

Laborjournal

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Hässler

DATUM DURCH- FÜHRUNG	VERSUCH	DATUM ABGABE	AKZEPTIERT, NOTE
25.02.2016	W4b – Kombipendel	24.03.2016	
24.03.2016	A11 – Röntgenstrahlung/- beugung	14.04.2016	
28.04.2016	O12 – Laser Doppler Anemo- metrie	26.05.2016	

W4b – Kombipendel

23. März 2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Hässler

Inhaltsverzeichnis

1 Arbeitsgrundlagen	1
1.1 Systemaufbau	1
1.2 Schwerpendel	2
1.3 Kombipendel	3
2 Durchführung	5
2.1 Versuchsanordnung	5
2.2 Geräteliste	6
2.3 Messvorgang/Messmethoden	7
2.4 Proben/Versuchsobjekte	7
3 Auswertung	8
3.1 Versuch 3.1.1 – Trägheitsmoment I_0 des Pendels ohne Reiter	8
3.2 Versuch 3.1.2 – Schwingungsdauer in Funktion der Reitermasse	9
3.3 Versuch 3.1.3 – Periode in Abhängigkeit der Amplitude	13
3.4 Versuch 3.3.1 – Kombipendel Konfiguration 2	15
3.5 Versuch 3.3.2 – Kombipendel Konfiguration 3	18
3.6 Versuch 3.3.3 – Ruhelagen	19
4 Fehlerrechnung	21
5 Resultate und Diskussion	22

Versionsgeschichte

23. März 2016 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Systemaufbau

Unter einem Kombipendel wollen wir ein System verstehen, bei dem die Rückstellungs Kräfte sowohl von der Gravitationskraft wie auch von Federn generiert werden. In diesem Versuch wurde eine Apparatur in verschiedenen Konfigurationen benutzt, deren Aufbau in Abbildung ?? gesehen werden kann.

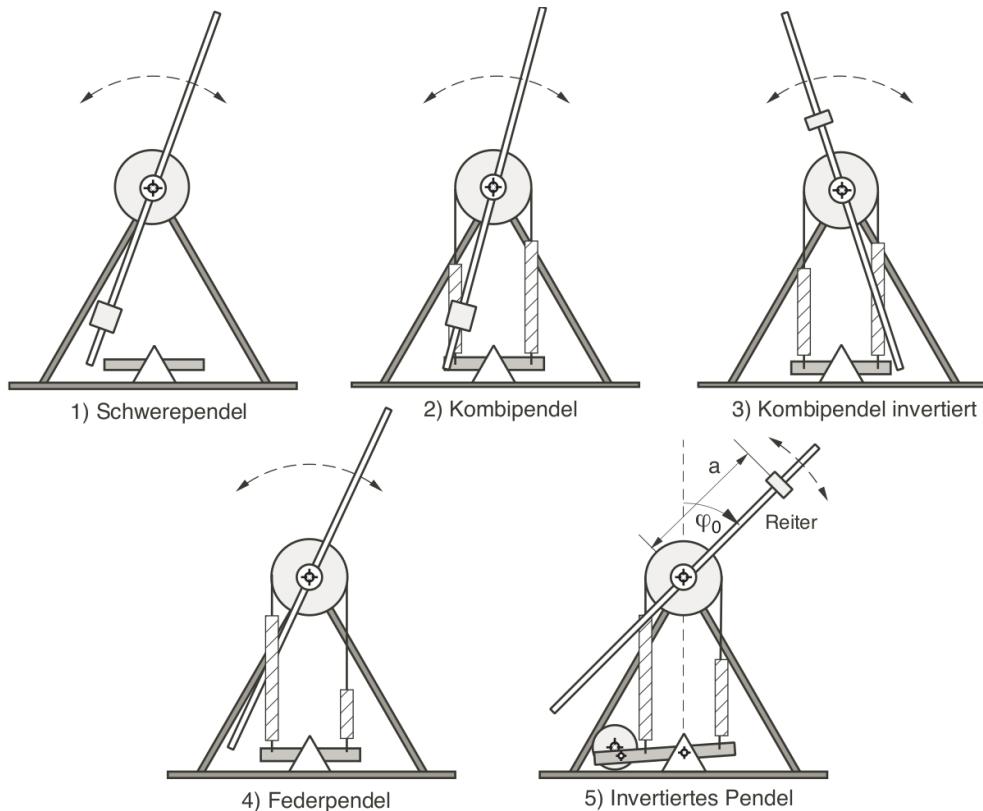


Abbildung 1: Pendel-Konfigurationen. Quelle: Versuchsanleitung.

1. ohne Federn als Schwerpendel
2. mit Ruhelage unten $\varphi_0 = 180^\circ$ als quasiharmonisches Kombipendel
3. mit Ruhelage oben $\varphi_0 = 0^\circ$ als quasiharmonisches Kombipendel invertiert
4. mit ausbalanciertem Pendelkörper als Federpendel (Drehpendel)
5. mit Ruhelage oben ($0^\circ < \varphi_0 < 120^\circ$) als invertiertes Pendel

1.2 Schwerependel

1.2.1 Reiterabstand variabel

Für kleine Auslenkungen kann die Schwingungsperiode des Schwerependels bestimmt werden via

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m_{Reiter} \cdot a^2}{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (1)$$

Wobei

- T_0 : Schwingungsperiode
- I_0 : Massenträgheitsmoment der leeren Apparatur (ohne Reiter). Fit-Parameter.
- m_{Reiter} : Reitermasse
- a : Position des Reiters (Entfernung des Mittelpunktes des Reiters zum Mittelpunkt der Pendelstange)
- g : Erdbeschleunigung. Gemäss Angaben im Labor 9.807 m s^{-2}

Im Zähler unter der Wurzel steht eigentlich das gesamte Trägheitsmoment, welches durch die Schwingung in Bewegung gesetzt wird. Beim Schwerependel ist dies das Trägheitsmoment der Apparatur und das Trägheitsmoment des Reiters (beim Kombipendel kommt noch das Trägheitsmoment der Federn hinzu). Der Term $m_{Reiter} \cdot a^2$ ist die Approximation des Trägheitsmoments des Reiters als Punktmasse. Bei grösseren Reitern (400g und höher) sollte dieses durch das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit entsprechendem Steiner-Anteil ersetzt werden (siehe auch Abschnitt 3.2 auf Seite 9).

1.2.2 Auslenkung variabel

Variiert man die Auslenkung (also den Winkel, aus dem man das Pendel loslässt), kann die Periode der Schwingung mit folgender Formel angenähert werden:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \sin^6 \left(\frac{\hat{\varphi}}{2} \right) + \dots \right) \quad (2)$$

Wobei gilt:

- T : Schwingungsperiode
- T_0 : Schwingungsperiode für kleine Auslenkungen
- $\hat{\varphi}$: Amplitude der Schwingung

Die Anzahl der benötigten Terme zur gewünschten Genauigkeit und die Anwendung der Formel ist in Abschnitt 3.3 auf Seite 13 aufgezeigt.

1.3 Kombipendel

Ohne Anregung von aussen sind die angreifenden Drehmomente beim Kombipendel mit Reiter wie folgt:

- $M_{Federn} = -p \cdot \varphi$, mit Federparameter $p = 2 \cdot k \cdot r^2$
- $M_{Reiter} = q \cdot \sin(\varphi)$, mit Reiterparameter $q = m_{Reiter} \cdot g \cdot a$
- $M_{Bremse} = -\beta \cdot \dot{\varphi}$, mit Bremsparameter β

Wobei k die Federkonstante, r der Angriffsradius der Federn und a die Reiterposition sind.

Für $q < p$ erhält man eine quasiharmonische Schwingung, deren Periode sich mittels folgender Gleichung beschreiben lässt:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{p \pm q}} \quad (3)$$

Wobei

- I : Gesamtes Massenträgheitsmoment der bewegten Masse, zusammengesetzt aus dem Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur ohne Reiter, dem Massenträgheitsmoment $I_{Federn} = \frac{1}{3} \cdot m_{Federn} \cdot r^2$ (Quelle: Skript zu Schwingungen und Wellen, Looser) und dem Massenträgheitsmoment I_{Reiter} des Reiters (entweder approximiert als Punktmasse oder als Zylinder mit Steineranteil).
- p : Federparameter
- q : Reiterparameter

Wirken sich die Rückstellmomente der Federn und des Reiters entgegen, sind p und q voneinander zu subtrahieren, andernfalls werden sie addiert.

Beim Fall $q = p$ erhält man als Grenzlage für einen gegebenen Reiter $a = \frac{p}{m_{Reiter} \cdot g}$.

Gilt hingegen $q > p$, bwz. ist der Reiter ausserhalb des kritischen Punktes, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\varphi_0}{\sin(\varphi_0)} = \frac{a}{a_G} = \frac{q}{p} = \frac{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}{2 \cdot k \cdot r^2} \quad (4)$$

Der Verlauf dieser Kurve (bzw. der Verlauf der Ruhelage in Funktion von $\frac{q}{p}$) ist in Abbildung 2 abgebildet.

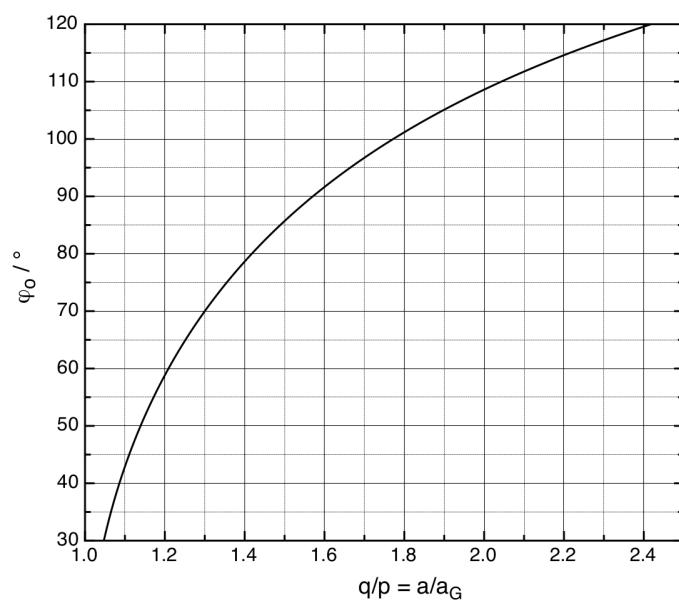


Abbildung 2: Ruhelage des invertierten Pendels als Funktion der Ruhelage a (Quelle: Versuchsanleitung)

2 Durchführung

2.1 Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abbildung 3 und photographisch in Abbildung 4 dargestellt.

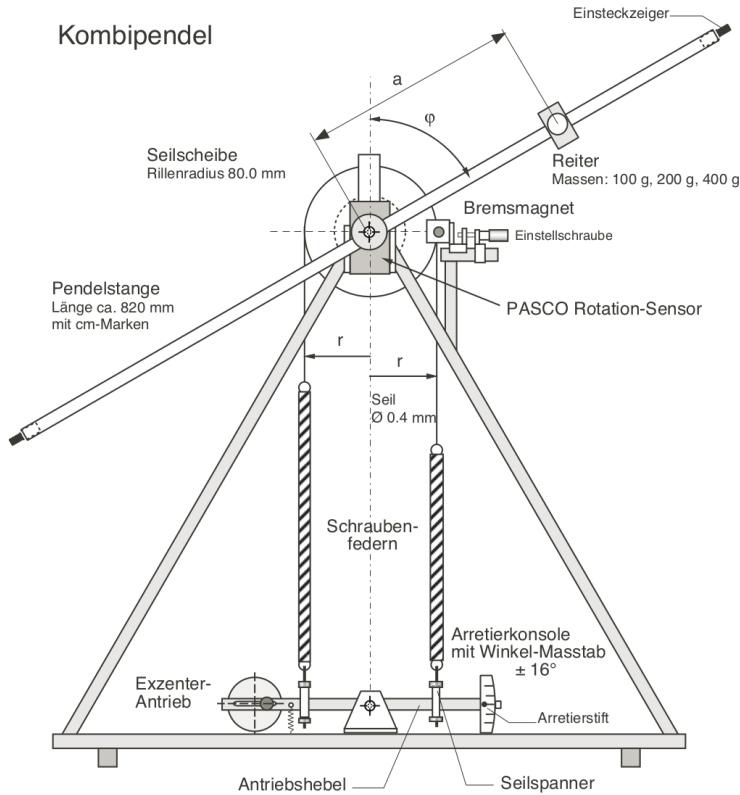


Abbildung 3: Schematische Versuchsanordnung (Quelle: Versuchsanleitung)

Die Apparatur besteht aus dreieckigem Rahmen, welcher eine Pendelstange lagert. Ein Reiter (Zusatzgewicht) kann auf der Pendelstange in variablen Abständen montiert werden (beidseitig, je nach gewünschter Konfiguration, siehe Abschnitt zu theoretischen Grundlagen).

Es ist auch ein Bremsmagnet und ein Antrieb für angeregte Schwingungen vorhanden, allerdings wurden diese bei unserem Versuch nicht benutzt.

Die Schwingungen der Pendelstange werden mittels einer Lichtschranke detektiert, welche variabel positioniert werden kann, abhängig vom durchgeführten Versuch. Die Lichtschranke ist an eine Auswertelogik Marke "Eigenbau" und einen Frequenzähler der Marke Keithley angeschlossen.

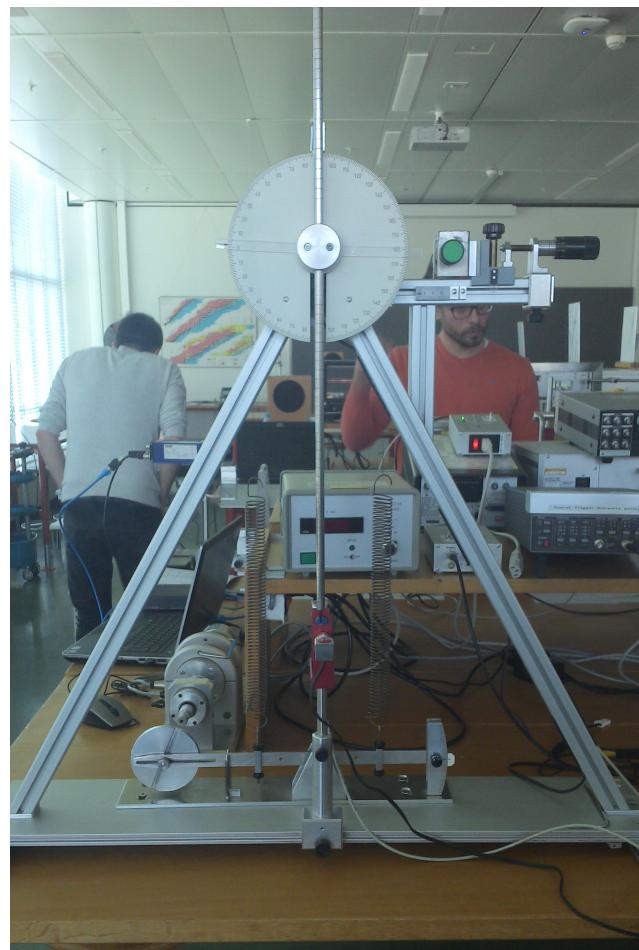


Abbildung 4: Versuchsanordnung im Labor

Wenn ein bestimmter Auslenk-Winkel benötigt wird, kann dieser an einer Winkelscheibe eingestellt werden.

2.2 Geräteliste

Die verwendeten Geräte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Hilfsmittel und Geräteliste

Gerät	Typ
Frequenz-Zähler	Keithley 776 Programmable Counter/Timer
Lichtschranke und Auswerte-Elektronik	Lichtschranken-Logik 1 (Marke Eigenbau)
Auswerteprogramm	QtiPlot

2.3 Messvorgang/Messmethoden

Grundsätzlich gab es vier Arten von Messungen:

- Auslenkwinkel konstant, Reitermasse konstant, Reiterabstand variabel, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Auslenkwinkel konstant, Reitermasse variabel, Reiterabstand konstant, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Auslenkwinkel variabel, Reitermasse konstant, Reiterabstand konstant, Messung der Schwingungsperiode (Schwerependel, Kombipendel)
- Reitermasse konstant, Reiterabstand variabel, Messung des Winkels φ_0 der Ruhelage (Kombipendel invertiert, $a > a_{krit}$)

Abhängig davon, ob die Apparatur als Schwingungsperiode oder als Kombipendel zu betreiben war, wurden jeweils die Federn aus- bzw. eingehängt.

2.4 Proben/Versuchsobjekte

Es wurden Bronzefedern verwendet mit folgenden Daten gemäss Versuchsanleitung:

Tabelle 2: Federn

Typ, Material	Masse (kombiniert)	Federkonstante k
Bronzefedern (1.5 mm Durchmesser)	155.5 g	32.0 N m ⁻¹

Die Federkonstante k wurde in den Versuchen mit dem Kombipendel jeweils als Fit-Parameter verwendet und somit experimentell überprüft. Die Federn sind über ein Seil des Durchmessers 0.4 mm an einem Seilrad mit Rillendurchmesser 160 mm mit der Apparatur verbunden (siehe auch Schema der Apparatur).

Als Reiter standen verschiedene Massen zur Verfügung, aufgelistet in Tabelle 3.

Tabelle 3: Reiter

Masse	Durchmesser	Länge
100 g	30.2 mm	20 mm
100 g	34.4 mm	15 mm
200 g	34.4 mm	30 mm
300 g	34.4 mm	45 mm
400 g	34.4 mm	60 mm

Bei den Messungen mit Reitermassen über 400 g wurden aus den Reitern mit identischen Durchmessern jeweils ein Reiter zusammengesetzt. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Schwerpunkt der gesamten Reiterkonfiguration seine Position auf der Stange nicht veränderte.

3 Auswertung

3.1 Versuch 3.1.1 – Trägheitsmoment I_0 des Pendels ohne Reiter

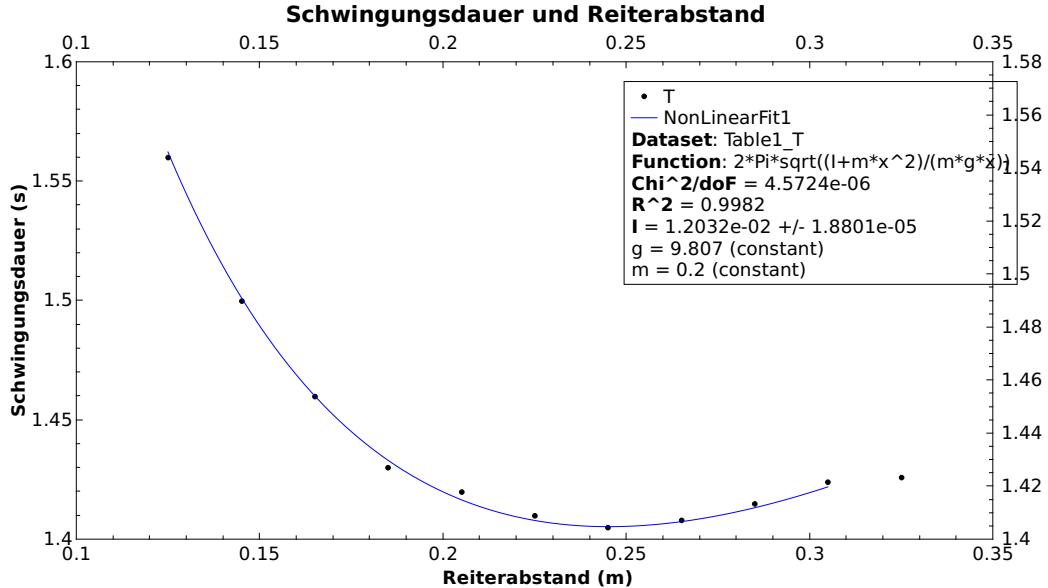


Abbildung 5: Massenträgheitsmoment des Pendels ohne Reiter

Die Messungen wurden ausgeführt mit einer Reitermasse von 200 g und verschiedenen Abständen. Der letzte Messpunkt bei 325 mm wurde im Fit nicht berücksichtigt, da er stark nach einem Ausreißer aussieht.

Die für den Fit benutzte Gleichung lautet:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}} \quad (5)$$

Wobei $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$ eingesetzt wurde.

Der Referenzwert aus der Versuchsanleitung für I_0 ist $1.16 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, der mittels Fit ermittelte Wert beträgt $I_0 = (12.032 \, 000 \pm 0.018 \, 801) \text{ g m}^2$.

3.2 Versuch 3.1.2 – Schwingungsdauer in Funktion der Reitermasse

Im Gegensatz zum vorigen Versuch, bei dem die Reitermasse als Punktmasse approximiert wurde, sollte gemäss Versuchsanleitung das Trägheitsmoment des Reiters ab 400 g berücksichtigt werden.

Da wir in dieser Versuchsreihe bis zu einer Reitermasse von 700 g gemessen haben, ist es naheliegend, eine genauere Formel herzuleiten. Ein Problem beim Fitzen mit QtiPlot in diesem Fall, ist, dass die Länge des Reiters mit seiner Masse variiert; man hat also eigentlich zwei Variablen, welche sich von Messung zu Messung ändern und in die resultierende Formel einfließen sollten.

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_{Reiter}}{m \cdot g \cdot a}} \quad (6)$$

mit $I_{Reiter} = I_{Zylinder} + I_{Steineranteil}$. Mit $I_{Zylinder} = \frac{m}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + h^2)$ und $I_{Steineranteil} = m_{Reiter} \cdot a^2$ (Quelle: Kuchling) ergibt dies:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{m_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + h^2) + m_{Reiter} \cdot a^2}{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (7)$$

Glücklicherweise hängt aber die Masse des Reiters linear von seiner Länge ab (der Durchmesser aller Messproben ist identisch und beträgt 34.4 mm); man hat also nur einen Freiheitsgrad. Alles, was zu tun bleibt, ist, obige Gleichung in Funktion der Zylinderlänge des Reiters umzuschreiben, und den Fit mittels dieser Werte zu machen.

Dazu wird die Längendichte ρ des Reiters als neuer Parameter eingeführt, und obige Funktion umgeschrieben mit der Länge l_{Reiter} als Funktionsparameter, wobei die Reitermasse dann definiert ist als $m_{Reiter} = \rho \cdot l_{Reiter}$:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{\rho \cdot l_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + l_{Reiter}^2) + \rho \cdot l_{Reiter} \cdot a^2}{\rho \cdot l_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (8)$$

Die verwendeten Parameter sind:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-1}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Approximiert man den Reiter als Punktmasse wie beim vorherigen Versuch, ergibt sich das Resultat aus Abbildung 6, mit einem Massenträgheitsmoment von $I_0 = (11.362\ 00 \pm 0.396\ 97) \text{ g m}^2$.

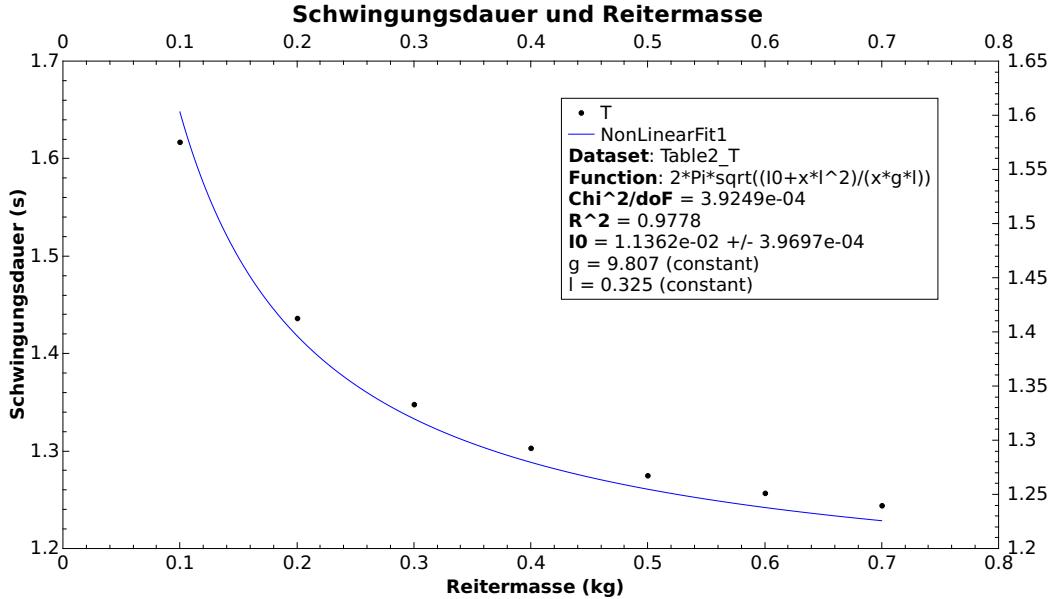


Abbildung 6: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefitted über Trägheitsmoment. Abstand des Reiters war konstant 325 mm.

Die verwendete Gleichung ist:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}} \quad (9)$$

Mit den Parametern:

- m_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Wie man in Abbildung 6 erkennen kann, besteht eine Abweichung zwischen Fit und Messwerten, welche eine zunehmende Tendenz mit steigender Reitermasse aufweist. Ich führe das auf die zunehmende Diskrepanz zwischen der Annäherung des Reiters als Punktmasse mit $I_{Reiter} = m \cdot a^2$ und der Modellierung als Zylinder inklusive Steiner-Anteil durch $I_{Reiter} = \frac{m}{12}(3 \cdot r^2 + h^2) + m \cdot a^2$ zurück.

Berücksichtigt man die Zylindrigkeit des Reiters und den Steiner-Anteil (siehe Abbildung 7), ergibt sich ein Massenträgheitsmoment von $I_0 = (11.297\,00 \pm 0.362\,71) \text{ g m}^2$.

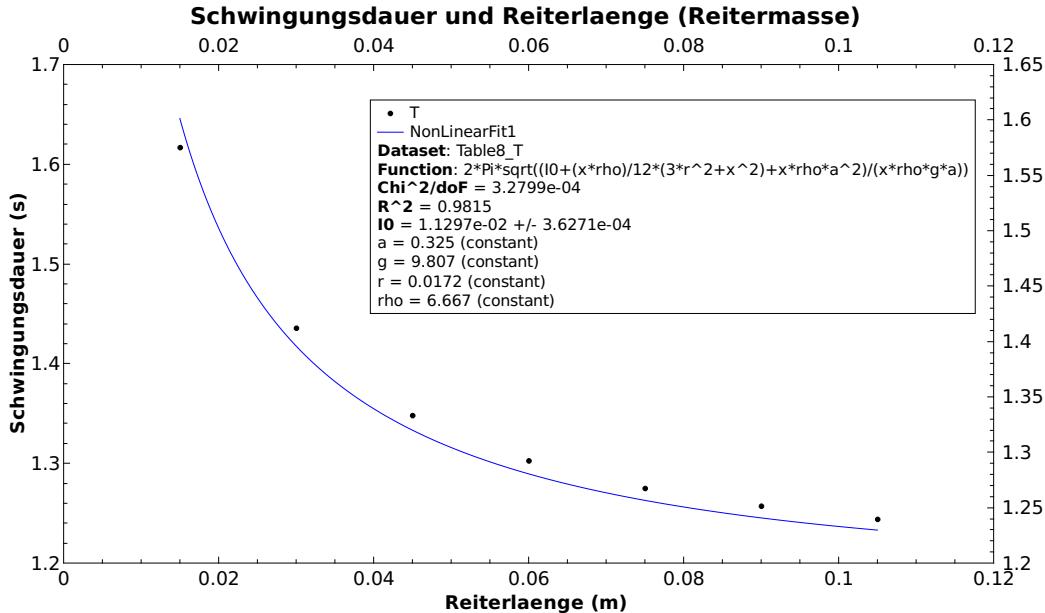


Abbildung 7: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefitted über Trägheitsmoment

Die verwendete Gleichung lautet:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + \frac{\rho \cdot l_{Reiter}}{12} \cdot (3 \cdot r^2 + l_{Reiter}^2) + \rho \cdot l_{Reiter} \cdot a^2}{\rho \cdot l_{Reiter} \cdot g \cdot a}} \quad (10)$$

Mit den Parametern:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-3}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

Man kann in Abbildung 7 erkennen, dass nach wie vor eine Abweichung zwischen Fit und Messwerten besteht, allerdings scheint die Tendenz der Differenz eher konstant und nicht zunehmend zu sein. Deshalb habe ich noch einen zusätzlichen Fit erstellt, in dem der unterste Messpunkt nicht berücksichtigt wird, was zum Fit in Abbildung 8 führt. Die Gleichung ist dieselbe wie beim Fit in Abbildung 7.

Dies ergibt $I_0 = (12.311\,000 \pm 0.092\,950) \text{ g m}^2$. Interessanterweise ist die Unsicherheit hier merklich kleiner, obwohl ein Messpunkt weniger verwendet wurde.

