

# O12 – Laser Doppler Anometrie

28.04.2016

---

Versuchsleiter: Raphael Frey  
Assistent: Mario Häsler

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Arbeitsgrundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Messprinzip . . . . .	1
1.2	Grundlagen aus der Fluid-Dynamik . . . . .	3
1.2.1	Vorbereitung auf Messaufgaben . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
2.1	Versuchsanordnung . . . . .	6
2.2	Messgeräte . . . . .	8
2.3	Ablauf . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>12</b>
3.1	Schnittwinkel der Laserstrahlen . . . . .	12
3.2	Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung . . . . .	13
3.3	Strömungsprofil im laminaren Fall . . . . .	13
3.4	Strömungsprofil im turbulenten Fall . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Resultate und Diskussion</b>	<b>15</b>

## Versionsgeschichte

27.04.2016 Version 0.1

# 1 Arbeitsgrundlagen

In diesem Versuch kommen verschiedene Bereiche aus der Physik zusammen, primär Fluid-Dynamik und Optik. Entsprechend ergibt sich auch die Gliederung dieses Kapitels.

## 1.1 Messprinzip

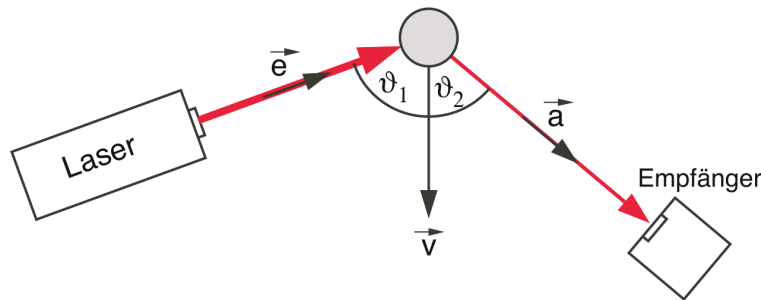
Das Verfahren nutzt den optischen Dopplereffekt, um die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid zu detektieren. Trifft ein Lichtstrahl der Frequenz  $f$  auf ein bewegtes Objekt, unterscheidet sich die vom Objekt detektierte Frequenz  $f_1$  ein wenig von der vom Sender emittierten Frequenz  $f_0$ .

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta_1\right) \quad (1)$$

Wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $\vec{e}$  ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahls und  $\vec{v}$  der Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes ist. Wird der Lichtstrahl am bewegten Objekt gestreut und anschliessend von einem Empfänger detektiert, ergibt sich für diesen die Frequenz  $f_2$ :

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (2)$$

$\vec{a}$  ist dabei ein Einheitsvektor in Ausfallsrichtung des gestreuten Strahls. Die Konfiguration ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt.

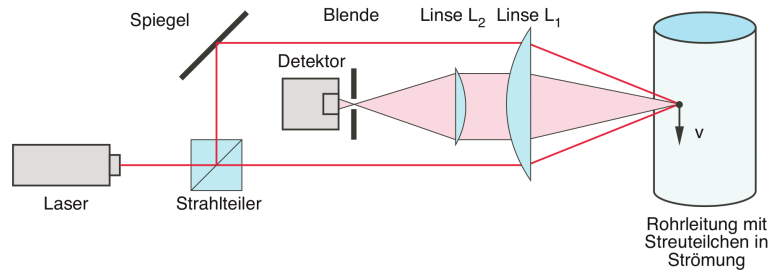


**Abbildung 1:** Dopplereffekt mit stationärem Sender, bewegtem Streuer und stationärem Detektor.

Quelle: Versuchsanleitung

Da bei technischen Geschwindigkeiten das Verhältnis  $\frac{v}{c}$  sehr klein ist, ergeben sich unter solchen Umständen lediglich minime Unterschiede in den Frequenzen  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_2$ . Eine präzise Messung der Frequenzunterschiede ist somit enorm schwierig, weshalb man sich eines Zwei-Strahl-Verfahrens bedient. Da die beiden Teilstrahlen dabei in unterschiedlichen Winkeln  $\vartheta_1$  (vgl. Formel 1) auf das streuende Teilchen treffen, erfahren sie unterschiedliche Doppler-Verschiebungen ihrer Frequenzen.

Überlagert man nun die beiden Teilstrahlen in einem Detektor, ergibt sich eine Schwebung, deren Frequenz bedeutend tiefer als  $f_0$  ist, und somit verhältnismässig gut detektiert werden kann.



**Abbildung 2:** Zwei-Strahl-Anordnung. *Quelle:* Versuchsanleitung

Eine häufig verwendete Konfiguration ist in Abbildung 2 zu sehen.

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl auf zwei Strahlen auf und ein Spiegel sorgt dafür, dass zwei parallele Strahlen entstehen, die anschliessen durch eine Linse  $L_1$  mit Brennweite  $f_1$  wieder zusammengeführt werden. Fliesst ein Streuteilchen durch diesen Schnittpunkt, ergeben sich für die beiden Teilstrahlen zwei unterschiedliche Frequenzen aufgrund des Dopplereffekts:

$$f_1 = f_0 \cdot \left( 1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left( 90^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left( 1 - \frac{v}{c} \cdot \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (3)$$

$$f_2 = f_0 \cdot \left( 1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left( 90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left( 1 + \frac{v}{c} \cdot \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (4)$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Die beiden Wellenzüge werden anschliessend in einem einzelnen Empfänger zusammengeführt. Die durch diese Überlagerung erzeugte Schwebung errechnet sich nach einigen trigonometrischen Umformungen zu (beachte, dass beide Signale die gleiche Amplitude haben, was die Sache etwas vereinfacht):

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = 2A \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (6)$$

## 1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik

### 1.2.1 Vorbereitung auf Messaufgaben

3.1 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall

**fix: avg over flaeche**

$$\frac{v(r)}{v_{max}} = \frac{1}{v_{max} \cdot R} \cdot \int_0^R v(r) \, dr = \frac{1}{R} \cdot \int_0^R 1 - \frac{r^2}{R^2} \, dr = \frac{1}{2} \quad (7)$$

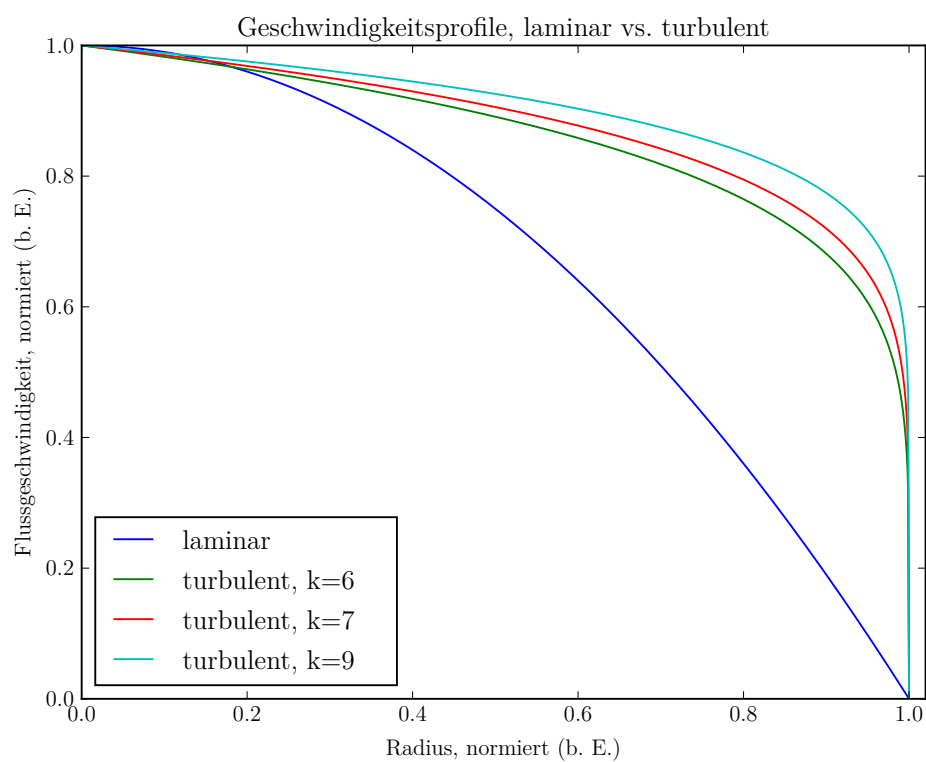
3.2 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall:

$$v(r) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (8)$$

$$v_m = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (9)$$

$$\frac{v_m}{v_{max}} = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot r \, dr = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (10)$$

3.3 – Vergleich von laminarem und turbulentem Strömungsprofil



**Abbildung 3:** Laminares vs. turbulente Strömungsprofile, normiert

### 3.4 – Volumenstrom und Rohrradius bei gleichem Druckgefälle (via Sympy)

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \quad (11)$$

### 3.5 – Reynoldszahlen

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (12)$$

$$\dot{V}_{min} = 0.5 \text{ L min}^{-1} = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (13)$$

$$\dot{V}_{max} = 7.5 \text{ L min}^{-1} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

$$A = \pi \cdot R^2 = 0.00126 \text{ m}^2 \quad (15)$$

$$v_{m,min} = \frac{\dot{V}_{min}}{A} = 0.0066 \text{ m s}^{-1} \quad (16)$$

$$v_{m,max} = \frac{\dot{V}_{max}}{A} = 0.099 \text{ m s}^{-1} \quad (17)$$

$$Re_{min} = \frac{\rho \cdot v_{m,min} \cdot 2R}{\eta} = 264 \quad (18)$$

$$Re_{max} = \frac{\rho \cdot v_{m,max} \cdot 2R}{\eta} = 3960 \quad (19)$$

$$\Delta f = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot v}{\lambda} = \{13.11 \text{ Hz}, 197.5 \text{ Hz}\} \text{ für } \varphi = 30^\circ \quad (20)$$

## 2 Durchführung

Da ein Grossteil dieses Versuch in der korrekten Justierung und Durchführung besteht, ist dieses Kapitel etwas umfangreicher als üblich.

### 2.1 Versuchsanordnung

Grundsätzlich folgt der Versuchsaufbau den in den Arbeitsgrundlagen beschriebenen Angaben. Die gesamte Anordnung ist schematisch in Abbildung 4 dargestellt, Abbildung 5 ist die entsprechende photographische Dokumentation. Abbildung 6 zeigt einen anderen Blickwinkel auf die Apparaturen.

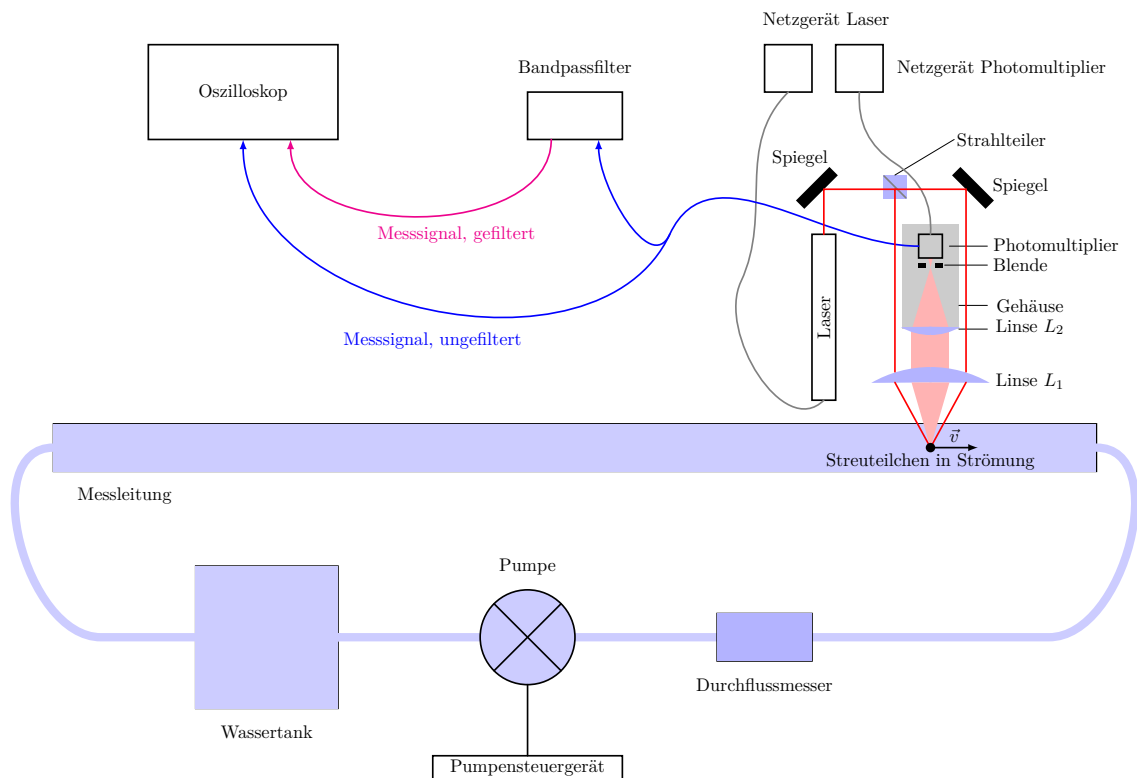
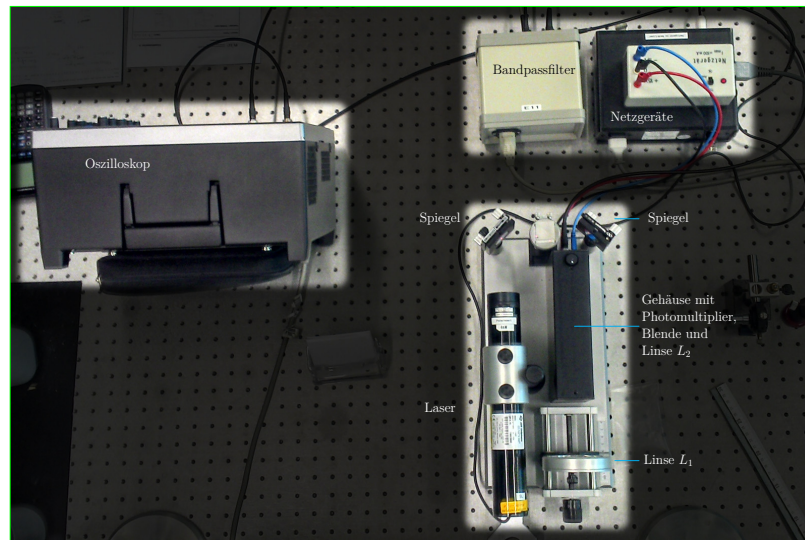
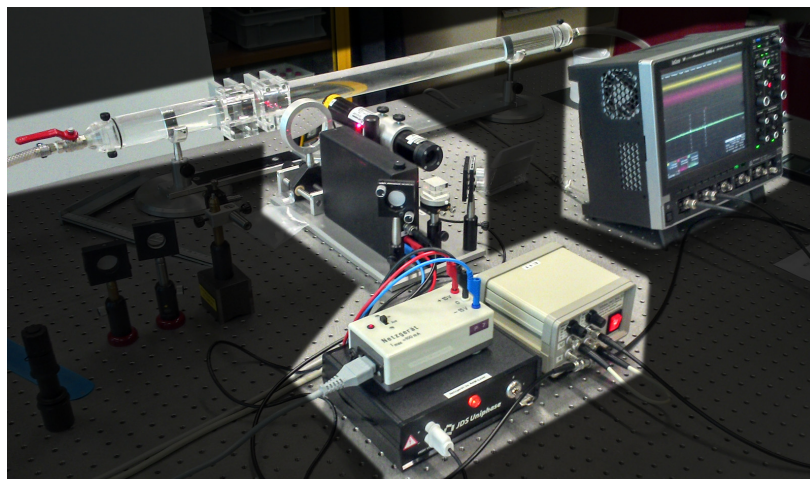


Abbildung 4: Versuchsanordnung, schematisch





**Abbildung 5:** Versuchsanordnung, Vogelperspektive. Anordnung ist grösstenteils mit dem Schema aus Abbildung 4 identisch.



**Abbildung 6:** Versuchsanordnung, andere Perspektive. Messleitung Sichtbar im Hintergrund.

## 2.2 Messgeräte

**Tabelle 1:** Geräteliste

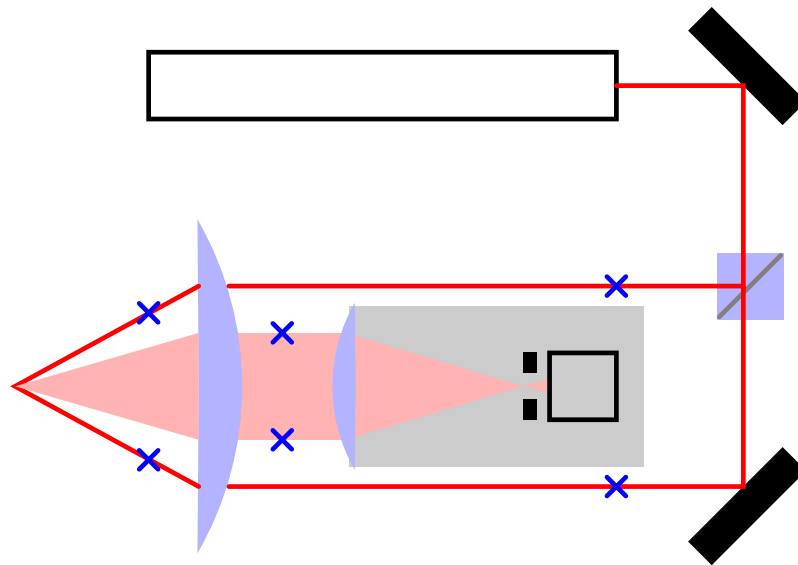
GERÄT	TYP
Oszilloskop	LeCroy WaveRunner 64MXi-A
Laser	JDS Uniphase 1122P, 4 mW, polarisiert, $\lambda = 632.8$ nm
Pumpe	
Durchflussmesser	
Detektor	Hamamatsu H9656-02 Photomultiplier
Linse $L_1$	
Linse $L_2$	
Messleitung	Plexiglasrohr, Innendurchmesser $(40.0 \pm 0.5)$ mm
Bandpassfilter	Tiefpass: 3 kHz bis 300 kHz, Hochpass: 0.3 kHz bis 30 kHz

## 2.3 Ablauf

Wie erwähnt, ist eine korrekte justierung dieses Versuches für eine erfolgreiche Durchführung von grosser Wichtigkeit. Sie beanspruchte einen beträchtlichen Teil der zur Verfügung stehenden Zeit (beinahe die Hälfte) und soll hier entsprechend auch gut dokumentiert werden.

Die Krux am Ganzen ist, dass die Laserstrahlen sich sauber in der Messleitung kreuzen und anschliessend korrekt in den Detektor geführt werden.

Dazu wurden zuerst an den in Abbildung 7 mit blauen Kreuzen markierten Punkten die Höhe der Laserstrahlen gemessen und mittels der Spiegel (siehe auch Abbildung 8) und der Linse  $L_1$  auf die gleiche Höhe eingestellt (so gut als möglich, dieses Verfahren alleine ist noch nicht genau genug).



**Abbildung 7:** Referenzpunkte für Kalibrierung (blau markiert)

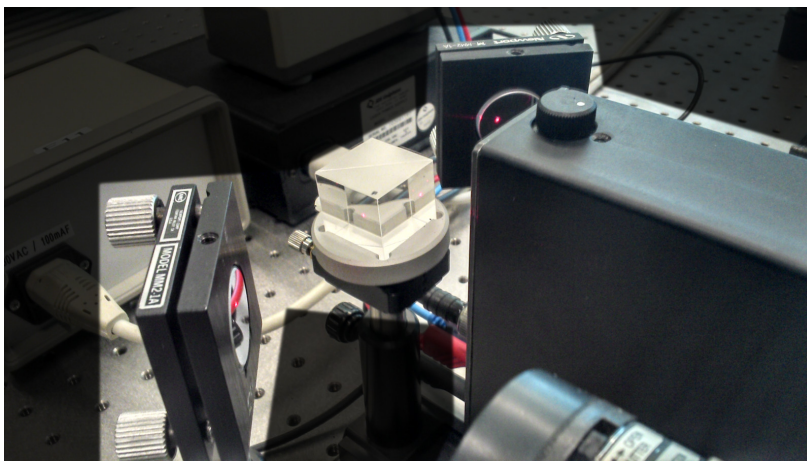
Anschliessend wurde benutzt, um die beiden Laserstrahlen auf eine Wand gegenüber der Versuchsanordnung zu projizieren. Dies ermöglichte eine exakte Zusammenführung der Laserstrahlen. Danach wurde sichergestellt, dass die Streuungen und Reflexionen der Strahlen, welche zurück in Richtung Detektor gingen, alle auf gleicher Höhe lagen. Abbildung 9 zeigt diese Strahlen vor ihrer Justierung.

Letztlich wurde überprüft, dass der Kreuzungspunkt der gestreuten Strahlen genau in der Blende (sichtbar in Abbildung 10) lag, und die Blende so weit als möglich geschlossen.

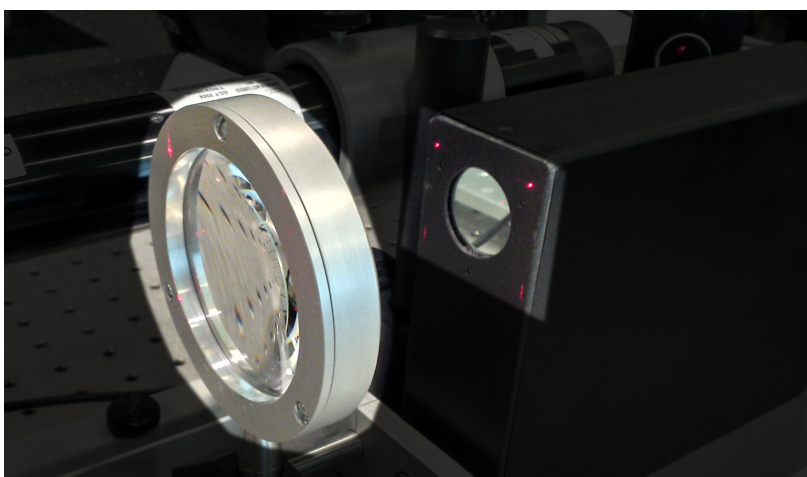
Die Kreuzung der Laserstrahlen in der Messleitung kann in Abbildung 11 gesehen werden.

Nachdem die Apparatur justiert war, wurden vier Messungen durchgeführt:

- Eine experimentelle Überprüfung der Brennweite von Linse  $L_1$ ,
- das Verhalten der Strömungsgeschwindigkeit auf der Achse der Messleitung bei Durchflussraten zwischen  $0.5 \text{ L min}^{-1}$  und  $7.5 \text{ L min}^{-1}$ ,
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei  $0.5 \text{ L min}^{-1}$  (laminarer Fall) und

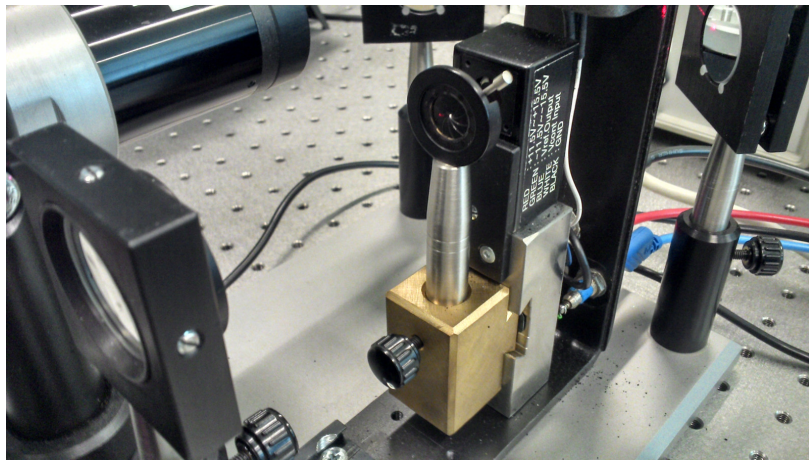


**Abbildung 8:** Die beiden Spiegel und der Strahlteiler. Die Spiegel können verstellt werden, um die Verläufe der Strahlen aufeinander abzustimmen.

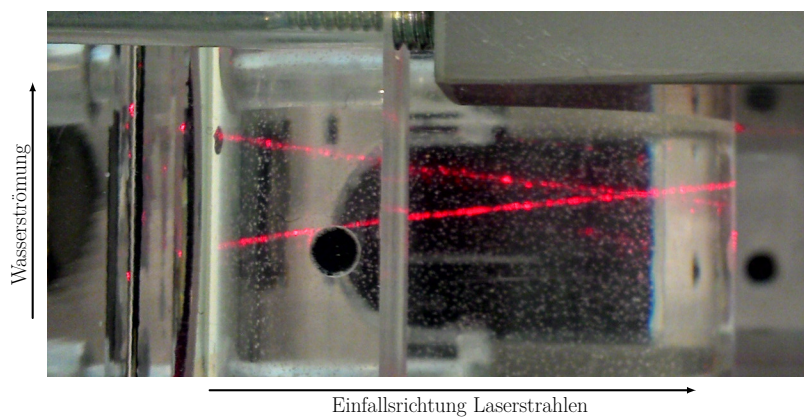


**Abbildung 9:** Die Linsen  $L_1$  (links, gross) und  $L_2$  (rechts, im schwarzen rechteckigen Rahmen). Ebenfalls sichtbar sind einige Reflexionen der Laserstrahlen am Rahmen von  $L_2$ , bevor sie justiert worden sind. Nach der Justierung liegen alle vier Punkte auf gleicher Höhe.

- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei  $7.5 \text{ L min}^{-1}$  (turbulenter Fall).



**Abbildung 10:** Linse  $L_2$ , Blende und Photomultiplier. Die Blende kann verstellt werden, um möglichst nur das vom Strömungsteilchen gestreute Laserlicht in den Photomultiplier zu lassen.



**Abbildung 11:** Aufnahme der sich kreuzenden Strahlen in der Messleitung. Wasserströmung geht von unten nach oben, die Laserstrahlen treffen von links auf die Messleitung.



### 3 Auswertung

Zuerst wurde die Brennweite von Linse  $L_1$  experimentell überprüft. Anschliessend wurde die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Messohres für verschiedene Durchflussraten gemessen. Zuletzt wurden die Strömungsprofile für den laminaren Fall und den turbulenten Fall aufgenommen.

#### 3.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen

Die Brennweite der Linsen sind zwar angegeben, wir wollen uns aber nicht darauf verlassen, und diese experimentell überprüfen. Daraus ergibt sich dann auch der Schnittwinkel  $\varphi$  der Laserstrahlen.

Es wurden die Distanzen  $d_L$  zwischen den beiden Strahlen beim Eintreten in die Linse und die Distanz  $d_f$  zwischen der Linse und dem Kreuzungspunkt der Laserstrahlen gemessen. Die Bestimmung des Schnittwinkels ist dann nur noch eine Sache von ein wenig Trigonometrie.

Für die Distanzen ergaben sich folgende Werte, mit geschätzten Unsicherheiten:

- $d_L = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
- $d_f = (130 \pm 1) \text{ mm}$

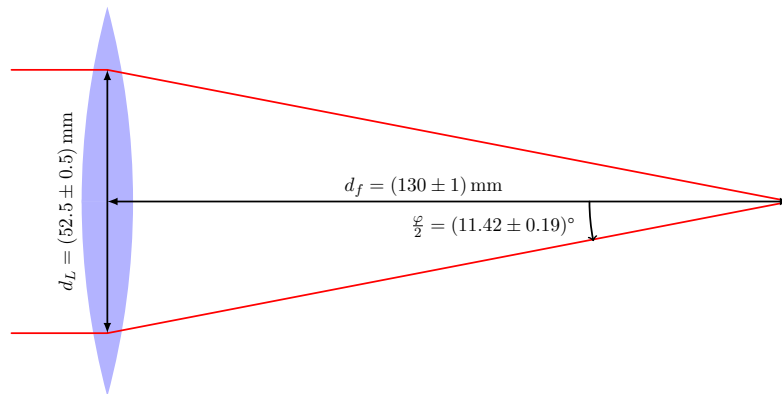
Der halbe Schnittwinkel ergibt sich dann zu:

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{d_L}{d_f} \quad (21)$$

Der kleinstmögliche Winkel ergibt sich aus der Kombination von  $d_L = 52 \text{ mm}$  und  $d_f = 131 \text{ mm}$  und beläuft sich auf  $\frac{\varphi}{2} = 11.23^\circ$ , der grösstmögliche Winkel korrespondiert mit  $d_L = 53 \text{ mm}$  und  $d_f = 129 \text{ mm}$  und ergibt  $\frac{\varphi}{2} = 11.61^\circ$ , was sich zusammenführen lässt auf einen Schnittwinkel von:

$$\varphi = (11.42 \pm 0.19)^\circ \cdot 2 = (22.8 \pm 0.4)^\circ \quad (22)$$

Der Vorgang ist schematisch in Abbildung 12 dargestellt.



**Abbildung 12:** Bestimmung des Schnittwinkels der Laserstrahlen aus der Geometrie der Versuchsanordnung. *Beachte:* Da diese Abbildung primär der Illustration der Bestimmung von  $\varphi$  und nicht der akkuraten Darstellung der Linse dient, ist hier nicht das gleiche Symbol für die Linse wie in der Versuchsanleitung benutzt worden.

**3.2 Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung**

**3.3 Strömungsprofil im laminaren Fall**

**3.4 Strömungsprofil im turbulenten Fall**

## 4 Fehlerrechnung



## **5 Resultate und Diskussion**

**Unterschrift**

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: \_\_\_\_\_

Ort, Datum: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_