumente (gemessen und/oder aus Literatur):

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

$$y = \bar{y} \pm s_{\bar{y}}$$

$$z = \bar{z} \pm s_{\bar{z}}$$

Gesucht: Mittelwert \bar{R} und mittlerer Fehler $s_{\bar{R}}$

$$\bar{R} = R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

Mittlerer, absoluter Fehler (statistischer Fehler): Bestimmen mittels dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}} \right)^2 + \dots}$$

Wobei $\frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{\bar{R}}$ für die partielle Ableitung der Funktion R nach der Variablen x , ausgewertet an der Stelle der Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ steht.

Der Fehler $\pm s_R$ bezeichnet die Intervallbreite, in welcher der wahre Wert mit 68 % Wahrscheinlichkeit liegt.

2 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (“Rezepte”)

- *Addition und Subtraktion*: $s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$. Es werden die absoluten Fehler quadratisch addiert.
- *Multiplikation und Division*: $r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$. Es werden die relativen Fehler quadratisch addiert.
- *Potenzen*: $r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x$. Der relative Fehler der Messgrösse wird mit dem Exponenten multipliziert.

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

2 Durchführung

Die Daten des Versuches sind vom Dozenten zur Verfügung gestellt. Die verwendeten Tools beinhalten Taschenrechner und Tabellenkalkulation sowie QtiPlot.

Der L^AT_EX-Quellcode dieses Dokuments steht auf github zur Verfügung, falls eine genauere Inspektion erwünscht ist [1].

3 Auswertung

Da der Punkt dieses Versuches die Fehlerrechnung selbst ist, beinhaltet dieses Kapitel ausnahmsweise auch die Fehlerrechnung. Üblicherweise ist diese jedoch in einem separaten Kapitel zu finden.

3.1 Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeit

1 Daten

- *Länge der Messtrecke:* (2.561 ± 0.003) m
- *Raumtemperatur:* $\vartheta = 23^\circ\text{C}$

Messprotokoll:

| Messung | Laufzeit t_i (ms) | Messung | Laufzeit t_i (ms) |
|---------|---------------------|---------|---------------------|
| 1 | 6.83 | 11 | 7.36 |
| 2 | 7.41 | 12 | 7.31 |
| 3 | 7.32 | 13 | 7.56 |
| 4 | 7.31 | 14 | 7.14 |
| 5 | 7.23 | 15 | 6.94 |
| 6 | 7.68 | 16 | 7.32 |
| 7 | 7.33 | 17 | 7.34 |
| 8 | 7.7 | 18 | 7.28 |
| 9 | 7.93 | 19 | 7.01 |
| 10 | 7.54 | 20 | 7.76 |

2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

Mittlere Laufzeit:

$$\bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = 7.37 \text{ ms}$$

Fehler des Mittelwertes:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.062 \text{ ms}$$

Standardabweichung:

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.28 \text{ ms}$$

3 Wert und Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit

Es sind hier zwei Vergleichswerte aufgeführt. Der eine ist ein Tabellenwert aus Horst Kuchling's *Taschenbuch der Physik* [2]. Der andere Wert errechnet sich aus einer Formel für die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft, abhängig von der Temperatur. Die Formel kann sowohl auf Wikipedia [3] wie auch in Kuchling's Werk [4] gefunden werden.

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \vartheta) \text{ ms}^{-1} = (331.3 + 0.606 \cdot 23) \text{ ms}^{-1} = 345.24 \text{ ms}^{-1}$$

Der Tabellenwert aus Kuchling's Buch ist 344 ms^{-1} , also ziemlich nahe beim errechneten Wert.

Berechnung der mittleren Geschwindigkeit:

$$c = \frac{s}{t}$$

$$\bar{c} = \frac{s}{t} = \frac{2.561 \text{ m}}{7.37 \text{ ms}} = 347.73 \text{ m s}^{-1}$$

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots}$$

In diesem Fall ist $R(x, y, z, \dots) := c(s, t) = \frac{s}{t}$. Es ergibt sich die Formel:

$$\begin{aligned} s_{\bar{c}(s,t)} &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial s}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial t}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{s}{t}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{s}{t}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2}\Big|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{7.37 \text{ ms}} \cdot 3 \text{ mm}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(7.37 \text{ ms})^2} \cdot 0.062 \text{ ms}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{0.00737 \text{ s}} \cdot 0.003 \text{ m}\right)^2 + \left(-\frac{2.561 \text{ m}}{(0.00737 \text{ s})^2} \cdot 0.000062 \text{ s}\right)^2} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \\ &= 2.95 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat mittels Eintippen der obigen Zahlen in Taschenrechner)} \end{aligned}$$

Ausgerechnet mit vereinfachtem Rezept für Division:

$$\begin{aligned} s_{\bar{c}(s,t)} &= \sqrt{\left(\frac{s_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{\bar{c}}\right)^2} \cdot \bar{c}(s, t) \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.003 \text{ m}}{2.561 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{0.06 \text{ ms}}{7.37 \text{ ms}}\right)^2} \cdot \bar{c}(s, t) \\ &= \sqrt{0.001^2 + 0.008^2} \cdot 347.7 \text{ m s}^{-1} \\ &= 2.93 \text{ m s}^{-1} \text{ (Resultat von Tabellenkalkulationsprogramm)} \end{aligned}$$

4 QtiPlot

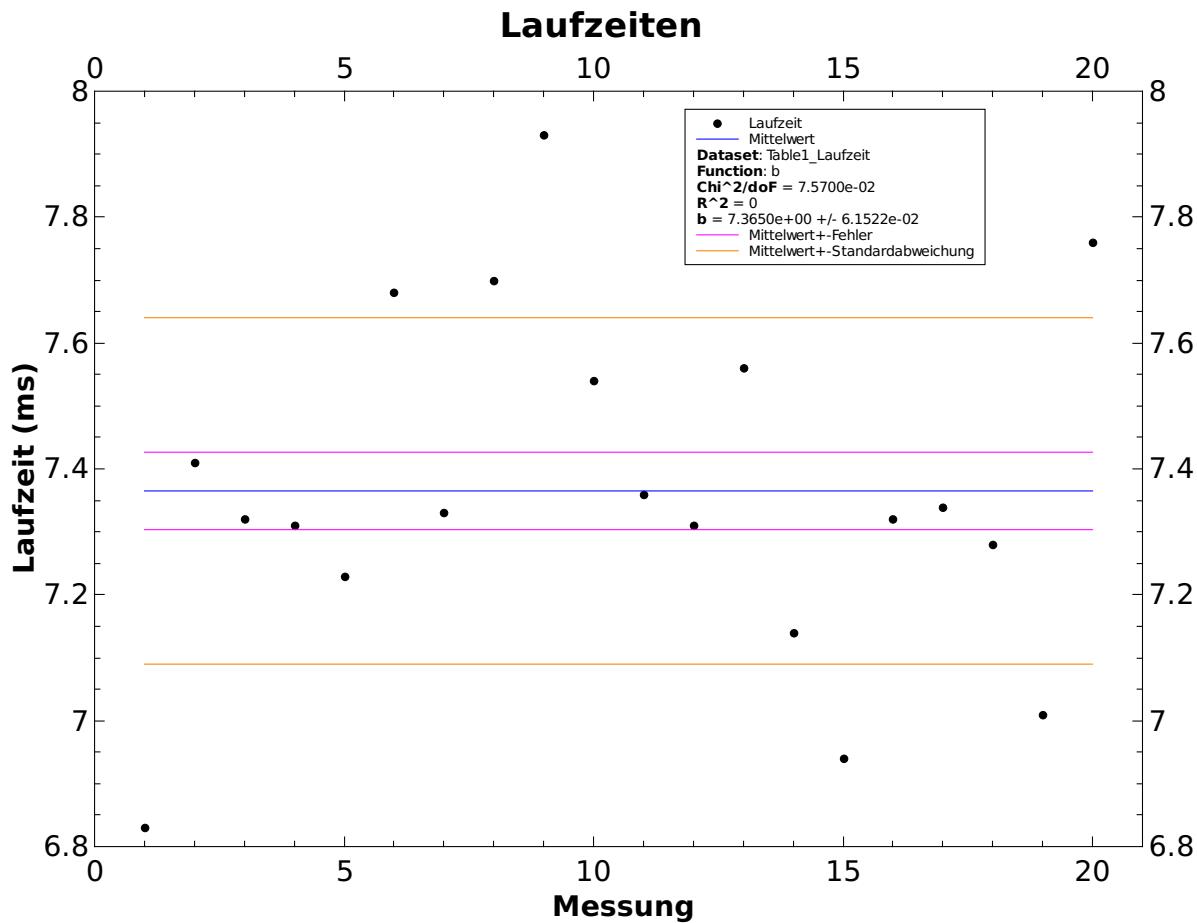


Abbildung 2: Messdaten und Auswertung zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

13 der 20 Messpunkte (also 65%) liegen innerhalb des Mittelwerts \pm die Standardabweichung, was ziemlich nahe beim theoretischen Wert von 68% ist. Mit einer grösseren Anzahl Messungen sollte sich dieser Wert noch besser an 68% annähern.

3.2 Aufgabe 2: Eisengehalt

1 Daten

| Messung | Eisengehalt (%) | absoluter Fehler (%) |
|---------|-----------------|----------------------|
| 1 | 20.3 | 1.2 |
| 2 | 21.9 | 1.3 |
| 3 | 21.1 | 1.1 |
| 4 | 19.6 | 0.8 |
| 5 | 19.9 | 1.3 |
| 6 | 18.0 | 1.3 |
| 7 | 19.4 | 1.0 |
| 8 | 22.2 | 2.0 |
| 9 | 21.6 | 0.8 |

2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert ergibt sich als:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 20.44\%$$

Mit dem zugehörigen Fehler:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^9 (x_i - \bar{x})^2}{9 \cdot 8}} = 0.46\%$$

3 Gewichteter Mittelwert

Der gewichtete Mittelwert errechnet sich gemäss:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^9 g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_1^9 g_{\bar{x}_i}} = \frac{156.24}{7.67}\% = 20.37\%$$

Der zugehörige Fehler Beträgt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sum_1^9 g_{\bar{x}_i}} = 0.36\%$$

4 QtiPlot

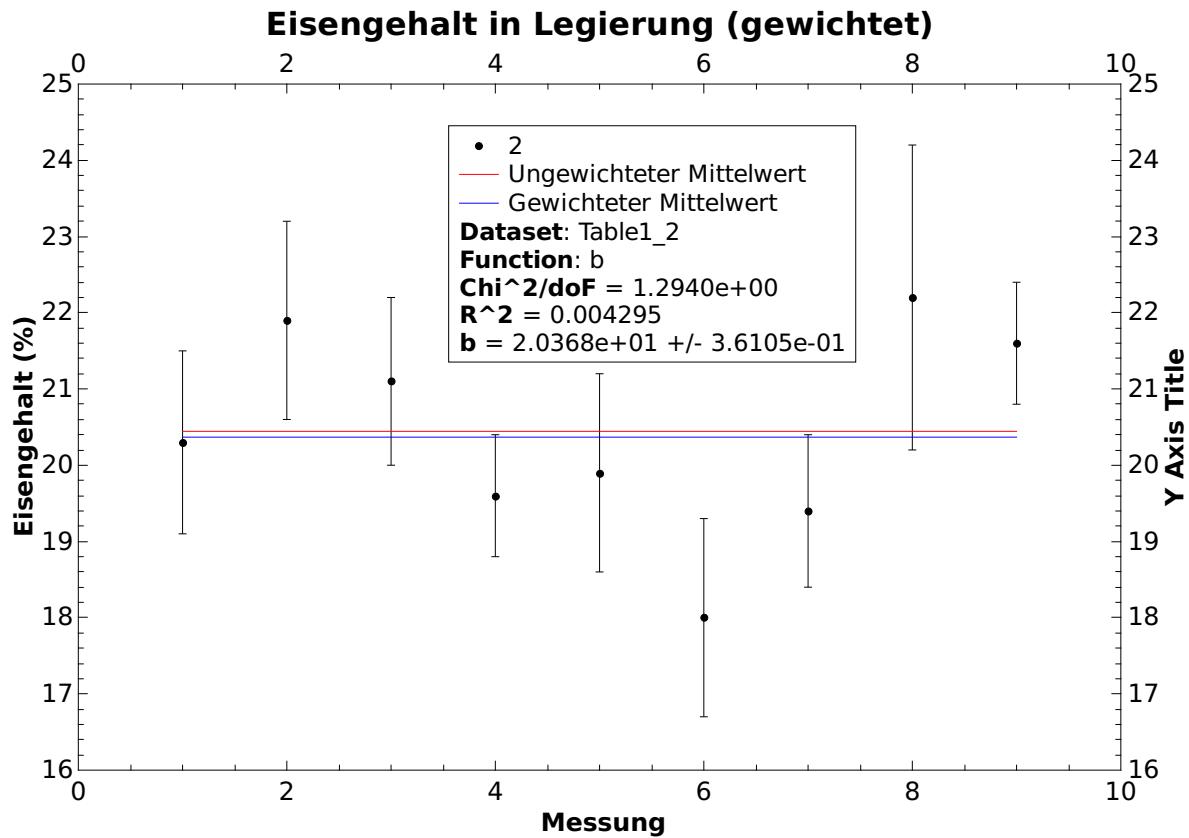


Abbildung 3: Messdaten mit Fehlerbalken, gewichteter und ungewichteter Mittelwert zum Versuch *Eisengehalt*

3.3 Aufgabe 3: Federkonstante

1 Daten

| F (N) | z (m) |
|-------|-------|
| 3.83 | 0.20 |
| 7.79 | 0.35 |
| 8.08 | 0.42 |
| 9.7 | 0.46 |
| 10.58 | 0.51 |
| 12.33 | 0.54 |
| 12.23 | 0.59 |
| 14.43 | 0.67 |
| 15.51 | 0.71 |
| 17.09 | 0.80 |

2 Rechnung mittels Tabellenkalkulation

Zum Vergleich mit dem Resultat des Taschenrechners und QtiPlot sei hier noch eine lineare Regression mit Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt gemäß der Anleitung im deutschen Wikipedia-Artikel zur linearen Regression [5].

| F (N) | z (m) | $\hat{F}(N)$ | | | | | |
|--------|-------|-----------------|-----------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|---------------|
| y_i | x_i | $y_i - \bar{y}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | \hat{y} |
| 3.83 | 0.20 | -7.33 | -0.32 | 2.38 | 53.68 | 0.11 | 3.82 |
| 7.79 | 0.35 | -3.37 | -0.17 | 0.59 | 11.34 | 0.03 | 7.21 |
| 8.08 | 0.42 | -3.08 | -0.10 | 0.32 | 9.47 | 0.01 | 8.79 |
| 9.70 | 0.46 | -1.46 | -0.06 | 0.09 | 2.12 | 0.00 | 9.69 |
| 10.58 | 0.51 | -0.58 | -0.01 | 0.01 | 0.33 | 0.00 | 10.82 |
| 12.33 | 0.54 | 1.17 | 0.02 | 0.02 | 1.38 | 0.00 | 11.50 |
| 12.23 | 0.59 | 1.07 | 0.07 | 0.07 | 1.15 | 0.00 | 12.62 |
| 14.43 | 0.67 | 3.27 | 0.15 | 0.47 | 10.71 | 0.02 | 14.43 |
| 15.51 | 0.71 | 4.35 | 0.19 | 0.81 | 18.95 | 0.03 | 15.33 |
| 17.09 | 0.80 | 5.93 | 0.28 | 1.63 | 35.20 | 0.08 | 17.36 |
| 111.57 | 5.25 | 0.00 | 0.00 | 6.40 | 144.33 | 0.29 | Summen |
| 11.16 | 0.52 | | | | | | Durchschnitte |

Die Steigung der Regressionsgeraden errechnet sich als:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{144.33}{6.4} \text{ N m}^{-1} = 22.57 \text{ N m}^{-1}$$

Den Achsenabschnitt F_0 erhält man aus:

$$F_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} = 11.16 \text{ N} - 22.57 \text{ N m}^{-1} \cdot 0.52 \text{ m} = -0.69 \text{ N}$$

Die empirische Korrelation beträgt:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6.40}{\sqrt{144.33 \cdot 0.29}} = 0.99364$$

Das Bestimmtheitsmaß beträgt:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0.98732$$

3 Taschenrechner

Ergebnisse ermittelt mittels TI-89 und Anleitung aus Quelle [6] (um Einheiten ergänzt).

$$\begin{aligned} F &= k \cdot z + F_0 \\ k &= 22.280\,962 \text{ N m}^{-1} \\ F_0 &= -0.540\,505 \text{ N} \\ corr &= 0.993638 \\ R^2 &= 0.987316 \end{aligned}$$

4 QtiPlot

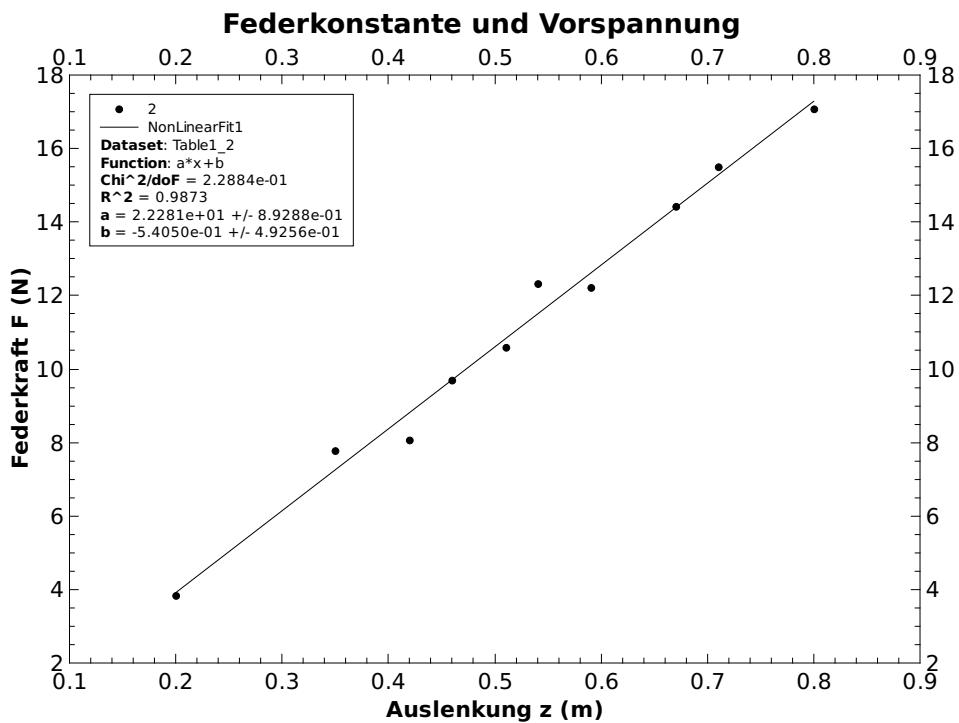


Abbildung 4: Regressionsgerade mit Messpunkten zu Aufgabe *Federkonstante*

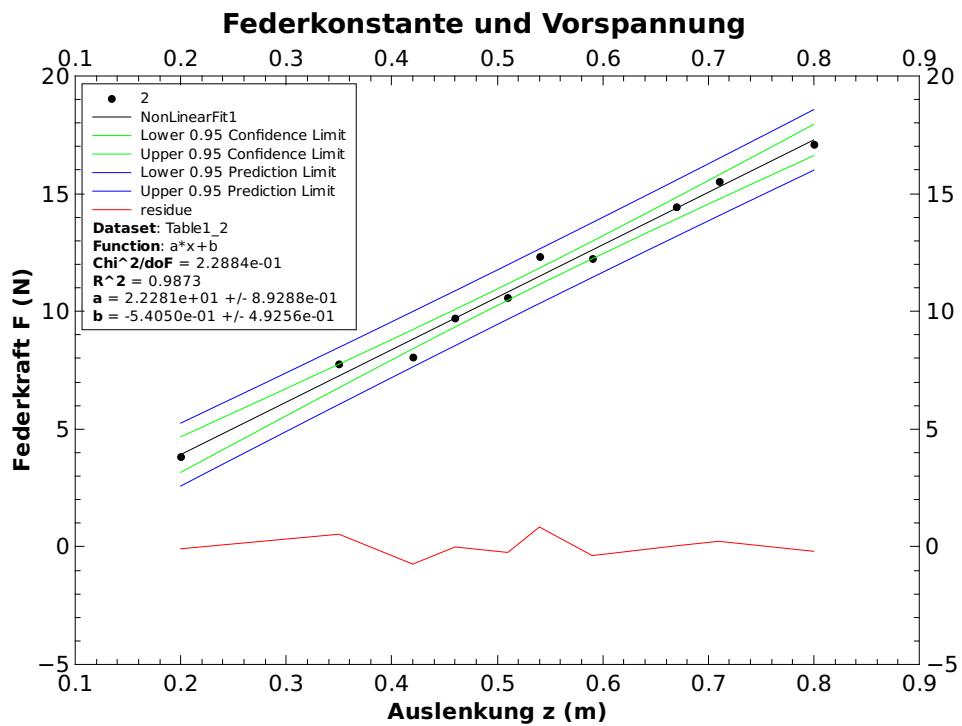


Abbildung 5: Regressionsgerade mit Messpunkten, 95% Confidence Band, Prediction Band und Residuals zu Aufgabe *Federkonstante*

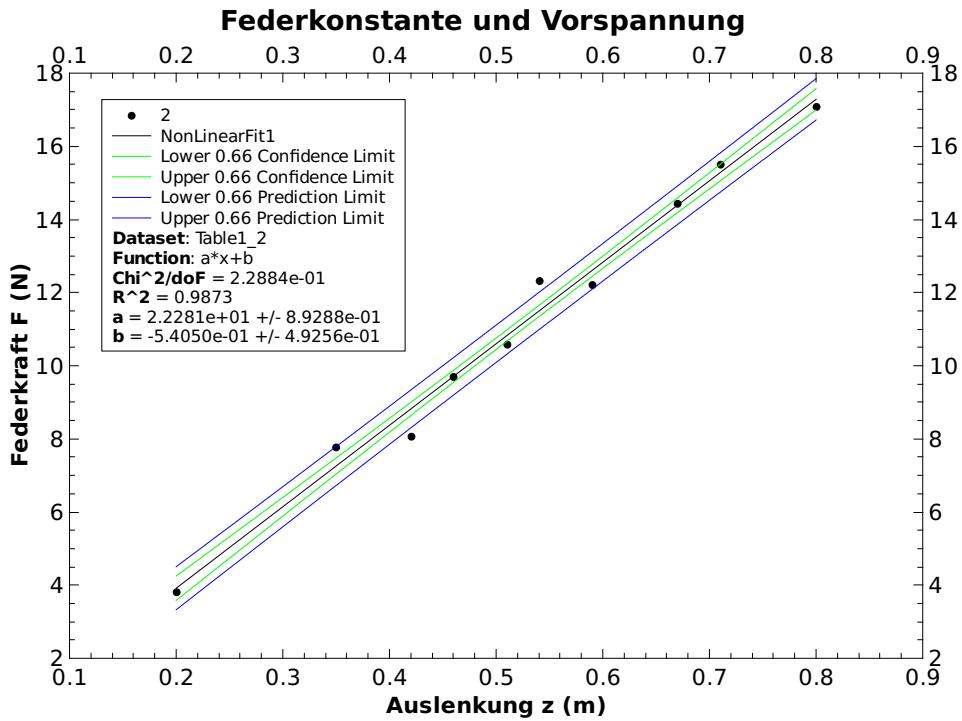


Abbildung 6: Regressionsgerade mit Messpunkten, 66% Confidence Band und Prediction Band zu Aufgabe *Federkonstante*

3.4 Aufgabe 4: Pendel

1 Theorie

Die gedämpfte Schwingung eines Pendels kann folgendermassen beschrieben werden:

$$y(t) = A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \quad (1)$$

Nun soll eine Funktion mittels QtiPlot auf die unten stehenden Messdaten gefittet werden, um die Parameter dieser Gleichung zu bestimmen.

Dabei wird von QtiPlot eine nichtlineare Regression ausgeführt. Es muss also das Minimum der folgenden Funktion gefunden werden:

$$\chi^2(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N)]^2}{\sigma_i} \quad (2)$$

σ_i sind dabei die Fehler der einzelnen Messungen y_i .

Es gilt nun, geeignete Startwerte für die nichtlineare Regression zu finden. Ansonsten wird QtiPlot entweder kein Resultat erhalten (Algorithmus konvergiert nicht) oder ein Nebenminimum der χ^2 -Funktion finden, welches nicht die bestmögliche Annäherung an die gesuchte Gesetzmässigkeit ist.

2 Messdaten

(von Aufgabenblatt kopiert)

| $t(s)$ | $y(m)$ | $t(m)$ | $y(m)$ |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | -0.418 | 8.0 | 0.594 | 15.5 | -0.577 | 23.0 | 0.417 | 30.5 | -0.132 | 38.0 | 0.152 |
| 1.0 | -0.07 | 8.5 | 0.632 | 16.0 | -0.48 | 23.5 | 0.423 | 31.0 | -0.123 | 38.5 | 0.058 |
| 1.5 | 0.082 | 9.0 | 0.435 | 16.5 | -0.414 | 24.0 | 0.45 | 31.5 | -0.075 | 39.0 | 0.193 |
| 2.0 | 0.19 | 9.5 | 0.366 | 17.0 | -0.46 | 24.5 | 0.389 | 32.0 | -0.373 | 39.5 | 0.070 |
| 2.5 | 0.494 | 10 | 0.123 | 17.5 | -0.187 | 25.0 | 0.488 | 32.5 | -0.146 | 40.0 | 0.235 |
| 3.0 | 0.566 | 10.5 | 0.064 | 18.0 | -0.171 | 25.5 | 0.317 | 33.0 | -0.176 | 40.5 | 0.084 |
| 3.5 | 0.753 | 11.0 | -0.084 | 18.5 | -0.03 | 26.0 | 0.344 | 33.5 | -0.193 | 41.0 | 0.248 |
| 4.0 | 0.913 | 11.5 | -0.152 | 19.0 | -0.072 | 26.5 | 0.363 | 34.0 | -0.138 | 41.5 | 0.319 |
| 4.5 | 0.869 | 12.0 | -0.299 | 19.5 | -0.011 | 27.0 | 0.218 | 34.5 | -0.259 | 42.0 | 0.052 |
| 5.0 | 0.977 | 12.5 | -0.506 | 20.0 | 0.082 | 27.5 | 0.084 | 35.0 | -0.078 | 42.5 | 0.159 |
| 5.5 | 0.956 | 13.0 | -0.479 | 20.5 | 0.109 | 28.0 | 0.113 | 35.5 | 0.018 | 43.0 | 0.134 |
| 6.0 | 0.996 | 13.5 | -0.576 | 21.0 | 0.25 | 28.5 | 0.166 | 36.0 | -0.059 | 43.5 | 0.079 |
| 6.5 | 0.971 | 14.0 | -0.662 | 21.5 | 0.404 | 29.0 | 0.02 | 36.5 | 0.056 | 44.0 | 0.097 |
| 7.0 | 0.827 | 14.5 | -0.498 | 22.0 | 0.272 | 29.5 | -0.032 | 37.0 | 0.004 | 44.5 | 0.162 |
| 7.5 | 0.784 | 15.0 | -0.654 | 22.5 | 0.317 | 30.0 | 0.011 | 37.5 | 0.042 | 45.0 | 0.030 |

3 QtiPlot

Die Pendelgleichung wurde in QtiPlot folgendermassen definiert:

$$A \cdot \exp(-G \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x - d) + y_0$$

Die Startwerte wurden mit folgender Methodik bestimmt:

- $A = 1$: Anhand des Funktionswertes des ersten Ausschlages des Pendels abgeschätzt.
- $\Gamma = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \cdot \frac{1}{T} = \ln\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot \frac{1}{20} = 0.035$: Die Abklingkonstante Γ wurde abgeschätzt mittels des logarithmischen Dekrements und der Periode. Dabei ist A_1 die Amplitude des ersten Schwingvorgangs, A_2 die Amplitude des 2. Schwingvorgangs und T die Periode der unterliegenden Sinus-Schwingung. Natürlich sind all diese Werte eher grob aus dem Scatter-Plot abgelesen und nicht hochpräzise (was aber für diesen Schritt auch nicht notwendig ist). Genaueres kann in den Quellen [7], [8] und [9] gefunden werden.
- Die Periode der Sinus-Schwingung wird aus den Peaks der zwei ersten Schwingungen auf ungefähr 20 Sekunden geschätzt, womit man für die Frequenz $\frac{1}{20\text{s}} = 0.05\text{ Hz}$ erhält.
- Der Nulldurchgang der ersten Schwingung liegt ungefähr bei einer Sekunde, wie man auf dem Scatter-Plot erkennen kann. Dies entspricht der Forderung, dass $\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} - \delta) = 0$ ist, bzw. weil $\sin(0) = 0$, muss gelten: $2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} - \delta = 0$. Aufgelöst ergibt dies: $\delta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1\text{s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20\text{s}} \cdot 1\text{s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20\text{s}} \cdot 1\text{s} = 0.31$.
- Der Offset y_0 wird vorerst auf null gesetzt.

Somit sind die Startwerte bestimmt und werden wie folgt in QtiPlot eingesetzt:

```
A = 1
G = 0.035
f = 0.05
d = 0.31
y0 = 0
```

Dies liefert:

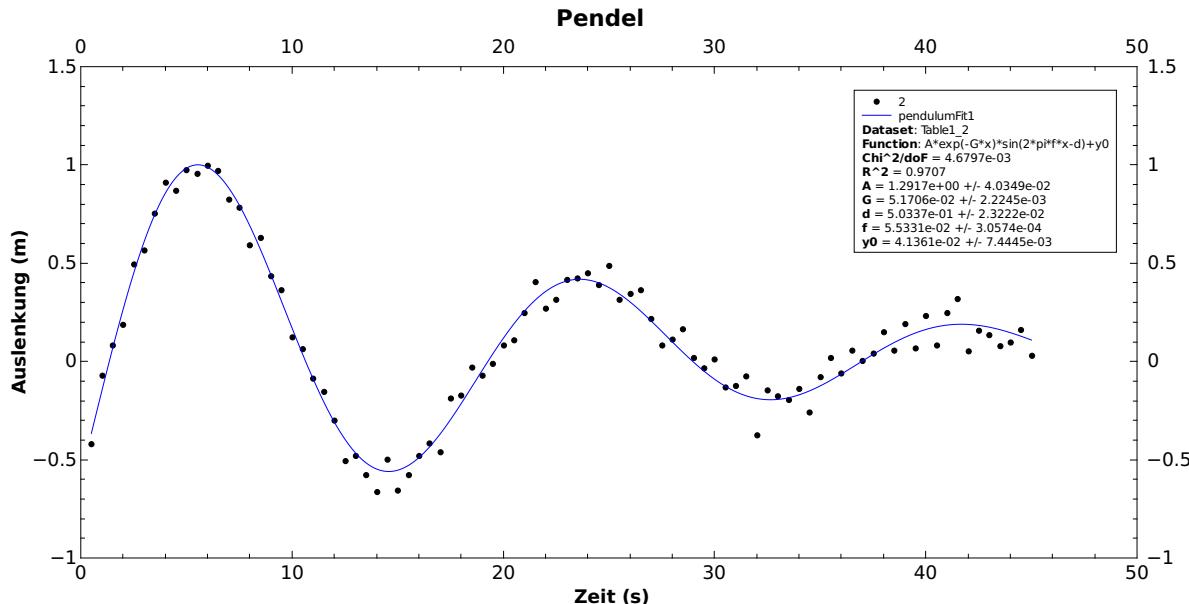


Abbildung 7: Fit zur Aufgabe *Pendel*, mit den gesuchten Gleichungsparametern (siehe Legende)

Die von QtiPlot bestimmten Gleichungsparameter sind gemäss Legende aus Abbildung 7 somit (mit Einheiten ergänzt):

$$\begin{aligned}A &= (1.291\,700 \pm 0.040\,349) \text{ m} \\ \Gamma &= (-0.051\,706\,0 \pm 0.002\,224\,5) \text{ s}^{-1} \\ f &= (0.053\,310\,00 \pm 0.000\,305\,74) \text{ Hz} \\ \delta &= 0.503\,370 \pm 0.023\,222 \\ y_0 &= (0.041\,361\,0 \pm 0.007\,444\,5) \text{ m}\end{aligned}$$

Sinnvoll gerundet und mit Einheiten in Gleichung 1 eingesetzt:

$$\begin{aligned}y(t) &= A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \\ &= (1.29 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \exp\left((-0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \sin(2\pi \cdot (0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz} \cdot t - 0.50 \pm 0.02) \\ &\quad + (0.041 \pm 0.007) \text{ m}\end{aligned}$$

3.5 Aufgabe 5: RC-Glied (Tiefpass)

Es soll das Verhalten eines Tiefpasses untersucht werden:

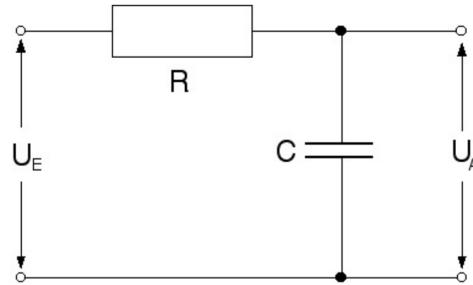


Abbildung 8: Tiefpass. **Quelle:** Versuchsunterlagen “Auswertung mit Computer”, p.6

1 Versuchsdurchführung und Messdaten

Aus der Aufgabenstellung übernommen:

Am Eingang des RC-Tiefpasses wurde eine sinusförmige Wechselspannung mit konstanter Spannung $U_E = 4 \text{ V}_{\text{pp}}$ (Peak-Peak = PP) und variabler Frequenz angelegt. Sodann wurde die Ausgangsspannung U_A (PP-Werte) sowie die Phasenverschiebung φ in Funktion der Frequenz f mit Hilfe eines Kathodenstrahlzilloskopes (KO) gemessen. Der Widerstand R wurde zu $R = 500 \Omega$ bestimmt. Dabei wurde untenstehendes Messprotokoll erstellt.

Messprotokoll “Tiefpass”
 Datum: 1. Okt. 1999
 Versuchsleiterin: Ruth Metzler

| $f(\text{Hz})$ | $U_a(\text{V})$ | $\varphi(^{\circ})$ | $\varphi(\text{rad})$ |
|----------------|-----------------|---------------------|-----------------------|
| 100 | 4.000 | -3.24 | -0.05655 |
| 500 | 3.800 | -16.9 | -0.295 |
| 1000 | 3.300 | -31.3 | -0.5463 |
| 1500 | 2.800 | -43.6 | -0.761 |
| 5000 | 1.140 | -72.4 | -1.264 |
| 10000 | 0.580 | -82.5 | -1.44 |
| 100000 | 0.075 | -90.0 | -1.571 |
| 1592 | 2.700 | -44.0 | -0.7679 |

Anmerkung: Das Messprotokoll wurde noch um eine Spalte mit der Phase in radians ergänzt, welche in QtiPlot für die Auswertung benutzt wird.

2 Funktionsgleichungen

Ausgangs- und Eingangsspannung verhalten sich wie folgt zueinander:

$$U_A = \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2 + R^2}} \cdot U_E \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega \cdot C)^2} + R^2}} \cdot U_E \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}} \cdot U_E \quad (5)$$

Für die Phase zwischen Aus- und Eingangsspannung gilt folgender Zusammenhang:

$$\varphi = \arctan(-\omega RC) \quad (6)$$

Diese Gleichungen wurden in QtiPlot als folgende Funktionen definiert:

```
1/sqrt(1+(2*pi*x*C*R)^2)*Ue
atan(-2*pi*x*R*C)
```

3 QtiPlot

Die Startwerte für U_E , C und R wurden folgendermassen festgelegt:

- Der Widerstand wurde gemäss Aufgabenstellung auf $R = 500 \Omega$ fixiert und in den Einstellungen als *constant* markiert, damit QtiPlot nicht versucht, diesen Wert zu “optimieren”.
- Die Eingangsspannung beträgt gemäss den Angaben zur Versuchsdurchführung 4 V. Sie wurde ebenfalls als *constant* definiert.
- Der Startwert für die Kapazität C wurde mithilfe eines Wertepaares aus der Messwerttafel gefunden.

Dazu wurde das Wertepaar $U_A = 2.8 \text{ V}$ und $f = 1500 \text{ Hz}$ in Gleichung 5 eingesetzt und die Gleichung nach C aufgelöst.

Also: $2.8 \text{ V} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 1500 \text{ Hz} \cdot C \cdot 500 \Omega)^2}} \cdot 4 \text{ V}$ bzw. $C = 0.216 \mu\text{F}$ (die quadratische Gleichung liefert natürlich auch den betragsgleichen negativen Wert für C , welcher als physikalisch unsinnig nicht weiter verwendet wird).

Es sei hier insbesondere noch erwähnt, dass sinnvollerweise ein Wertepaar aus dem mittleren Bereich des Scatter-Plots ausgewählt wird, da dort für eine Änderung der Frequenz eine viel grössere Änderung der Ausgangsspannung erreicht wird. Prinzipiell kann die Rechnung mit jedem beliebigen Wertepaar durchgeführt werden, jedoch ist bei kleinerem Hebel zwischen Frequenz und Ausgangsspannung die Genauigkeit des erhaltenen Startwertes für C geringer, und somit macht die Verwendung solcher Wertepaare nicht sehr viel Sinn solange man Wertepaare mit grösserem Hebel zur Verfügung hat (siehe hierzu auch Abbildung 9).

In QtiPlot wurden somit folgende Werte als Startwerte eingesetzt:

```
C = 2.16e-7
R = 500 (constant)
Ue = 4 (constant)
```

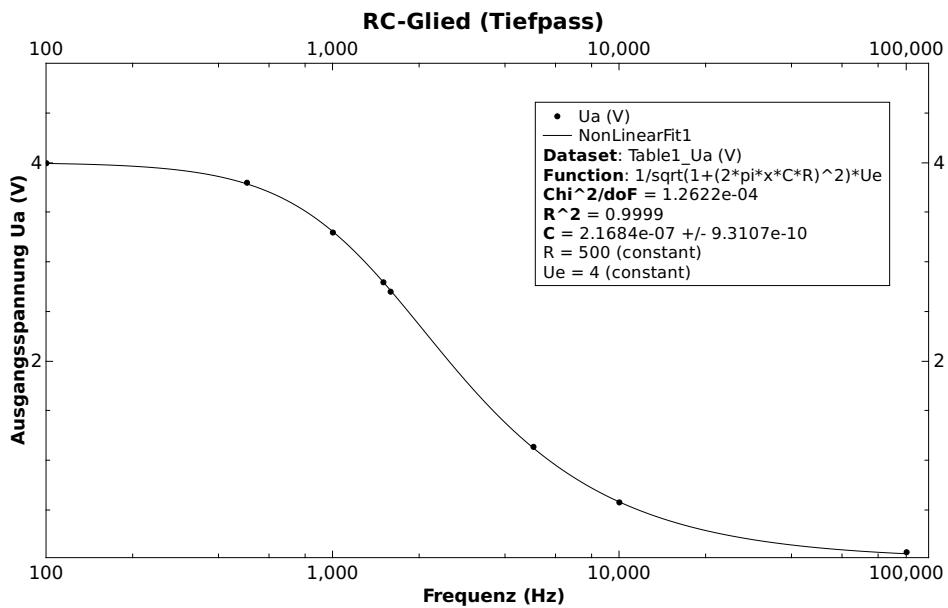


Abbildung 9: Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Für den Fit der Phase wurden ebenfalls diese Werte für C und R verwendet, U_E wurde dafür natürlich nicht benötigt, da es in der Formel für φ nicht vorkommt.

Der Fit für den Zusammenhang zwischen Ausgangsspannung U_A und Frequenz f ist in Abbildung 9 zu sehen. Der Fit für Phase φ und Frequenz f ist in Abbildung 10 dargestellt.

Der aus diesem Fit erhaltene Wert für die Kapazität beträgt:

$$C = (0.216\,840\,00 \pm 0.000\,931\,07) \mu\text{F}$$

Gerundet:

$$\underline{\underline{C = (216.8 \pm 0.9) \text{nF}}}$$

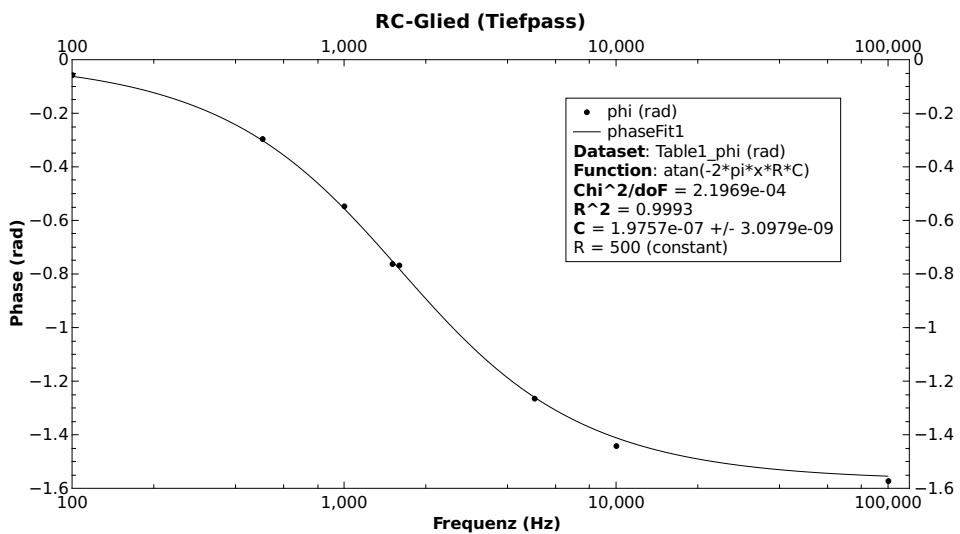


Abbildung 10: Phase φ zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

In diesem Fit wurde die Kapazität errechnet auf:

$$\underline{C = (0.197\,570\,0 \pm 0.003\,097\,9) \mu F}$$

Gerundet:

$$C = (198 \pm 3) nF$$

Mehr zu diesen Werten ist im Abschnitt 4.5 ab Seite 27 zu finden.

4 Resultate und Diskussion

Allgemeine Anmerkung: Nicht alle benutzten Verfahren liefern Resultate mit Unsicherheiten. In den graphischen Vergleichen der Ergebnisse (siehe Abbildungen 11, 12, 13, 14, 15 und 16) haben diese Resultate sowie allfällige Startwerte deshalb keine Unsicherheiten eingetragen. Dies bedeutet natürlich nicht, dass diese Resultate genauer oder verlässlicher sind (im Gegenteil: Da man keine Angaben über die Unsicherheiten hat, sind diese Resultate eher mit grösster Vorsicht zu genießen).

4.1 Schallgeschwindigkeit

Die Diskussion wird sich hier v.a. um zwei Aspekte drehen:

- Den Vergleich zwischen Literaturwerten und den Ergebnissen aus den Messdaten,
- sowie den Vergleich der Ergebnisse der “vollen” Fehlerfortpflanzungsrechnung und der vereinfachten Variante.

Zur Rekapitulation nochmals die Ergebnisse zusammengefasst:

- Literaturwert, Tabelle: 344 m s^{-1}
- Formel:

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \vartheta) \text{ m s}^{-1} = 345.24 \text{ m s}^{-1} \approx 345 \text{ m s}^{-1} \quad (7)$$

- Mittlere Geschwindigkeit aus Messresultaten:

$$\bar{c} = 347.73 \text{ m s}^{-1}$$

- Unsicherheit, volles Gauss’sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{\overline{c(s,t)}} = 2.93 \text{ m s}^{-1}$$

- Unsicherheit, Kurzformel für Fehlerfortpflanzung in Multiplikation/Division:

$$s_{\overline{c(s,t)}} = 2.93 \text{ m s}^{-1}$$

Sinnvoll gerundet erhalten wir aus den Messergebnissen also:

$$\underline{\overline{c_{luft}} = \overline{c_{luft}} \pm s_{\overline{c_{luft}}} = (348 \pm 3) \text{ m s}^{-1}} \quad (8)$$

Diese Ergebnisse sind in Abbildung 11 graphisch dargestellt.

