

# A11 – Röntgenstrahlung und -beugung

21.04.2016

---

Versuchsleiter: Raphael Frey  
Assistent: Mario Hässler

# **Inhaltsverzeichnis**

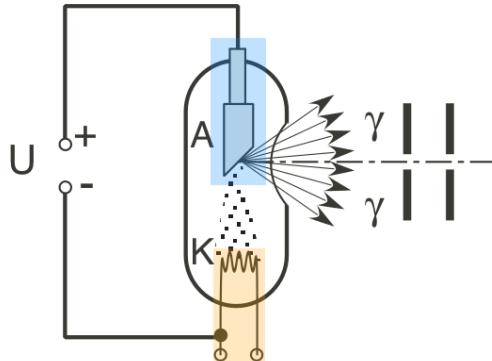
<b>1 Arbeitsgrundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Das Röntgen-Spektrum . . . . .	1
1.2 Beugung von Röntgen-Strahlung an Kristallen . . . . .	3
<b>2 Durchführung</b>	<b>5</b>
2.1 Versuchsanordnung . . . . .	5
2.2 Geräteliste . . . . .	6
2.3 Messvorgang/Messmethoden . . . . .	6
2.4 Proben/Versuchsobjekte . . . . .	6
<b>3 Auswertung</b>	<b>7</b>
3.1 Wichtige Daten . . . . .	7
3.2 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF . . . . .	7
3.3 Versuch 3.3 – Planck-Konstante . . . . .	12
3.4 Andere Kristalle . . . . .	15
<b>4 Fehlerrechnung</b>	<b>18</b>
4.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF . . . . .	18
4.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante . . . . .	19
4.3 Andere Kristalle . . . . .	20
<b>5 Resultate und Diskussion</b>	<b>21</b>
5.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF . . . . .	21
5.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante . . . . .	21
5.3 Andere Kristalle . . . . .	22
<b>Anhang A Matlab-Code</b>	<b>24</b>
A.1 LiF-Kristall . . . . .	24
A.2 Planck-Konstante . . . . .	25
A.3 Andere Kristalle . . . . .	26
<b>Anhang B Messprotokoll</b>	<b>28</b>

## **Versionsgeschichte**

*21.04.2016 Version 1*

# 1 Arbeitsgrundlagen

## 1.1 Das Röntgen-Spektrum



**Abbildung 1:** Röntgen-Röhre, schematisch. Glühkathode K: orange, Anode A: blau. Quelle: Versuchsanleitung

Röntgen-Strahlung entsteht stets, wenn schnelle Elektronen auf Materie treffen, z.B. in einem Monitor mit Kathodenstrahl-Röhre. Sie besteht aus einer Glühkathode **K** (orange in Abbildung 1) und einer Anode **A** (blau in Abbildung 1). Eingeschlossen ist das Ganze in einem vakuumierten Glaskolben.

Die Kathode gibt durch ihre Erhitzung Elektronen ab, welche durch das Elektrische Feld zwischen Kathode und Anode auf die Anode beschleunigt werden (Spannung zwischen Kathode und Anode: üblicherweise einige 10 kV bis einige 100 kV, in diesem Versuch liegt sie zwischen 12 kV und 35 kV). Beim Auftreffen auf die Anode haben die Elektronen somit eine Energie von  $E_k = e \cdot U$ .

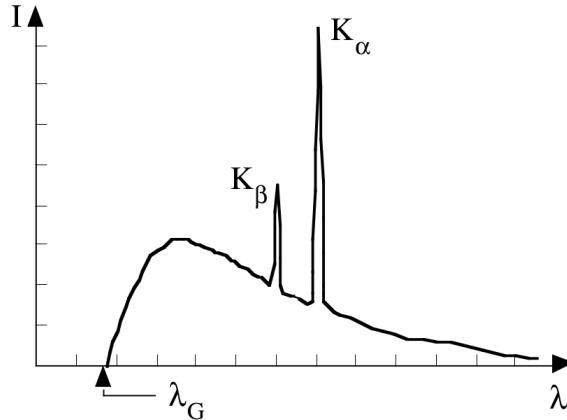
In der Anode wird nun ein kleiner Teil (weniger als 1 %) dieser Energie in Röntgenstrahlung umgewandelt (der Rest geht in die Anregung und Ionisation der Metallatome der Anode).

Da die abgegebene Röntgenstrahlung einigermaßen isotrop ist, wird eine Abschirmung benötigt, um nicht ziellos die Umgebung zu verstrahlen. Der Röntgenstrahl wird weiter auf eine nutzbar kleine Form reduziert, indem man einen Bleikollimator benutzt.

Als Anodenmaterial wird normalerweise ein Metall mit mittlerer bis hoher Ordnungszahl verwendet. In diesem Versuch kommen Kupfer ( $Z = 29$ ), Eisen ( $Z = 26$ ) und Molybdän ( $Z = 42$ ) zum Einsatz.

Das Röntgen-Spektrum selbst besteht aus zwei Komponenten:

- **Bremskontinuum:** unspezifische Form, Einsatzpunkt am kurzwelligen Ende ( $\lambda_G$  in Abbildung 2) ist abhängig von der Röhrenspannung.
- **Röntgenlinien:** diskrete, vom Anodenmaterial abhängige Strahlung, unabhängig von der Spannung



**Abbildung 2:** Röntgen-Spektrum. *Quelle:* Versuchsanleitung

### 1.1.1 Die Bremsstrahlung

Dringt ein Elektron von der Kathode in ein Atom der Anode ein und kommt in den Einflussbereich des Coulomb-Feldes des Kerns, wird gemäss Quantentheorie ein Photon  $\gamma$  abgegeben.

Die Grenze der kürzesten Wellenlänge  $\lambda_G$ , die im Spektrum dieser Photonen auftritt, beschreibt die Situation, wenn ein emittiertes Photon die gesamte Energie eines einfallenden Elektrons aufgenommen hat (zur Erinnerung: kürzere Wellenlänge korrespondiert mit höherer Frequenz und somit höherer Energie eines Photons). Da es unmöglich ist, mehr Energie in ein Photon zu transferieren, als das einfallende Elektron mitbringt, reisst dort das Spektrum am linken Ende ab.

Die maximale Energie, die ein emittiertes Röntgen-Photon haben kann, berechnet sich somit zu

$$E_{\gamma,max} = e \cdot U \quad (1)$$

mit der zugehörigen Wellenlänge:

$$\lambda_G = \frac{h \cdot c}{e \cdot U} \quad (2)$$

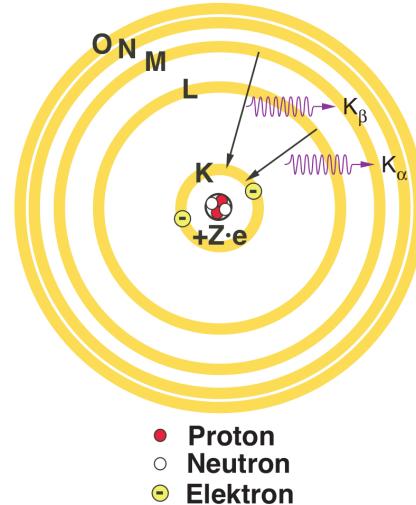
$h$  ist dabei die Planck-Konstante,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $e$  die Ladung eines Elektrons und  $U$  die Röhrenspannung.

### 1.1.2 Die charakteristische Strahlung

Die charakteristische Strahlung geht von den Atomen des Anodenmaterials selbst aus. Sie besteht aus Photonen, die bei Elektronenübergängen in der kernnahen Atomhülle abgegeben werden:

- L-Schale → K-Schale:  $K_\alpha$ -Strahlung
- M-Schale → K-Schale:  $K_\beta$ -Strahlung
- M-, N-, O-Schale → L-Schale: L-Strahlung

Solche Übergänge werden ermöglicht durch das Herausschlagen von Elektronen aus einer inneren Schale (Elektronenstoss/Stossionisation oder Absorption von Röntgen-Strahlung/Photoionisation).



Die beiden K-Linien dominieren dabei das Spektrum.

## 1.2 Beugung von Röntgen-Strahlung an Kristallen, Röntgen-Spektrometer

Röntgenstrahlen werden an einem Kristallgitter gebrochen, wenn die Bragg'sche Gleichung (Gleichung 3) erfüllt ist:

$$2 \cdot d \cdot \sin\vartheta_n = n \cdot \lambda \quad (3)$$

Dabei ist  $d$  der Netzebenenabstand. Netzebenen sind von Atomen regelmäßig belegte Ebenen in einer Kristallstruktur, entsprechen also nicht unbedingt den Gitterflächen (bzw.  $d$  ist nicht unbedingt identisch zu einer Gitterkonstanten).

Abbildung 4 stellt schematisch das Einfallen und Reflektieren von Strahlung in und an einem Kristallgitter und die Netzebenen dar.

$\vartheta$  ist der so genannte **Glanzwinkel**. Er beschreibt den Winkel zwischen Netzebene und ein- bzw. ausfallendem Strahl.

Es gibt verschiedene Verfahren, um sich das Röntgenstrahlung zum Einblick ins Innere einer Kristallstruktur zu Nutzen zu machen. In diesem Versuch wird die **Bragg'sche Drehkristallmethode** verwendet.

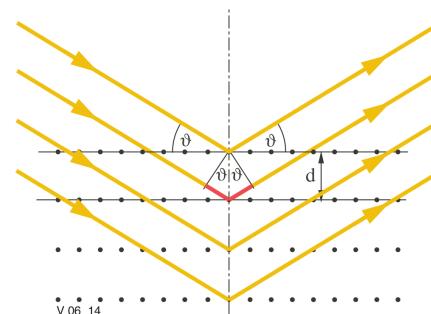


Abbildung 4: Schema zur Herleitung der Bragg'schen Gleichung.  
Quelle: Versuchsanleitung

Dabei wird ein Kristall in einer Halterung rotiert und mit monochromatischer Strahlung bestrahlt. Nur bei bestimmten Winkeln wird der Strahl am Kristall reflektiert und im Zählrohr detektiert (siehe Abbildung 5).

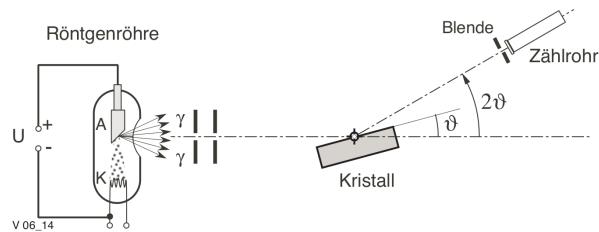
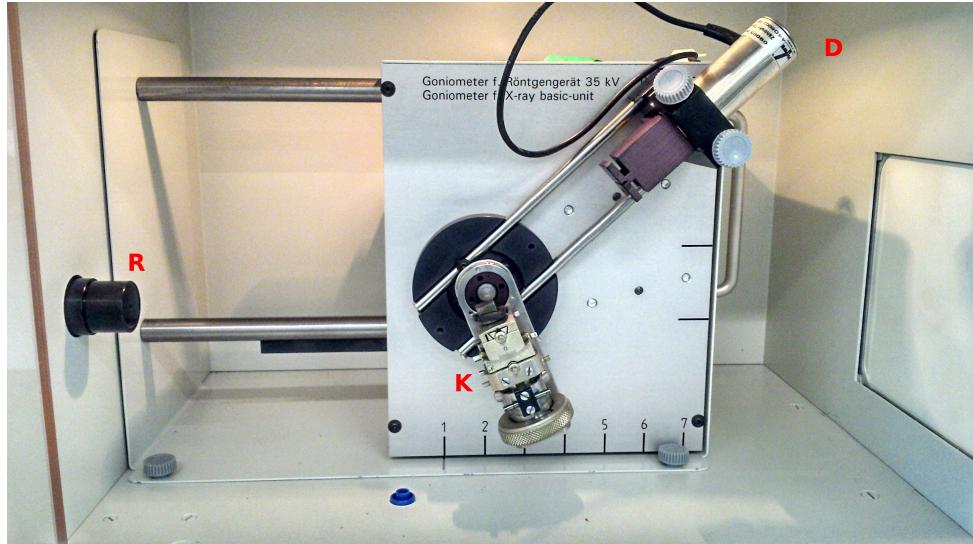


Abbildung 5: Schema der Versuchsanordnung *Quelle:* Versuchsanleitung

## 2 Durchführung

### 2.1 Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abbildung 6 dargestellt.



**Abbildung 6:** Versuchsanordnung. **R:** Austritt der Röntgenstrahlung aus dem Bleikollimator, **K:** Drehhalterung mit Kristall, **D:** Detektor

Der Detektor rotiert dabei stets mit dem doppelten Winkel der Kristallhalterung um den Mittelpunkt. Daher ist in den Plots im folgenden Kapitel jeweils der Zählrohrwinkel gleich dem doppelten Glanzwinkel.

In Abbildung 7 ist eine der benutzten auswechselbaren Einheiten mit einer Röntgenröhre zu sehen.



**Abbildung 7:** Eine der benutzten Röntgenröhren-Einheiten

## 2.2 Geräteliste

Die verwendeten Geräte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

**Tabelle 1:** Hilfsmittel und Geräteliste

Gerät	Typ
Röntgengerät	Phywe, 35 kV
Röntgenröhre	Phywe, Kupferanode
Röntgenröhre	Phywe, Eisenanode
Röntgenröhre	Phywe, Molybdänanode
Auswerteprogramm Versuchsapparatur	Phywe Measure
Auswerteprogramm Bericht	QtIPlot

## 2.3 Messvorgang/Messmethoden

Es wurde die gewünschte Röhre und der Bleikollimator eingesetzt. Anschliessend wurde auf der rotierenden Halterung der zu analysierende Kristall befestigt. Die Apparatur wurde justiert und danach wurde die Messung via PC-Software automatisiert durchgeführt.

## 2.4 Proben/Versuchsobjekte

Es wurden folgende Kristalle untersucht:

- LiF
- Bergkristall (SiO)
- Kalkspat (Kalzit, CaCO<sub>3</sub>)
- Pyrit (Katzengold, FeS<sub>2</sub>)
- synthetischer Quarz (SiO<sub>2</sub>)

### 3 Auswertung

#### 3.1 Wichtige Daten

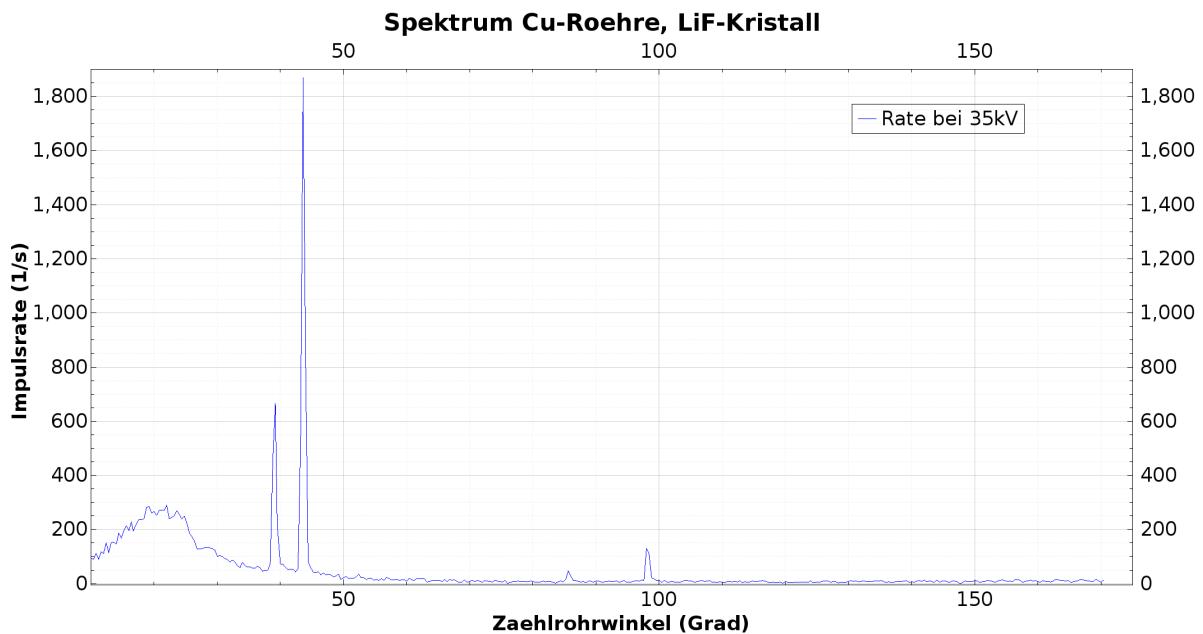
**Tabelle 2:** Charakteristische Röntgenlinien der Anodenmaterialien. *Quelle:* Anhang der Versuchsanleitung

Material	$\lambda - K\alpha_1$	$\lambda - K\alpha_2$	$\lambda - K\alpha$	$\lambda - K\beta$
Fe (Z = 26)	194.00 pm	193.60 pm	193.80 pm	175.66 pm
Cu (Z = 29)	154.05 pm	154.44 pm	154.245 pm	193.23 pm
Mo (Z = 42)	70.93 pm	71.36 pm	71.145 pm	63.26 pm

Tabelle 4 enthält die Daten der charakteristischen Spektrallinien der Anodenmaterialien (zu finden in der Veruchsanleitung im Anhang). Da die beiden  $\alpha$ -Linien sehr nahe beieinander liegen und daher beinahe immer als lediglich ein Peak zu sehen sind, wurde ein arithmetischer Mittelwert  $K\alpha$  bestimmt, welcher in den folgenden Rechnungen und Plots jeweils benutzt wird (z.B. für die Bragg'sche Gleichung).

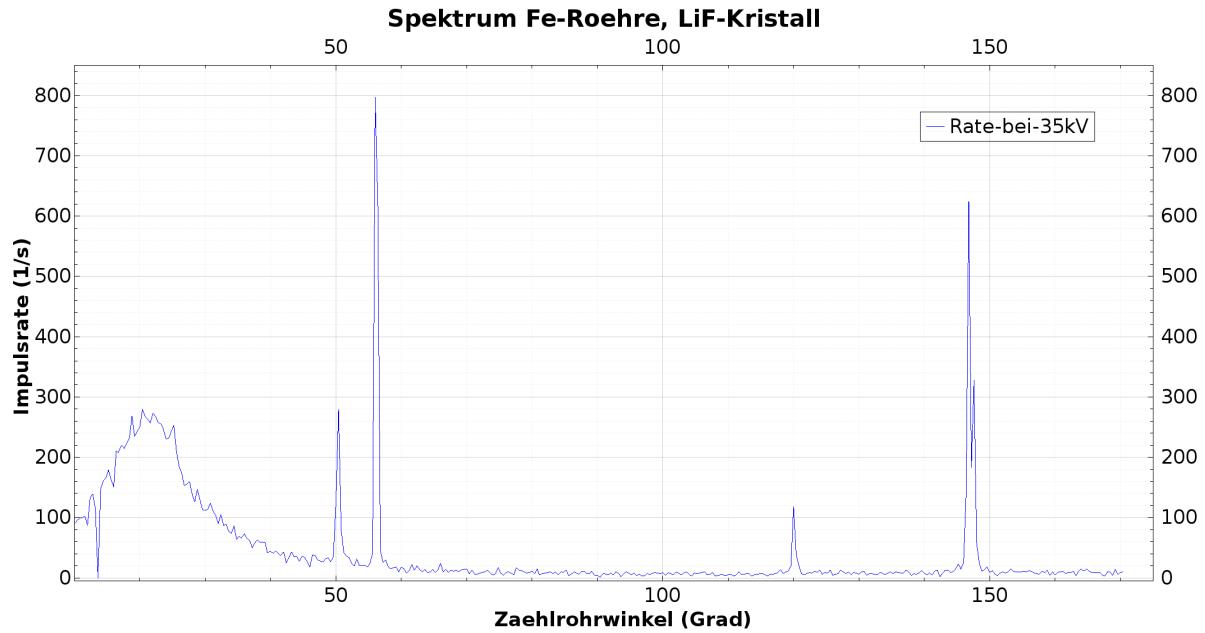
#### 3.2 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Als Erstes wurden die Spektren der drei Röhren (Kupfer, Eisen, Molybdän) mit einem LiF-Kristall bei 35 kV aufgenommen.

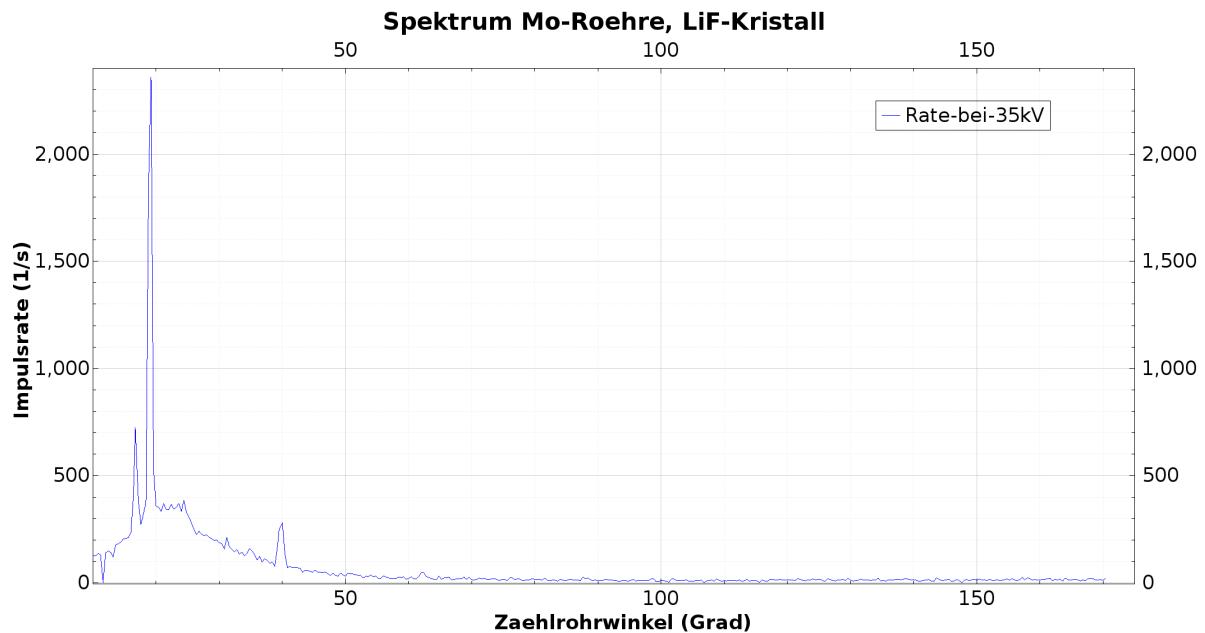


**Abbildung 8:** Spektrum mit Kupferröhre

Aus den Daten zu den Abbildungen 8, 9 und 10 wurden nun die zu den Spektrallinien gehörenden Zählrohrwinkel ausgelesen. Dies erfolgte *nicht* aus dem Diagramm direkt, da dies



**Abbildung 9:** Spektrum mit Eisenröhre



**Abbildung 10:** Spektrum mit Molybdänröhre

zu ungenau wäre. Stattdessen wurden dazu die Zahlenwerte der Messungen mithilfe der Plots (zum Eingrenzen des Suchbereichs) betrachtet.

**Tabelle 3:** Zählrohrwinkel (entspricht doppeltem Glanzwinkel) zu Spektrallinien mit LiF-Kristall bei 35 kV

	Kupferröhre		Eisenröhre		Molybdänröhre	
	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$
n = 1	39.2°	43.6°	50.4°	56.0°	16.7°	19.2°
n = 2	85.6°	98.0°	120.0°	146.8°	34.8°	40.0°
n = 3				147.6°		62.0°

Schlussendlich wollen wir mit diesen Daten auf die Gitterstruktur des LiF-Kristalles schliessen. Bevor wir dies tun, werden wir jedoch zuerst noch untersuchen, ob sich allenfalls ein Nullpunktfehler in unsere Messungen eingeschlichen hat.

Dazu stellen wir zuerst die Bragg'sche Gleichung um und führen einen Nullpunktfehler  $\vartheta_0$  ein:

$$\vartheta_n = \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda_{Anode}}{2 \cdot d}\right) + \vartheta_0 \quad (4)$$

Als Stellgrösse benutzen wir nun  $n \cdot \lambda$ , wobei  $\lambda$  aus Tabelle 4 von Seite 9 entnommen wird. Je nachdem, ob es sich um eine  $\beta$ - oder eine  $\alpha$ -Linie handelt, muss natürlich das entsprechende  $\lambda$  verwendet werden.

Dies führt zu folgenden Wertepaaren:

**Tabelle 4:** Wertepaare für umgestellte Bragg'sche Formel

Kupfer		Eisen		Molybdän	
$n \cdot \lambda$	$\vartheta_n$	$n \cdot \lambda$	$\vartheta_n$	$n \cdot \lambda$	$\vartheta_n$
139.23 pm	19.6°	175.66 pm	25.2°	63.26 pm	8.35°
154.245 pm	21.8°	193.8 pm	28°	71.145 pm	9.6°
278.46 pm	42.8°	351.32 pm	60°	126.52 pm	17.4°
308.49 pm	49°	387.6 pm	73.4°	142.29 pm	20°
				213.435 pm	31°

Nun wäre es natürlich sehr elegant, wenn man direkt eine Regression über die beiden Variablen  $d$  und  $\vartheta_0$  mit diesen Werten durchführen könnte, und somit in einem Zug den Netzebenenabstand und den Offset dieser Messungen erhielte.

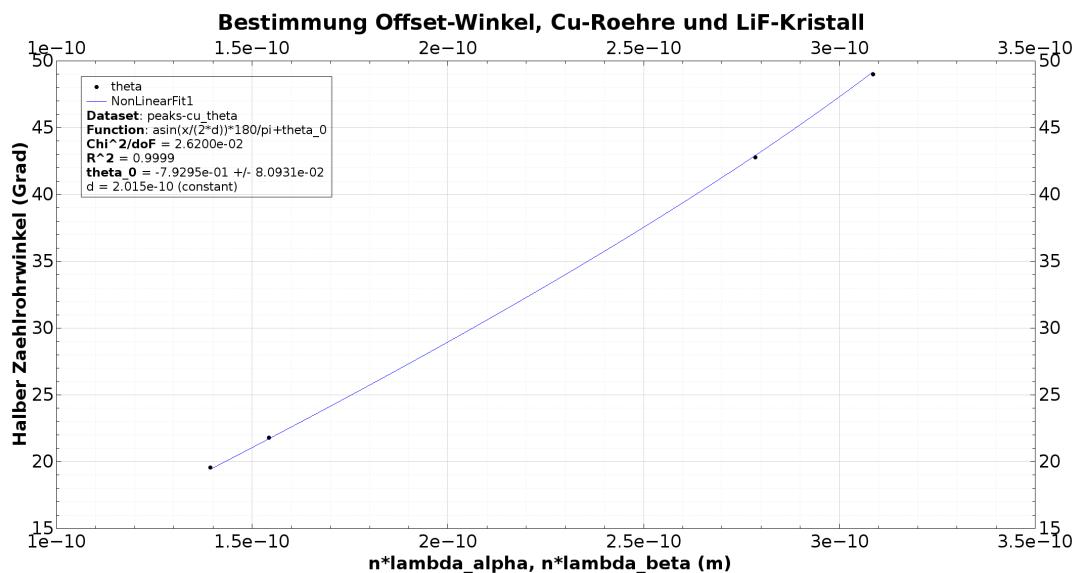
Leider zeigte sich QtiPlot hierbei aber sehr unkooperativ. Trotz vielem Herumtüfteln stürzte das Programm beim Versuch, über beide Variablen eine Regression durchzuführen, ab.

Als Workaround wurde daher folgendermassen vorgegangen:

- $d$  wurde auf den Wert aus der Literatur gesetzt (201.5 pm, siehe Versuchsanleitung).
- Anschliessend wurde mit diesem Wert, der modifizierten Bragg'schen Formel aus Gleichung 4 und den Werten aus Tabelle 4 eine Regression durchgeführt und daraus der Nullpunktfehler  $\vartheta_0$  bestimmt.

