

O12 – Laser Doppler Anometrie

28.04.2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Häsler

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Arbeitsgrundlagen | 1 |
| 1.1 | Messprinzip | 1 |
| 1.2 | Grundlagen aus der Fluid-Dynamik | 3 |
| 2 | Durchführung | 5 |
| 2.1 | Schnittwinkel der Laserstrahlen | 5 |
| 3 | Auswertung | 6 |
| 4 | Fehlerrechnung | 7 |
| 5 | Resultate und Diskussion | 8 |

Versionsgeschichte

27.04.2016 Version 0.1

1 Arbeitsgrundlagen

In diesem Versuch kommen verschiedene Bereiche aus der Physik zusammen, primär Fluid-Dynamik und Optik. Entsprechend ergibt sich auch die Gliederung dieses Kapitels.

1.1 Messprinzip

Das Verfahren nutzt den optischen Dopplereffekt, um die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid zu detektieren. Trifft ein Lichtstrahl der Frequenz f auf ein bewegtes Objekt, unterscheidet sich die vom Objekt detektierte Frequenz f_1 ein wenig von der vom Sender emittierten Frequenz f_0 .

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta_1\right) \quad (1)$$

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit, \vec{e} ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahls und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes ist. Wird der Lichtstrahl am bewegten Objekt gestreut und anschliessend von einem Empfänger detektiert, ergibt sich für diesen die Frequenz f_2 :

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (2)$$

\vec{a} ist dabei ein Einheitsvektor in Ausfallsrichtung des gestreuten Strahls. Die Konfiguration ist schematisch in Abbildung 3 dargestellt.

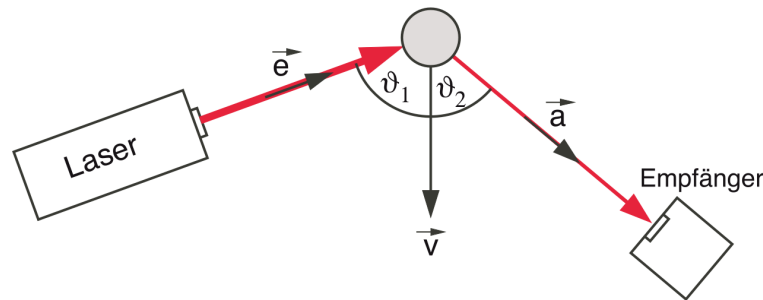


Abbildung 1: Dopplereffekt mit stationärem Sender, bewegtem Streuer und stationärem Detektor.

Quelle: Versuchsanleitung

Da bei technischen Geschwindigkeiten das Verhältnis $\frac{v}{c}$ sehr klein ist, ergeben sich unter solchen Umständen lediglich minime Unterschiede in den Frequenzen f_0 , f_1 und f_2 . Eine präzise Messung der Frequenzunterschiede ist somit enorm schwierig, weshalb man sich eines Zwei-Strahl-Verfahrens bedient. Da die beiden Teilstrahlen dabei in unterschiedlichen Winkeln ϑ_1 (vgl. Formel 1) auf das streuende Teilchen treffen, erfahren sie unterschiedliche Doppler-Verschiebungen ihrer Frequenzen.

Überlagert man nun die beiden Teilstrahlen in einem Detektor, ergibt sich eine Schwebung, deren Frequenz bedeutend tiefer als f_0 ist, und somit verhältnismässig gut detektiert werden kann.

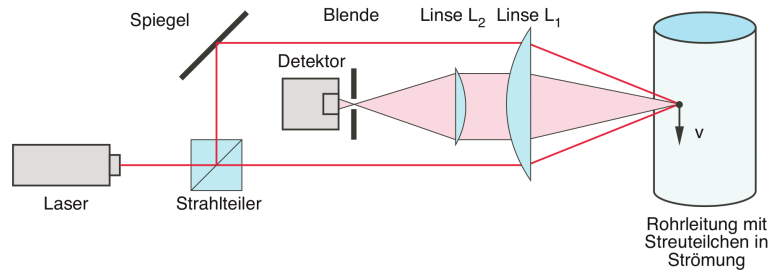


Abbildung 2: Zwei-Strahl-Anordnung. *Quelle:* Versuchsanleitung

Eine häufig verwendete Konfiguration ist in Abbildung 2 zu sehen.