Es stechen dabei folgende Punkte heraus:

- Der Tabellenwert stimmt relativ genau mit dem aus Formel 7 errechneten Wert überein. Da beide Verfahren aus der Fachliteratur stammen, ist dies meines Erachtens auch zu erwarten.
- Berechnet man die Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit mittels der Faustformel $s_{\overline{c(s,t)}} = \sqrt{\left(\frac{s_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{\bar{c}}\right)^2 \cdot \overline{c(s,t)}}$, ist die Differenz zum mit dem vollen Gauss’schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelten Werte in diesem Falle bedeutungslos (siehe auch Anhang A). Die Faustformel ist also hier hinreichend genau. Da die Faustformel im Allgemeinen bei simplen physikalischen Zusammenhängen akzeptable Ergebnisse liefert, ist dies auch nicht weiter erstaunlich ($c = \frac{s}{t}$ gehört sicherlich zu dieser Kategorie von Gesetzmässigkeiten).

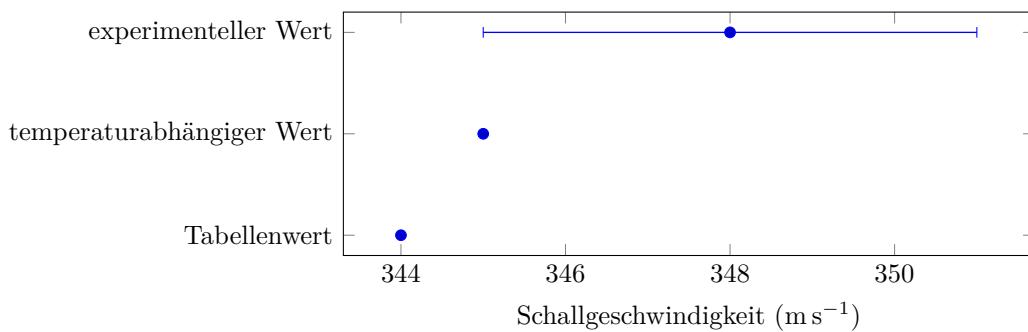


Abbildung 11: graphische Darstellung der Ergebnisse zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

- Wie bereits erwähnt und in Abbildung 2 auf Seite 8 ersichtlich, liegen 13 der 20 Messpunkte innerhalb des Intervalls Mittelwert \pm die Standardabweichung. Dies entspricht einem Anteil von 65%, was ziemlich nahe beim theoretischen Wert von 68% liegt. Würde man die Anzahl (korrekt durchgeföhrter) Messungen erhöhen, würden sich diese beiden Werte weiter annähern.
- Bezieht man die Unsicherheit der aus den Messresultaten bestimmten Schallgeschwindigkeit mit ein, ist die untere Grenze des experimentellen Wertes (345 m s^{-1}) lediglich 1 m s^{-1} höher als der Tabellenwert von 344 m s^{-1} , und der mittels Formel 7 bestimmte Wert liegt sogar innerhalb des Unsicherheitsbereichs. Für die verbleibende Differenz vermute ich folgende Gründe:
 - Die Werte aus der Fachliteratur haben keine Unsicherheit angegeben. Es ist also durchaus möglich, dass bei Berücksichtigung dieser Unsicherheit die Intervalle der Literaturwerte inklusive Unsicherheit mit den hier bestimmten experimentellen Ergebnissen inklusive Unsicherheiten überlappen.
 - Die Anzahl Messpunkte des Tabellenwertes aus der Fachliteratur ist vermutlich höher.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise mit teureren (genauereren) Messapparaten bestimmt als die hier vorliegenden Daten.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise unter besser kontrollierten Bedingungen gemessen als die hier vorliegenden Daten.
 - Die Werte aus der Fachliteratur wurden möglicherweise mit anderen Methoden bestimmt als der hier ausgeführte Versuch.

Alles in allem ist das Resultat aus diesem Versuch meiner Ansicht nach ziemlich gut, die Resultate plausibel und von zufriedenstellender Qualität.

4.2 Eisengehalt

Die erhaltenen Werte tabellarisch und graphisch (siehe Abbildung 12) zusammengefasst:

| | ungewichtet | gewichtet | QtiPlot, gewichtet |
|--------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Mittelwert | 20.44 % | 20.37 % | 20.37 % |
| Unsicherheit | 0.46 % | 0.36 % | 0.36 % |
| Gerundet | (20.4 \pm 0.5) % | (20.4 \pm 0.4) % | (20.4 \pm 0.4) % |

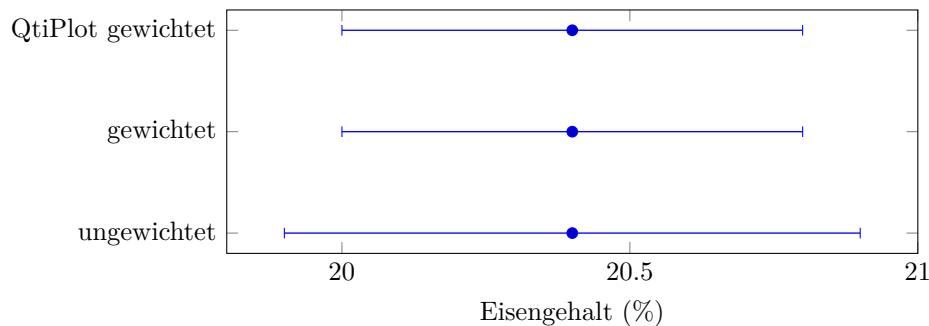


Abbildung 12: graphische Darstellung der Ergebnisse zum Versuch *Schallgeschwindigkeit*

Der Unterschied zwischen gewichteten Resultaten und ungewichteten Resultaten ist hier beim Mittelwert nicht besonders gross (Abweichungen im Promillebereich: $1 - \frac{20.37}{20.44} \approx 0.003$ bzw. $1 - \frac{20.44}{20.36} \approx -0.003$). Die relative Abweichung bei der Unsicherheit ist hingegen grösser ($1 - \frac{0.36}{0.46} \approx 0.22$ bzw. $1 - \frac{0.46}{0.36} \approx -0.28$). Jedoch ist diese Abweichung im Vergleich zum Mittelwert immer noch nicht besonders hoch.

Ob diese Abweichungen von Bedeutung sind, hängt schlussendlich natürlich davon ab, wofür diese Resultate verwendet werden sollen.

Es ist ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit den von QtiPlot bestimmten Werten festzustellen (siehe Abbildungen 3 auf Seite 10 und 12).

4.3 Federkonstante

Die Resultate tabellarisch und graphisch zusammengefasst:

| | Handrechnung/Spreadsheet | TI-89 | QtiPlot |
|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| Federkonstante k | 22.6 N m^{-1} | 22.3 N m^{-1} | $(22.3 \pm 0.9) \text{ N m}^{-1}$ |
| Vorspannung F_0 | -0.7 N | -0.5 N | $(-0.5 \pm 0.5) \text{ N}$ |
| empirische Korrelation r_{xy} | 0.99364 | 0.993638 | k.A. |
| Bestimmtheitsmaß R^2 | 0.98732 | 0.987316 | 0.9873 |

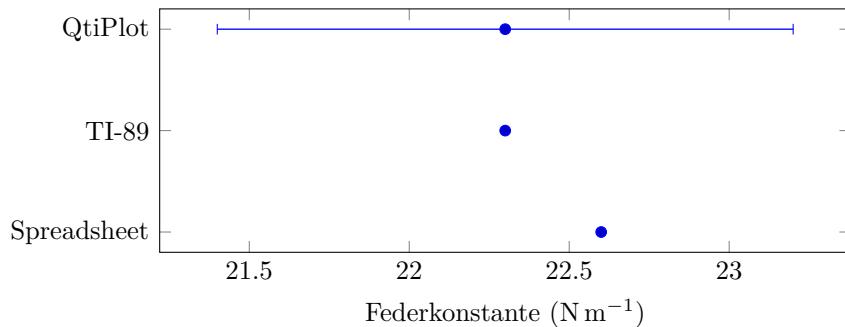


Abbildung 13: Graphische Darstellung der Federkonstante zum Versuch *Federkonstante*. Auch wenn die Methode mittels Spreadsheet und TI-89 keine Unsicherheiten liefern, liegen sie innerhalb des Unsicherheitsbereiches des Resultats von QtiPlot, was ich also zufriedenstellend beurteile.

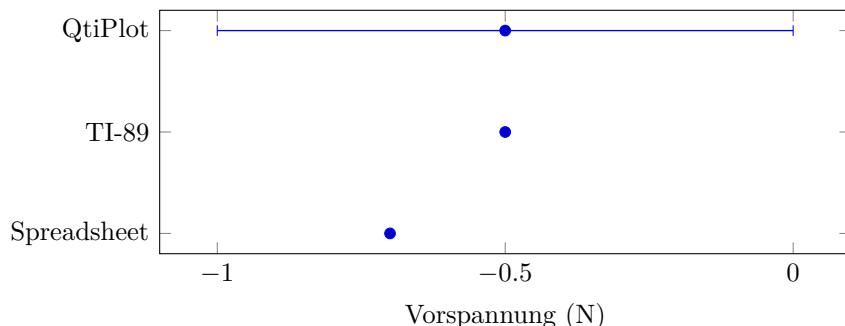


Abbildung 14: Graphische Darstellung der Vorspannung zum Versuch *Federkonstante*. Auch hier liegen die Werte des TI-89 und des Spreadsheets innerhalb des Unsicherheitsbereichs des Resultats von QtiPlot.

Vergleicht man die Ergebnisse von QtiPlot mit den Ergebnissen des Taschenrechners, kann man eine sehr gute Übereinstimmung feststellen. Ich führe dies darauf zurück, dass vermutlich sowohl QtiPlot wie auch der TI-89 die gleichen Algorithmen zur Bestimmung der Regressionsgeraden verwenden. Konsequenterweise ist es naheliegend, dass sie aus den gleichen Daten auf das gleiche Ergebnis kommen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen QtiPlot und dem Taschenrechner ist jedoch, dass der TI-89 keine Unsicherheiten ausgibt.

Zur Ergänzung und aus Neugier habe ich noch eine Berechnung von Hand bzw. mit Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt (siehe auch Anhang C).

Da dieses Verfahren (zumindest soweit ich herausfinden kann) nicht der gleiche Algorithmus ist, wie er von QtiPlot und dem TI-89 verwendet wird, sind die damit erhaltenen Resultate auch nicht ganz identisch. Sie sind jedoch genügend nahe, dass ich sie als plausibel beurteile und damit zufrieden bin.

4.4 Pendel

Zur Rekapitulation hier nochmals die Pendelgleichung mit gerundeten Parametern:

$$\begin{aligned}y(t) &= A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0 \\&= (1.29 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \exp\left((-0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}\right) \\&\quad \cdot \sin(2\pi \cdot (0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz} \cdot t - 0.50 \pm 0.02) \\&\quad + (0.041 \pm 0.007) \text{ m}\end{aligned}$$

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe liegt darin, gute Startwerte für die nichtlineare Regression in QtiPlot zu finden. Die dazu benutzte Verfahrensweise ist ausführlich in Abschnitt 3.4 erklärt.

Interessant ist dabei, dass die mit eigentlich ziemlich groben Methoden ermittelten Startwerte gar nicht so weit von den anschliessend mittels Iteration von QtiPlot bestimmten Werten entfernt liegen. Eine rasche Analyse eines Scatter-Plots mittels Augenmass und einiger kurzer Rechnungen kann also je nach Datensatz bereits ziemlich starke Aussagen über die gesuchte Gesetzmässigkeit machen.

Dies kann insbesondere bei der Beurteilung der Plausibilität der Resultate, die von einem Computerprogramm geliefert werden, hilfreich oder sogar notwendig sein. Im vorliegenden Falle macht mir das Resultat einen zufriedenstellenden Eindruck.

| | Startwert | Endwert |
|-----------------------------|------------------------|------------------------------------|
| Amplitude A | 1 m | $(1.29 \pm 0.04) \text{ m}$ |
| Dämpfung Γ | 0.035 s^{-1} | $(0.052 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}$ |
| Frequenz f | 0.05 Hz | $(0.0533 \pm 0.0003) \text{ Hz}$ |
| Phasenverschiebung δ | 0.31 | 0.50 ± 0.02 |
| Anfangsauslenkung y_0 | 0 m | $(0.041 \pm 0.007) \text{ m}$ |

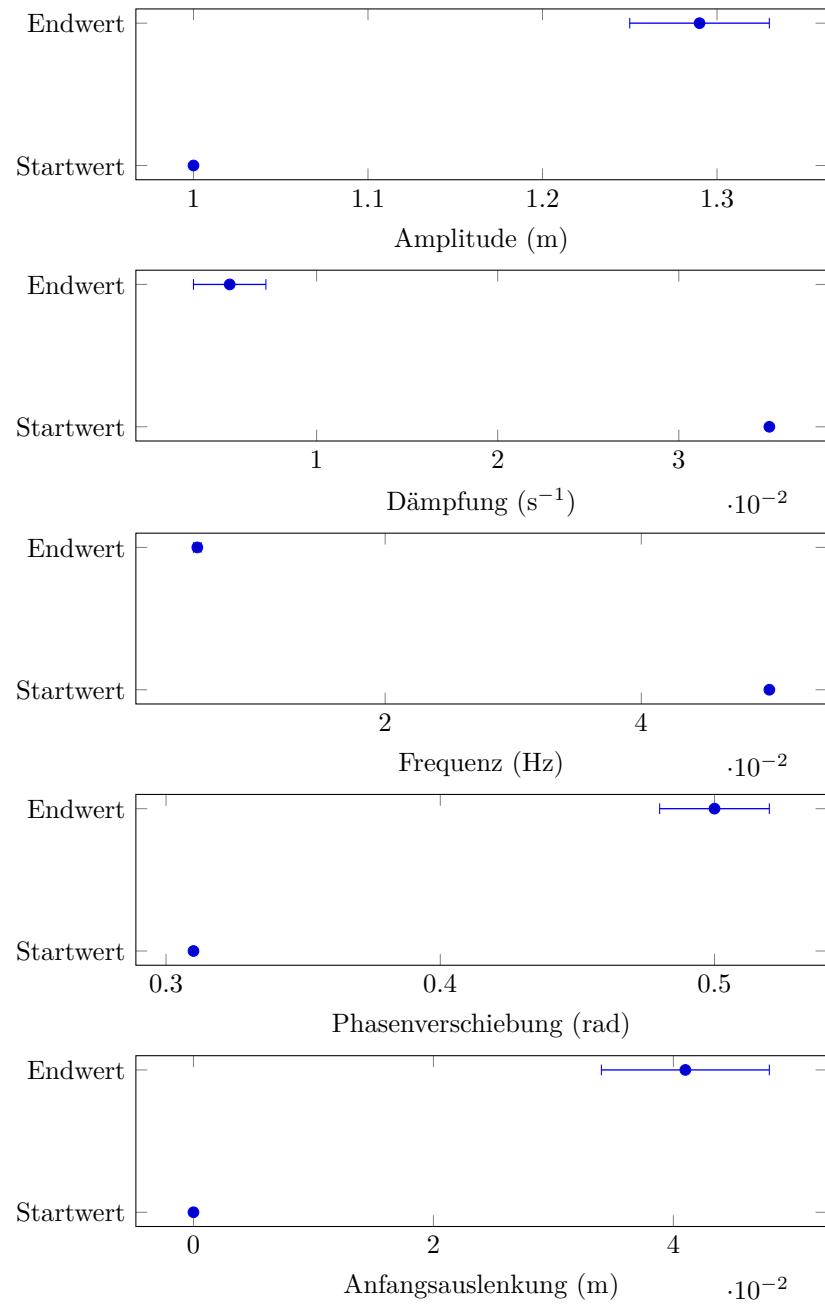


Abbildung 15: Graphischer Vergleich der Start- und Endwerte.

4.5 Tiefpass

Auch bei diesem Versuch stellt die Ermittlung von geeigneten Startwerten für die nichtlineare Regression den hauptsächlichen Aufwand dar. Da es sich um eine andere Gesetzmässigkeit als diejenige der vorangegangenen Aufgabe handelt, sind die dazu benutzten Methoden auch anders. Sie können im Abschnitt 3 nachgelesen werden. Ein wenig vereinfachend ist in diesem Versuch, dass nur eine Grösse geschätzt werden muss.

Aus den gegebenen Daten lassen sich Regressionen auf zwei Wegen durchführen: Einerseits kann die Ausgangsspannung gegen die Frequenz dargestellt werden, andererseits kann dies aber auch mit der Phase getan werden. Die beiden Varianten liefern nicht genau die gleichen Ergebnisse für die Kapazität C .

| | Startwert | Endwert via Spannung | Endwert via Phase |
|---------------|-----------|----------------------|-------------------|
| Kapazität C | 216 nF | (216.8 ± 0.9) nF | (198 ± 3) nF |

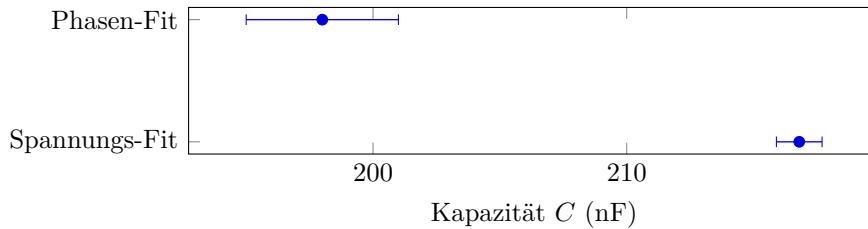


Abbildung 16: Graphischer Vergleich der Werte für die Kapazität C , bestimmt aus dem Fit von Ausgangsspannung und Frequenz respektive dem Fit von Phasenverschiebung an Frequenz.

Es stehen folgende Punkte hervor:

- Der Startwert liegt erstaunlich nahe beim mittels des Spannungs-Fits ermittelten Wert für die Kapazität C .
- Der mittels Fit von Phase an Frequenz ermittelte Wert für C weicht selbst mit Berücksichtigung der angegebenen Unsicherheit merklich von den anderen beiden Werten ab. Ich vermute, dass die Lage der Messpunkte für den Fit von Ausgangsspannung an Frequenz besser geeignet ist, und dass die Arkustangens-Funktion des Fits von Phase an Frequenz hier einfach benachteiligt ist. Allenfalls könnte durch die Erhöhung der Anzahl Messpunkte (natürlich bei besserer Verteilung) Abhilfe geschaffen werden. Es könnte auch sein, dass der Algorithmus von QtIPot mit der Arkustangens-Funktion einfach weniger gut funktioniert, als mit der Division und Quadratwurzel des Zusammenhangs zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz. Letztlich ist es natürlich auch möglich, dass der Startwert und das Resultat des Spannungs-Fits weniger korrekt sind, als das Resultat des Phasen-Fits, allerdings halte ich dies für die weniger wahrscheinliche Variante, da diese beiden Werte so nahe beieinander liegen.

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 20. Oktober 2015.

Anhang A Spreadsheet zu Aufgabe 1

Die zugehörigen Spreadsheet-Files sind auch auf Dropbox zu finden. Idealerweise werden sie mit **sc-im** oder **sc** (siehe Quellen [10] und [11]) editiert, können zur Not aber auch mit einem Texteditor geöffnet werden, wobei die Tabellendarstellung jedoch nicht funktioniert.

Es sind auch entsprechende *.txt-Files vorhanden, welche auf den Daten des Spreadsheet-Programms beruhen und in entsprechender Form in folgenden Abschnitten eingebunden sind.

sc-im).

| Messung | Laufzeit (ms) | Differenz zu Mittelwert | Quadrat der Differenz |
|---------|---------------|----------------------------|--------------------------|
| 1 | 6.83 | -0.54 | 0.29 |
| 2 | 7.41 | 0.04 | 0.00 |
| 3 | 7.32 | -0.04 | 0.00 |
| 4 | 7.31 | -0.06 | 0.00 |
| 5 | 7.23 | -0.13 | 0.02 |
| 6 | 7.68 | 0.31 | 0.10 |
| 7 | 7.33 | -0.04 | 0.00 |
| 8 | 7.70 | 0.33 | 0.11 |
| 9 | 7.93 | 0.56 | 0.32 |
| 10 | 7.54 | 0.17 | 0.03 |
| 11 | 7.36 | -0.00 | 0.00 |
| 12 | 7.31 | -0.06 | 0.00 |
| 13 | 7.56 | 0.19 | 0.04 |
| 14 | 7.14 | -0.23 | 0.05 |
| 15 | 6.94 | -0.42 | 0.18 |
| 16 | 7.32 | -0.04 | 0.00 |
| 17 | 7.34 | -0.03 | 0.00 |
| 18 | 7.28 | -0.08 | 0.01 |
| 19 | 7.01 | -0.36 | 0.13 |
| 20 | 7.76 | 0.39 | 0.16 |

Summe: 147.30

Mittelwert: 7.37

Summe der Fehlerquadrate: 1.44

Fehler des Mittelwertes 0.06

Fehler des Mittelwerts, mehr Dezimalstellen 0.061522353661

Standardabweichung 0.28

Standardabweichung, mehr Dezimalstellen 0.275136329844

Erwartete Schallgeschwindigkeit aus Formel (m/s): 345.24

(siehe englische Wikipedia, "Speed of Sound"

und Kuchling, p.332, Formel A 22.5)

Laenge der Teststrecke (meter): 2.56
Unsicherheit der Teststrecke (meter): 0.003

Durchschnittsgeschwindigkeit (meter/s) 347.73
(aus Messergebnissen)

Unsicherheit aus dem Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz, alle Rechenschritte in einem Zug ausgefuehrt (m/s) 2.93

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz, schrittweise:

| | |
|-----------------------------------|----------------|
| Erster Term, GFFPG | 0.41 |
| Zweiter Term, GFFFp | -2.90 |
| Quadrat erster Term | 0.17 |
| Quadrat, zweiter Term | 8.44 |
| Summe der Quadrate | 8.60 |
| Quadratwurzel (m/s) | 2.93 |
| Unsicherheit, mehr Dezimalstellen | 2.933093187589 |

Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz, Faustformel fuer Division:

| | |
|---|----------------|
| Wurzel aus der Summe der relativen Fehlerquadrate | 0.01 |
| Multipliziert mit Durchschnittsgeschwindigkeit | 2.93 |
| Unsicherheit, mehr Dezimalstellen | 2.933093187589 |

Anhang B Spreadsheet zu Aufgabe 2

| Nr. | Eisen - gehalt (%) | absoluter Fehler (%) | Gewicht * Messwert | Gewicht eMw - Mw* | Differenz d. Diff. | Quadrat |
|-----|------------------------|--------------------------|----------------------|----------------------|------------------------|---------|
| 1 | 20.30 | 1.20 | 0.69 | 14.10 | -0.14 | 0.02 |
| 2 | 21.90 | 1.30 | 0.59 | 12.96 | 1.46 | 2.12 |
| 3 | 21.10 | 1.10 | 0.83 | 17.44 | 0.66 | 0.43 |
| 4 | 19.60 | 0.80 | 1.56 | 30.62 | -0.84 | 0.71 |
| 5 | 19.90 | 1.30 | 0.59 | 11.78 | -0.54 | 0.30 |
| 6 | 18.00 | 1.30 | 0.59 | 10.65 | -2.44 | 5.98 |
| 7 | 19.40 | 1.00 | 1.00 | 19.40 | -1.04 | 1.09 |
| 8 | 22.20 | 2.00 | 0.25 | 5.55 | 1.76 | 3.08 |
| 9 | 21.60 | 0.80 | 1.56 | 33.75 | 1.16 | 1.34 |

*Differenz einfacher Mittelwert - Messwert

| | |
|-----------------------------------|--------|
| Summe der Einzelwerte | 184.00 |
| Einfacher Mittelwert | 20.44 |
| Fehler des einfachen Mittelwertes | 0.46 |

| | |
|--|-------|
| Summe der Gewichte, multipliziert mit Einzelmesswert | 156.2 |
| Summe der Gewichte | 7.67 |

| | |
|-------------------------------------|-------|
| Gewichteter Mittelwert | 20.37 |
| Fehler des gewichteten Mittelwertes | 0.36 |

Anhang C Spreadsheet zu Aufgabe 3

| Nr. | F (N) | z (m) | \bar{x} | \bar{y} | $\bar{(x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}$ | $\bar{(x_i - \bar{x})^2}$ | $\bar{(y_i - \bar{y})^2}$ | $\bar{y_i}$ |
|---|--------|-------|-----------|-----------|---|---------------------------|---------------------------|-------------|
| 1 | 3.83 | 0.20 | -7.33 | -0.32 | 2.38 | 53.68 | 0.11 | 3.82 |
| 2 | 7.79 | 0.35 | -3.37 | -0.17 | 0.59 | 11.34 | 0.03 | 7.21 |
| 3 | 8.08 | 0.42 | -3.08 | -0.10 | 0.32 | 9.47 | 0.01 | 8.79 |
| 4 | 9.70 | 0.46 | -1.46 | -0.06 | 0.09 | 2.12 | 0.00 | 9.69 |
| 5 | 10.58 | 0.51 | -0.58 | -0.01 | 0.01 | 0.33 | 0.00 | 10.82 |
| 6 | 12.33 | 0.54 | 1.17 | 0.02 | 0.02 | 1.38 | 0.00 | 11.50 |
| 7 | 12.23 | 0.59 | 1.07 | 0.07 | 0.07 | 1.15 | 0.00 | 12.62 |
| 8 | 14.43 | 0.67 | 3.27 | 0.15 | 0.47 | 10.71 | 0.02 | 14.43 |
| 9 | 15.51 | 0.71 | 4.35 | 0.19 | 0.81 | 18.95 | 0.03 | 15.33 |
| 10 | 17.09 | 0.80 | 5.93 | 0.28 | 1.63 | 35.20 | 0.08 | 17.36 |
| Summen | | | | | | | | |
| | 111.57 | 5.25 | 0.00 | 0.00 | 6.40 | 144.33 | 0.29 | |
| Durchschnitte | | | | | | | | |
| | 11.16 | 0.52 | | | | | | |
| Steigung k der Regressionsgeraden | | | | | | | | |
| | | | | | | | 22.57 | |
| Achsenabschnitt F_0 der Regressionsgeraden | | | | | | | | |
| | | | | | | | -0.69 | |
| Empirische Korrelation | | | | | | | | |
| | | | | | | | 0.99364 | |
| Bestimmtheitsmass R^2 | | | | | | | | |
| | | | | | | | 0.98732 | |

Literatur

- [1] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].
- [2] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 641.
- [3] Speed of Sound. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound#Practical_formula_for_dry_air [Stand: 18. Oktober 2015].
- [4] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 332.
- [5] Lineare Regression. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Regression [Stand: 18. Oktober 2015].
- [6] Linear Regression Using the TI-89 Calculator. Flathead Valley Community College. [Online]. Verfügbar: <http://home2.fvcc.edu/~erady/Classes/Calc-F07/ti89regression.pdf> [Stand: 18. Oktober 2015].
- [7] Abklingkonstante. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: <https://de.wikipedia.org/wiki/Abklingkonstante> [Stand: 16. Oktober 2015].
- [8] Periode (Physik). Wikipedia. [Online]. Verfügbar: [https://de.wikipedia.org/wiki/Periode_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Periode_(Physik)) [Stand: 16. Oktober 2015].
- [9] Logarithmisches Dekrement. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmisches_Dekrement [Stand: 16. Oktober 2015].
- [10] SC-IM. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/andmarti1424/sc-im> [Stand: 18. Oktober 2015].
- [11] sc: the Venerable Spreadsheet Calculator. linuxjournal. [Online]. Verfügbar: <http://www.linuxjournal.com/article/10699> [Stand: 18. Oktober 2015].

E11 – Skineffekt

11. November 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

Grundidee

Hochfrequente Wechselströme haben die Eigenschaft, dass sie v.a. an der Oberfläche eines Leiters fliessen und nicht tief in den Leiter eindringen. Dieses als *Skineffekt* bekannte Phänomen soll in diesem Versuch experimentell nachgewiesen werden.

Wird ein Leiter in ein wechselndes Magnetfeld eingeführt, werden in ihm Wirbelströme induziert. Ist die Frequenz des externen Magnetfelds niedrig, verteilen sich diese Wirbelströme (ungleichmäßig) auf den gesamten Querschnitt. Bei höheren Frequenzen des externen Magnetfeldes verlagern sich die Wirbelströme in den Oberflächenbereich des Leiters. Da sie der Änderung des externen Feldes gemäss der Lenz'schen Regel [1] entgegenwirken, schwächen sie im Innern des Leiters das externe Feld ab. Ebenfalls werden der Ohm'sche Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration von Spule und Zylinder geändert, sowie der magnetische Fluss im Innern des Zylinders.

Als Versuchsobjekte dienen die Fälle eines eingeführten Hohlzylinders und eines eingeführten Vollzylinders. Es werden sowohl gängige Näherungen wie auch die exakten Lösungen aus der Theorie mit den Messergebnissen verglichen.

Neben den Plots und zugehörigen Beobachtungen über den Skineffekt und die Abschirmung des B-Feldes im Innern des eingeführten Leiters kann aus diesem Versuch noch die Leitfähigkeit des Materials des Leiters bestimmt werden, da sie in den Funktionen zur Beschreibung des B-Feldes vorkommt und somit ein Parameter des Fit-Vorgangs ist. Wie man sehen wird, weichen die experimentell ermittelten Werte teilweise bedeutend von den Literaturwerten ab.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Arbeitsgrundlagen | 1 |
| 1.1 Vollzylinder | 1 |
| 1.2 Hohlzylinder | 3 |
| 2 Durchführung | 5 |
| 2.1 Versuchsanordnung | 5 |
| 2.2 Messvorgang/Messmethoden | 7 |
| 2.3 Proben | 8 |
| 2.4 Messungen | 8 |
| 3 Auswertung | 10 |
| 3.1 Anmerkungen | 10 |
| 3.2 Methodik | 10 |
| 3.3 Vollzylinder | 12 |
| 3.4 Hohlzylinder | 20 |
| 4 Fehlerrechnung | 32 |
| 5 Resultate und Diskussion | 34 |
| 5.1 Resultate Leitfähigkeit | 34 |
| 5.2 Was man noch machen könnte | 35 |
| 5.3 Persönliches Fazit | 36 |
| Anhang A Stützpunkte | 38 |
| Anhang B Widerstand Spulendraht | 39 |
| Anhang C Widerstand rostfreier Stahl | 40 |
| Anhang D Python-Code | 41 |
| Anhang E Messprotokolle | 43 |
| Literaturverzeichnis | 49 |

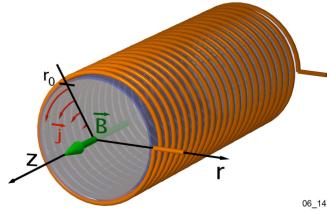
Versionsgeschichte

11. November 2015 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [2].

1.1 Vollzylinder



06_14

Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [2]

1.1.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega \mu_0 \sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \quad (1)$$

wobei:

r : Distanz zu Zylinderachse

\hat{B} : gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)

ω : Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes

σ : spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \quad (2)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$$

r_0 : Radius des eingeführten Zylinders

\hat{B}_0 : Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)

$J_0(z)$: Besselfunktion erster Art (siehe auch [3])

Beachte: $\hat{B}(r)$ ist eine komplexe Zahl!

1.1.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

wobei

$$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}} \text{ und}$$

die Lösung brauchbar ist für $s_{skin} \ll r_0$.

1.1.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + L_{Rand} \quad (4)$$

wobei

l : Länge der Zylinderspule

N_0 : Anzahl Windungen der Zylinderspule

$$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l} \text{ mit } r_{Sp}: \text{Radius Zylinderspule}$$

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Wobei $R_{\Omega,0}$ der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahtes, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierte magnetische Fluss im Innern des eingeführten Leiters:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

1.2 Hohlzylinder

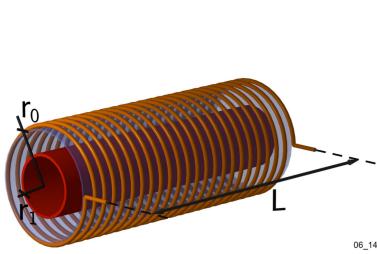


Abbildung 2: Spule mit Hohlzylinder
Quelle: Skript zum Versuch [2]

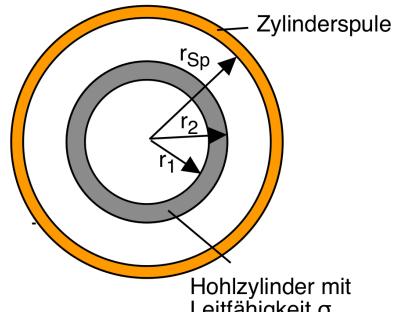


Abbildung 3: Spule mit Hohlzylinder,
Querschnitt Quelle: Skript zum Ver-
such [2]

1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = \text{konst.} \quad (7)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (8)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = \text{konst.} \quad (9)$$

Mit $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$ und k gemäss Abschnitt zum Vollzylinder.

1.2.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe s_{skin} , kann das Rohr als dünnwandig betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

wobei:

r_1 : mittlerer Radius des Metallrohrs

d : Wandstärke des Metallrohrs

1.2.3 B-Feld, Näherungslösung für numerische Probleme

Bei hohen Frequenzen können sich für numerische Software Probleme ergeben, wenn ihre Rechenpräzision nicht ausreicht. Da hier Python benutzt wurde, war dies zwar kein Problem, aber die folgenden Formeln wurden zum Vergleich mit der exakten Lösung trotzdem implementiert:

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = \text{konst.} \quad (11)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{\left(\frac{u_1}{2} + 1\right) \cdot \exp(u - u_1) - \left(\frac{u_1}{2} - 1\right) \cdot \exp(-u + u_1)}{\left(\frac{u_1}{2} + 1\right) \cdot \exp(u_2 - u_1) - \left(\frac{u_1}{2} - 1\right) \cdot \exp(-u_2 + u_1)} \cdot B_0 \quad (12)$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = \text{konst.} \quad (13)$$

wobei:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= i \cdot k \cdot r_{1,2} \\ u &= i \cdot k \cdot r \end{aligned}$$

1.2.4 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Die exakten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$L = \text{Re}\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) \quad R = -\omega \cdot \text{Im}\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) + R_{\Omega,0} \quad (15)$$

(16)

Näherungen für numerische Problemfälle:

$$\begin{aligned} enum &= \left(\frac{u_1}{2} + 1\right) \cdot \left((u_2 - 1) \cdot \exp(u_2 - u_1) - (u_1 - 1)\right) \\ &\quad + \left(\frac{u_1}{2} - 1\right) \cdot \left((u_2 + 1) \cdot \exp(-u_2 + u_1) - (u_1 + 1)\right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$denom = \left(\frac{u_1}{2} + 1\right) \cdot \exp(u_2 - u_1) - \left(\frac{u_1}{2} - 1\right) \cdot \exp(-u_2 + u_1) \quad (18)$$

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(2 \cdot \frac{r_1^2}{denom} - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{enum}{denom} + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \quad (19)$$

(20)

Die Beziehung zwischen dem normierten Fluss und L und R ist identisch wie bei der exakten Lösung.

2 Durchführung

Das Herzstück des Versuches bildet eine zylindrische Kupferspule (Draht aufgewickelt auf einen Acryglas-Zylinder), in deren Mitte eine kleine Öffnung eingelassen ist, durch die eine Messsonde senkrecht zur Zylinderachse eingeführt werden kann.

In diese Zylinderspule werden die Versuchsproben axial eingeführt (Hohl- oder Vollzylinder), wobei diese ebenfalls Aussparungen in radialer Richtung für das Einführen der Messsonde aufweisen. Der Vollzylinder ist dabei in zwei Hälften (geschnitten im Querschnitt) ausgewöhrt.

Der Messbereich ist axial zentriert, um Randeffekte beim Magnetfeld der Zylinderspule vernachlässigen zu können.

Der Messsensor ist an einer Schublehre (auch bekannt als Messschieber) angebracht, womit seine radiale Position gemessen werden kann.

Die Einheit der Messwerte, welche das Oszilloskop an den Benutzer ausgibt, ist Volt, daher wird diese auch auf sämtlichen Tabellen und Plots benutzt. Da es beim Versuch um das Fitten von Kurven in ihrer *Form* an Messwerte und nicht um die absoluten Werte des B-Feldes geht, ist dies nicht weiter tragisch.

2.1 Versuchsanordnung

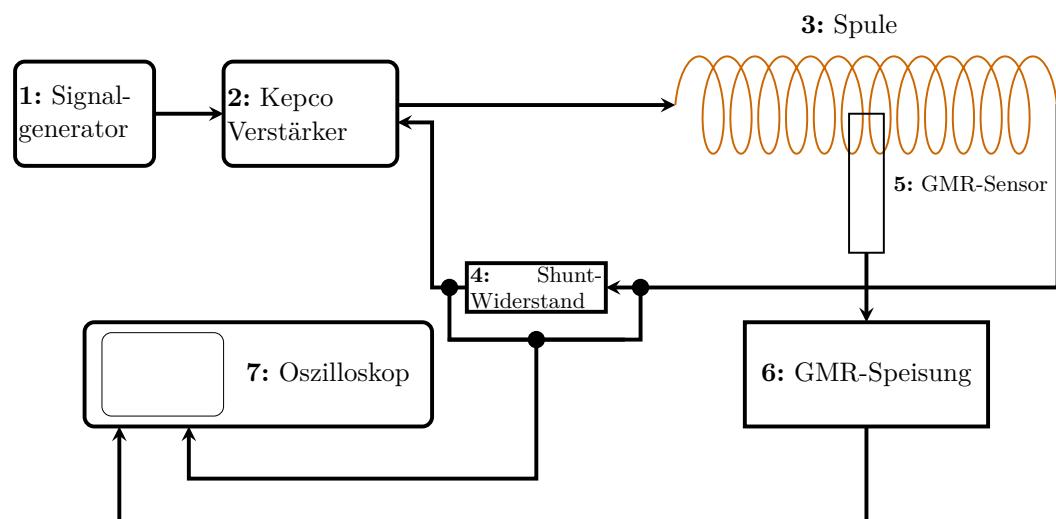


Abbildung 4: Versuchsanordnung, schematisch

Im Vergleich zur Versuchsanleitung wurde die Versuchsanordnung etwas aktualisiert (insbesondere wurde das Oszilloskop durch ein moderneres Gerät ersetzt), daher ist das dortige Schema des Versuchsaufbaus nicht mehr ganz aktuell. Abbildung

4 enthält deshalb ein Schema, das dem Aufbau am Tag des Versuchs entspricht (Abbildungen 5 und 6).

Die Nummerierung der Geräte in den Abbildungen 4, 5 und 6 und in der folgenden Auflistung ist konsistent.

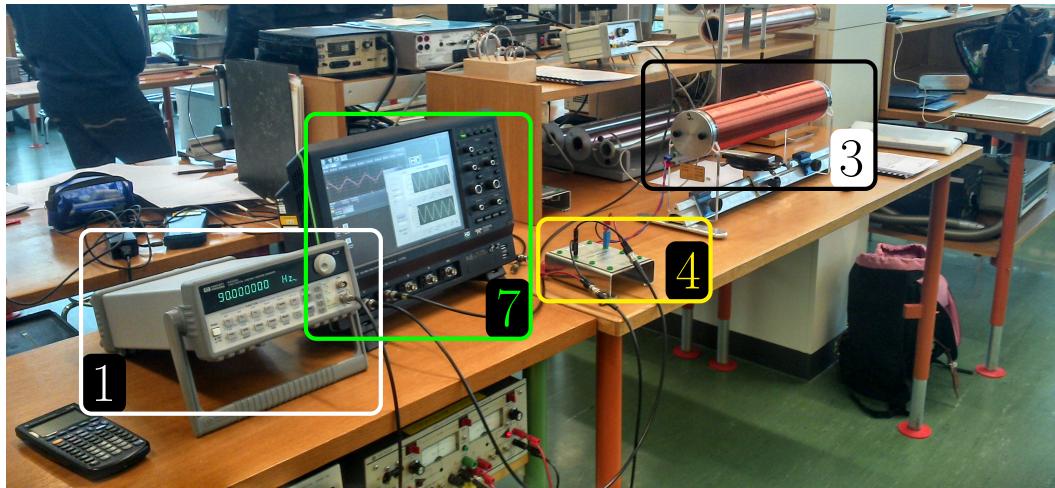


Abbildung 5: Versuchsanordnung

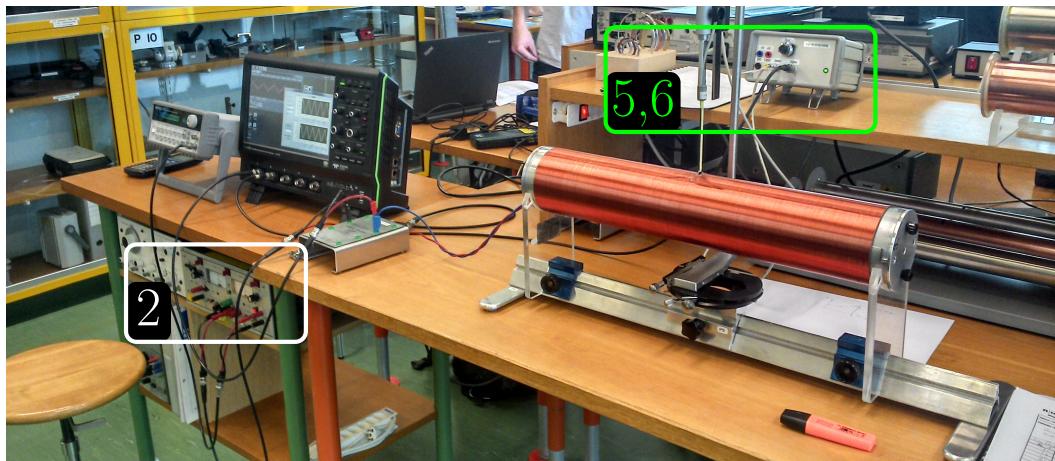


Abbildung 6: Versuchsanordnung

Die verwendeten Geräte waren:

1. Signalgenerator: Hewlett-Packard 33120A
2. Verstärker: Kepco Bipolar Operational Power Supply/Amplifier P-E-102
3. Zylinderspule aus Kupferdraht:

- 98 mm Innendurchmesser
 - 0.8 mm Drahtdurchmesser
 - 500 mm Länge
 - 574 Windungen
4. Shunt-Widerstand: 1Ω , 50 W
 5. GMR-Sonde Honeywell SS94A1F
 6. GMR-Speisebox zugehörig zu Sonde Honeywell SS94A1F
 7. Oszilloskop: Teledyne Lecroy HD06054

2.2 Messvorgang/Messmethoden

Bei der Messung wurde jeweils eine Messprobe ins Innere der Zylinderspule eingeführt wie in den Abbildungen 1 und 2 auf Seite 1 respektive 3 dargestellt.

Anschliessend wurden folgende Messungen zur Erfassung des B-Feldes durchgeführt:

- Vollzylinder Aluminium:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)
 - über den ganzen Radius variierende Position, axial zentriert, bei fixierter tiefer Frequenz (30 Hz) (Abbildung 8) und
 - über die äussere Hälfte des Radius variierende Position, axial zentriert, bei fixierter hoher Frequenz (450 Hz) (Abbildung 9).
- Hohlzylinder Kupfer:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)
- Hohlzylinder rostfreier Stahl:
 - Frequenzgang, GMR-Sonde axial und radial zentriert (Abbildung 7)

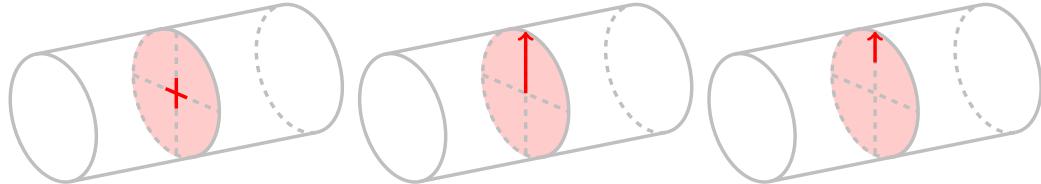


Abbildung 7: Sonde ist axial und radial zentriert fixiert.

Abbildung 8: Sonde läuft den gesamten Radius ab, axial zentriert.

Abbildung 9: Sonde läuft den halben Radius ab, axial zentriert.

2.3 Proben

Es wurden drei Versuchsobjekte benutzt:

- Hohlzylinder aus Kupfer:
 - 70 mm Aussendurchmesser
 - 60 mm Innendurchmesser
 - 500 mm Länge
- Hohlzylinder aus rostfreiem Stahl:
 - 70 mm Aussendurchmesser
 - 60 mm Innendurchmesser
 - 500 mm Länge
- Vollzylinder aus Aluminium:
 - 90 mm Durchmesser
 - 500 mm Länge (verteilt auf zwei Hälften)

Die Leitwerte der Proben waren nicht bekannt und sollten via Fit an die Messpunkte bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Literaturwerte und die experimentell bestimmten Werte beträchtlich voneinander abweichen können (je nach Herstellungsprozess können Metalle, insbesondere Aluminium, stark variierende elektrische Leitfähigkeiten aufweisen).

2.4 Messungen

Die Messwerte wurden auf dem Oszilloskop mit einer vom Dozenten geschriebenen Spezialsoftware ausgelesen. Diese wertet dabei die rohen Messpunkte (Spannung, welche von der GMR-Sonde via Speisegerät an das Oszilloskop geliefert wird) aus und errechnet einen passenden Fit an diese Spannungswerte.

Die Amplitude dieses Fits sowie die Phasenverschiebung zwischen dem Fit an die GMR-Messwerte und dem Fit an die zum äusseren B-Feld gehörenden Messwerte (repräsentiert durch die Shunt-Spannung) werden anschliessend an den Benutzer ausgegeben. Es sind diese Werte, welche in den Messprotokollen erfasst sind.

Die Shunt-Spannung wurde konstant bei 200mV gehalten (somit der Spulenstrom bei 200 mA). Bei der ersten Messreihe wurde sie zur Kontrolle erfasst, anschliessend nicht mehr. Die ermittelten Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden.

Tabelle 1: Frequenz und Shunt-Spannung beim Frequenzgang von Zylinderspule mit Kupferrohr

| Frequenz (Hz) | $V_{R_{Shunt}}$ (mV) | Frequenz (Hz) | $V_{R_{Shunt}}$ (mV) |
|---------------|----------------------|---------------|----------------------|
| 1 | 195.3 | 200 | 200.0 |
| 10 | 200.0 | 400 | 200.0 |
| 20 | 200.0 | 600 | 199.7 |
| 40 | 200.3 | 800 | 200.5 |
| 80 | 200.0 | 1000 | 200.2 |
| 120 | 200.1 | 1200 | 200.0 |
| 160 | 200.1 | 1500 | 199.9 |

Bei gewissen Versuchen schwankten die ausgegebenen Werte merklich (die Phase war davon stärker betroffen als die Amplitude), was ein gutes Auslesen zeitweise erschwerte. Bei den betroffenen Messungen ist dies im Kapitel *Auswertung* jeweils angemerkt.

Im Allgemeinen war das Durchführen des Versuches dank der Software jedoch eine komfortable Angelegenheit, und wie man sehen wird, decken sich die ermittelten Messwerte im Grossen und Ganzen zufriedenstellend mit der Theorie und sind anscheinend von guter Qualität.

Die Messprotokolle sind in Anhang E ab Seite 43 zu finden.

3 Auswertung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich primär mit den Fits zu den Messpunkten und daraus gezogenen Schlussfolgerungen.

3.1 Anmerkungen

Messwerte: Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen in den Tabellen mit den Messwerten nicht immer konsistent.

Foldouts: Im Mittelpunkt dieses Versuches stehen letztlich die Plots. Um sie in anständiger Grösse darzustellen und trotzdem noch die zugehörigen relevanten Informationen auf der gleichen Seite unterbringen zu können (Listings, Formeln, ergänzende Anmerkungen), sind die Plots und die zugehörigen Informationen daher auf A3-Seiten gedruckt. Es wurde danach gestrebt, dass jede dieser Seiten eine grösstenteils in sich geschlossene informative Einheit ist, um das Hin- und Herblättern durch das Journal zu minimieren. Deshalb sind manchmal Informationen allenfalls auch mehreren Seiten zu finden.

3.2 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Grössen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *QtIPLOT* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes). Die Fitfunktion wird dabei optisch an die Messpunkte angepasst, nicht mit strikten mathematischen Methoden.

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Tools an; der Autor hat sich hier aus Gründen der persönlichen Präferenz (Kosten, Lizenzmodell, Features) für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante). Ein Auszug mit Beispielcode ist im Anhang D ab Seite 41 zu finden.

3.2.1 Vorgehen Manuelles Fitting

Bei vielen Plots wurde an Phase und Betrag jeweils separat gefittet. Entsprechende Angaben sind jeweils in den Listings der Plots zu finden.

Im Allgemeinen wurde beim Fitten folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
 - Die Leitfähigkeit σ des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
 - und den Betrag $|B_0|$ des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von $|B_0|$ abhängt (ersichtlich aus Gleichung 2 auf Seite 1 sowie Gleichung 7 auf Seite 3, oder beim Herumexperimentieren mit den Plots), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von σ einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, übernimmt man den erhaltenen Wert für σ für den Betrags-Fit und kann man mittels Tunen von $|B_0|$ die Kurve für die Messpunkte von $|\hat{B}|$ anpassen.
- Abschliessend kann man noch iterativ die beiden σ für den Betrags- und den Phasenverlauf individuell optimieren, bis die Fitfunktionen den Verlauf der Messpunkte optisch zufriedenstellend repräsentieren.

3.2.2 Listings

Die Listings mit den Parametern, welche zum Erstellen eines bestimmten Plots benutzt worden sind, sind in Tabellen in der Nähe der zugehörigen Plots aufgeführt.

Die Werte werden direkt von den Python-Scripts in `*.tex`-Files geschrieben und in dieses Dokument integriert. Dies garantiert, dass die Plots und die aufgelisteten Parameter übereinstimmen; Tippfehler beim Abschreiben der Werte werden vermieden (und es erspart Arbeit).

Die Werte in den Tabellen sind jeweils gerundet, Python arbeitet natürlich mit viel mehr Dezimalstellen. Die Werte sind in ihrer vollen Präzision im L^AT_EX-Quellcode zu finden [4].

3.3 Vollzylinder

Mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder wurden drei Messreihen durchgeführt:

- Frequenzgang des B-Feldes,
- radialer Verlauf des B-Feldes bei niedriger Frequenz (30 Hz),
- und radialer Verlauf des B-Feldes bei hoher Frequenz (450 Hz).

Dabei wurden jeweils Betrag und Phase des Magnetfeldes ausgemessen. Zu den Messwerten wurden anschliessend folgende Fit-Kurven erstellt:

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- radialer Verlauf bei tiefer Frequenz, exakte Lösung,
- Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf niedrige Frequenz (Überprüfung, dass es auch tatsächlich eine Hochfrequenznäherung ist),
- radialer Verlauf bei hoher Frequenz, exakte Lösung,
- sowie die Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf, angewandt auf hohe Frequenz.

Zudem wurden als Ergänzung noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Vollzylinder erstellt, basierend auf den Werten für die Leitfähigkeit und das externe Magnetfeld, welche aus den Fitfunktionen ermittelt worden waren.

3.3.1 Frequenzgang

Die Sonde war fix positioniert gemäss Abbildung 10. Gemessen wurden Betrag und Phase des B-Feldes an dieser Position bei ansteigender Frequenz (Tabelle 2).

Tabelle 2: Messwerte Frequenz, ganz Vollzylinder

| f (Hz) | \sqrt{B} (f) (°) | $ B $ (mV) |
|----------|--------------------|------------|
| 1 | 5.4 | 69 |
| 5 | 26 | 65 |
| 10 | 50 | 57 |
| 15 | 69 | 48 |
| 20 | 85 | 40 |
| 30 | 111 | 28.5 |
| 40 | 132 | 21 |
| 60 | 166 | 12.5 |
| 80 | 196 | 8 |
| 100 | 220 | 5.4 |
| 120 | 243 | 3.6 |
| 160 | 283 | 1.9 |
| 200 | 320 | 1 |
| 250 | 350 | 0.6 |

Als Fit-Funktion wurde Gleichung 2 benutzt, jedoch mit der Frequenz statt des Radius variiert. Für mehr Informationen siehe Kapitel *Arbeitsgrundlagen* ab Seite 2 sowie der Python-Code der Implementation [4]. Tabelle 3 listet die eingesetzten Parameter und einen Referenzwert aus der Literatur (Kuchling [5]) auf.

$$\hat{B}(f) = \frac{J_0(k(f) \cdot r)}{J_0(k(f) \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Phase und Betrag des B-Feldes wurden separat gefitett, die beiden ermittelten Leitfähigkeiten $\sigma_{Fit,|\hat{B}|}$ und $\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$ liegen relativ nahe zusammen, weichen jedoch stark von Kuchlings Literaturwert σ_{Kuch} ab.

Tabelle 3: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 10

| | |
|------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \hat{B} }$ | $24.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$ | $22.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $37.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r | 0 m |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | 250 Hz |

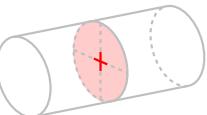


Abbildung 10: Sondenposition während Messung

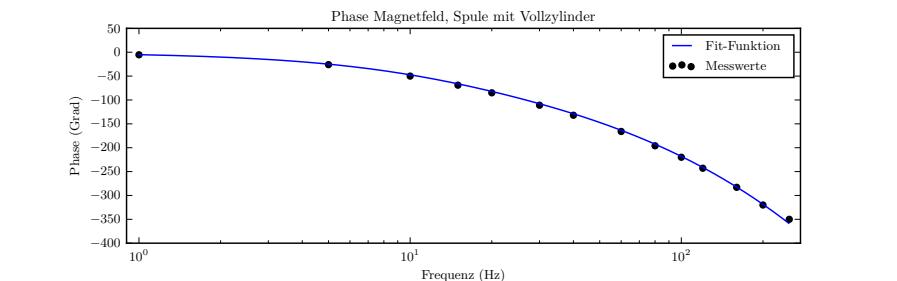
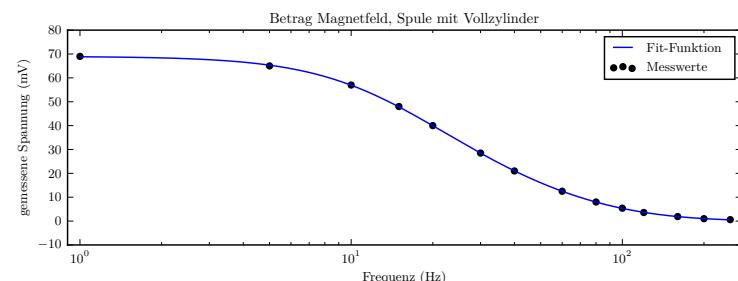


Abbildung 11: Frequenzgang Zylinderspule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder. Betrag und Phase wurden jeweils separat gefitett, was zweifellos verschiedene Werte für die Leitfähigkeit des verwendeten Aluminiums liefert, wie im Listing in Tabelle 3 geschehen werden kann.

3.3.2 Radialer Verlauf, niedrige Frequenz

In dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten (30 Hz), und die Position der Messsonde wurde radial variiert zwischen Zylinderachse und Außenrand (Abbildung 12). Der Skineffekt ist merklich schwächer als bei höheren Frequenzen (Abschnitt 3.3.3, Seite 16).

Tabelle 4: Messwerte für Vollzylinder bei 30 Hz

| r (mm) | $\angle \hat{B} (\text{D})$ (°) | $ \hat{B} (\text{D}) / \text{mV}$ |
|----------|---------------------------------|------------------------------------|
| 0 | 111 | 28.6 |
| 5 | 109 | 28.5 |
| 10 | 104 | 28.7 |
| 15 | 94 | 29 |
| 20 | 81 | 30 |
| 25 | 65 | 33 |
| 30 | 48.5 | 38 |
| 35 | 32 | 45 |
| 40 | 16 | 54 |
| 45 | 2.7 | 62 |
| 50 | 0 | 37 |

$$\hat{B} (r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Es konnte eine sehr zufriedenstellende Fit-Funktion für die Messwerte gefunden werden. Jedoch weichen die daraus bestimmten Leitfähigkeiten recht beträchtlich von Kuchlings Wert σ_{Kuch} ab.

Tabelle 5: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 12

| | |
|-------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \hat{B} }$ | $22.5 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle \hat{B}}$ | $23.5 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $37.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{max} | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{min} | 0 m |
| B_0 | $66 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f | 30 Hz |

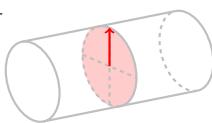
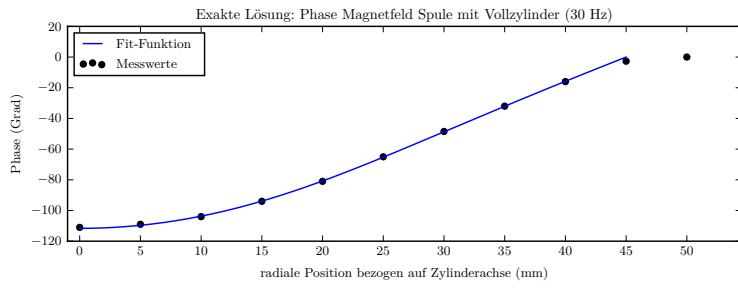
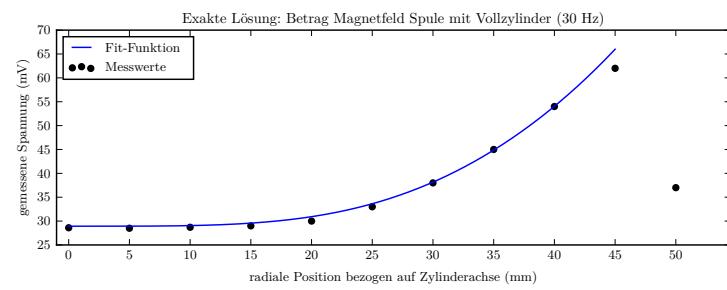


Abbildung 12: Sondenposition während Messung

Abbildung 13: Radialer Verlauf des B-Feldes bei einer Frequenz von 30 Hz. Betrag und Phase wurden wie beim Frequenzgang separat gefittet. Der Radius des Zylinders betrug 45 mm, womit der Messpunkt an dieser Position in den Augen des Autors aufgrund von Randeffekten mit Vorsicht zu geniessen ist, und der äusserste Messpunkt wurde für den Fit nicht berücksichtigt.



Da in den Augen des Autors auch ruhig mal verifiziert werden darf, dass eine Herangehensweise nicht funktioniert, wurde hier aus Neugier ebenfalls ebenfalls noch die Hochfrequenznäherung auf den radialen Verlauf bei 30 Hz angewandt. Wenig überraschend erwies sich die Methode in der Tat als ungeeignet für diesen Frequenzbereich.

Es konnte keine Kombination für B_0 und σ ermittelt werden, welche einen zufriedenstellenden Fit für die Messwerte ergeben hätte. Selbst wenn solche Parameter hätten gefunden werden können, wären sie vermutlich so stark von den mit den restlichen Fits ermittelten Werten abgewichen, dass sie unbrauchbar gewesen wären (siehe Tabelle 6). Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 6: Parameterwerte für Fit-Funktion aus Abbildung 14

| | |
|-----------------|--|
| σ_{Fit} | $17.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $37.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $17.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| r_{max} | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{min} | 0 m |
| B_0 | $62 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f | 30 Hz |

Wie man feststellen kann, weicht der ermittelte Wert für die Leitfähigkeit doch recht bedeutend den bisher gesehenen Werten ab.

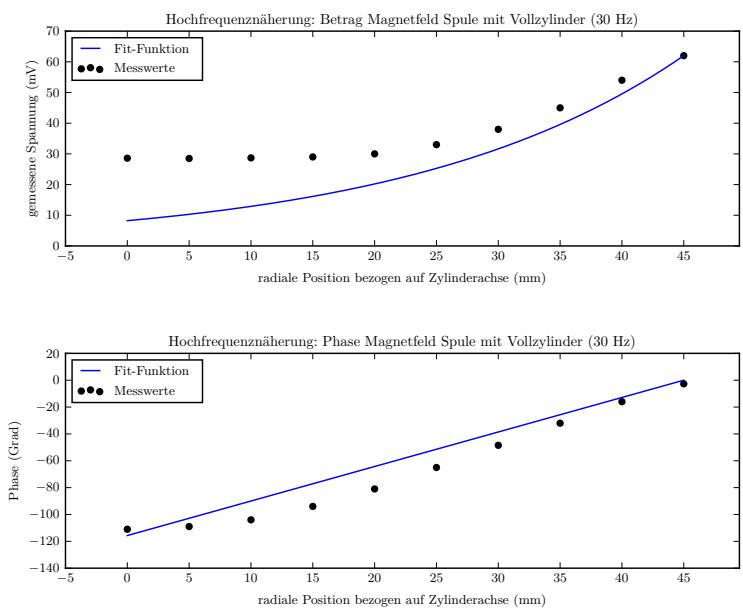


Abbildung 14: Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf des B-Feldes angewandt auf 30 Hz. Da mit keiner Kombination von σ und B_0 für Phase oder Betrag ein zufriedenstellender Fit erreicht werden konnte, wurde auf einen separaten Fit von Phase und Betrag verzichtet.

3.3.3 Radialer Verlauf, hohe Frequenz

Auch in dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten, jedoch 450 Hz. Zudem wurde nicht der gleiche radiale Bereich ausgemessen: Die Sonde wurde auf halbem Radius positioniert, anschliessend wurde die Frequenz des externen B-Feldes so weit erhöht, bis gerade noch brauchbare Messwerte abgelesen werden konnten.

Tabelle 7: Messwerte Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz

| r (mm) | $\langle \hat{B} \rangle (J)$ | $\langle \hat{B} \rangle (mV)$ |
|----------|-------------------------------|--------------------------------|
| 25 | 215 | 1.5 |
| 27.5 | 183 | 2.2 |
| 30 | 152 | 3.6 |
| 32.5 | 125 | 5.9 |
| 35 | 100 | 9.5 |
| 37.5 | 73 | 15.5 |
| 40 | 47 | 25 |
| 42.5 | 24 | 39 |
| 45 | 5.2 | 55 |
| 47.5 | 0.2 | 57.5 |
| 50 | 0 | 38 |

Bei der so ermittelten Frequenz wurde dann der radiale Verlauf des B-Feldes auf der restlichen Hälfte gegen den Außenrand des Vollzyinders ausgemessen (siehe Abbildung 15). Die erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 7 zu finden.

Als Fit-Funktion wurde hier ebenfalls die Gleichung 2 von Seite 2 benutzt, wobei der Radius die Variable war.

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0 \quad (2)$$

Tabelle 8: Parameter für Fit-Funktion aus Abbildung 16.

| | |
|-------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, B }$ | $21.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle B}$ | $18.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $37.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{max} | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{min} | $25 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $60 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f | 450 Hz |

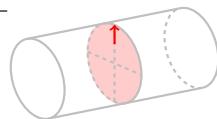


Abbildung 15: Sondenposition während Messung

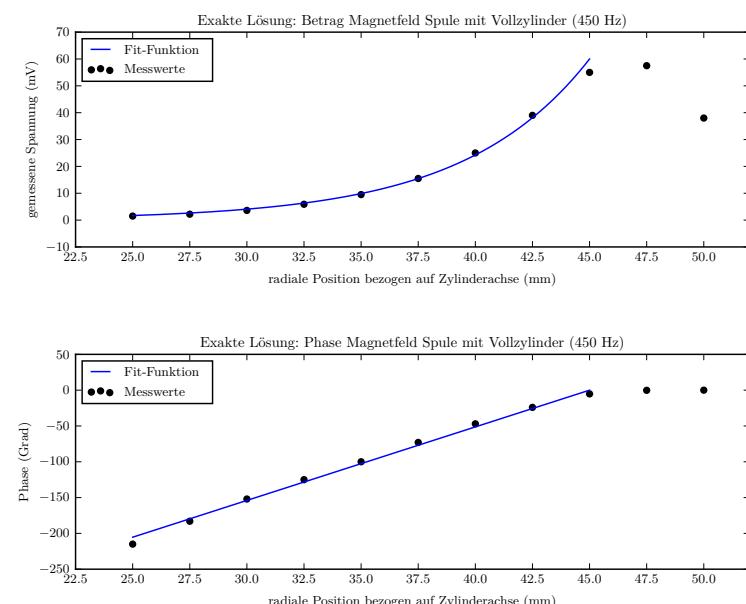


Abbildung 16: Radialer Verlauf des B-Feldes bei 450 Hz. Es gelten die gleichen Überlegungen zu den Randeffekten wie bei 30 Hz. Die Phase passt nicht ganz optimal, und der erhaltene Wert für $\sigma_{Fit,\angle B}$ (Tabelle 8) liegt einiges tiefer als die bisher gesehenen Werte. Möglicherweise ist dies darauf zurückzuführen, dass bei diesem Versuch die Phase im Allgemeinen sehr stark oszilliert (auch der Betrag, wenn auch weniger), was ein genaues Auswerten erschwerte. Man geniesse diese Werte daher mit etwas Vorsicht.

Bei dieser Frequenz liefert die Hochfrequenznäherung nun sehr zufriedenstellende Lösungen, wie in Abbildung 17 zu sehen ist. Für die Fitfunktion wurde Gleichung 3 (Seite 2) benutzt.

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \quad (3)$$

Tabelle 9: Parameterwerte für Fit-Funktion aus Abbildung 17

| | |
|------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \hat{B} }$ | $19.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$ | $18.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $37.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{max} | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{min} | $25 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $60 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f | 450 Hz |

Es fällt auf, dass sowohl Phase wie auch Betrag einen etwas tieferen Wert für σ ergeben als die beim Frequenzgang und bei der radialen Auswertung bei 30 Hz gefundenen Werte. Dies hat in den Augen des Autors mit den bei Abbildung 16 erwähnten Ableseschwierigkeiten zu tun. Möglicherweise spielt aber auch die Tatsache eine Rolle, dass man es hier schlussendlich doch mit einer Näherungslösung zu tun hat. Um Gewissheit zu erlangen, wären hier noch weitere Untersuchungen erforderlich.

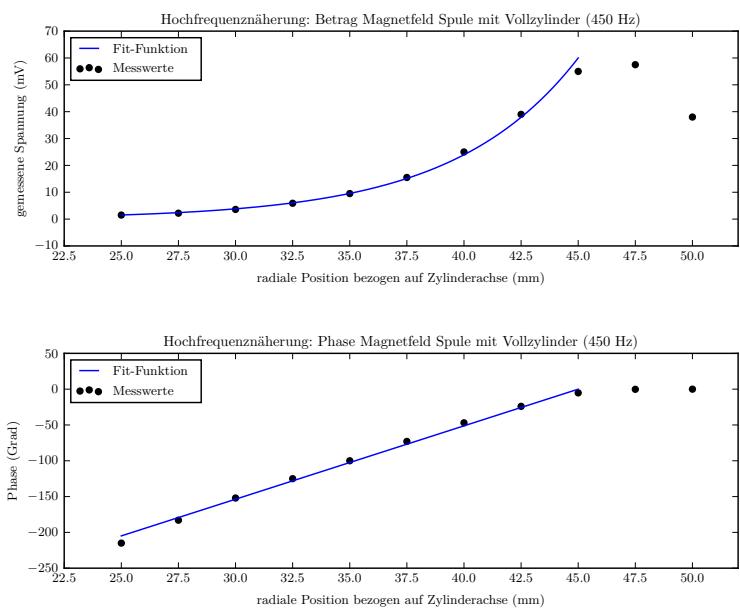


Abbildung 17: Hochfrequenznäherung für 450 Hz. Es gelten die bereits erwähnten Überlegungen betreffend Randeffekten und Ableseschwierigkeiten

3.3.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie erwähnt, wurden keine direkten Messungen von $L_{Spule+Zylinder}$ und $R_{Spule+Zylinder}$ durchgeführt. Mit den Informationen aus den Fits (also primär der dort bestimmten Leitfähigkeit) können jedoch trotzdem Plots erstellt werden.

Es sei hier noch angemerkt, dass die gewählten Werte für B_0 und σ nicht auf strikten Berechnungen begründen. Es wurden anhand der auf die Messwerte gepassten Fits "typische" Werte ausgewählt. Da bei L , R , und dem magnetischen Fluss sowieso keine Messwerte vorhanden sind, ist bei diesen Kurven auch der Verlauf viel wichtiger als die absoluten Werte, womit dieses Verfahren in den Augen des Autors gerechtfertigt ist.

Als Fit-Funktionen wurden die Gleichungen 4 und 5 von Seite 2 verwendet. Zur Bestimmung des Widerandes des Spulendrahtes siehe Anhang B auf Seite 39.

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + L_{Rand} \quad (4)$$

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + R_{\Omega,0} \quad (5)$$

Tabelle 10: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 18

| | | | |
|-----------|--|----------------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ | μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $23.8 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ | σ | $23.8 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ | d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r | 0 m | r | 0 m |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ | B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ | l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 | $R_{\Omega,0}$ | 6.30Ω |
| N_0 | 574 | $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz | N_0 | 574 |
| f_{max} | 250 Hz | f_{min} | 1 Hz |
| | | f_{max} | 250 Hz |

Tabelle 11: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 19

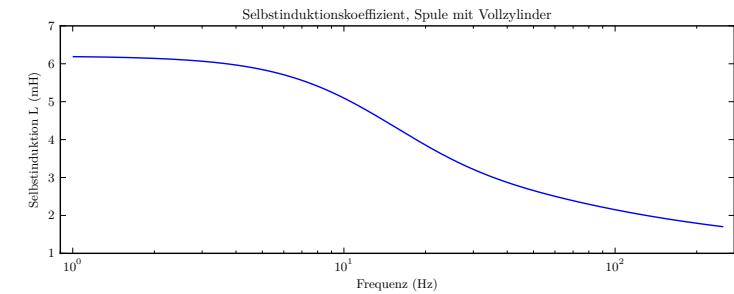


Abbildung 18: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder. Für das Listing mit den Parametern siehe Tabelle 10.

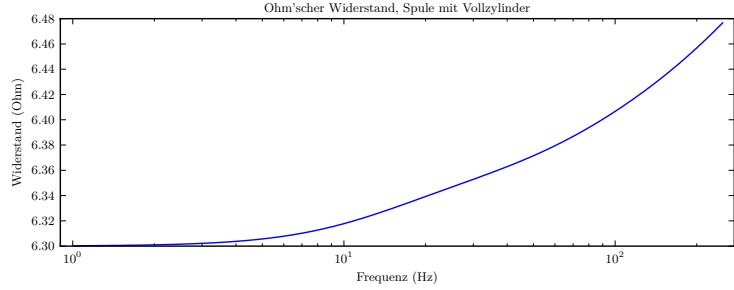


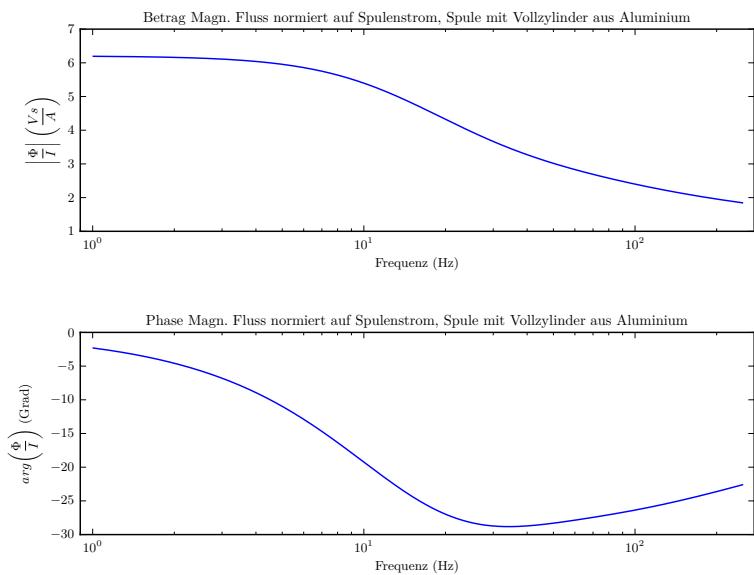
Abbildung 19: Änderung des Ohm'schen Widerstandes von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder. Listing siehe Tabelle 11.

Tabelle 12: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 20

| | |
|-----------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $23.8 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r | 0 m |
| r_0 | $45 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| N_0 | 574 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | 250 Hz |

Als Fit-Funktion wurde hier Gleichung 6 von Seite 2 verwendet:

$$\frac{\hat{\Phi}}{I} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \quad (6)$$

**Abbildung 20:** Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

3.4 Hohlzylinder

Es wurde die Konfiguration aus Zylinderspule mit einem eingeführten Hohlzylinder ausgemessen, und zwar für zwei Zylinder, einen aus Kupfer und einen aus rostfreiem Stahl.

Da das Magnetfeld im Innenraum des Hohlzylinders konstant ist (siehe Abschnitt 1.2), macht es nicht viel Sinn, radiale Messungen vorzunehmen. Man könnte zwar das variierende radiale Feld innerhalb der Zylinderwand ausmessen, jedoch ist die hier verwendete Versuchsanordnung nicht dazu geeignet. Die Wandstärke ist im Vergleich zur Sondengröße nicht dick genug und die Messung der Sondenposition nicht präzise genug, um eine vernünftige Anzahl Messungen mit akzeptabler Genauigkeit in der Sondenposition vorzunehmen.

Deshalb wurden bei diesen zwei Versuchsreihen lediglich die Frequenzgänge des B-Feldes im Innenraum der Hohlzylinder gemessen.

Folgende Fit-Kurven wurden anschliessend erstellt (je für den Kupferzylinder und den Stahlzylinder):

- Frequenzgang, exakte Lösung,
- und Frequenzgang, Näherungslösung.

Wie beim Vollzylinder wurden auch hier noch Plots für den magnetischen Fluss, den Ohm'schen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Hohlzylinder erstellt, basierend auf den mittels Fits ermittelten Parametern.

3.4.1 Kupfer

Es wurde das B-Feld in Abhängigkeit der Frequenz gemessen, wobei die Messsonde axial und radial zentriert im Innern des Hohlzylinders war (siehe Abbildung 21).

Als Formel für die Fit-Funktion wurde Gleichung 7 von Seite 3 benutzt:

$$\hat{B}(r=0) = \hat{B}(r=r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (7)$$

Tabelle 20 beinhaltet die in die Gleichung eingesetzten Parameter, zusammen mit einem Literaturwert für die Leitfähigkeit von Kupfer aus Horst Kuchlings *Taschenbuch der Physik* [5].

Tabelle 13: Messwerte Kupferrohr

| f (Hz) | $\langle B \rangle (T)$ | $ B $ (mT) |
|----------|-------------------------|------------|
| 1 | 2 | 70.0 |
| 10 | 19.2 | 66.0 |
| 20 | 35.5 | 57.8 |
| 40 | 56.7 | 41.8 |
| 80 | 76.7 | 24.4 |
| 120 | 87 | 16.9 |
| 160 | 94 | 12.7 |
| 200 | 100 | 10.0 |
| 400 | 121 | 4.8 |
| 600 | 140 | 2.9 |
| 800 | 155 | 1.9 |
| 1000 | 170 | 1.4 |
| 1200 | 180 | 1.0 |
| 1500 | 200 | 0.7 |

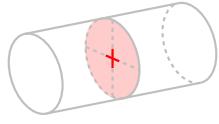
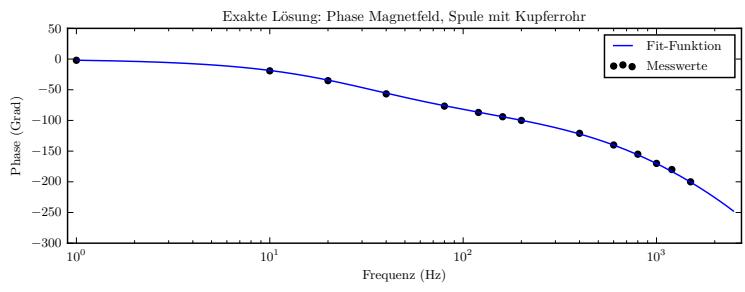
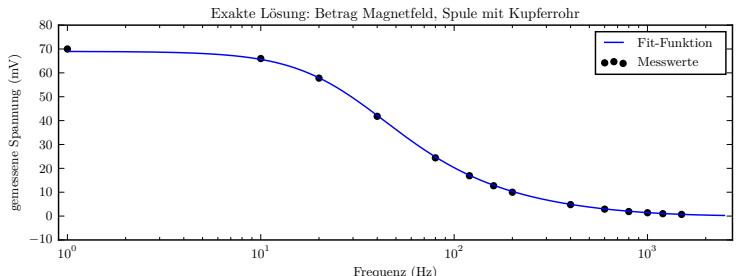


Abbildung 21: Sondenposition während Messung

Abbildung 22: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Es wurde für den Betrag und die Phase jeweils ein Fit durchgeführt, wobei sich die beiden Werte $\sigma_{Fit,|B|}$ und $\sigma_{Fit,\angle B}$ (Tabelle 20) nicht stark unterscheiden und beide auch nicht besonders weit vom Literaturwert σ_{Kuch} entfernt liegen (insb. verglichen mit dem Aluminium-Vollzylinder).



Für die Näherung eines dünnwändigen Rohres (also bei tiefen Frequenzen) wurde Gleichung 10 von Seite 3 benutzt:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \quad (10)$$

Bei der genäherter Fit-Funktion aus den Formeln für tiefe Frequenzen fällt auf, dass der Betrag der Näherungslösung über den gesamten Frequenzbereich ziemlich genau ist und nicht bedeutend von den Messwerten abweicht. Der Phasenverlauf divergiert jedoch stark von den Messwerten, sobald die Wanddicke des Zylinderrohrs grösser als die Eindringtiefe s_{skin} wird (was sich auch mit der Theorie deckt). In Abbildung 23 ist daher das Verhältnis von Wandstärke und Eindringtiefe ebenfalls dargestellt.

Tabelle 15: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 23

| | |
|--------------------|--|
| $\sigma_{Fit, B }$ | $53.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $58.1 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{avg} | $32.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| d_{Rohr} | $5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| N_0 | 574 |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $2.50 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

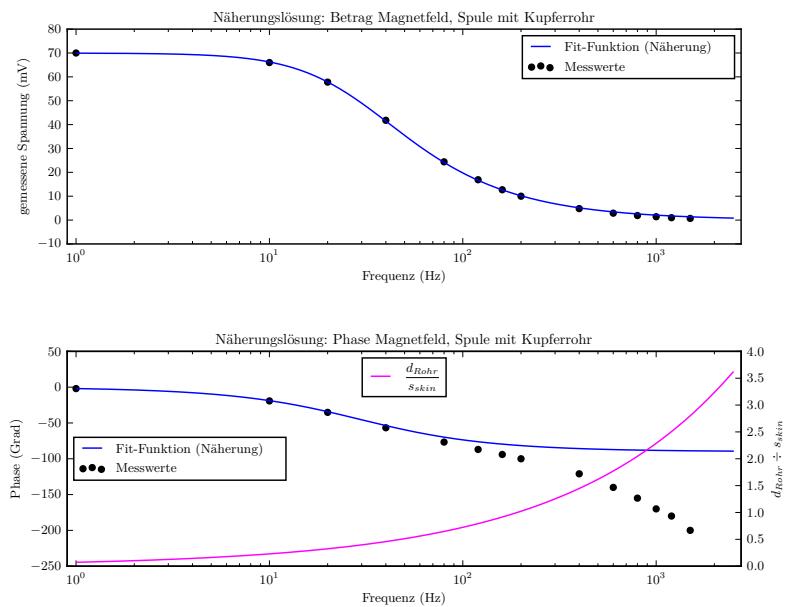


Abbildung 23: Näherungslösung basierend auf der Näherung für tiefe Frequenzen für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Es wurde nur auf den Betrag gefitett wegen der starken Abweichung der Phase von den Messwerten, daher lieferte diese Näherung lediglich einen Wert für σ in Tabelle 15.

Bei hohen Frequenzen können numerische Probleme für gewisse Softwarepakete auftreten (Division durch die Differenz zweier benahe gleicher Zahlen führt zu Stellenauslöschung und Division durch null). Für solche Fälle kann man die Näherungen aus den Gleichungen 11 von Seite 4 verwenden.

Für Python ist dies grundsätzlich nicht wirklich ein Problem, da man die Präzision ohne Probleme auf tausende von Dezimalstellen hin-aufschrauben kann (natürlich mit entsprechend verlängerter Berechnungszeit), aber der Vollständigkeit halber wurden die Näherungsfunktionen trotzdem ausgewertet, um zu überprüfen, wie nahe sie an die exakte Lösung kommen.

Siehe auch die magenta-farbenen Kurvenverläufe in Abbildungen 25, 26 und 27 auf den Seiten 24 und 25.

Tabelle 16: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 24

| | |
|------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \vec{B} }$ | $53.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle\vec{B}}$ | $53.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Kuch} | $58.1 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{arg} | $32.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| d_{Rohr} | $5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| N_0 | 574 |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $2.50 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

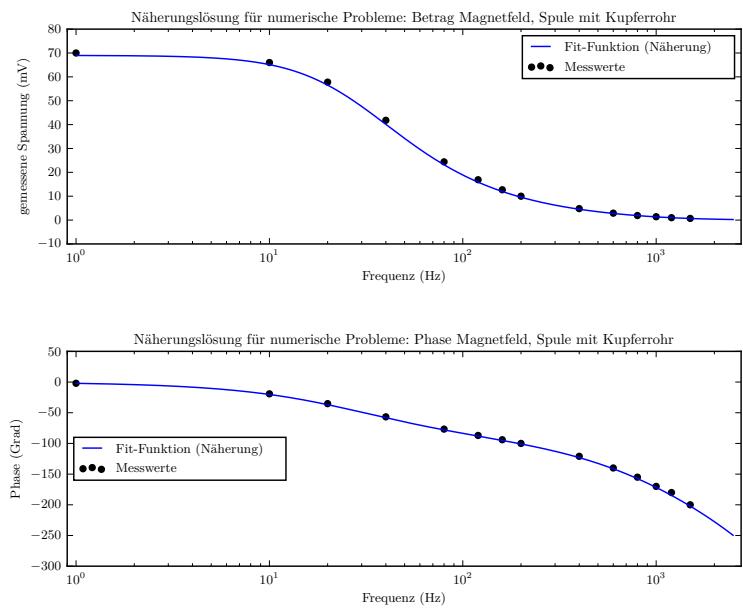


Abbildung 24: Nähерungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer). Betrag und Phase wurden separat gefitpt, daher zwei Werte für die Leitfähigkeit in Tabelle 16.

3.4.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.3.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter. Es gelten auch hier die dort bereits erwähnten Überlegungen zu der Wahl von σ und B_0 , und die Wichtigkeit der Kurvenformen vor absoluten Werten.

Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\Phi}{I}$ wurden die Formeln von Seite 4 verwendet, sowohl für die exakte wie auch die genäherte Lösung. Es soll aus Platzgründen an dieser Stelle nicht der ganze Formelberg nochmals notiert werden.

Zur Bestimmung des Widerandes des Spulendrahtes siehe Anhang B auf Seite 39.

Tabelle 17: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 25

| | | | |
|-----------|--|----------------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ | μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $53.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ | σ | $52.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ | d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ | l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 | $R_{\Omega,0}$ | 6.30Ω |
| N_0 | 574 | $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz | f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $2.50 \times 10^3 \text{ Hz}$ | f_{max} | $2.50 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

Tabelle 18: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 26

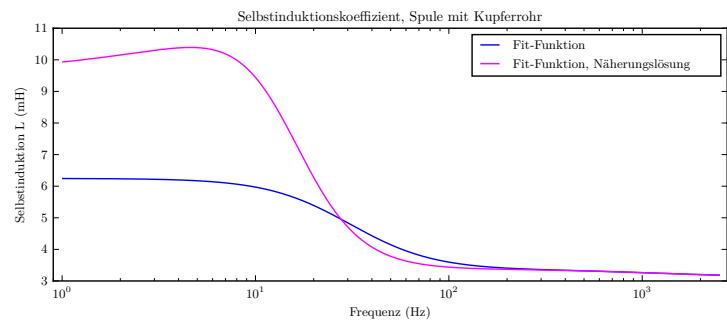


Abbildung 25: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

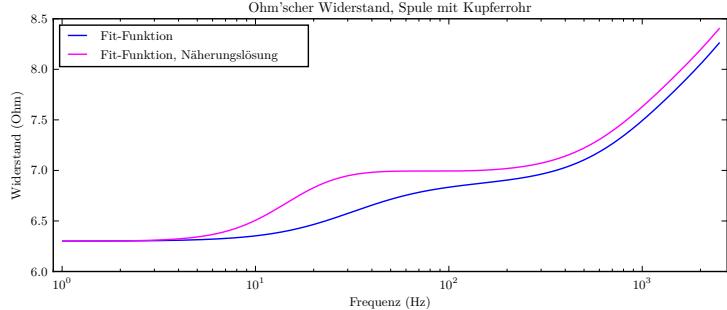


Abbildung 26: Änderung des Ohm'schen Widerandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem Kupfer-Hohlzylinder

Es fällt auf, dass die Näherungsmethode für numerische Problemfälle in gewissen Situationen sehr genaue Resultate über den gesamten Frequenzbereich liefert (Abbildung 24 auf Seite 23 und die Phase in Abbildung 27), und in anderen Situationen bei tiefen Frequenzen beträchtliche Abweichungen zur exakten Lösung aufweist (Abbildung 25 auf Seite 24 und der Betrag in Abbildung 27). Die genauen Gründe dafür sind dem Autor zu diesem Zeitpunkt unbekannt und müssten noch genauer untersucht werden.

Tabelle 19: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 27

| | |
|-----------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $52.0 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| N_0 | 574 |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $2.50 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

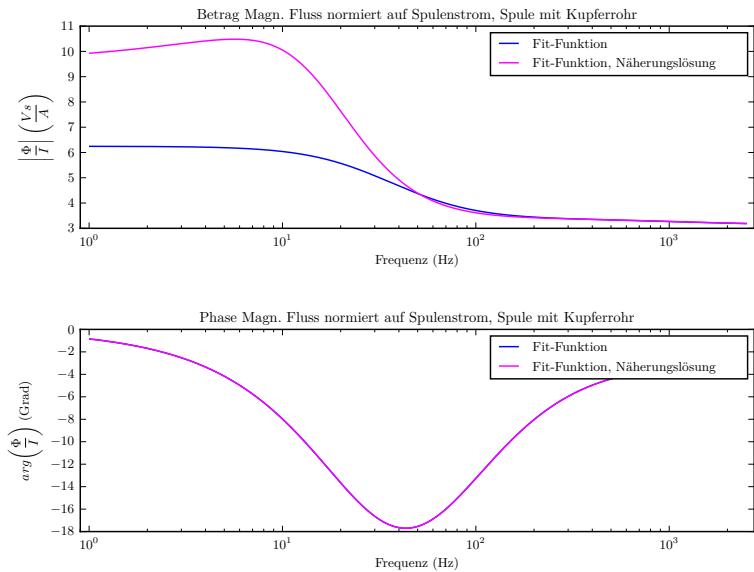


Abbildung 27: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Kupfer-Hohlzylinder *Beachte:* Bei der Phase wurden in der Tat sowohl die exakte wie auch die genäherte Lösung für numerische Problemfälle geplottet, sie kommen einfach direkt übereinander zu liegen.

3.4.3 Rostfreier Stahl

Das Vorgehen beim Stahlrohr war identisch zum Kupferrohr. Aufgrund der schlechteren Leitfähigkeit von Stahl kommt der Skineffekt jedoch hier erst bei bedeutend höheren Frequenzen richtig zum Tragen (die zum Induzieren der Wirbelströme benötigte Veränderung des magnetischen Flusses muss schneller erfolgen).

Der Messbereich wurde daher entsprechend angepasst, wie im Kapitel zur Durchführung angemerkt.

Bei höheren Frequenzen schwankten die Messwerte (insbesondere die Phase) recht stark, was ein genaues Ablesen erschwerte. Die Abweichung zwischen dem Fit der Phase und den Messwerten im oberen Frequenzbereich ist möglicherweise darauf zurückzuführen.

Die Messwerte sind in Tabelle 21 auf Seite 27 zu finden.

Für den Literaturwert σ_{Ref} wurden Werte aus den drei Quellen [6], [7] und [8] miteinander verrechnet. Da es sehr viele Stahlegierungen mit unterschiedlichen Eigenschaften auf dem Markt gibt, existiert *ein* Literaturwert per se natürlich nicht, aber diese Vorgehensweise sollte einen genügend guten Wert zum Vergleich liefern, anhand dessen das experimentelle Resultat auf seine Plausibilität überprüft werden kann. Die Berechnung ist in Anhang C auf Seite 40 zu finden.

Tabelle 20: Parameter für Fit-Funktion in Abbildung 29

| | |
|--------------------------|---|
| $\sigma_{Fit, \vec{B} }$ | $1.3 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle B}$ | $1.2 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Ref} | $1.4 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.3 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r | 0 m |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.0×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $7.5 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

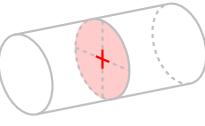


Abbildung 28: Sondenposition während Messung

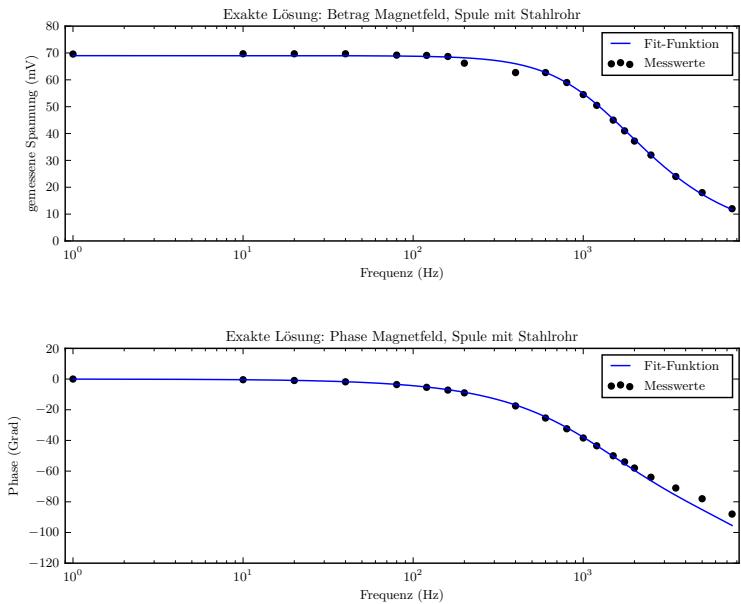


Abbildung 29: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). Die Messpunkte bei 200 Hz und bei 400 Hz wurden als Ausreißer (vermutlich aufgrund von Ablesefehlern) betrachtet und nicht in den Verlauf der Fit-Funktion mit einbezogen. Phase und Betrag wurden individuell gefitett, daher erhält man auch zwei (leicht) unterschiedliche Leitwerte σ in Tabelle 20.

Die für Abbildungen 29 und 30 benutzte Funktion ist Gleichung 7 von Seite 3:

$$\hat{B}(r=0) = \hat{B}(r=r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \quad (7)$$

Tabelle 21: Messwerte Rohr aus rostfreiem Stahl

| | \mathcal{I} (A) | $\langle \hat{B}(\mathcal{I}) \rangle$ (%) | $\langle \hat{B}(\mathcal{I}) \rangle$ (mV) |
|------|-------------------|--|---|
| 40 | 1.8 | 68.7 | |
| 120 | 5.4 | 69.1 | |
| 200 | 9 | 68.7 | |
| 400 | 17.5 | 66.2 | |
| 600 | 25.4 | 62.7 | |
| 800 | 32.4 | 59 | |
| 1000 | 38.4 | 54.5 | |
| 1200 | 43.5 | 50.5 | |
| 1500 | 50 | 45 | |
| 1750 | 54 | 41 | |
| 2000 | 58 | 37.2 | |
| 2500 | 64 | 32 | |
| 3500 | 71 | 24 | |
| 5000 | 78 | 18 | |
| 7500 | 88 | 12 | |

Tabelle 22: Parameter für Fit-Funktion in Abbildung 30

| | |
|------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \hat{B} }$ | $1.25 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle\hat{B}}$ | $1.18 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Ref} | $1.38 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r | 0 m |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| B_0 | $69 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| $f_{min,opt}$ | 80.0 Hz |
| $f_{max,opt}$ | $50.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

Weil der in den Messungen abgedeckte Frequenzbereich nicht ganz reicht, um den typischen Kurvenverlauf mit dem Abfall des Betrags in der optischen Mitte des Plots darzustellen, wurde die Fit-Funktion noch über einen erweiterten Frequenzbereich geplottet. Natürlich ist der nicht mit Messungen abgedeckte Bereich der Kurve nicht ganz so aussagekräftig wie das messtechnisch erfasste Frequenzspektrum, da die experimentelle Bestätigung fehlt.

Bei dieser Gelegenheit wurden die Grenzen der in der Versuchsanleitung gegebenen Funktion zum Erstellen der Stützpunkte für den Plot entdeckt, Anhang A dokumentiert die gefundene Lösung genauer auf Seite 38.

Die Resultate für σ aus den Fits in den Abbildungen 29 und 30 sind natürlich identisch, da es die gleiche Kurve ist, lediglich der dargestellte Frequenzbereich variiert.

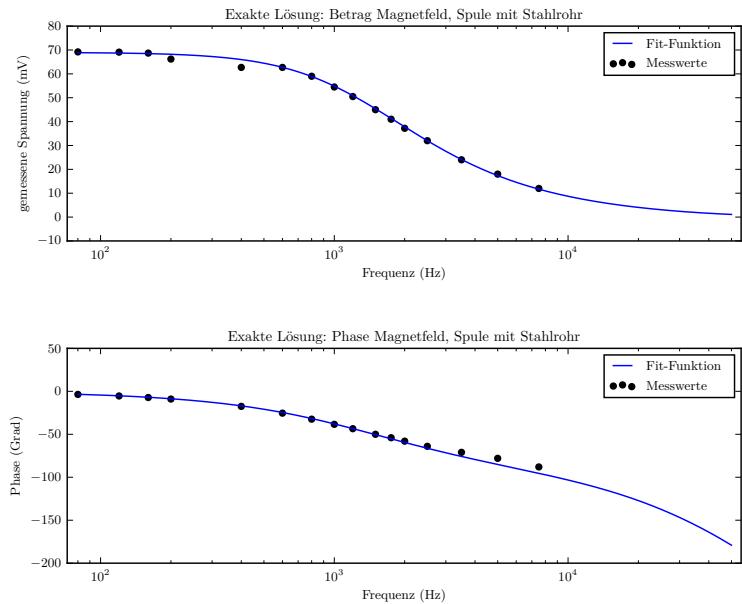


Abbildung 30: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder, erweiterter Frequenzbereich (rostfreier Stahl)

Bei der Näherungslösung für tiefe Frequenzen ist wie auch beim Kupferrohr zu erkennen, dass die Phase der Fit-Funktion von den Messwerten zu divergieren beginnt, wenn die Wanddicke des Rohres größer wird als die Eindringtiefe s_{skin} (magenta-farbene Kurve in Abbildung 31). Der Frequenzbereich des Plots wurde ein wenig über den Messbereich erweitert, um dieses divergierende Verhalten besser erkennbar zu machen.

Tabelle 23: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 31

| | |
|--------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \hat{B} }$ | $1.25 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Ref} | $1.38 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{avg} | $32.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| d_{Rohr} | $5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| N_0 | 574 |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $25.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

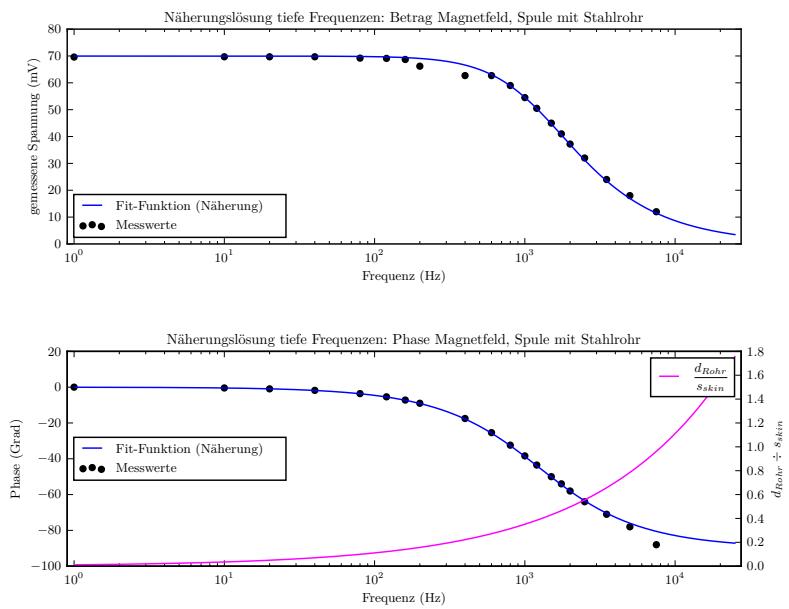


Abbildung 31: Näherungslösung basierend auf der Näherung für tiefe Frequenzen für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). Wie auch bei der Tieffrequenznäherung für Kupfer wurde lediglich auf den Betrag gefitett und daher enthält Tabelle 23 nur einen experimentellen Wert für σ .

Auch hier wurde die Näherung für numerische Problemfälle ebenfalls gefititet. Die bereits beim Kupferrohr gemachten Beobachtungen betreffend Übereinstimmung und Abweichung zwischen Näherungen und exakten Lösungen wurden auch hier gemacht.

Tabelle 24: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 32

| | |
|------------------------------|--|
| $\sigma_{Fit, \vec{B} }$ | $1.17 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\sigma_{Fit,\angle\vec{B}}$ | $1.10 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| σ_{Ref} | $1.38 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| r | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{avg} | $32.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| d_{Rohr} | $5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| N_0 | 574 |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 1 Hz |
| f_{max} | $25.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

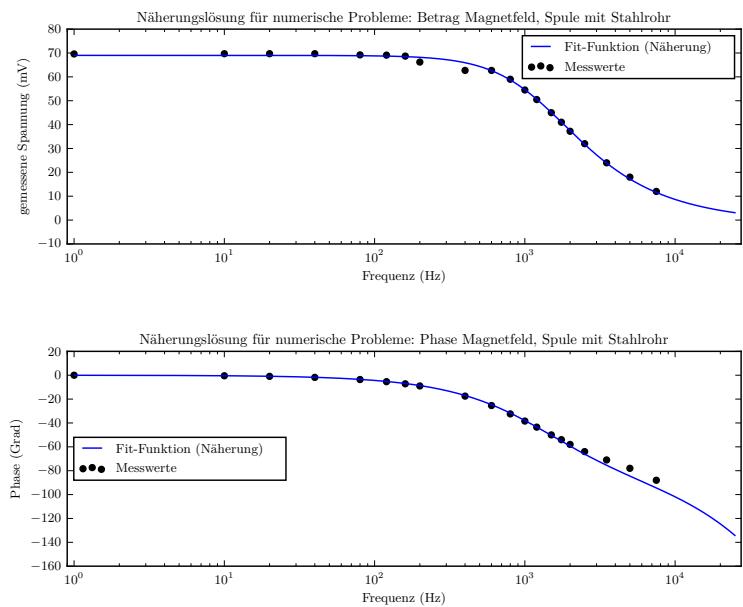


Abbildung 32: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (rostfreier Stahl). An Betrag und Phase wurde separat gefititet (Tabelle 24)

3.4.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Es gelten die bereits erwähnten Überlegungen zu diesen Plots. Als Funktionen für die Plots von L , R und $\frac{\Psi}{I}$ wurden wiederum die Formeln von Seite 4 verwendet.

Zur Bestimmung des Widerandes des Spulendrahtes siehe Anhang B auf Seite 39.

Tabelle 25: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 33

| | | | |
|-----------|--|----------------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ | μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $1.25 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ | σ | $1.25 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ | d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ | r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ | l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 | $R_{\Omega,0}$ | 6.30Ω |
| N_0 | 574 | $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 80.0 Hz | f_{min} | 80.0 Hz |
| f_{max} | $50.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ | f_{max} | $50.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

Tabelle 26: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 34

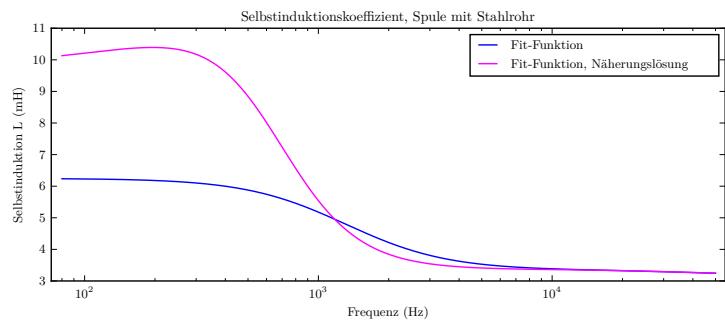


Abbildung 33: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

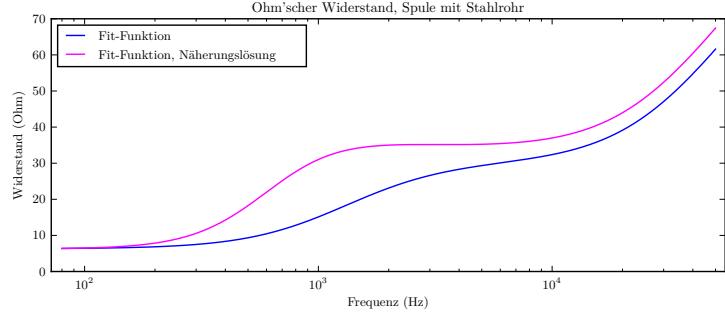


Abbildung 34: Änderung des Ohm'schen Widerstandes über Frequenz von Spule mit eingeführtem rostfreiem Stahl-Hohlzylinder

Auch beim Stahlrohr stellt man fest, dass die Näherung für numerische Problemfälle und die exakte Lösung in ähnlicher Manier wie beim Kupferrohr (siehe Anmerkungen auf Seite 25) übereinstimmen bzw. voneinander abweichen.

Tabelle 27: Parameterwerte für Fit-Funktion in Abbildung 35

| | |
|-----------|--|
| μ_0 | $1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ |
| σ | $1.25 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| d_{Sp} | $98 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_{Sp} | $49 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_1 | $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| r_2 | $35 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| l | $500 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| $NPTS$ | 1.00×10^3 |
| f_{min} | 80.0 Hz |
| f_{max} | $50.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ |

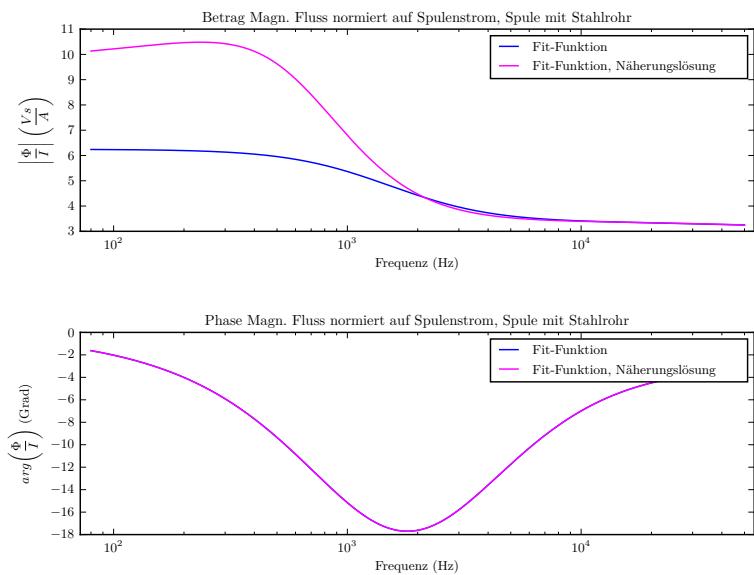


Abbildung 35: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten rostfreiem Stahl-Hohlzylinder. Beachte: Bei der Phase wurden in der Tat sowohl die exakte wie auch die genäherte für numerische Problemfälle Lösung geplottet, sie kommen einfach direkt übereinander zu liegen.

4 Fehlerrechnung

Auf eine ausführliche Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet, die Messtoleranzen des experimentellen Aufbaus und der Geräte wurden daher auch nicht erfasst.

Aus den unterschiedlichen Werten der Leitfähigkeiten können aber trotzdem Mittelwerte, Fehler und Standardabweichungen bestimmt werden.

Dazu wurden die gängigen Formeln benutzt; Tabelle 28 enthält eine Auflistung der Resultate. Es wurden sämtliche gemachten Fits berücksichtigt (also Näherungen und exakte Lösungen), die Berechnung erfolgte in einem Python-Script, das seine Werte aus den Scripts für die Fits erhält. Somit ist sichergestellt, dass zur Berechnung auch wirklich die Werte verwendet werden, mit welchen die Plots erstellt worden sind. Der L^AT_EX-Code für die Ergebnisse wurde ebenfalls aus diesem Script generiert, wie auch bei den Listings für die Fits.

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert: } \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ \text{absoluter Fehler: } s_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \\ \text{relativer Fehler: } r &= \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \\ \text{Standardabweichung: } s_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \end{aligned}$$

Tabelle 28: Mittelwerte, Fehler und Standardabweichung für die Leitfähigkeiten

| | |
|-----------------------------|---|
| $\bar{\sigma}_{Alu}$ | $21.03 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $s_{\bar{\sigma}_{Alu}}$ | $856.2 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $r_{\bar{\sigma}_{Alu}}$ | 40.71×10^{-3} |
| $sdev_{\bar{\sigma}_{Alu}}$ | $2.422 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\bar{\sigma}_{Cu}$ | $52.80 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $s_{\bar{\sigma}_{Cu}}$ | $200.0 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $r_{\bar{\sigma}_{Cu}}$ | 3.788×10^{-3} |
| $sdev_{\bar{\sigma}_{Cu}}$ | $447.2 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $\bar{\sigma}_{St}$ | $1.190 \times 10^6 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $s_{\bar{\sigma}_{St}}$ | $28.11 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| $r_{\bar{\sigma}_{St}}$ | 23.62×10^{-3} |
| $sdev_{\bar{\sigma}_{St}}$ | $62.85 \times 10^3 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |

Man könnte jetzt natürlich noch evaluieren, inwiefern die Berücksichtigung der Werte aus den Näherungen und den exakten Lösungen gerechtfertigt ist, oder ob allenfalls nur die Werte aus den exakten Lösungen zu berücksichtigen wären, oder ob beide jeweils mit einer Gewichtung berücksichtigt werden sollten.

Aus Zeitgründen wird hier auf diese Ausführungen verzichtet. Es sei jedoch angemerkt, dass keine der Näherungen extrem dramatisch von den Werten der exakten Lösungen abweicht. Wollte man wirklich penibel sein, wäre in den Augen des Autors sowieso eine "richtige" Fehlerrechnung mit Berücksichtigung der Unsicherheiten in Geräten und Versuchsaufbau durchzuführen.

Schlussendlich ist nicht das Erlangen exakttest-möglicher Zahlen das primäre Ziel dieses Versuches, sondern die Demonstration des Skineffektes und die experimentelle Bestätigung, dass Leitwerte für Materialien aus der Literatur nicht als absolut gegeben betrachtet werden sollten, oder zumindest ist dies die Ansicht des Autors. Beides ist in seinen Augen gut demonstriert worden.

5 Resultate und Diskussion

Da die Plots wie erwähnt den Hauptteil dieses Berichts ausmachen, sind die meisten Informationen und Schlussfolgerungen bereits im Kapitel *Auswertung* zu finden.

Es folgen hier noch eine Zusammenfassung der ermittelten Leitwerte sowie einige Anmerkungen zum Versuch allgemein.

5.1 Resultate Leitfähigkeit

Für das Material des Aluminium-Vollzyinders wurde folgende Leitfähigkeit ermittelt:

$$\sigma_{Alu} = \bar{\sigma}_{Alu} \pm s_{\bar{\sigma}_{Alu}} = (21.0 \pm 0.9) \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (21)$$

Wie man erkennen kann, weicht dieser Wert doch recht bedeutend vom Literaturwert ab.:

Leitfähigkeit Aluminium, Vergleich experimenteller Wert mit Literaturwert



Abbildung 36: Vergleich der experimentell bestimmten Leitfähigkeit für Aluminium mit dem Literaturwert aus Kuchlings *Taschenbuch der Physik* [5]

Beim Hohlzylinder aus Kupfer waren der experimentell ermittelte Wert und der Literaturwert doch einiges näher zusammen, auch wenn das Resultat des Experiments doch ein wenig kleiner ist als der Literaturwert:

$$\sigma_{Cu} = \bar{\sigma}_{Cu} \pm s_{\bar{\sigma}_{Cu}} = (52.8 \pm 0.2) \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (22)$$

Leitfähigkeit Kupfer, Vergleich experimenteller Wert mit Literaturwert

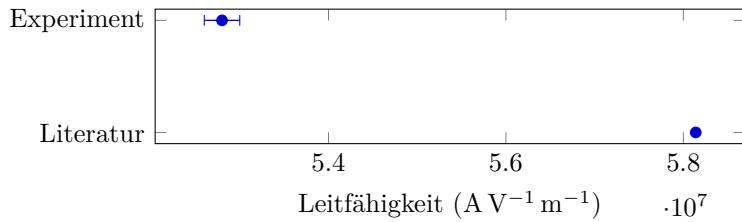


Abbildung 37: Vergleich der experimentell bestimmten Leitfähigkeit für Kupfer mit dem Literaturwert aus Kuchlings *Taschenbuch der Physik* [5]

Auch beim rostfreien Stahl liegen das Resultat des Versuches und der Referenzwert nicht allzu weit auseinander. Wie bereits bei der Auswertung und in Anhang C erläutert, wurden für den Referenzwert Angaben aus verschiedenen Quellen miteinander verrechnet.

$$\sigma_{St} = \bar{\sigma}_{St} \pm s_{\bar{\sigma}_{St}} = (1.19 \pm 0.03) \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (23)$$

Leitfähigkeit rostfreier Stahl, Vergleich experimenteller Wert mit Literaturwerten

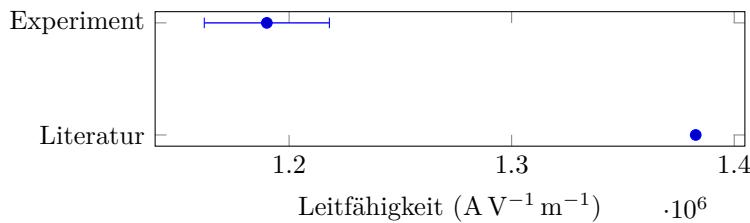


Abbildung 38: Vergleich der experimentell bestimmten Leitfähigkeit für rostfreien Stahl mit einem aus Literaturwerten bestimmten Wert (siehe Anhang C)

Man kann also erkennen, dass Leitwerte aus Tabellen mit Vorsicht zu geniessen sind, und dass die effektiven Leitwerte teilweise bedeutend kleiner ausfallen können als in der Literatur angegeben.

5.2 Was man noch machen könnte

Den Autor reizt es zugegebenermassen stark, das Fitten in Python zu automatisieren, anstatt von Hand auszuführen. Leider hat aber auch sein Arbeitstag lediglich 24 Stunden plus die Nacht, womit ein solches Vorhaben zumindest vorerst eine Träumerei bleiben muss.

Weiter könnte man noch den mathematischen Feinheiten nachgehen, welche hinter den in Abschnitten 3.4.2 ab Seite 24 respektive in Abschnitt 3.4.4 ab Seite 30 beobachteten Abweichungen zwischen den Näherungen für numerische Problemfälle und den exakten Lösungen stehen.

5.3 Persönliches Fazit

Wie am Umfang dieses Berichts zu erkennen ist, ist der Autor diesem Thema gegenüber sehr interessiert eingestellt, und alles in Allem hat diese Arbeit Spass gemacht.

Ein kleiner Verbesserungsvorschlag sei an dieser Stelle trotzdem noch gemacht: Besonders in der Vorbereitung hatte der Autor zeitweise ein wenig Mühge, den “roten Faden” der ganzen Geschichte zu sehen (welche Messungen sind durchzuführen, welche sind nicht durchzuführen, welche Auswertungen sind zu machen, welche nicht). Vielleicht könnte hier eine kurze Übersicht im Sinne einer TODO-Liste in der Versuchsanleitung Abhilfe schaffen, anhand derer man auf einen Blick erkennen kann, was zu tun ist, was nicht, und wo man mit seiner Arbeit steht.

Im Grossen und Ganzen aber wie gesagt ein interessanter Versuch, der gefallen hat.

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 11. November 2015.

Anhang A Stützpunkte

Wie auf Seite 27 erwähnt, wurden beim Plotten der Fitfunktion über einen erweiterten Frequenzbereich (genauer: von 80Hz bis 50kHz) die Grenzen der in der Versuchsanleitung gegebenen Funktion zur Generierung der Stützpunkte entdeckt (*Stützpunktformel A* in Abbildungen 39 und 40).

Es fiel auf, dass die Funktion bis in einen Bereich von mehreren MHz geplottet wurde, was natürlich unsinnig ist in diesem Zusammenhang. Ein genauerer Blick auf die Gleichung lieferte schnell die Erkenntnis, dass bei $f_{min} > 1$ und $f_{max} \gg f_{min}$ für $k \rightarrow NPTS$ gilt:

$$f_{k,A} = f_{min} \cdot \exp\left(\ln(f_{max} - f_{min})\right) \approx f_{min} \cdot f_{max}$$

Dies ergibt mit den beiden gewählten Frequenzen eine obere Frequenzgrenze, die um ungefähr einen Faktor 80 zu hoch ist.

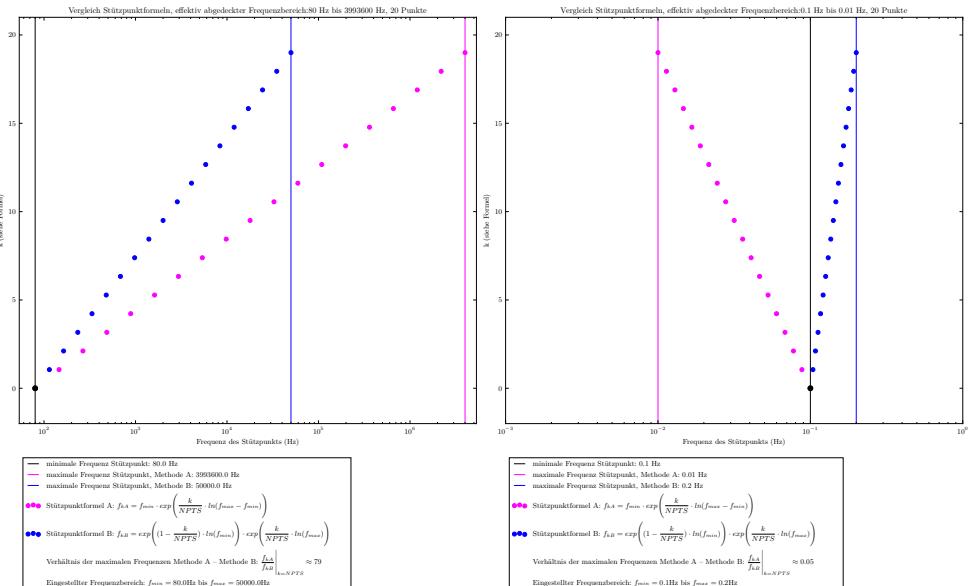
Durch die Methode des geschickten Ansatzes wurde nach etwas Tüfteln eine Formel gefunden, welche dieses Problem eliminiert (zumindest soweit der Autor erkennen kann):

$$f_{k,B} = \exp\left((1 - \frac{k}{NPTS}) \cdot \ln(f_{min})\right) \cdot \exp\left(\frac{k}{NPTS} \cdot \ln(f_{max})\right)$$

Sie kann auf eine Form vereinfacht werden, die sehr ähnlich zur ursprünglichen Formel ist:

$$f_{k,B} = f_{min} \cdot \exp\left(\frac{k}{NPTS} \cdot \ln\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)\right)$$

Aus Gründen der Anschauligkeit bevorzugt der Autor jedoch die längere Variante, da dort gut erkennbar ist, dass der Einfluss von f_{min} mit steigendem k sinkt und der Einfluss von f_{max} steigt. Schlussendlich ist die ursprüngliche Stützpunktformel natürlich für den im Versuch wirklich ausgemessenen Frequenzbereich absolut ausreichend, daher wurde sie auch in den meisten Berechnungen verwendet. Bei Interesse am Ausprobieren können die entsprechenden Python-Scripts benutzt werden, welche zur Erstellung der obigen Abbildungen dienten [4].



Anhang B Ohm'scher Widerstand des Drahtes der Spule

Zur Bestimmung des Ohm'schen Widerstandes der Konfiguration aus Spule und eingeführtem Zylinder (siehe Formeln auf Seite 4 und 2 in den Arbeitsgrundlagen sowie die entsprechenden Plots auf den Seiten 18 und 30) muss der Ohm'sche Widerstand des Spulendrahtes bestimmt werden. Dies kann man entweder messen, oder, wie in diesem Fall, mit einer kurzen Rechnung abschätzen.

Als Grundlage wird dabei der Referenzwert für Leitungskupfer aus Kuchlings *Taschenbuch der Physik* benutzt [5]:

$$\rho_{Cu\text{Leitung},Kuchling} = 0.0178 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$$

Zur Rekapitulation nochmals die Daten der Spule:

- $d_{Spule} = 98 \text{ mm}$ Innendurchmesser
- $d_{Draht} = 0.8 \text{ mm}$ Drahtdurchmesser
- $l_{Spule} = 500 \text{ mm}$ Länge
- $N_0 = 574$ Windungen

Daraus kann man Länge des Spulendrahts ausrechnen (den Drahtdurchmesser vernachlässigen wir beim Berechnen des Umfangs der Spulenwindung):

$$l_{Spulendraht} = \pi \cdot d_{Spule} \cdot N_0 \approx 177 \text{ m}$$

Womit man den Widerstand des Drahtes berechnen kann zu:

$$R_{Spulendraht} = l_{Spulendraht} \cdot \frac{4}{d_{Draht}^2 \cdot \pi} \cdot \rho_{Cu\text{Leitung},Kuchling} \approx 6.3 \Omega$$

Dies ist der Wert, welcher in den Berechnungen verwendet wurde.

Anhang C Literaturwerte für Ohm'schen Widerstand von rostfreiem Stahl

Wie im Abschnitt zur Messprobe aus rostfreiem Stahl auf Seite 26 erwähnt, gibt es sehr viele verschiedene Stahllegierungen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Um den Referenzwert für diese Messreihe einigermassen gut abzustützen, wurden daher Leitwerte aus verschiedenen Quellen ([6], [7] und [8]) miteinander verrechnet.

Die dabei benutzten Werte sind:

- Quelle [6]: $1.450 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $1.392 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ und $1.334 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Aus diesen drei Werten wurde der Mittelwert gebildet, was $1.392 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ lieferte.
- Quelle [7]: Der gegebene Wert ist $\rho_{Steel} = 72 \mu\Omega \text{ mm cm}^{-1}$, was man umrechnen kann zu $1.389 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (es wurde natürlich der Wert für 20°C benutzt).
- Quelle [8]): $\rho_{Stahlwerke} = 0.73 \mu\Omega \text{ mm m}^{-1}$, was umgerechnet werden kann zu $1.370 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Aus diesen drei Werten wurde dann der Mittelwert gebildet. Dies gewährleistet, dass jede Quelle gleich gewichtet wird, und nicht jeder Wert (eine Quelle mit mehr Werten ist ja nicht unbedingt verlässlicher).

Damit erhält man:

$$\sigma_{Ref,Steel} = 1.384 \text{ MA V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Anhang D Python-Code

Es folgt ein Auszug aus dem Quellcode eines der verwendeten Python-Scripts. Die Scripts sind alle ähnlich aufgebaut, daher soll hier ein Beispiel ausreichen. Für den vollständigen Code betrachte man die Scripts.

```

1 # ****
2 # EXAMPLE FILE FOR APPENDIX OF LATEX. THIS FILE IS NOT FUNCIONAL!
3 # ****
4
5 # ****
6 # Magnetic field inside copper coil with massive alu cylinder
7 # ****
8
9 # All values are in standard SI units unless otherwise noted.
10
11 # -----
12 # Define Variables and Constants
13 #
14 mu0      = 4*pi*1e-7
15 rho_kuchling = 0.027e-6
16 sigma_kuchling = 1/rho_kuchling
17 sigma_abs   = 24e6
18 sigma_arg    = 22.25e6
19 r          = 0
20 r0         = 45e-3
21 B0         = 6.9e-2
22 npts       = 1e3
23 fmin       = 1
24 fmax       = 250
25
26 #... LaTeX export stuff ...
27
28 #... Plot Configuration ...
29
30 # -----
31 # Functions
32 #
33 # NOTE: We use frequency f instead of angular frequency #
34 # omega since that is what we actually set on the function #
35 # generator.
36 # NOTE: We evaluate B_abs and B_arg based on two different #
37 # values for sigma, which allows to fit each of the curves #
38 # more accurately.
39 #
40
41 k_abs = lambda f: sqrt((2*np.pi*f*mu0*sigma_abs)/2)*(mpc(1,-1))
42 k_arg = lambda f: sqrt((2*np.pi*f*mu0*sigma_arg)/2)*(mpc(1,-1))
43
44 enum_abs  = lambda f: besselj(0,k_abs(f)*r)
45 denom_abs = lambda f: besselj(0,k_abs(f)*r0)
46 enum_arg  = lambda f: besselj(0,k_arg(f)*r)
47 denom_arg = lambda f: besselj(0,k_arg(f)*r0)
48
49 B_abs = lambda f: abs(enum_abs(f) / denom_abs(f) * B0)
50 B_arg = lambda f: arg(enum_arg(f) / denom_arg(f) * B0)
51
52 # -----

```

```

53 # Generate points for frequency axis                      #
54 # -----
55 n          = np.linspace(0,npts,npts)
56 expufunc   = np.frompyfunc(exp,1,1)
57 frequency_vector = fmin*expufunc(n*log(fmax-fmin)/npts)
58
59 # -----
60 # Numerically evaluate functions                      #
61 # -----
62 Babsufunc = np.frompyfunc(B_abs,1,1)
63 B_abs_num = Babsufunc(frequency_vector)
64 Bargufunc = np.frompyfunc(B_arg,1,1)
65 B_arg_num = Bargufunc(frequency_vector)
66
67 # -----
68 # The arg() function only gives values between -pi and +pi #
69 # for the angle of a complex number.                         #
70 # -----
71 B_arg_num = np.unwrap(B_arg_num)
72
73 # -----
74 # Measurement Values from the actual experiment        #
75 # -----
76 frequencies_measured = np.array([    1,      5,    #... etc ...# ])
77 phases_degrees     = np.array([ 5.4,    26,    #... etc ...# ])
78 voltages          = np.array([6.9e-2,6.5e-2,    #... etc ...# ])
79
80 # -----
81 # Plot the Things                                     #
82 # -----
83 fig    = figure(1)
84 axes1 = fig.add_subplot(211)
85 axes1.plot(frequency_vector,B_abs_num,color=plot_color_fit,label=plot_label_fit)
86 axes1.scatter(frequencies_measured,
87                 voltages,
88                 color=plot_color_measurements,
89                 s=plot_size_measurements,
90                 label=plot_label_measurements
91             )
92 axes1.set_xlim([fmin*0.9,fmax*1.1])
93 axes1.set_xscale(plot_scale_x)
94 axes1.set_xlabel(plot_label_x,fontdict=font)
95 axes1.set_ylabel(plot_1_label_y,fontdict=font)
96 axes1.set_title(plot_1_title,fontdict=titlefont)
97 axes1.legend(fontsize=plot_legend_fontsize)
98 axes1.tick_params(labelsize=9)
99
100 #... second plot analogous ...#
101
102 fig.savefig('plots-pgf/massive--alu--freq.pgf')
103 fig.savefig('plots-pdf/massive--alu--freq.pdf')
104
105 #... save listing to LaTeX file for automated inclusion ...#
106
107 #... save results to txt file for error analysis ... #

```

Anhang E Messprotokolle

Versuch / Probe: Alum. Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

Shunt: 1-2

Anfangen bei $r = 25\text{ mm}$ (Position der Sonde)

Maxim. Frequenz = 450 Hz = konstant

| Radius [mm] | Phasenversch. [$^{\circ}$] | A [V] | | | |
|-------------|------------------------------|---------|--|--|--|
| 25 | 215 | 1,5E-3 | | | |
| 27,5 | 183 | 2,2E-3 | | | |
| 30 | 152 | 3,6E-3 | | | |
| 32,5 | 125 | 5,9E-3 | | | |
| 35 | 100 | 9,5E-3 | | | |
| 37,5 | 73 | 1,55E-2 | | | |
| 40 | 47 | 2,5E-2 | | | |
| 42,5 | 24 | 3,9E-2 | | | |
| 45 | 5,2 | 5,5E-2 | | | |
| 47,5 | 0,2 | 5,75E-2 | | | |
| 50 | 0 | 3,8E-2 | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Kupferrohr gross

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen: Kupferrohr gross

Shunt: 1-2

Sonde in Mitte

von Tige
gewichtet
A [V]von Tige
gewichtet

| Freq. [Hz] | Phasen- versch. [$^{\circ}$] | A [V] | V_{Shunt} [V] | I_{eing} [mA] | Phasen- versch. [$^{\circ}$] |
|------------|-----------------------------------|---------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1 | 2,0229 | 6,775E-2 | 1,953E-1 | 7E-2 | 2 |
| 10 | 19,246 | 6,614E-2 | 2,000E-1 | 6,6E-2 | 19,2 |
| 20 | 35,426 | 5,795E-2 | 2,000E-1 | 5,78E-2 | 35,4 |
| 40 | 56,718 | 4,176E-2 | 2,003E-1 | 4,18E-2 | 56,7 |
| 80 | 76,906 | 2,456E-2 | 2,000E-1 | 2,44E-2 | 76,7 |
| 120 | 86,834 | 1,694E-2 | 2,001E-1 | 1,69E-2 | 87 |
| 160 | 93,861 | 1,274E-2 | 2,001E-1 | 1,27E-2 | 94 |
| 200 | 99,467 | 1,008E-2 | 2,000E-1 | 1E-2 | 100 |
| 400 | 122,28 | 4,646E-3 | 2,000E-1 | 4,8E-3 | 121 |
| 600 | 137,61 | 2,829E-3 | 2,1997E-1 | 2,9E-3 | 140 |
| 800 | 155,45 | 2,038E-3 | 2,005E-1 | 1,9E-3 | 155 |
| 1000 | 168,64 | 1,529E-3 | 2,002E-1 | 1,4E-3 | 170 |
| 1200 | 186,16 | 1,074E-3 | 2,000E-1 | 1E-3 | 180 |
| 1500 | 200 | 1,999E-3 | 1,999E-1 | 7E-4 | 200 |

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Aluminium Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

$$V_{Shunt} = 2E-1 \text{ V} = \text{konstant}$$

Shunt 1:2

Sonde in der Mitte

| Freq [Hz] | Phasenversch [°] | A [V] | Freq [Hz] | Phasenversch [°] | A [V] |
|-----------|------------------|---------|-----------|------------------|----------|
| 1 | 5,4 | 6,9 E-2 | 5 | 26 | 6,5 E-2 |
| 10 | 50 | 5,7 E-2 | 15 | 69 | 4,8 E-2 |
| 20 | 85 | 4 E-2 | 30 | 111 | 2,85 E-2 |
| 40 | 132 | 2,1 E-2 | 60 | 166 | 1,25 E-2 |
| 80 | 16196 | 8 E-3 | 100 | 220 | 5,4 E-3 |
| 120 | 243 | 3,6 E-3 | | | |
| 160 | 283 | 1,9 E-3 | | | |
| 200 | 320 | 1 E-3 | | | |
| 250 | 350 | 6 E-4 | | | |
| 600 | | | | | |
| 800 | | | | | |
| 1000 | | | | | |
| 1200 | | | | | |
| 1500 | | | | | |

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe: Rostfreier Stahl gross

Datum: 21. 10. 15

Parameter / Einstellungen:

Shunt 1 Ω

Sonde in Mitte

konst auf
 $f = 2 \times 10^{-1}$

| Freq [Hz] | Phasenversch [°] | A [V] | V _{shunt} [V] | Freq [Hz] | Phasenversch [°] | A [V] |
|-----------|------------------|---------|------------------------|-----------|------------------|-------|
| 1 | 0 | 6,96E-2 | | | | |
| 10 | 0,45 | 6,97E-2 | 4800 | | | |
| 20 | 10,35 | 6,97E-2 | 1750 | 54 | 4,1E-2 | |
| 40 | 1,8 | 6,97E-2 | 2000 | 58 | 3,72E-2 | |
| 80 | 3,6 | 6,92E-2 | 2500 | 64 | 3,2E-2 | |
| 120 | 5,4 | 6,91E-2 | 3500 | 71 | 2,4E-2 | |
| 160 | 7,2 | 6,87E-2 | 5000 | 78 | 1,8E-2 | |
| 200 | 9 | 6,87E-2 | 7500 | 88 | 1,2E-2 | |
| 400 | 17,5 | 6,62E-2 | * | | | |
| 600 | 25,4 | 6,27E-2 | | | | |
| 800 | 32,4 | 5,9E-2 | | | | |
| 1000 | 38,4 | 5,45E-2 | | | | |
| 1200 | 43,5 | 5,05E-2 | | | | |
| 1500 | 50 | 4,5E-2 | | | | |

Beobachtungen/Bemerkungen:

* Obenhalb dieser Frequenz: Nicht möglich,
Spulenstrom konstant bei Zoomed zu
halten.

Versuch / Probe: Alum. Vollzylinder

Datum: 21.10.15

Parameter / Einstellungen:

Shunt: 1-2

Radius $\hat{=}$ Position der Sonde

Freq = 30 Hz = konstant

$$V_{shunt} = 2 \text{ E-1 V} = \text{konstant}$$

Zylinder:
 $\phi_{\text{innen}} = 38 \text{ mm}$
 $\phi_{\text{draht}} = 0,8 \text{ mm}$

| Radius [mm] | Phasenversch. [°] | A [V] | | | |
|-------------|-------------------|---------|--|--|--|
| 0 | 111 | 2,86E-2 | | | |
| 5 | 109 | 2,85E-2 | | | |
| 10 | 104 | 2,87E-2 | | | |
| 15 | 94 | 2,9E-2 | | | |
| 20 | 81 | 3E-2 | | | |
| 25 | 65 | 3,3E-2 | | | |
| 30 | 48,5 | 3,8E-2 | | | |
| 35 | 32 | 4,5E-2 | | | |
| 40 | 16 | 5,4E-2 | | | |
| 45 | 2,7 | 6,2E-2 | | | |
| 50 | 0 | 3,7E-2 | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Beobachtungen/Bemerkungen:

Literatur

- [1] Lenz'sche Regel. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel [Stand: 02. November 2015].
- [2] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt*. Windisch: FHNW Aargau, 2015.
- [3] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [Stand: 02. Oktober 2015].
- [4] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: <https://github.com/alpenwasser/laborjournal> [Stand: 19. Oktober 2015].
- [5] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, 17. Aufl. München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2001, S. 649.
- [6] G. Elert. Resistivity of Steel. Hypertextbook.com. [Online]. Verfügbar: <http://hypertextbook.com/facts/2006/UmranUgur.shtml> [Stand: 08. November 2015].
- [7] Datasheet – 304/304L Stainless Steel. AK Steel Corporation. [Online]. Verfügbar: http://www.aksteel.com/pdf/markets_products/stainless/austenitic/304_304L_Data_Sheet.pdf [Stand: 08. November 2015].
- [8] Datenblatt – Nichtrostender austenitischer Stahl. Deutsche Edelstahlwerke. [Online]. Verfügbar: http://www.dew-stahl.com/fileadmin/files/dew-stahl.com/documents/Publikationen/Werkstoffdatenblaetter/RSH/1.4301_de.pdf [Stand: 08. November 2015].