- Die somit erhaltenen Werte für den Nullpunktfehler (einer für jede Röhre) wurden anschliessend mit Matlab wieder in die Bragg'sche Formel (Gleichung 4, Seite 9) eingesetzt, jedoch diesmal nach dem Netzebenenabstand  $d$  aufgelöst.  
Dabei erhält man für jede Spektrallinie ein Resultat. Diese können abschliessend noch gemittelt werden. Eine Fehlerrechnung wurde ebenfalls durchgeführt (siehe Abschnitt 4.1 ab Seite 18).

Die Regressions-Plots sind in den Abbildungen 11, 12 und 13 abgebildet.



**Abbildung 11:** Bestimmung Nullpunktfehler für Kupferröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Kupferröhre beträgt also:

$$\vartheta_0 = (-0.729\,250 \pm 0.080\,931)^\circ$$

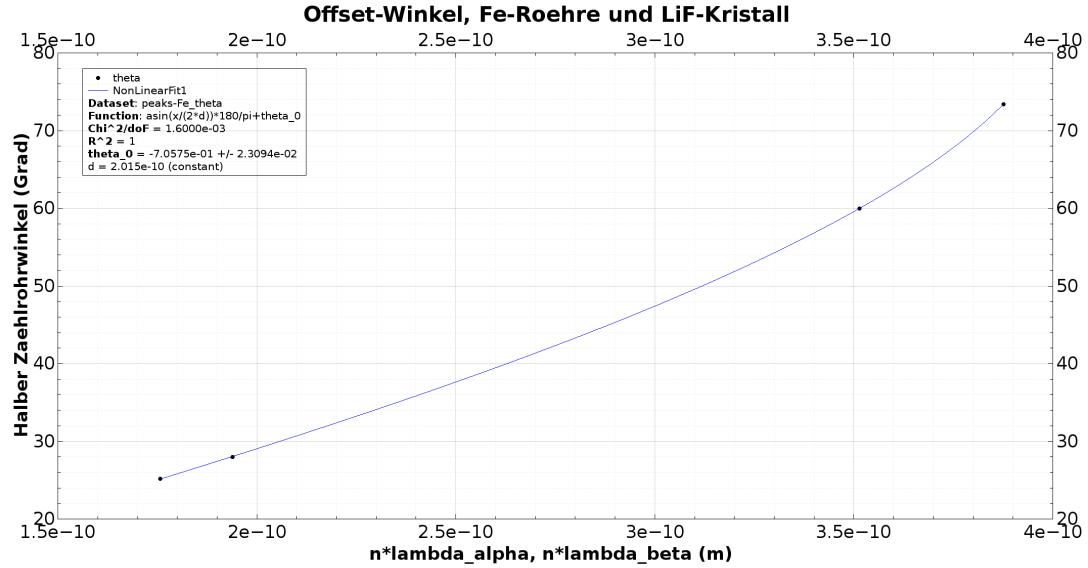


Abbildung 12: Bestimmung Nullpunktfehler für Eisenröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Eisenröhre ist:

$$\vartheta_0 = (-0.705\,750 \pm 0.023\,094)^\circ$$

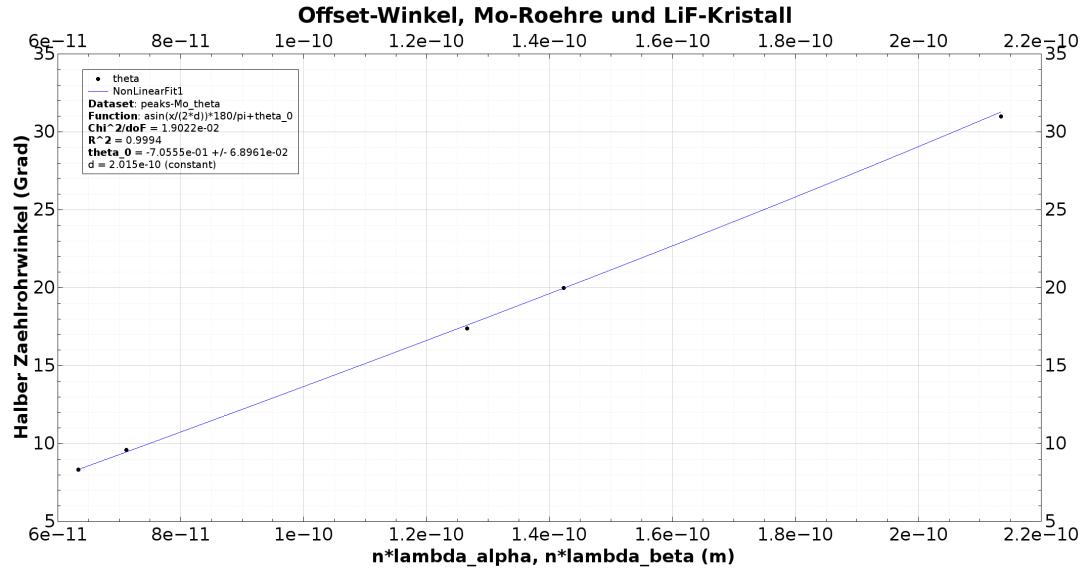


Abbildung 13: Bestimmung Nullpunktfehler für Molybdänröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Molybdänröhre kommt auf:

$$\vartheta_0 = (-0.705\,550 \pm 0.068\,961)^\circ$$

Die Weiterverarbeitung dieser Resultate wurde inklusive Fehlerrechnung mit Matlab durchgeführt und ist in Kapitel 4.1 auf Seite 18 zu finden.

### 3.3 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Das Planck'sche Wirkungsquantum soll über die Grenzwellenlänge  $\lambda_G$  und die Formel

$$\lambda_G = \frac{h \cdot c}{e \cdot U}$$

bestimmt werden.

Dazu wurden bei verschiedenen Röhrenspannungen Spektren mit der Fe-Röhre und dem LiF-Kristall aufgenommen, mit besonderem Augenmerk auf den Bereich, wo  $\lambda_G$  erwartet wurde (also kleine Zählrohrwinkel).

Anschliessend wurden für jede Spannung der Scatter-Plot von Hand nach bestem Wissen und Gewissen ausgewertet. Genauer gesagt wurde eine Gerade möglichst sinnvoll durch die Messpunkte gelegt und ihre Schnittpunkt mit der horizontalen Achse bestimmt, inklusive abgeschätzter Unsicherheit.

Eine schematische Darstellung dieses Prozesses ist in Abbildung 14 auf Seite 13 zu sehen.

Die bestimmten Werte wurden anschliessend in ein Matlab-Script gefüttert, welches daraus die zugehörigen Grenzwellenlängen und Unsicherheiten berechnete.

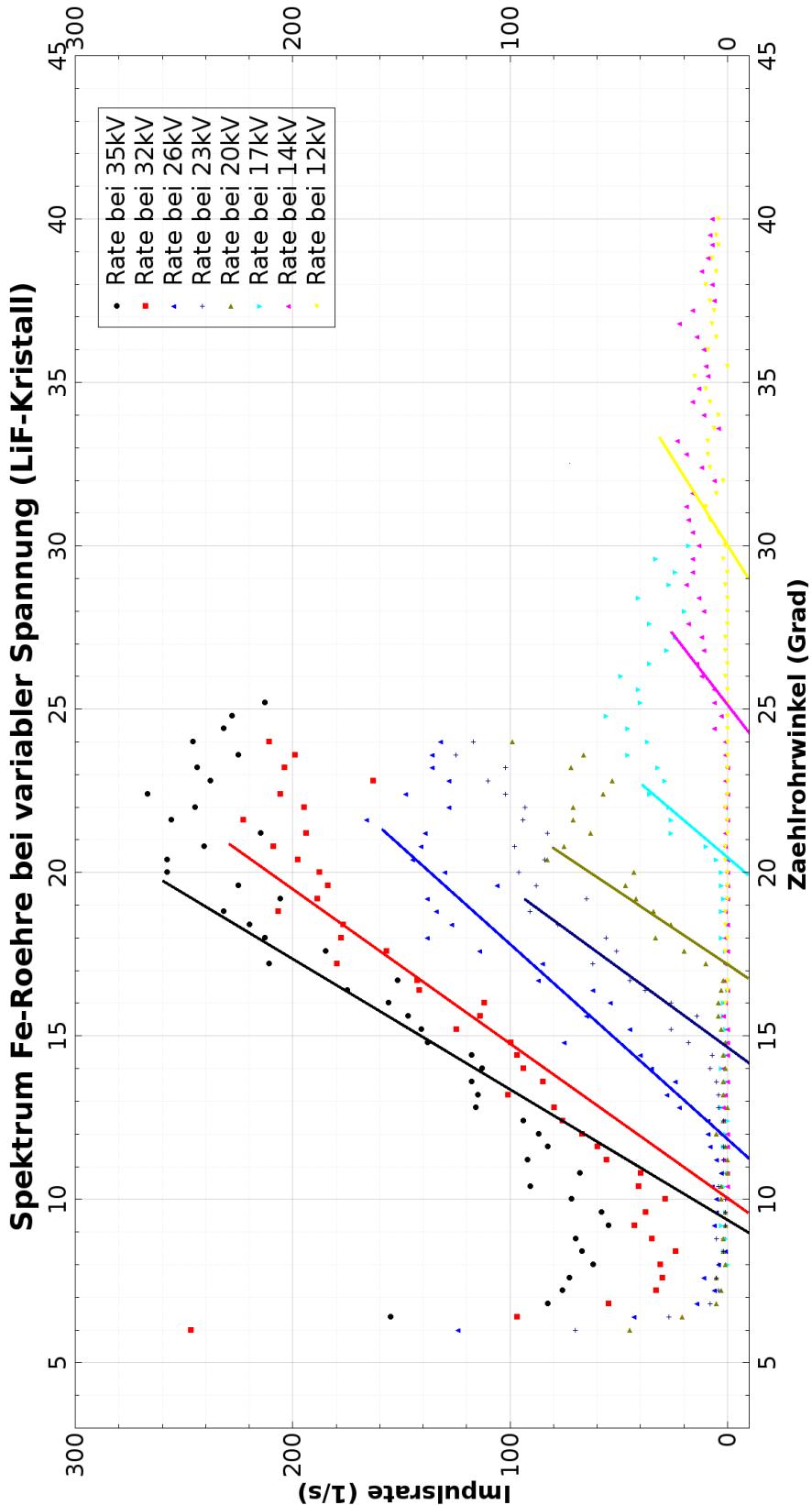
Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, dass eine Mess-Serie fehlt. Dies ist auf einen Fehler beim Speichern der Daten zurückzuführen; der Experimentator überschrieb versehentlich ein Datenset. Dies soll uns jedoch nicht daran hindern, diese Auswertung wie geplant weiterzuführen. Wie sich zeigen wird, ist das Resultat trotzdem ganz passabel.

**Tabelle 5:** Grenzwinkel  $\vartheta_G$  und Grenzwellenlänge  $\lambda_G$

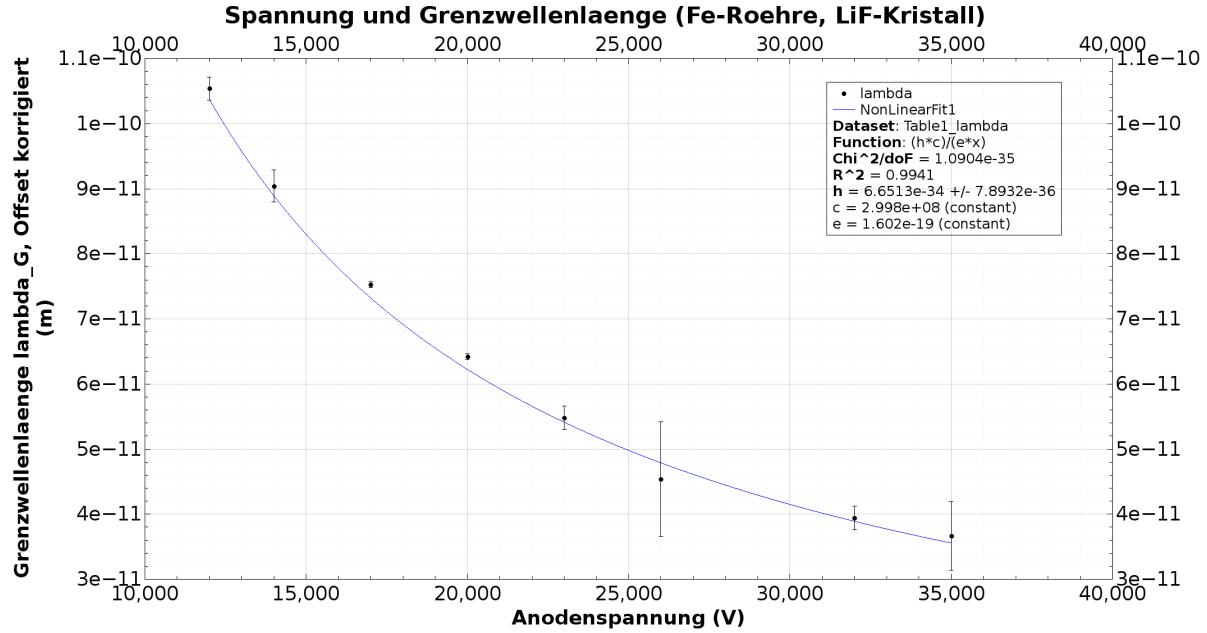
Spannung U	Winkel $2 \cdot \vartheta_G$	Wellenlänge (Matlab)
35 kV	$(9.0 \pm 1.5)^\circ$	$(36.62 \pm 5.00) \text{ pm}$
32 kV	$(9.8 \pm 0.5)^\circ$	$(39.42 \pm 2.00) \text{ pm}$
26 kV	$(11.5 \pm 2.5)^\circ$	$(45.37 \pm 9.00) \text{ pm}$
23 kV	$(14.2 \pm 0.5)^\circ$	$(54.79 \pm 2.00) \text{ pm}$
20 kV	$(16.9 \pm 0.1)^\circ$	$(64.18 \pm 0.40) \text{ pm}$
17 kV	$(20.1 \pm 0.1)^\circ$	$(75.26 \pm 0.40) \text{ pm}$
14 kV	$(24.5 \pm 0.7)^\circ$	$(90.41 \pm 2.00) \text{ pm}$
12 kV	$(28.9 \pm 0.5)^\circ$	$(105.41 \pm 2.00) \text{ pm}$

Die Wellenlängen aus Tabelle 5 wurden dabei mittels der Bragg'schen Gleichung berechnet, wobei  $n = 1$  sowie  $d = 201.5 \text{ pm}$  zu setzen sind.

Die so ermittelten Wellenlängen und ihre Fehler wurden nun in QtiPlot eingegeben und eine gewichtete Regression ausgeführt.



**Abbildung 14:** Schematische Darstellung der Bestimmung der Grenzwinkel. **Beachte:** Die hier eingezeichneten Geraden sind nicht diejenigen, welche wirklich zu den Werten aus Tabelle 5 auf Seite 12 geführt haben. Dazu ist diese Grafik viel zu grob. Es wurde pro Spannung jeweils ein Scatterplot ausgewertet, um die zugehörigen Grenzwinkel zu bestimmen. Da dies jedoch unverhältnismässig viel Platz benötigt für diesen Bericht, ist das Vorgehen schematisch hier dargestellt.



**Abbildung 15:** Gewichtete Regression zur Bestimmung der Planck'schen Konstante

Es ergibt sich also:

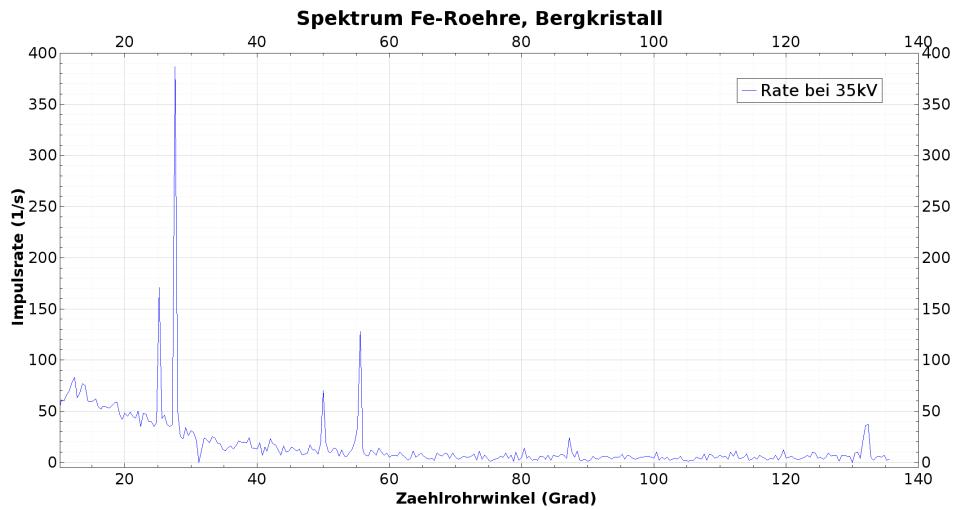
$$h = (6.6513 \pm 0.0800) \text{ Js} \cdot 10^{-34}$$

### 3.4 Andere Kristalle

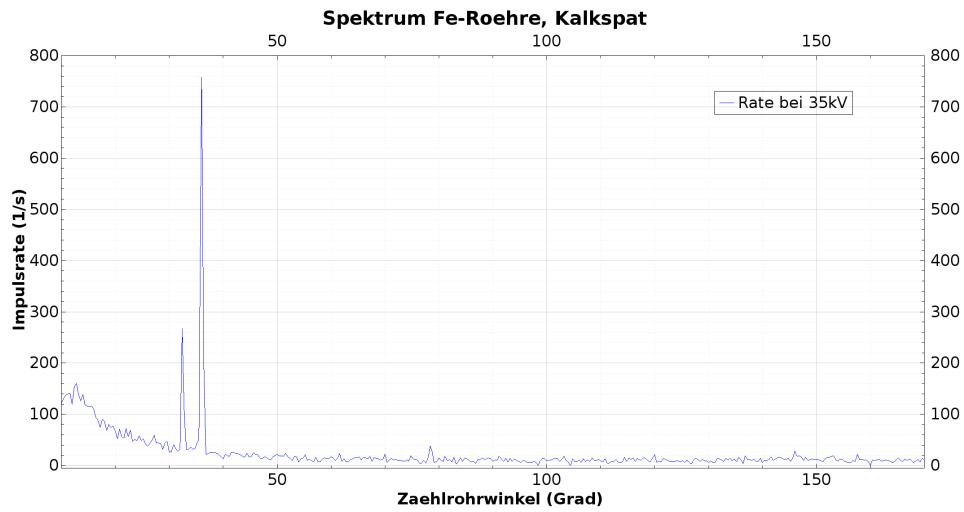
Hier ging es darum, die Netzebenenabstände von diversen Kristallproben analog zum Abschnitt 5.1 zu bestimmen. Die verwendeten Kristalle waren:

- Bergkristall ( $\text{SiO}$ )
- Kalkspat (Kalzit,  $\text{CaCO}_3$ )
- Pyrit (Katzengold,  $\text{FeS}_2$ )
- synthetischer Quarz ( $\text{SiO}_2$ )

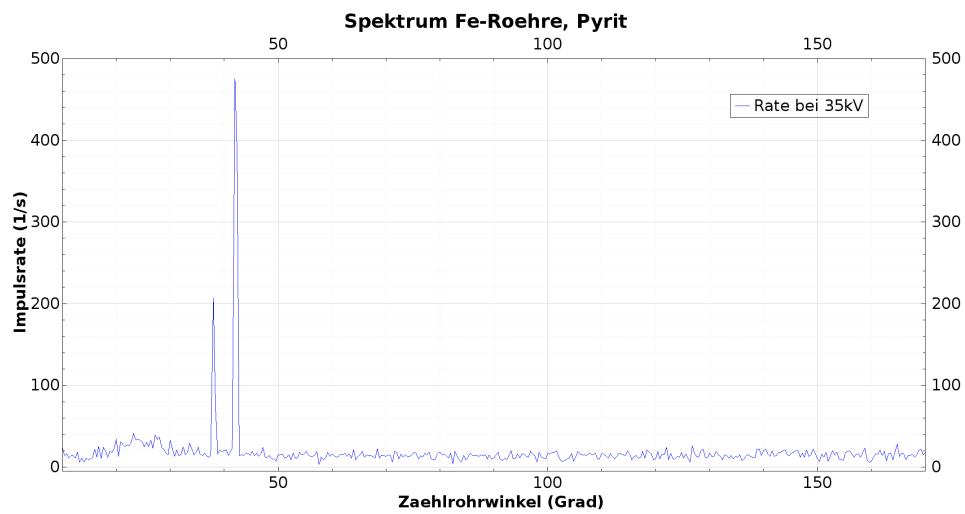
Hierzu wurde von jedem Kristall mit der Eisenröhre bei 35 kV ein Spektrum aufgenommen. Diese sind zu sehen in den Abbildungen 16, 17, 18 und 19, die ausgelesenen Zählrohrwinkel sind in Tabelle 6 auf Seite 17 zu finden.



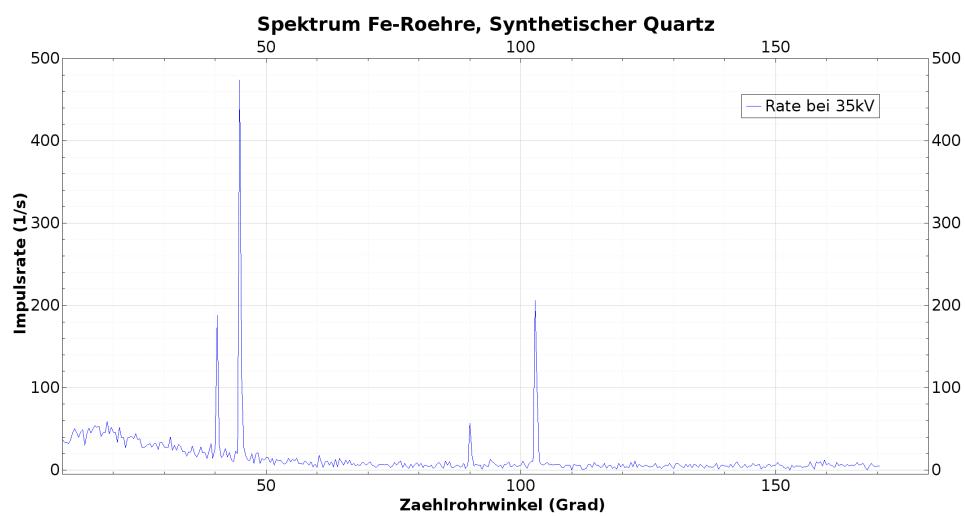
**Abbildung 16:** Spektrum des Bergkristalls mit Eisenröhre bei 35 kV



**Abbildung 17:** Spektrum von Kalkspat mit Eisenröhre bei 35 kV



**Abbildung 18:** Spektrum von Pyrit mit Eisenröhre bei 35 kV



**Abbildung 19:** Spektrum von synthetischem Quarz mit Eisenröhre bei 35 kV

**Tabelle 6:** Zählrohrwinkel (entspricht doppeltem Glanzwinkel) zu Spektrallinien mit Fe-Röhre bei 35 kV

	Bergkristall	Kalkspat		Pyrit		Synthetischer Quarz	
	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$
n = 1	25.2°	27.6°	32.4°	36.0°	38.0°	42.0°	40.4°
n = 2	50.0°	55.6°	74.8°	78.4°			90.0°
n = 3	80.4°	87.2°					102.8°
n = 4	119.6°	132.4°					

Wie bereits bei der Bestimmung des Netzebenenabstandes des LiF-Kristalles erwähnt, wäre es natürlich sehr elegant gewesen, mit diesen Werten nun eine Regression über den Netzebenenabstand und den Nullpunktfehler durchzuführen. Da das (vergebliche) Debuggen von QtiPlot und das Heraustüfteln des im Abschnitt zum LiF-Kristall benutzten Workarounds sowie seine anschliessende Umsetzung beträchtlich Zeit in Anspruch nahm, war es nicht mehr möglich, diesen Workaround auch auf diese vier Kristalle anzuwenden.

Die etwas unelegantere Methode besteht darin, zu jedem Wert aus Tabelle 6 den zugehörigen Netzebenenabstand mittels der Bragg'schen Gleichung zu bestimmen, und diese Resultate anschliessend zu mitteln. Dieser Weg wurde für diesen Abschnitt gewählt und ist im Kapitel zur Fehlerberechnung ab Seite 20 beschrieben. Das Verfahren wurde wie beim LiF-Kristall mit Matlab ausgeführt.

## 4 Fehlerrechnung

### 4.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Zur Rekapitulation nochmals die mittels Regression bestimmten Nullpunktfehler:

**Tabelle 7:** Nullpunktfehler aus Regression

Anodenmaterial	Nullpunktfehler $\vartheta_0$
Kupfer	$\vartheta_0 = (-0.729\,250 \pm 0.080\,931)^\circ$
Eisen	$\vartheta_0 = (-0.705\,750 \pm 0.023\,094)^\circ$
Molybdän	$\vartheta_0 = (-0.705\,550 \pm 0.068\,961)^\circ$

Das Ziel ist nun die Bestimmung des Netzebenenabstandes mittels der folgenden Gleichung:

$$d = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot \sin(\vartheta_n - \vartheta_0)} \quad (5)$$

Wobei für  $\vartheta_n$  die halben Zählrohrwinkel einzusetzen sind (abgelesen aus den Messdaten) und für  $\lambda$  die entsprechenden Wellenlängen für die charakteristischen Spektrallinien des jeweiligen Anodenmaterials.

Dies liefert für jeden Peak jeder Anode einen Wert für  $d$  (Bestimmt via Matlab):

**Tabelle 8:** Netzebenenabstände zu den einzelnen Peaks

Anodenmaterial	Peak	Netzebenenabstand
Kupfer	$\beta_1$	203.9 pm
	$\beta_2$	203.5 pm
	$\alpha_1$	204.4 pm
	$\alpha_2$	203.3 pm
Eisen	$\beta_1$	203.6 pm
	$\beta_2$	202.1 pm
	$\alpha_1$	204.0 pm
	$\alpha_2$	201.9 pm
Molybdän	$\beta_1$	209.0 pm
	$\beta_2$	207.5 pm
	$\alpha_1$	205.8 pm
	$\alpha_2$	204.6 pm
	$\alpha_3$	205.1 pm

Diese Werte können nun gemittelt werden mittels der bekannten Formel:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Und ihr Fehler bestimmt werden mittels der Formel:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

Da Matlab praktische Befehle zum Verkürzen dieser Prozedur bereits integriert hat, greifen wir darauf zurück: `mean(d)` und `std(d) * sqrt(1/length(d))`, wobei `d` der Resultatvektor mit den Werten aus Tabelle 8 ist. `std(vector)` berechnet die Standardabweichung der Werte eines Vektors, `sqrt(1/length(d))` ist der Korrekturfaktor, um von der Standardabweichung auf den Fehler des Mittelwertes der Werte des Vektors zu kommen.

Dies liefert für den Netzebenenabstand von LiF:

$$d_{LiF} = (204.5 \pm 0.6) \text{ pm}$$

Das zugehörige Script ist in Anhang A.1 auf Seite 24 zu finden.

## 4.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Die von Hand geschätzten Unsicherheiten wurden zusammen mit dem im ersten Teil des Versuches bestimmten Nullpunktfehler in die Bragg'sche Gleichung eingesetzt:

$$\lambda_{Error} = \frac{2 \cdot \sin(\vartheta_{n,Error} - \vartheta_0)}{n}$$

und in Wellenlängen konvertiert.

Das hierfür benutzte Matlab-Script ist in Anhang A.2 auf Seite 25 zu finden.

Anschliessend wurden die daraus berechneten Fehler in QtiPlot als Fehlerspalte benutzt für einen gewichteten Regressions-Plot. Für die Unsicherheit des End-Resultates wurde abschliessend die Unsicherheit aus dem Fit von QtiPlot benutzt.

### 4.3 Andere Kristalle

Wie bereits erwähnt, wurde für jede Spektrallinie von jedem Kristall der zugehörige Netzebenenabstand mittels der Bragg'schen Gleichung berechnet (in Matlab). Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 9 zu sehen.