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl auf zwei Strahlen auf und ein Spiegel sorgt dafür, dass zwei parallele Strahlen entstehen, die anschliessen durch eine Linse L_1 mit Brennweite f_1 wieder zusammengeführt werden. Fliesst ein Streuteilchen durch diesen Schnittpunkt, ergeben sich für die beiden Teilstrahlen zwei unterschiedliche Frequenzen aufgrund des Dopplereffekts:

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (3)$$

$$f_2 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (4)$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Die beiden Wellenzüge werden anschliessend in einem einzelnen Empfänger zusammengeführt. Die durch diese Überlagerung erzeugte Schwebung errechnet sich nach einigen trigonometrischen Umformungen zu (beachte, dass beide Signale die gleiche Amplitude haben, was die Sache etwas vereinfacht):

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = 2A \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (6)$$

1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik

1.2.1 Vorbereitung auf Messaufgaben

3.1 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall

fix: avg over flaeche

$$\frac{v(r)}{v_{max}} = \frac{1}{v_{max} \cdot R} \cdot \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{R} \cdot \int_0^R 1 - \frac{r^2}{R^2} dr = \frac{1}{2} \quad (7)$$

3.2 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall:

$$v(r) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (8)$$

$$v_m = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r dr \quad (9)$$

$$\frac{v_m}{v_{max}} = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot r dr = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (10)$$

3.3 – Vergleich von laminarem und turbulentem Strömungsprofil

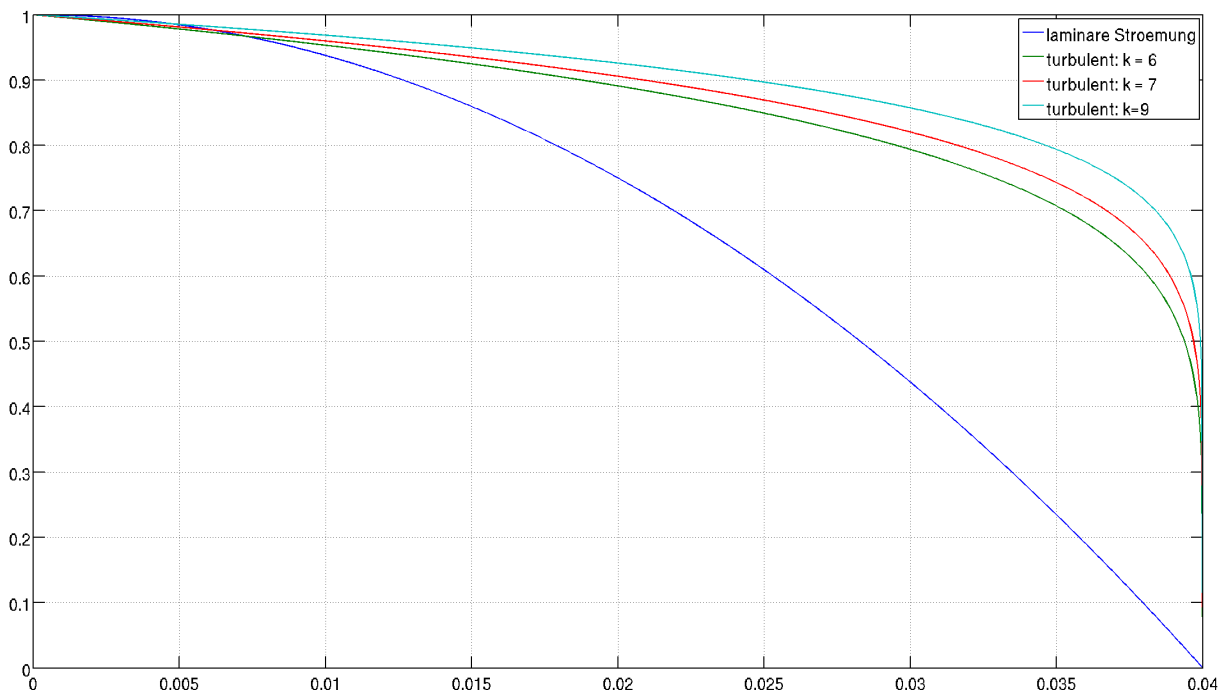


Abbildung 3: Laminare vs. turbulente Strömungsprofile

3.4 – Volumenstrom und Rohrradius bei gleichem Druckgefälle (via Sympy)

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \quad (11)$$

3.5 – Reynoldszahlen

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (12)$$

$$\dot{V}_{min} = 0.5 \text{ L min}^{-1} = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (13)$$

$$\dot{V}_{max} = 7.5 \text{ L min}^{-1} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

$$A = \pi \cdot R^2 = 0.00126 \text{ m}^2 \quad (15)$$

$$v_{m,min} = \frac{\dot{V}_{min}}{A} = 0.0066 \text{ m s}^{-1} \quad (16)$$

$$v_{m,max} = \frac{\dot{V}_{max}}{A} = 0.099 \text{ m s}^{-1} \quad (17)$$

$$Re_{min} = \frac{\rho \cdot v_{m,min} \cdot 2R}{\eta} = 264 \quad (18)$$

$$Re_{max} = \frac{\rho \cdot v_{m,max} \cdot 2R}{\eta} = 3960 \quad (19)$$

$$\Delta f = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot v}{\lambda} = \{13.11 \text{ Hz}, 197.5 \text{ Hz}\} \text{ für } \varphi = 30^\circ \quad (20)$$

2 Durchführung

2.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen

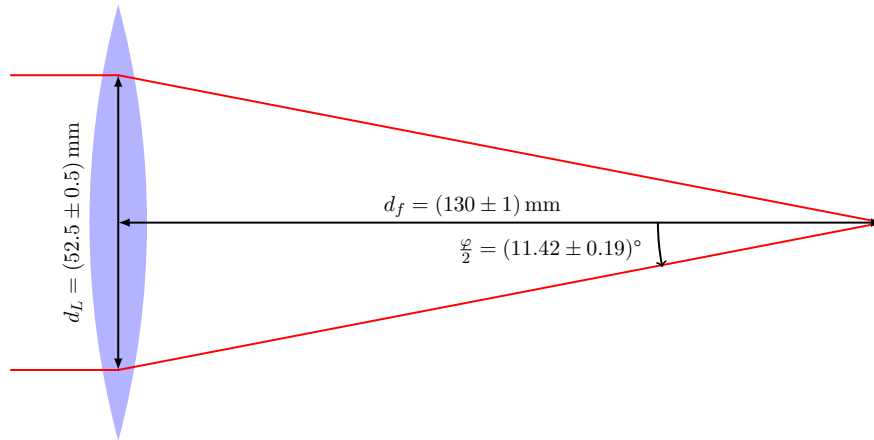


Abbildung 4: Bestimmung des Schnittwinkels der Laserstrahlen aus der Geometrie der Versuchsanordnung

Für den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ wurde die Geometrie der Laserstrahlen ausgemessen: Die Distanz d_L zwischen den beiden Strahlen beim Eintreten in die Linse und die Distanz d_f zwischen der Linse und dem Kreuzungspunkt der Laserstrahlen. Die Bestimmung des Schnittwinkels ist dann nur noch eine Sache von ein wenig Trigonometrie.

Für die Distanzen ergaben sich folgende Werte, mit geschätzten Unsicherheiten:

- $d_L = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
- $d_f = (130 \pm 1) \text{ mm}$

Der halbe Schnittwinkel ergibt sich dann zu:

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{\frac{d_L}{2}}{d_f} \quad (21)$$

Der kleinstmögliche Winkel ergibt sich aus der Kombination von $d_L = 52 \text{ mm}$ und $d_f = 131 \text{ mm}$ und beläuft sich auf $\frac{\varphi}{2} = 11.23^\circ$, der grösstmögliche Winkel korrespondiert mit $d_L = 53 \text{ mm}$ und $d_f = 129 \text{ mm}$ und ergibt $\frac{\varphi}{2} = 11.61^\circ$, was sich zusammenführen lässt auf einen Schnittwinkel von:

$$\varphi = (11.42 \pm 0.19)^\circ \cdot 2 = (22.8 \pm 0.4)^\circ \quad (22)$$

Die Bestimmung von φ ist schematisch auch in Abbildung 4 dargestellt.

3 Auswertung

4 Fehlerrechnung

5 Resultate und Diskussion

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Ort, Datum: _____, _____