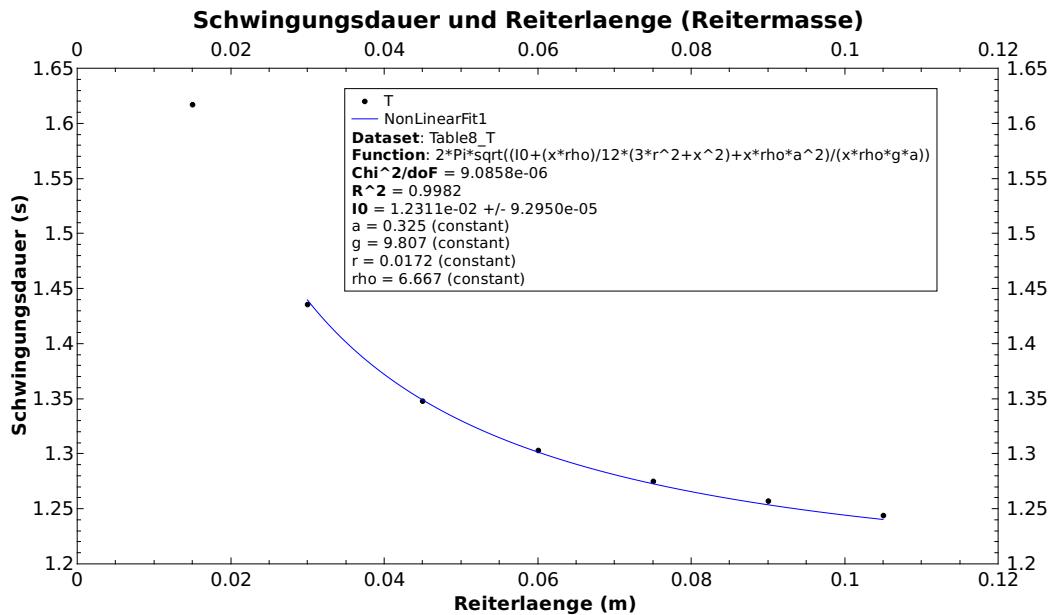


Abbildung 8: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reitermasse, gefittd über Trägheitsmoment, unterster Messpunkt nicht berücksichtigt

Auch hier sind die verwendeten Parameter:

- $\rho = 6.667 \text{ kg m}^{-1}$
- l_{Reiter} : Variable auf horizontaler Achse
- $r = 17.2 \text{ mm}$ (Radius des Reiters)
- $a = 325 \text{ mm}$ (Position des Mittelpunktes des Reiters)
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$

3.3 Versuch 3.1.3 – Periode in Abhängigkeit der Amplitude

Es wurde die gemessene Periode in Abhängigkeit der Amplitude mittels folgender Formel gefittet:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \dots \right) \quad (11)$$

Zur Bestimmung der Anzahl nötigen Terme findet man im Anhang zu Versuch W4 folgendes Diagramm:

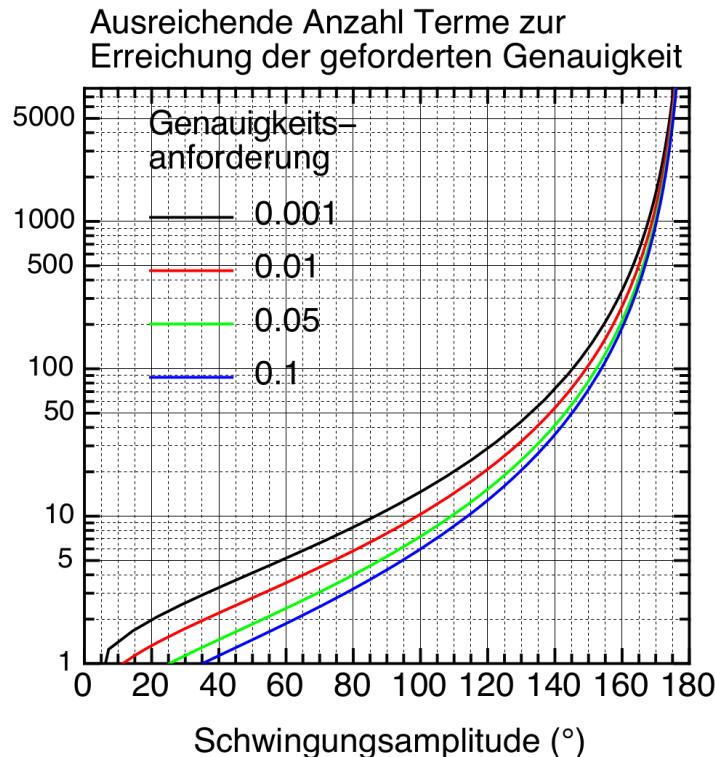


Abbildung 9: Anzahl nötiger Terme in Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit und der maximalen Auslenkung.

Wir legen uns auf eine gewünschte Genauigkeit von 0.1 fest. Da wir bis zu einem Winkel von 120° gemessen haben, ergibt dies ungefähr 12 Terme (blaue Kurve). Da QtiPlot bei 12 Summanden abstürzte, wurde die Funktion nur bis zur 18. Potenz des Sinus gefittet.

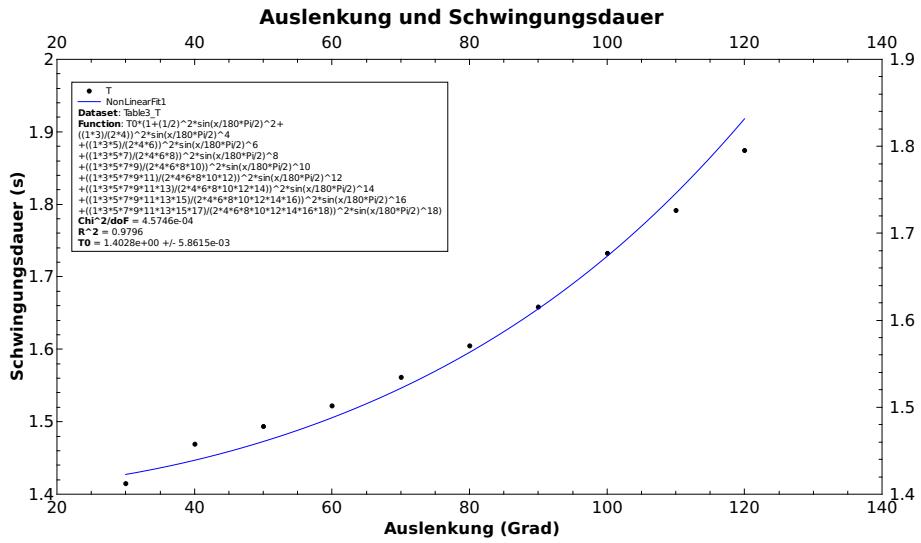


Abbildung 10: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung

Der Fit aus Abbildung 10 ergibt einen Wert von $T_0 = (1.402\,800\,0 \pm 0.005\,861\,5)$ s. Da der unterste Wert nach einem Ausreißer aussieht und die oberen Werte aufgrund von Reibungseffekten vermutlich nicht mehr allzu präzise sind, wurde noch ein zweiter Fit mit eingeschränktem Bereich durchgeführt.

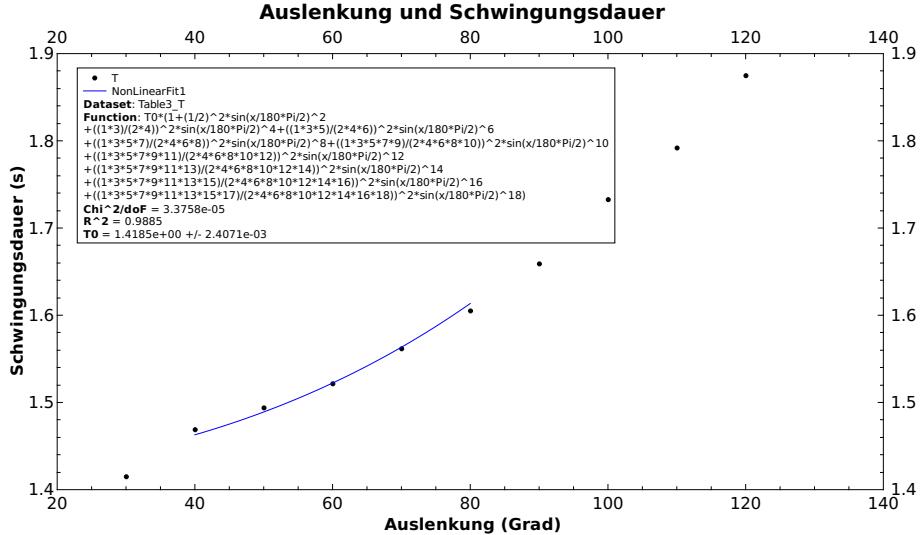


Abbildung 11: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung, eingeschränkter Bereich.

Benutzt man nur den eingeengten Wertebereich wie im Fit aus Abbildung 11, so ergibt sich $T_0 = (1.418\,500\,0 \pm 0.002\,407\,1)$ s.

3.4 Versuch 3.3.1 – Kombipendel Konfiguration 2

3.4.1 Reiterposition variabel

Hier wird folgende Formel zum Fitten verwendet:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{p+q}} \quad (12)$$

Die Federn und die Reitermasse wirken beide in die gleiche Richtung rückstellend, daher das Plus-Zeichen im Nenner.

I setzt sich hier zusammen aus dem oben bestimmten Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur, aus dem Massenträgheitsmoment I_{Reiter} des Reiters (approximiert als Punktmasse, da hier der Reiter mit 200 g verwendet wurde) und dem Anteil I_{Federn} der Federn. Gefittet wird dann über die Federkonstante k im Parameter $p = 2kr^2$, wobei $r = 80.2$ mm der Angriffsradius der Federn an der Seilscheibe ist (plus der Radius des Seils).

Es gilt also:

- $I_0 =$
- $I_{Reiter} = 200 \text{ g} \cdot a^2$
- $I_{Federn} = \frac{1}{3} \cdot m_{Federn} \cdot 80.2 \text{ mm}^2$
- $p = 2 \cdot k \cdot 80.2 \text{ mm}^2$
- $q = m \cdot g \cdot a$ (a : Reiterposition)

Die Masse der Federn ist 155.5 g für beide Federn kombiniert. Für das Massenträgheitsmoment I_0 verwenden wir den Wert von 12.311 g m^2 aus dem eingeschränkten Fit über die Reitermasse, den wir oben bestimmt haben.

Somit erhält man als Formel für T , welche für den Fit in Abbildung 12 verwendet wurde:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12.311 \text{ g m}^2 + \frac{1}{3} \cdot 155.5 \text{ g} \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot a^2}{2 \cdot k \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot 9.807 \text{ m s}^{-2} \cdot a}} \quad (13)$$

a entspricht der x-Achse, gefittet wird über k .

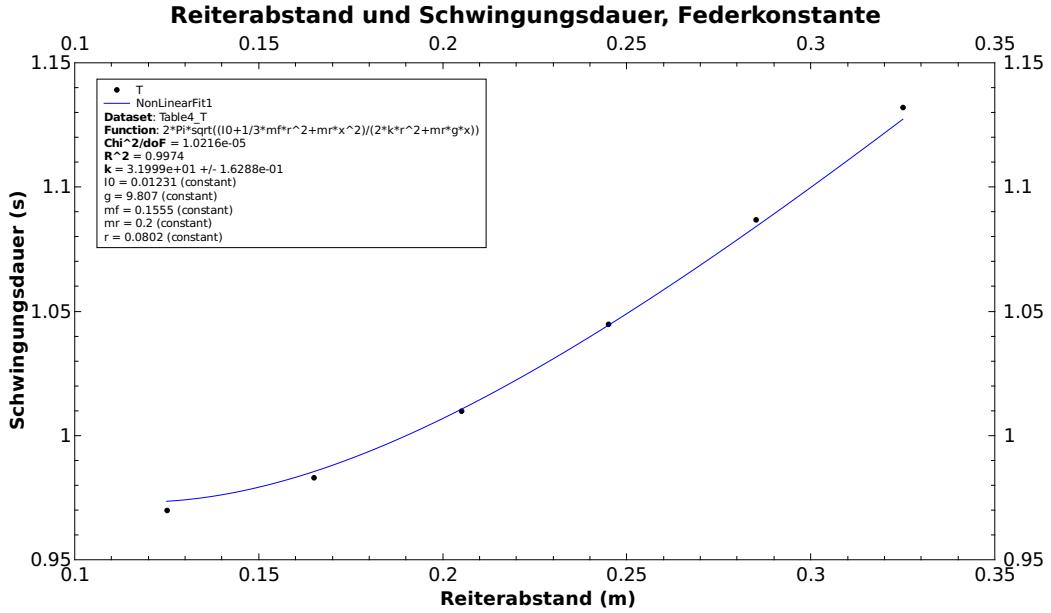


Abbildung 12: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reiterposition beim Kombipendel, gefittet für Federkonstante k

Aus dem in Abbildung 12 dargestellten Fit ergibt sich ein Wert für die Federkonstante von $k = (31.999\,00 \pm 0.162\,88) \text{ N m}^{-1}$, was ziemlich nahe beim Wert aus der Versuchsanleitung von 32 N m^{-1} ist.

3.4.2 Auslenkung variabel

Bei dieser Messung stimmt offensichtlich etwas nicht so ganz, allerdings bin ich mir nicht sicher, wo der Fehler genau liegt.

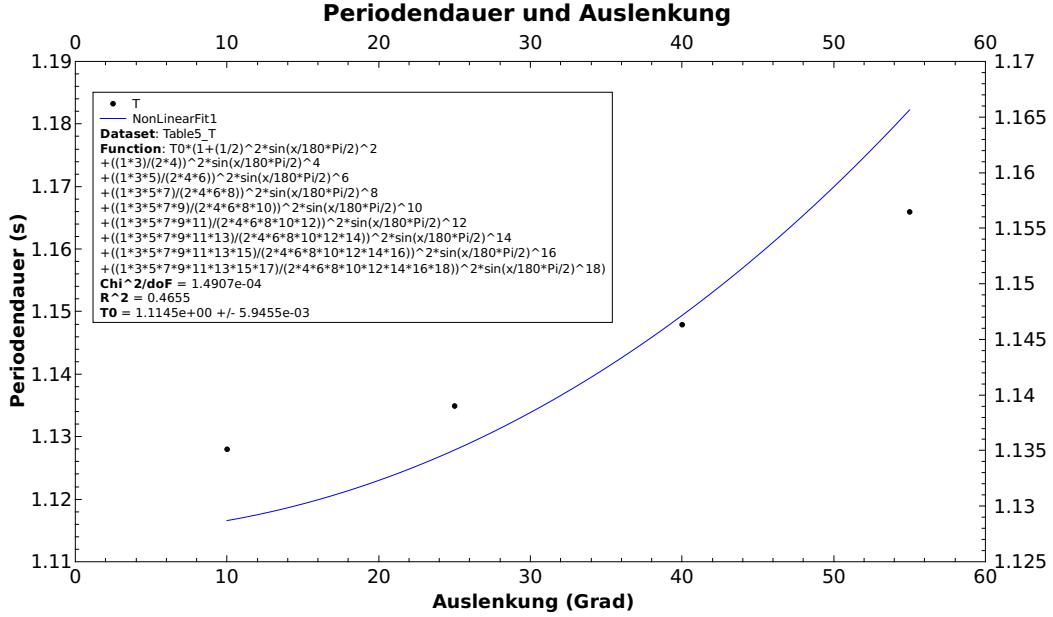


Abbildung 13: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Auslenkung beim Kombipendel

Der Fit aus Abbildung 13 ergibt einen Wert $T_0 = (1.402\,800\,0 \pm 0.005\,861\,5)$ s, was zwar einigermassen plausibel erscheint (verglichen mit den Messwerten), jedoch ist der Kurvenverlauf nicht wirklich passend zu den Messwerten. Allenfalls wären hier noch mehr Messungen durchzuführen.

Für die Anzahl Terme wurden hier die gleichen Überlegungen gemacht wie bereits in Abschnitt 3.3 auf Seite 13 dokumentiert.

3.5 Versuch 3.3.2 – Kombipendel Konfiguration 3

Der kritische Abstand a_{krit} wurde durch Probieren auf einen Wert zwischen 195 mm und 205 mm bestimmt. Die Versuchsreihe wurde daher mit Werten von $a \leq 195$ mm durchgeführt. Da Reitermasse und Federkraft sich hier entgegenwirken, ist im Nenner zwischen p und q ein Minuszeichen zu finden.

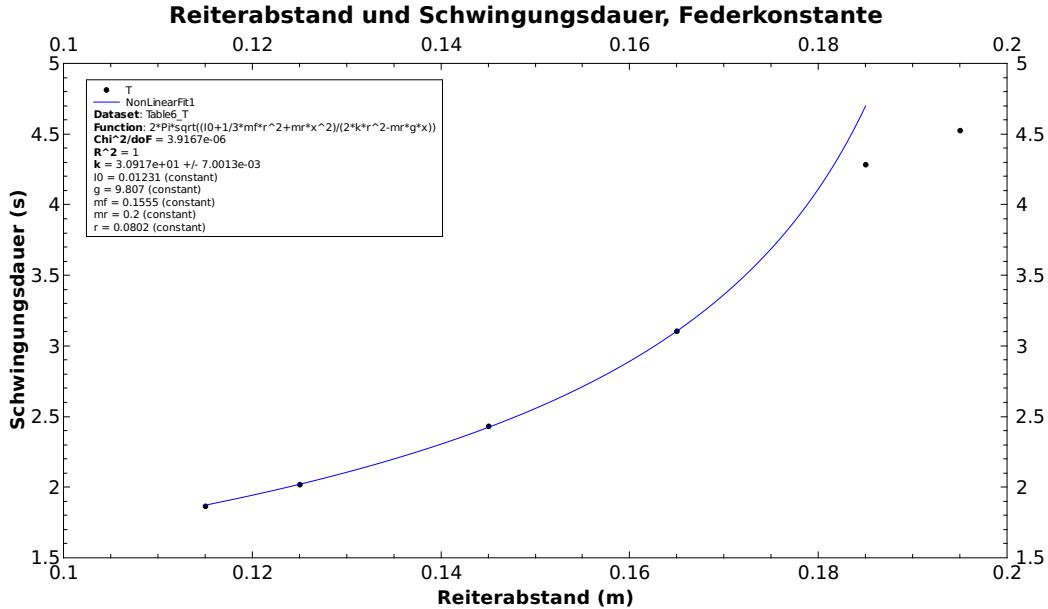


Abbildung 14: Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Reiterposition beim invertierten Kombipendel unterhalb des kritischen Abstandes. Letzter Messpunkt wurde als Ausreißer behandelt und im Fit nicht berücksichtigt.

Auch hier wurde die folgende Formel verwendet:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12.311 \text{ g m}^2 + \frac{1}{3} \cdot 155.5 \text{ g} \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot a^2}{2 \cdot k \cdot (80.2 \text{ mm})^2 + 200 \text{ g} \cdot 9.807 \text{ m s}^{-2} \cdot a}} \quad (14)$$

Die verwendeten Parameter sind

- $I_0 = 12.311 \text{ g m}^2$.
- $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$
- $m_{\text{Federn}} = 155.5 \text{ g}$
- $m_{\text{Reiter}} = 200 \text{ g}$
- $r = 80.2 \text{ mm}$

Gefittet wurde wiederum für die Federkonstante, was einen Wert von $k = (30.917\,000\,0 \pm 0.007\,001\,3) \text{ N m}^{-1}$, ergibt.

Dieser liegt auch ziemlich nahe beim Wert aus der Versuchsanleitung.

3.6 Versuch 3.3.3 – Ruhelagen

3.6.1 Reiterposition

Auch mit dem invertierten Pendel und dem Reiter ausserhalb des kritischen Abstandes kann wiederum die Federkonstante k bestimmt werden. Allerdings muss hier eine andere Formel verwendet werden:

$$\frac{\varphi_0}{\sin(\varphi_0)} = \frac{a}{a_G} = \frac{q}{p} = \frac{m_{Reiter} \cdot g \cdot a}{2 \cdot k \cdot r^2} \quad (15)$$

Wobei $r = 80.2 \text{ mm}$, $m_{Reiter} = 200 \text{ g}$ und $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$. a entspricht der x-Achse, gefittet wurde über k .

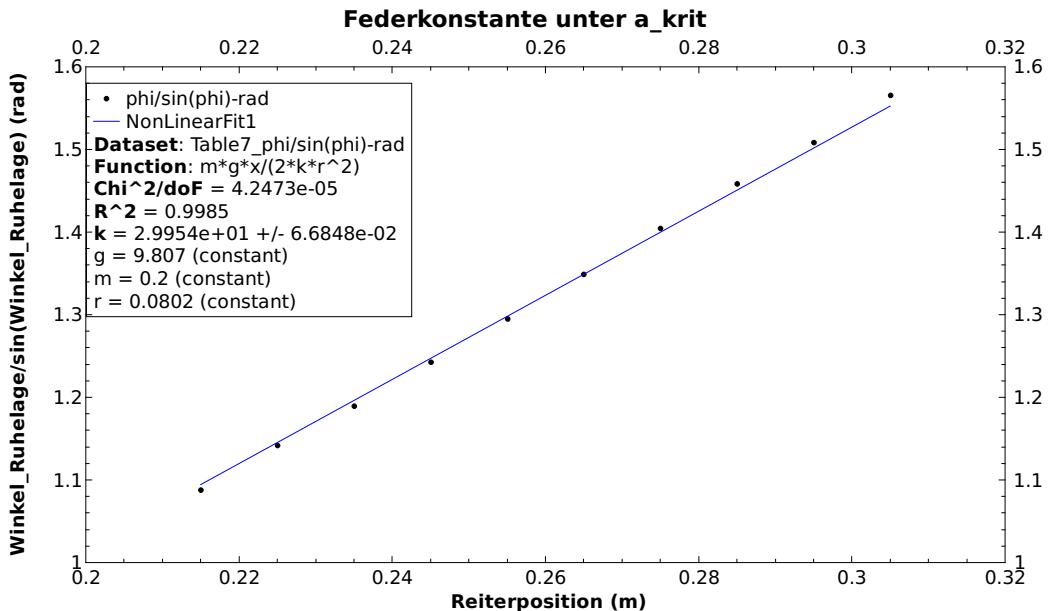


Abbildung 15: Bestimmung des Parameters k via Ruhelage, $a > a_{krit}$

Aus dem Fit in Abbildung 15 erhält man also $k = (29.954\,000 \pm 0.066\,848) \text{ N m}^{-1}$. Auch dieses Ergebnis scheint mir recht zufriedenstellend.

3.6.2 Schwingungsdauer

Zu guter Letzt sind in Abbildung 16 die Periodenzeiten in Abhängigkeit der Reiterposition ausserhalb des kritischen Abstandes geplotted. Es wurde aber gemäss Versuchsanleitung kein Fit ausgeführt.

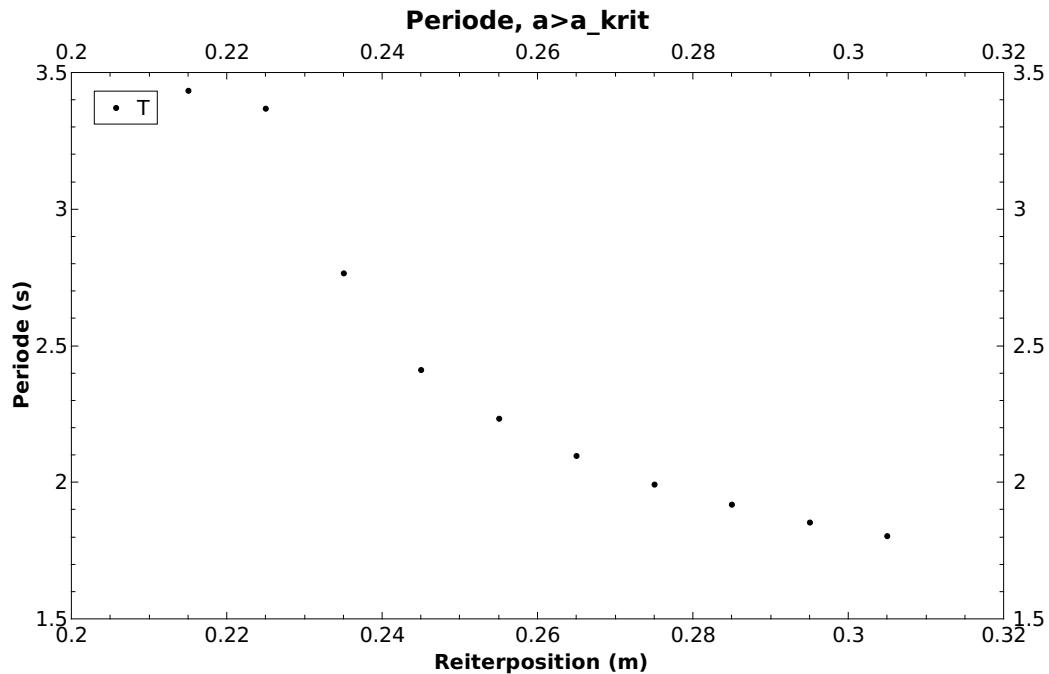


Abbildung 16: Periode in Abhängigkeit der Reiterposition für $a > a_{krit}$

4 Fehlerrechnung

Auf eine Fehlerrechnung wurde in Absprache mit dem Dozenten verzichtet.

5 Resultate und Diskussion

Es gibt drei Parameter zu evaluieren: Das Massenträgheitsmoment I_0 der Apparatur ohne Reiter, die Periodendauer T_0 für kleine Auslenkungen und die Federkonstante k . Die numerischen Resultate für I_0 sind in Tabelle 4 zu finden; Abbildung 17 zeigt einen graphischen Vergleich der verschiedenen Methoden.

Tabelle 4: Ergebnisse für I_0 via verschiedene Methoden

Methode	Resultat
Versuch 3.1.1	$(12.03 \pm 0.02) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Punktmasse approximiert	$(11.4 \pm 0.4) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Zylinder modelliert	$(11.3 \pm 0.4) \text{ g m}^2$
Versuch 3.1.2, Reiter als Zylinder modelliert, eingeengter Fit-Bereich	$(12.31 \pm 0.09) \text{ g m}^2$
Referenz Versuchsanleitung	11.6 g m^2

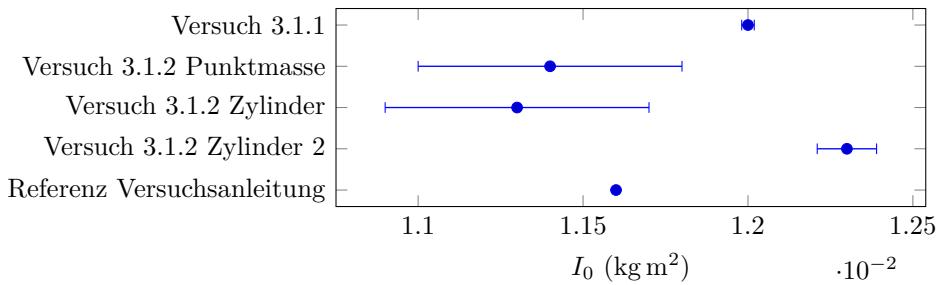


Abbildung 17: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für I_0

Für die Periode T_0 beim Schwerependel ergaben sich zwei Werte, einer für den vollen Messbereich, und einer aus dem Fit über den eingeschränkten Wertebereich. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 5 respektive Abbildung 18 zu finden.

T

Tabelle 5: Ergebnisse für T_0 des Schwerependels

Versuch	Resultat
voller Messbereich	$(1.403 \pm 0.006) \text{ s}$
eingeschränkter Wertebereich	$(1.419 \pm 0.002) \text{ s}$

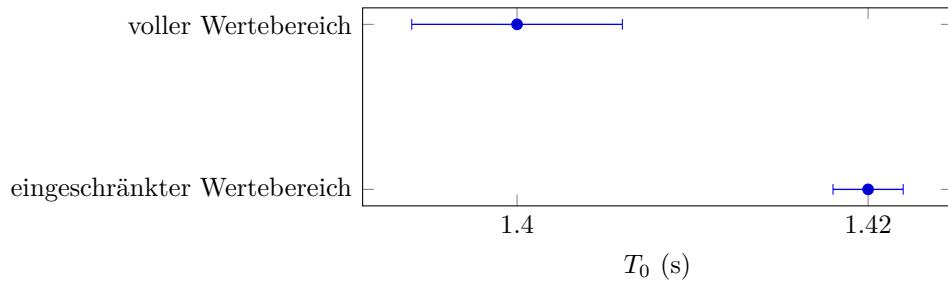


Abbildung 18: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für T_0 beim Schwerependel

Zu guter Letzt werden in Tabelle 6 und Abbildung 19 noch die Werte für die Federkonstante k dargestellt und verglichen.

Tabelle 6: Ergebnisse für k via verschiedene Methoden

Methode	Resultat
Versuch 3.3.1	$(32.0 \pm 0.2) \text{ N m}^{-1}$
Versuch 3.3.2	$(30.917 \pm 0.007) \text{ N m}^{-1}$
Versuch 3.3.3	$(29.95 \pm 0.07) \text{ N m}^{-1}$
Referenzwert	32.0 N m^{-1}

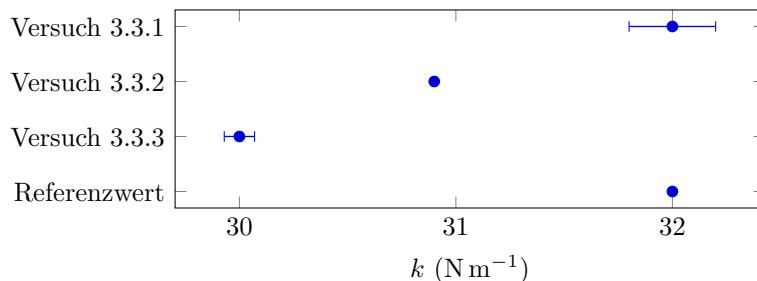


Abbildung 19: graphische Darstellung der Ergebnisse zum für k

Alles in Allem beurteile ich die Ergebnisse zufriedenstellent, mit Ausnahme des Fits in Abschnitt 3.4.2 auf Seite 17, welcher aus mir bisher unbekannten Gründen nicht wirklich stimmt (zumindest soweit ich dies beurteilen kann).

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 23. März 2016.

Versuch / Probe: Vhub

Datum: 25.7.16

Parameter / Einstellungen:

3.1.1

3.1.3

Probe: 200g $30\text{mm} = l$

φ	a [m]	T [s]
20°	125	1,56
	145	1,50
	165	1,46
	185	1,43
	205	1,42
	225	1,41
	245	1,405
	265	1,408
	285	1,415
✓	305	1,424
	325	1,436

Probe: 200g $a = 325 \quad l = 30\text{mm}$

φ	T [s]
10°	1,428
11°	1,428
12°	1,425
13°	1,430
14°	1,430
15°	1,431
16°	1,432
17°	1,433
18°	1,434
19°	1,435
20°	1,436

3.1.3

Probe: 200g $a = 325 \quad l = 30\text{mm}$

φ	T
30	1,451
40	1,465
50	1,494
60	1,522
70	1,562
80	1,605
90	1,655
100	1,733
110	1,792
120	1,875

Probe:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Seite

Visum Dozent: _____

Versuch / Probe:

Datum: 25.7.16

Parameter / Einstellungen:

3.1.2

Zusatzversuch

 Probe: $\theta = 20^\circ$ $a = 375\text{mm}$

m	T	l
100	1,671	XQ 15
200	1,436	30
300	1,348	45
400	1,303	60
500	1,275	75
600	1,257	90
700	1,244	105

 Probe: $m = 2 \times 100\text{g}$ $\theta = 20^\circ$

a	T
207,5	1,442
247,5	1,566
287,5	1,697
327,5	1,840
367,5	
407,5	

 Masse
 Probe


Länge Probe

Probe:

Probe:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Seite

Visum Dozent: _____

Versuch / Probe: 3.3

Datum: 25.2.16

Parameter / Einstellungen:

3.3.1 variabler Abstand

variabler Winkel

 Probe: 700g $l=30\text{mm}$

 Probe: 700g $l=30\text{mm}$ $\alpha = 325$

$\alpha = 20^\circ$	α	T
	125	0,970
	165	0,983
	205	1,010
	245	1,045
	285	1,087
	325	1,132
	365	

α	T
10°	1,128
25°	1,135
40°	1,148
55°	1,166



Probe:

Probe:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Seite

Visum Dozent:

Beobachtungen/Bemerkungen:

Versuch / Probe:

Datum: 25.7.16

Parameter / Einstellungen:

3.3.3

Durchmesser Messproben:

m_{100g} : 20mm; 36.2mm
 m_{100g} : 15mm: 34.4mm
 m_{200g} : 34.4mm
 $m=200$ $l=30\text{mm}$

$300g$: 34.4mm
 $400g$: 34.4mm



nach links

α	ℓ_0 links	ℓ_0 rechts	T	$\Delta \varphi$
205	50	51	3,370	60
235	57	58	2,765	67
245	64	69	7,413	74
255	70	69	7,234	80
265	75	74	7,098	85
275	80	78	1,552	90
285	84	82	1,520	94
295	87,5	85	1,859	97,5
305	91	88,5	1,804	101
215	41	40	3,434	51

Beobachtungen/Bemerkungen:

A11 – Röntgenstrahlung und -beugung

21.04.2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Hässler

Inhaltsverzeichnis

1 Arbeitsgrundlagen	1
1.1 Das Röntgen-Spektrum	1
1.2 Beugung von Röntgen-Strahlung an Kristallen	3
2 Durchführung	5
2.1 Versuchsanordnung	5
2.2 Geräteliste	6
2.3 Messvorgang/Messmethoden	6
2.4 Proben/Versuchsobjekte	6
3 Auswertung	7
3.1 Wichtige Daten	7
3.2 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF	7
3.3 Versuch 3.3 – Planck-Konstante	12
3.4 Andere Kristalle	15
4 Fehlerrechnung	18
4.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF	18
4.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante	19
4.3 Andere Kristalle	20
5 Resultate und Diskussion	21
5.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF	21
5.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante	21
5.3 Andere Kristalle	22
Anhang A Matlab-Code	24
A.1 LiF-Kristall	24
A.2 Planck-Konstante	25
A.3 Andere Kristalle	26
Anhang B Messprotokoll	28

Versionsgeschichte

21.04.2016 Version 1

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Das Röntgen-Spektrum

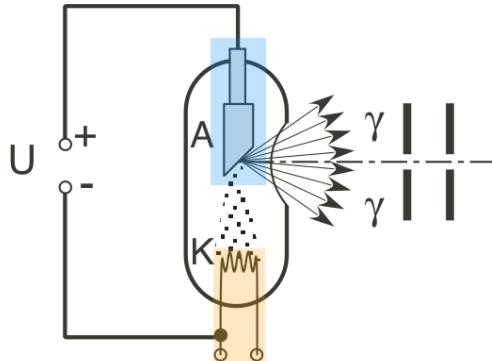


Abbildung 1: Röntgen-Röhre, schematisch. Glühkathode K: orange, Anode A: blau. Quelle: Versuchsanleitung

Röntgen-Strahlung entsteht stets, wenn schnelle Elektronen auf Materie treffen, z.B. in einem Monitor mit Kathodenstrahl-Röhre. Sie besteht aus einer Glühkathode **K** (orange in Abbildung 1) und einer Anode **A** (blau in Abbildung 1). Eingeschlossen ist das Ganze in einem vakuumierten Glaskolben.

Die Kathode gibt durch ihre Erhitzung Elektronen ab, welche durch das Elektrische Feld zwischen Kathode und Anode auf die Anode beschleunigt werden (Spannung zwischen Kathode und Anode: üblicherweise einige 10 kV bis einige 100 kV, in diesem Versuch liegt sie zwischen 12 kV und 35 kV). Beim Auftreffen auf die Anode haben die Elektronen somit eine Energie von $E_k = e \cdot U$.

In der Anode wird nun ein kleiner Teil (weniger als 1 %) dieser Energie in Röntgenstrahlung umgewandelt (der Rest geht in die Anregung und Ionisation der Metallatome der Anode).

Da die abgegebene Röntgenstrahlung einigermaßen isotrop ist, wird eine Abschirmung benötigt, um nicht ziellos die Umgebung zu verstrahlen. Der Röntgenstrahl wird weiter auf eine nutzbar kleine Form reduziert, indem man einen Bleikollimator benutzt.

Als Anodenmaterial wird normalerweise ein Metall mit mittlerer bis hoher Ordnungszahl verwendet. In diesem Versuch kommen Kupfer ($Z = 29$), Eisen ($Z = 26$) und Molybdän ($Z = 42$) zum Einsatz.

Das Röntgen-Spektrum selbst besteht aus zwei Komponenten:

- **Bremskontinuum:** unspezifische Form, Einsatzpunkt am kurzwelligen Ende (λ_G in Abbildung 2) ist abhängig von der Röhrenspannung.
- **Röntgenlinien:** diskrete, vom Anodenmaterial abhängige Strahlung, unabhängig von der Spannung

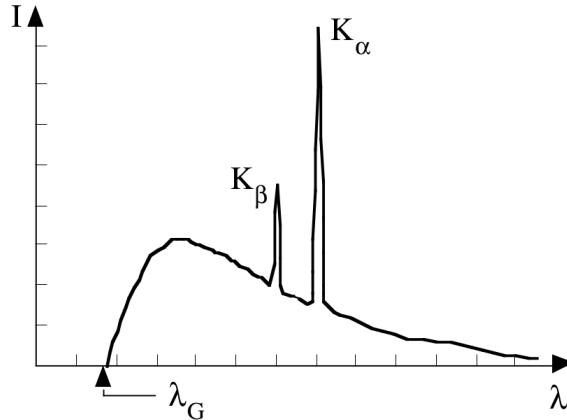


Abbildung 2: Röntgen-Spektrum. *Quelle:* Versuchsanleitung

1.1.1 Die Bremsstrahlung

Dringt ein Elektron von der Kathode in ein Atom der Anode ein und kommt in den Einflussbereich des Coulomb-Feldes des Kerns, wird gemäss Quantentheorie ein Photon γ abgegeben.

Die Grenze der kürzesten Wellenlänge λ_G , die im Spektrum dieser Photonen auftritt, beschreibt die Situation, wenn ein emittiertes Photon die gesamte Energie eines einfallenden Elektrons aufgenommen hat (zur Erinnerung: kürzere Wellenlänge korrespondiert mit höherer Frequenz und somit höherer Energie eines Photons). Da es unmöglich ist, mehr Energie in ein Photon zu transferieren, als das einfallende Elektron mitbringt, reisst dort das Spektrum am linken Ende ab.

Die maximale Energie, die ein emittiertes Röntgen-Photon haben kann, berechnet sich somit zu

$$E_{\gamma,max} = e \cdot U \quad (1)$$

mit der zugehörigen Wellenlänge:

$$\lambda_G = \frac{h \cdot c}{e \cdot U} \quad (2)$$

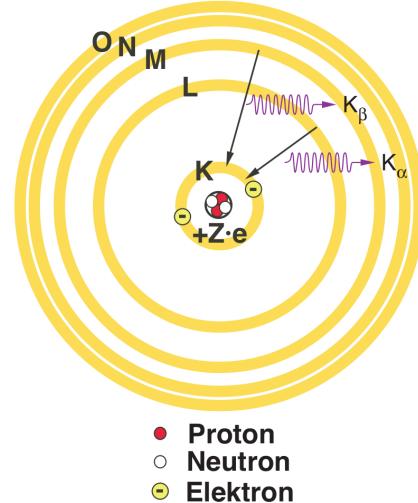
h ist dabei die Planck-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit, e die Ladung eines Elektrons und U die Röhrenspannung.

1.1.2 Die charakteristische Strahlung

Die charakteristische Strahlung geht von den Atomen des Anodenmaterials selbst aus. Sie besteht aus Photonen, die bei Elektronenübergängen in der kernnahen Atomhülle abgegeben werden:

- L-Schale → K-Schale: K_α -Strahlung
- M-Schale → K-Schale: K_β -Strahlung
- M-, N-, O-Schale → L-Schale: L-Strahlung

Solche Übergänge werden ermöglicht durch das Herausschlagen von Elektronen aus einer inneren Schale (Elektronenstoss/Stossionisation oder Absorption von Röntgen-Strahlung/Photoionisation).



Die beiden K-Linien dominieren dabei das Spektrum.

1.2 Beugung von Röntgen-Strahlung an Kristallen, Röntgen-Spektrometer

Röntgenstrahlen werden an einem Kristallgitter gebrochen, wenn die Bragg'sche Gleichung (Gleichung 3) erfüllt ist:

$$2 \cdot d \cdot \sin\vartheta_n = n \cdot \lambda \quad (3)$$

Dabei ist d der Netzebenenabstand. Netzebenen sind von Atomen regelmäßig belegte Ebenen in einer Kristallstruktur, entsprechen also nicht unbedingt den Gitterfächern (bzw. d ist nicht unbedingt identisch zu einer Gitterkonstanten).

Abbildung 4 stellt schematisch das Einfallen und Reflektieren von Strahlung in und an einem Kristallgitter und die Netzebenen dar.

ϑ ist der so genannte **Glanzwinkel**. Er beschreibt den Winkel zwischen Netzebene und ein- bzw. ausfallendem Strahl.

Es gibt verschiedene Verfahren, um sich das Röntgenstrahlung zum Einblick ins Innere einer Kristallstruktur zu Nutzen zu machen. In diesem Versuch wird die **Bragg'sche Drehkristallmethode** verwendet.

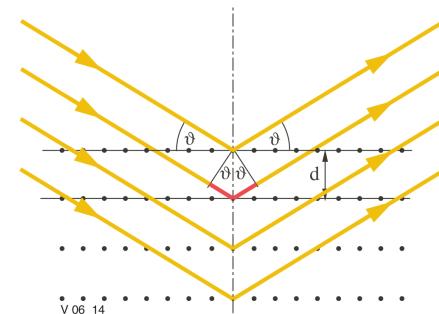


Abbildung 4: Schema zur Herleitung der Bragg'schen Gleichung.
Quelle: Versuchsanleitung

Dabei wird ein Kristall in einer Halterung rotiert und mit monochromatischer Strahlung bestrahlt. Nur bei bestimmten Winkeln wird der Strahl am Kristall reflektiert und im Zählrohr detektiert (siehe Abbildung 5).

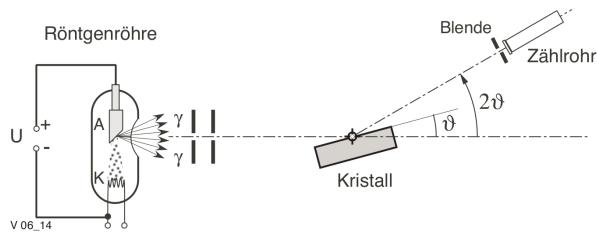


Abbildung 5: Schema der Versuchsanordnung *Quelle:* Versuchsanleitung

2 Durchführung

2.1 Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abbildung 6 dargestellt.

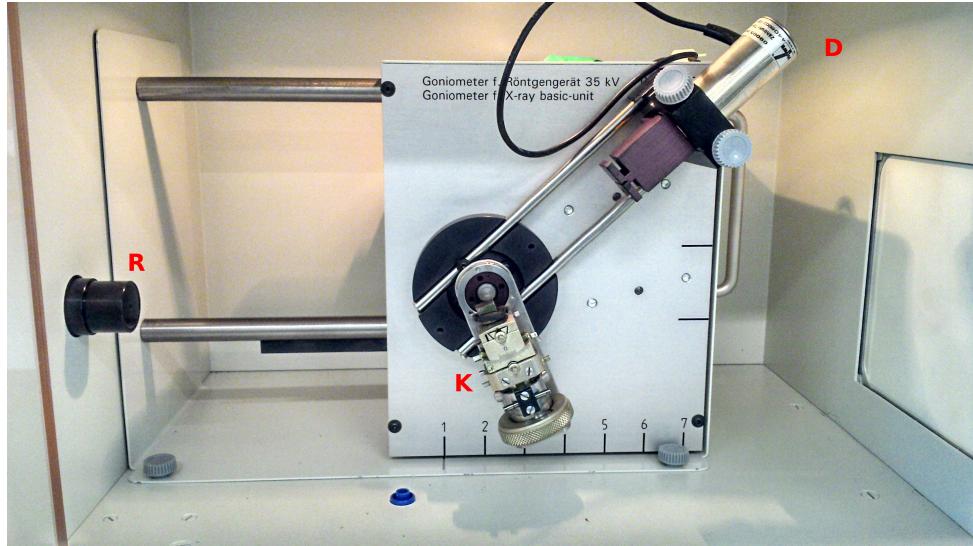


Abbildung 6: Versuchsanordnung. **R:** Austritt der Röntgenstrahlung aus dem Bleikollimator, **K:** Drehhalterung mit Kristall, **D:** Detektor

Der Detektor rotiert dabei stets mit dem doppelten Winkel der Kristallhalterung um den Mittelpunkt. Daher ist in den Plots im folgenden Kapitel jeweils der Zählrohrwinkel gleich dem doppelten Glanzwinkel.

In Abbildung 7 ist eine der benutzten auswechselbaren Einheiten mit einer Röntgenröhre zu sehen.



Abbildung 7: Eine der benutzten Röntgenröhren-Einheiten

2.2 Geräteliste

Die verwendeten Geräte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Hilfsmittel und Geräteliste

Gerät	Typ
Röntgengerät	Phywe, 35 kV
Röntgenröhre	Phywe, Kupferanode
Röntgenröhre	Phywe, Eisenanode
Röntgenröhre	Phywe, Molybdänanode
Auswerteprogramm Versuchsapparatur	Phywe Measure
Auswerteprogramm Bericht	QtiPlot

2.3 Messvorgang/Messmethoden

Es wurde die gewünschte Röhre und der Bleikollimator eingesetzt. Anschliessend wurde auf der rotierenden Halterung der zu analysierende Kristall befestigt. Die Apparatur wurde justiert und danach wurde die Messung via PC-Software automatisiert durchgeführt.

2.4 Proben/Versuchsobjekte

Es wurden folgende Kristalle untersucht:

- LiF
- Bergkristall (SiO)
- Kalkspat (Kalzit, CaCO₃)
- Pyrit (Katzengold, FeS₂)
- synthetischer Quarz (SiO₂)

3 Auswertung

3.1 Wichtige Daten

Tabelle 2: Charakteristische Röntgenlinien der Anodenmaterialien. Quelle: Anhang der Versuchsanleitung

Material	$\lambda - K\alpha_1$	$\lambda - K\alpha_2$	$\lambda - K\alpha$	$\lambda - K\beta$
Fe ($Z = 26$)	194.00 pm	193.60 pm	193.80 pm	175.66 pm
Cu ($Z = 29$)	154.05 pm	154.44 pm	154.245 pm	193.23 pm
Mo ($Z = 42$)	70.93 pm	71.36 pm	71.145 pm	63.26 pm

Tabelle 4 enthält die Daten der charakteristischen Spektrallinien der Anodenmaterialien (zu finden in der Veruchsanleitung im Anhang). Da die beiden α -Linien sehr nahe beieinander liegen und daher beinahe immer als lediglich ein Peak zu sehen sind, wurde ein arithmetischer Mittelwert $K\alpha$ bestimmt, welcher in den folgenden Rechnungen und Plots jeweils benutzt wird (z.B. für die Bragg'sche Gleichung).

3.2 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Als Erstes wurden die Spektren der drei Röhren (Kupfer, Eisen, Molybdän) mit einem LiF-Kristall bei 35 kV aufgenommen.

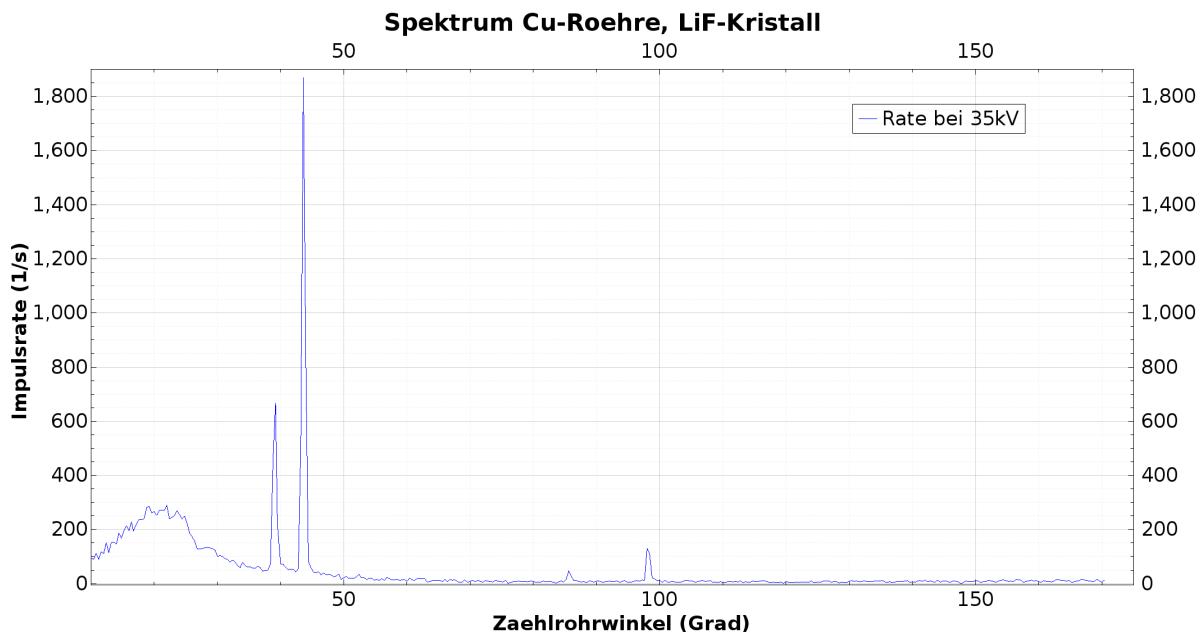


Abbildung 8: Spektrum mit Kupferröhre

Aus den Daten zu den Abbildungen 8, 9 und 10 wurden nun die zu den Spektrallinien gehörenden Zählrohrwinkel ausgelesen. Dies erfolgte *nicht* aus dem Diagramm direkt, da dies

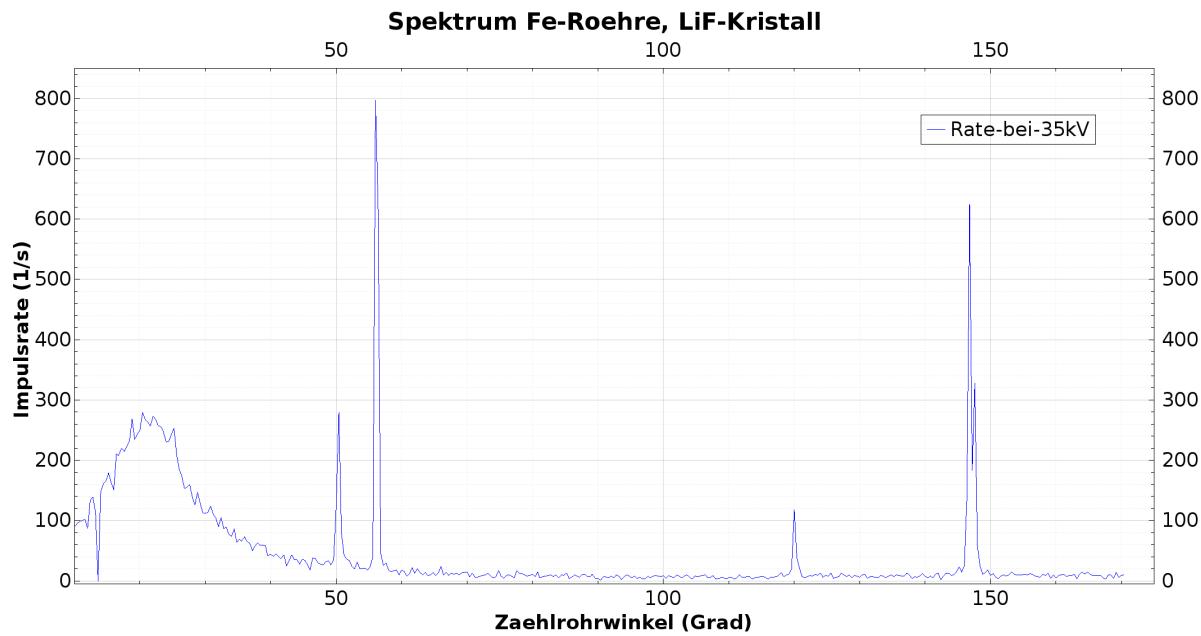


Abbildung 9: Spektrum mit Eisenröhre

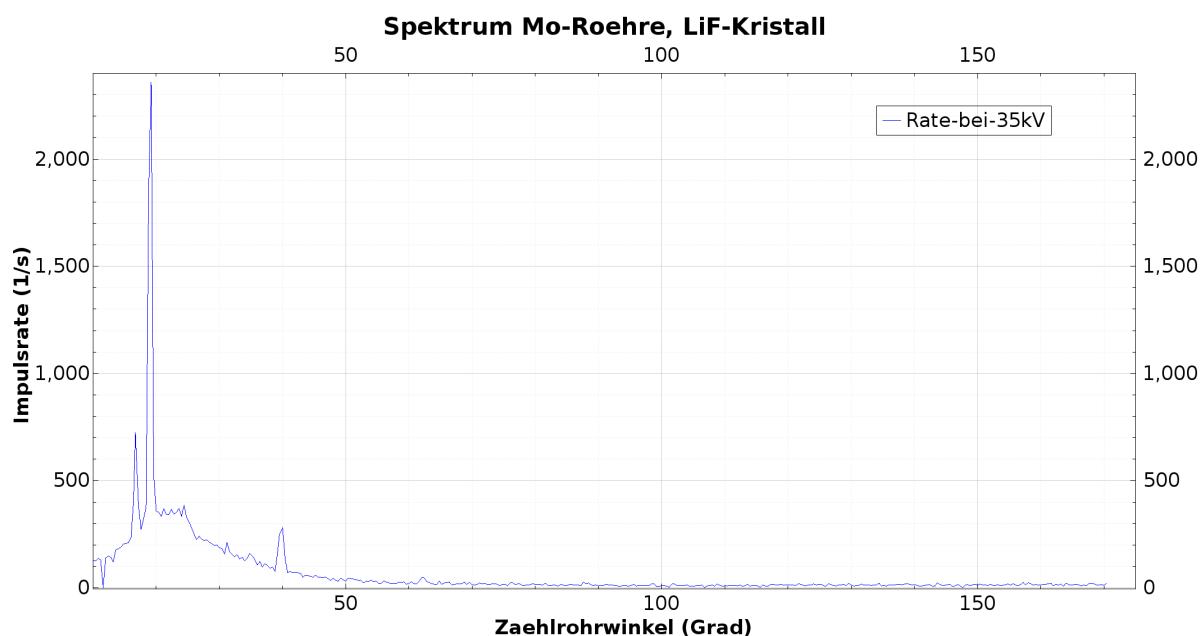


Abbildung 10: Spektrum mit Molybdänröhre

zu ungenau wäre. Stattdessen wurden dazu die Zahlenwerte der Messungen mithilfe der Plots (zum Eingrenzen des Suchbereichs) betrachtet.

Tabelle 3: Zählrohrwinkel (entspricht doppeltem Glanzwinkel) zu Spektrallinien mit LiF-Kristall bei 35 kV

	Kupferröhre		Eisenröhre		Molybdänröhre	
	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$
n = 1	39.2°	43.6°	50.4°	56.0°	16.7°	19.2°
n = 2	85.6°	98.0°	120.0°	146.8°	34.8°	40.0°
n = 3				147.6°		62.0°

Schlussendlich wollen wir mit diesen Daten auf die Gitterstruktur des LiF-Kristalles schliessen. Bevor wir dies tun, werden wir jedoch zuerst noch untersuchen, ob sich allenfalls ein Nullpunktfehler in unsere Messungen eingeschlichen hat.

Dazu stellen wir zuerst die Bragg'sche Gleichung um und führen einen Nullpunktfehler ϑ_0 ein:

$$\vartheta_n = \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda_{Anode}}{2 \cdot d}\right) + \vartheta_0 \quad (4)$$

Als Stellgrösse benutzen wir nun $n \cdot \lambda$, wobei λ aus Tabelle 4 von Seite 9 entnommen wird. Je nachdem, ob es sich um eine β - oder eine α -Linie handelt, muss natürlich das entsprechende λ verwendet werden.

Dies führt zu folgenden Wertepaaren:

Tabelle 4: Wertepaare für umgestellte Bragg'sche Formel

Kupfer		Eisen		Molybdän	
$n \cdot \lambda$	ϑ_n	$n \cdot \lambda$	ϑ_n	$n \cdot \lambda$	ϑ_n
139.23 pm	19.6°	175.66 pm	25.2°	63.26 pm	8.35°
154.245 pm	21.8°	193.8 pm	28°	71.145 pm	9.6°
278.46 pm	42.8°	351.32 pm	60°	126.52 pm	17.4°
308.49 pm	49°	387.6 pm	73.4°	142.29 pm	20°
				213.435 pm	31°

Nun wäre es natürlich sehr elegant, wenn man direkt eine Regression über die beiden Variablen d und ϑ_0 mit diesen Werten durchführen könnte, und somit in einem Zug den Netzebenenabstand und den Offset dieser Messungen erhielte.

Leider zeigte sich QtiPlot hierbei aber sehr unkooperativ. Trotz vielem Herumtüfteln stürzte das Programm beim Versuch, über beide Variablen eine Regression durchzuführen, ab.

Als Workaround wurde daher folgendermassen vorgegangen:

- d wurde auf den Wert aus der Literatur gesetzt (201.5 pm, siehe Versuchsanleitung).
- Anschliessend wurde mit diesem Wert, der modifizierten Bragg'schen Formel aus Gleichung 4 und den Werten aus Tabelle 4 eine Regression durchgeführt und daraus der Nullpunktfehler ϑ_0 bestimmt.

- Die somit erhaltenen Werte für den Nullpunktfehler (einer für jede Röhre) wurden anschliessend mit Matlab wieder in die Bragg'sche Formel (Gleichung 4, Seite 9) eingesetzt, jedoch diesmal nach dem Netzebenenabstand d aufgelöst.
Dabei erhält man für jede Spektrallinie ein Resultat. Diese können abschliessend noch gemittelt werden. Eine Fehlerrechnung wurde ebenfalls durchgeführt (siehe Abschnitt 4.1 ab Seite 18).

Die Regressions-Plots sind in den Abbildungen 11, 12 und 13 abgebildet.

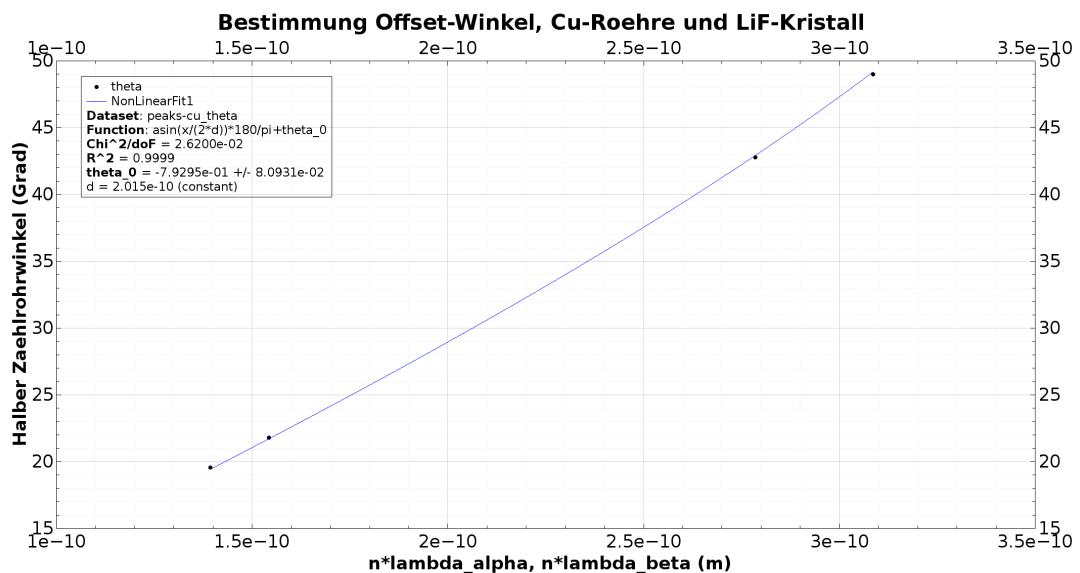


Abbildung 11: Bestimmung Nullpunktfehler für Kupferröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Kupferröhre beträgt also:

$$\vartheta_0 = (-0.729\,250 \pm 0.080\,931)^\circ$$

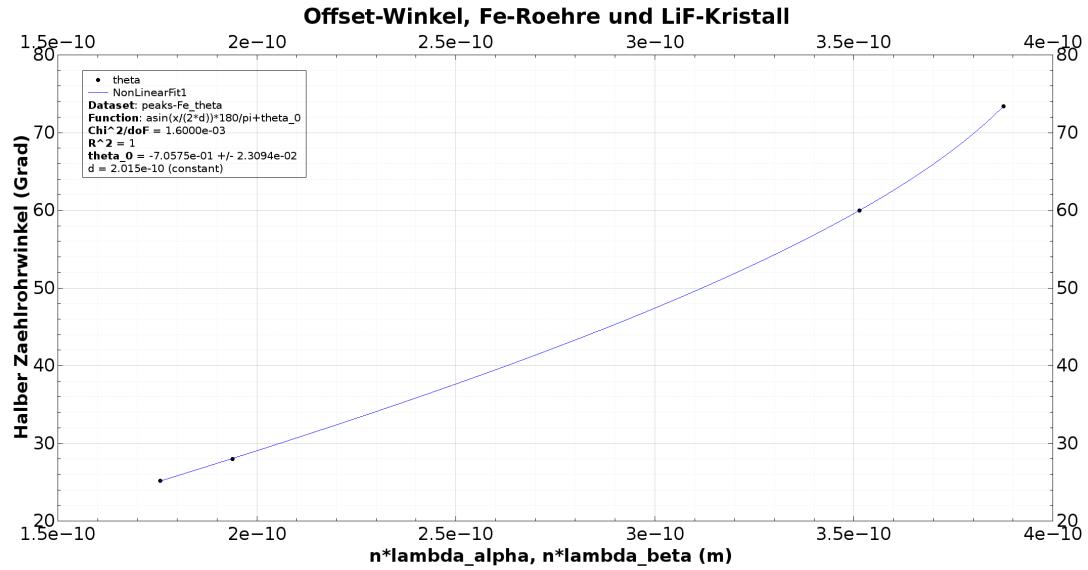


Abbildung 12: Bestimmung Nullpunktfehler für Eisenröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Eisenröhre ist:

$$\vartheta_0 = (-0.705\,750 \pm 0.023\,094)^\circ$$

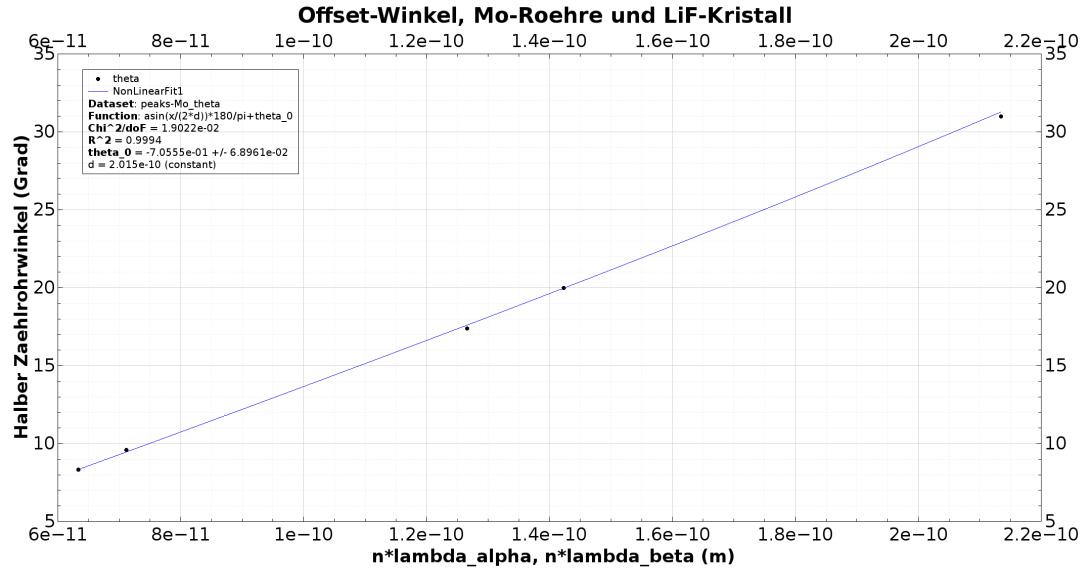


Abbildung 13: Bestimmung Nullpunktfehler für Molybdänröhre

Der Nullpunktfehler für die Messreihe mit der Molybdänröhre kommt auf:

$$\vartheta_0 = (-0.705\,550 \pm 0.068\,961)^\circ$$

Die Weiterverarbeitung dieser Resultate wurde inklusive Fehlerrechnung mit Matlab durchgeführt und ist in Kapitel 4.1 auf Seite 18 zu finden.

3.3 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Das Planck'sche Wirkungsquantum soll über die Grenzwellenlänge λ_G und die Formel

$$\lambda_G = \frac{h \cdot c}{e \cdot U}$$

bestimmt werden.

Dazu wurden bei verschiedenen Röhrenspannungen Spektren mit der Fe-Röhre und dem LiF-Kristall aufgenommen, mit besonderem Augenmerk auf den Bereich, wo λ_G erwartet wurde (also kleine Zählrohrwinkel).

Anschliessend wurden für jede Spannung der Scatter-Plot von Hand nach bestem Wissen und Gewissen ausgewertet. Genauer gesagt wurde eine Gerade möglichst sinnvoll durch die Messpunkte gelegt und ihre Schnittpunkt mit der horizontalen Achse bestimmt, inklusive abgeschätzter Unsicherheit.

Eine schematische Darstellung dieses Prozesses ist in Abbildung 14 auf Seite 13 zu sehen.

Die bestimmten Werte wurden anschliessend in ein Matlab-Script gefüttert, welches daraus die zugehörigen Grenzwellenlängen und Unsicherheiten berechnete.

Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, dass eine Mess-Serie fehlt. Dies ist auf einen Fehler beim Speichern der Daten zurückzuführen; der Experimentator überschrieb versehentlich ein Datenset. Dies soll uns jedoch nicht daran hindern, diese Auswertung wie geplant weiterzuführen. Wie sich zeigen wird, ist das Resultat trotzdem ganz passabel.

Tabelle 5: Grenzwinkel ϑ_G und Grenzwellenlänge λ_G

Spannung U	Winkel $2 \cdot \vartheta_G$	Wellenlänge (Matlab)
35 kV	$(9.0 \pm 1.5)^\circ$	$(36.62 \pm 5.00) \text{ pm}$
32 kV	$(9.8 \pm 0.5)^\circ$	$(39.42 \pm 2.00) \text{ pm}$
26 kV	$(11.5 \pm 2.5)^\circ$	$(45.37 \pm 9.00) \text{ pm}$
23 kV	$(14.2 \pm 0.5)^\circ$	$(54.79 \pm 2.00) \text{ pm}$
20 kV	$(16.9 \pm 0.1)^\circ$	$(64.18 \pm 0.40) \text{ pm}$
17 kV	$(20.1 \pm 0.1)^\circ$	$(75.26 \pm 0.40) \text{ pm}$
14 kV	$(24.5 \pm 0.7)^\circ$	$(90.41 \pm 2.00) \text{ pm}$
12 kV	$(28.9 \pm 0.5)^\circ$	$(105.41 \pm 2.00) \text{ pm}$

Die Wellenlängen aus Tabelle 5 wurden dabei mittels der Bragg'schen Gleichung berechnet, wobei $n = 1$ sowie $d = 201.5 \text{ pm}$ zu setzen sind.

Die so ermittelten Wellenlängen und ihre Fehler wurden nun in QtiPlot eingegeben und eine gewichtete Regression ausgeführt.

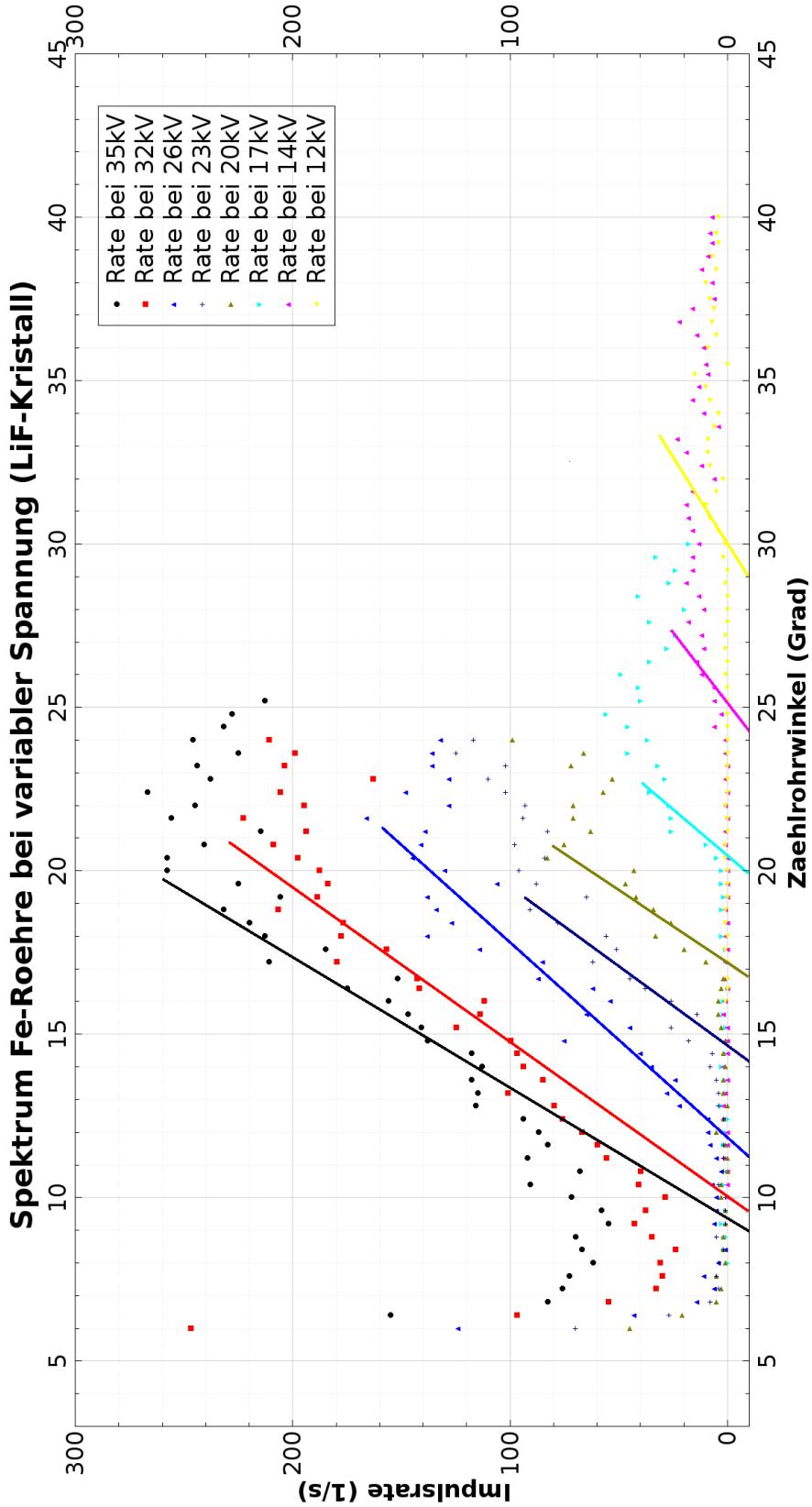


Abbildung 14: Schematische Darstellung der Bestimmung der Grenzwinkel. **Beachte:** Die hier eingezeichneten Geraden sind nicht diejenigen, welche wirklich zu den Werten aus Tabelle 5 auf Seite 12 geführt haben. Dazu ist diese Grafik viel zu grob. Es wurde pro Spannung jeweils ein Scatterplot ausgewertet, um die zugehörigen Grenzwinkel zu bestimmen. Da dies jedoch unverhältnismässig viel Platz benötigt für diesen Bericht, ist das Vorgehen schematisch hier dargestellt.

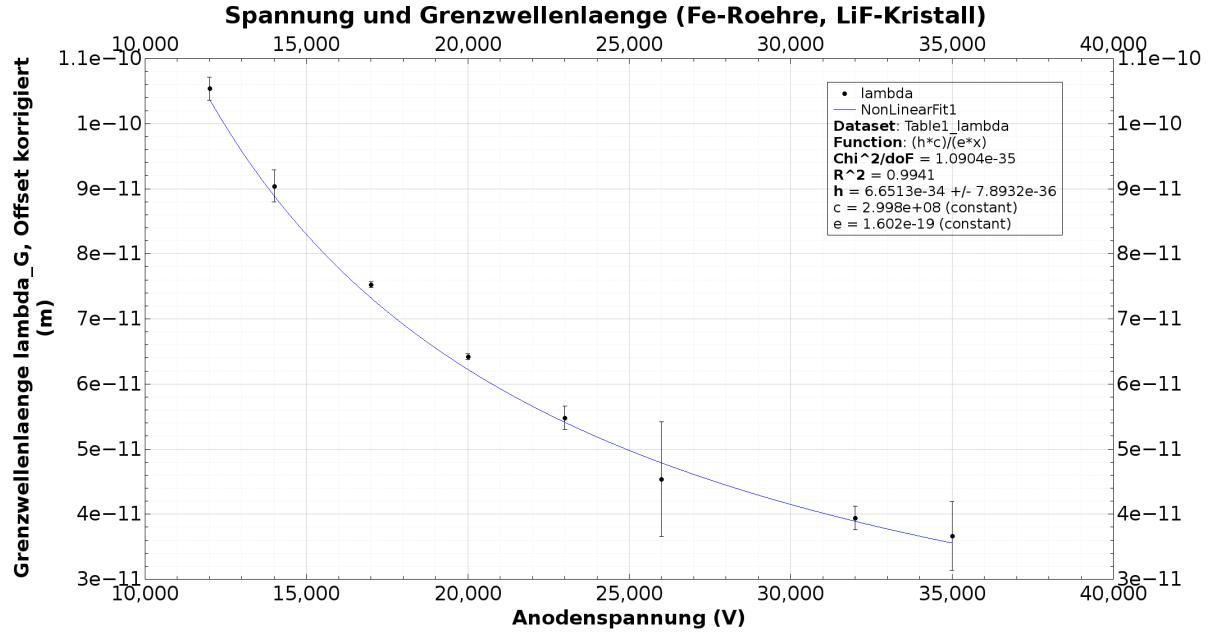


Abbildung 15: Gewichtete Regression zur Bestimmung der Planck'schen Konstante

Es ergibt sich also:

$$h = (6.6513 \pm 0.0800) \text{ Js} \cdot 1e - 34$$

3.4 Andere Kristalle

Hier ging es darum, die Netzebenenabstände von diversen Kristallproben analog zum Abschnitt 5.1 zu bestimmen. Die verwendeten Kristalle waren:

- Bergkristall (SiO)
- Kalkspat (Kalzit, CaCO_3)
- Pyrit (Katzengold, FeS_2)
- synthetischer Quarz (SiO_2)

Hierzu wurde von jedem Kristall mit der Eisenröhre bei 35 kV ein Spektrum aufgenommen. Diese sind zu sehen in den Abbildungen 16, 17, 18 und 19, die ausgelesenen Zählrohrwinkel sind in Tabelle 6 auf Seite 17 zu finden.

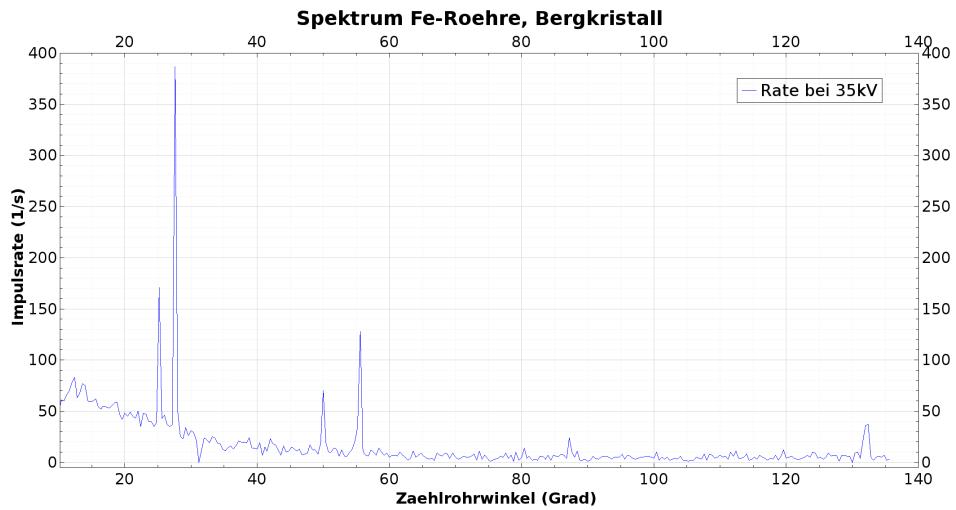


Abbildung 16: Spektrum des Bergkristalls mit Eisenröhre bei 35 kV

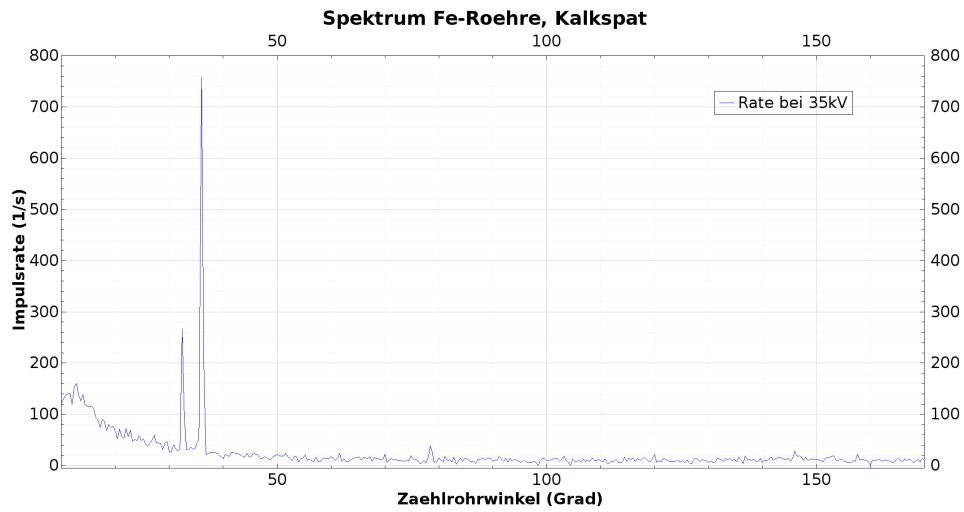


Abbildung 17: Spektrum von Kalkspat mit Eisenröhre bei 35 kV

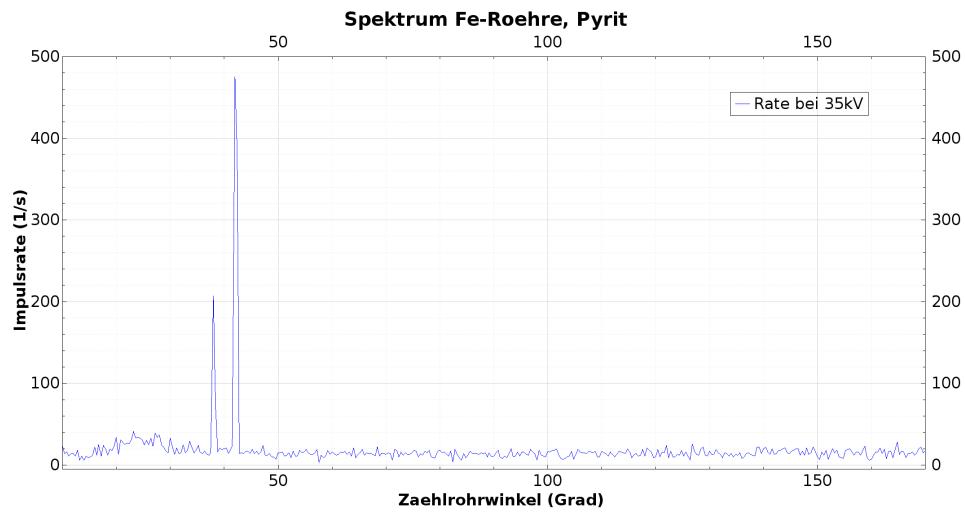


Abbildung 18: Spektrum von Pyrit mit Eisenröhre bei 35 kV

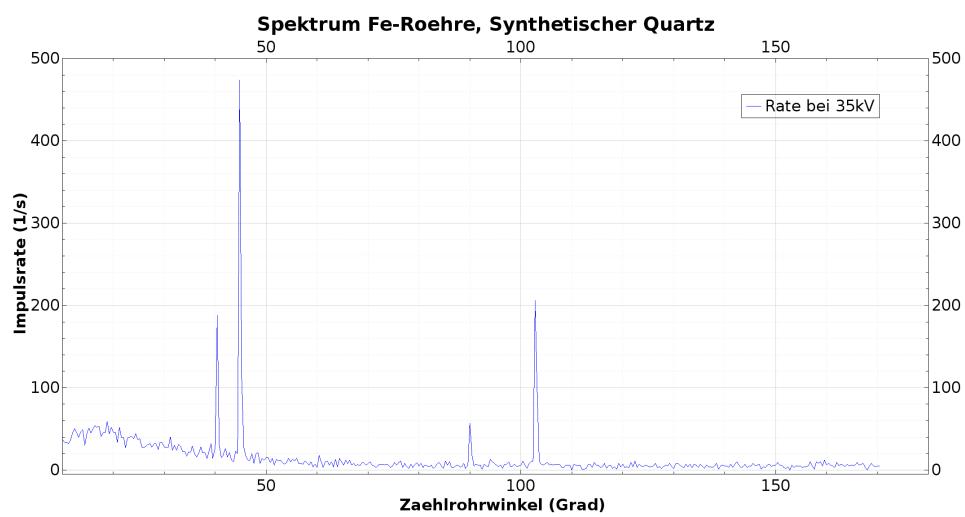


Abbildung 19: Spektrum von synthetischem Quarz mit Eisenröhre bei 35 kV

Tabelle 6: Zählrohrwinkel (entspricht doppeltem Glanzwinkel) zu Spektrallinien mit Fe-Röhre bei 35 kV

	Bergkristall	Kalkspat		Pyrit		Synthetischer Quarz	
	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$	$2 \cdot \vartheta_\alpha$	$2 \cdot \vartheta_\beta$
n = 1	25.2°	27.6°	32.4°	36.0°	38.0°	42.0°	40.4°
n = 2	50.0°	55.6°	74.8°	78.4°			90.0°
n = 3	80.4°	87.2°					102.8°
n = 4	119.6°	132.4°					

Wie bereits bei der Bestimmung des Netzebenenabstandes des LiF-Kristalles erwähnt, wäre es natürlich sehr elegant gewesen, mit diesen Werten nun eine Regression über den Netzebenenabstand und den Nullpunktfehler durchzuführen. Da das (vergebliche) Debuggen von QtiPlot und das Heraustüfteln des im Abschnitt zum LiF-Kristall benutzten Workarounds sowie seine anschliessende Umsetzung beträchtlich Zeit in Anspruch nahm, war es nicht mehr möglich, diesen Workaround auch auf diese vier Kristalle anzuwenden.

Die etwas unelegantere Methode besteht darin, zu jedem Wert aus Tabelle 6 den zugehörigen Netzebenenabstand mittels der Bragg'schen Gleichung zu bestimmen, und diese Resultate anschliessend zu mitteln. Dieser Weg wurde für diesen Abschnitt gewählt und ist im Kapitel zur Fehlerberechnung ab Seite 20 beschrieben. Das Verfahren wurde wie beim LiF-Kristall mit Matlab ausgeführt.

4 Fehlerrechnung

4.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Zur Rekapitulation nochmals die mittels Regression bestimmten Nullpunktfehler:

Tabelle 7: Nullpunktfehler aus Regression

Anodenmaterial	Nullpunktfehler ϑ_0
Kupfer	$\vartheta_0 = (-0.729\,250 \pm 0.080\,931)^\circ$
Eisen	$\vartheta_0 = (-0.705\,750 \pm 0.023\,094)^\circ$
Molybdän	$\vartheta_0 = (-0.705\,550 \pm 0.068\,961)^\circ$

Das Ziel ist nun die Bestimmung des Netzebenenabstandes mittels der folgenden Gleichung:

$$d = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot \sin(\vartheta_n - \vartheta_0)} \quad (5)$$

Wobei für ϑ_n die halben Zählrohrwinkel einzusetzen sind (abgelesen aus den Messdaten) und für λ die entsprechenden Wellenlängen für die charakteristischen Spektrallinien des jeweiligen Anodenmaterials.

Dies liefert für jeden Peak jeder Anode einen Wert für d (Bestimmt via Matlab):

Tabelle 8: Netzebenenabstände zu den einzelnen Peaks

Anodenmaterial	Peak	Netzebenenabstand
Kupfer	β_1	203.9 pm
	β_2	203.5 pm
	α_1	204.4 pm
	α_2	203.3 pm
Eisen	β_1	203.6 pm
	β_2	202.1 pm
	α_1	204.0 pm
	α_2	201.9 pm
Molybdän	β_1	209.0 pm
	β_2	207.5 pm
	α_1	205.8 pm
	α_2	204.6 pm
	α_3	205.1 pm

Diese Werte können nun gemittelt werden mittels der bekannten Formel:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Und ihr Fehler bestimmt werden mittels der Formel:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

Da Matlab praktische Befehle zum Verkürzen dieser Prozedur bereits integriert hat, greifen wir darauf zurück: `mean(d)` und `std(d) * sqrt(1/length(d))`, wobei `d` der Resultatvektor mit den Werten aus Tabelle 8 ist. `std(vector)` berechnet die Standardabweichung der Werte eines Vektors, `sqrt(1/length(d))` ist der Korrekturfaktor, um von der Standardabweichung auf den Fehler des Mittelwertes der Werte des Vektors zu kommen.

Dies liefert für den Netzebenenabstand von LiF:

$$d_{LiF} = (204.5 \pm 0.6) \text{ pm}$$

Das zugehörige Script ist in Anhang A.1 auf Seite 24 zu finden.

4.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Die von Hand geschätzten Unsicherheiten wurden zusammen mit dem im ersten Teil des Versuches bestimmten Nullpunktfehler in die Bragg'sche Gleichung eingesetzt:

$$\lambda_{Error} = \frac{2 \cdot \sin(\vartheta_{n,Error} - \vartheta_0)}{n}$$

und in Wellenlängen konvertiert.

Das hierfür benutzte Matlab-Script ist in Anhang A.2 auf Seite 25 zu finden.

Anschliessend wurden die daraus berechneten Fehler in QtiPlot als Fehlerspalte benutzt für einen gewichteten Regressions-Plot. Für die Unsicherheit des End-Resultates wurde abschliessend die Unsicherheit aus dem Fit von QtiPlot benutzt.

4.3 Andere Kristalle

Wie bereits erwähnt, wurde für jede Spektrallinie von jedem Kristall der zugehörige Netzebenenabstand mittels der Bragg'schen Gleichung berechnet (in Matlab). Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 9 zu sehen.

Tabelle 9: Die für die vier Kristalle bestimmten Netzebenenabstände und ihre Unsicherheiten.

	Bergkristall		Kalkspat		Pyrit		Synth. Quartz	
	d (β)	d (α)	d (β)	d (α)	d (β)	d (α)	d (β)	d (α)
n = 1	402.6 pm	406.2 pm	282.7 pm	314.2 pm	331.6 pm	366.5 pm	352.6 pm	391.0 pm
n = 2	415.6 pm	415.5 pm	652.8 pm	684.2 pm			785.4 pm	897.1 pm
n = 3	408.2 pm	421.5 pm						
n = 4	406.5 pm	423.6 pm						
MW	408.2 pm	416.7 pm	302.0 pm	310.1 pm	269.8 pm	270.4 pm	251.4 pm	251.1 pm
MW (ges.)		412.5 pm		306.1 pm		251.6 pm		270.1 pm
Fehler	2.7 pm	3.9 pm	12.8 pm	3.5 pm	0 pm	0 pm	3.0 pm	3.2 pm
Fehler (ges.)	2.7 pm		5.9 pm		0.3 pm		1.8 pm	

Anmerkungen:

- **Allgemein:** Die Resultate streuen teilweise merklich. Es drängt sich der Verdacht auf, dass hier eine Korrektur des Nullpunktfehlers wünschenswert wäre, wie dies beim LiF-Kristall gemacht wurde.
- **Bergkristall:** Sieht eigentlich ganz passabel aus, verglichen mit den anderen drei Kristallen.
- **Kalkspat:** Hier sieht man einen markanten Sprung zwischen $n = 1$ und $n = 2$. Ich führe dies auf die Kristallstruktur zurück, und nicht auf einen Mess- oder Rechenfehler. Kalkspat hat keine kubische, sondern eine rhombische Einheitszelle (siehe Anhang Versuchsanleitung). Daher können je nach Einstrahlungswinkel verschiedene Abstände zwischen Netzebenen auftreten (nicht alle Netzebenen unter allen Winkeln sind identisch).
- **Pyrit:** Hier konnten nur bei $n = 1$ Peaks detektiert werden. Die enorm kleinen Unsicherheiten sind daher also nicht etwa das Resultat von hervorragender Messpräzision, sondern das Ergebnis einer enorm kleinen Anzahl Messwerte.
- **Synthetischer Quarz:** Auch hier gelten wieder die gleichen Überlegungen wie beim Kalkspat bezüglich verschiedener möglicher Netzebenen, nur dass dieser Kristall keine rhombische, sondern eine auf Sechsecken aufbauende Gitterstruktur.

Das für diese Berechnungen benutzte Matlab-Script befindet sich in Anhang A.3 ab Seite 26.

5 Resultate und Diskussion

5.1 Versuch 3.1 – Spektren der Röhren, Analyse von LiF

Der Netzebenenabstand von LiF wurde bestimmt zu:

$$d_{LiF} = (204.5 \pm 0.6) \text{ pm}$$

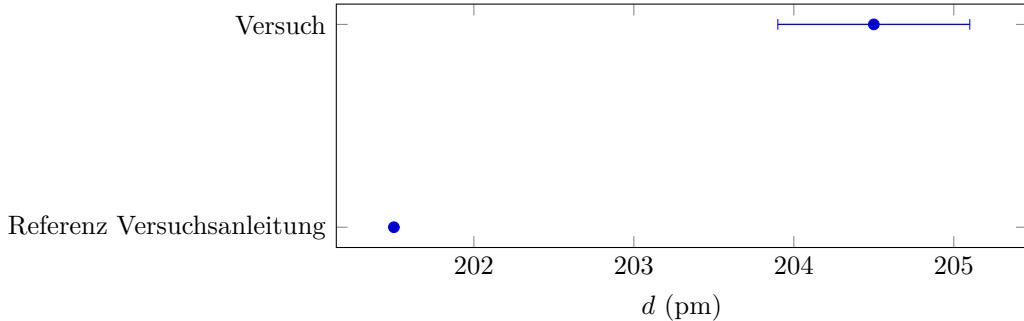


Abbildung 20: graphische Darstellung der Ergebnisse für den Netzebenenabstand von LiF

Der Referenzwert aus der Literatur ist zwar nicht ganz im Toleranzbereich des Experiments, aber alles in allem betrachte ich dieses Resultat doch als ganz zufriedenstellend. Es wäre interessant, herauszufinden, ob es genauer oder ungenauer ausfallen würde, wenn man die zugehörige Funktion in QtiPlot direkt für zwei Variablen (d und ϑ_0) fitten könnte.

5.2 Versuch 3.3 – Planck-Konstante

Die Planck-Konstante wurde experimentell bestimmt zu:

$$h_{Exp} = (6.65 \pm 0.08) \text{ Js} \cdot 1e - 34$$

Der Referenzwert aus der Literatur (Kuchling, 17. Aufl., p.526) ist:

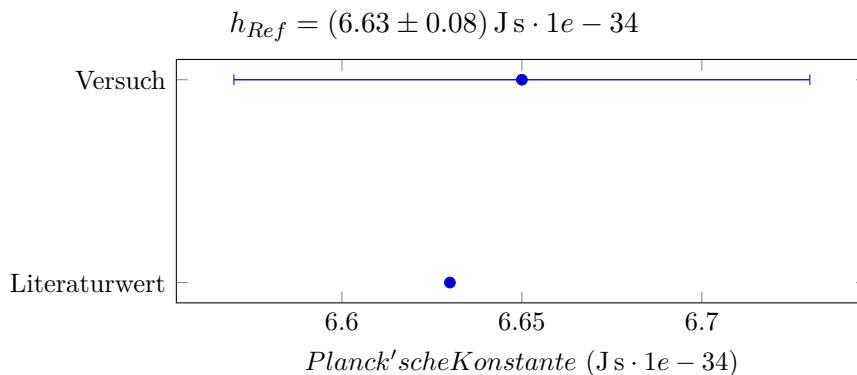


Abbildung 21: graphische Darstellung der Ergebnisse für den die Bestimmung der Planck'schen Konstante

Der Referenzwert liegt innerhalb der Unsicherheit des experimentellen Resultates. Sehr zufriedenstellend.

5.3 Andere Kristalle

Die bestimmten Netzebenenabstände sind:

- **Bergkristall:** (413 ± 3) pm
- **Kalkspat:** (306 ± 6) pm
- **Pyrit:** (252.0 ± 0.3) pm
- **Synthetischer Quarz:** (270 ± 2) pm

Wie im Abschnitt zur Fehlerrechnung erwähnt erachte ich diese Werte allerdings nur als sehr bedingt aussagekräftig und bin der Meinung, dass hier noch einiges an Arbeit erforderlich wäre, um sinnvolle Schlussfolgerungen ziehen zu dürfen, die auch einem kritischen Blick standhalten würden. Leider hat der Tag nur 24 Stunden, und so musste ich hier einen Kompromiss machen und die Arbeit zu Ende bringen, ohne das Ziel ganz erreicht zu haben.

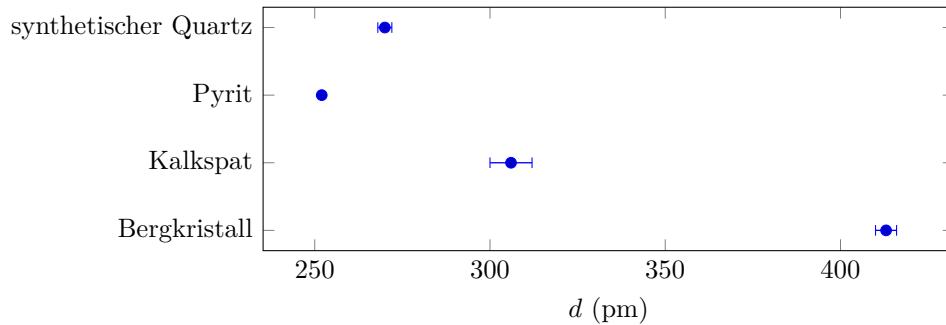


Abbildung 22: graphische Darstellung der Ergebnisse für den Netzebenenabstand von Bergkristall, Kalkspat, Pyrit und synthetischem Quarz

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbstständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Oberentfelden, den 21.04.2016.

Anhang A Matlab-Code

Dieser Abschnitt beinhaltet die Matlab-Scripts, welche im Rahmen dieses Versuches geschrieben und verwendet wurden.

A.1 LiF-Kristall

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11
2 % Lattice Plane Distances, LiF
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc
6
7 % offset angles (including conversion)
8 offset_Cu      = -7.2925e-1 * pi / 180 * 1/2;
9 offset_Cu_err  = 8.0931e-2 * pi / 180 * 1/2;
10 offset_Fe     = -7.0575e-1 * pi / 180 * 1/2;
11 offset_Fe_err = 2.3094e-2 * pi / 180 * 1/2;
12 offset_Mo     = -7.0555e-1 * pi / 180 * 1/2;
13 offset_Mo_err = 6.8961e-2 * pi / 180 * 1/2;
14
15
16 % Peak angles (including conversions)
17 peaks_Cu_beta = [39.2 85.6] .* pi ./ 180 .* 1/2;
18 peaks_Cu_alpha = [43.6 98.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
19 peaks_Fe_beta = [50.4 120.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
20 peaks_Fe_alpha = [56.0 146.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
21 peaks_Mo_beta = [16.7 34.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
22 peaks_Mo_alpha = [19.2 40.0 62.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
23
24
25 % lambda_K
26 lambda_K_beta_Cu = 139.23e-12;
27 lambda_K_alpha_Cu = (154.44 + 154.05)/2*1e-12;
28 lambda_K_beta_Fe = 175.66e-12;
29 lambda_K_alpha_Fe = (194.0 + 193.6)/2*1e-12;
30 lambda_K_beta_Mo = 63.26e-12;
31 lambda_K_alpha_Mo = (71.36+70.93)/2*1e-12;
32
33 % Lattice distances and errors (via Gauss error propagation), in meters
34 results = [
35   1 * lambda_K_beta_Cu/(2*sin(peaks_Cu_beta(1) - offset_Cu)),
36   2 * lambda_K_beta_Cu/(2*sin(peaks_Cu_beta(2) - offset_Cu)),
37   1 * lambda_K_alpha_Cu/(2*sin(peaks_Cu_alpha(1) - offset_Cu)),
38   2 * lambda_K_alpha_Cu/(2*sin(peaks_Cu_alpha(2) - offset_Cu)),
39   1 * lambda_K_beta_Fe/(2*sin(peaks_Fe_beta(1) - offset_Fe)),
40   2 * lambda_K_beta_Fe/(2*sin(peaks_Fe_beta(2) - offset_Fe)),
41   1 * lambda_K_alpha_Fe/(2*sin(peaks_Fe_alpha(1) - offset_Fe)),
42   2 * lambda_K_alpha_Fe/(2*sin(peaks_Fe_alpha(2) - offset_Fe)),
43   1 * lambda_K_beta_Mo/(2*sin(peaks_Mo_beta(1) - offset_Mo)),
44   2 * lambda_K_beta_Mo/(2*sin(peaks_Mo_beta(2) - offset_Mo)),
45   1 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(1) - offset_Mo)),
46   2 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(2) - offset_Mo)),
47   3 * lambda_K_alpha_Mo/(2*sin(peaks_Mo_alpha(3) - offset_Mo))
48 ]
49
50 mean(results)
51 std(results) * sqrt(1/length(results))

```

A.2 Planck-Konstante

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11, Wavelengths for regression
2 % for determining Planck constant.
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc
6 format long;
7
8 % Errors, manually read from plots
9 angles_raw = [ 9    9.8 11.5 14.2 16.9 20.1 24.5 28.9];
10 errors_raw = [ 1.5 0.5  2.5  0.5  0.1  0.1  0.7  0.5];
11
12 % Offset and its error margin
13 npf_abs = -7.1352e-1 / 180 * pi;
14 npf_err = 3.627e-2 / 180 * pi;
15
16 % Convert from counting tube angle to Bragg angle, convert from degrees to radians
17 angles = angles_raw ./ 180 .* pi .* 1/2;
18 errors = errors_raw ./ 180 .* pi .* 1/2;
19
20 % Lattice plane distance in meters
21 d = 201.5e-12;
22
23 % order
24 n = 1;
25
26
27 % Offset angle correction, base value
28 offset_fixed_angles = angles - npf_abs;
29
30 i = 1;
31 for element = angles_raw
32     % Error propagation for error for offset angle
33     offset_fixed_error = sqrt(npf_err^2 + (errors(i))^2);
34
35     % Calculate wavelengths: base values and error margins
36     lambda(i) = 2*d*sin(offset_fixed_angles(i))/n;
37     lambda_err(i) = 2*d*sin(offset_fixed_error)/n;
38
39     i = i+1;
40 end
41
42 % Results
43 lambda
44 lambda_err

```

A.3 Andere Kristalle

```

1 % FHNW Technik, Physiklabor, Experiment A11
2 % Lattice Plane Distances, other Crystals
3 % (c) Raphael Frey, April 2016
4
5 clear all;clc;
6
7 % Bergkristall (SiO)
8
9 bergkristall_Beta = [25.2 50.0 80.4 119.6] .* pi ./ 180 .* 1/2;
10 bergkristall_Alpha = [27.6 55.6 87.2 132.4] .* pi ./ 180 .* 1/2;
11
12
13 % Kalkspat (CaCO3)
14
15 kalkspat_Beta = [32.4 74.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
16 kalkspat_Alpha = [36.0 78.4] .* pi ./ 180 .* 1/2;
17
18
19 % Synthetischer Quarz (SiO)
20
21 synth_Quartz_Beta = [40.4 90.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
22 synth_Quartz_Alpha = [44.8 102.8] .* pi ./ 180 .* 1/2;
23
24 % Pyrit (FeS2)
25
26 pyrit_Beta = [38.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
27 pyrit_Alpha = [42.0] .* pi ./ 180 .* 1/2;
28
29
30 % Fe-Anode
31 lambda_K_beta = 175.66e-12;
32 lambda_K_alpha = (194.0 + 193.6) / 2 * 1e-12;
33
34 % Calculate lattice plane distance w/ Bragg equation
35
36 n = 1;
37 for angle = bergkristall_Beta
38     bergkristall_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
39     n = n+1;
40 end
41
42 n = 1;
43 for angle = bergkristall_Alpha
44     bergkristall_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
45     n = n+1;
46 end
47
48 n = 1;
49 for angle = kalkspat_Beta
50     kalkspat_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
51     n = n+1;
52 end
53
54 n = 1;
55 for angle = kalkspat_Alpha
56     kalkspat_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
57     n = n+1;
58 end
59
60 n = 1;
61 for angle = synth_Quartz_Beta
62     synth_Quartz_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
63     n = n+1;

```

```

64 end
65
66 n = 1;
67 for angle = synth_Quartz_Alpha
68     synth_Quartz_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
69     n = n+1;
70 end
71
72 n = 1;
73 for angle = pyrit_Beta
74     pyrit_d_Beta(n) = n * lambda_K_beta / (2 * sin(angle));
75     n = n+1;
76 end
77
78 n = 1;
79 for angle = pyrit_Alpha
80     pyrit_d_Alpha(n) = n * lambda_K_alpha / (2 * sin(angle));
81     n = n+1;
82 end
83
84
85 bergkristall_d_Beta_avg = mean(bergkristall_d_Beta)
86 bergkristall_d_Beta_err = std(bergkristall_d_Beta) * sqrt(1/length(bergkristall_d_Beta))
87
88 bergkristall_d_Alpha_avg = mean(bergkristall_d_Alpha)
89 bergkristall_d_Alpha_err = std(bergkristall_d_Alpha) * sqrt(1/length(
90     bergkristall_d_Alpha))
91
92 bergkristall_d_avg = mean([bergkristall_d_Beta bergkristall_d_Alpha])
93 bergkristall_d_err = std([bergkristall_d_Alpha bergkristall_d_Beta]) * sqrt(1/
94     length([bergkristall_d_Alpha bergkristall_d_Beta]))
95
96 kalkspat_d_Beta_avg = mean(kalkspat_d_Beta)
97 kalkspat_d_Beta_err = std(kalkspat_d_Beta) * sqrt(1/length(kalkspat_d_Beta))
98
99 kalkspat_d_Alpha_avg = mean(kalkspat_d_Alpha)
100 kalkspat_d_Alpha_err = std(kalkspat_d_Alpha) * sqrt(1/length(kalkspat_d_Alpha))
101
102 kalkspat_d_avg = mean([kalkspat_d_Beta kalkspat_d_Alpha])
103 kalkspat_d_err = std([kalkspat_d_Alpha kalkspat_d_Beta]) * sqrt(1/length([
104     kalkspat_d_Alpha kalkspat_d_Beta]))
105
106 synth_Quartz_d_Beta_avg = mean(synth_Quartz_d_Beta)
107 synth_Quartz_d_Beta_err = std(synth_Quartz_d_Beta) * sqrt(1/length(synth_Quartz_d_Beta))
108
109 synth_Quartz_d_Alpha_avg = mean(synth_Quartz_d_Alpha)
110 synth_Quartz_d_Alpha_err = std(synth_Quartz_d_Alpha) * sqrt(1/length(
111     synth_Quartz_d_Alpha))
112
113 synth_Quartz_d_avg = mean([synth_Quartz_d_Beta synth_Quartz_d_Alpha])
114 synth_Quartz_d_err = std([synth_Quartz_d_Alpha synth_Quartz_d_Beta]) * sqrt(1/
115     length([synth_Quartz_d_Alpha synth_Quartz_d_Beta]))
116
117 pyrit_d_Beta_avg = mean(pyrit_d_Beta)
118 pyrit_d_Beta_err = std(pyrit_d_Beta) * sqrt(1/length(pyrit_d_Beta))
119 pyrit_d_Alpha_avg = mean(pyrit_d_Alpha)
120 pyrit_d_Alpha_err = std(pyrit_d_Alpha) * sqrt(1/length(pyrit_d_Alpha))
121
122 pyrit_d_avg = mean([pyrit_d_Beta pyrit_d_Alpha])
123 pyrit_d_err = std([pyrit_d_Alpha pyrit_d_Beta]) * sqrt(1/length([pyrit_d_Alpha
124     pyrit_d_Beta]))

```

Anhang B Messprotokoll

Versuch / Probe:

A11

Datum: 24.03.2016

Parameter / Einstellungen: Durchgeführte Messungen

To Do: t_g für LiF manuell berechnen
für versch. Spannungen.

Kristalle

Anode	Kristall			
Cu	LiF	Spektrum	Bergkristall	Fe
Fe	LiF			
Mo	LiF			
Fe	LiF	35 kV	-	• Synthetischer Quarz
Fe	LiF	32 kV	-	
Fe	LiF	29 kV	-	• Kalkspat
Fe	LiF	26 kV	✓	
Fe	LiF	23 kV	-	• Pyrit
Fe	LiF	20 kV	✓	
Fe	LiF	17 kV	✓	
Fe	LiF	14 kV	✓	
Fe	LiF	12 kV	✓	

Beobachtungen/Bemerkungen:

O12 – Laser Doppler Anemometrie

28.04.2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Hässler

Inhaltsverzeichnis

1 Arbeitsgrundlagen	1
1.1 Messprinzip	1
1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik	5
1.2.1 Laminare vs. Turbulente Strömung, Reynoldszahl	5
1.2.2 Strömungsprofile	6
2 Durchführung	10
2.1 Versuchsanordnung	10
2.2 Geräte	12
2.3 Erwartete Reynoldszahlen und Signalfrequenzen	13
2.4 Ablauf	14
3 Auswertung	17
3.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen	18
3.2 Strömungsgeschwindigkeit und Unsicherheiten	19
3.3 Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung	20
3.4 Strömungsprofil im laminaren Fall	23
3.5 Strömungsprofil im turbulenten Fall	25
4 Fehlerrechnung	27
4.1 Laminares Strömungsprofil	27
4.2 Turbulentes Strömungsprofil	28
5 Resultate und Diskussion	29
Anhang A Python-Code	31
A.1 Laminare Strömung, symbolische Berechnungen	31
A.2 Turbulente Strömung, symbolische Berechnungen	31
A.3 Geschwindigkeit in Rohrmitte	32
A.4 Strömungsprofile im laminaren Fall	33
A.5 Strömungsprofile im turbulenten Fall	34
A.6 Fehlerrechnung laminares Strömungsprofil	35
A.7 Fehlerrechnung turbulentes Strömungsprofil	36
Anhang B Messprotokolle	37

Versionsgeschichte

27.04.2016: Version 0.1: Vorbereitung
01.05.2016: Version 0.2: Arbeitsgrundlagen, Durchführung, Auswertung tlw.
02.05.2016: Version 0.3: Fix Auswertung, Fehlerrechnung, Diskussion
05.05.2016: Version 0.4: Formatierung, Ergänzung bei Messung Rohrmitte

1 Arbeitsgrundlagen

In diesem Versuch kommen verschiedene Bereiche aus der Physik zusammen, primär Fluid-Dynamik und Optik. Entsprechend ergibt sich auch die Gliederung dieses Kapitels.

1.1 Messprinzip

Das Verfahren nutzt den optischen Dopplereffekt, um die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid zu detektieren. Trifft ein Lichtstrahl der Frequenz f auf ein bewegtes Objekt, unterscheidet sich die vom Objekt detektierte Frequenz f_1 ein wenig von der vom Sender emittierten Frequenz f_0 .

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta_1\right) \quad (1)$$

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit, \vec{e} ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahls und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes ist. Wird der Lichtstrahl am bewegten Objekt gestreut und anschliessend von einem Empfänger detektiert, ergibt sich für diesen die Frequenz f_2 :

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (2)$$

\vec{a} ist dabei ein Einheitsvektor in Ausfallsrichtung des gestreuten Strahls. Die Konfiguration ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt.

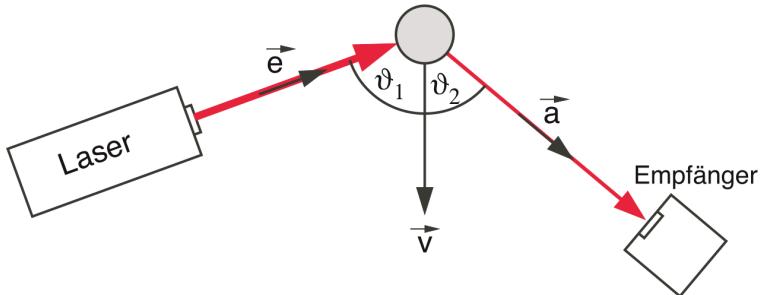


Abbildung 1: Dopplereffekt mit stationärem Sender, bewegtem Streuer und stationärem Detektor.
Quelle: Versuchsanleitung

Da bei technischen Geschwindigkeiten das Verhältnis $\frac{v}{c}$ sehr klein ist, ergeben sich unter solchen Umständen lediglich minime Unterschiede in den Frequenzen f_4 , f_1 und f_2 . Eine präzise Messung der Frequenzunterschiede ist somit enorm schwierig, weshalb man sich eines Zwei-Strahl-Verfahrens bedient. Da die beiden Teilstrahlen dabei in unterschiedlichen Winkeln ϑ_1 (vgl. Formel 1) auf das streuende Teilchen treffen, erfahren sie unterschiedliche Doppler-Verschiebungen ihrer Frequenzen.

Überlagert man nun die beiden Teilstrahlen in einem Detektor, ergibt sich eine Schwebung, deren Frequenz bedeutend tiefer als f_0 ist, und somit verhältnismässig gut detektiert werden kann.

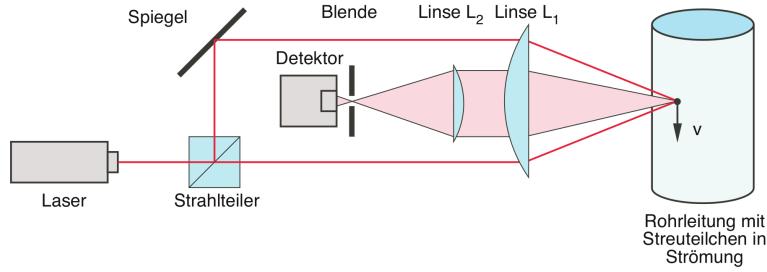


Abbildung 2: Zwei-Strahl-Anordnung. *Quelle:* Versuchsanleitung

Eine häufig verwendete Konfiguration ist in Abbildung 2 zu sehen.

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl auf zwei Strahlen auf und ein Spiegel sorgt dafür, dass zwei parallele Strahlen entstehen, die anschliessend durch eine Linse L_1 mit Brennweite f_1 wieder zusammengeführt werden. Fließt ein Streuteilchen durch diesen Schnittpunkt, ergeben sich für die beiden Teilstrahlen zwei unterschiedliche Frequenzen aufgrund des Dopplereffekts:

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos\left(90^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \quad (3)$$

$$f_2 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \quad (4)$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (5)$$

Die beiden Wellenzüge werden anschliessend in einem einzelnen Empfänger zusammengeführt. Die durch diese Überlagerung erzeugte Schwebung errechnet sich nach einigen trigonometrischen Umformungen zu (beachte, dass beide Signale die gleiche Amplitude haben, was die Sache etwas vereinfacht):

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \quad (6)$$

Nun wird in einem Detektor jedoch nicht die Schwebung selbst, sondern ihre Intensität gemessen. Diese ist als das Quadrat der Schwebung definiert:

$$\begin{aligned} I(t) &= S^2(t) \\ &= A^2 \cdot \left(\cos^2(\omega_1 \cdot t) + \cos^2(\omega_2 \cdot t) + 2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \left(1 + \cos(2\omega_1 \cdot t) + \cos(2\omega_2 \cdot t) + 4 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cos(\omega_2 \cdot t) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \left(2 + \cos(2\omega_1 \cdot t) + \cos(2\omega_2 \cdot t) + 2 \cdot \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t) + 2 \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Die verschiedenen in Gleichung 7 auftretenden Anteile des Gesamtsignals sind in Abbildung 3 auf Seite 3 einzeln dargestellt, zusammen mit dem totalen Signal.

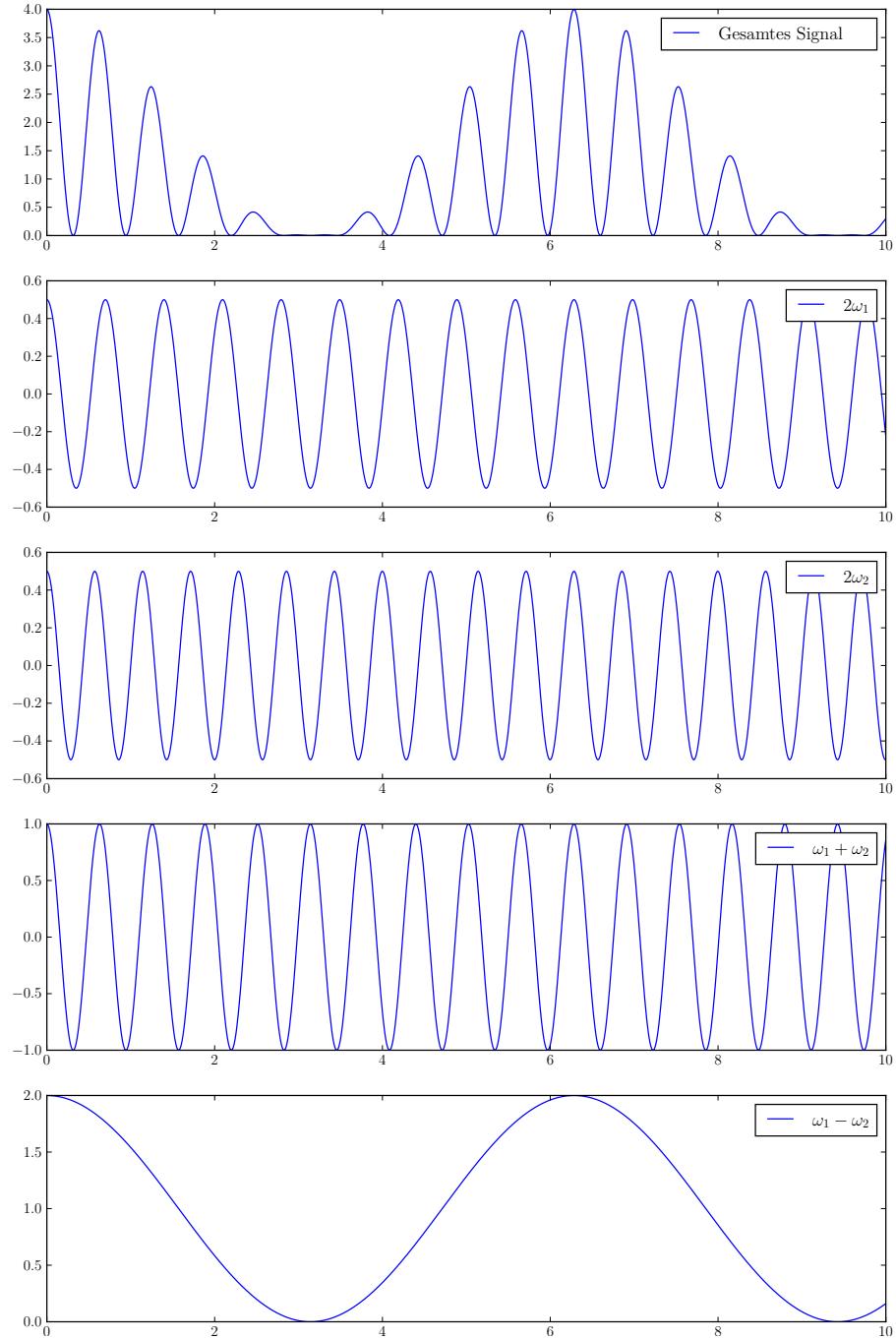


Abbildung 3: Konstruktion einer Schwebung für ein Signal der Form der Intensität (quadratische Überlagerung von harmonischen Schwingungen) aus einzelnen Frequenzen. Zuoberst das gesamte Signal, dann die drei höherfrequenten Anteile und am Schluss das Signal, welches vom Detektor gesehen werden kann. Abbildung 4 auf Seite 4 zeigt noch eine Überlagerung des Gesamtsignals mit der langsamen Schwingung.

Der Detektor ist im Vergleich zur Lichtfrequenz ziemlich langsam und kann somit die Schwingungen der höheren Frequenzen $2\omega_1$, $2\omega_2$ und $\omega_1 + \omega_2$ nicht detektieren, wohl aber die langsame Schwebungsfrequenz $\omega_1 - \omega_2$. Mathematisch kann man dies als eine Mittelung über eine Zeit in der Größenordnung von $\frac{1}{|f_1 - f_2|}$ betrachten. In diesem Falle werden die schnelleren Schwingungen ausgemittelt und verschwinden, lediglich der langsamste Anteil (unterste Kurve in Abbildung 3) bleibt noch übrig. Dies ergibt für das im Detektor ausgewertete Signal:

$$I^* = A^2 \cdot \left(1 + \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) \right) \quad (8)$$

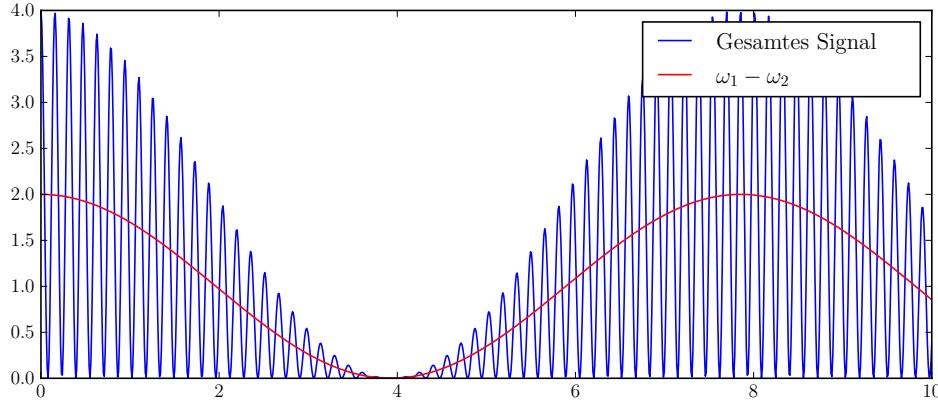


Abbildung 4: Ergänzung zu Abbildung 3. Gesamtschwingung mit schnellen Anteilen in blau und dem im Detektor ausgewerteten langsamsten Anteil in rot

Nun kann man aus diesem detektierten Signal (rot in Abbildung 4) die Geschwindigkeit des Streuteilchens bestimmen (unter der Annahme, dass es gleich schnell wie die Strömung ist, was bei ausreichend kleiner Teilchengröße der Fall ist), indem man Gleichung 5 nach v auflöst und $\frac{f_0}{c} = \lambda$ substituiert, was auf folgende Formel führt:

$$v = \frac{\lambda \cdot f_{\text{Detektor}}}{2 \cdot \sin(\frac{\varphi}{2})} \quad (9)$$

Wobei:

λ : Wellenlänge des Laserlichts

f_{Detektor} : vom Detektor gemessene Frequenz, **rot** in Abbildung 4

φ : Kreuzungswinkel der Laserstrahlen

1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik

Es sollen an dieser Stelle einige für den Versuch relevante Grundlagen aus der Fluidodynamik erläutert werden.

1.2.1 Laminare vs. Turbulente Strömung, Reynoldszahl

Eine Strömung, die durch ein zylindrisches Rohr fliesst, wird nicht überall die gleiche Geschwindigkeit haben. An der Kontaktfläche mit dem Rohr wird die Flussgeschwindigkeit null sein (Randbedingung der entsprechenden Differentialgleichung), während sie im Inneren des Rohres ein Strömungsprofil mit verschiedenen Geschwindigkeiten, abhängig von der radialen Position, aufweist.

Der Verlauf dieses Strömungsprofils kann grob in zwei Fälle aufgeteilt werden:

- **laminares Strömungsprofil:** Es bilden sich Bereiche mit ziemlich konstanter Fliessgeschwindigkeit heraus (Linien, wenn man einen Längsschnitt betrachtet). Die Fliessgeschwindigkeiten des Fluids zwischen diesen Schichten unterscheiden sich nur minimal. Schematisch dargestellt in Abbildung 5.
- **turbulentes Strömungsprofil:** Ab einer bestimmten Fliessgeschwindigkeit bilden sich keine sauberen Strömungsbereiche mehr heraus, das Fluid wird durchmischt und durchwirbelt. Schematisch dargestellt in Abbildung 6.



Abbildung 5: laminares Strömungsprofil
Quelle: Versuchsanleitung

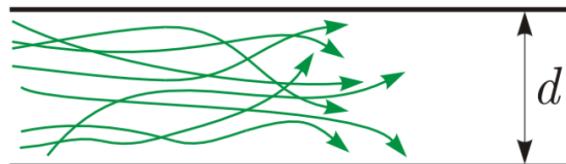


Abbildung 6: turbulentes Strömungsprofil
Quelle: Versuchsanleitung

Zur Beurteilung, ob man es mit laminarem oder turbulentem Fluss zu tun hat, wird die *Reynoldszahl* herangezogen, die wie folgt definiert ist:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (10)$$

Wobei:

ρ : Dichte des Fluids

v_m : mittlere Strömungsgeschwindigkeit

L : eine typische Abmessung

η : dynamische Viskosität des Fluids (Materialkonstante)

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Ähnlichkeitszahl, die dazu dient, Systeme gleicher Form aber verschiedener Abmessungen miteinander vergleichen zu können. Ihre Notwendigkeit ergibt sich daraus, dass sich Fluide auf verschiedenen Grössenskalen nicht gleich verhalten.

Zum Beispiel ist Wasser für mikroskopische Lebewesen sehr zähflüssig, im Gegensatz zu einem Lebewesen unserer Größenordnung. Selbst Luft ist für kleinste Lebewesen dickflüssig.

Will man das Verhalten eines modellierten Systems (z.B. Flugzeugmodell in einem Windkanal) in einem Fluid mit der Realität vergleichen, müssen die Reynoldszahlen des Modellversuchs und der Realität übereinstimmen.

Im Falle von zylindrischen Rohrleitungen hat man experimentell bestimmt, dass die zu verwendete charakteristische Länge L mit dem Rohrdurchmesser gleichzusetzen ist und dass die Strömung bis zu einer kritischen Reynoldszahl $Re_{krit} \approx 2000$ noch laminar ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass die kritische Reynoldszahl von der Systemform abhängt; für eine Trompete wird Re_{krit} anders sein.

1.2.2 Strömungsprofile

Aufgrund der Reibung innerhalb eines Fluids ist die Strömungsgeschwindigkeit innerhalb eines Fluids meist örtlich variabel. Normalerweise wird dies mit einem Strömungsfeld $\vec{v}(x, y, z)(t)$ beschrieben. Im stationären Fall fällt die Zeitabhängigkeit heraus und man erhält $\vec{v}(x, y, z)$.

In diesem Versuch werden lediglich rotationssymmetrische Strömungen in zylindrischen Rohrleitungen betrachtet, womit sich das Strömungsfeld aufgrund radialer Symmetrie zu $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(r)$ vereinfacht.

Liegt laminare Strömung vor, kann das Strömungsprofil analytisch berechnet werden; das Resultat ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille; ein parabolisches Strömungsprofil, abgebildet in Abbildung 7.

$$v(r) = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (11)$$

Wobei:

- r : radiale Position
- R : Radius der Rohrleitung
- Δp : Druckdifferenz über Leitungsstück der Länge l
- η : dynamische Viskosität
- l : Länge des betrachteten Rohrstückes
- v_{\max} : maximale Strömungsgeschwindigkeit

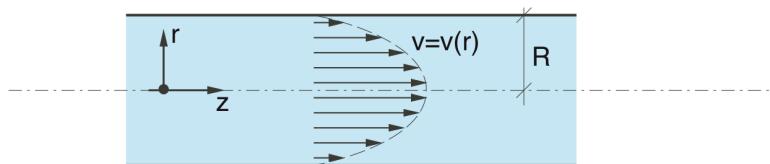


Abbildung 7: Gesetz von Hagen-Poiseuille Quelle: Versuchsanleitung

Will man den Volumenstrom bestimmen, ist dazu das Strömungsprofil über den Querschnitt zu integrieren (aufgrund der radialen Symmetrie vereinfacht sich das Integral zu einer Integration über den Radius):

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \int_{Rohrquerschnitt} v(r) dF \\
 &= \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \\
 &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot v_{\max}}{2} \\
 &= A \cdot v_m \\
 &= \pi \cdot R^2 \cdot v_m
 \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus lässt sich nun leicht der Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit v_m und der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall v_{\max} herleiten:

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

Damit sich das parabolische Strömungsprofil aus Gleichung 11 ausbilden kann, ist eine genügend lange Leitung erforderlich. Beim Eintrittsbereich ist das Strömungsprofil noch nicht parabolisch; das parabolische Strömungsprofil bildet sich erst im Verlaufe der Leitung. Dieser Effekt ist in Abbildung 8 dargestellt.

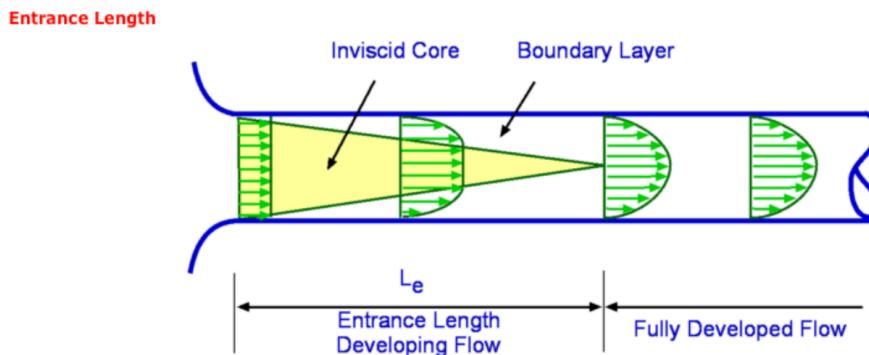
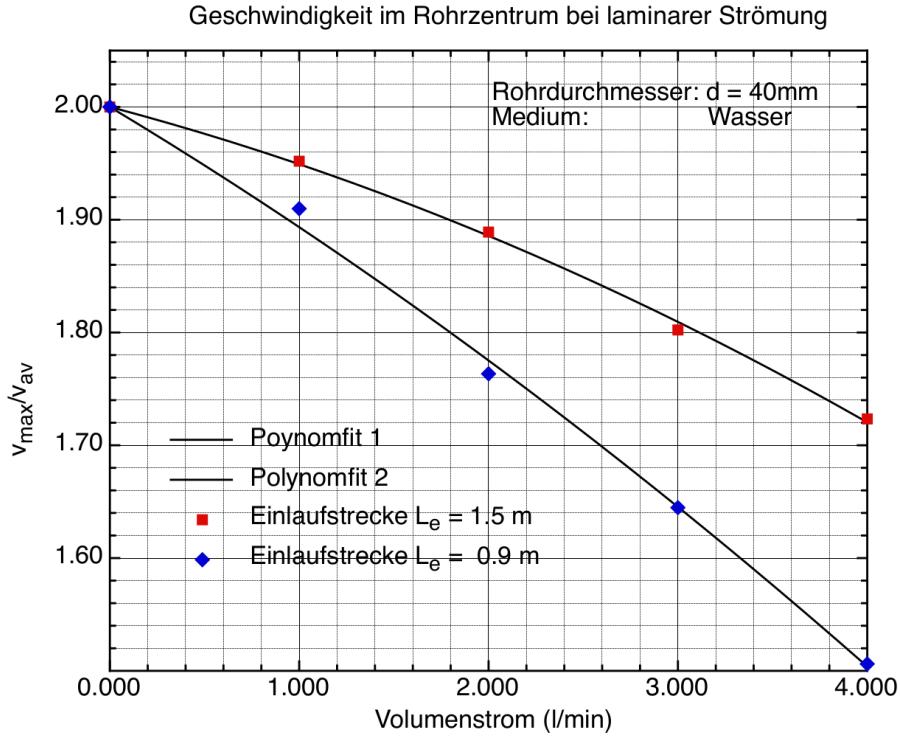


Figure 7.4: Flow at the entrance to a pipe

Abbildung 8: Ausbildung des laminaren Strömungsprofils über die Rohrlänge *Quelle:* Versuchsanleitung

Gemäss Versuchsanleitung wäre für ein perfektes laminares Strömungsprofil eine Messleitung der Länge von ca. 5 m erforderlich, was in diesem Versuch nicht erreicht wird. Die Abweichung des Verhältnisses $\frac{v_{\max}}{v_m}$ vom in Gleichung 13 bestimmten Verhältnis ist in Abbildung 9 dargestellt.



$$\text{Fitfunktion: } y = 2 * (a_1 - x) * (a_2 - x) / a_1 / a_2 \quad \begin{array}{ll} \text{nach } 1.5\text{m: } a_1 = -21.530, & a_2 = 14.57 \\ \text{nach } 0.9\text{m: } a_1 = -29.133, & a_2 = 11.085 \end{array}$$

Abbildung 9: Verhältnis $\frac{v_{\max}}{v_m}$ in Funktion des Volumenstroms bei zu kurzen Einlaufstrecken. Quelle: Versuchsanleitung

Man kann auch den Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom und dem Rohrradius bei gleichem Druckgefälle untersuchen. Dabei wird für v_{\max} der in Gleichung 11 bereits angetroffene Wert eingesetzt und die Formel anschliessend über die Fläche integriert. Das Resultat lautet:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^R \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \\ &= \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \end{aligned} \tag{14}$$

Es ergibt sich also eine Abhängigkeit vom Rohrradius in vierter Potenz!

Zur Lösung der Integrale aus Gleichungen 12 und 14 wurde SymPy benutzt; das zugehörige Script kann in Anhang A.1 auf Seite 31 gefunden werden.

Im turbulenten Fall ist die Sache nicht mehr ganz so einfach. In der Mitte wird das Geschwindigkeitsprofil abgeflacht und entlang der Wand bilden sich eine Grenzschicht mit grossen Geschwindigkeitsunterschieden aus. Die Geschwindigkeit nimmt gegen die Mitte des Rohres nur noch wenig zu. Schematisch dargestellt ist dieser Effekt in Abbildung 10.

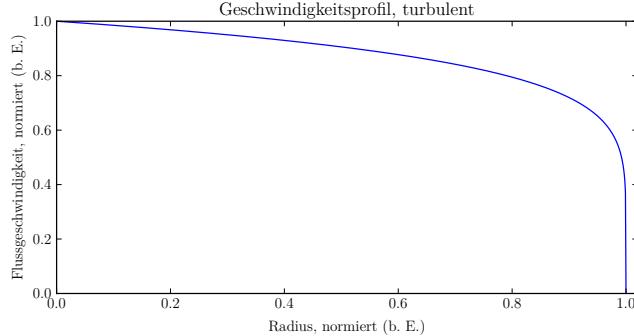


Abbildung 10: Turbulentes Strömungsprofil (eine Rohrhälfte), vereinfachte Darstellung basierend auf dem Potenzgesetz aus Gleichung 15.

Häufig kommt in dieser Situation ein phänomenologisches Potenzgesetz zur Anwendung:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (15)$$

Wobei:

v_{\max} : maximale Strömungsgeschwindigkeit

r : radiale Position

R : Radius Leitung

k : Modellierungsparameter; abhängig von Reynoldszahl, experimentell zu bestimmen^I

Die Bestimmung des Volumenstroms, der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und des Verhältnisses derselben zur maximalen Strömungsgeschwindigkeit erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie bei laminarer Strömung:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (16)$$

$$\dot{V} = \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_{\max} \cdot R^2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (17)$$

$$v_m = \frac{\dot{V}}{R^2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot v_{\max} \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (18)$$

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (19)$$

Auch hier wurde SymPy eingesetzt. Das zugehörige Script ist in Anhang A.2 auf Seite 31 zu finden.

^ITypische Werte für k sind: $k = 6 : Re \approx 4000$, $k = 7 : Re \approx 10^5$, $k = 9 : Re \approx 10^6$

2 Durchführung

Da ein Grossteil dieses Versuch in der korrekten Justierung und Durchführung besteht, ist dieses Kapitel etwas umfangreicher als üblich.

2.1 Versuchsanordnung

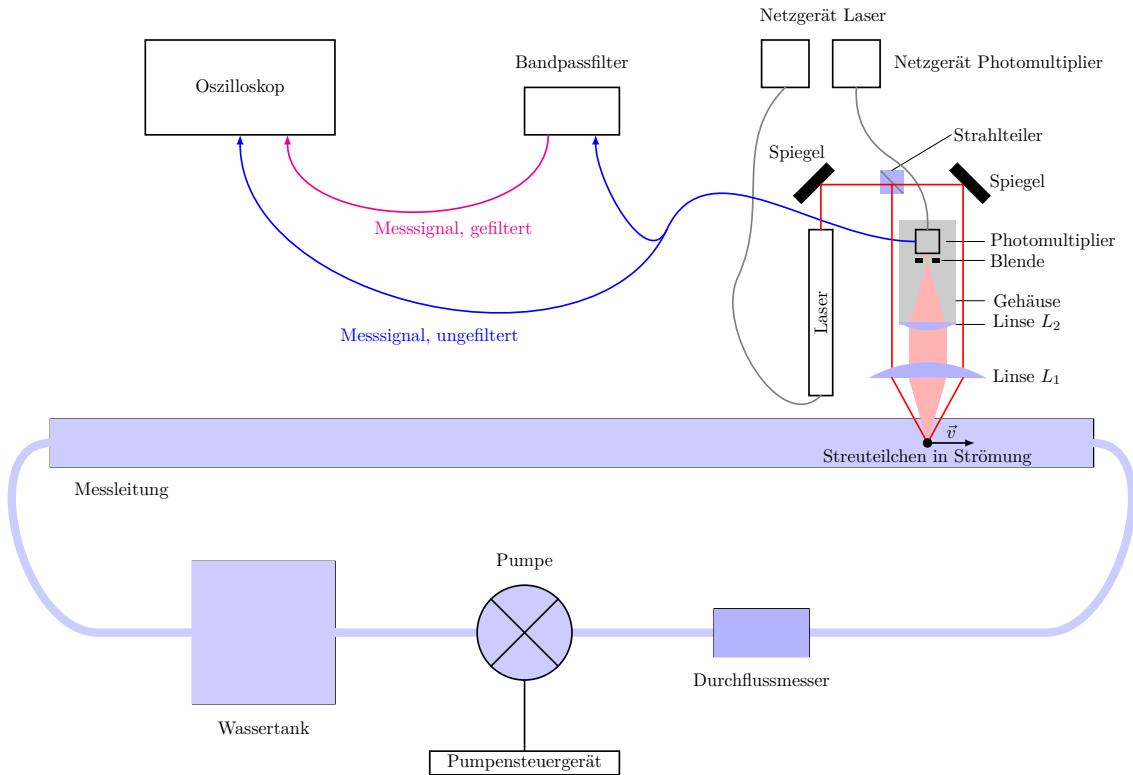


Abbildung 11: Versuchsanordnung, schematisch

Grundsätzlich folgt der Versuchsaufbau den in den Arbeitsgrundlagen beschriebenen Angaben. Die gesamte Anordnung ist schematisch in Abbildung 11 dargestellt, Abbildung 12 ist die entsprechende photographische Dokumentation. Abbildung 13 zeigt einen anderen Blickwinkel auf die Apparaturen.

Um Überlastung durch Umgebungslicht zu verhindern, ist der Photomultiplier zusammen mit der Blende und der Linse L_2 in einem Gehäuse eingelassen. Um die Blende einzustellen und die Lage der Laserstrahlen zu überprüfen, kann dieses abgenommen werden, es sollte aber bei Aktivierung des Detektors montiert sein. Der Detektor wird zwar nicht sofort zerstört, falls er ohne Gehäuse eingeschaltet wird, der Vorgang ist aber der Lebensdauer des Geräts nicht zuträglich.

Das Gehäuse kann in den Abbildungen 12 und 13 gesehen werden.

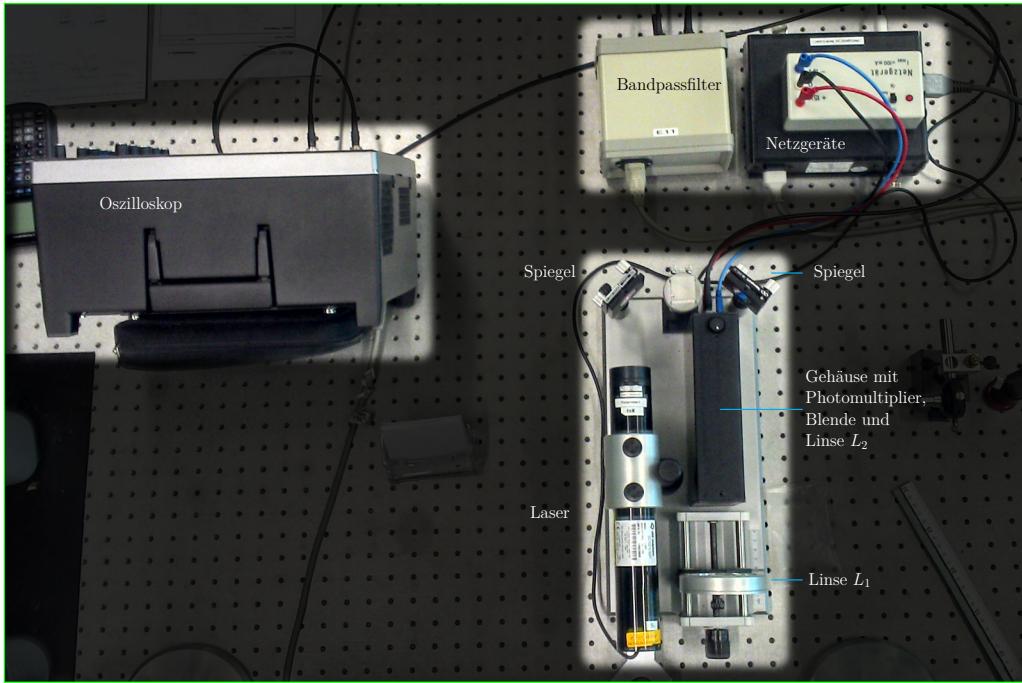


Abbildung 12: Versuchsanordnung, Vogelperspektive. Anordnung ist grösstenteils mit dem Schema aus Abbildung 11 identisch.

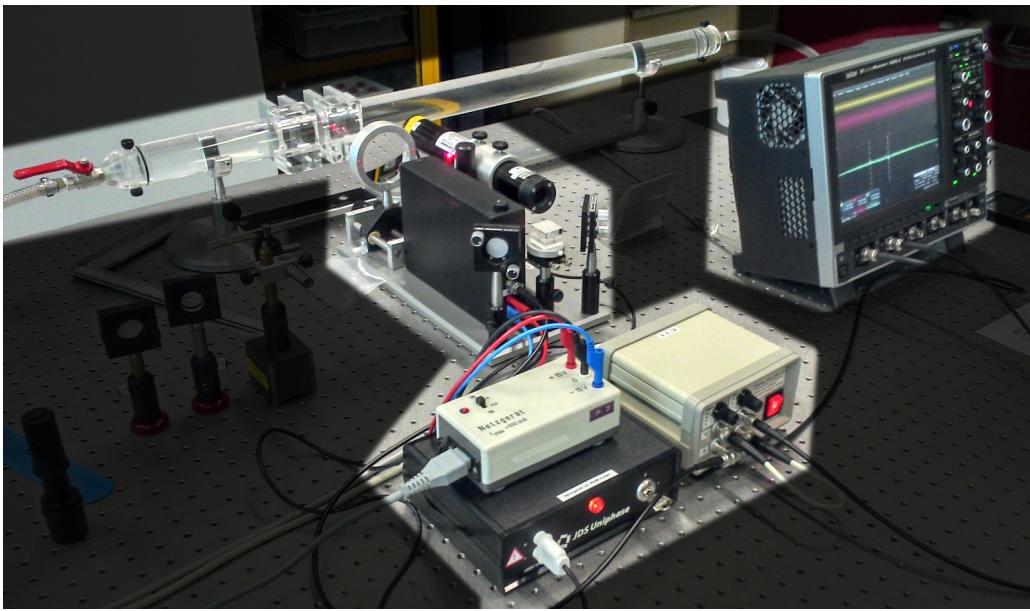


Abbildung 13: Versuchsanordnung, andere Perspektive. Messleitung Sichtbar im Hintergrund.

2.2 Geräte

Tabelle 1: Geräteliste

GERÄT	TYP
Oszilloskop	LeCroy WaveRunner 64MXi-A
Laser	JDS Uniphase 1122P, 4 mW, polarisiert, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$
Pumpe	0.5 L min^{-1} bis 7.5 L min^{-1}
Durchflussmesser	
Detektor	Hamamatsu H9656-02 Photomultiplier
Linse L_1	
Linse L_2	
Messleitung	Plexiglasrohr, Innendurchmesser $(40.0 \pm 0.5) \text{ mm}$
Bandpassfilter	Tiefpass: 3 kHz bis 300 kHz, Hochpass: 0.3 kHz bis 30 kHz

2.3 Erwartete Reynoldszahlen und Signalfrequenzen

Anhand der zur Verfügung stehenden Leistung der Pumpe und der Geometrie der Apparatur kann an dieser Stelle bereits abgeschätzt werden, welcher Bereich für die Reynoldszahl ungefähr abdeckbar sein wird. Zur Erinnerung:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (20)$$

Umrechnung der Durchflussraten in $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$:

$$\dot{V}_{\min} = 0.5 \text{ L min}^{-1} = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \quad (21)$$

$$\dot{V}_{\max} = 7.5 \text{ L min}^{-1} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \quad (22)$$

Der Querschnitt des Rohres:

$$A = \pi \cdot R^2 = 0.00126 \text{ m}^2 \quad (23)$$

Daraus lassen sich nun die mittleren Geschwindigkeiten für die schwächste und stärkste Pumpeneinstellung bestimmen:

$$v_{m,\min} = \frac{\dot{V}_{\min}}{A} = 0.0066 \text{ m s}^{-1} \quad (24)$$

$$v_{m,\max} = \frac{\dot{V}_{\max}}{A} = 0.099 \text{ m s}^{-1} \quad (25)$$

Womit man für die Reynoldszahlen erhält:

$$Re_{\min} = \frac{\rho \cdot v_{m,\min} \cdot 2R}{\eta} = 264 \quad (26)$$

$$Re_{\max} = \frac{\rho \cdot v_{m,\max} \cdot 2R}{\eta} = 3960 \quad (27)$$

Wobei:

$$\rho : 1000 \text{ kg m}^{-3}$$

$$R : 20 \text{ mm}$$

$$\eta : 1 \text{ mPa s} \quad (\text{Quelle: Kuchling, Tabelle 6})$$

Ebenfalls lassen sich mit den errechneten Geschwindigkeiten $v_{m,\min}$ und $v_{m,\max}$ ungefähre Aussagen zu den zu erwartenden Signalfrequenzen machen. Natürlich werden die Frequenzen noch davon abweichen, abhängig davon, ob man gerade ein Teilchen mit höherer oder tieferer Geschwindigkeit gemessen hat. Es geht hier lediglich um die Größenordnung, sodass der Bandpassfilter jeweils korrekt eingestellt werden kann. Es wurde mit $\varphi = 30^\circ$ gerechnet.

$$\Delta f_{\min} = \frac{2 \sin(\frac{\varphi}{2}) \cdot v}{\lambda} = 10 \text{ kHz} \quad (28)$$

$$\Delta f_{\max} = \frac{2 \sin(\frac{\varphi}{2}) \cdot v}{\lambda} = 156 \text{ kHz} \quad (29)$$

2.4 Ablauf

Wie erwähnt, ist eine korrekte Justierung dieses Versuches für eine erfolgreiche Durchführung von grosser Wichtigkeit. Sie beanspruchte einen beträchtlichen Teil der zur Verfügung stehenden Zeit (beinahe die Hälfte) und soll hier entsprechend auch gut dokumentiert werden.

Die Krux am Ganzen ist, dass die Laserstrahlen sich sauber in der Messleitung kreuzen und anschliessend korrekt in den Detektor geführt werden.

Dazu wurden zuerst an den in Abbildung 14 mit blauen Kreuzen markierten Punkten die Höhe der Laserstrahlen gemessen und mittels der Spiegel (siehe auch Abbildung 15) und der Linse L_1 auf die gleiche Höhe eingestellt (so gut als möglich, dieses Verfahren alleine ist noch nicht genau genug).

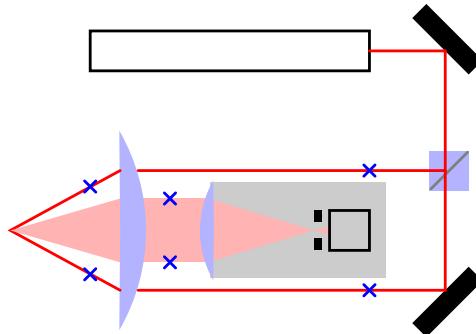


Abbildung 14: Referenzpunkte für Kalibrierung (blau markiert)

Anschliessend wurde benutzt, um die beiden Laserstrahlen auf eine Wand gegenüber der Versuchsanordnung zu projizieren. Dies ermöglichte eine exakte Zusammenführung der Laserstrahlen. Danach wurde sichergestellt, dass die Streuungen und Reflexionen der Strahlen, welche zurück in Richtung Detektor gingen, alle auf gleicher Höhe lagen, indem Höhe und Winkel der Messleitung korrekt eingestellt wurden. Abbildung 16 zeigt diese Strahlen vor ihrer Justierung.

Letzlich wurde überprüft, dass der Kreuzungspunkt der gestreuten Strahlen genau in der Blende (sichtbar in Abbildung 17) lag, und die Blende so weit als möglich geschlossen.

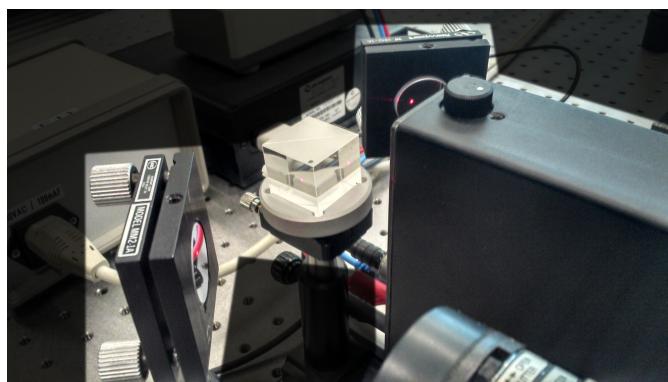


Abbildung 15: Die beiden Spiegel und der Strahlteiler. Die Spiegel können verstellt werden, um die Verläufe der Strahlen aufeinander abzustimmen.

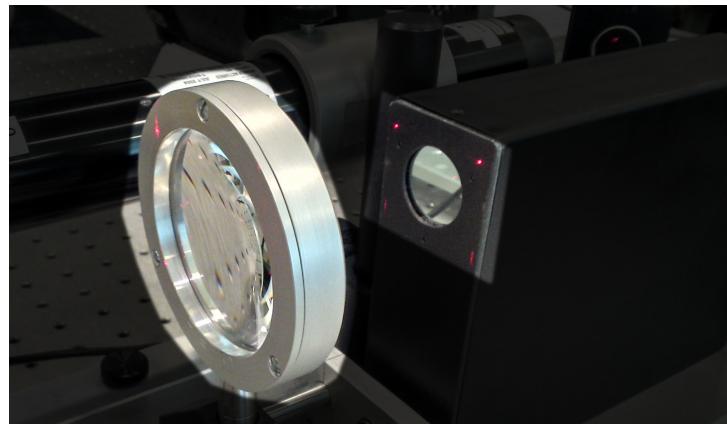


Abbildung 16: Die Linsen L_1 (links, gross) und L_2 (rechts, im schwarzen rechteckigen Rahmen). Ebenfalls sichtbar sind einige Reflexionen der Laserstrahlen am Rahmen von L_2 , bevor sie justiert worden sind. Nach der Justierung liegen alle vier Punkte auf gleicher Höhe.

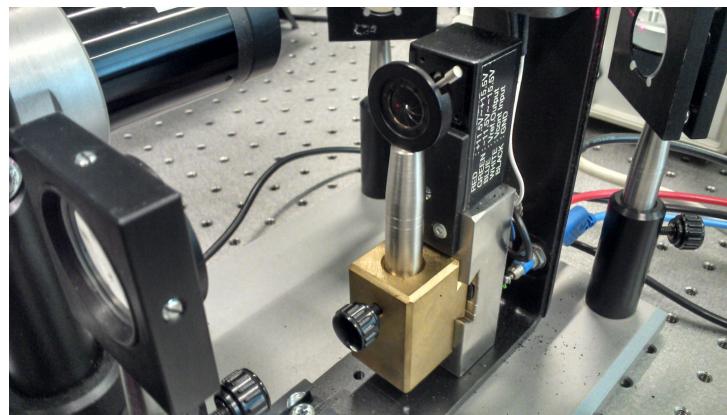


Abbildung 17: Linse L_2 , Blende und Photomultiplier. Die Blende kann verstellt werden, um möglichst nur das vom Strömungsteilchen gestreute Laserlicht in den Photomultiplier zu lassen.

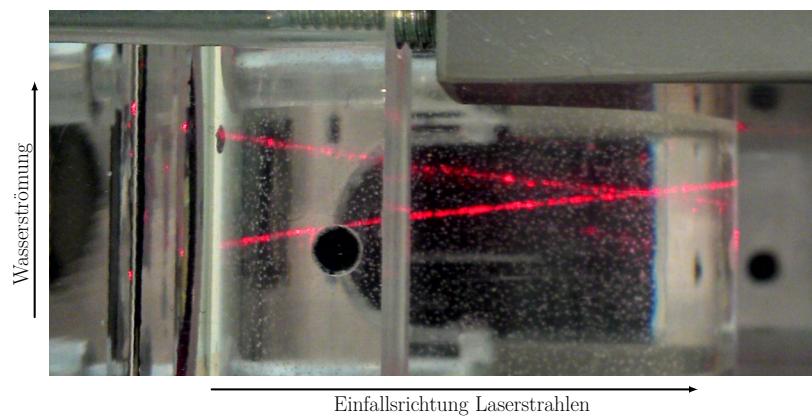


Abbildung 18: Aufnahme der sich kreuzenden Strahlen in der Messleitung. Wasserströmung geht von unten nach oben, die Laserstrahlen treffen von links auf die Messleitung.

Nachdem die Apparatur justiert war, wurden vier Messungen durchgeführt:

- Eine experimentelle Überprüfung der Brennweite von Linse L_1 ,
- das Verhalten der Strömungsgeschwindigkeit auf der Achse der Messleitung bei Durchflussraten zwischen 0.5 L min^{-1} und 7.5 L min^{-1} ,
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 0.5 L min^{-1} (laminarer Fall) und
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 7.5 L min^{-1} (turbulenter Fall).

Zur Auswertung wurde dabei das Oszilloskop benutzt. Es erhielt sowohl das ungefilterte Messsignal direkt vom Photomultiplier (sehr verrauscht) wie auch das gefilterte Signal aus dem Bandpassfilter.

Um den Bandpassfilter korrekt einzustellen zu können, musste natürlich bekannt sein, in welcher Größenordnung sich die zu erwartenden Frequenzen ungefähr befinden würden.

Das Oszilloskop führte am eingehenden Zeitsignal eine Fourier-Zerlegung durch (unterstes Signal in Abbildung 19 auf Seite 16). In diesem Signal wurden dann mittels der beiden Cursor eine obere und untere Limite der bei einer Einstellung (Position des Schnittpunkts der Laserstrahlen in der Messleitung, Flussgeschwindigkeit) auftretenden Frequenzen abgelesen. Zur Auswertung wurde dieses Intervall dann auf eine Streuteilchengeschwindigkeit mit Unsicherheit umgerechnet. Die Methodik ist in Abschnitt 3.2 auf Seite 19 dargelegt, die damit berechneten Resultate sind in den Tabellen 2, (Seite 20), 3 (Seite 23) und 4 (Seite 25) aufgeführt. Ausgewertet wurde mit Python-Scripts; diese sind in Anhang A ab Seite 31 zu finden.

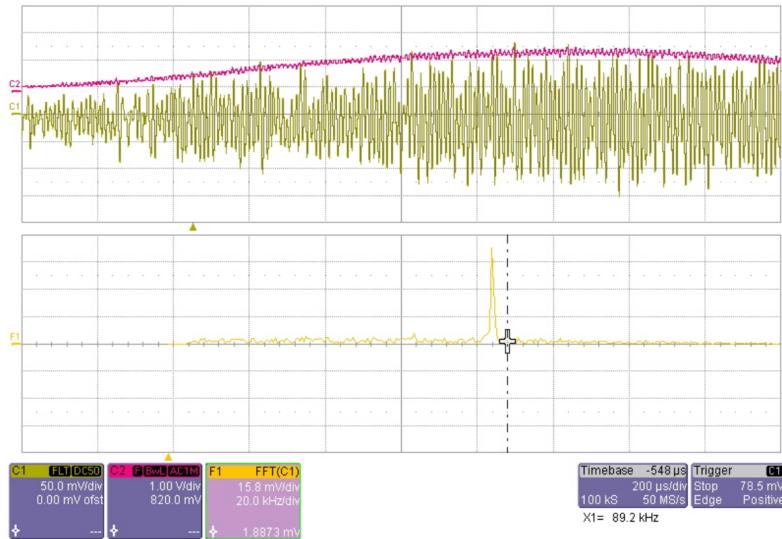


Abbildung 19: Anzeige des Oszilloskops. **C1:** gefiltertes Signal, **C2:** ungefiltertes Signal direkt vom Photomultiplier. Darunter die Fourier-Zerlegung des gefilterten Signals. *Quelle:* Versuchsanleitung

Bei ändernden Einstellungen musste jeweils darauf geachtet werden, den Bandpassfilter entsprechend anzupassen. Geht dies vergessen, werden zwar die Messresultate nicht verfälscht, es macht aber das Erkennen der gesuchten Streu-Ereignisse zunehmend schwierig oder verhindert sie vollkommen, je nach Frequenzbereich.

3 Auswertung

Zuerst wurde die Brennweite von Linse L_1 experimentell überprüft. Anschliessend wurde die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Messrohrs für verschiedene Durchflussraten gemessen. Zuletzt wurden die Strömungsprofile für den laminaren Fall und den turbulenten Fall aufgenommen.

Die erwarteten Verläufe der Strömungsprofile sind in Abbildung 20 dargestellt.

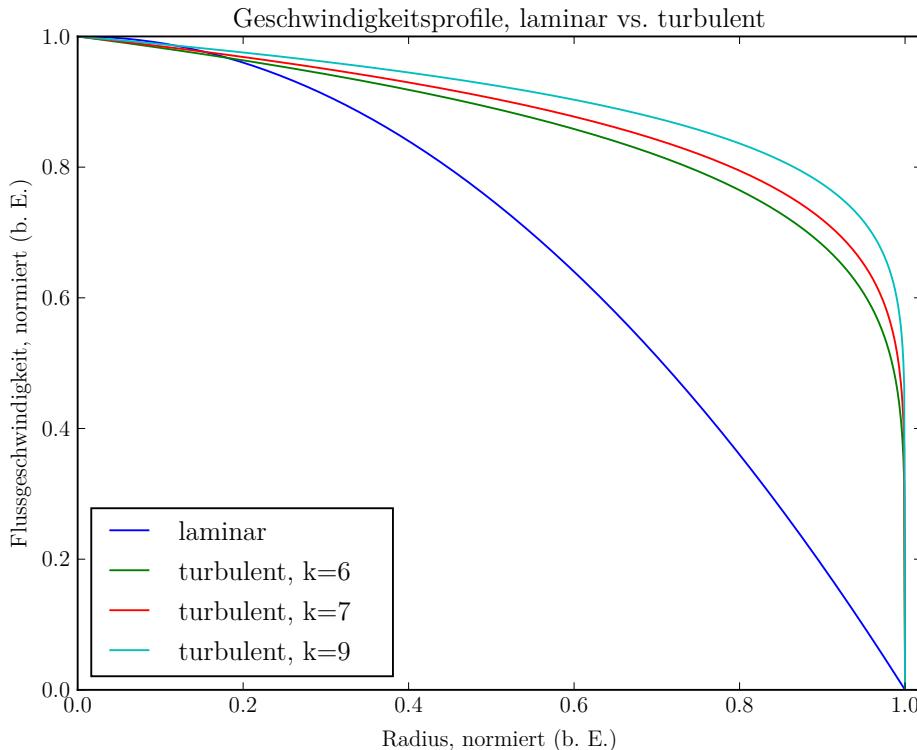


Abbildung 20: Laminares vs. turbulente Strömungsprofile, normiert

$$v(r)_{\text{laminar}} = v_{\max, \text{laminar}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (30)$$

$$v(r)_{\text{turbulent}} = v_{\max, \text{turbulent}} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (31)$$

Wobei:

$v_{\max, \text{laminar}}$: auf 1 normiert

$v_{\max, \text{turbulent}}$: auf 1 normiert

R : auf 1 normiert

k : gemäss Legende

3.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen

Die Brennweite der Linsen sind zwar angegeben, wir wollen uns aber nicht darauf verlassen, und diese experimentell überprüfen. Daraus ergibt sich dann auch der Schnittwinkel φ der Laserstrahlen.

Es wurden die Distanzen d_L zwischen den beiden Strahlen beim Eintreten in die Linse und die Distanz d_f zwischen der Linse und dem Kreuzungspunkt der Laserstrahlen gemessen. Die Bestimmung des Schnittwinkels ist dann nur noch eine Sache von ein wenig Trigonometrie.

Für die Distanzen ergaben sich folgende Werte, mit geschätzten Unsicherheiten:

- $d_L = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
- $d_f = (130 \pm 1) \text{ mm}$

Der halbe Schnittwinkel ergibt sich dann zu:

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{\frac{d_L}{2}}{d_f} \quad (32)$$

Der kleinstmögliche Winkel ergibt sich aus der Kombination von $d_L = 52 \text{ mm}$ und $d_f = 131 \text{ mm}$ und beläuft sich auf $\frac{\varphi}{2} = 11.23^\circ$, der grösstmögliche Winkel korrespondiert mit $d_L = 53 \text{ mm}$ und $d_f = 129 \text{ mm}$ und ergibt $\frac{\varphi}{2} = 11.61^\circ$, was sich zusammenführen lässt auf einen Schnittwinkel von:

$$\varphi = (11.42 \pm 0.19)^\circ \cdot 2 = (22.8 \pm 0.4)^\circ \quad (33)$$

Der Vorgang ist schematisch in Abbildung 21 dargestellt.

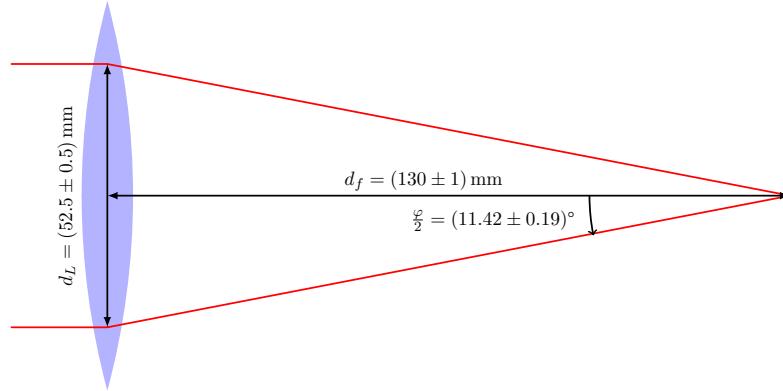


Abbildung 21: Bestimmung des Schnittwinkels der Laserstrahlen aus der Geometrie der Versuchsanordnung. *Beachte:* Da diese Abbildung primär der Illustration der Bestimmung von φ und nicht der akkurate Darstellung der Linse dient, ist hier nicht das gleiche Symbol für die Linse wie in der Versuchsanleitung benutzt worden.

3.2 Strömungsgeschwindigkeit und Unsicherheiten

Gemessen wurden zwar Frequenzen, es sollen in den Regressionen jedoch direkt die zugehörigen Geschwindigkeiten angegeben werden. Da diese Angaben für den Rest dieses Kapitels benötigt werden, werden zur besseren Übersichtlichkeit die nötigen Informationen zur Fehlerrechnung hier aufgeführt anstatt in einem separaten Kapitel im Nachhinein.

Die Flussgeschwindigkeiten können mit der folgenden Formel ermittelt werden:

$$\Delta f = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{c}{\lambda_{Laser}} \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2 \cdot v}{\lambda_{Laser}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (34)$$

Aufgelöst nach v ergibt dies:

$$v = \frac{\Delta f \cdot \lambda_{Laser}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (35)$$

Wobei:

v : Flussgeschwindigkeit des Streuteilchens

Δf : Gemessene Streufrequenz

λ_{Laser} : Wellenlänge des Lasers

φ : Kreuzungswinkel der Laserstrahlen ($(22.8 \pm 0.4)^\circ$ gemäss vorigem Abschnitt)

Es sind hier sowohl Unsicherheiten im Winkel φ wie auch in der gemessenen Frequenz vorhanden. Somit ist für die Bestimmung der Unsicherheit der Teilchengeschwindigkeit die Verwendung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes erforderlich. Zur Erinnerung:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (36)$$

Angewandt auf die Formel der Teilchengeschwindigkeit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f}\Big|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big|_{\bar{\varphi}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2} \quad (37)$$

Mit:

$$\frac{\partial v}{\partial f} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (38)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (39)$$

Ergibt sich somit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Big|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Big|_{\bar{\varphi}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2} \quad (40)$$

Formel 40 und die Messwerte wurden in Python-Scripts ausgewertet, die in Anhang A ab Seite 31 zu finden sind.

3.3 Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung

Das zu diesem Abschnitt gehörende Python-Script ist in Anhang A.3 auf Seite 32 zu finden. Die resultierenden Flussgeschwindigkeiten mit ihren Unsicherheiten sind in Tabelle 2 zu finden.

Tabelle 2: Messwerte für verschiedene Durchflussraten in Rohrmitte.

\dot{V} (L min $^{-1}$)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s $^{-1}$)
0.5	7.07	7.71	7.39	0.32	1.18 ± 0.05
1.01	13.43	14.38	13.905	0.475	2.22 ± 0.08
1.52	17.59	19.77	18.68	1.09	2.99 ± 0.18
2.02	23.19	25.32	24.255	1.065	3.88 ± 0.18
2.5	26.66	30.29	28.475	1.815	4.55 ± 0.30
3.0	30.18	35.09	32.585	2.505	5.22 ± 0.40
3.5	34.85	39.3	37.075	2.225	5.93 ± 0.37
4.0	36.21	43.12	39.665	3.455	6.34 ± 0.56
4.5	40.95	49.48	45.215	4.265	7.23 ± 0.69
5.0	45.51	52.75	49.13	3.62	7.86 ± 0.59
5.5	51.34	58.30	54.82	3.48	8.77 ± 0.57
6.0	57.16	61.91	59.535	2.375	9.52 ± 0.41
6.5	60.78	70.84	65.81	5.03	10.52 ± 0.82
7.0	64.44	72.48	68.46	4.02	10.95 ± 0.67
7.5	67.12	77.42	72.27	5.15	11.56 ± 0.85

Die Werte aus der letzten Spalte wurden anschliessend in QtiPlot eingegeben, zusammen mit den zugehörigen Durchflusswerten.

Wie im Abschnitt 1.2.1 ab Seite 5 erwähnt, liegt die kritische Reynoldszahl für den Fall einer zylindrischen Messleitung bei ungefähr 2000. Will man die für unsere Anordnung zugehörige Strömungsgeschwindigkeit bestimmen, löst man zuerst Formel 10 von Seite 5 nach der mittleren Strömungsgeschwindigkeit auf, und erhält:

$$v_{m,krit} = \frac{Re_{krit} \cdot \eta}{\rho \cdot L} = \frac{Re_{krit} \cdot \eta}{\rho \cdot 2R} = 0.05 \text{ m s}^{-1} \quad (41)$$

Wobei:

$$\begin{aligned} Re_{krit} &: 2000 \\ \eta &: 1 \text{ mPa s} \\ \rho &: 1000 \text{ kg m}^{-3} \\ R &: 20 \text{ mm} \end{aligned}$$

Da $v_m = \frac{\dot{V}}{A}$, kann daraus nun die zugehörige Durchflussrate bestimmt werden:

$$\dot{V}_{krit} = v_{m,krit} \cdot A = 0.000\,063 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \approx 3.78 \text{ L min}^{-1} \quad (42)$$

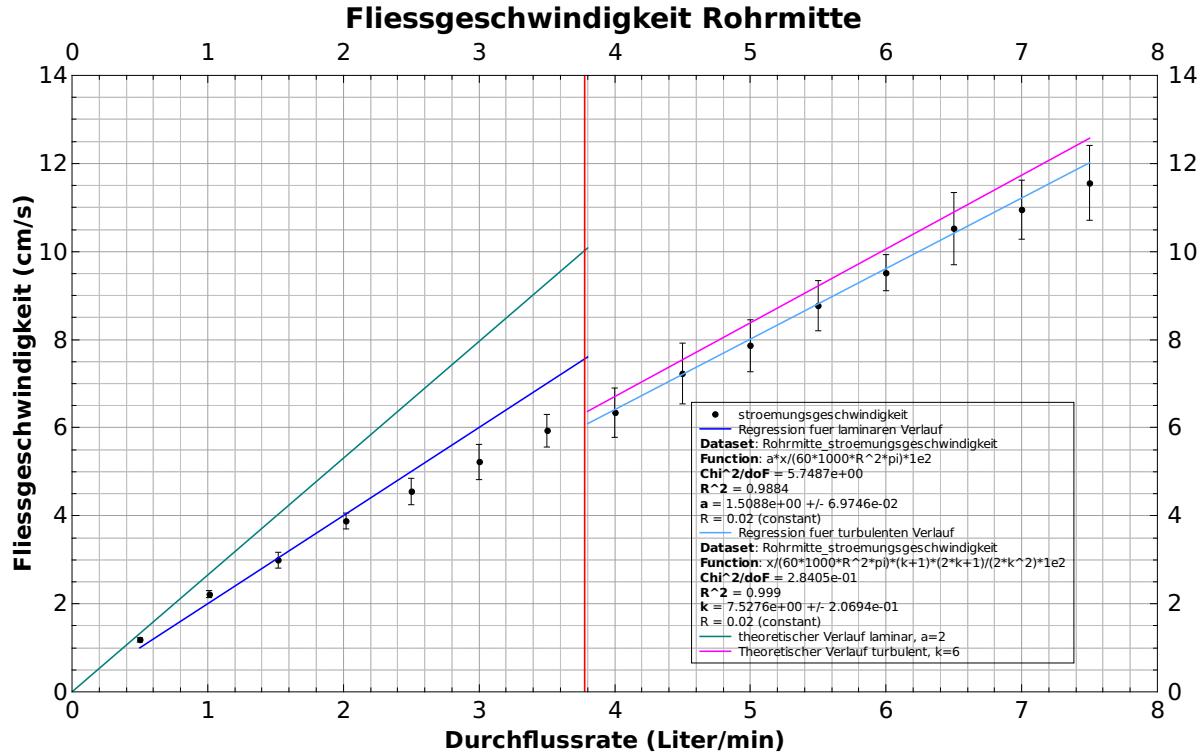


Abbildung 22: Verlauf von Durchflussrate und Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrmitte. Es sind folgende Linien eingezeichnet:

- rot: Durchfluss, welcher der kritischen Reynoldszahl von ca. 2000 entspricht gemäss Gleichung 42
- dunkel-cyan: theoretischer Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall: $v_{\max,\text{laminar}} = 2 \cdot \frac{\dot{V}}{A}$
- blau: Regression für den Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall: $v_{\max,\text{laminar}} = a \cdot \frac{\dot{V}}{A}$, mit Regressionsparameter $a = 1.5088 \pm 0.069746$
- magenta: theoretischer Verlauf der maximalen Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall: $v_{\max,\text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2}$, mit $k = 6$
- cyan: Regression für die maximale Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall: $v_{\max,\text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2}$, mit $k = 7.5276 \pm 0.20694$ als Regressionsparameter

Abbildung 22 stellt die Messpunkte der maximalen Strömungsgeschwindigkeit (Rohrmitte) in Abhängigkeit der Durchflussrate \dot{V} dar. Vergleicht man die dunkel-cyan-farbene Linie (theoretischer Verlauf der maximalen Flussgeschwindigkeit im laminaren Bereich gemäss $v_{\max} = 2 \cdot \frac{\dot{V}}{A}$) mit den Messungen, kann man erkennen, dass die Messungen bei steigender Durchflussrate vom theoretischen Verlauf abzuweichen beginnen.

Die Ursache dafür liegt in der zu kurzen Einlaufstrecke, wie in Abbildung 8 auf Seite 7 dargestellt. Je höher der Durchfluss, um so grösser die Abweichung zwischen theoretischem und effektivem Wert, wie auch in Abbildung 9 auf Seite 8 erkennbar.

Auch beim theoretischen Verlauf im turbulenten Bereich liegen die Messwerte etwas unter den theoretisch erwarteten Werten, jedoch nicht ganz so stark. Ich erkläre dies damit, dass das turbulente Profil eben nicht parabelförmig ist, sondern gegen die Mitte der Leitung nur noch relative flach ansteigt. Somit macht sich die zu kurze Einlaufstrecke vermutlich nicht mehr so stark bemerkbar

Aus Neugier wurden für die beiden Bereiche (laminar, turbulent) jeweils noch eine gewichtete Regression durchgeführt, einmal mit einem Koeffizienten a als Regressionsparameter (im laminaren Fall), und im turbulenten Fall mit k als Regressionsparameter. Als Resultat lieferte QtiPlot:

$$\text{Regressions-Funktion: } v_{\max,\text{laminar}} = a \cdot \frac{\dot{V}}{A} \quad (43)$$

$$\text{Resultat: } a = 1.5088 \pm 0.069746 \quad (44)$$

$$\text{Regressions-Funktion: } v_{\max,\text{turbulent}} = \frac{\dot{V}}{A} \cdot \frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot k^2} \quad (45)$$

$$\text{Resultat: } k = 7.5276 \pm 0.20694 \quad (46)$$

Da sich a mit zunehmendem Durchfluss eigentlich ändert (siehe Abbildung 9, Seite 8^{II}), sollte dieses Regressionsresultat natürlich nicht einfach in eine Gleichung eingesetzt und verwendet werden. Die Regression wurde aber nicht durchgeführt, um diesen Parameter möglichst genau zu bestimmen, sondern um zu veranschaulichen, dass er doch recht beträchtlich vom theoretischen Wert eines perfekt parabolischen Profils abweichen kann, was meines Erachtens gelungen ist.

Der Wert für k ist über dem theoretischen Wert von 6^{III}. Dies deckt sich jedoch zumindest einigermassen mit den Ergebnissen der Regression beim turbulenten Strömungsprofil, wie wir später sehen werden.

^{II}Der in der Regression bestimmte Parameter a taucht in der Abbildung nicht direkt auf, ist jedoch an das Verhältnis von v_{\max} und v_m gebunden, weshalb die Abbildung und der in der Regression bestimmte Parameter trotzdem eng zusammenhängen.

^{III}Wie in den Arbeitsgrundlagen ersichtlich, variiert k bei Änderung der Reynoldszahl im Bereich von mehreren Zehnerpotenzen lediglich um einige Inkremente, daher wird k approximativ über den betrachteten Bereich zur Veranschaulichung in diesem Fall als konstant betrachtet.

3.4 Strömungsprofil im laminaren Fall

Das Vorgehen zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit ist in diesem Falle identisch. Der Unterschied zur obigen Messung liegt darin, dass die Durchflussrate fixiert war und die Position variiert wurde. Das Python-Script für die Resultate aus Tabelle 3 ist in Anhang A.4 auf Seite 33 zu finden.

Tabelle 3: Messwerte für Strömungsprofil im laminaren Fall ($\dot{V} = 0.56 \text{ L min}^{-1}$). $r = 0 \text{ mm}$ ist die Mitte der Messleitung.

Position (mm)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s^{-1})
-13.33	4.51	5.20	4.885	0.345	0.8 ± 0.1
-12.00	5.35	5.93	5.64	0.29	0.90 ± 0.05
-10.67	5.93	6.67	6.30	0.37	1.0 ± 0.1
-9.33	6.72	7.27	6.995	0.275	1.10 ± 0.05
-8	7.31	7.95	7.63	0.32	1.2 ± 0.1
-5.33	8.19	8.65	8.42	0.23	1.30 ± 0.04
-2.67	8.25	8.68	8.465	0.215	1.35 ± 0.04
0	8.39	8.88	8.635	0.245	1.38 ± 0.05
2.67	8.16	8.54	8.35	0.19	1.33 ± 0.04
5.33	7.80	8.36	8.08	0.28	1.29 ± 0.05
8.0	6.87	7.43	7.15	0.28	1.14 ± 0.05
9.33	6.76	7.34	7.05	0.29	1.13 ± 0.05
10.67	6.29	7.02	6.655	0.365	1.06 ± 0.10
12.0	5.76	6.37	6.065	0.305	0.98 ± 0.10
13.33	5.29	5.84	5.565	0.275	0.89 ± 0.05
14.67	4.53	5.18	4.855	0.325	0.78 ± 0.10
16.00	3.69	4.41	4.05	0.36	0.65 ± 0.10
17.33	2.81	3.42	3.115	0.305	0.50 ± 0.05

Als Formel zur Regression wurde Gleichung 11 von Seite 6 benutzt. Fit-Variable war v_{\max} .

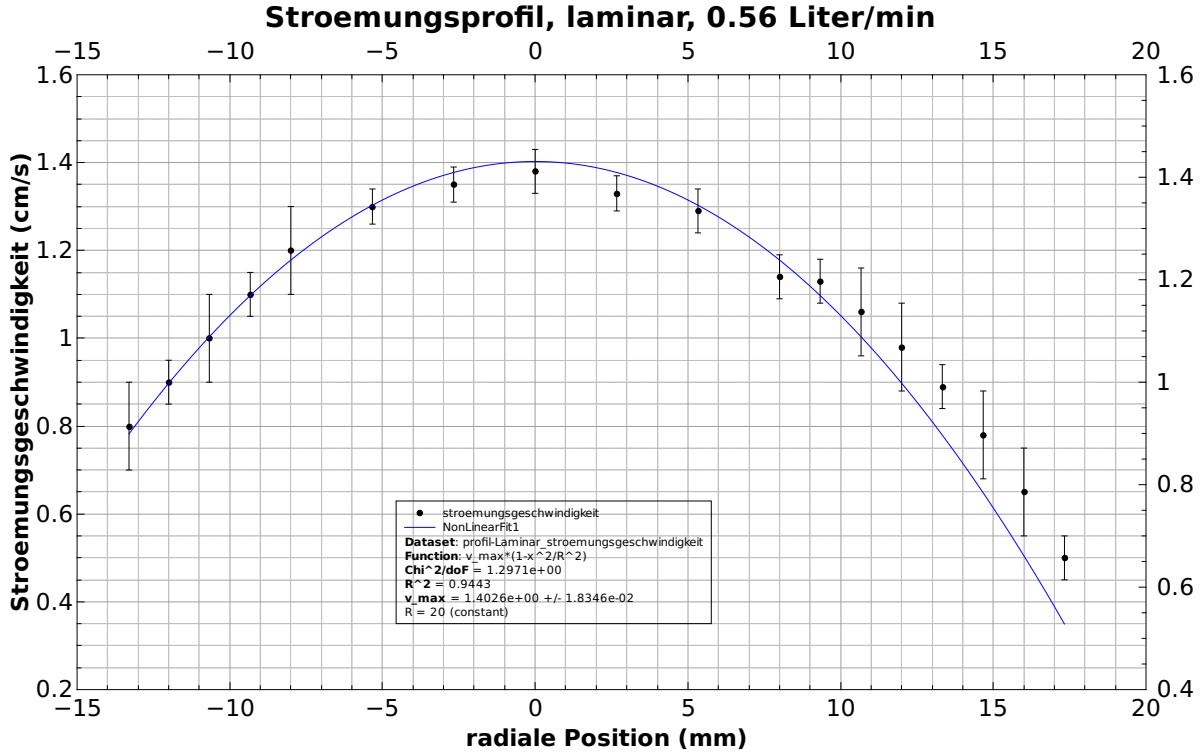


Abbildung 23: Gewichtete Regression an die Messpunkte des Strömungsprofils im laminaren Fall

Die Regression stimmt recht gut mit den Messpunkten überein. Es kann gesehen werden, dass die maximale Geschwindigkeit in der Rohrmitte nicht ganz an den Scheitelpunkt der Parabel heranreicht. Die Begründung dafür liegt darin, dass die Messleitung nicht genügend lang ist, um wirklich einen vollständig laminaren Fluss herausbilden zu können (zu kleine Einlauflänge), wie auch im vorigen Abschnitt erwähnt. Gegen die Rohrmitte wird das Strömungsprofil dadurch gegenüber der theoretischen Parabel abgeflacht. Siehe dazu auch Abbildungen 8 und 9 auf Seiten 7 respektive 8 und die zugehörigen Anmerkungen.

$$v_{\max} = (1.402600 \pm 0.018346) \text{ cm s}^{-1} \quad (47)$$

Es sei hier noch betont, dass eine *gewichtete* Regression gemacht wurde.

3.5 Strömungsprofil im turbulenten Fall

Das Vorgehen ist in diesem Falle identisch wie im vorherigen Abschnitt. Das Python-Script für die Resultate aus Tabelle 4 ist in Anhang A.4 auf Seite 34 zu finden.

Aus Zeitgründen wurden für das turbulente Strömungsprofil weniger Messungen gemacht als für das laminare.

Tabelle 4: Messwerte für Strömungsprofil im turbulenten Fall ($\dot{V} = 7 \text{ L min}^{-1}$). $r = 0 \text{ mm}$ ist die Mitte der Messleitung.

Position (mm)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s^{-1})
-10.67	49.59	63.13	56.36	6.77	9.0 ± 1.1
-8	53.77	67.77	60.77	7.0	9.7 ± 1.1
-5.33	57.74	69.51	63.625	5.885	10.2 ± 1.0
-2.67	54.17	68.96	61.596	7.395	9.8 ± 1.2
0	63.41	71.31	67.36	3.95	10.8 ± 0.7
2.67	61.58	74.02	67.8	6.22	10.8 ± 1.0
5.33	62.86	70.18	66.52	3.66	10.6 ± 0.6
8.0	60.6	69.23	64.915	4.315	10.4 ± 0.7
10.67	55.42	68.84	62.13	6.71	9.9 ± 1.1
12.0	54.53	71.46	62.995	8.465	10.1 ± 1.4
13.33	48.01	67.83	57.92	9.91	9.3 ± 1.6
14.67	47.52	66.09	56.805	9.285	9.1 ± 1.5
16.00	44.77	65.85	55.31	10.54	8.8 ± 1.7
17.33	38.98	66.98	52.98	14	8.5 ± 2.2

Zur Regression und diese Daten wurde Gleichung 15 von Seite 9 herangezogen, mit einer kleinen Modifikation. Da die Funktion in der gegebenen Form ungerade ist und somit für negative Radien nicht das gewünschte Ergebnis liefert, wurde zur Regression noch ein Betrag eingebaut:

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \left|\frac{r}{R}\right|\right)^{\frac{1}{k}} \quad (48)$$

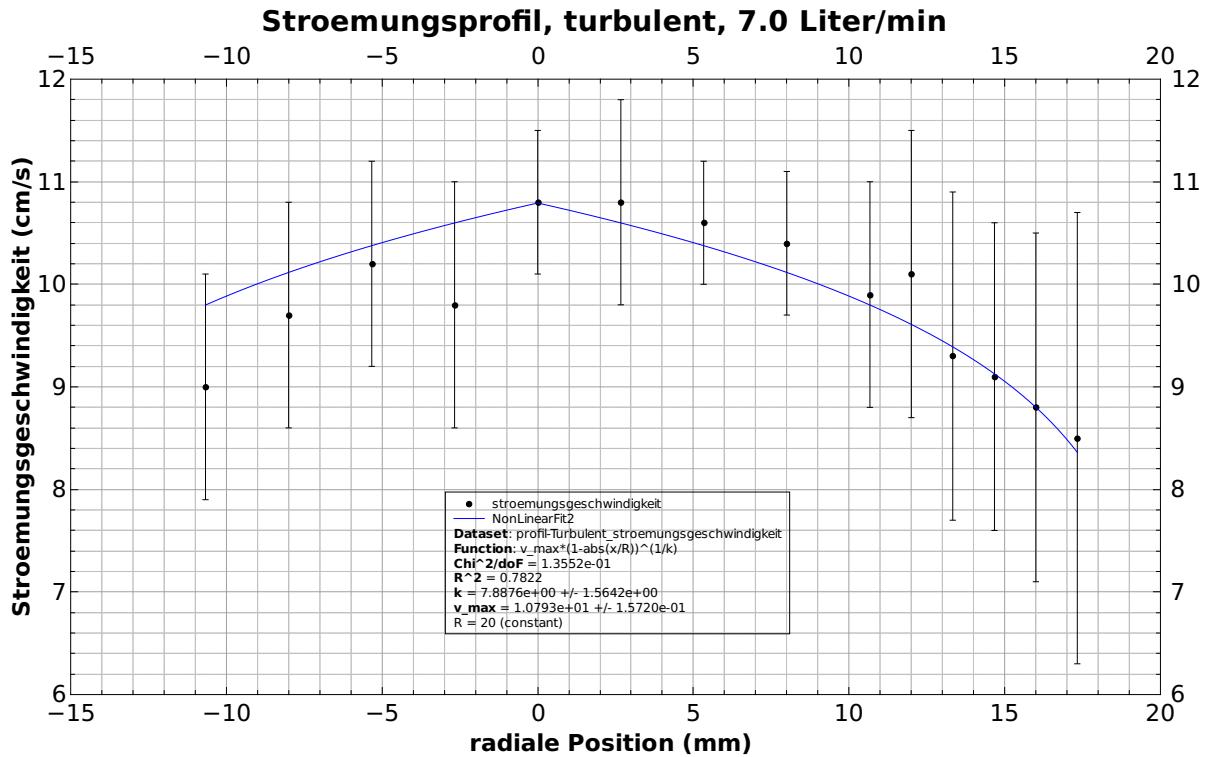


Abbildung 24: Gewichtete Regression für das Strömungsprofil im turbulenten Fall.

Regressionsparameter waren k und v_{\max} . Als Ergebnis liefert QtiPlot:

$$k = 7.8876 \pm 1.5642 \quad (49)$$

$$v_{\max} = (10.7930 \pm 0.1572) \text{ cm s}^{-1} \quad (50)$$

Wie man in Tabelle 4 und Abbildung 24 unschwer erkennen kann, sind die Unsicherheiten bei den Werten teilweise recht gross. Ich erkläre mir dies dadurch, dass das turbulente Strömungsprofil eben nicht so sauber ausgeprägt ist, wie es die Vereinfachung aus Abbildung 10 von Seite 9 allenfalls Glauben macht. Betrachtet man Abbildung 6 auf Seite 5, so kann man erkennen, dass in einer turbulenten Strömung grob gesagt einiges Chaos herrscht (oder eben: Turbulenzen). Die Strömungsgeschwindigkeit (und somit auch die beobachteten Frequenzen) kann deshalb am gleichen Ort über die Zeit bedeutend variieren, auch wenn sie gemittelt als ein Profil angenähert werden kann.

Betrachtet man den Verlauf der Regression in Abbildung 24, kann zumindest auf der rechten Seite jedoch eine ganz passable Übereinstimmung zwischen Messungen und Regression festgestellt werden, und sowohl der Wert für k wie auch für v_{\max} sind einigermassen plausibel (k ist höher als erwartet; gemäss Versuchsanleitung ist $k = 6$ für $Re \approx 4000$, aber die Größenordnung scheint nicht schlecht zu stimmen).

Auch hier wurde eine gewichtete Regression durchgeführt.

4 Fehlerrechnung

Zur Fehlerrechnung kann man nun die mittels Regression bestimmten Werte für v_{\max} und k mittels der Formel 12 von Seite 7 (laminarer Fall) und Formel 16 von Seite 9 (turbulenter Fall) überprüfen.

Dazu werden mittels dieser Formeln die zu den Resultaten aus der Regression gehörenden Volumenströme berechnet und diese anschliessend mit den Angaben auf dem Durchflussmesser verglichen.

Zur Rekapitulation nochmals die mittels Regression bestimmten Werte:

$$v_{\max, \text{laminar}} = (1.402\,600 \pm 0.018\,346) \text{ cm s}^{-1} \quad (51)$$

$$k = 7.8876 \pm 1.5642 \quad (52)$$

$$v_{\max, \text{turbulent}} = (10.7930 \pm 0.1572) \text{ cm s}^{-1} \quad (53)$$

4.1 Laminares Strömungsprofil

Wie in den Arbeitsgrundlagen bei Abbildung 9 auf Seite 8 erwähnt, ist die hier benutzte Messleitung nicht wirklich lang genug, damit sich ein sauberes, perfekt parabolisches Strömungsprofil im laminaren Fall ausbilden kann. Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass für den Fall einer 0.9 m langen Messleitung das Verhältnis $\frac{v_{\max}}{v_m}$ ungefähr 1.95 anstatt 2 ist. Somit modifizieren wir die Formel 12 leicht, und setzen in den Nenner 1.95 statt 2, was folgende Formel ergibt:

$$\bar{V}_{\text{laminar}} = \frac{\pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{v}_{\max}}{1.95} = 0.542 \text{ L min}^{-1} \quad (54)$$

Wobei:

\bar{R} : 20 mm, Radius der Messleitung

\bar{v}_{\max} : 1.4026 cm s⁻¹

Zur Bestimmung der zugehörigen Unsicherheiten wird das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz benötigt. Die allgemeine Formel ist bereits in Gleichung 36 auf Seite 19 aufgeführt. Sie wird nun angewandt auf die Formeln 54 und 57.

Dies ergibt für den Fehler im laminaren Fall:

$$s_{\bar{V}} = \sqrt{a \left(\cdot \pi \cdot \bar{R} \cdot s_{\bar{v}} \right)^2 + b \cdot \left(\pi \cdot \bar{R} \cdot s_{\bar{R}} \cdot v_{\max} \right)^2} = 0.0153 \text{ L s}^{-1} \quad (55)$$

Wobei:

a : 0.262 98

b : 1.051 94

\bar{R} : 20 mm, Radius Messleitung

$s_{\bar{v}}$: 0.018 346 cm s⁻¹, Fehler von v_{\max}

$s_{\bar{R}}$: 0.25 mm (*Quelle*: Versuchsanleitung)

v_{\max} : 1.402 cm s⁻¹

Die Koeffizienten a und b ergeben sich daraus, dass im Nenner 2 durch 1.95 ersetzt wurde. Bei 2 ergäbe sich eine “hübschere” Formel.

Wie auch schon in vorherigen Kapiteln wurde für diese Berechnungen SymPy benutzt, das zugehörige Script ist in Anhang A.6 auf Seite 35 zu finden.

Zusammengefasst also:

$$\dot{V}_{\text{laminar}} = (0.5420 \pm 0.0153) \text{ L min}^{-1} \quad (56)$$

4.2 Turbulentes Strömungsprofil

Der Grundwert für den Durchfluss errechnet sich gemäss:

$$\bar{V}_{\text{turbulent}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{v}_{\max} \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2}{(\bar{k} + 1) \cdot (2\bar{k} + 1)} = 6.792 \text{ L min}^{-1} \quad (57)$$

Wobei:

\bar{v}_{\max} : 10.793 cm s⁻¹, aus Regression

\bar{k} : 7.8876, aus Regression

\bar{R} : 20 mm, aus Versuchsanleitung

Die Anwendung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ist hier ziemlich umständlich. Es muss nach der Geschwindigkeit, dem Radius und k abgeleitet werden. Es wurde auch hier ein SymPy-Script benutzt, zu finden in Anhang A.7 auf Seite 36. Der Fehler des Durchflusses ergibt:

$$s_{\bar{V}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0.304 \text{ L min}^{-1} \quad (58)$$

A , B und C sind dabei definiert als:

$$A = \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot s_{\bar{v}}}{(\bar{k} + 1)(2 \cdot \bar{k} + 1)} \quad (59)$$

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot \bar{R} \cdot \bar{k}^2 \cdot s_{\bar{R}} \cdot \bar{v}_{\max}}{(\bar{k} + 1)(2 \cdot \bar{k} + 1)} \quad (60)$$

$$C = s_{\bar{k}} \cdot \left(-\frac{4 \cdot \pi \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot \bar{v}_{\max}}{(\bar{k} + 1) \cdot (2 \cdot \bar{k} + 1)^2} - \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k}^2 \cdot \bar{v}_{\max}}{(\bar{k} + 1)^2 \cdot (2 \cdot \bar{k} + 1)} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{k} \cdot \bar{v}_{\max}}{(\bar{k} + 1) \cdot (2 \cdot \bar{k} + 1)} \right) \quad (61)$$

Wobei:

\bar{R} : 20 mm

\bar{k} : 7.8876

\bar{v}_{\max} : 10.793 cm s⁻¹

$s_{\bar{v}}$: 0.15720 cm s⁻¹

$s_{\bar{R}}$: 0.25 mm

$s_{\bar{k}}$: 1.572

Zusammengefasst also:

$$\dot{V}_{\text{turbulent}} = (6.792 \pm 0.304) \text{ L min}^{-1} \quad (62)$$

5 Resultate und Diskussion

Zum Vergleich der im Kapitel *Fehlerrechnung* bestimmten Durchflusswerte mit den eingestellten Werten sei hier noch die Unsicherheit des Durchflusssensors berücksichtigt, welche gemäss Versuchsanleitung $\pm 0.01 \text{ L min}^{-1}$ beträgt.

Die Abbildungen 25 und 26 zeigen graphische Vergleiche zwischen eingestellten und experimentell bestimmten Werten, Tabelle 5 fasst die Ergebnisse tabellarisch zusammen.

Tabelle 5: Durchflussraten. Vergleich experimentelle Resultate und Angaben des Durchflusssensors.

Versuch	Experiment(L min^{-1})	Durchflusssensor (L min^{-1})
laminares Strömungsprofil	0.54 ± 0.02	0.56 ± 0.01
turbulentes Strömungsprofil	6.8 ± 0.3	7.00 ± 0.01

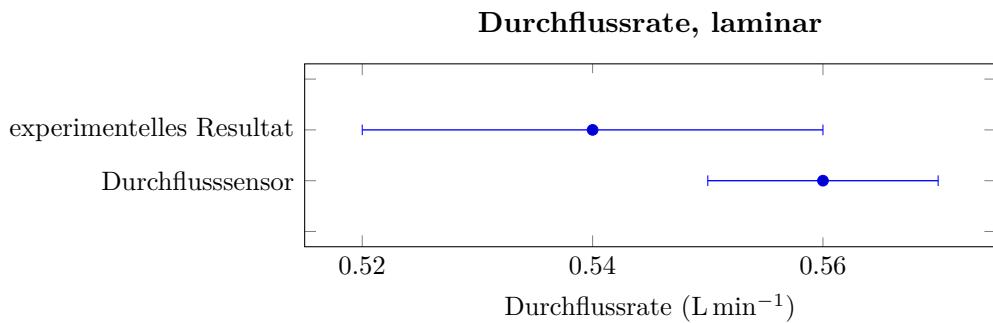


Abbildung 25: Vergleich Durchflusssensor und experimentelles Resultat, laminare Strömung

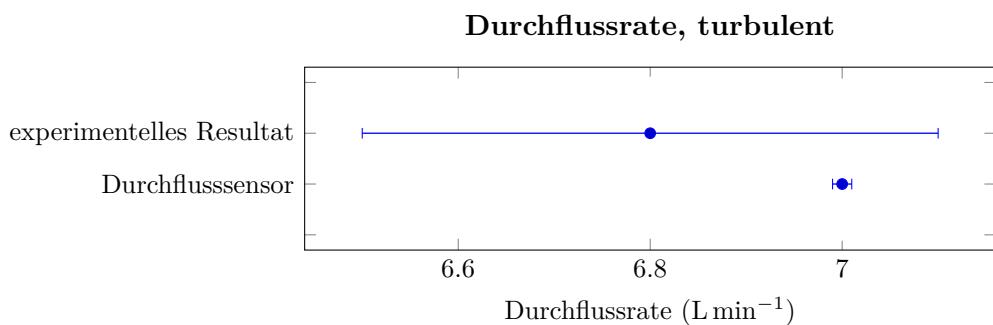


Abbildung 26: Vergleich Durchflusssensor und experimentelles Resultat, turbulente Strömung

In beiden Fällen kann eine ziemlich gute Übereinstimmung von Experiment und Referenzwert festgestellt werden. Alles in Allem beurteile ich den Versuch somit als Erfolg.

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Ort, Datum: _____, _____

Anhang A Python-Code

A.1 Laminare Strömung, symbolische Berechnungen

```

1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import sympy as sp
4
5 v_avg_lam = sp.Symbol('v_avg_lam')
6 v_max = sp.Symbol('v_max')
7 delta_p = sp.Symbol('delta_p')
8 eta = sp.Symbol('eta')
9 r = sp.Symbol('r')
10 l = sp.Symbol('l')
11 R = sp.Symbol('R')
12 Q = sp.Symbol('Q')
13
14 vr_lam = v_max * (1 - r**2 / R**2)
15 Q = sp.integrate(vr_lam * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))
16 v_avg = Q / (R**2 * sp.pi)
17
18 vr_lam_2 = delta_p * R**2 / (4 * eta * l) * (1 - r**2 / R**2)
19 Q2 = sp.integrate(vr_lam_2 * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))
20
21 sp pprint(Q)
22 sp pprint(Q2)
23 sp pprint(v_avg)

```

A.2 Turbulente Strömung, symbolische Berechnungen

```

1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import sympy as sp
4
5 v_max = sp.Symbol('v_max')
6 r = sp.Symbol('r')
7 R = sp.Symbol('R')
8 k = sp.Symbol('k')
9 v_avg_turb = sp.Symbol('v_avg_turb')
10 vr_turb = sp.Symbol('vr_turb')
11 Q_turb = sp.Symbol('Q_turb')
12
13
14 # Average flow speed, turbulent
15 vr_turb = v_max * (1 - r / R)**(1 / k)
16 Q_turb = (
17     sp.integrate(vr_turb * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R))).doit()
18 v_avg_turb = (1 / (sp.pi * R**2)) * sp.integrate(vr_turb * 2 * sp.pi * r, (r, 0, R)).doit()
19 sp pprint(Q_turb)
20 sp pprint(v_avg_turb)

```

A.3 Geschwindigkeit in Rohrmitte

```

1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import numpy as np
4
5 # Known Parameters
6 lambd = 632.8e-9
7 phi_avg = 22.82 * np.pi / 180;
8 phi_err = 0.38 * np.pi / 180;
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     7.07e3, 13.43e3, 17.59e3,
13     23.19e3, 26.66e3, 30.18e3,
14     34.85e3, 36.21e3, 40.95e3,
15     45.51e3, 51.34e3, 57.16e3,
16     60.78e3, 64.44e3, 67.12e3])
17 f_high = np.array([
18     7.71e3, 14.38e3, 19.77e3,
19     25.32e3, 30.29e3, 35.09e3,
20     39.3e3, 43.12e3, 49.48e3,
21     52.75e3, 58.3e3, 61.91e3,
22     70.84e3, 72.48e3, 77.42e3])
23 idx = np.arange(f_low.size)
24
25 # Calculate average frequencies and errors
26 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
27 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
28
29 # Calcualte average flow velocities
30 v_avg = f_avg[idx] * lambd / (2 * np.sin(phi_avg/2))
31
32 # Gaussian law of error propagation
33 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lambd/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ((-f * lambd *
34             np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
35 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
36
37 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
38 v = v.transpose()
39 print(v)

```

A.4 Strömungsprofile im laminaren Fall

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  # Known Parameters
6  lambd = 632.8e-9
7  phi_avg = 22.82 * np.pi / 180
8  phi_err = 0.38 * np.pi / 180
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     4.51e3, 5.35e3, 5.93e3,
13     6.72e3, 7.31e3, 8.19e3,
14     8.25e3, 8.39e3, 8.16e3,
15     7.80e3, 6.87e3, 6.76e3,
16     6.29e3, 5.76e3, 5.29e3,
17     4.53e3, 3.69e3, 2.81e3])
18 f_high = np.array([
19     5.20e3, 5.93e3, 6.67e3,
20     7.27e3, 7.95e3, 8.65e3,
21     8.68e3, 8.88e3, 8.54e3,
22     8.36e3, 7.43e3, 7.34e3,
23     7.02e3, 6.37e3, 5.84e3,
24     5.18e3, 4.41e3, 3.42e3])
25 idx = np.arange(f_low.size)
26
27 # Calculate average frequencies and errors
28 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
29 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
30
31 # Calcualte average flow velocities
32 v_avg = f_avg[idx] * lambd / (2 * np.sin(phi_avg/2))
33
34 # Gaussian law of error propagation
35 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lambd/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ( (-f * lambd *
36     np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
37 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
38
39 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
40 v = v.transpose()
41 print(v)

```

A.5 Strömungsprofile im turbulenten Fall

```

1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import numpy as np
4
5 # Known Parameters
6 lambd = 632.8e-9
7 phi_avg = 22.82 * np.pi / 180;
8 phi_err = 0.38 * np.pi / 180;
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([
12     49.59e3, 53.77e3, 57.74e3,
13     54.17e3, 63.41e3, 61.58e3,
14     62.86e3,           60.60e3,
15     55.42e3, 54.53e3, 48.01e3,
16     47.52e3, 44.77e3, 38.98e3])
17 f_high = np.array([
18     63.13e3, 67.77e3, 69.51e3,
19     68.96e3, 71.31e3, 74.02e3,
20     70.18e3,           69.23e3,
21     68.84e3, 71.46e3, 67.83e3,
22     66.09e3, 65.85e3, 66.98e3])
23 idx = np.arange(f_low.size)
24
25 # Calculate average frequencies and errors
26 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
27 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
28
29 # Calcualte average flow velocities
30 v_avg = f_avg[idx] * lambd / (2 * np.sin(phi_avg/2))
31
32 # Gaussian law of error propagation
33 s_gauss = lambda f,phi,s_f,s_phi: np.sqrt((lambd/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ((-f * lambd *
34             np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
35 s_v = s_gauss(f_avg[idx],phi_avg,f_err[idx],phi_err)
36
37 v = np.array([[v_avg],[s_v]])
38 v = v.transpose()
39 print(v)

```

A.6 Fehlerrechnung laminares Strömungsprofil

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import sympy as sp
4
5 Q      = sp.Symbol('Q')
6 s_Q    = sp.Symbol('s_Q')
7 R      = sp.Symbol('R')
8 s_R    = sp.Symbol('s_R')
9 v_max = sp.Symbol('v_max')
10 s_v   = sp.Symbol('s_v')
11
12 Q = sp.pi * R**2 * v_max / 1.95
13
14 s_Q = sp.sqrt( (sp.diff(Q,v_max) * s_v)**2 + (sp.diff(Q,R) * s_R)**2)
15
16 sp.pprint(Q)
17 sp.pprint(s_Q)
18
19 radius      = 20e-3
20 s_radius    = 0.25e-3
21 v_max_exper = 1.4026e-2
22 s_v_max_exper = 1.8346e-4
23
24 Q_evalfunc  = sp.lambdify((v_max, R), Q, modules=['numpy'])
25 s_Q_evalfunc = sp.lambdify((v_max, s_v ,R ,s_R), s_Q, modules=['numpy'])
26 sp.pprint(Q_evalfunc(v_max_exper, radius) * 60 * 1e3)
27 sp.pprint(s_Q_evalfunc(v_max_exper, s_v_max_exper, radius, s_radius) * 60 * 1e3)
```

A.7 Fehlerrechnung turbulentes Strömungsprofil

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import sympy as sp
4
5  Q      = sp.Symbol('Q')
6  s_Q    = sp.Symbol('s_Q')
7  R      = sp.Symbol('R')
8  k      = sp.Symbol('k')
9  s_k    = sp.Symbol('s_k')
10 s_R   = sp.Symbol('s_R')
11 v_max = sp.Symbol('v_max')
12 s_v   = sp.Symbol('s_v')
13
14 Q = 2 * sp.pi * v_max * R**2 * k**2 / ((k + 1)*(2*k+1))
15
16 s_Q = sp.sqrt( (sp.diff(Q,v_max) * s_v)**2 + (sp.diff(Q,R) * s_R)**2 + (sp.diff(Q,k) * s_k)**2)
17
18 sp pprint(Q)
19 sp pprint(s_Q)
20
21 radius      = 20e-3
22 s_radius    = 0.25e-3
23 k_exper     = 7.8876
24 s_k_exper   = 1.5642
25 v_max_exper = 10.793e-2
26 s_v_max_exper = 1.5720e-3
27
28 Q_evalfunc  = sp.lambdify((v_max, R, k), Q, modules=['numpy'])
29 s_Q_evalfunc = sp.lambdify((v_max, s_v ,R ,s_R ,k ,s_k), s_Q, modules=['numpy'])
30 sp pprint(Q_evalfunc(v_max_exper, radius, k_exper) * 60 * 1e3)
31 sp pprint(s_Q_evalfunc(v_max_exper, s_v_max_exper, radius, s_radius, k_exper, s_k_exper) * 60 * 1e3)

```

Anhang B Messprotokolle