**Tabelle 9:** Die für die vier Kristalle bestimmten Netzebenenabstände und ihre Unsicherheiten.

	Bergkristall		Kalkspat		Pyrit		Synth. Quartz	
	d ( $\beta$ )	d ( $\alpha$ )	d ( $\beta$ )	d ( $\alpha$ )	d ( $\beta$ )	d ( $\alpha$ )	d ( $\beta$ )	d ( $\alpha$ )
n = 1	402.6 pm	406.2 pm	282.7 pm	314.2 pm	331.6 pm	366.5 pm	352.6 pm	391.0 pm
n = 2	415.6 pm	415.5 pm	652.8 pm	684.2 pm			785.4 pm	897.1 pm
n = 3	408.2 pm	421.5 pm						
n = 4	406.5 pm	423.6 pm						
MW	408.2 pm	416.7 pm	302.0 pm	310.1 pm	269.8 pm	270.4 pm	251.4 pm	251.1 pm
MW (ges.)		412.5 pm		306.1 pm		251.6 pm		270.1 pm
Fehler	2.7 pm	3.9 pm	12.8 pm	3.5 pm	0 pm	0 pm	3.0 pm	3.2 pm
Fehler (ges.)	2.7 pm		5.9 pm		0.3 pm		1.8 pm	

#### Anmerkungen:

- **Allgemein:** Die Resultate streuen teilweise merklich. Es drängt sich der Verdacht auf, dass hier eine Korrektur des Nullpunktfehlers wünschenswert wäre, wie dies beim LiF-Kristall gemacht wurde.
- **Bergkristall:** Sieht eigentlich ganz passabel aus, verglichen mit den anderen drei Kristallen.
- **Kalkspat:** Hier sieht man einen markanten Sprung zwischen  $n = 1$  und  $n = 2$ . Ich führe dies auf die Kristallstruktur zurück, und nicht auf einen Mess- oder Rechenfehler. Kalkspat hat keine kubische, sondern eine rhombische Einheitszelle (siehe Anhang Versuchsanleitung). Daher können je nach Einstrahlungswinkel verschiedene Abstände zwischen Netzebenen auftreten (nicht alle Netzebenen unter allen Winkeln sind identisch).
- **Pyrit:** Hier konnten nur bei  $n = 1$  Peaks detektiert werden. Die enorm kleinen Unsicherheiten sind daher also nicht etwa das Resultat von hervorragender Messpräzision, sondern das Ergebnis einer enorm kleinen Anzahl Messwerte.
- **Synthetischer Quarz:** Auch hier gelten wieder die gleichen Überlegungen wie beim Kalkspat bezüglich verschiedener möglicher Netzebenen, nur dass dieser Kristall keine rhombische, sondern eine auf Sechsecken aufbauende Gitterstruktur.

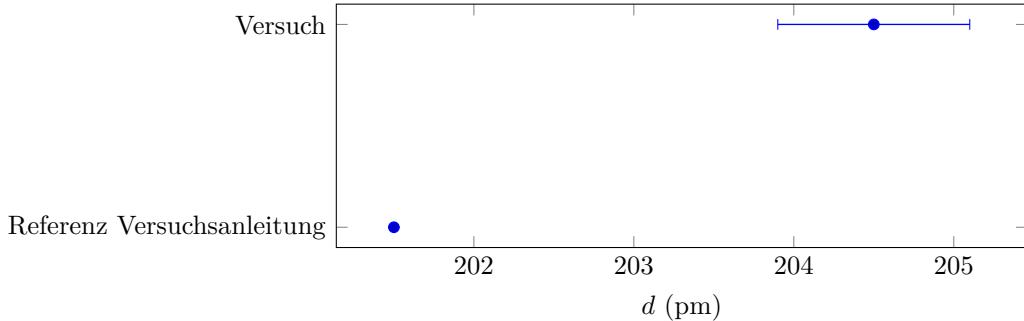
Das für diese Berechnungen benutzte Matlab-Script befindet sich in Anhang A.3 ab Seite 26.

## 5 Resultate und Diskussion

### 5.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Der Netzebenenabstand von LiF wurde bestimmt zu:

$$d_{LiF} = (204.5 \pm 0.6) \text{ pm}$$



**Abbildung 20:** graphische Darstellung der Ergebnisse für den Netzebenenabstand von LiF

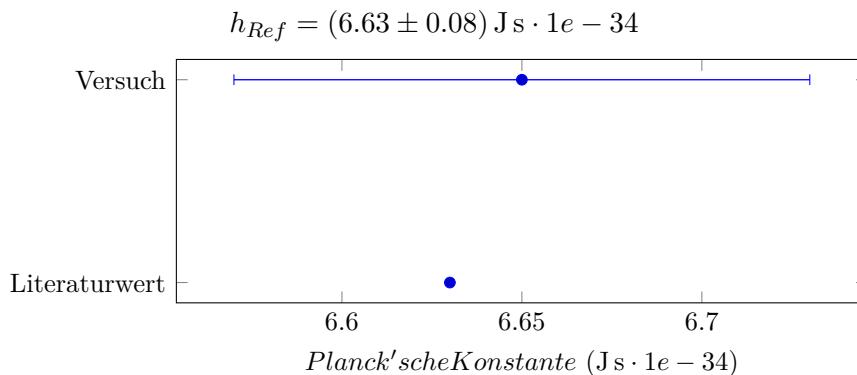
Der Referenzwert aus der Literatur ist zwar nicht ganz im Toleranzbereich des Experiments, aber alles in allem betrachte ich dieses Resultat doch als ganz zufriedenstellend. Es wäre interessant, herauszufinden, ob es genauer oder ungenauer ausfallen würde, wenn man die zugehörige Funktion in QtiPlot direkt für zwei Variablen ( $d$  und  $\vartheta_0$ ) fitten könnte.

### 5.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Die Planck-Konstante wurde experimentell bestimmt zu:

$$h_{Exp} = (6.65 \pm 0.08) \text{ Js} \cdot 1e - 34$$

Der Referenzwert aus der Literatur (Kuchling, 17. Aufl., p.526) ist:



**Abbildung 21:** graphische Darstellung der Ergebnisse für den die Bestimmung der Planck'schen Konstante

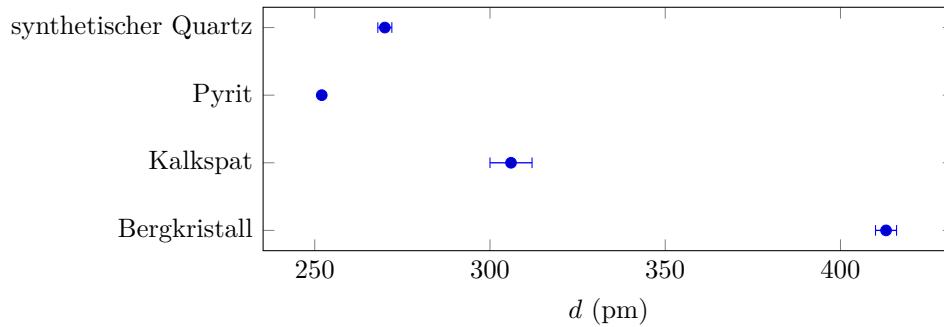
Der Referenzwert liegt innerhalb der Unsicherheit des experimentellen Resultates. Sehr zufriedenstellend.

### 5.3 Andere Kristalle

Die bestimmten Netzebenenabstände sind:

- **Bergkristall:**  $(413 \pm 3)$  pm
- **Kalkspat:**  $(306 \pm 6)$  pm
- **Pyrit:**  $(252.0 \pm 0.3)$  pm
- **Synthetischer Quarz:**  $(270 \pm 2)$  pm

Wie im Abschnitt zur Fehlerrechnung erwähnt erachte ich diese Werte allerdings nur als sehr bedingt aussagekräftig und bin der Meinung, dass hier noch einiges an Arbeit erforderlich wäre, um sinnvolle Schlussfolgerungen ziehen zu dürfen, die auch einem kritischen Blick standhalten würden. Leider hat der Tag nur 24 Stunden, und so musste ich hier einen Kompromiss machen und die Arbeit zu Ende bringen, ohne das Ziel ganz erreicht zu haben.



**Abbildung 22:** graphische Darstellung der Ergebnisse für den Netzebenenabstand von Bergkristall, Kalkspat, Pyrit und synthetischem Quarz

## **Unterschrift**

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: \_\_\_\_\_

Oberentfelden, den 21.04.2016.

## Anhang A Matlab-Code

Dieser Abschnitt beinhaltet die Matlab-Scripts, welche im Rahmen dieses Versuches geschrieben und verwendet wurden.

### A.1 LiF-Kristall

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11
2 % Lattice Plane Distances, LiF
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc
6
7 % offset angles (including conversion)
8 offset_Cu      = -7.2925e-1 * pi / 180 * 1/2;
9 offset_Cu_err  = 8.0931e-2 * pi / 180 * 1/2;
10 offset_Fe     = -7.0575e-1 * pi / 180 * 1/2;
11 offset_Fe_err = 2.3094e-2 * pi / 180 * 1/2;
12 offset_Mo     = -7.0555e-1 * pi / 180 * 1/2;
13 offset_Mo_err = 6.8961e-2 * pi / 180 * 1/2;
14
15
16 % Peak angles (including conversions)
17 peaks_Cu_beta = [39.2 85.6] .* pi ./ 180 .* 1/2;
18 peaks_Cu_alpha = [43.6 98.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
19 peaks_Fe_beta = [50.4 120.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
20 peaks_Fe_alpha = [56.0 146.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
21 peaks_Mo_beta = [16.7 34.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
22 peaks_Mo_alpha = [19.2 40.0 62.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
23
24
25 % lambda_K
26 lambda_K_beta_Cu = 139.23e-12;
27 lambda_K_alpha_Cu = (154.44 + 154.05)/2*1e-12;
28 lambda_K_beta_Fe = 175.66e-12;
29 lambda_K_alpha_Fe = (194.0 + 193.6)/2*1e-12;
30 lambda_K_beta_Mo = 63.26e-12;
31 lambda_K_alpha_Mo = (71.36+70.93)/2*1e-12;
32
33 % Lattice distances and errors (via Gauss error propagation), in meters
34 results = [
35   1 * lambda_K_beta_Cu/(2*sin(peaks_Cu_beta(1) - offset_Cu)),
36   2 * lambda_K_beta_Cu/(2*sin(peaks_Cu_beta(2) - offset_Cu)),
37   1 * lambda_K_alpha_Cu/(2*sin(peaks_Cu_alpha(1) - offset_Cu)),
38   2 * lambda_K_alpha_Cu/(2*sin(peaks_Cu_alpha(2) - offset_Cu)),
39   1 * lambda_K_beta_Fe/(2*sin(peaks_Fe_beta(1) - offset_Fe)),
40   2 * lambda_K_beta_Fe/(2*sin(peaks_Fe_beta(2) - offset_Fe)),
41   1 * lambda_K_alpha_Fe/(2*sin(peaks_Fe_alpha(1) - offset_Fe)),
42   2 * lambda_K_alpha_Fe/(2*sin(peaks_Fe_alpha(2) - offset_Fe)),
43   1 * lambda_K_beta_Mo/(2*sin(peaks_Mo_beta(1) - offset_Mo)),
44   2 * lambda_K_beta_Mo/(2*sin(peaks_Mo_beta(2) - offset_Mo)),
45   1 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(1) - offset_Mo)),
46   2 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(2) - offset_Mo)),
47   3 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(3) - offset_Mo))
48 ]
49
50 mean(results)
51 std(results) * sqrt(1/length(results))

```

## A.2 Planck-Konstante

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11, Wavelengths for regression
2 % for determining Planck constant.
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc
6 format long;
7
8 % Errors, manually read from plots
9 angles_raw = [ 9    9.8  11.5 14.2 16.9 20.1 24.5 28.9];
10 errors_raw = [ 1.5  0.5   2.5   0.5   0.1   0.1   0.7   0.5];
11
12 % Offset and its error margin
13 npf_abs = -7.1352e-1 / 180 * pi;
14 npf_err = 3.627e-2 / 180 * pi;
15
16 % Convert from counting tube angle to Bragg angle, convert from degrees to radians
17 angles = angles_raw ./ 180 .* pi .* 1/2;
18 errors = errors_raw ./ 180 .* pi .* 1/2;
19
20 % Lattice plane distance in meters
21 d = 201.5e-12;
22
23 % order
24 n = 1;
25
26
27 % Offset angle correction, base value
28 offset_fixed_angles = angles - npf_abs;
29
30 i = 1;
31 for element = angles_raw
32     % Error propagation for error for offset angle
33     offset_fixed_error = sqrt(npf_err^2 + (errors(i))^2);
34
35     % Calculate wavelengths: base values and error margins
36     lambda(i) = 2*d*sin(offset_fixed_angles(i))/n;
37     lambda_err(i) = 2*d*sin(offset_fixed_error)/n;
38
39     i = i+1;
40 end
41
42 % Results
43 lambda
44 lambda_err

```

### A.3 Andere Kristalle

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11
2 % Lattice Plane Distances, other Crystals
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc;
6
7 % Bergkristall (SiO)
8
9 bergkristall_Beta = [25.2 50.0 80.4 119.6] .* pi ./ 180 .* 1/2;
10 bergkristall_Alpha = [27.6 55.6 87.2 132.4] .* pi ./ 180 .* 1/2;
11
12
13 % Kalkspat (CaCO3)
14
15 kalkspat_Beta = [32.4 74.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
16 kalkspat_Alpha = [36.0 78.4] .* pi ./ 180 .* 1/2;
17
18
19 % Synthetischer Quarz (SiO)
20
21 synth_Quartz_Beta = [40.4 90.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
22 synth_Quartz_Alpha = [44.8 102.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
23
24 % Pyrit (FeS2)
25
26 pyrit_Beta = [38.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
27 pyrit_Alpha = [42.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
28
29
30 % Fe-Anode
31 lambda_K_beta = 175.66e-12;
32 lambda_K_alpha = (194.0 + 193.6) / 2 * 1e-12;
33
34 % Calculate lattice plane distance w/ Bragg equation
35
36 n = 1;
37 for angle = bergkristall_Beta
38     bergkristall_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
39     n = n+1;
40 end
41
42 n = 1;
43 for angle = bergkristall_Alpha
44     bergkristall_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
45     n = n+1;
46 end
47
48 n = 1;
49 for angle = kalkspat_Beta
50     kalkspat_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
51     n = n+1;
52 end
53
54 n = 1;
55 for angle = kalkspat_Alpha
56     kalkspat_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
57     n = n+1;
58 end
59
60 n = 1;
61 for angle = synth_Quartz_Beta
62     synth_Quartz_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
63     n = n+1;

```

```

64 end
65
66 n = 1;
67 for angle = synth_Quartz_Alpha
68     synth_Quartz_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
69     n = n+1;
70 end
71
72 n = 1;
73 for angle = pyrit_Beta
74     pyrit_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
75     n = n+1;
76 end
77
78 n = 1;
79 for angle = pyrit_Alpha
80     pyrit_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
81     n = n+1;
82 end
83
84
85 bergkristall_d_Beta_avg = mean(bergkristall_d_Beta)
86 bergkristall_d_Beta_err = std(bergkristall_d_Beta) * sqrt(1/length(bergkristall_d_Beta))
87
88 bergkristall_d_Alpha_avg = mean(bergkristall_d_Alpha)
89 bergkristall_d_Alpha_err = std(bergkristall_d_Alpha) * sqrt(1/length(
90     bergkristall_d_Alpha))
91
92 bergkristall_d_avg = mean([bergkristall_d_Beta bergkristall_d_Alpha])
93 bergkristall_d_err = std([bergkristall_d_Alpha bergkristall_d_Beta]) * sqrt(1/
94     length([bergkristall_d_Alpha bergkristall_d_Beta]))
95
96 kalkspat_d_Beta_avg = mean(kalkspat_d_Beta)
97 kalkspat_d_Beta_err = std(kalkspat_d_Beta) * sqrt(1/length(kalkspat_d_Beta))
98
99 kalkspat_d_Alpha_avg = mean(kalkspat_d_Alpha)
100 kalkspat_d_Alpha_err = std(kalkspat_d_Alpha) * sqrt(1/length(kalkspat_d_Alpha))
101
102 kalkspat_d_avg = mean([kalkspat_d_Beta kalkspat_d_Alpha])
103 kalkspat_d_err = std([kalkspat_d_Alpha kalkspat_d_Beta]) * sqrt(1/length([
104     kalkspat_d_Alpha kalkspat_d_Beta]))
105
106 synth_Quartz_d_Beta_avg = mean(synth_Quartz_d_Beta)
107 synth_Quartz_d_Beta_err = std(synth_Quartz_d_Beta) * sqrt(1/length(synth_Quartz_d_Beta))
108
109 synth_Quartz_d_Alpha_avg = mean(synth_Quartz_d_Alpha)
110 synth_Quartz_d_Alpha_err = std(synth_Quartz_d_Alpha) * sqrt(1/length(
111     synth_Quartz_d_Alpha))
112
113 synth_Quartz_d_avg = mean([synth_Quartz_d_Beta synth_Quartz_d_Alpha])
114 synth_Quartz_d_err = std([synth_Quartz_d_Alpha synth_Quartz_d_Beta]) * sqrt(1/
115     length([synth_Quartz_d_Alpha synth_Quartz_d_Beta]))
116
117 pyrit_d_Beta_avg = mean(pyrit_d_Beta)
118 pyrit_d_Beta_err = std(pyrit_d_Beta) * sqrt(1/length(pyrit_d_Beta))
119 pyrit_d_Alpha_avg = mean(pyrit_d_Alpha)
120 pyrit_d_Alpha_err = std(pyrit_d_Alpha) * sqrt(1/length(pyrit_d_Alpha))
121
122 pyrit_d_avg = mean([pyrit_d_Beta pyrit_d_Alpha])
123 pyrit_d_err = std([pyrit_d_Alpha pyrit_d_Beta]) * sqrt(1/length([pyrit_d_Alpha
124     pyrit_d_Beta]))

```

## Anhang B Messprotokoll

Versuch / Probe:

A11

Datum: 24.03.2016

Parameter / Einstellungen: Durchgeführte Messungen

To Do:  $t_g$  für LiF manuell berechnen  
für versch. Spannungen.

## Kristalle

Anode	Kristall			
Cu	LiF	Spektrum	Bergkristall	Fe
Fe	LiF			
Mo	LiF			
Fe	LiF	35 kV	-	• Synthetischer Quarz
Fe	LiF	32 kV	-	
Fe	LiF	29 kV	-	• Kalkspat
Fe	LiF	26 kV	✓	
Fe	LiF	23 kV	-	• Pyrit
Fe	LiF	20 kV	✓	
Fe	LiF	17 kV	✓	
Fe	LiF	14 kV	✓	
Fe	LiF	12 kV	✓	

Beobachtungen/Bemerkungen: