

W4b – Kombipendel

23. März 2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Hässler

Inhaltsverzeichnis

1 Arbeitsgrundlagen	1
1.1 Systemaufbau	1
1.2 Schwerpendel	2
1.3 Kombipendel	3
2 Durchführung	5
2.1 Versuchsanordnung	5
2.2 Geräteliste	6
2.3 Messvorgang/Messmethoden	7
2.4 Proben/Versuchsobjekte	7
3 Auswertung	8
3.1 Versuch 3.1.1 – Trägheitsmoment I_0 des Pendels ohne Reiter	8
3.2 Versuch 3.1.2 – Schwingungsdauer in Funktion der Reitermasse	9
3.3 Versuch 3.1.3 – Periode in Abhängigkeit der Amplitude	13
3.4 Versuch 3.3.1 – Kombipendel Konfiguration 2	15
3.5 Versuch 3.3.2 – Kombipendel Konfiguration 3	18
3.6 Versuch 3.3.3 – Ruhelagen	19
4 Fehlerrechnung	21
5 Resultate und Diskussion	22

Versionsgeschichte

23. März 2016 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Systemaufbau

Unter einem Kombipendel wollen wir ein System verstehen, bei dem die Rückstellungs Kräfte sowohl von der Gravitationskraft wie auch von Federn generiert werden. In diesem Versuch wurde eine Apparatur in verschiedenen Konfigurationen benutzt, deren Aufbau in Abbildung ?? gesehen werden kann.

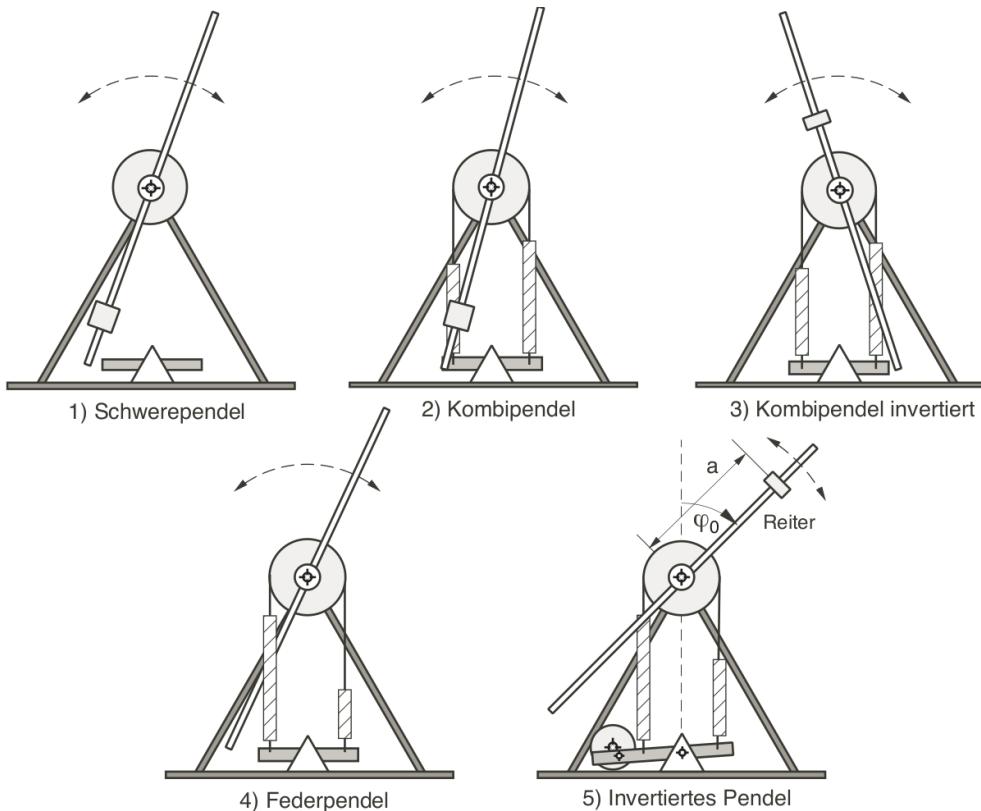


Abbildung 1: Pendel-Konfigurationen. Quelle: Versuchsanleitung.

1. ohne Federn als Schwerpendel
2. mit Ruhelage unten $\varphi_0 = 180^\circ$ als quasiharmonisches Kombipendel
3. mit Ruhelage oben $\varphi_0 = 0^\circ$ als quasiharmonisches Kombipendel invertiert
4. mit ausbalanciertem Pendelkörper als Federpendel (Drehpendel)
5. mit Ruhelage oben ($0^\circ < \varphi_0 < 120^\circ$) als invertiertes Pendel

1.2 Schwerependel

1.2.1 Reiterabstand variabel

Für kleine Auslenkungen kann die Schwingungsperiode des Schwerependels bestimmt werden via

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m_{Reiter} \cdot a^2}{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (1)$$

Wobei

- T_0 : Schwingungsperiode
- I_0 : Massenträgheitsmoment der leeren Apparatur (ohne Reiter). Fit-Parameter.
- m_{Reiter} : Reitermasse
- a : Position des Reiters (Entfernung des Mittelpunktes des Reiters zum Mittelpunkt der Pendelstange)
- g : Erdbeschleunigung. Gemäss Angaben im Labor 9.807 m s^{-2}

Im Zähler unter der Wurzel steht eigentlich das gesamte Trägheitsmoment, welches durch die Schwingung in Bewegung gesetzt wird. Beim Schwerependel ist dies das Trägheitsmoment der Apparatur und das Trägheitsmoment des Reiters (beim Kombipendel kommt noch das Trägheitsmoment der Federn hinzu). Der Term $m_{Reiter} \cdot a^2$ ist die Approximation des Trägheitsmoments des Reiters als Punktmasse. Bei grösseren Reitern (400g und höher) sollte dieses durch das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit entsprechendem Steiner-Anteil ersetzt werden (siehe auch Abschnitt 3.2 auf Seite 9).

1.2.2 Auslenkung variabel

Variiert man die Auslenkung (also den Winkel, aus dem man das Pendel loslässt), kann die Periode der Schwingung mit folgender Formel angenähert werden:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \sin^6 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) + \dots \right) \quad (2)$$

Wobei gilt:

- T : Schwingungsperiode
- T_0 : Schwingungsperiode für kleine Auslenkungen
- $\hat{\varphi}$: Amplitude der Schwingung

Die Anzahl der benötigten Terme zur gewünschten Genauigkeit und die Anwendung der Formel ist in Abschnitt 3.3 auf Seite 13 aufgezeigt.

1.3 Kombipendel

Ohne Anregung von aussen sind die angreifenden Drehmomente beim Kombipendel mit Reiter wie folgt:

- $M_{Federn} = -p \cdot \varphi$, mit Federparameter $p = 2 \cdot k \cdot r^2$
- $M_{Reiter} = q \cdot \sin(\varphi)$, mit Reiterparameter $q = m_{Reiter} \cdot g \cdot a$
- $M_{Bremse} = -\beta \cdot \dot{\varphi}$, mit Bremsparameter β

Wobei k die Federkonstante, r der Angriffsradius der Federn und a die Reiterposition sind.

Für $q < p$ erhält man eine quasiharmonische Schwingung, deren Periode sich mittels folgender Gleichung beschreiben lässt:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{p \pm q}} \quad (3)$$

Wobei

- I : Gesamtes Massenträgheitsmoment der bewegten Masse, zusammengesetzt aus dem Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur ohne Reiter, dem Massenträgheitsmoment $I_{Federn} = \frac{1}{3} \cdot m_{Federn} \cdot r^2$ (Quelle: Skript zu Schwingungen und Wellen, Looser) und dem Massenträgheitsmoment I_{Reiter} des Reiters (entweder approximiert als Punktmasse oder als Zylinder mit Steineranteil).
- p : Federparameter
- q : Reiterparameter

Wirken sich die Rückstellmomente der Federn und des Reiters entgegen, sind p und q voneinander zu subtrahieren, andernfalls werden sie addiert.

Beim Fall $q = p$ erhält man als Grenzlage für einen gegebenen Reiter $a = \frac{p}{m_{Reiter} \cdot g}$.

Gilt hingegen $q > p$, bwz. ist der Reiter ausserhalb des kritischen Punktes, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\varphi_0}{\sin(\varphi_0)} = \frac{a}{a_G} = \frac{q}{p} = \frac{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}{2 \cdot k \cdot r^2} \quad (4)$$

Der Verlauf dieser Kurve (bzw. der Verlauf der Ruhelage in Funktion von $\frac{q}{p}$) ist in Abbildung 2 abgebildet.

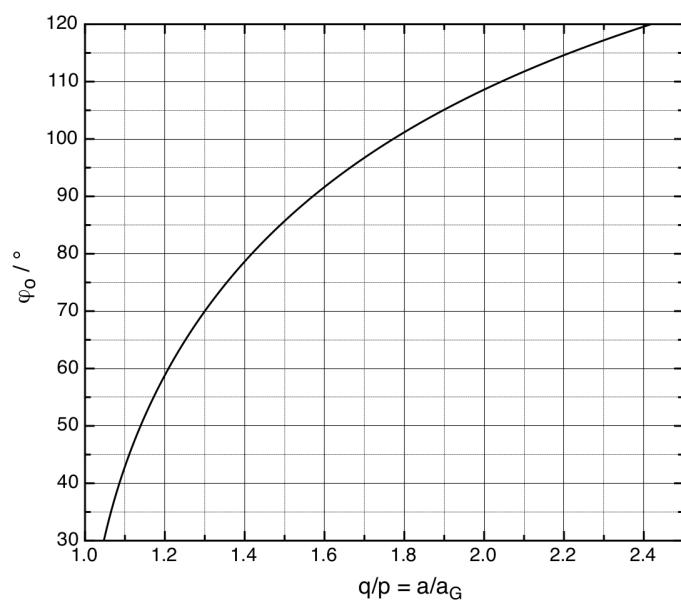


Abbildung 2: Ruhelage des invertierten Pendels als Funktion der Ruhelage a (Quelle: Versuchsanleitung)

2 Durchführung

2.1 Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abbildung 3 und photographisch in Abbildung 4 dargestellt.

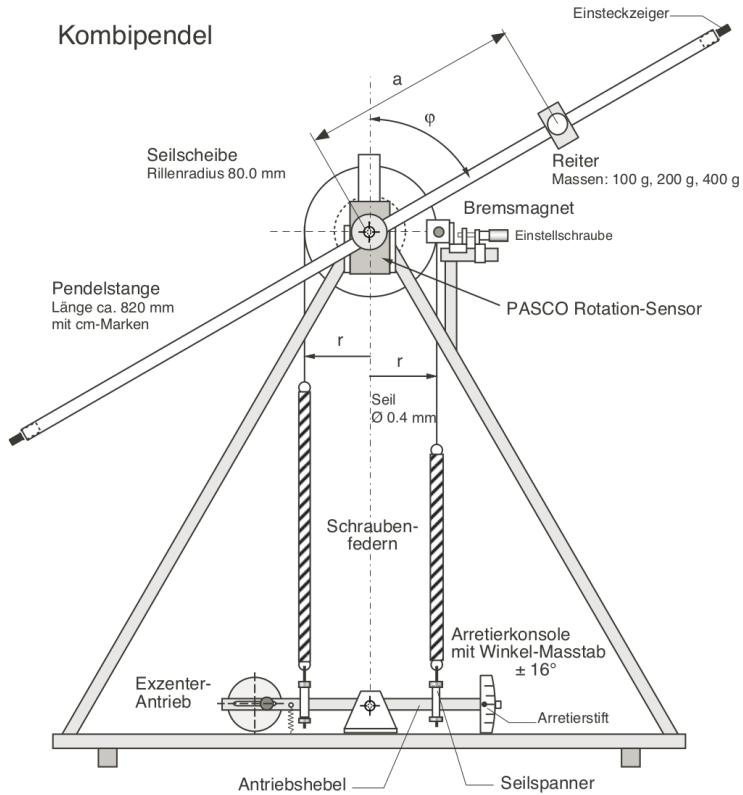


Abbildung 3: Schematische Versuchsanordnung (Quelle: Versuchsanleitung)

Die Apparatur besteht aus dreieckigem Rahmen, welcher eine Pendelstange lagert. Ein Reiter (Zusatzgewicht) kann auf der Pendelstange in variablen Abständen montiert werden (beidseitig, je nach gewünschter Konfiguration, siehe Abschnitt zu theoretischen Grundlagen).

Es ist auch ein Bremsmagnet und ein Antrieb für angeregte Schwingungen vorhanden, allerdings wurden diese bei unserem Versuch nicht benutzt.

Die Schwingungen der Pendelstange werden mittels einer Lichtschranke detektiert, welche variabel positioniert werden kann, abhängig vom durchgeführten Versuch. Die Lichtschranke ist an eine Auswertelogik Marke "Eigenbau" und einen Frequenzähler der Marke Keithley angeschlossen.

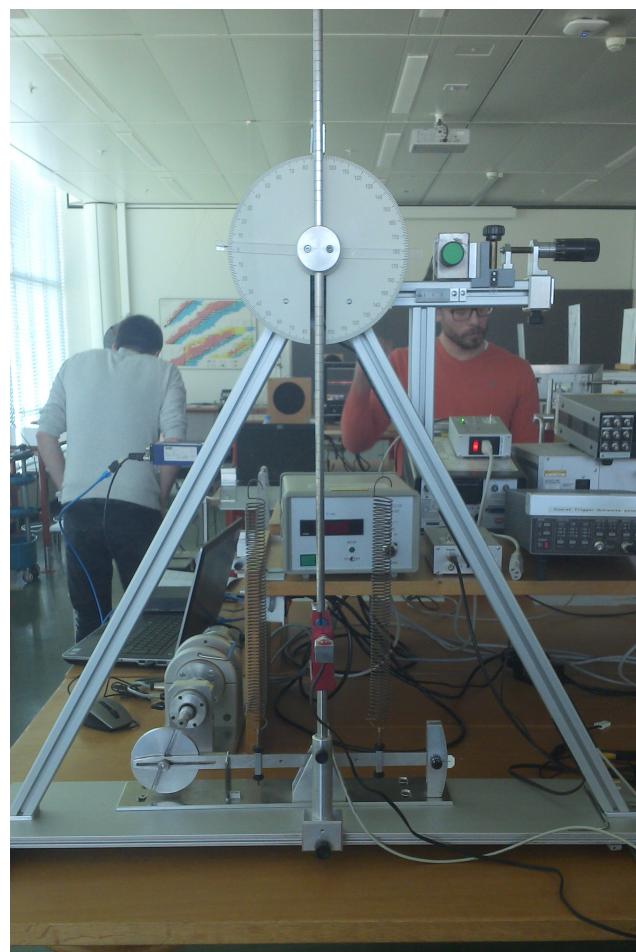


Abbildung 4: Versuchsanordnung im Labor

Wenn ein bestimmter Auslenk-Winkel benötigt wird, kann dieser an einer Winkelscheibe eingestellt werden.

