

O12 – Laser Doppler Anemometrie

28.04.2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Häsler

Inhaltsverzeichnis

1	Arbeitsgrundlagen	1
1.1	Messprinzip	1
1.2	Grundlagen aus der Fluid-Dynamik	5
1.2.1	Laminare vs. Turbulente Strömung, Reynoldszahl	5
1.2.2	Strömungsprofile	6
2	Durchführung	10
2.1	Versuchsanordnung	10
2.2	Geräte	12
2.3	Erwartete Reynoldszahlen und Signalfrequenzen	13
2.4	Ablauf	14
3	Auswertung	17
3.1	Schnittwinkel der Laserstrahlen	18
3.2	Strömungsgeschwindigkeit und Unsicherheiten	19
3.3	Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung	20
3.4	Strömungsprofil im laminaren Fall	23
3.5	Strömungsprofil im turbulenten Fall	25
4	Fehlerrechnung	27
4.1	Laminares Strömungsprofil	27
4.2	Turbulentes Strömungsprofil	28
5	Resultate und Diskussion	29
Anhang A Python-Code		31
A.1	Laminare Strömung, symbolische Berechnungen	31
A.2	Turbulente Strömung, symbolische Berechnungen	31
A.3	Geschwindigkeit in Rohrmitte	32
A.4	Strömungsprofile im laminaren Fall	33
A.5	Strömungsprofile im turbulenten Fall	34
A.6	Fehlerrechnung laminares Strömungsprofil	35
A.7	Fehlerrechnung turbulentes Strömungsprofil	36
Anhang B Messprotokolle		37

Versionsgeschichte

- 27.04.2016: Version 0.1: Vorbereitung*
- 01.05.2016: Version 0.2: Arbeitsgrundlagen, Durchführung, Auswertung tlw.*
- 02.05.2016: Version 0.3: Fix Auswertung, Fehlerrechnung, Diskussion*
- 05.05.2016: Version 0.4: Formatierung, Ergänzung bei Messung Rohrmitte*

1 Arbeitsgrundlagen

In diesem Versuch kommen verschiedene Bereiche aus der Physik zusammen, primär Fluid-Dynamik und Optik. Entsprechend ergibt sich auch die Gliederung dieses Kapitels.

1.1 Messprinzip

Das Verfahren nutzt den optischen Dopplereffekt, um die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid zu detektieren. Trifft ein Lichtstrahl der Frequenz f auf ein bewegtes Objekt, unterscheidet sich die vom Objekt detektierte Frequenz f_1 ein wenig von der vom Sender emittierten Frequenz f_0 .

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta_1\right) \quad (1)$$

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit, \vec{e} ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahls und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes ist. Wird der Lichtstrahl am bewegten Objekt gestreut und anschliessend von einem Empfänger detektiert, ergibt sich für diesen die Frequenz f_2 :

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (2)$$

\vec{a} ist dabei ein Einheitsvektor in Ausfallsrichtung des gestreuten Strahls. Die Konfiguration ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt.

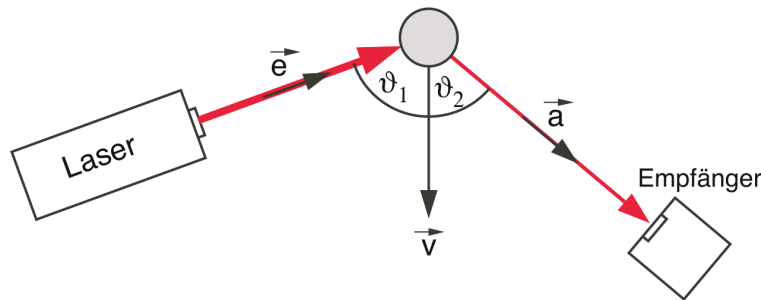


Abbildung 1: Dopplereffekt mit stationärem Sender, bewegtem Streuer und stationärem Detektor.

Quelle: Versuchsanleitung

Da bei technischen Geschwindigkeiten das Verhältnis $\frac{v}{c}$ sehr klein ist, ergeben sich unter solchen Umständen lediglich minime Unterschiede in den Frequenzen f_0 , f_1 und f_2 . Eine präzise Messung der Frequenzunterschiede ist somit enorm schwierig, weshalb man sich eines Zwei-Strahl-Verfahrens bedient. Da die beiden Teilstrahlen dabei in unterschiedlichen Winkeln ϑ_1 (vgl. Formel 1) auf das streuende Teilchen treffen, erfahren sie unterschiedliche Doppler-Verschiebungen ihrer Frequenzen.

Überlagert man nun die beiden Teilstrahlen in einem Detektor, ergibt sich eine Schwebung, deren Frequenz bedeutend tiefer als f_0 ist, und somit verhältnismässig gut detektiert werden kann.

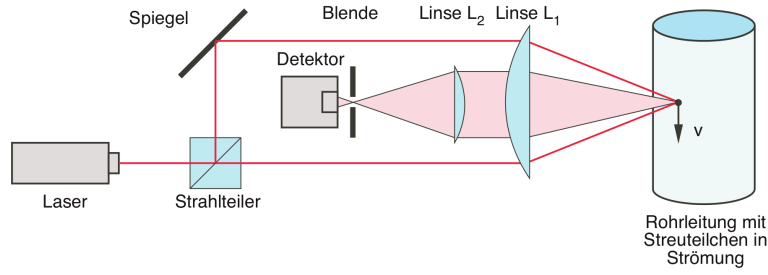


Abbildung 2: Zwei-Strahl-Anordnung. *Quelle:* Versuchsanleitung

Eine häufig verwendete Konfiguration ist in Abbildung 2 zu sehen.

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl auf zwei Strahlen auf und ein Spiegel sorgt dafür, dass zwei parallele Strahlen entstehen, die anschliessend durch eine Linse L_1 mit Brennweite f_1 wieder zusammengeführt werden. Fliesst ein Streuteilchen durch diesen Schnittpunkt, ergeben sich für die beiden Teilstrahlen zwei unterschiedliche Frequenzen aufgrund des Dopplereffekts:

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (3)$$

$$f_2 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (4)$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Die beiden Wellenzüge werden anschliessend in einem einzelnen Empfänger zusammengeführt. Die durch diese Überlagerung erzeugte Schwebung errechnet sich nach einigen trigonometrischen Umformungen zu (beachte, dass beide Signale die gleiche Amplitude haben, was die Sache etwas vereinfacht):

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = 2A \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (6)$$

Nun wird in einem Detektor jedoch nicht die Schwebung selbst, sondern ihre Intensität gemessen. Diese ist als das Quadrat der Schwebung definiert:

$$\begin{aligned} I(t) &= S^2(t) \\ &= A^2 \cdot \left(\cos^2(\omega_1 \cdot t) + \cos^2(\omega_2 \cdot t) + 2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \left(1 + \cos(2\omega_1 \cdot t) + \cos(2\omega_2 \cdot t) + 4 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cos(\omega_2 \cdot t) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \left(2 + \cos(2\omega_1 \cdot t) + \cos(2\omega_2 \cdot t) + 2 \cdot \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t) + 2 \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Die verschiedenen in Gleichung 7 auftretenden Anteile des Gesamtsignals sind in Abbildung 3 auf Seite 3 einzeln dargestellt, zusammen mit dem totalen Signal.

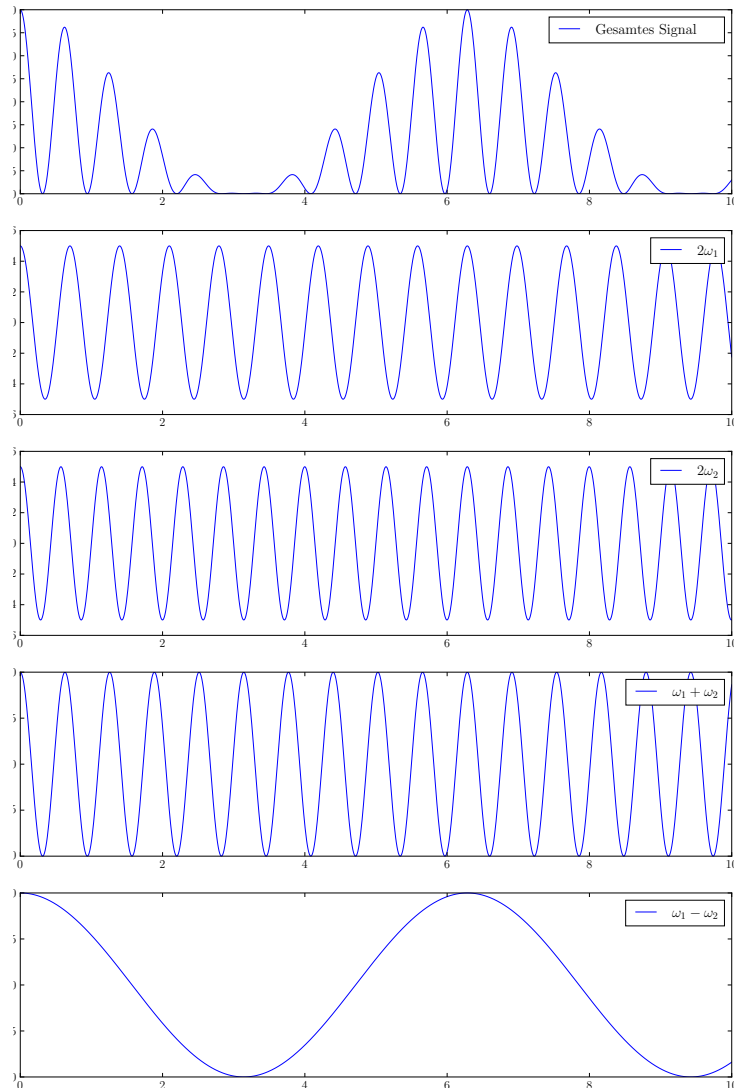


Abbildung 3: Konstruktion einer Schwebung aus einzelnen Frequenzen. Zuerst das gesamte Signal, dann die drei höherfrequenten Anteile und am Schluss das Signal, welches vom Detektor gesehen werden kann. Abbildung 4 auf Seite 4 zeigt noch eine Überlagerung des Gesamtsignals mit der langsamen Schwingung.

Der Detektor ist im Vergleich zur Lichtfrequenz ziemlich langsam und kann somit die Schwingungen der höheren Frequenzen $2\omega_1$, $2\omega_2$ und $\omega_1 + \omega_2$ nicht detektieren, wohl aber die langsame Schwebungsfrequenz $\omega_1 - \omega_2$. Mathematisch kann man dies als eine Mittelung über eine Zeit in der Größenordnung von $\frac{1}{|f_1 - f_2|}$ betrachten. In diesem Falle werden die schnelleren Schwingungen ausgemittelt und verschwinden, lediglich der langsamste Anteil bleibt noch übrig. Dies ergibt für das im Detektor ausgewertete Signal:

$$I^* = A^2 \cdot \left(1 + \cos \left((\omega_1 - \omega_2) \cdot t \right) \right) \quad (8)$$

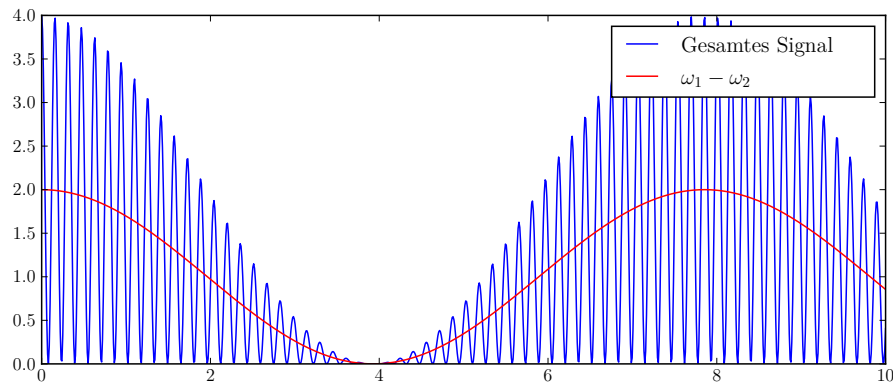


Abbildung 4: Ergänzung zu Abbildung 3. Gesamtschwingung mit schnellen Anteilen in blau und dem im Detektor ausgewerteten langsamen Anteil in rot

Nun kann man aus diesem detektierten Signal (rot in Abbildung 4) die Geschwindigkeit des Streuteilchens bestimmen (unter der Annahme, dass es gleich schnell wie die Strömung ist, was bei ausreichend kleiner Teilchengrösse der Fall ist), indem man Gleichung 5 nach v auflöst und $\frac{f_0}{c} = \lambda$ substituiert, was auf folgende Formel führt:

$$v = \frac{\lambda \cdot f_{\text{Detektor}}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (9)$$

Wobei:

λ : Wellenlänge des Laserlichts

f_{Detektor} : vom Detektor gemessene Frequenz, **rot** in Abbildung 4

φ : Kreuzungswinkel der Laserstrahlen

1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik

Es sollen an dieser Stelle einige für den Versuch relevante Grundlagen aus der Fluidodynamik erläutert werden.

1.2.1 Laminare vs. Turbulente Strömung, Reynoldszahl

Eine Strömung, die durch ein zylindrisches Rohr fließt, wird nicht überall die gleiche Geschwindigkeit haben. An der Kontaktfläche mit dem Rohr wird die Flussgeschwindigkeit null sein (Randbedingung der entsprechenden Differentialgleichung), während sie im Inneren des Rohres ein Strömungsprofil mit verschiedenen Geschwindigkeiten, abhängig von der radialen Position, aufweist.

Der Verlauf dieses Strömungsprofils kann grob in zwei Fälle aufgeteilt werden:

- **laminares Strömungsprofil:** Es bilden sich Bereiche mit ziemlich konstanter Fließgeschwindigkeit heraus (Linien, wenn man einen Längsschnitt betrachtet). Die Fließgeschwindigkeiten des Fluids zwischen diesen Schichten unterschieden sich nur minimal. Schematisch dargestellt in Abbildung 5.
- **turbulentes Strömungsprofil:** Ab einer bestimmten Fließgeschwindigkeit bilden sich keine sauberen Strömungsbereiche mehr heraus, das Fluid wird durchmischt und durchwirbelt. Schematisch dargestellt in Abbildung 6.



Abbildung 5: laminares Strömungsprofil
Quelle: Versuchsanleitung

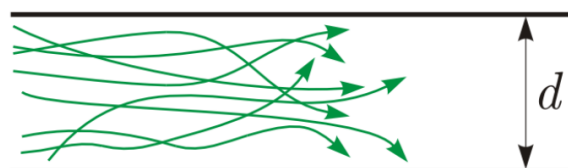


Abbildung 6: turbulentes Strömungsprofil
Quelle: Versuchsanleitung

Zur Beurteilung, ob man es mit laminarem oder turbulentem Fluss zu tun hat, wird die *Reynoldszahl* herangezogen, die wie folgt definiert ist:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (10)$$

Wobei:

ρ : Dichte des Fluids

v_m : mittlere Strömungsgeschwindigkeit

L : eine typische Abmessung

η : dynamische Viskosität des Fluids (Materialkonstante)

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Ähnlichkeitszahl, die dazu dient, Systeme gleicher Form aber verschiedener Abmessungen miteinander vergleichen zu können. Ihre Notwendigkeit ergibt sich daraus, dass sich Fluide auf verschiedenen Grössenskalen nicht gleich verhalten.

Zum Beispiel ist Wasser für mikroskopische Lebewesen sehr zähflüssig, im Gegensatz zu einem Lebewesen unserer Größenordnung. Selbst Luft ist für kleinste Lebewesen dickflüssig.

Will man das Verhalten eines modellierten Systems (z.B. Flugzeugmodell in einem Windkanal) in einem Fluid mit der Realität vergleichen, müssen die Reynoldszahlen des Modellversuchs und der Realität übereinstimmen.

Im Falle von zylindrischen Rohrleitungen hat man experimentell bestimmt, dass die zu verwendende charakteristische Länge L mit dem Rohrdurchmesser gleichzusetzen ist und dass die Strömung bis zu einer kritischen Reynoldszahl $Re_{krit} \approx 2000$ noch laminar ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass die kritische Reynoldszahl von der Systemform abhängt; für eine Trompete wird Re_{krit} anders sein.

1.2.2 Strömungsprofile

Aufgrund der Reibung innerhalb eines Fluids ist die Strömungsgeschwindigkeit innerhalb eines Fluids meist örtlich variabel. Normalerweise wird dies mit einem Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z)(t)$ beschrieben. Im stationären Fall fällt die Zeitabhängigkeit heraus und man erhält $\vec{v}(x, y, z)$.

In diesem Versuch werden lediglich rotationssymmetrische Strömungen in zylindrischen Rohrleitungen betrachtet, womit sich das Strömungsfeld aufgrund radialer Symmetrie zu $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(r)$ vereinfacht.

Liegt laminare Strömung vor, kann das Strömungsprofil analytisch berechnet werden; das Resultat ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille; ein parabolisches Strömungsprofil, abgebildet in Abbildung 7.

$$v(r) = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (11)$$

Wobei:

- r : radiale Position
- R : Radius der Rohrleitung
- Δp : Druckdifferenz über Leitungsstück der Länge l
- η : dynamische Viskosität
- l : Länge des betrachteten Rohrstückes
- v_{\max} : maximale Strömungsgeschwindigkeit

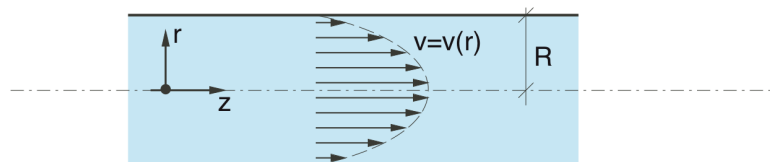


Abbildung 7: Gesetz von Hagen-Poiseuille *Quelle:* Versuchsanleitung

Will man den Volumenstrom bestimmen, ist dazu das Strömungsprofil über den Querschnitt zu integrieren (aufgrund der radialen Symmetrie vereinfacht sich das Integral zu einer Integration über den Radius):

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \int_{\text{Rohrquerschnitt}} v(r) \, dF \\
 &= \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \\
 &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot v_{\max}}{2} \\
 &= A \cdot v_m \\
 &= \pi \cdot R^2 \cdot v_m
 \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus lässt sich nun leicht der Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit v_m und der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall v_{\max} herleiten:

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

Damit sich das parabolische Strömungsprofil aus Gleichung 11 ausbilden kann, ist eine genügend lange Leitung erforderlich. Beim Eintrittsbereich ist das Strömungsprofil noch nicht parabolisch; das parabolische Strömungsprofil bildet sich erst im Verlaufe der Leitung. Dieser Effekt ist in Abbildung 8 dargestellt.

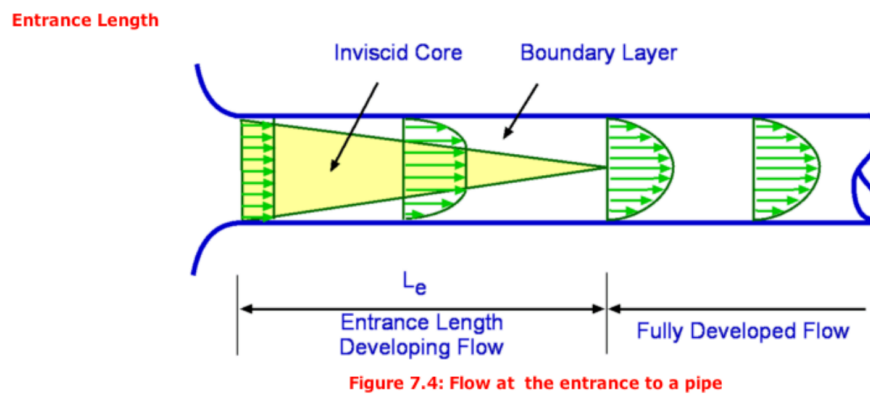
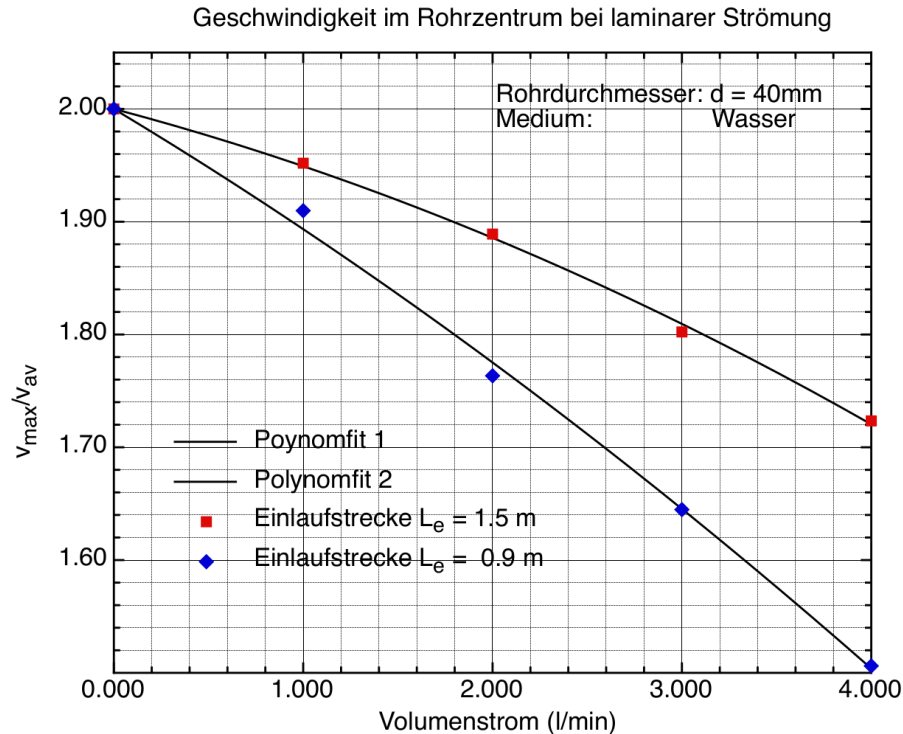


Abbildung 8: Ausbildung des laminaren Strömungsprofils über die Rohrlänge *Quelle:* Versuchsanleitung

Gemäss Versuchsanleitung wäre für ein perfektes laminares Strömungsprofil eine Messleitung der Länge von ca. 5 m erforderlich, was in diesem Versuch nicht erreicht wird. Die Abweichung des Verhältnisses $\frac{v_{\max}}{v_m}$ vom in Gleichung 13 bestimmten Verhältnis ist in Abbildung 9 dargestellt.



Fitfunktion: $y = 2 \cdot (a_1 - x) \cdot (a_2 - x) / a_1 / a_2$

nach 1.5m: $a_1 = -21.530$, $a_2 = 14.57$
nach 0.9m: $a_1 = -29.133$, $a_2 = 11.085$

Abbildung 9: Verhältnis $\frac{v_{\max}}{v_m}$ in Funktion des Volumenstroms bei zu kurzen Einlaufstrecken. *Quelle:* Versuchsanleitung

Man kann auch den Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom und dem Rohrradius bei gleichem Druckgefälle untersuchen. Dabei wird für v_{\max} der in Gleichung 11 bereits angetroffene Wert eingesetzt und die Formel anschliessend über die Fläche integriert. Das Resultat lautet:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^R \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \\ &= \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \end{aligned} \quad (14)$$

Es ergibt sich also eine Abhängigkeit vom Rohrradius in vierter Potenz!

Zur Lösung der Integrale aus Gleichungen 12 und 14 wurde SymPy benutzt; das zugehörige Script kann in Anhang A.1 auf Seite 31 gefunden werden.

Im turbulenten Fall ist die Sache nicht mehr ganz so einfach. In der Mitte wird das Geschwindigkeitsprofil abgeflacht und entlang der Wand bilden sich eine Grenzschicht mit grossen Geschwindigkeitsunterschieden aus. Die Geschwindigkeit nimmt gegen die Mitte des Rohres nur noch wenig zu. Schematisch dargestellt ist dieser Effekt in Abbildung 10.

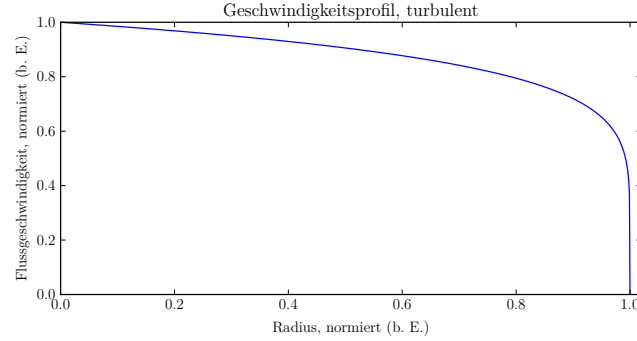


Abbildung 10: Turbulentes Strömungsprofil (eine Rohrhälfte), vereinfachte Darstellung basierend auf dem Potenzgesetz aus Gleichung 15.

Häufig kommt in dieser Situation ein phänomenologisches Potenzgesetz zur Anwendung:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (15)$$

Wobei:

v_{\max} : maximale Strömungsgeschwindigkeit

r : radiale Position

R : Radius Leitung

k : Modellierungsparameter; abhängig von Reynoldszahl, experimentell zu bestimmen^I

Die Bestimmung des Volumenstroms, der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und des Verhältnisses derselben zur maximalen Strömungsgeschwindigkeit erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie bei laminarer Strömung:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (16)$$

$$\dot{V} = \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_{\max} \cdot R^2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (17)$$

$$v_m = \frac{\dot{V}}{R^2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot v_{\max} \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (18)$$

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (19)$$

Auch hier wurde SymPy eingesetzt. Das zugehörige Script ist in Anhang A.2 auf Seite 31 zu finden.

^ITypische Werte für k sind: $k = 6 : Re \approx 4000$, $k = 7 : Re \approx 10^5$, $k = 9 : Re \approx 10^6$

2 Durchführung

Da ein Grossteil dieses Versuch in der korrekten Justierung und Durchführung besteht, ist dieses Kapitel etwas umfangreicher als üblich.

2.1 Versuchsanordnung

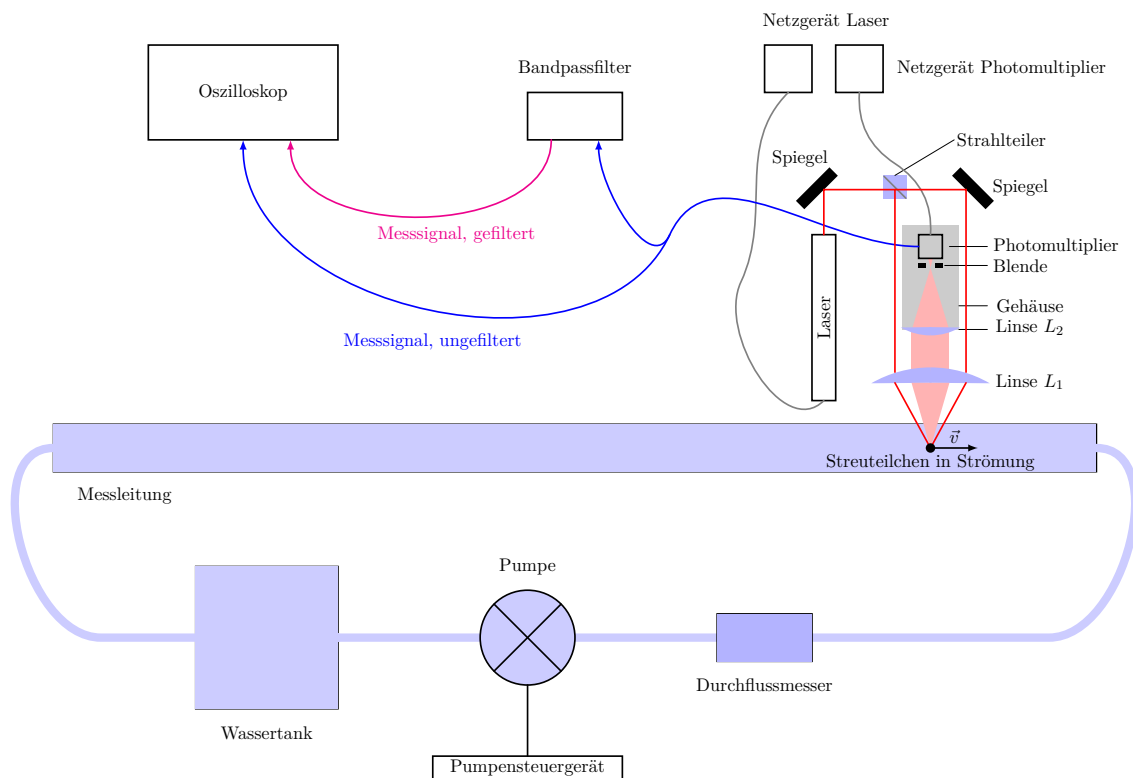


Abbildung 11: Versuchsanordnung, schematisch

Grundsätzlich folgt der Versuchsaufbau den in den Arbeitsgrundlagen beschriebenen Angaben. Die gesamte Anordnung ist schematisch in Abbildung 11 dargestellt, Abbildung 12 ist die entsprechende photographische Dokumentation. Abbildung 13 zeigt einen anderen Blickwinkel auf die Apparaturen.

Um Überlastung durch Umgebungslicht zu verhindern, ist der Photomultiplier zusammen mit der Blende und der Linse L_2 in einem Gehäuse eingelassen. Um die Blende einzustellen und die Lage der Laserstrahlen zu überprüfen, kann dieses abgenommen werden, es sollte aber bei Aktivierung des Detektors montiert sein. Der Detektor wird zwar nicht sofort zerstört, falls er ohne Gehäuse eingeschaltet wird, der Vorgang ist aber der Lebensdauer des Geräts nicht zuträglich.

Das Gehäuse kann in den Abbildungen 12 und 13 gesehen werden.

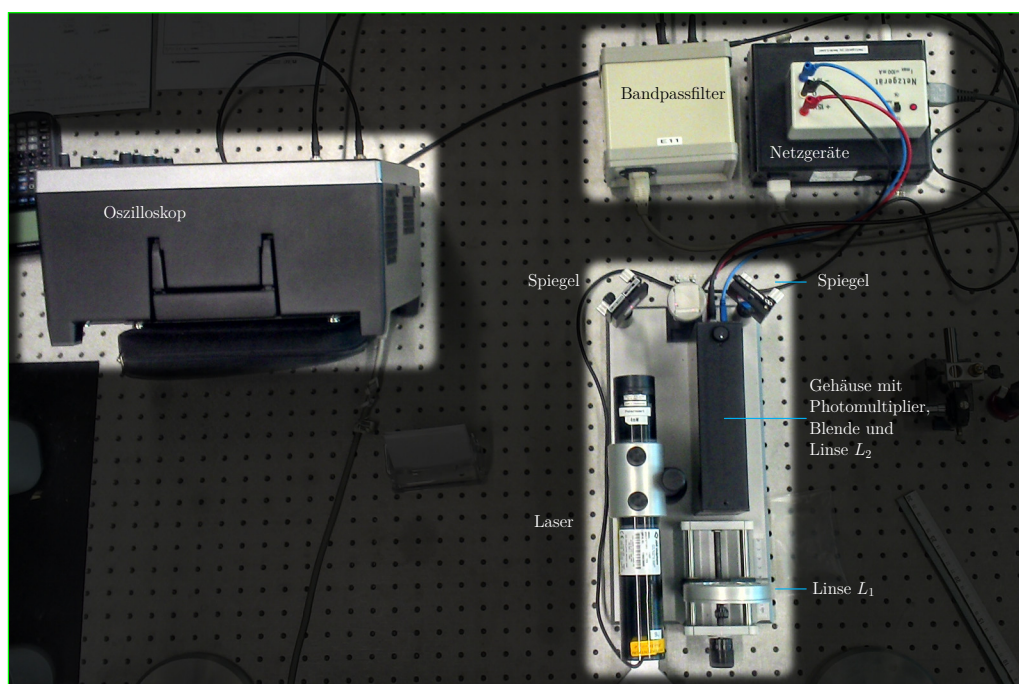


Abbildung 12: Versuchsanordnung, Vogelperspektive. Anordnung ist grösstenteils mit dem Schema aus Abbildung 11 identisch.

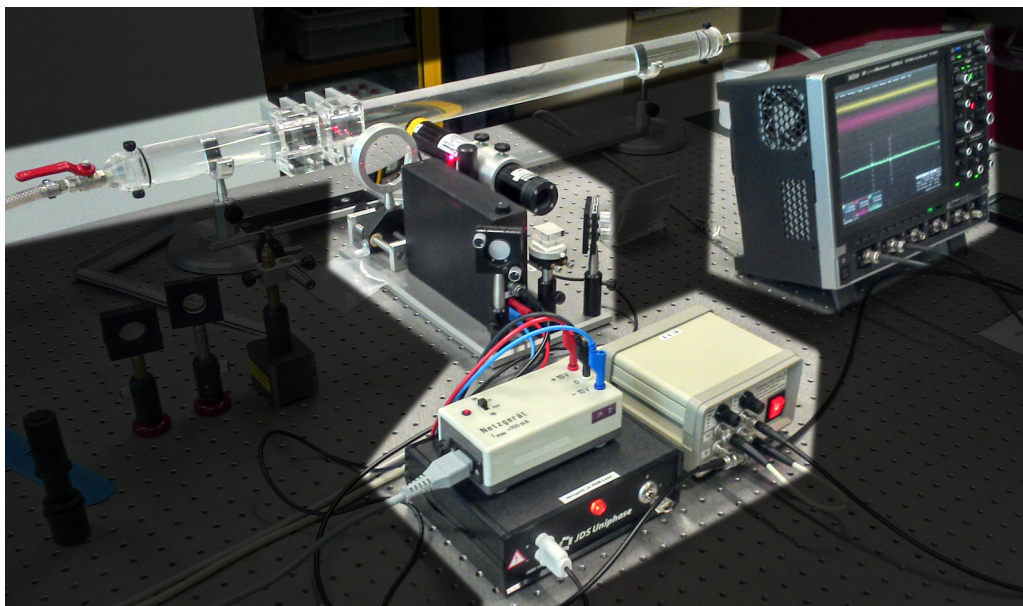


Abbildung 13: Versuchsanordnung, andere Perspektive. Messleitung sichtbar im Hintergrund.

2.2 Geräte

Tabelle 1: Geräteliste

GERÄT	TYP
Oszilloskop	LeCroy WaveRunner 64MXi-A
Laser	JDS Uniphase 1122P, 4 mW, polarisiert, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$
Pumpe	0.5 L min^{-1} bis 7.5 L min^{-1}
Durchflussmesser	
Detektor	Hamamatsu H9656-02 Photomultiplier
Linse L_1	
Linse L_2	
Messleitung	Plexiglasrohr, Innendurchmesser $(40.0 \pm 0.5) \text{ mm}$
Bandpassfilter	Tiefpass: 3 kHz bis 300 kHz, Hochpass: 0.3 kHz bis 30 kHz

2.3 Erwartete Reynoldszahlen und Signalfrequenzen

Anhand der zur Verfügung stehenden Leistung der Pumpe und der Geometrie der Apparatur kann an dieser Stelle bereits abgeschätzt werden, welcher Bereich für die Reynoldszahl ungefähr abdeckbar sein wird. Zur Erinnerung:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (20)$$

Umrechnung der Durchflussraten in $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$:

$$\dot{V}_{\min} = 0.5 \text{ L min}^{-1} = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \quad (21)$$

$$\dot{V}_{\max} = 7.5 \text{ L min}^{-1} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \quad (22)$$

Der Querschnitt des Rohres:

$$A = \pi \cdot R^2 = 0.00126 \text{ m}^2 \quad (23)$$

Daraus lassen sich nun die mittleren Geschwindigkeiten für die schwächste und stärkste Pumpeneinstellung bestimmen:

$$v_{m,\min} = \frac{\dot{V}_{\min}}{A} = 0.0066 \text{ m s}^{-1} \quad (24)$$

$$v_{m,\max} = \frac{\dot{V}_{\max}}{A} = 0.099 \text{ m s}^{-1} \quad (25)$$

Womit man für die Reynoldszahlen erhält:

$$Re_{\min} = \frac{\rho \cdot v_{m,\min} \cdot 2R}{\eta} = 264 \quad (26)$$

$$Re_{\max} = \frac{\rho \cdot v_{m,\max} \cdot 2R}{\eta} = 3960 \quad (27)$$

Wobei:

$$\rho : 1000 \text{ kg m}^{-3}$$

$$R : 20 \text{ mm}$$

$$\eta : 1 \text{ mPa s (Quelle: Kuchling, Tabelle 6)}$$

Ebenfalls lassen sich mit den errechneten Geschwindigkeiten $v_{m,\min}$ und $v_{m,\max}$ ungefähre Aussagen zu den zu erwartenden Signalfrequenzen machen. Natürlich werden die Frequenzen noch davon abweichen, abhängig davon, ob man gerade ein Teilchen mit höherer oder tieferer Geschwindigkeit gemessen hat. Es geht hier lediglich um die Größenordnung, sodass der Bandpassfilter jeweils korrekt eingestellt werden kann. Es wurde mit $\varphi = 30^\circ$ gerechnet.

$$\Delta f_{\min} = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot v}{\lambda} = 10 \text{ kHz} \quad (28)$$

$$\Delta f_{\max} = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot v}{\lambda} = 156 \text{ kHz} \quad (29)$$

2.4 Ablauf

Wie erwähnt, ist eine korrekte Justierung dieses Versuches für eine erfolgreiche Durchführung von grosser Wichtigkeit. Sie beanspruchte einen beträchtlichen Teil der zur Verfügung stehenden Zeit (beinahe die Hälfte) und soll hier entsprechend auch gut dokumentiert werden.

Die Krux am Ganzen ist, dass die Laserstrahlen sich sauber in der Messleitung kreuzen und anschliessend korrekt in den Detektor geführt werden.

Dazu wurden zuerst an den in Abbildung 14 mit blauen Kreuzen markierten Punkten die Höhe der Laserstrahlen gemessen und mittels der Spiegel (siehe auch Abbildung 15) und der Linse L_1 auf die gleiche Höhe eingestellt (so gut als möglich, dieses Verfahren alleine ist noch nicht genau genug).

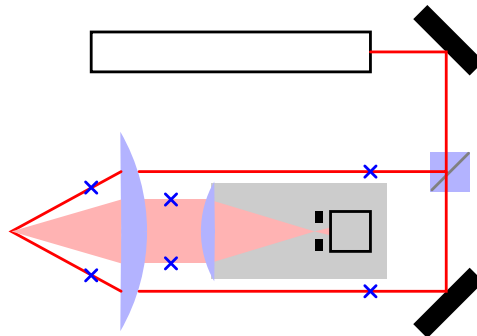


Abbildung 14: Referenzpunkte für Kalibrierung (blau markiert)

Anschliessend wurde benutzt, um die beiden Laserstrahlen auf eine Wand gegenüber der Versuchsanordnung zu projizieren. Dies ermöglichte eine exakte Zusammenführung der Laserstrahlen. Danach wurde sichergestellt, dass die Streuungen und Reflexionen der Strahlen, welche zurück in Richtung Detektor gingen, alle auf gleicher Höhe lagen, indem Höhe und Winkel der Messleitung korrekt eingestellt wurden. Abbildung 16 zeigt diese Strahlen vor ihrer Justierung.

Letztlich wurde überprüft, dass der Kreuzungspunkt der gestreuten Strahlen genau in der Blende (sichtbar in Abbildung 17) lag, und die Blende so weit als möglich geschlossen.

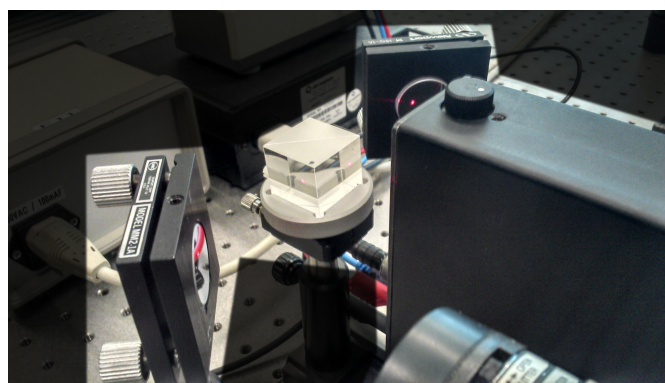


Abbildung 15: Die beiden Spiegel und der Strahlteiler. Die Spiegel können verstellt werden, um die Verläufe der Strahlen aufeinander abzustimmen.

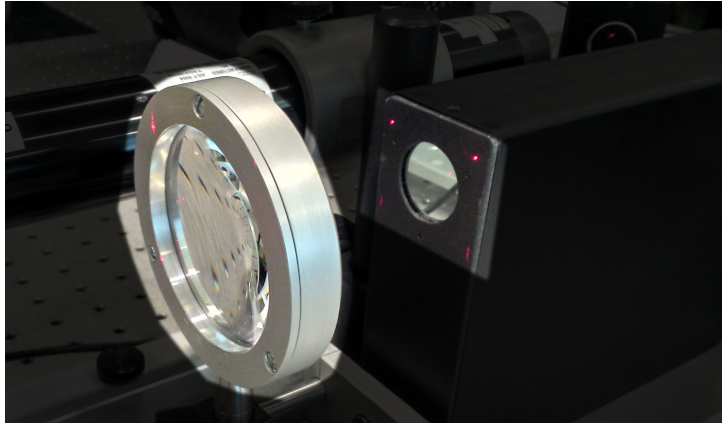


Abbildung 16: Die Linsen L_1 (links, gross) und L_2 (rechts, im schwarzen rechteckigen Rahmen). Ebenfalls sichtbar sind einige Reflexionen der Laserstrahlen am Rahmen von L_2 , bevor sie justiert worden sind. Nach der Justierung liegen alle vier Punkte auf gleicher Höhe.

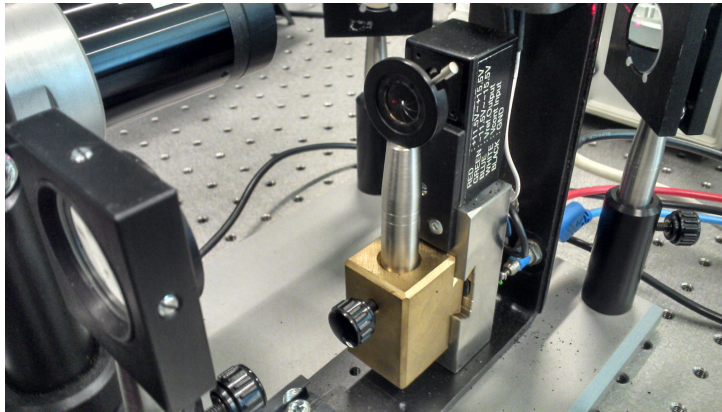


Abbildung 17: Linse L_2 , Blende und Photomultiplier. Die Blende kann verstellt werden, um möglichst nur das vom Strömungsteilchen gestreute Laserlicht in den Photomultiplier zu lassen.

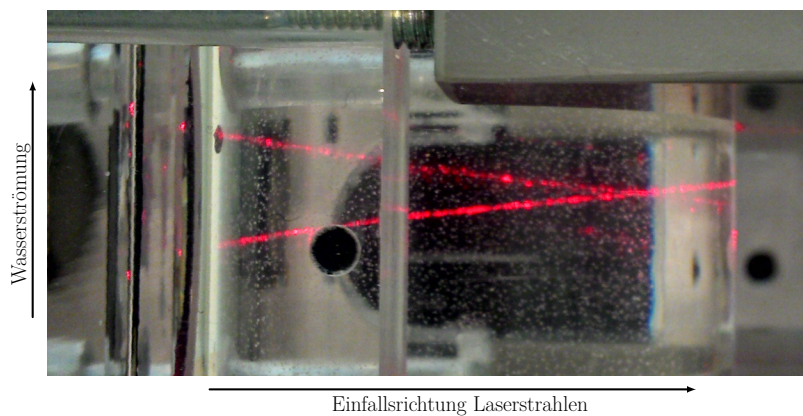


Abbildung 18: Aufnahme der sich kreuzenden Strahlen in der Messleitung. Wasserströmung geht von unten nach oben, die Laserstrahlen treffen von links auf die Messleitung.

Nachdem die Apparatur justiert war, wurden vier Messungen durchgeführt:

- Eine experimentelle Überprüfung der Brennweite von Linse L_1 ,
- das Verhalten der Strömungsgeschwindigkeit auf der Achse der Messleitung bei Durchflussraten zwischen 0.5 L min^{-1} und 7.5 L min^{-1} ,
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 0.5 L min^{-1} (laminarer Fall) und
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 7.5 L min^{-1} (turbulenter Fall).

Zur Auswertung wurde dabei das Oszilloskop benutzt. Es erhielt sowohl das ungefilterte Messsignal direkt vom Photomultiplier (sehr verrauscht) wie auch das gefilterte Signal aus dem Bandpassfilter.

Um den Bandpassfilter korrekt einstellen zu können, musste natürlich bekannt sein, in welcher Größenordnung sich die zu erwartenden Frequenzen ungefähr befinden würden.

Das Oszilloskop führte am eingehenden Zeitsignal eine Fourier-Zerlegung durch (unterstes Signal in Abbildung 19 auf Seite 16). In diesem Signal wurden dann mittels der beiden Cursor eine obere und untere Limite der bei einer Einstellung (Position des Schnittpunkts der Laserstrahlen in der Messleitung, Flussgeschwindigkeit) auftretenden Frequenzen abgelesen. Zur Auswertung wurde dieses Intervall dann auf eine Streuteilchengeschwindigkeit mit Unsicherheit umgerechnet. Die Methodik ist in Abschnitt 3.2 auf Seite 19 dargelegt, die damit berechneten Resultate sind in den Tabellen 2, (Seite 20), 3 (Seite 23) und 4 (Seite 25) aufgeführt. Ausgewertet wurde mit Python-Scripts; diese sind in Anhang A ab Seite 31 zu finden.

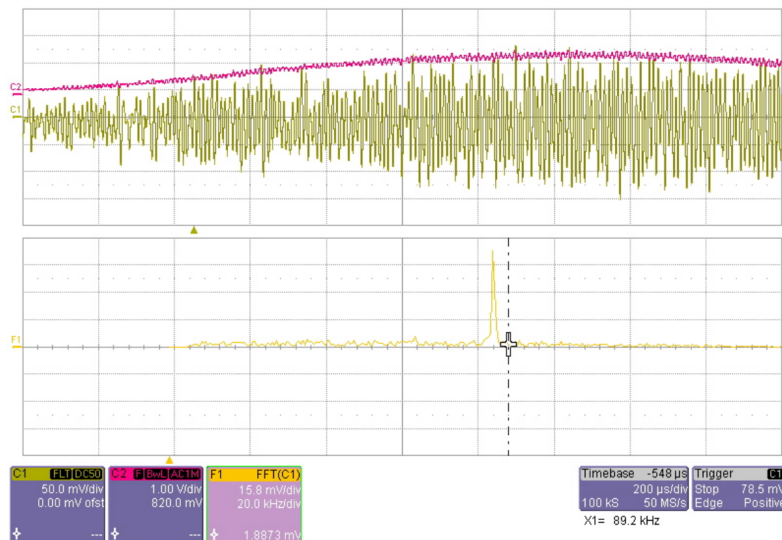


Abbildung 19: Anzeige des Oszilloskops. **C1:** gefiltertes Signal, **C2:** ungefiltertes Signal direkt vom Photomultiplier. Darunter die Fourier-Zerlegung des gefilterten Signals. *Quelle:* Versuchsanleitung

Bei ändernden Einstellungen musste jeweils darauf geachtet werden, den Bandpassfilter entsprechend anzupassen. Geht dies vergessen, werden zwar die Messresultate nicht verfälscht, es macht aber das Erkennen der gesuchten Streu-Ereignisse zunehmend schwierig oder verhindert sie vollkommen, je nach Frequenzbereich.

3 Auswertung

Zuerst wurde die Brennweite von Linse L_1 experimentell überprüft. Anschliessend wurde die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Messrohres für verschiedene Durchflussraten gemessen. Zuletzt wurden die Strömungsprofile für den laminaren Fall und den turbulenten Fall aufgenommen.

Die erwarteten Verläufe der Strömungsprofile sind in Abbildung 20 dargestellt.

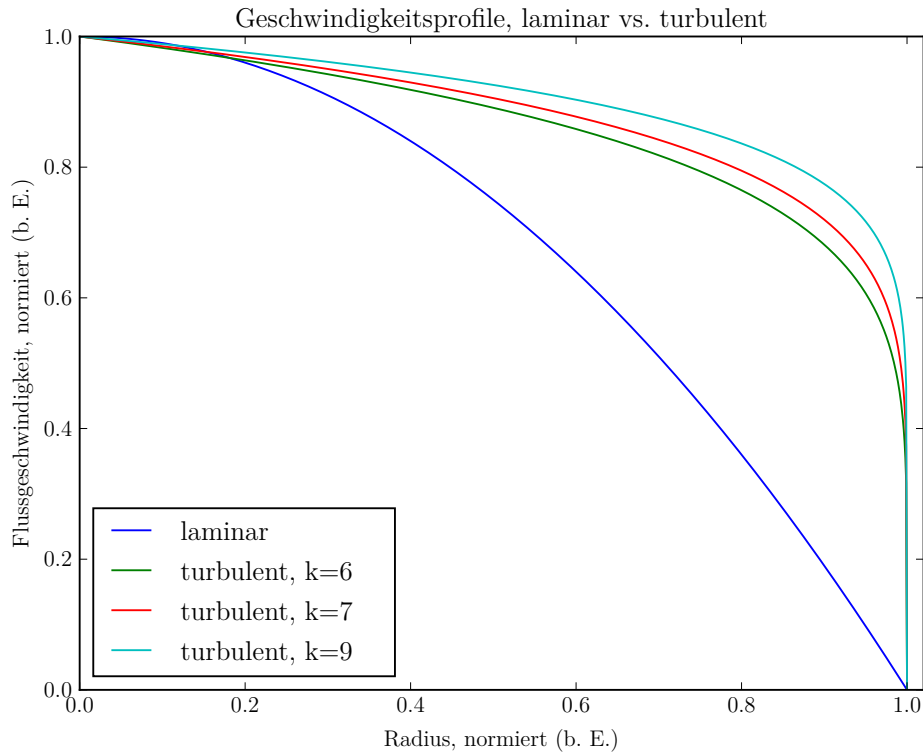


Abbildung 20: Laminare vs. turbulente Strömungsprofile, normiert

$$v(r)_{\text{laminar}} = v_{\text{max,laminar}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (30)$$

$$v(r)_{\text{turbulent}} = v_{\text{max,turbulent}} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (31)$$

Wobei:

- $v_{\text{max,laminar}}$: auf 1 normiert
- $v_{\text{max,turbulent}}$: auf 1 normiert
- R : auf 1 normiert
- k : gemäss Legende

3.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen

Die Brennweite der Linsen sind zwar angegeben, wir wollen uns aber nicht darauf verlassen, und diese experimentell überprüfen. Daraus ergibt sich dann auch der Schnittwinkel φ der Laserstrahlen.

Es wurden die Distanzen d_L zwischen den beiden Strahlen beim Eintreten in die Linse und die Distanz d_f zwischen der Linse und dem Kreuzungspunkt der Laserstrahlen gemessen. Die Bestimmung des Schnittwinkels ist dann nur noch eine Sache von ein wenig Trigonometrie.

Für die Distanzen ergaben sich folgende Werte, mit geschätzten Unsicherheiten:

- $d_L = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
- $d_f = (130 \pm 1) \text{ mm}$

Der halbe Schnittwinkel ergibt sich dann zu:

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{d_L}{d_f} \quad (32)$$

Der kleinstmögliche Winkel ergibt sich aus der Kombination von $d_L = 52 \text{ mm}$ und $d_f = 131 \text{ mm}$ und beläuft sich auf $\frac{\varphi}{2} = 11.23^\circ$, der grösstmögliche Winkel korrespondiert mit $d_L = 53 \text{ mm}$ und $d_f = 129 \text{ mm}$ und ergibt $\frac{\varphi}{2} = 11.61^\circ$, was sich zusammenführen lässt auf einen Schnittwinkel von:

$$\varphi = (11.42 \pm 0.19)^\circ \cdot 2 = (22.8 \pm 0.4)^\circ \quad (33)$$

Der Vorgang ist schematisch in Abbildung 21 dargestellt.

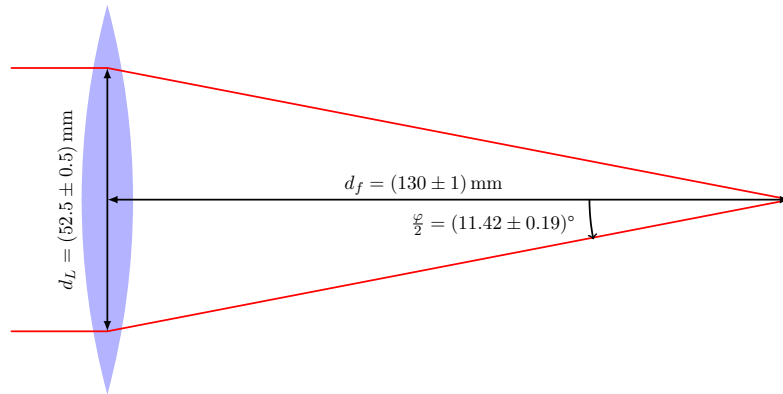


Abbildung 21: Bestimmung des Schnittwinkels der Laserstrahlen aus der Geometrie der Versuchsanordnung. *Beachte:* Da diese Abbildung primär der Illustration der Bestimmung von φ und nicht der akkuraten Darstellung der Linse dient, ist hier nicht das gleiche Symbol für die Linse wie in der Versuchsanleitung benutzt worden.

3.2 Strömungsgeschwindigkeit und Unsicherheiten

Gemessen wurden zwar Frequenzen, es sollen in den Regressionen jedoch direkt die zugehörigen Geschwindigkeiten angegeben werden. Da diese Angaben für den Rest dieses Kapitels benötigt werden, werden zur besseren Übersichtlichkeit die nötigen Informationen zur Fehlerrechnung hier aufgeführt anstatt in einem separaten Kapitel im Nachhinein.

Die Flussgeschwindigkeiten können mit der folgenden Formel ermittelt werden:

$$\Delta f = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{c}{\lambda_{Laser}} \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2 \cdot v}{\lambda_{Laser}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (34)$$

Aufgelöst nach v ergibt dies:

$$v = \frac{\Delta f \cdot \lambda_{Laser}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (35)$$

Wobei:

- v : Flussgeschwindigkeit des Streuteilchens
- Δf : Gemessene Streufrequenz
- λ_{Laser} : Wellenlänge des Lasers
- φ : Kreuzungswinkel der Laserstrahlen ($(22.8 \pm 0.4)^\circ$ gemäss vorigem Abschnitt)

Es sind hier sowohl Unsicherheiten im Winkel φ wie auch in der gemessenen Frequenz vorhanden. Somit ist für die Bestimmung der Unsicherheit der Teilchengeschwindigkeit die Verwendung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes erforderlich. Zur Erinnerung:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (36)$$

Angewandt auf die Formel der Teilchengeschwindigkeit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial v}{\partial f}\right|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{\bar{\varphi}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2} \quad (37)$$

Mit:

$$\frac{\partial v}{\partial f} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (38)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (39)$$

Ergibt sich somit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\left.\frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right|_{\bar{\varphi}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2} \quad (40)$$

Formel 40 und die Messwerte wurden in Python-Skripts ausgewertet, die in Anhang A ab Seite 31 zu finden sind.

3.3 Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung

Das zu diesem Abschnitt gehörende Python-Script ist in Anhang A.3 auf Seite 32 zu finden. Die resultierenden Flussgeschwindigkeiten mit ihren Unsicherheiten sind in Tabelle 2 zu finden.

Tabelle 2: Messwerte für verschiedene Durchflussraten in Rohrmitte

\dot{V} (L min ⁻¹)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s ⁻¹)
0.5	7.07	7.71	7.39	0.32	1.18 ± 0.05
1.01	13.43	14.38	13.905	0.475	2.22 ± 0.08
1.52	17.59	19.77	18.68	1.09	2.99 ± 0.18
2.02	23.19	25.32	24.255	1.065	3.88 ± 0.18
2.5	26.66	30.29	28.475	1.815	4.55 ± 0.30
3.0	30.18	35.09	32.585	2.505	5.22 ± 0.40
3.5	34.85	39.3	37.075	2.225	5.93 ± 0.37
4.0	36.21	43.12	39.665	3.455	6.34 ± 0.56
4.5	40.95	49.48	45.215	4.265	7.23 ± 0.69
5.0	45.51	52.75	49.13	3.62	7.86 ± 0.59
5.5	51.34	58.30	54.82	3.48	8.77 ± 0.57
6.0	57.16	61.91	59.535	2.375	9.52 ± 0.41
6.5	60.78	70.84	65.81	5.03	10.52 ± 0.82
7.0	64.44	72.48	68.46	4.02	10.95 ± 0.67
7.5	67.12	77.42	72.27	5.15	11.56 ± 0.85

Die Werte aus der letzten Spalte wurden anschliessend in QtiPlot eingegeben, zusammen mit den zugehörigen Durchflusswerten.

Wie im Abschnitt 1.2.1 ab Seite 5 erwähnt, liegt die kritische Reynoldszahl für den Fall einer zylindrischen Messleitung bei ungefähr 2000. Will man die für unsere Anordnung zugehörige Strömungsgeschwindigkeit bestimmen, löst man zuerst Formel 10 von Seite 5 nach der mittleren Strömungsgeschwindigkeit auf, und erhält:

$$v_{m,krit} = \frac{Re_{krit} \cdot \eta}{\rho \cdot L} = \frac{Re_{krit} \cdot \eta}{\rho \cdot 2R} = 0.05 \text{ m s}^{-1} \quad (41)$$

Wobei:

$$\begin{aligned} Re_{krit} &: 2000 \\ \eta &: 1 \text{ mPa s} \\ \rho &: 1000 \text{ kg m}^{-3} \\ R &: 20 \text{ mm} \end{aligned}$$

Da $v_m = \frac{\dot{V}}{A}$, kann daraus nun die zugehörige Durchflussrate bestimmt werden:

$$\dot{V}_{krit} = v_{m,krit} \cdot A = 0.000\,063 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \approx 3.78 \text{ L min}^{-1} \quad (42)$$

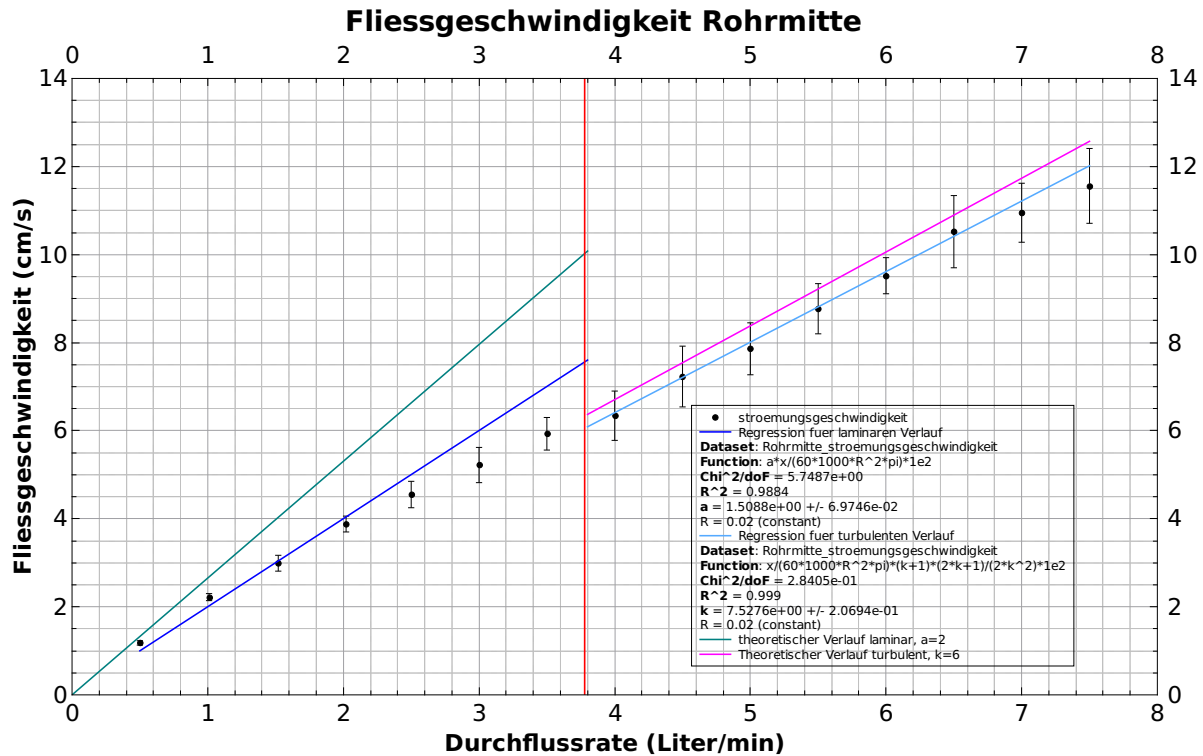


Abbildung 22: Verlauf von Durchflussrate und Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrmitte. Es sind folgende Linien eingezeichnet:

- rot: Durchfluss, welcher der kritischen Reynoldszahl von ca. 2000 entspricht gemäss Gleichung 42
- dunkel-cyan: theoretischer Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall:

$$v_{\max, \text{laminar}} = 2 \cdot \frac{\dot{V}}{A}$$
- blau: Regression für den Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall:

$$v_{\max, \text{laminar}} = a \cdot \frac{\dot{V}}{A}, \text{ mit Regressionsparameter } a = 1.5088 \pm 0.069746$$
- magenta: theoretischer Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall:

$$v_{\max, \text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2}, \text{ mit } k = 6$$
- cyan: Regression für die maximale Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall:

$$v_{\max, \text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2}, \text{ mit } k = 7.5276 \pm 0.20694 \text{ als Regressionsparameter}$$

Abbildung 22 stellt die Messpunkte der maximalen Strömungsgeschwindigkeit (Rohrmitte) in Abhängigkeit der Durchflussrate \dot{V} dar. Vergleicht man die dunkel-cyan-farbene Linie (theoretischer Verlauf der maximalen Flussgeschwindigkeit im laminaren Bereich gemäss $v_{\max} = 2 \cdot \frac{\dot{V}}{A}$) mit den Messungen, kann man erkennen, dass die Messungen bei steigender Durchflussrate vom theoretischen Verlauf abzuweichen beginnen.

Die Ursache dafür liegt in der zu kurzen Einlaufstrecke, wie in Abbildung 8 auf Seite 7 dargestellt. Je höher der Durchfluss, um so grösser die Abweichung zwischen theoretischem und effektivem Wert, wie auch in Abbildung 9 auf Seite 8 erkennbar.

Auch beim theoretischen Verlauf im turbulenten Bereich liegen die Messwerte etwas unter den theoretisch erwarteten Werten, jedoch nicht ganz so stark. Ich erkläre dies damit, dass das turbulente Profil eben nicht parabelförmig ist, sondern gegen die Mitte der Leitung nur noch relative flach ansteigt. Somit macht sich die zu kurze Einlaufstrecke vermutlich nicht mehr so stark bemerkbar.

Aus Neugier wurden für die beiden Bereiche (laminar, turbulent) jeweils noch eine gewichtete Regression durchgeführt, einmal mit einem Koeffizienten a als Regressionsparameter (im laminaren Fall), und im turbulenten Fall mit k als Regressionsparameter. Als Resultat lieferte QtiPlot:

$$\text{Regressions-Funktion: } v_{\max, \text{laminar}} = a \cdot \frac{\dot{V}}{A} \quad (43)$$

$$\text{Resultat: } a = 1.5088 \pm 0.069746 \quad (44)$$

$$\text{Regressions-Funktion: } v_{\max, \text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2} \quad (45)$$

$$\text{Resultat: } k = 7.5276 \pm 0.20694 \quad (46)$$

Da sich a mit zunehmendem Durchfluss eigentlich ändert (siehe Abbildung 9, Seite 8^{II}), sollte dieses Regressionsresultat natürlich nicht einfach in eine Gleichung eingesetzt und verwendet werden. Die Regression wurde aber nicht durchgeführt, um diesen Parameter möglichst genau zu bestimmen, sondern um zu veranschaulichen, dass er doch recht beträchtlich vom theoretischen Wert eines perfekt parabolischen Profils abweichen kann, was meines Erachtens gelungen ist.

Der Wert für k ist über dem theoretischen Wert von 6^{III}. Dies deckt sich jedoch zumindest einigermaßen mit den Ergebnissen der Regression beim turbulenten Strömungsprofil, wie wir später sehen werden.

^{II}Der in der Regression bestimmte Parameter a taucht in der Abbildung nicht direkt auf, ist jedoch an das Verhältnis von v_{\max} und v_m gebunden, weshalb die Abbildung und der in der Regression bestimmte Parameter trotzdem eng zusammenhängen.

^{III}Wie in den Arbeitsgrundlagen angemerkt, variiert k bei Änderung der Reynoldszahl im Bereich von mehreren Zehnerpotenzen lediglich um einige Inkremente, daher wird k approximativ über den betrachteten Bereich zur Veranschaulichung in diesem Fall als konstant betrachtet.

3.4 Strömungsprofil im laminaren Fall

Das Vorgehen zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit ist in diesem Falle identisch. Der Unterschied zur obigen Messung liegt darin, dass die Durchflussrate fixiert war und die Position variiert wurde. Das Python-Script für die Resultate aus Tabelle 3 ist in Anhang A.4 auf Seite 33 zu finden.

Tabelle 3: Messwerte für Strömungsprofil im laminaren Fall ($\dot{V} = 0.56 \text{ L min}^{-1}$)

Position (mm)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s ⁻¹)
-13.33	4.51	5.20	4.885	0.345	0.8 ± 0.1
-12.00	5.35	5.93	5.64	0.29	0.90 ± 0.05
-10.67	5.93	6.67	6.30	0.37	1.0 ± 0.1
-9.33	6.72	7.27	6.995	0.275	1.10 ± 0.05
-8	7.31	7.95	7.63	0.32	1.2 ± 0.1
-5.33	8.19	8.65	8.42	0.23	1.30 ± 0.04
-2.67	8.25	8.68	8.465	0.215	1.35 ± 0.04
0	8.39	8.88	8.635	0.245	1.38 ± 0.05
2.67	8.16	8.54	8.35	0.19	1.33 ± 0.04
5.33	7.80	8.36	8.08	0.28	1.29 ± 0.05
8.0	6.87	7.43	7.15	0.28	1.14 ± 0.05
9.33	6.76	7.34	7.05	0.29	1.13 ± 0.05
10.67	6.29	7.02	6.655	0.365	1.06 ± 0.10
12.0	5.76	6.37	6.065	0.305	0.98 ± 0.10
13.33	5.29	5.84	5.565	0.275	0.89 ± 0.05
14.67	4.53	5.18	4.855	0.325	0.78 ± 0.10
16.00	3.69	4.41	4.05	0.36	0.65 ± 0.10
17.33	2.81	3.42	3.115	0.305	0.50 ± 0.05

Als Formel zur Regression wurde Gleichung 11 von Seite 6 benutzt. Fit-Variable war v_{\max} .

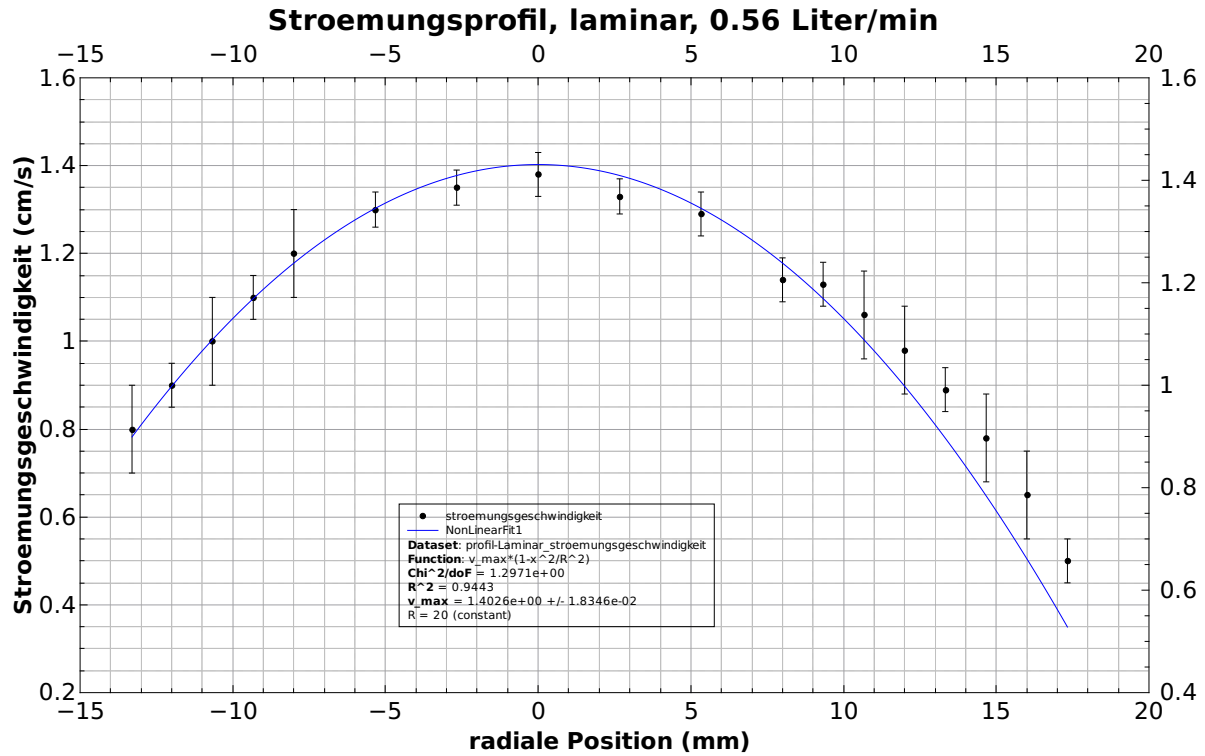


Abbildung 23: Gewichtete Regression an die Messpunkte des Strömungsprofils im laminaren Fall

Die Regression stimmt recht gut mit den Messpunkten überein. Es kann gesehen werden, dass die maximale Geschwindigkeit in der Rohrmitte nicht ganz an den Scheitelpunkt der Parabel heranreicht. Die Begründung dafür liegt darin, dass die Messleitung nicht genügend lang ist, um wirklich einen vollständig laminaren Fluss herausbilden zu können (zu kleine Einlaufänge), wie auch im vorigen Abschnitt erwähnt. Gegen die Rohrmitte wird das Strömungsprofil dadurch gegenüber der theoretischen Parabel abgeflacht. Siehe dazu auch Abbildungen 8 und 9 auf Seiten 7 respektive 8 und die zugehörigen Anmerkungen.

$$v_{\max} = (1.402\,600 \pm 0.018\,346) \text{ cm s}^{-1} \quad (47)$$

Es sei hier noch betont, dass eine *gewichtete* Regression gemacht wurde.

3.5 Strömungsprofil im turbulenten Fall

Das Vorgehen ist in diesem Falle identisch wie im vorherigen Abschnitt. Das Python-Script für die Resultate aus Tabelle 4 ist in Anhang A.4 auf Seite 34 zu finden.

Aus Zeitgründen wurden für das turbulente Strömungsprofil weniger Messungen gemacht als für das laminare.

Tabelle 4: Messwerte für Strömungsprofil im turbulenten Fall ($\dot{V} = 7 \text{ L min}^{-1}$)

Position (mm)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s ⁻¹)
-10.67	49.59	63.13	56.36	6.77	9.0 ± 1.1
-8	53.77	67.77	60.77	7.0	9.7 ± 1.1
-5.33	57.74	69.51	63.625	5.885	10.2 ± 1.0
-2.67	54.17	68.96	61.596	7.395	9.8 ± 1.2
0	63.41	71.31	67.36	3.95	10.8 ± 0.7
2.67	61.58	74.02	67.8	6.22	10.8 ± 1.0
5.33	62.86	70.18	66.52	3.66	10.6 ± 0.6
8.0	60.6	69.23	64.915	4.315	10.4 ± 0.7
10.67	55.42	68.84	62.13	6.71	9.9 ± 1.1
12.0	54.53	71.46	62.995	8.465	10.1 ± 1.4
13.33	48.01	67.83	57.92	9.91	9.3 ± 1.6
14.67	47.52	66.09	56.805	9.285	9.1 ± 1.5
16.00	44.77	65.85	55.31	10.54	8.8 ± 1.7
17.33	38.98	66.98	52.98	14	8.5 ± 2.2

Zur Regression and diese Daten wurde Gleichung 15 von Seite 9 herangezogen, mit einer kleinen Modifikation. Da die Funktion in der gegebenen Form ungerade ist und somit für negative Radian nicht das gewünschte Ergebnis liefert, wurde zur Regression noch ein Betrag eingebaut:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \left|\frac{r}{R}\right|\right)^{\frac{1}{k}} \quad (48)$$

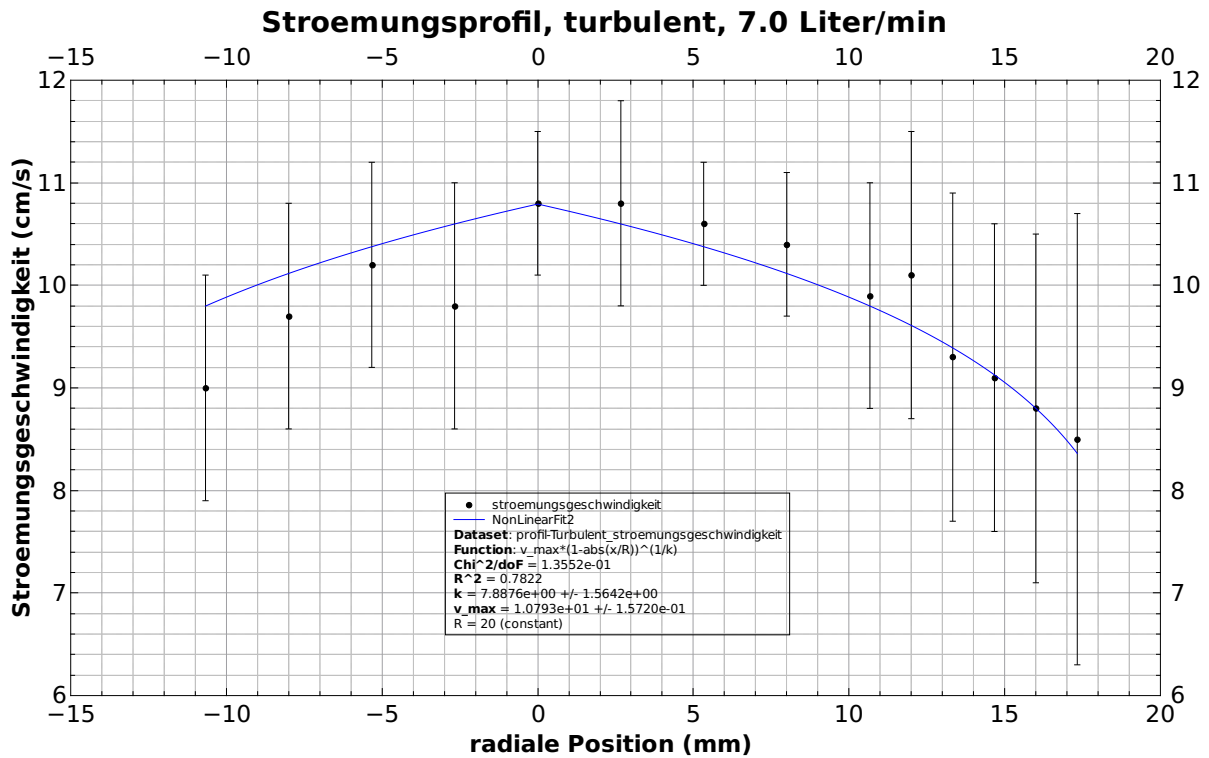


Abbildung 24: Gewichtete Regression für das Strömungsprofil im turbulenten Fall.

Regressionsparameter waren k und v_{\max} . Als Ergebnis liefert QtiPlot:

$$k = 7.8876 \pm 1.5642 \quad (49)$$

$$v_{\max} = (10.7930 \pm 0.1572) \text{ cm s}^{-1} \quad (50)$$

Wie man in Tabelle 4 und Abbildung 24 unschwer erkennen kann, sind die Unsicherheiten bei den Werten teilweise recht gross. Ich erkläre mir dies dadurch, dass das turbulente Strömungsprofil eben nicht so sauber ausgeprägt ist, wie es die Vereinfachung aus Abbildung 10 von Seite 9 allenfalls Glauben macht. Betrachtet man Abbildung 6 auf Seite 5, so kann man erkennen, dass in einer turbulenten Strömung grob gesagt einiges Chaos herrscht (oder eben: Turbulenzen). Die Strömungsgeschwindigkeit (und somit auch die beobachteten Frequenzen) kann deshalb am gleichen Ort über die Zeit bedeutend variieren, auch wenn sie gemittelt als ein Profil angenähert werden kann.

Betrachtet man den Verlauf der Regression in Abbildung 24, kann zumindest auf der rechten Seite jedoch eine ganz passable Übereinstimmung zwischen Messungen und Regression festgestellt werden, und sowohl der Wert für k wie auch für v_{\max} sind einigermaßen plausibel (k ist höher als erwartet; gemäss Versuchsanleitung ist $k = 6$ für $Re \approx 4000$, aber die Grössenordnung scheint nicht schlecht zu stimmen).

Auch hier wurde eine gewichtete Regression durchgeführt.

4 Fehlerrechnung

Zur Fehlerrechnung kann man nun die mittels Regression bestimmten Werte für v_{\max} und k mittels der Formel 12 von Seite 7 (laminarer Fall) und Formel 16 von Seite 9 (turbulenter Fall) überprüfen.

Dazu werden mittels dieser Formeln die zu den Resultaten aus der Regression gehörenden Volumenströme berechnet und diese anschliessend mit den Angaben auf dem Durchflussmesser verglichen.

Zur Rekapitulation nochmals die mittels Regression bestimmten Werte:

$$v_{\max, \text{laminar}} = (1.402\,600 \pm 0.018\,346) \text{ cm s}^{-1} \quad (51)$$

$$k = 7.8876 \pm 1.5642 \quad (52)$$

$$v_{\max, \text{turbulent}} = (10.7930 \pm 0.1572) \text{ cm s}^{-1} \quad (53)$$

4.1 Laminares Strömungsprofil

Wie in den Arbeitsgrundlagen bei Abbildung 9 auf Seite 8 erwähnt, ist die hier benutzte Messleitung nicht wirklich lang genug, damit sich ein sauberes, perfekt parabolisches Strömungsprofil im laminaren Fall ausbilden kann. Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass für den Fall einer 0.9 m langen Messleitung das Verhältnis $\frac{v_{\max}}{v_m}$ ungefähr 1.95 anstatt 2 ist. Somit modifizieren wir die Formel 12 leicht, und setzen in den Nenner 1.95 statt 2, was folgende Formel ergibt:

$$\bar{V}_{\text{laminar}} = \frac{\pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{v}_{\max}}{1.95} = 0.542 \text{ L min}^{-1} \quad (54)$$

Wobei:

\bar{R} : 20 mm, Radius der Messleitung
 \bar{v}_{\max} : 1.4026 cm s⁻¹

Zur Bestimmung der zugehörigen Unsicherheiten wird das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz benötigt. Die allgemeine Formel ist bereits in Gleichung 36 auf Seite 19 aufgeführt. Sie wird nun angewandt auf die Formeln 54 und 57.

Dies ergibt für den Fehler im laminaren Fall:

$$s_{\bar{V}} = \sqrt{a \left(\pi \cdot \bar{R} \cdot s_{\bar{v}} \right)^2 + b \cdot \left(\pi \cdot \bar{R} \cdot s_{\bar{R}} \cdot v_{\max} \right)^2} = 0.0153 \text{ L s}^{-1} \quad (55)$$

Wobei:

a : 0.26298
 b : 1.05194
 \bar{R} : 20 mm, Radius Messleitung
 $s_{\bar{v}}$: 0.018346 cm s⁻¹, Fehler von v_{\max}
 $s_{\bar{R}}$: 0.25 mm (*Quelle*: Versuchsanleitung)
 v_{\max} : 1.402 cm s⁻¹

Die Koeffizienten a und b ergeben sich daraus, dass im Nenner 2 durch 1.95 ersetzt wurde. Bei 2 ergäbe sich eine “hübschere” Formel.

Wie auch schon in vorherigen Kapiteln wurde für diese Berechnungen SymPy benutzt, das zugehörige Script ist in Anhang A.6 auf Seite 35 zu finden.

Zusammengefasst also:

$$\dot{V}_{\text{laminar}} = (0.5420 \pm 0.0153) \text{ L min}^{-1} \quad (56)$$

4.2 Turbulentes Strömungsprofil

Der Grundwert für den Durchfluss errechnet sich gemäss:

$$\bar{V}_{\text{turbulent}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{v}_{\text{max}} \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2}{(\bar{k} + 1) \cdot (2\bar{k} + 1)} = 6.792 \text{ L min}^{-1} \quad (57)$$

Wobei:

\bar{v}_{max} : 10.793 cm s⁻¹, aus Regression

\bar{k} : 7.8876, aus Regression

\bar{R} : 20 mm, aus Versuchsanleitung

Die Anwendung des Gauss’schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ist hier ziemlich umständlich. Es muss nach der Geschwindigkeit, dem Radius und k abgeleitet werden. Es wurde auch hier ein SymPy-Script benutzt, zu finden in Anhang A.7 auf Seite 36. Der Fehler des Durchflusses ergibt:

$$s_{\bar{V}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0.304 \text{ L min}^{-1} \quad (58)$$

A , B und C sind dabei definiert als:

$$A = \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot s_{\bar{v}}}{(\bar{k} + 1)(2\bar{k} + 1)} \quad (59)$$

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot \bar{R} \cdot \bar{k}^2 \cdot s_{\bar{R}} \cdot \bar{v}_{\text{max}}}{(\bar{k} + 1)(2\bar{k} + 1)} \quad (60)$$

$$C = s_{\bar{k}} \cdot \left(-\frac{4 \cdot \pi \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot \bar{v}_{\text{max}}}{(\bar{k} + 1) \cdot (2\bar{k} + 1)^2} - \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot \bar{v}_{\text{max}}}{(\bar{k} + 1)^2 \cdot (2\bar{k} + 1)} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k} \cdot \bar{v}_{\text{max}}}{(\bar{k} + 1) \cdot (2\bar{k} + 1)} \right) \quad (61)$$

Wobei:

\bar{R} : 20 mm

\bar{k} : 7.8876

\bar{v}_{max} : 10.793 cm s⁻¹

$s_{\bar{v}}$: 0.157 20 cm s⁻¹

$s_{\bar{R}}$: 0.25 mm

$s_{\bar{k}}$: 1.572

Zusammengefasst also:

$$\dot{V}_{\text{turbulent}} = (6.792 \pm 0.304) \text{ L min}^{-1} \quad (62)$$

5 Resultate und Diskussion

Zum Vergleich der im Kapitel *Fehlerrechnung* bestimmten Durchflusswerte mit den eingestellten Werten sei hier noch die Unsicherheit des Durchflusssensors berücksichtigt, welche gemäss Versuchsanleitung $\pm 0.01 \text{ L min}^{-1}$ beträgt.

Die Abbildungen 25 und 26 zeigen graphische Vergleiche zwischen eingestellten und experimentell bestimmten Werten, Tabelle 5 fasst die Ergebnisse tabellarisch zusammen.

Tabelle 5: Durchflussraten. Vergleich experimentelle Resultate und Angaben des Durchflusssensors.

Versuch	Experiment (L min^{-1})	Durchflusssensor (L min^{-1})
laminares Strömungsprofil	0.54 ± 0.02	0.56 ± 0.01
turbulentes Strömungsprofil	6.8 ± 0.3	7.00 ± 0.01

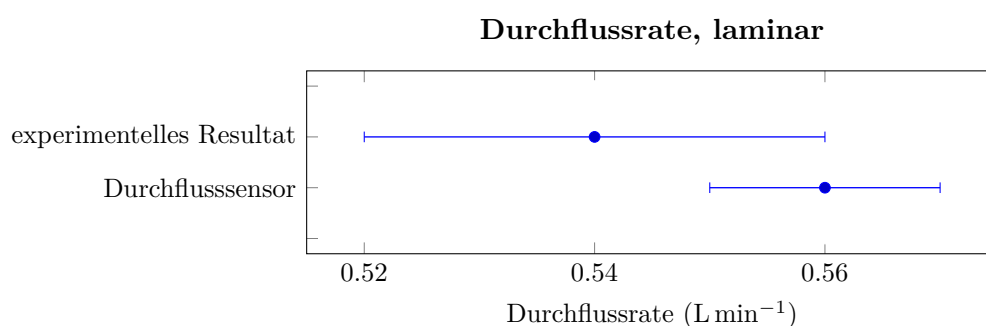


Abbildung 25: Vergleich Durchflusssensor und experimentelles Resultat, laminare Strömung

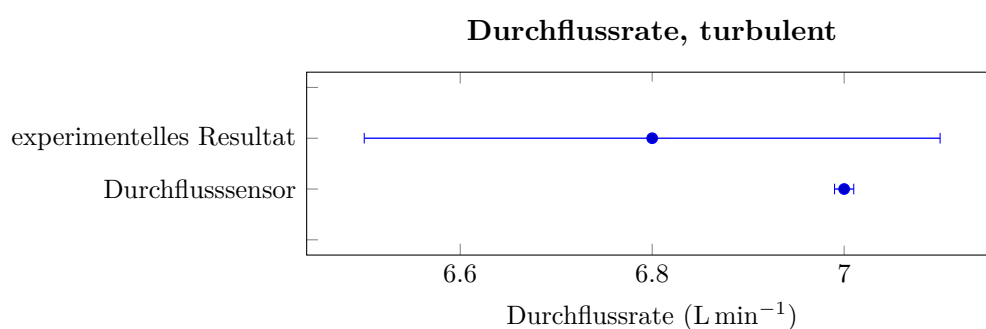


Abbildung 26: Vergleich Durchflusssensor und experimentelles Resultat, turbulente Strömung

In beiden Fällen kann eine ziemlich gute Übereinstimmung von Experiment und Referenzwert festgestellt werden. Alles in Allem beurteile ich den Versuch somit als Erfolg.

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Ort, Datum: _____, _____

Anhang A Python-Code

A.1 Laminare Strömung, symbolische Berechnungen

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import sympy as sp
4
5  v_avg_lam = sp.Symbol('v_avg_lam')
6  v_max     = sp.Symbol('v_max')
7  delta_p   = sp.Symbol('delta_p')
8  eta       = sp.Symbol('eta')
9  r         = sp.Symbol('r')
10 l         = sp.Symbol('l')
11 R         = sp.Symbol('R')
12 Q         = sp.Symbol('Q')
13
14 vr_lam = v_max * (1-r**2/R**2)
15 Q = sp.integrate(vr_lam * 2 * sp.pi * r, (r,0,R))
16 v_avg = Q / (R**2 * sp.pi)
17
18 vr_lam_2 = delta_p * R**2 / (4 * eta * l) * (1 - r**2 / R**2)
19 Q2 = sp.integrate(vr_lam_2 * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))
20
21 sp.pprint(Q)
22 sp.pprint(Q2)
23 sp.pprint(v_avg)

```

A.2 Turbulente Strömung, symbolische Berechnungen

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import sympy as sp
4
5  v_max     = sp.Symbol('v_max')
6  r         = sp.Symbol('r')
7  R         = sp.Symbol('R')
8  k         = sp.Symbol('k')
9  v_avg_turb = sp.Symbol('v_avg_turb')
10 vr_turb    = sp.Symbol('vr_turb')
11 Q_turb     = sp.Symbol('Q_turb')
12
13
14 # Average flow speed, turbulent
15 vr_turb = v_max * (1-r/R)**(1/k)
16 Q_turb  = ( sp.integrate(vr_turb * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))).doit()
17 v_avg_turb = (1/(sp.pi * R**2) * sp.integrate(vr_turb * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))).doit()
18 sp.pprint(Q_turb)
19 sp.pprint(v_avg_turb)

```

A.3 Geschwindigkeit in Rohrmitte

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  # Known Parameters
6  lamdb = 632.8e-9
7  phi_avg = 22.82 * np.pi / 180;
8  phi_err = 0.38 * np.pi / 180;
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     7.07e3, 13.43e3, 17.59e3,
13     23.19e3, 26.66e3, 30.18e3,
14     34.85e3, 36.21e3, 40.95e3,
15     45.51e3, 51.34e3, 57.16e3,
16     60.78e3, 64.44e3, 67.12e3])
17 f_high = np.array([
18     7.71e3, 14.38e3, 19.77e3,
19     25.32e3, 30.29e3, 35.09e3,
20     39.3e3, 43.12e3, 49.48e3,
21     52.75e3, 58.3e3, 61.91e3,
22     70.84e3, 72.48e3, 77.42e3])
23 idx = np.arange(f_low.size)
24
25 # Calculate average frequencies and errors
26 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
27 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
28
29 # Calcualte average flow velocities
30 v_avg = f_avg[idx] * lamdb /(2 * np.sin(phi_avg/2))
31
32 # Gaussian law of error propagation
33 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lamdb/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ( (-f * lamdb *
34     np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
35
36 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
37
38 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
39 v = v.transpose()
40 print(v)

```

A.4 Strömungsprofile im laminaren Fall

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  # Known Parameters
6  lambd = 632.8e-9
7  phi_avg = 22.82 * np.pi / 180
8  phi_err = 0.38 * np.pi / 180
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     4.51e3, 5.35e3, 5.93e3,
13     6.72e3, 7.31e3, 8.19e3,
14     8.25e3, 8.39e3, 8.16e3,
15     7.80e3, 6.87e3, 6.76e3,
16     6.29e3, 5.76e3, 5.29e3,
17     4.53e3, 3.69e3, 2.81e3])
18 f_high = np.array([
19     5.20e3, 5.93e3, 6.67e3,
20     7.27e3, 7.95e3, 8.65e3,
21     8.68e3, 8.88e3, 8.54e3,
22     8.36e3, 7.43e3, 7.34e3,
23     7.02e3, 6.37e3, 5.84e3,
24     5.18e3, 4.41e3, 3.42e3])
25 idx = np.arange(f_low.size)
26
27 # Calculate average frequencies and errors
28 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
29 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
30
31 # Calcualte average flow velocities
32 v_avg = f_avg[idx] * lambd / (2 * np.sin(phi_avg/2))
33
34 # Gaussian law of error propagation
35 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lambd/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ( (-f * lambd *
36     np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
37
38 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
39
40 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
41 v = v.transpose()
42 print(v)

```

A.5 Strömungsprofile im turbulenten Fall

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  # Known Parameters
6  lamdb = 632.8e-9
7  phi_avg = 22.82 * np.pi / 180;
8  phi_err = 0.38 * np.pi / 180;
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     49.59e3,53.77e3,57.74e3,
13     54.17e3,63.41e3,61.58e3,
14     62.86e3,        60.60e3,
15     55.42e3,54.53e3,48.01e3,
16     47.52e3,44.77e3,38.98e3])
17 f_high = np.array([
18     63.13e3,67.77e3,69.51e3,
19     68.96e3,71.31e3,74.02e3,
20     70.18e3,        69.23e3,
21     68.84e3,71.46e3,67.83e3,
22     66.09e3,65.85e3,66.98e3])
23 idx = np.arange(f_low.size)
24
25 # Calculate average frequencies and errors
26 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
27 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
28
29 # Calcualte average flow velocities
30 v_avg = f_avg[idx] * lamdb /(2 * np.sin(phi_avg/2))
31
32 # Gaussian law of error propagation
33 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lamdb/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ( (-f * lamdb *
34     np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
35
36 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
37
38 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
39 v = v.transpose()
40 print(v)

```

A.6 Fehlerrechnung laminares Strömungsprofil

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import sympy as sp
4
5  Q      = sp.Symbol('Q')
6  s_Q    = sp.Symbol('s_Q')
7  R      = sp.Symbol('R')
8  s_R    = sp.Symbol('s_R')
9  v_max  = sp.Symbol('v_max')
10 s_v    = sp.Symbol('s_v')
11
12 Q = sp.pi * R**2 * v_max / 1.95
13
14 s_Q = sp.sqrt( (sp.diff(Q,v_max) * s_v)**2 + (sp.diff(Q,R) * s_R)**2)
15
16 sp.pprint(Q)
17 sp.pprint(s_Q)
18
19 radius      = 20e-3
20 s_radius    = 0.25e-3
21 v_max_exper = 1.4026e-2
22 s_v_max_exper = 1.8346e-4
23
24 Q_evalfunc  = sp.lambdify((v_max, R), Q, modules=['numpy'])
25 s_Q_evalfunc = sp.lambdify((v_max, s_v, R, s_R), s_Q, modules=['numpy'])
26 sp.pprint(Q_evalfunc(v_max_exper, radius) * 60 * 1e3)
27 sp.pprint(s_Q_evalfunc(v_max_exper, s_v_max_exper, radius, s_radius) * 60 * 1e3)

```

A.7 Fehlerrechnung turbulentes Strömungsprofil

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import sympy as sp
4
5  Q      = sp.Symbol('Q')
6  s_Q    = sp.Symbol('s_Q')
7  R      = sp.Symbol('R')
8  k      = sp.Symbol('k')
9  s_k    = sp.Symbol('s_k')
10 s_R    = sp.Symbol('s_R')
11 v_max  = sp.Symbol('v_max')
12 s_v    = sp.Symbol('s_v')
13
14 Q = 2 * sp.pi * v_max * R**2 * k**2 / ((k + 1)*(2*k+1))
15
16 s_Q = sp.sqrt( (sp.diff(Q,v_max) * s_v)**2 + (sp.diff(Q,R) * s_R)**2 + (sp.diff(Q,k) * s_k)**2)
17
18 sp.pprint(Q)
19 sp.pprint(s_Q)
20
21 radius      = 20e-3
22 s_radius    = 0.25e-3
23 k_exper     = 7.8876
24 s_k_exper   = 1.5642
25 v_max_exper = 10.793e-2
26 s_v_max_exper = 1.5720e-3
27
28 Q_evalfunc  = sp.lambdify((v_max, R, k), Q, modules=['numpy'])
29 s_Q_evalfunc = sp.lambdify((v_max, s_v, R, s_R, k, s_k), s_Q, modules=['numpy'])
30 sp.pprint(Q_evalfunc(v_max_exper, radius, k_exper) * 60 * 1e3)
31 sp.pprint(s_Q_evalfunc(v_max_exper, s_v_max_exper, radius, s_radius, k_exper, s_k_exper) * 60 * 1e3)

```

Anhang B Messprotokolle