E11 – Skineffekt

6. November 2015

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Jeffrey Gantner

Inhaltsverzeichnis

Versionsgeschichte

6. November 2015 `Version 1`

1 Arbeitsgrundlagen

Dieses Kapitel behandelt in Kurzform die wichtigsten Grundlagen, welche zum Verständnis des Versuches erforderlich sind. Die detaillierten Herleitungen sind in der Versuchsanleitung zu finden [1].

1.1 Grundidee

Hochfrequente Wechselströme haben die Eigenschaft, dass sie v.a. an der Oberfläche eines Leiters fliessen und nicht tief in den Leiter eindringen. Dieses als *Skineffekt* bekannte Phänomen soll in diesem Versuch experimentell nachgewiesen werden.

Wird ein Leiter in ein wechselndes Magnetfeld eingeführt, werden in ihm Wirbelströme induziert. Ist die Frequenz des externen Magnetfelds niedrig, verteilen sich diese Wirbelströme auf den gesamten Querschnitt (wenn auch nicht gleichmässig). Wird die Frequenz des externen Magnetfelds erhöht, so verlagern sich die Wirbelströme in den Oberflächenbereich des Leiters. Da sie der Änderung des externen Feldes gemäss der Lenz'schen Regel [2] entgegenwirken, schwächen sie im Innern des Leiters das externe Feld ab, es gibt einen Abschirmeffekt. Je höher die Frequenz des externen Feldes, um so ausgeprägter ist diese Abschirmung.

Als Versuchsobjekte dienen die Fälle eines eingeführten Hohlzylinders und eines eingeführten Vollzylinders. Es werden sowohl gängige Näherungen wie auch die exakten Lösungen aus der Theorie mit den Messergebnissen verglichen.

Es sei hier noch angemerkt, dass auch der Selbstinduktionskoeffizient L sowie der Ohm'sche Widerstand R der Konfiguration aus Spule und eingeführtem Leiter verändert werden. Aus Zeitgründen wurde dieses Verhalten in diesem Versuch nicht gemessen, jedoch werden in Abschnit trotzdem einige Schlussfolgerungen aus den erfassten Daten gezogen.

1.2 Vollzylinder

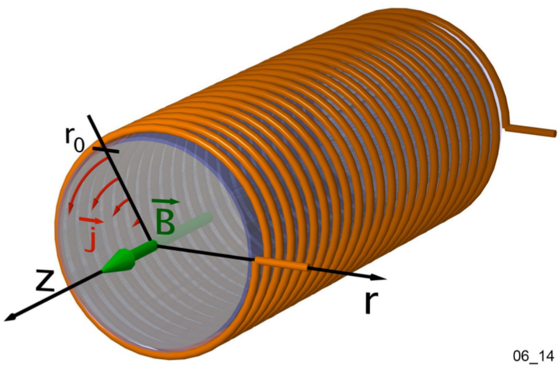


Abbildung 1: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

1.2.1 B-Feld, exakte Lösung

Die exakte Beschreibung des Magnetfelds innerhalb des Leiters ist die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$0 = r^2 \cdot \hat{B}''(r) + r \cdot \hat{B}'(r) - i \cdot \omega\mu_0\sigma \cdot r^2 \cdot \hat{B}(r) \tag{1}$$

wobei:

r: Distanz zu Zylinderachse
$\hat{B}$: gemessenes Magnetfeld im Innern des Leiters (komplexe Grösse)
ω: Kreisfrequenz des äusseren Magnetfeldes
σ: spezifische Leitfähigkeit des eingeführten Leiters

Die Lösung dieser Differentialgleichung (gültig für beliebige Frequenzen und Positionen) ist:

$$\hat{B}(r) = \frac{J_0(k \cdot r)}{J_0(k \cdot r_0)} \cdot \hat{B}_0, \tag{2}$$

wobei

$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}{2}} \cdot (1 - i)$
r_0: Radius des eingeführten Zylinders
$\hat{B}_0$: Äusseres Magnetfeld (erzeugt von Zylinderspule)
$J_0(z)$: Besselfunktion erster Art (siehe auch [3])

Beachte: $\hat{B}(r)$ ist eine komplexe Zahl!

1.2.2 B-Feld, Hochfrequenznäherung

Im Falle hoher Frequenzen kann man folgende Näherung verwenden:

$$\hat{B}(x) = \hat{B}_0 \cdot exp\left(-\frac{x}{s_{skin}}\right) \cdot exp\left(-i \cdot \frac{x}{s_{skin}}\right) \tag{3}$$

wobei

$s_{skin} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$
Die Lösung brauchbar ist für $s_{skin} << r_0$.

1.2.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

Der Selbstinduktionskoeffizient der Konfiguration aus Spule und Leiter ergibt:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot Re\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + L_{Rand} \tag{4}$$

wobei

l: Länge der Zylinderspule
N_0: Anzahl Windungen der Zylinderspule
$L_{Rand} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot (r_{Sp} - r_0) \cdot N_0^2}{l}$ mit r_{Sp}: Radius Zylinderspule

Der Ohm'sche Widerstand errechnet sich zu:

$$R_{\Omega,tot} = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot Im\left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)}\right) + R_{\Omega,0} \tag{5}$$

Wobei $R_{\Omega,0}$ der Ohm'sche Widerstand der Zylinderspule ist (also des Drahts, aus dem die Spule konstruiert ist).

Letztlich noch der auf den Spulenstrom normierten magnetischen Fluss:

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot N_0^2}{l} \cdot \left(\frac{J_1(k \cdot r_0)}{k \cdot J_0(k \cdot r_0)} + r_{Sp} - r_0 \right) \tag{6}$$

Auch für diese Werte gibt es Näherungslösungen. Da aber bei der Durchführung des Versuches das Gewicht auf das B-Feld gelegt wurde, wird an dieser Stelle nicht weiter auf diese eingegangen. Näherungen sind primär interessant beim Vergleich mit Messwerten und Beobachtungen; das Vergleichen einiger Kurven basierend auf Gleichungen ohne Referenzwerte aus dem Labor ist in den Augen des Autors weniger aufschlussreich und wird daher weggelassen, um diesen Bericht in seinem Umfang nicht allzu sehr wachsen zu lassen.

1.3 Hohlzylinder

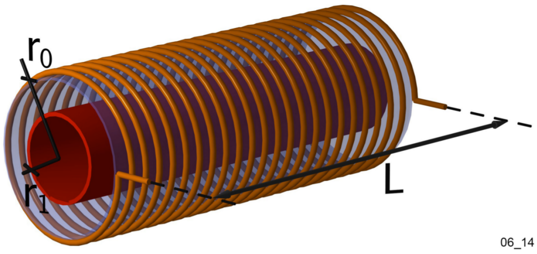


Abbildung 2: Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

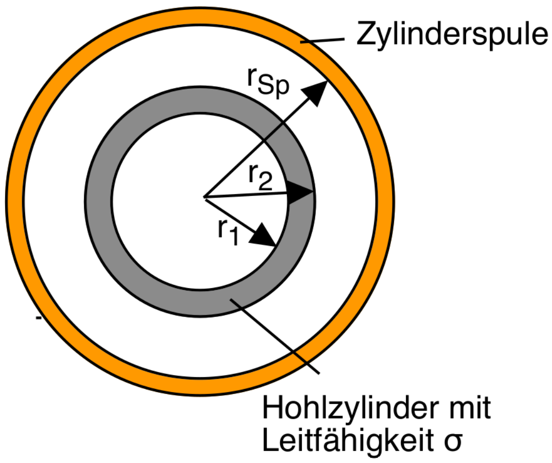


Abbildung 3: Spule mit Hohlzylinder, Querschnitt *Quelle:* Skript zum Versuch [1]

1.3.1 B-Feld, exakte Lösung

$$0 \leq r \leq r_1 : \hat{B}(r) = \hat{B}(r_1) = konst. \tag{7}$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 : \hat{B}(r) = \frac{J_{0,r} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0 \tag{8}$$

$$r_2 \leq r \leq r_{Sp} : \hat{B}(r) = \hat{B}_0 = konst. \tag{9}$$

Mit $J_{0,r_i} = J_0(k \cdot r_i)$ und k gemäss Abschnitt zum Vollzylinder.

1.3.2 B-Feld, Näherungslösung niedrige Frequenzen

Solange die Wandstärke kleiner ist als die Eindringtiefe s_{skin}, kann das Rohr als dünnwanding betrachtet und folgende Formel verwendet werden:

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right) \tag{10}$$

wobei:

r_1: mittlerer Radius des Metallrohrs
d: Wandstärke des Metallrohrs

1.3.3 Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand, exakte Lösung

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\ &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\ &+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\ &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right)\end{aligned} \tag{11}$$

$$L = Re\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) \tag{12}$$

$$R = -\omega \cdot Im\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) + R_{\Omega,0} \tag{13}$$

2 Durchführung

In diesem Kapitel wird die Durchführung des Versuches beschrieben.

2.1 Versuchsanordnung

2.2 Versuchsablauf

2.2.1 Hohlzylinder

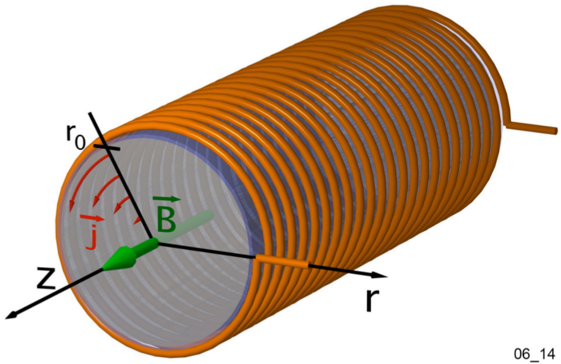


Abbildung 4: Spule mit Vollzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

2.2.2 Vollzylinder

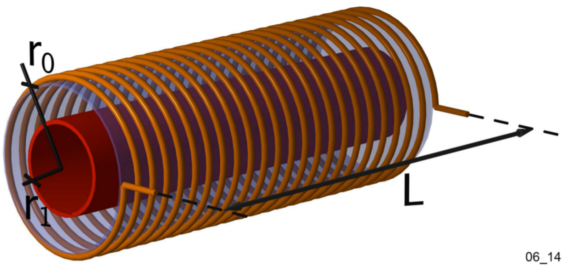


Abbildung 5: Spule mit Hohlzylinder *Quelle:* Skript zum Versuch

3 Auswertung

Anmerkung zu den Messprotokollen: Sämtliche Messwerte wurden nach bestem Wissen und Gewissen zeitlich gefühlsmässig gemittelt von den Messinstrumenten abgelesen. Daher ist die Anzahl angegebener Stellen nicht immer konsistent.

3.1 Methodik

Wie im Abschnitt zu den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, werden die betrachteten Grössen durch komplexwertige Funktionen beschrieben (bzw. deren Betrag und Phase). Da *QtiPlot* für solche Funktionen keine Fits erstellen kann, ist hier eine alternative Vorgehensweise gefragt, nämlich müssen die Funktionen von Hand programmiert und gefittet werden (sowohl an die Messpunkte für Phase und Betrag des B-Feldes). Die Fitfunktion wird dabei optisch an die Messpunkte angepasst, nicht mit strikten mathematischen Methoden.

Zur Umsetzung dieses Vorgehens bieten sich diverse Tools an; der Autor hat sich hier aus Gründen der persönlichen Präferenz für Python entschieden (Matlab wäre auch eine Variante).

3.1.1 Vorgehen Manuelles Fitting

Im Allgemeinen wurde dabei folgendermassen vorgegangen:

- Es gibt zwei Parameter, an denen geschraubt werden kann:
  - Die Leitfähigkeit σ des Materials, aus dem der eingeführte Zylinder besteht,
  - und den Betrag $|B_0|$ des äusseren Magnetfelds, welches von der Spule ausgeht.
- Da die Phase des B-Felds im Leiter nicht von $|B_0|$ abhängt (ersichtlich aus Gleichung 2 auf Seite 2 sowie Gleichung 7 auf Seite 3), bietet es sich an, zuerst durch Anpassen von σ einen Fit für die Messpunkte der Phase zu erstellen.
- Ist dies gelungen, kann man mittels Tunen von $|B_0|$ die Kurve für die Messpunkte von $|\hat{B}|$ anpassen.
- Abschliessend kann man noch iterativ optimieren, bis die Fitfunktion den Verlauf der Messpunkte optisch zufriedenstellend repräsentiert.

Für die genaue algorithmische Implementierung sei hier auf den Python-Quellcode verwiesen.

3.1.2 Listings

Die Listings mit den Parametern, welche zum Erstellen eines bestimmten Plots benutzt worden sind, sind in Tabellen in der Nähe der zugehörigen Plots aufgeführt.

Die Werte werden direkt von den Python-Scripts in `*.tex`-Files geschrieben und in dieses Dokument integriert. Dies garantiert, dass die Plots und die aufgesisteten Parameter übereinstimmen; Tippfehler beim Abschreiben der Werte werden vermieden (und es erspart Arbeit).

Die Werte in den Tabellen sind jeweils gerundet, Python arbeitet natürlich mit viel mehr Dezimalstellen. Die Werte sind in ihrer vollen Präzision im LaTeX-Quellcode zu finden [4].

3.2 Vollzylinder

3.2.1 Frequenzgang

Die Messdaten für den Frequenzgang des B-Felds in einem Vollzylinder sind in Tabelle 1 zu sehen.

Tabelle 1: Vollzylinder aus Aluminium, frequenzabhängig

Frequenz (Hz)	Phase (°)	Amplitude (mV)	Frequenz (Hz)	Phasen (°)	Amplitude (mV)
1	5.4	69	60	166	12.5
5	26	65	80	196	8
10	50	57	100	220	5.4
15	69	48	120	243	3.6
20	85	40	160	283	1.9
30	111	28.5	200	320	1
40	132	21	250	350	0.6

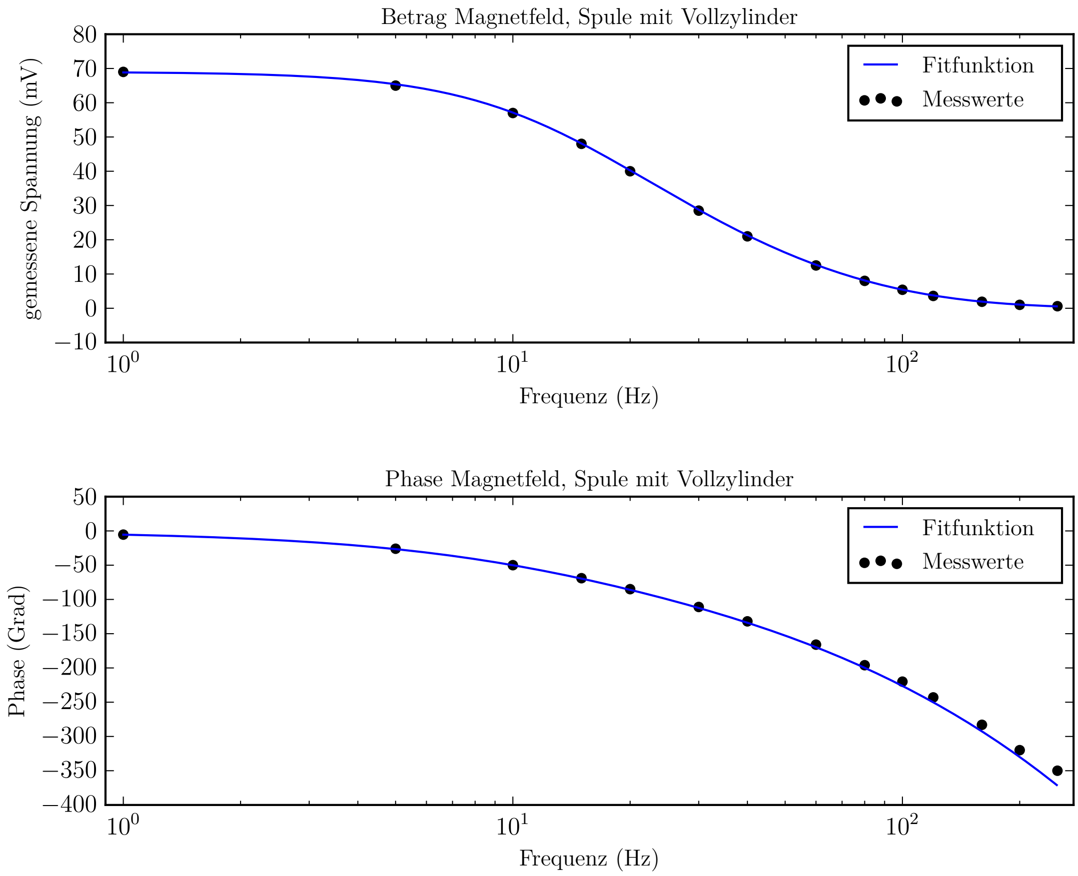


Abbildung 6: Frequenzgang Zylinderspule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 2: Paramterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Vollzylinder aus Aluminum. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$24 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$250\,\mathrm{Hz}$

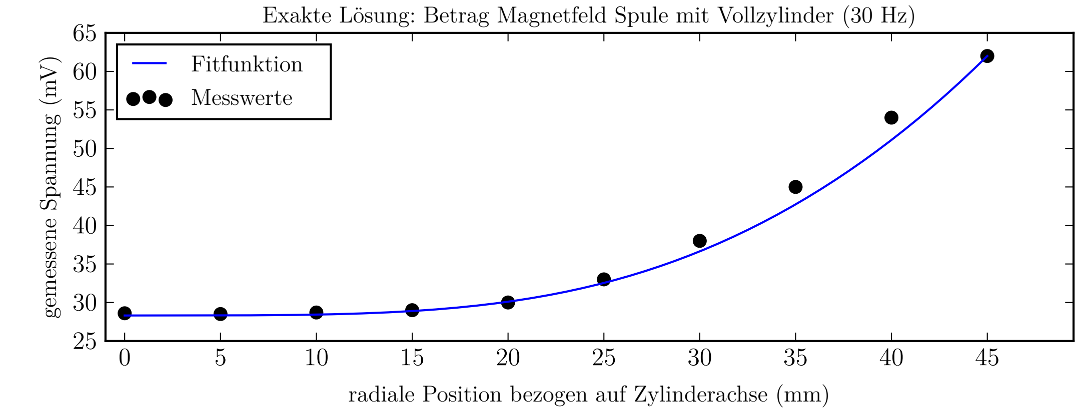
3.2.2 Positionsbezogener Verlauf, niedrige Frequenz

In dieser Messreihe wurde die Frequenz konstant gehalten (30 Hz), und die Position der Messsonde wurde radial variiert zwischen Zylinderachse und Aussenrand. Der Skineffekt ist hierbei sichtbar, aber verglichen mit höheren Frequenzen (siehe Abschnitt 3.2.3, p.12) merklich schwächer ausgeprägt.

Der letzte Messpunkt war nicht mehr innerhalb des Zylinders und wurde deshalb nicht im Plot berücksichtigt, da er für die Fitfunktion nicht relevant ist.

Tabelle 3: Vollzylinder aus Aluminium, 30 Hz

Radius (mm)	Phase (°)	Amplitude (mV)	Radius (mm)	Phase (°)	Amplitude (mV)
0	111	28.6	30	48.5	38
5	109	28.5	35	32	45
10	104	28.7	40	16	54
15	94	29	45	2.7	62
20	81	30	50	0	37
25	65	33			



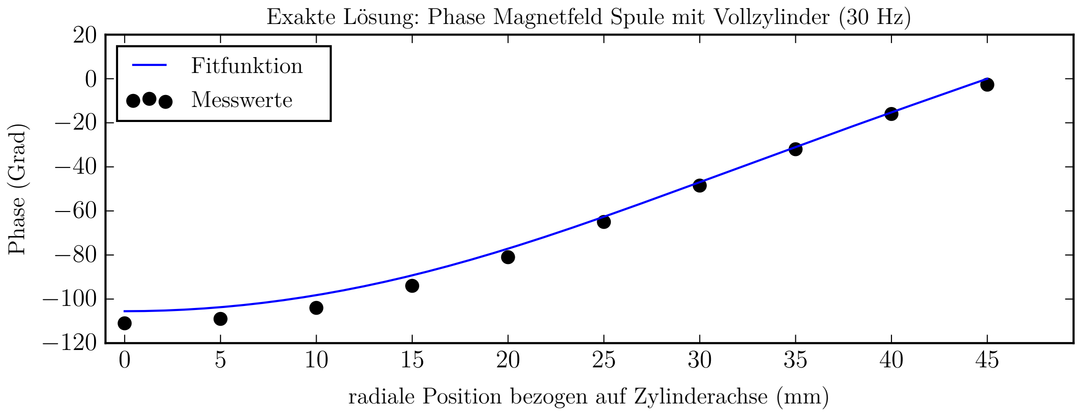
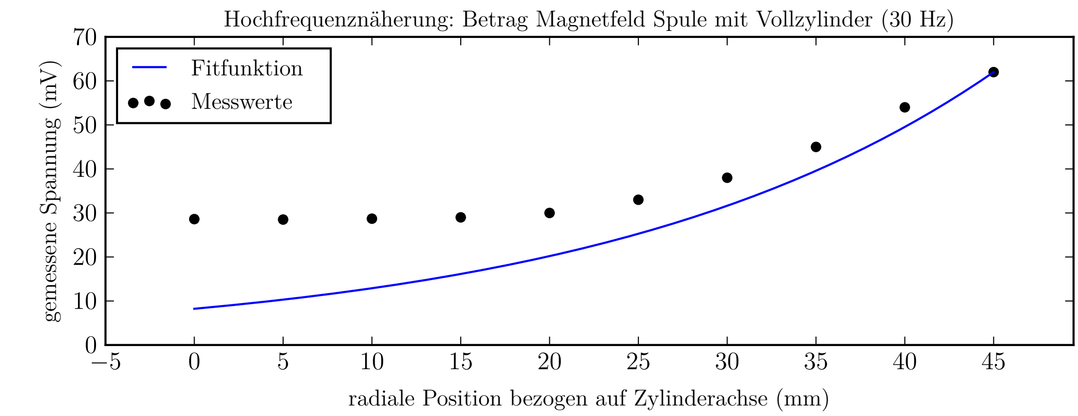


Abbildung 7: Radialer Verlauf des B-Feldes bei einer Frequenz von 30 Hz

Tabelle 4: Fitfunktion basierend auf exakter Lösung für die radialen Verläufe von Betrag und Phase des B-Feldes innerhalb eines Vollzylinders (Aluminium) eingeführt in eine Zylinderspule bei 30 Hz (niedriger Frequenzbereich). Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$22 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{min}	$0\,\mathrm{m}$
B_0	$62 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f	$30\,\mathrm{Hz}$

Aus Neugier wurde ebenfalls noch die Hochfrequenznäherung auf den radialen Verlauf bei 30 Hz angewandt, und wenig überraschend stellte sich die Methode in der Tat als ungeeignet dar für diesen Frequenzbereich. Aber es darf in den Augen des Autors ruhig auch mal verifiziert werden, dass eine Herangewensweise tatsächlich nicht funktioniert, statt stets nur positive Resultate zu verifizieren.



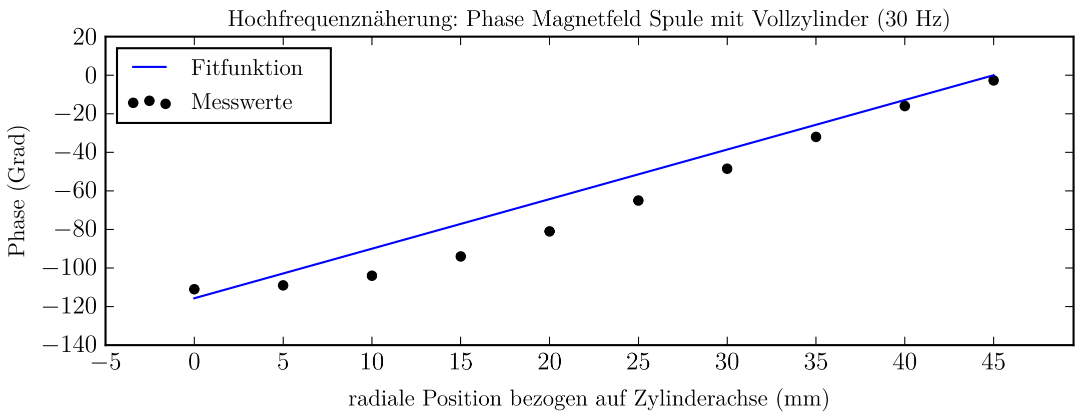


Abbildung 8: Hochfrequenznäherung für den radialen Verlauf des Be-Feldes angewandt auf 30 Hz. Wie an der starken Abweichung zwischen Fit und Messpunkten erkennt werden kann, ist diese Funktion in der Tat für diesen Frequenzbereich ungeeignet, um den radialen Verlauf des B-Feldes darzustellen.

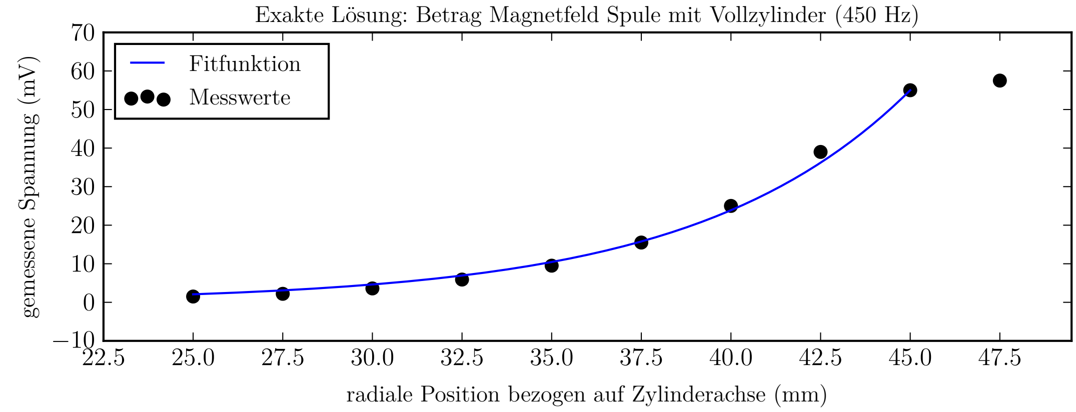
Tabelle 5: Paramaterwerte für Fitfunktion basierend auf der Näherungslösung für hohe Frequenzen, ausgewertet für 30 Hz (also eine tiefe Frequenz. Dargestellt sind die radialen Verläufe von Betrag und Phase des B-Feldes innerhalb eines Vollzylinders (Aluminium) eingeführt in eine Zylinderspule. Es ist gut ersichtlich, dass die Hochfrequenzlösung hier in der Tat kein zufriedenstellendes Resultat liefert. Die Leitfähigkeit σ wurde für diesen Plot so angepasst, dass der äusserste Messpunkt stimmt. Dies ist jedoch willkürlich, und unabhängig von der Justierung von σ und B_0 wird niemals eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Fitkurve und Messwerten festgestellt (was ja auch zu erwarten ist). Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$17 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{min}	$0\,\mathrm{m}$
B_0	$62 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f	$30\,\mathrm{Hz}$

Tabelle 6: Vollzylinder aus Aluminium, 450 Hz

Radius (mm)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)
25	215	1.5
27.5	183	2.2
30	152	3.6
32.5	125	5.9
35	100	9.5
37.5	73	15.5
40	47	25
42.5	24	39
45	5.2	55
47.5	0.2	57.5
50	0	38

3.2.3 Hohe Frequenzen



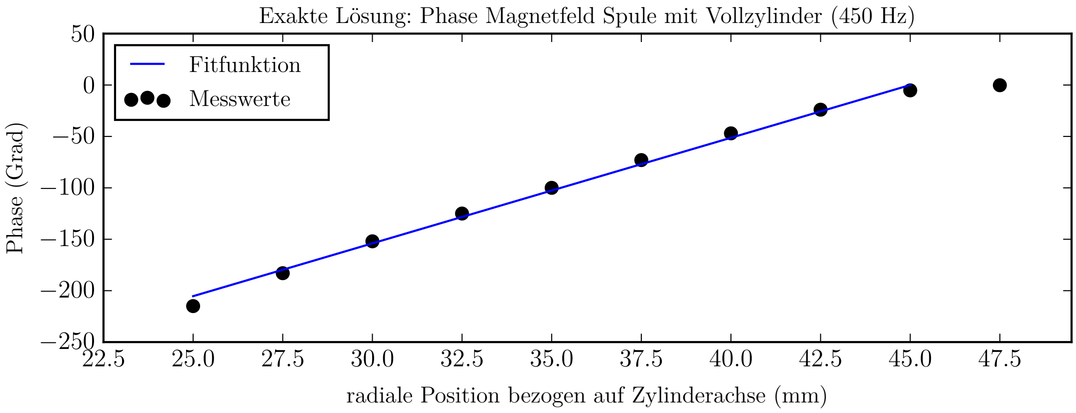
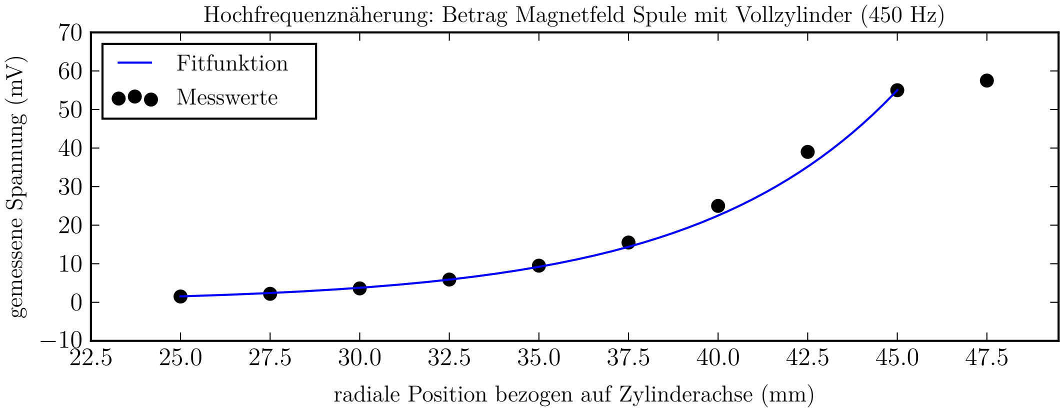


Tabelle 7: Fitfunktion basierend auf exakter Lösung für die radialen Verläufe von Betrag und Phase des B-Feldes innerhalb eines Vollzylinders (Aluminium) eingeführt in eine Zylinderspule bei 450 Hz (hoher Frequenzbereich). Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$18 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$55 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f	$450\,\mathrm{Hz}$



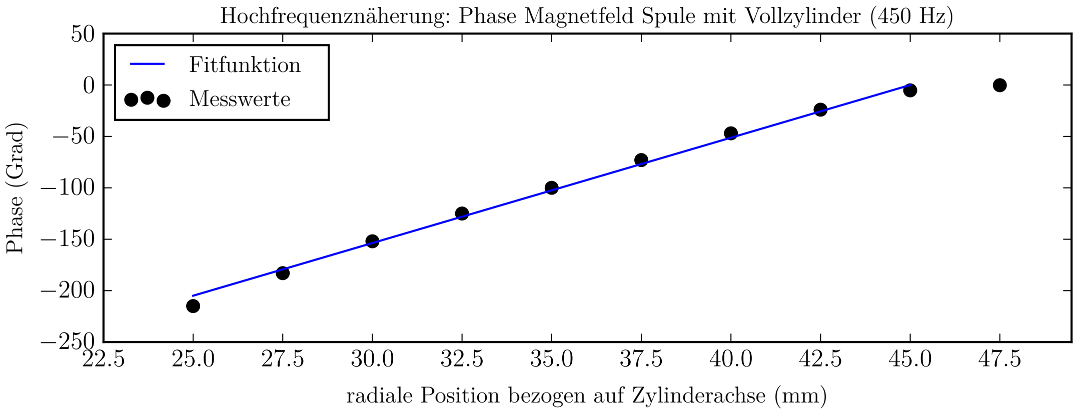


Tabelle 8: Paramaterwerte für Fitfunktion basierend auf der Näherungslösung für hohe Frequenzen. Dargestellt sind die radialen Verläufe von Betrag und Phase des B-Feldes innerhalb eines Vollzylinders (Aluminium) eingeführt in eine Zylinderspule. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$18 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{max}	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{min}	$25 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$55 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f	$450\,\mathrm{Hz}$

3.2.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie erwähnt, wurden keine direkten Messungen von $L_{Spule+Zylinder}$ und $R_{Spule+Zylinder}$ durchgeführt. Mit den Informationen aus den Fits (also primär der dort bestimmten Leitfähgiekt) können jedoch trotztem Plots erstellt werden.

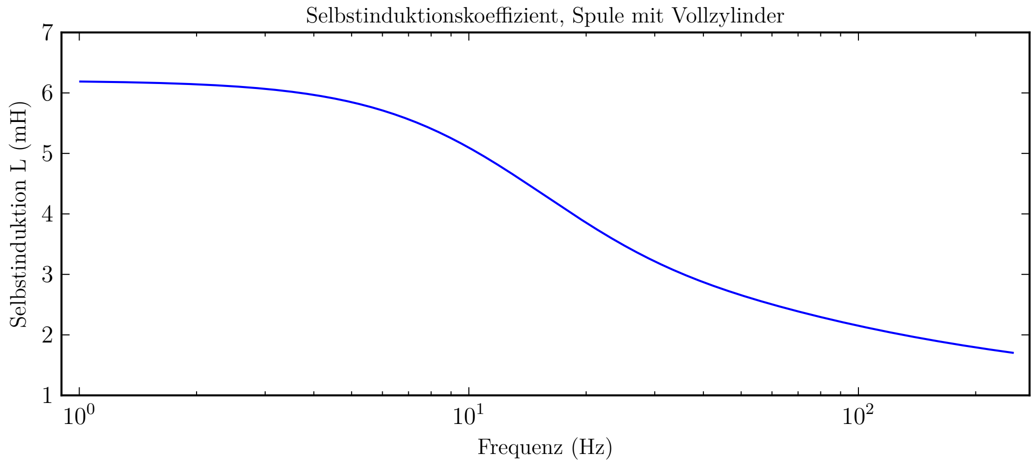


Abbildung 9: Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 9: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 9, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$24 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
N_0	570
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$250\,\mathrm{Hz}$

Tabelle 10: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 10, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$24 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
N_0	570
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$250\,\mathrm{Hz}$

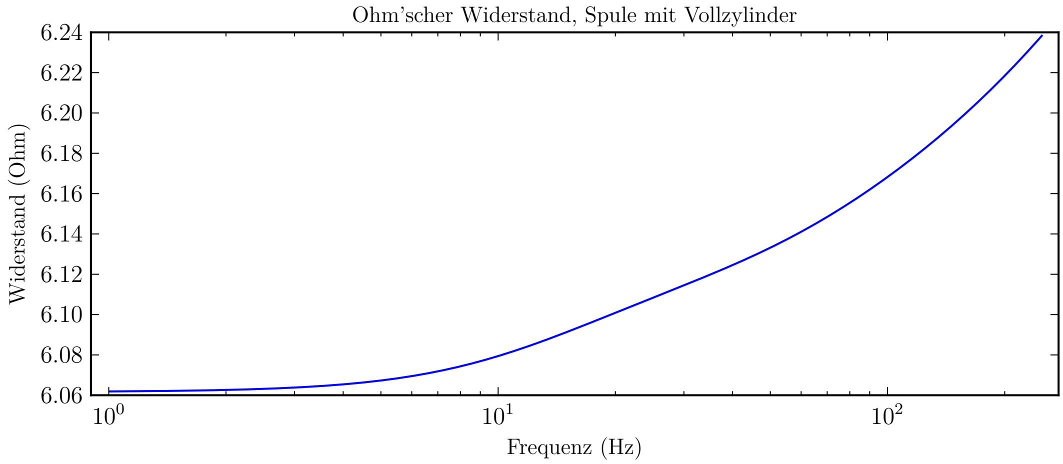


Abbildung 10: Änderung des Ohm'schen Widerstandes von Spule mit eingeführtem Aluminium-Vollzylinder

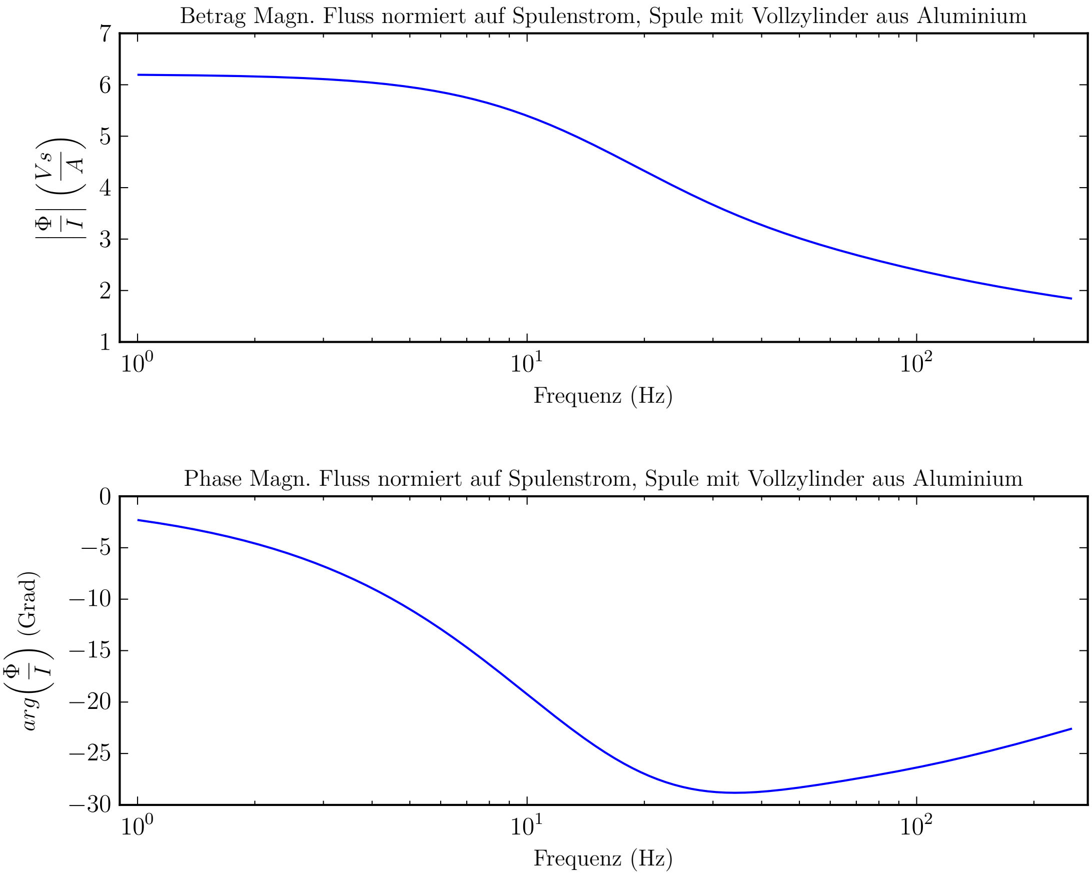


Abbildung 11: Änderung des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses innerhalb des Zylinders von Spule mit eingeführten Aluminium-Vollzylinder

Tabelle 11: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 11, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$24 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_0	$45 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
N_0	570
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$250\,\mathrm{Hz}$

3.3 Hohlzylinder

3.3.1 Kupfer

Tabelle 12: Messwerte Kupferrohr

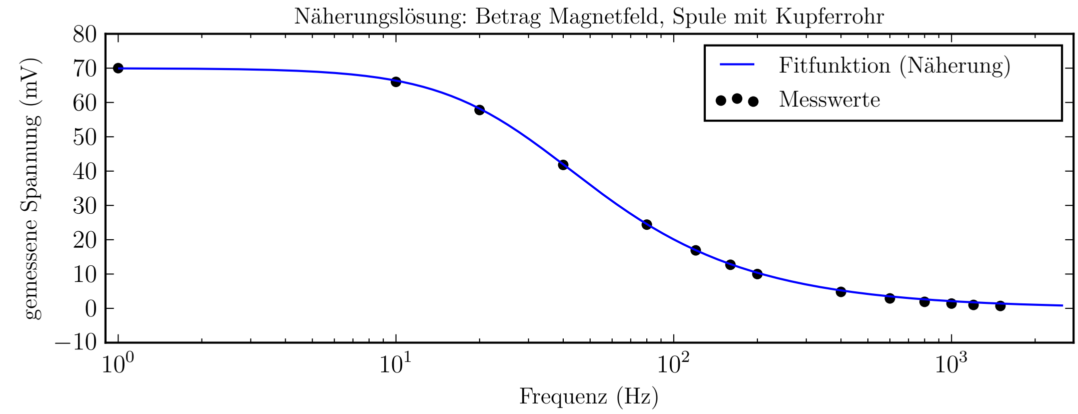
Frequenz (Hz)	Phasenverschiebung (°)	Amplitude (mV)	Shunt-Spannung (mV)
1	2	70.0	195.3
10	19.2	66.0	200.0
20	35.5	57.8	200.0
40	56.7	41.8	200.3
80	76.7	24.4	200.0
120	87	16.9	200.1
160	94	12.7	200.1
200	100	10.0	200.0
400	121	4.8	200.0
600	140	2.9	199.7
800	155	1.9	200.5
1000	170	1.4	200.2
1200	180	1.0	200.0
1500	200	0.7	199.9

Es wurde eine Messreihe durchgeführt und zwei Fits erstellt: Einmal mit der Näherungslösung, und einmal mit der exakten Lösung. Dabei fällt auf, dass der Betrag der Näherungslösung über den gesamten Frequenzbereich ziemlich genau ist und nicht bedeutend von den Messwerten abweicht. Der Phasenverlauf divergiert jedoch stark von den Messwerten, sobald die Wanddicke des Zylinderrohrs grösser als die Eindringtiefe s_{skin} wird.

In Abbildung 12 ist daher das Verhältnis von Wandstärke und Eindringtiefe ebenfalls dargestellt.

Für die exakte Lösung konnte ein sehr zufriedenstellender Fit erstellt werden (Abbildung 13).

Da dies die erste durchgeführte Messreihe war, wurde als Kontrolle noch die Spannung über dem Shunt-Widerstand gemessem. Um den Strom durch die Spule von Messung zu Messung möglichst konstant zu halten (und somit auch das externe Magnetfeld B_0), wurde angestrebt, diese Spannung möglichst bei 200 mV zu halten, was mit dem Widerstandswert von $1\,\Omega$ einen Spulenstrom I_0 von 200 mA ergab. Wie man erkennen kann, funktionierte das Justieren dieses Wertes sehr gut, weshalb bei den übrigen Messungen auf seine Erfassung verzichtet wurde.



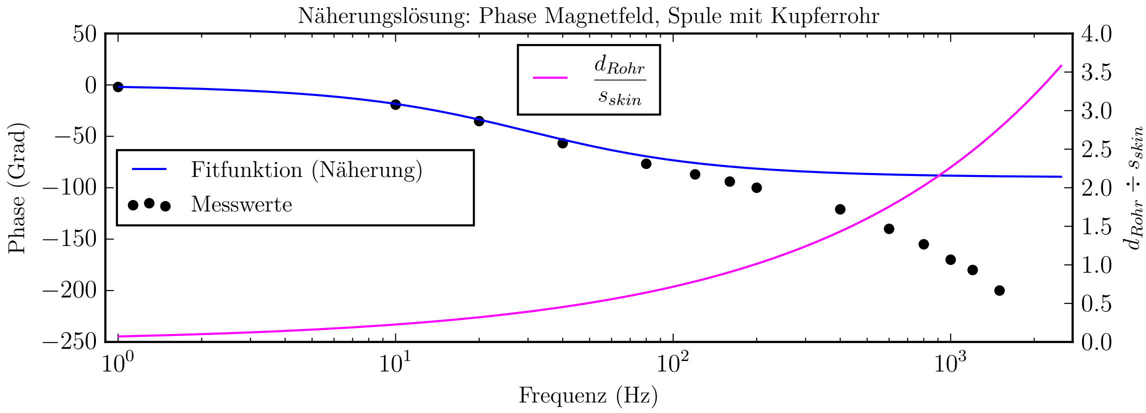


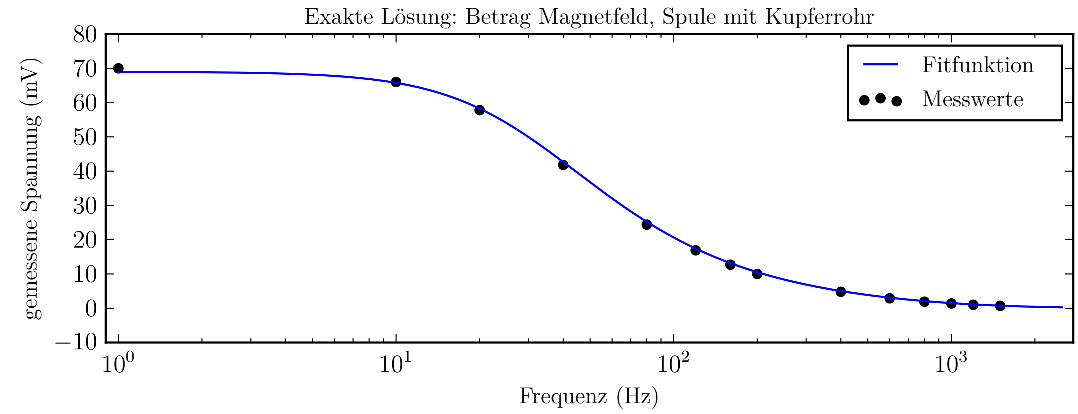
Abbildung 12: Näherungslösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

Tabelle 13: Paramterwerte für Fitfunktion, Direktimport aus Python-Script, gerundet (die Präzision von Python ist natürlich höher). Die ungerundeten Zahlen können bei Interesse auch im LaTeX-Quelltext gefunden werden.

μ_0	1.3×10^{-6} N A^{-2}
σ	52×10^{6} A V^{-1} m^{-1}
r_1	30×10^{-3} m
r_2	35×10^{-3} m
r_{avg}	33×10^{-3} m
d_{Rohr}	5.0×10^{-3} m
N_0	570
l	500×10^{-3} m
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	1 Hz
f_{max}	2.5×10^{3} Hz

Als Fitfunktion wurde Gleichung 10 (Seite 3) verwendet.

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 \cdot N_0 \cdot I_0}{l} \cdot \left(\frac{2}{i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot r_1 \cdot d \cdot \sigma + 2} \right)$$



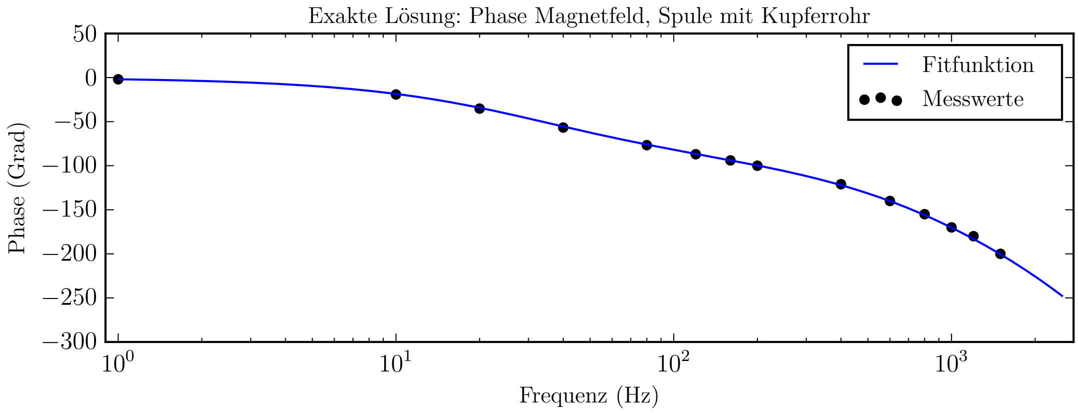


Abbildung 13: Exakte Lösung für den Frequenzverlauf des B-Feldes im Hohlzylinder (Kupfer)

Tabelle 14: Paramterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Kupferrohr. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$52 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$2.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

Als Fitfunktion wurde die Formel für $r_1 < r < r_2$ aus Gleichung 7 (Seite 3) verwendet, mit $r = r_1$. Für genauere Informationen über den Aufbau der Formel und die Verwendung der in Tabelle 20 gelisteten Parameter siehe das entsprechende Kapitel.

$$\hat{B}(r_1) = \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \cdot \hat{B}_0$$

3.3.2 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter.

Als Funktionen für die Plots von L, R und $\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\
&\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\
&+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\
&\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \\
L &= Re\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) \\
R &= -\omega \cdot Im\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) + R_{\Omega,0}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

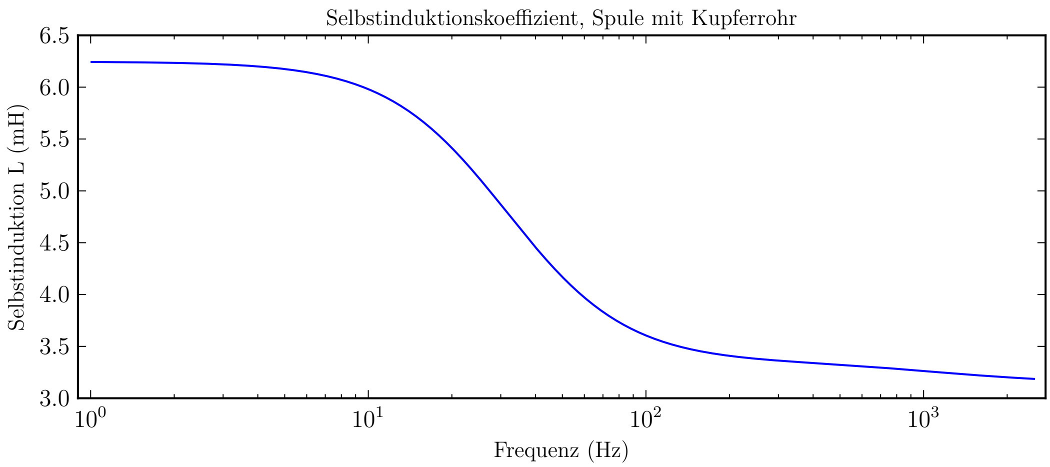


Abbildung 14: Frequenzverlauf des Selbstinduktionskoeffizienten; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 15 zu finden.

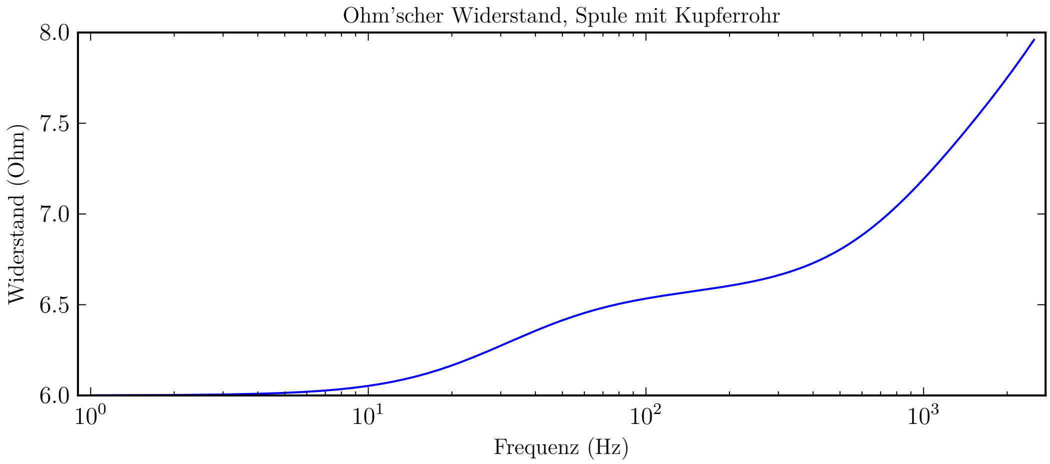


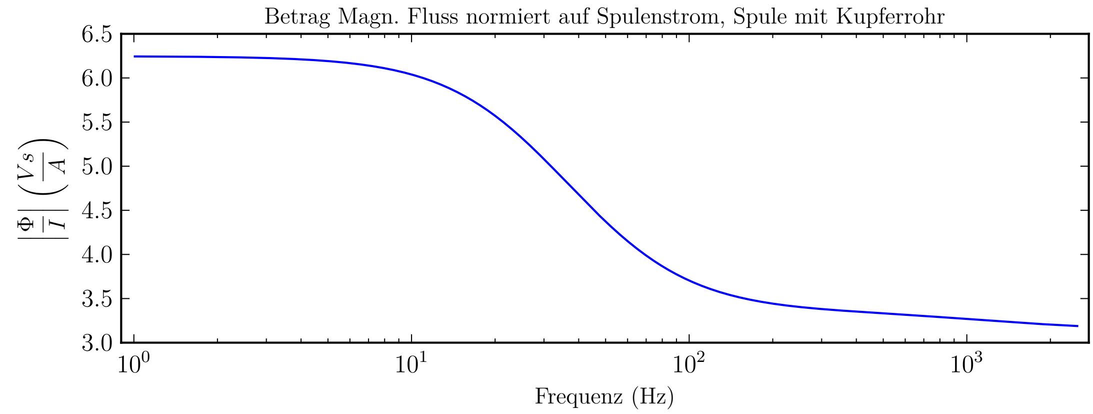
Abbildung 15: Frequenzverlauf des Ohm'schen Widerstandes; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 16 zu finden.

Tabelle 15: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 14, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$52 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
N_0	570
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$2.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

Tabelle 16: Paramterwerte für Fitfunktion in Abbildung 15, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$52 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$R_{\Omega,0}$	$6\,\Omega$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$2.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$



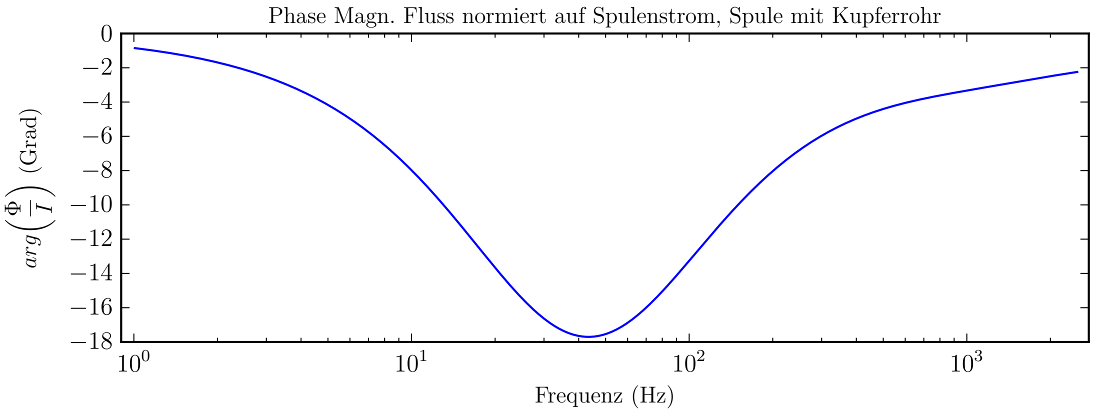


Abbildung 16: Frequenzverlauf des auf den Strom genormten magnetischen Flusses; die zugehörigen Parameter für den Fit sind in Tabelle 17 zu finden.

Tabelle 17: Parameterwerte für Fitfunktion in Abbildung 16 gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$52 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$2.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

3.3.3 Rostfreier Stahl

Tabelle 18: Messwerte Rohr aus rostfreiem Stahl

Freq. (Hz)	Phase (°)	Ampl. (mV)	Freq. (Hz)	Phase (°)	Ampl. (mV)
40	1.8	68.7	1500	50	45
120	5.4	69.1	1750	54	41
200	9	68.7	2000	58	37.2
400	17.5	66.2	2500	64	32
600	25.4	62.7	3500	71	24
800	32.4	59	5000	78	18
1000	38.4	54.5	7500	88	12
1200	43.5	50.5			

Das Vorgehen beim Stahlrohr war identisch zum Kupferrohr, und auch in diesem Fall wurde ein Fit mittels der Näherung und mittels der exakten Funktion erstellt.

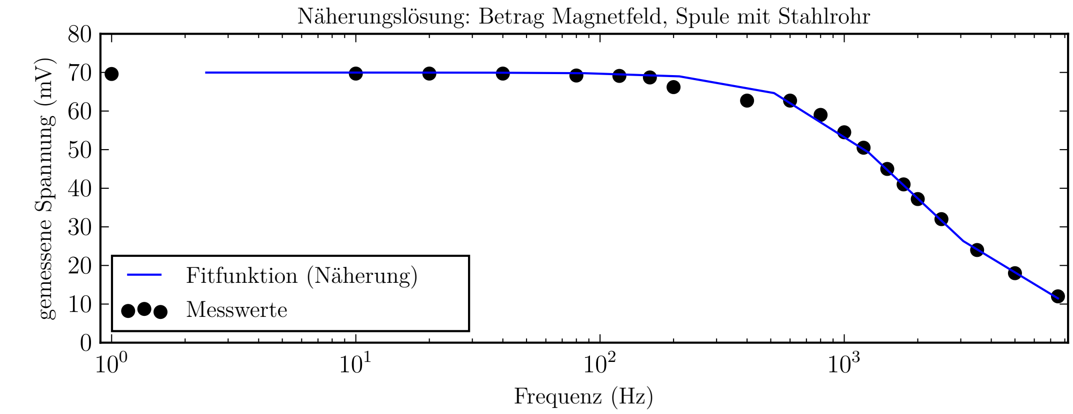
Ein wichtiger Unterschied zum Kupferrohr bestand darin, dass die Frequenz, ab welcher der Skineffekt wirklich zum Tragen kommt, bedeutend höher lag, weshalb der Messbereicht entsprechend angepasst wurde. Bei 7.5 kHz war jedoch Schluss, da der Funktionsgenerator nicht mer genügend Spannung liefern konnte, um die Shunt-Spannung auf den geforderten 200 mV zu halten.

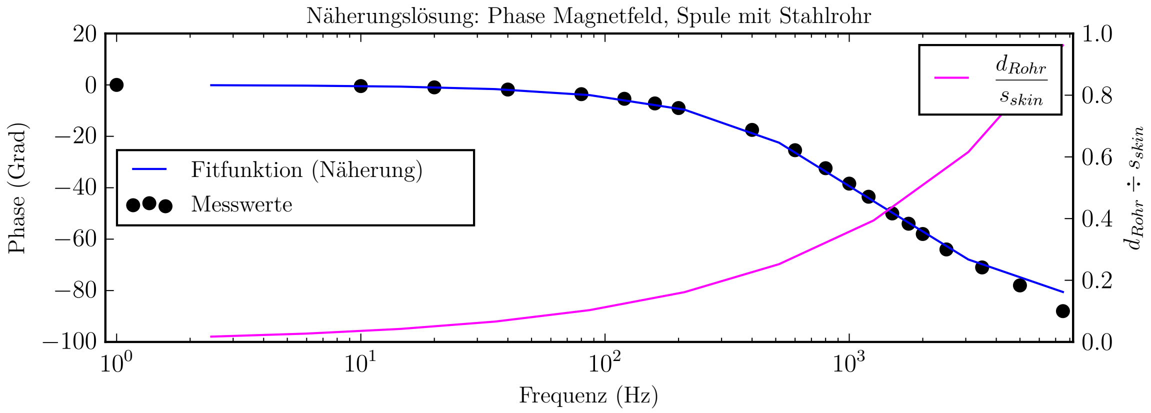
Zusätzlich schwankten die Messwerte (insbesondere die Phase) bei den höheren Frequenzen sehr stark. Ein genaues Ablesen mittels *Mitteln durch Augenmass* war nicht mehr möglich, sodass es keinen grossen Sinn machte, die Frequenz weiter zu erhöhen, selbst wenn der Funktionsgenerator noch weiter hätte gehen können.

Tabelle 19: Paramterwerte für Fitfunktion, Direktimport aus Python-Script, gerundet.

μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{avg}	$33 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
d_{Rohr}	$5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
N_0	570
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$NPTS$	10
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$7.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

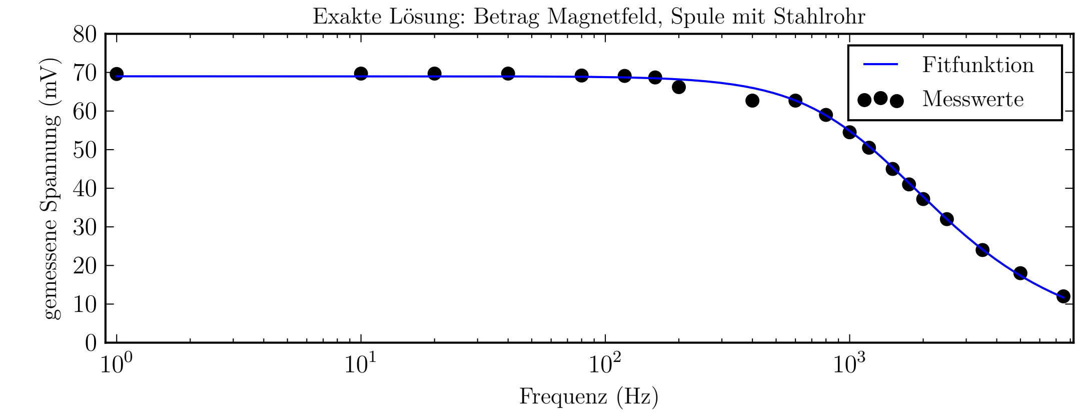
Tabelle 20: Paramterwerte für exakte Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Stahlrohr, Frequenzbereich deckt nur den Messbereich ab. Direktimport aus Python-Script, gerundet.

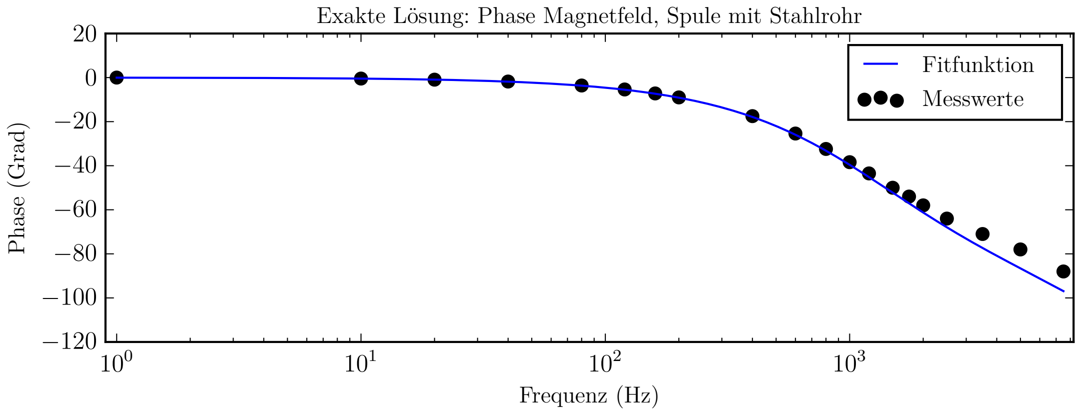




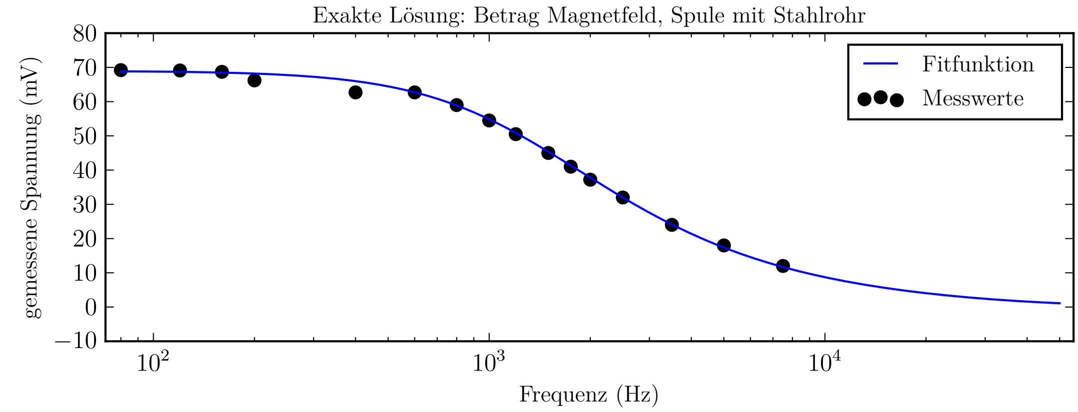
μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$1\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$7.5 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

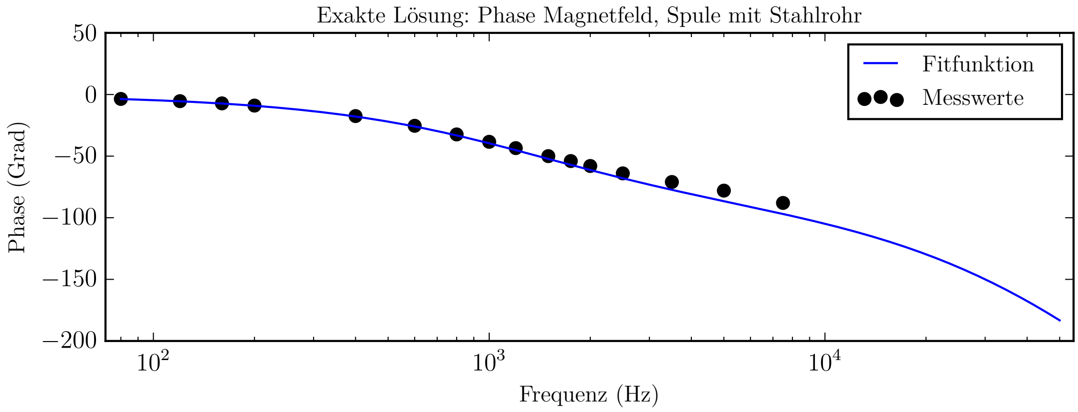
Tabelle 21: Paramterwerte für exakte Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes), Direktimport aus Python-Script, gerundet, für optimierten Frequenzbereich. Paramterwerte für Fitfunktion des Frequenzgangs (Betrag und Phase des B-Feldes) für Spule mit eingeführtem Stahlrohr. Der Frequenzbereich wurde für diesen Plot weit über den Messbereicht geschoben, um die "typische“ Form einer solchen Kurve abzubilden. Direktimport aus Python-Script, gerundet.





μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r	$0\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
B_0	$69 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$
$NPTS$	1.0×10^{3}
$f_{min_{opt}}$	$80\,\mathrm{Hz}$
$f_{max_{opt}}$	$50 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$


Exakte Lösung: Betrag Magnetfeld, Spule mit Stahlrohr
gemessene Spannung (mV)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
−10
10^2
10^3
10^4
Frequenz (Hz)
Fitfunktion
Messwerte

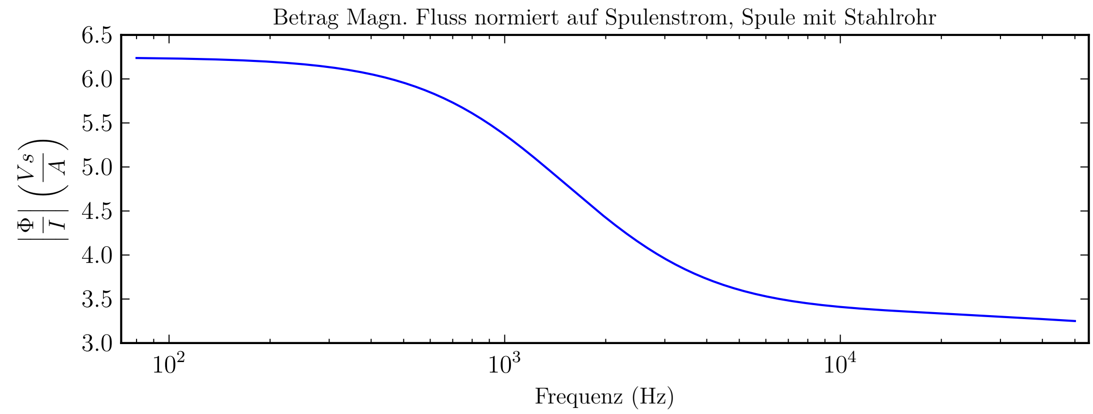

Exakte Lösung: Phase Magnetfeld, Spule mit Stahlrohr
Phase (Grad)
50
0
−50
−100
−150
−200
10^2
10^3
10^4
Frequenz (Hz)
Fitfunktion
Messwerte

3.3.4 Ergänzung: Selbstinduktionskoeffizient und Ohm'scher Widerstand

Wie in Abschnitt 3.2.4 zum Vollzylinder erwähnt, wurden hier keine Messungen durchgeführt und die Kurven basieren auf den mittels der Fits ermittelten Parameter.

Als Funktionen für die Plots von L, R und $\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}$ wurden die Formeln 11 (siehe auch Seite 4) benutzt:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}} &= \frac{\mu_0 \cdot N_0^2}{l} \\ &\cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{J_{0,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_1}}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \right. \\ &+ \frac{2}{k} \frac{r_2 \cdot (J_{1,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_2}) - r_1 \cdot (J_{1,r_1} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{1,r_1})}{J_{0,r_2} \cdot Y_{2,r_1} - J_{2,r_1} \cdot Y_{0,r_2}} \\ &\left. + (r_{Sp}^2 - r_2^2) \right) \\ L &= Re\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) \\ R &= -\omega \cdot Im\left(\frac{\hat{\Phi}}{\hat{I}}\right) + R_{\Omega,0}\end{aligned} \tag{11}$$



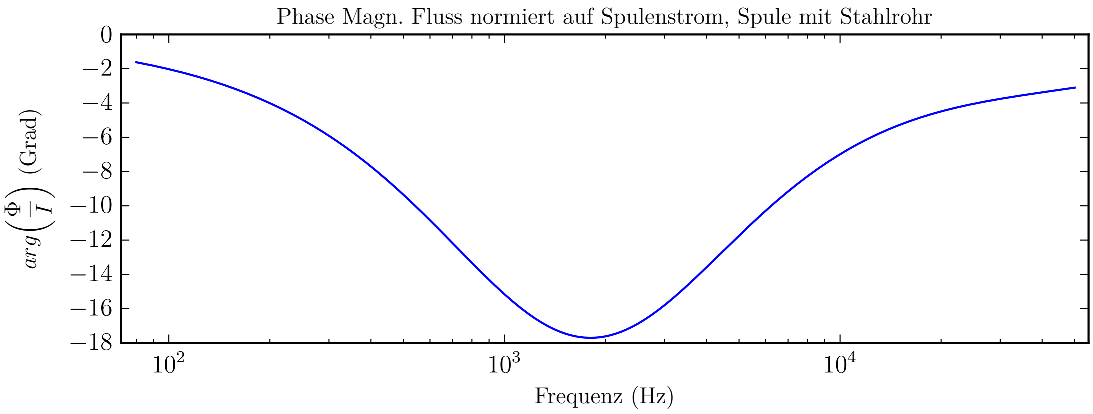


Tabelle 22: Paramterwerte für Frequenzgang des auf den Spulenstrom normierten magnetischen Flusses der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder, innerhalb des Stahlzylinders. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Der dargestellte Frequenzbereicht wurde so ausgewählt, um einen "sinnvollen" Kurvenverlauf zu erhalten, und ist somit bedeutend grösser als der Messbereich.

μ_0	1.3×10^{-6} N A^{-2}
σ	1.3×10^{6} A V^{-1} m^{-1}
d_{Sp}	98×10^{-3} m
r_{Sp}	49×10^{-3} m
r_1	30×10^{-3} m
r_2	35×10^{-3} m
l	500×10^{-3} m
l	500×10^{-3} m
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	80 Hz
f_{max}	50×10^{3} Hz

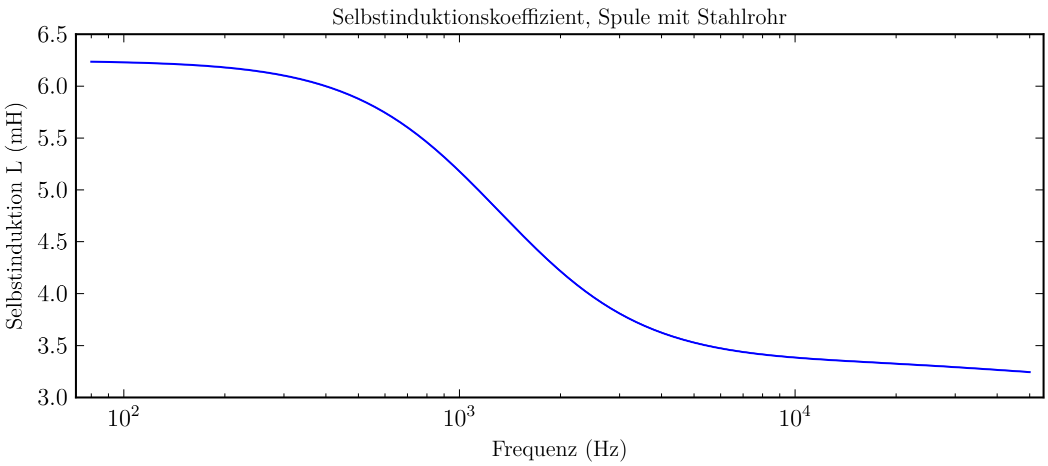
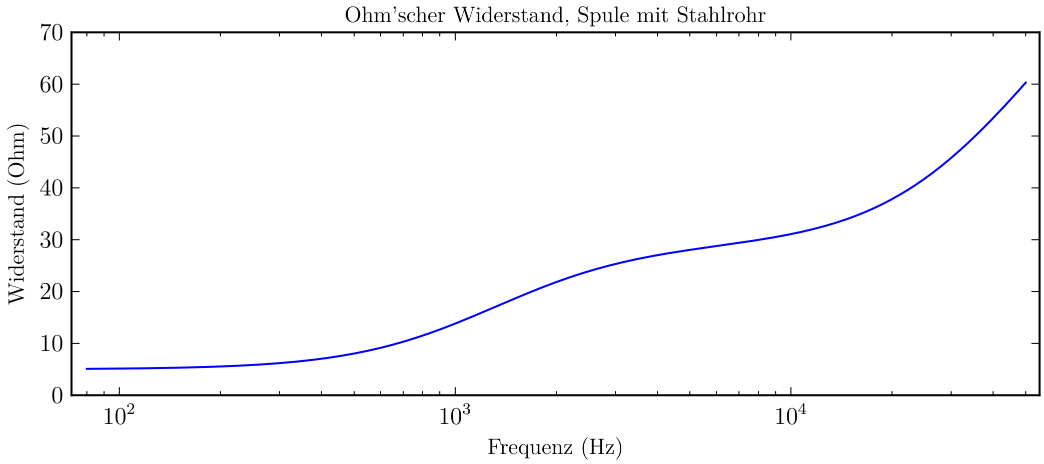


Tabelle 23: Paramterwerte für Frequenzgang des Selbstinduktionskoeffizienten der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Für den abgedeckten Frequenzbereicht gelten die gleichen Überlegungen wie bei Tabelle 22 erwähnt.

μ_0	1.3×10^{-6} N A^{-2}
σ	1.3×10^{6} A V^{-1} m^{-1}
d_{Sp}	98×10^{-3} m
r_{Sp}	49×10^{-3} m
r_1	30×10^{-3} m
r_2	35×10^{-3} m
l	500×10^{-3} m
$NPTS$	1.0×10^{3}
N_0	570
f_{min}	80 Hz
f_{max}	50×10^{3} Hz

Tabelle 24: Paramterwerte für Frequenzgang des Ohm'schen Widerstandes der Konfiguration aus Spule und Stahlzylinder. Direktimport aus Python-Script, gerundet. Für den abgedeckten Frequenzbereicht gelten die gleichen Überlegungen wie bei Tabelle 22 erwähnt.



μ_0	$1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
σ	$1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$
d_{Sp}	$98 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_{Sp}	$49 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_1	$30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
r_2	$35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
l	$500 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$R_{\Omega,0}$	$5\,\Omega$
$NPTS$	1.0×10^{3}
f_{min}	$80\,\mathrm{Hz}$
f_{max}	$50 \times 10^{3}\,\mathrm{Hz}$

4 Fehlerrechnung

Auf die Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

Literatur

[1] H. Looser, *E11 – Induktion/Skineffekt.* Windisch: FHNW Aargau, 2015.
[2] Lenz'sche Regel. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel [Stand: 02. November 2015].
[3] Besselsche Differentialgleichung. Wikipedia. [Online]. Verfügbar: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [Stand: 02. Oktober 2015].
[4] R. Frey. Laborjournal. github. [Online]. Verfügbar: https://github.com/alpenwasser/laborjournal [Stand: 19. Oktober 2015].