2.2 Geräteliste

Die verwendeten Geräte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Hilfsmittel und Geräteliste

Gerät	Typ
Frequenz-Zähler	Keithley 776 Programmable Counter/Timer
Lichtschranke und Auswerte-Elektronik	Lichtschranken-Logik 1 (Marke Eigenbau)
Auswerteprogramm	QtiPlot

2.3 Messvorgang/Messmethoden

Grundsätzlich gab es vier Arten von Messungen:

- Auslenkwinkel konstant, Reitermasse konstant, Reiterabstand variabel, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Auslenkwinkel konstant, Reitermasse variabel, Reiterabstand konstant, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Auslenkwinkel variabel, Reitermasse konstant, Reiterabstand konstant, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Reitermasse konstant, Reiterabstand variabel, Messung des Winkels φ_0 der Ruhelage (Kombipendel invertiert, $a > a_{krit}$)

Abhängig davon, ob die Apparatur als Schwingungsperiode oder als Kombipendel zu betreiben war, wurden jeweils die Federn aus- bzw. eingehängt.

2.4 Proben/Versuchsobjekte

Es wurden Bronzefedern verwendet mit folgenden Daten gemäss Versuchsanleitung:

Tabelle 2: Federn

Typ, Material	Masse (kombiniert)	Federkonstante k
Bronzefedern (1.5 mm Durchmesser)	155.5 g	32.0 N m ⁻¹

Die Federkonstante k wurde in den Versuchen mit dem Kombipendel jeweils als Fit-Parameter verwendet und somit experimentell überprüft. Die Federn sind über ein Seil des Durchmessers 0.4 mm an einem Seilrad mit Rillendurchmesser 160 mm mit der Apparatur verbunden (siehe auch Schema der Apparatur).

Als Reiter standen verschiedene Massen zur Verfügung, aufgelistet in Tabelle 3.

Tabelle 3: Reiter

Masse	Durchmesser	Länge
100 g	30.2 mm	20 mm
100 g	34.4 mm	15 mm
200 g	34.4 mm	30 mm
300 g	34.4 mm	45 mm
400 g	34.4 mm	60 mm

Bei den Messungen mit Reitermassen über 400 g wurden aus den Reitern mit identischen Durchmessern jeweils ein Reiter zusammengesetzt. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Schwerpunkt der gesamten Reiterkonfiguration seine Position auf der Stange nicht veränderte.

3 Auswertung

3.1 Versuch 3.1.1 – Trägheitsmoment I_0 des Pendels ohne Reiter

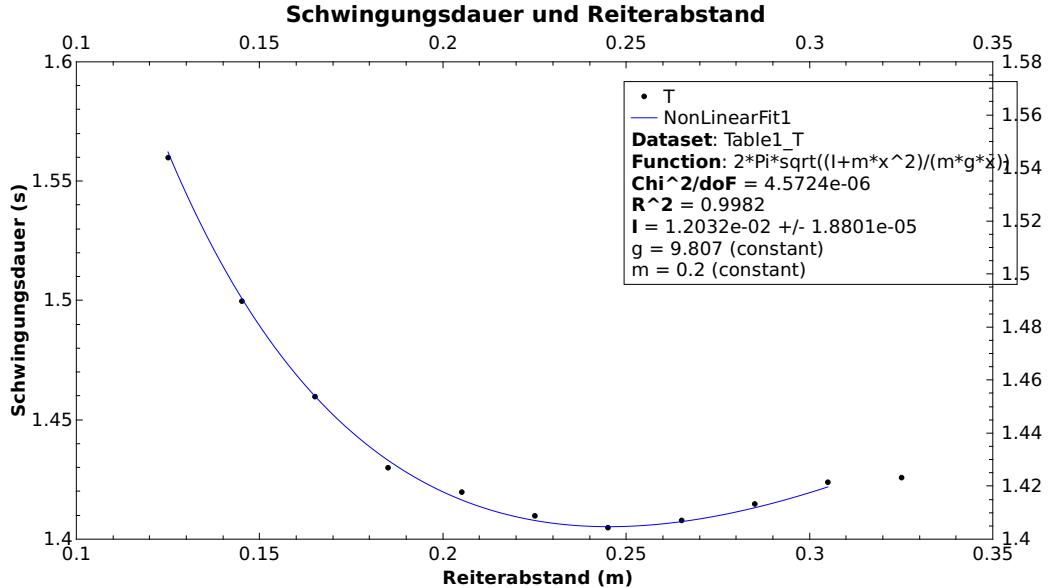


Abbildung 5: Massenträgheitsmoment des Pendels ohne Reiter

Die Messungen wurden ausgeführt mit einer Reitermasse von 200 g und verschiedenen Abständen. Der letzte Messpunkt bei 325 mm wurde im Fit nicht berücksichtigt, da er stark nach einem Ausreißer aussieht.

Die für den Fit benutzte Gleichung lautet:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}} \quad (5)$$

Wobei $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$ eingesetzt wurde.

Der Referenzwert aus der Versuchsanleitung für I_0 ist $1.16 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, der mittels Fit ermittelte Wert beträgt $I_0 = (12.032\,000 \pm 0.018\,801) \text{ g m}^2$.

3.2 Versuch 3.1.2 – Schwingungsdauer in Funktion der Reitermasse

Im Gegensatz zum vorigen Versuch, bei dem die Reitermasse als Punktmasse approximiert wurde, sollte gemäss Versuchsanleitung das Trägheitsmoment des Reiters ab 400 g berücksichtigt werden.

Da wir in dieser Versuchsreihe bis zu einer Reitermasse von 700 g gemessen haben, ist es naheliegend, eine genauere Formel herzuleiten. Ein Problem beim Fitzen mit QtiPlot in diesem Fall, ist, dass die Länge des Reiters mit seiner Masse variiert; man hat also eigentlich zwei Variablen, welche sich von Messung zu Messung ändern und in die resultierende Formel einfließen sollten.

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_{Reiter}}{m \cdot g \cdot a}} \quad (6)$$

mit $I_{Reiter} = I_{Zylinder} + I_{Steineranteil}$. Mit $I_{Zylinder} = \frac{m}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + h^2)$ und $I_{Steineranteil} = m_{Reiter} \cdot a^2$ (Quelle: Kuchling) ergibt dies:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{m_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + h^2) + m_{Reiter} \cdot a^2}{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (7)$$

Glücklicherweise hängt aber die Masse des Reiters linear von seiner Länge ab (der Durchmesser aller Messproben ist identisch und beträgt 34.4 mm); man hat also nur einen Freiheitsgrad. Alles, was zu tun bleibt, ist, obige Gleichung in Funktion der Zylinderlänge des Reiters umzuschreiben, und den Fit mittels dieser Werte zu machen.

Dazu wird die Längendichte ρ des Reiters als neuer Parameter eingeführt, und obige Funktion umgeschrieben mit der Länge l_{Reiter} als Funktionsparameter, wobei die Reitermasse dann definiert ist als $m_{Reiter} = \rho \cdot l_{Reiter}$:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{\rho \cdot l_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + l_{Reiter}^2) + \rho \cdot l_{Reiter} \cdot a^2}{\rho \cdot l_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (8)$$

Die verwendeten Parameter sind:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-1}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Approximiert man den Reiter als Punktmasse wie beim vorherigen Versuch, ergibt sich das Resultat aus Abbildung 6, mit einem Massenträgheitsmoment von $I_0 = (11.362\ 00 \pm 0.396\ 97) \text{ g m}^2$.

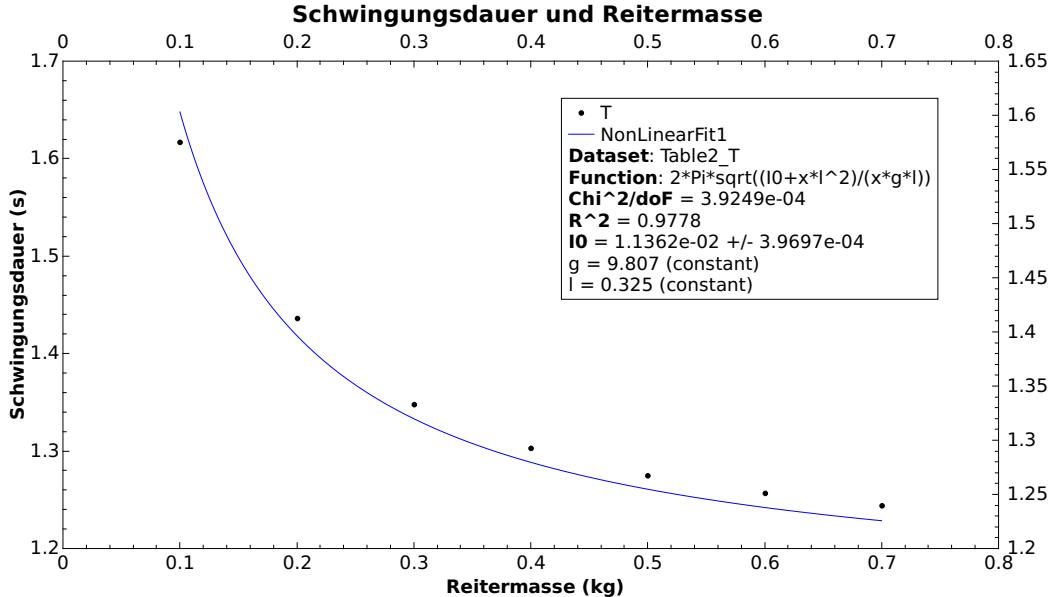


Abbildung 6: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefitted über Trägheitsmoment. Abstand des Reiters war konstant 325 mm.

Die verwendete Gleichung ist:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}} \quad (9)$$

Mit den Parametern:

- m_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Wie man in Abbildung 6 erkennen kann, besteht eine Abweichung zwischen Fit und Messwerten, welche eine zunehmende Tendenz mit steigender Reitermasse aufweist. Ich führe das auf die zunehmende Diskrepanz zwischen der Annäherung des Reiters als Punktmasse mit $I_{Reiter} = m \cdot a^2$ und der Modellierung als Zylinder inklusive Steiner-Anteil durch $I_{Reiter} = \frac{m}{12}(3 \cdot r^2 + h^2) + m \cdot a^2$ zurück.

Berücksichtigt man die Zylindrigkeit des Reiters und den Steiner-Anteil (siehe Abbildung 7), ergibt sich ein Massenträgheitsmoment von $I_0 = (11.297\,00 \pm 0.362\,71) \text{ g m}^2$.

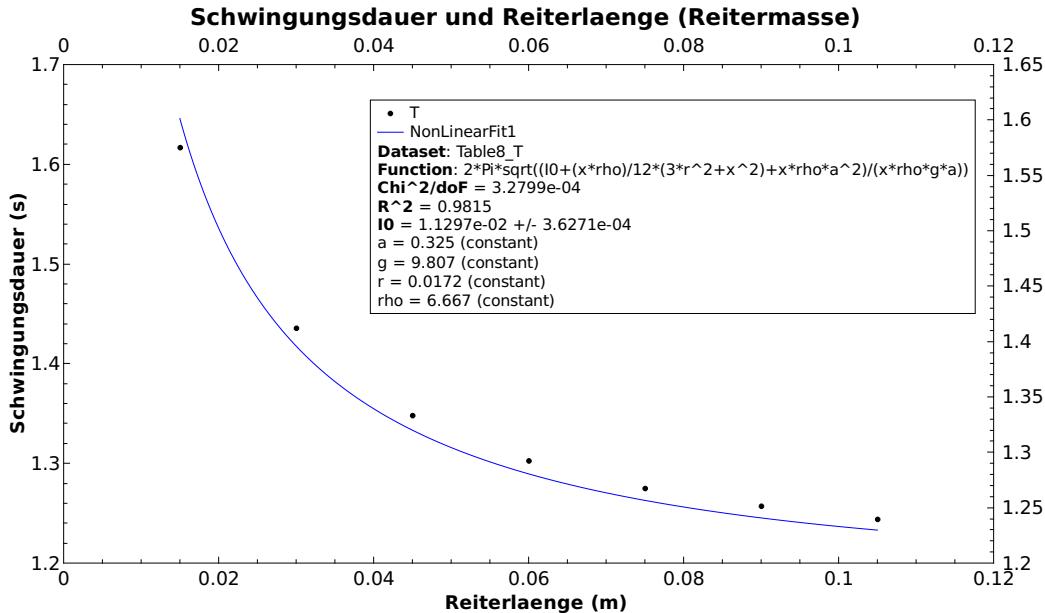


Abbildung 7: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefitted über Trägheitsmoment

Die verwendete Gleichung lautet:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{\rho \cdot l_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + l_{Reiter}^2) + \rho \cdot l_{Reiter} \cdot a^2}{\rho \cdot l_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (10)$$

Mit den Parametern:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-3}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Man kann in Abbildung 7 erkennen, dass nach wie vor eine Abweichung zwischen Fit und Messwerten besteht, allerdings scheint die Tendenz der Differenz eher konstant und nicht zunehmend zu sein. Deshalb habe ich noch einen zusätzlichen Fit erstellt, in dem der unterste Messpunkt nicht berücksichtigt wird, was zum Fit in Abbildung 8 führt. Die Gleichung ist dieselbe wie beim Fit in Abbildung 7.

Dies ergibt $I_0 = (12.311\,000 \pm 0.092\,950) \text{ g m}^2$. Interessanterweise ist die Unsicherheit hier merklich kleiner, obwohl ein Messpunkt weniger verwendet wurde.

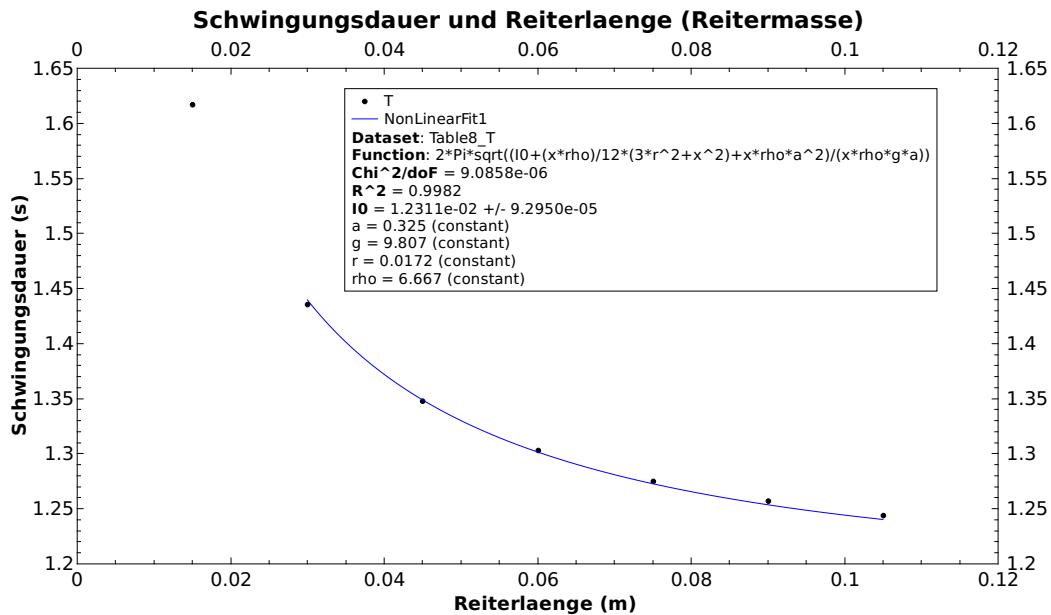


Abbildung 8: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefittd über Trägheitsmoment, unterster Messpunkt nicht berücksichtigt

Auch hier sind die verwendeten Parameter:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-1}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

3.3 Versuch 3.1.3 – Periode in Abhängigkeit der Amplitude

Es wurde die gemessene Periode in Abhängigkeit der Amplitude mittels folgender Formel gefittet:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \dots \right) \quad (11)$$

Zur Bestimmung der Anzahl nötigen Terme findet man im Anhang zu Versuch W4 folgendes Diagramm:

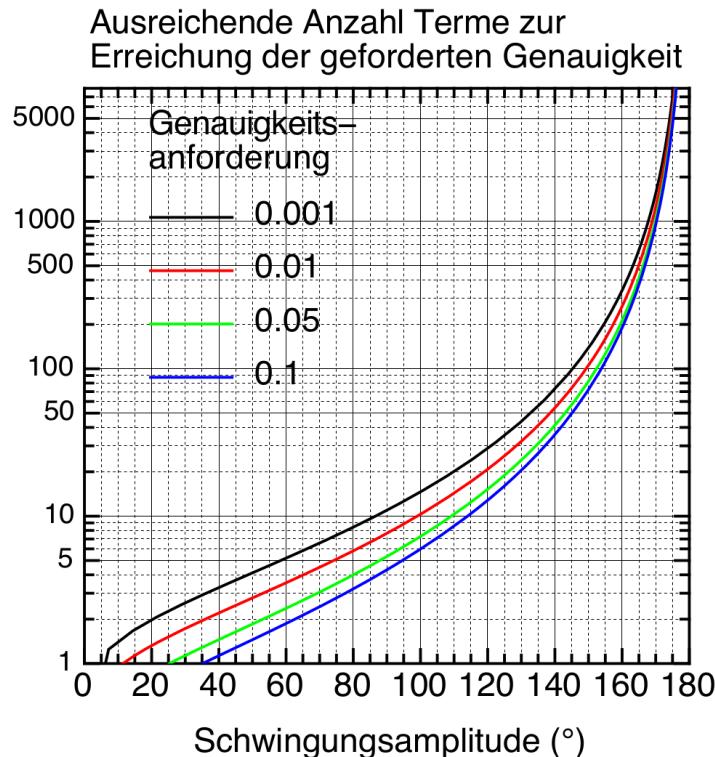


Abbildung 9: Anzahl nötiger Terme in Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit und der maximalen Auslenkung.

Wir legen uns auf eine gewünschte Genauigkeit von 0.1 fest. Da wir bis zu einem Winkel von 120° gemessen haben, ergibt dies ungefähr 12 Terme (blaue Kurve). Da QtiPlot bei 12 Summanden abstürzte, wurde die Funktion nur bis zur 18. Potenz des Sinus gefittet.

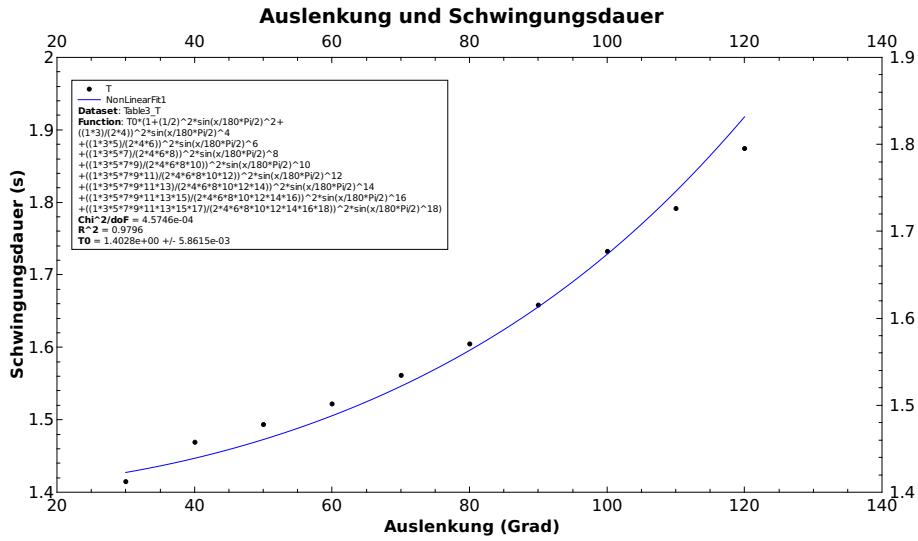


Abbildung 10: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung

Der Fit aus Abbildung 10 ergibt einen Wert von $T_0 = (1.402\,800\,0 \pm 0.005\,861\,5)$ s. Da der unterste Wert nach einem Ausreißer aussieht und die oberen Werte aufgrund von Reibungseffekten vermutlich nicht mehr allzu präzise sind, wurde noch ein zweiter Fit mit eingeschränktem Bereich durchgeführt.

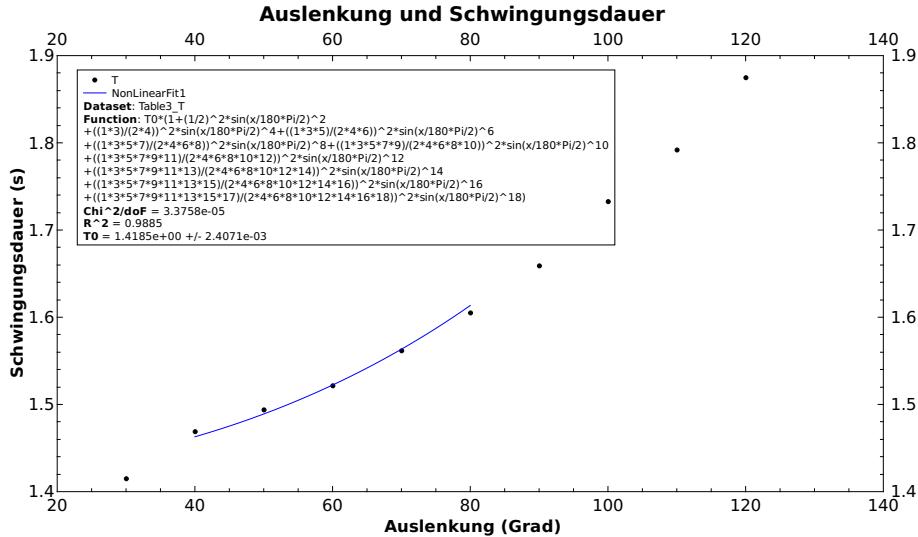


Abbildung 11: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung, eingeschränkter Bereich.

Benutzt man nur den eingeengten Wertebereich wie im Fit aus Abbildung 11, so ergibt sich $T_0 = (1.418\,500\,0 \pm 0.002\,407\,1)$ s.

3.4 Versuch 3.3.1 – Kombipendel Konfiguration 2

3.4.1 Reiterposition variabel

Hier wird folgende Formel zum Fitten verwendet:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{p+q}} \quad (12)$$

Die Federn und die Reitermasse wirken beide in die gleich Richtung rückstellend, daher das Plus-Zeichen im Nenner.

I setzt sich hier zusammen aus dem oben bestimmten Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur, aus dem Massenträgheitsmoment I_{Reiter} des Reiters (approximiert als Punktmasse, da hier der Reiter mit 200 g verwendet wurde) und dem Anteil I_{Federn} der Federn. Gefittet wird dann über die Federkonstante k im Parameter $p = 2kr^2$, wobei $r = 80.2$ mm der Angriffsradius der Federn an der Seilscheibe ist (plus der Radius des Seils).

Es gilt also:

- $I_0 =$
- $I_{Reiter} = 200 \text{ g} \cdot a^2$
- $I_{Federn} = \frac{1}{3} \cdot m_{Federn} \cdot 80.2 \text{ mm}^2$
- $p = 2 \cdot k \cdot 80.2 \text{ mm}^2$
- $q = m \cdot g \cdot a$ (a : Reiterposition)

Die Masse der Federn ist 155.5 g für beide Federn kombiniert. Für das Massenträgheitsmoment I_0 verwenden wir den Wert von 12.311 g m^2 aus dem eingeschränkten Fit über die Reitermasse, den wir oben bestimmt haben.

Somit erhält man als Formel für T , welche für den Fit in Abbildung 12 verwendet wurde:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12.311 \text{ g m}^2 + \frac{1}{3} \cdot 155.5 \text{ g} \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot a^2}{2 \cdot k \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot 9.807 \text{ m s}^{-2} \cdot a}} \quad (13)$$

a entspricht der x-Achse, gefittet wird über k .

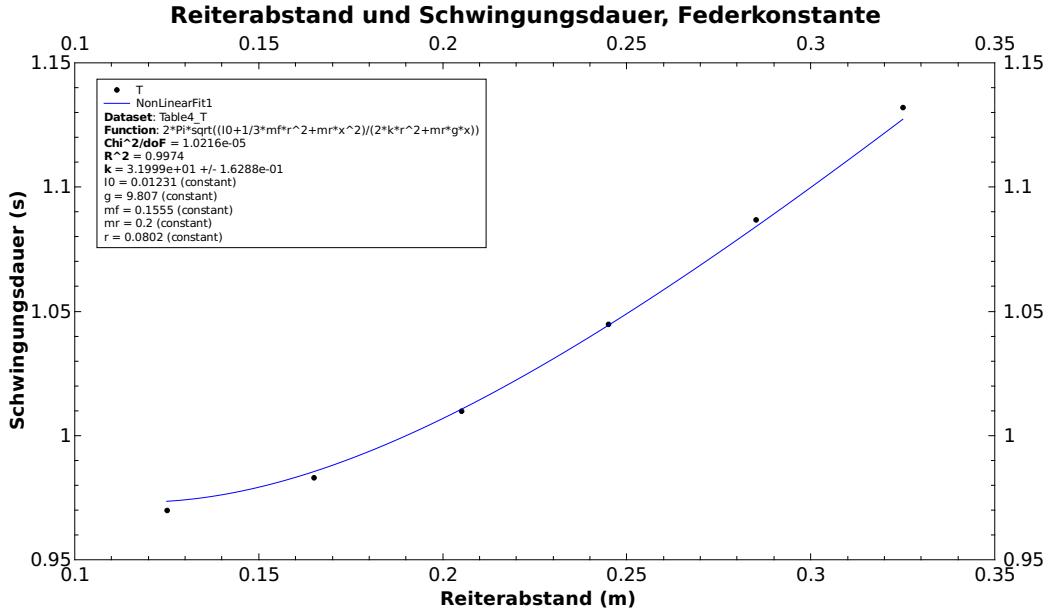


Abbildung 12: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reiterposition beim Kombipendel, gefittet für Federkonstante k

Aus dem in Abbildung 12 dargestellten Fit ergibt sich ein Wert für die Federkonstante von $k = (31.999\,00 \pm 0.162\,88) \text{ N m}^{-1}$, was ziemlich nahe beim Wert aus der Versuchsanleitung von 32 N m^{-1} ist.

3.4.2 Auslenkung variabel

Bei dieser Messung stimmt offensichtlich etwas nicht so ganz, allerdings bin ich mir nicht sicher, wo der Fehler genau liegt.

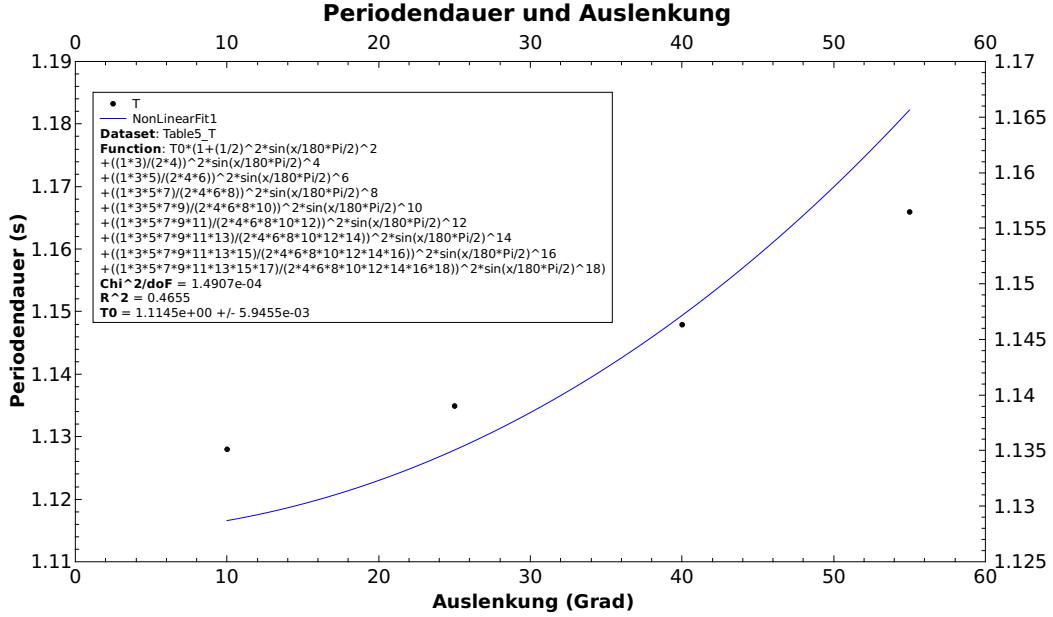


Abbildung 13: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung beim Kombipendel

Der Fit aus Abbildung 13 ergibt einen Wert $T_0 = (1.402\,800\,0 \pm 0.005\,861\,5)$ s, was zwar einigermassen plausibel erscheint (verglichen mit den Messwerten), jedoch ist der Kurvenverlauf nicht wirklich passend zu den Messwerten. Allenfalls wären hier noch mehr Messungen durchzuführen.

Für die Anzahl Terme wurden hier die gleichen Überlegungen gemacht wie bereits in Abschnitt 3.3 auf Seite 13 dokumentiert.

3.5 Versuch 3.3.2 – Kombipendel Konfiguration 3

Der kritische Abstand a_{krit} wurde durch Probieren auf einen Wert zwischen 195 mm und 205 mm bestimmt. Die Versuchsreihe wurde daher mit Werten von $a \leq 195$ mm durchgeführt. Da Reitermasse und Federkraft sich hier entgegenwirken, ist im Nenner zwischen p und q ein Minuszeichen zu finden.

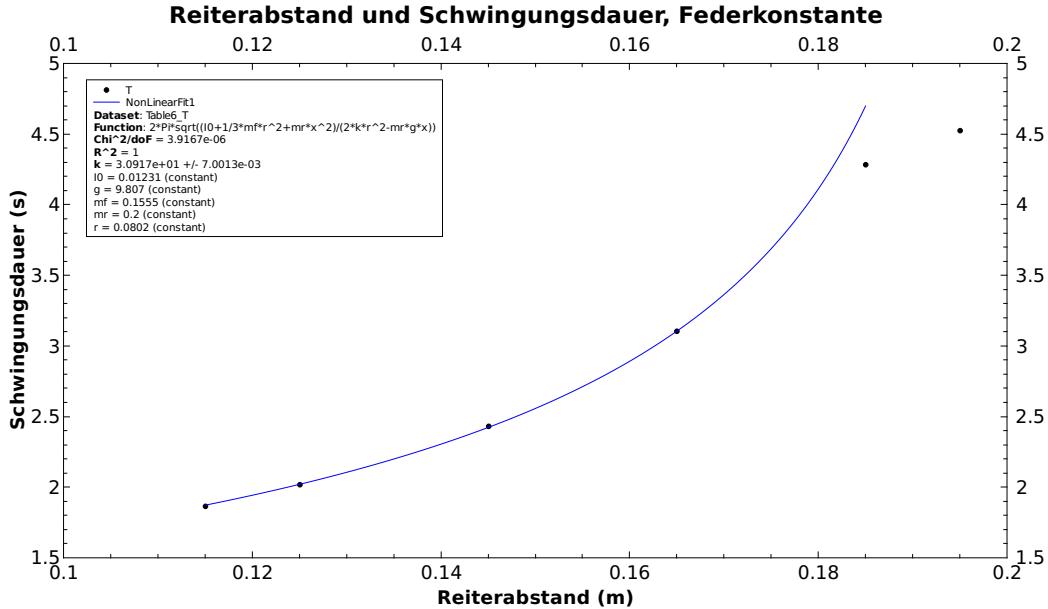


Abbildung 14: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reiterposition beim invertierten Kombipendel unterhalb des kritischen Abstandes. Letzter Messpunkt wurde als Ausreißer behandelt und im Fit nicht berücksichtigt.

Auch hier wurde die folgende Formel verwendet:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12.311 \text{ g m}^2 + \frac{1}{3} \cdot 155.5 \text{ g} \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot a^2}{2 \cdot k \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot 9.807 \text{ m s}^{-2} \cdot a}} \quad (14)$$

Die verwendeten Parameter sind

- $I_0 = 12.311 \text{ g m}^2$.
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$
- $m_{\text{Federn}} = 155.5 \text{ g}$
- $m_{\text{Reiter}} = 200 \text{ g}$
- $r = 80.2 \text{ mm}$

Gefittet wurde wiederum für die Federkonstante, was einen Wert von $k = (30.917\,000\,0 \pm 0.007\,001\,3) \text{ N m}^{-1}$, ergibt.

Dieser liegt auch ziemlich nahe beim Wert aus der Versuchsanleitung.

3.6 Versuch 3.3.3 – Ruhelagen

3.6.1 Reiterposition

Auch mit dem invertierten Pendel und dem Reiter ausserhalb des kritischen Abstandes kann wiederum die Federkonstante k bestimmt werden. Allerdings muss hier eine andere Formel verwendet werden:

$$\frac{\varphi_0}{\sin(\varphi_0)} = \frac{a}{a_G} = \frac{q}{p} = \frac{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}{2 \cdot k \cdot r^2} \quad (15)$$

Wobei $r = 80.2 \text{ mm}$, $m_{Reiter} = 200 \text{ g}$ und $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$. a entspricht der x-Achse, gefittet wurde über k .

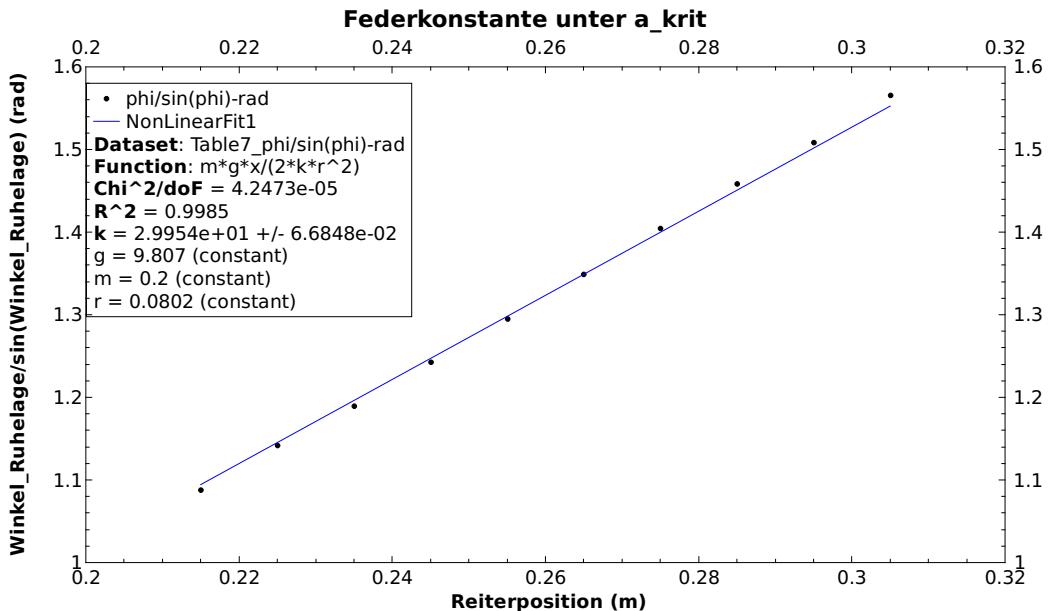


Abbildung 15: Bestimmung des Parameters k via Ruhelage, $a > a_{krit}$

Aus dem Fit in Abbildung 15 erhält man also $k = (29.954\,000 \pm 0.066\,848) \text{ N m}^{-1}$. Auch dieses Ergebnis scheint mir recht zufriedenstellend.

3.6.2 Schwingungsdauer

Zu guter Letzt sind in Abbildung 16 die Periodenzeiten in Abhängigkeit der Reiterposition ausserhalb des kritischen Abstandes geplotted. Es wurde aber gemäss Versuchsanleitung kein Fit ausgeführt.

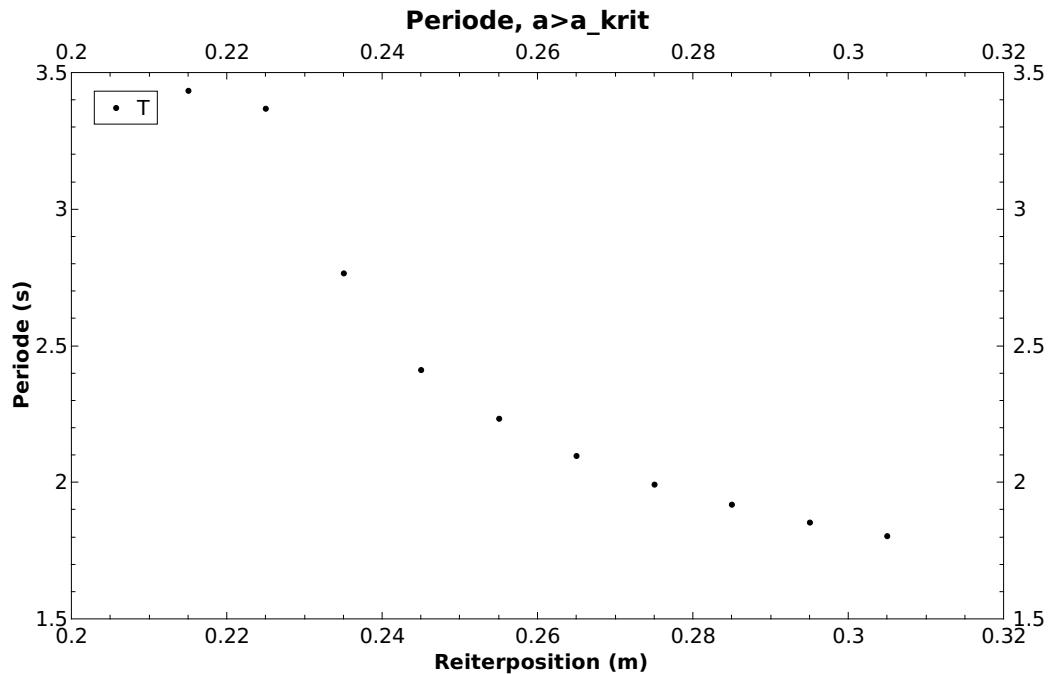


Abbildung 16: Periode in Abhängigkeit der Reiterposition für $a > a_{krit}$

4 Fehlerrechnung

Auf eine Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

5 Resultate und Diskussion

Es gibt drei Parameter zu evaluieren: Das Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur ohne Reiter, die Periodendauer T_0 für kleine Auslenkungen und die Federkonstante k . Die numerischen Resultate für I_0 sind in Tabelle 4 zu finden; Abbildung 17 zeigt einen graphischen Vergleich der verschiedenen Methoden.

Tabelle 4: Ergebnisse für I_0 via verschiedene Methoden

Methode	Resultat
Versuch 3.1.1	$(12.03 \pm 0.02) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Punktmasse approximiert	$(11.4 \pm 0.4) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Zylinder modelliert	$(11.3 \pm 0.4) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Zylinder modelliert, eingeengter Fit-Bereich	$(12.31 \pm 0.09) \text{ g m}^2$
Referenz Versuchsanleitung	11.6 g m^2

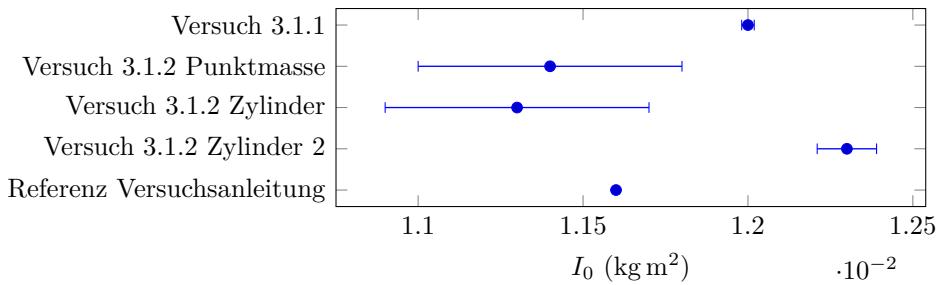


Abbildung 17: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für I_0

Für die Periode T_0 beim Schwerependel ergaben sich zwei Werte, einer für den vollen Messbereich, und einer aus dem Fit über den eingeschränkten Wertebereich. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 5 respektive Abbildung 18 zu finden.

T

Tabelle 5: Ergebnisse für T_0 des Schwerependels

Versuch	Resultat
voller Messbereich	$(1.403 \pm 0.006) \text{ s}$
eingeschränkter Wertebereich	$(1.419 \pm 0.002) \text{ s}$

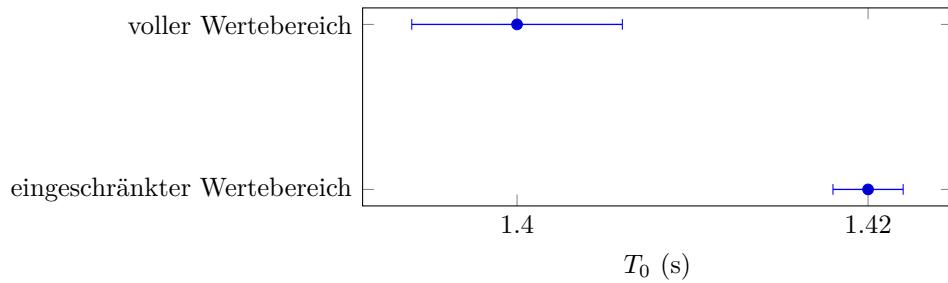


Abbildung 18: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für T_0 beim Schwerependel

Zu guter Letzt werden in Tabelle 6 und Abbildung 19 noch die Werte für die Federkonstante k dargestellt und verglichen.

Tabelle 6: Ergebnisse für k via verschiedene Methoden

Methode	Resultat
Versuch 3.3.1	$(32.0 \pm 0.2) \text{ N m}^{-1}$
Versuch 3.3.2	$(30.917 \pm 0.007) \text{ N m}^{-1}$
Versuch 3.3.3	$(29.95 \pm 0.07) \text{ N m}^{-1}$
Referenzwert	32.0 N m^{-1}

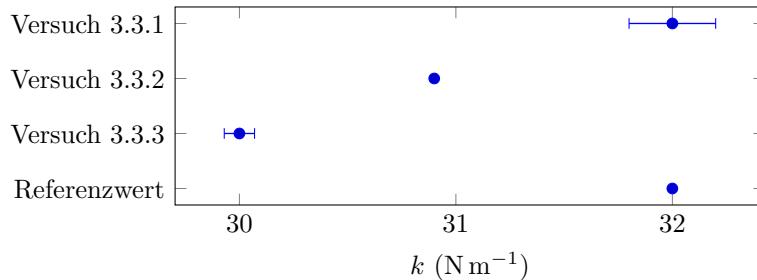


Abbildung 19: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für k

Alles in Allem beurteile ich die Ergebnisse zufriedenstellent, mit Ausnahme des Fits in Abschnitt 3.4.2 auf Seite 17, welcher aus mir bisher unbekannten Gründen nicht wirklich stimmt (zumindest soweit ich dies beurteilen kann).

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 23. März 2016.

Versuch / Probe: V14b

Datum: 25.2.16

Parameter / Einstellungen:

3.1.1

31.3

α	$a [m]$	T [s]
20°	125	1,56
	145	1,50
	165	1,46
	185	1,43
	205	1,42
	225	1,41
	245	1,405
	265	1,408
	285	1,415
	305	1,424
	325	1,436

Prober:	200S	a = 325	l = 30mm
q	T [s]		
10°	1,428		
11°	1,428		
12°	1,429		
13°	1,430		
14°	1,430		
15°	1,431		
16°	1,432		
17°	1,433		
18°	1,434		
19°	1,435		
20°	1,436		

3.1.3 Probe: 200g $a = 325$ $l = 30\text{mm}$

6	T
30	1,451
40	1,465
50	1,494
60	1,522
70	1,562
80	1,605
90	1,655
100	1,733
110	1,792
120	1,875

Beschreibungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe:

Datum: 25.7.16

Parameter / Einstellungen:

3.1.2

Zusatzversuch

 Probe: $\theta = 20^\circ$ $a = 375\text{mm}$

m	T	l
100	1,671	XQ 15
200	1,436	30
300	1,348	45
400	1,303	60
500	1,275	75
600	1,257	90
700	1,244	105

 Probe: $m = 2 \times 100\text{g}$ $\theta = 20^\circ$

a	T
207,5	1,442
247,5	1,566
287,5	1,697
327,5	1,840
367,5	
407,5	

 Masse
 Probe


Länge Probe

Probe:

Probe:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Seite

Visum Dozent: _____

Versuch / Probe: 3.3

Datum: 25.2.16

Parameter / Einstellungen:

3.3.1 variabler Abstand

variabler Winkel

 Probe: 700g $l=30\text{mm}$

 Probe: 700g $l=30\text{mm}$ $\alpha = 325$

$\alpha = 20^\circ$	α	T
	125	0,970
	165	0,983
	205	1,010
	245	1,045
	285	1,087
	325	1,132
	365	

α	T
10°	1,128
25°	1,135
40°	1,148
55°	1,166



Probe:

Probe:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Seite

Visum Dozent:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe:

Datum: 25.7.16

Parameter / Einstellungen:

3.3.3

Durchmesser Messproben:

 m_{100g} : 20mm; 36.2mm
 m_{100g} : 15mm: 34.4mm
 m_{200g} : 34.4mm
 $m=200$ $l=30\text{mm}$
 $300g$: 34.4mm
 $400g$: 34.4mm


nach links

α	ℓ_0 links	ℓ_0 rechts	T	$\Delta \varphi$
205	50	51	3,370	60
235	57	58	2,765	67
245	64	69	2,413	74
255	70	69	2,234	80
265	75	74	2,098	85
275	80	78	1,952	90
285	84	82	1,820	94
295	87,5	85	1,859	97,5
305	91	88,5	1,804	101
215	41	40	3,434	51

Beobachtungen/Bemerkungen: