

O12 – Laser Doppler Anometrie

28.04.2016

Versuchsleiter: Raphael Frey
Assistent: Mario Häsler

Inhaltsverzeichnis

1	Arbeitsgrundlagen	1
1.1	Messprinzip	1
1.2	Grundlagen aus der Fluid-Dynamik	3
1.2.1	Vorbereitung auf Messaufgaben	3
2	Durchführung	6
2.1	Versuchsanordnung	6
2.2	Messgeräte	8
2.3	Ablauf	9
3	Auswertung	12
3.1	Schnittwinkel der Laserstrahlen	12
3.2	Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung	13
3.3	Strömungsprofil im laminaren Fall	14
3.4	Strömungsprofil im turbulenten Fall	14
4	Fehlerrechnung	15
5	Resultate und Diskussion	16
Anhang A Python-Code		18
A.1	Geschwindigkeit in Rohrmitte	18

Versionsgeschichte

27.04.2016 Version 0.1

1 Arbeitsgrundlagen

In diesem Versuch kommen verschiedene Bereiche aus der Physik zusammen, primär Fluid-Dynamik und Optik. Entsprechend ergibt sich auch die Gliederung dieses Kapitels.

1.1 Messprinzip

Das Verfahren nutzt den optischen Dopplereffekt, um die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid zu detektieren. Trifft ein Lichtstrahl der Frequenz f auf ein bewegtes Objekt, unterscheidet sich die vom Objekt detektierte Frequenz f_1 ein wenig von der vom Sender emittierten Frequenz f_0 .

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta_1\right) \quad (1)$$

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit, \vec{e} ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahls und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes ist. Wird der Lichtstrahl am bewegten Objekt gestreut und anschliessend von einem Empfänger detektiert, ergibt sich für diesen die Frequenz f_2 :

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c}\right) \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (2)$$

\vec{a} ist dabei ein Einheitsvektor in Ausfallsrichtung des gestreuten Strahls. Die Konfiguration ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt.

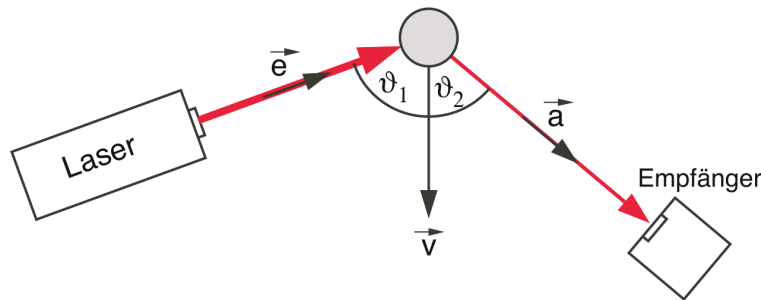


Abbildung 1: Dopplereffekt mit stationärem Sender, bewegtem Streuer und stationärem Detektor.

Quelle: Versuchsanleitung

Da bei technischen Geschwindigkeiten das Verhältnis $\frac{v}{c}$ sehr klein ist, ergeben sich unter solchen Umständen lediglich minime Unterschiede in den Frequenzen f_0 , f_1 und f_2 . Eine präzise Messung der Frequenzunterschiede ist somit enorm schwierig, weshalb man sich eines Zwei-Strahl-Verfahrens bedient. Da die beiden Teilstrahlen dabei in unterschiedlichen Winkeln ϑ_1 (vgl. Formel 1) auf das streuende Teilchen treffen, erfahren sie unterschiedliche Doppler-Verschiebungen ihrer Frequenzen.

Überlagert man nun die beiden Teilstrahlen in einem Detektor, ergibt sich eine Schwebung, deren Frequenz bedeutend tiefer als f_0 ist, und somit verhältnismässig gut detektiert werden kann.

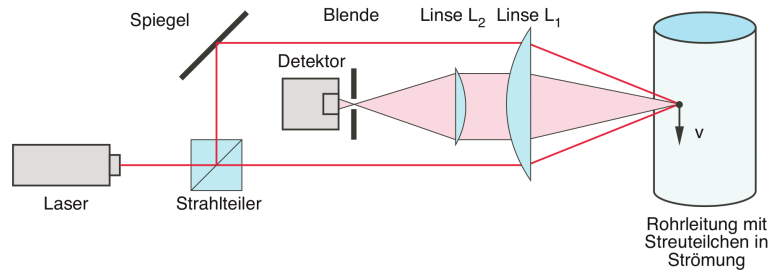


Abbildung 2: Zwei-Strahl-Anordnung. *Quelle:* Versuchsanleitung

Eine häufig verwendete Konfiguration ist in Abbildung 2 zu sehen.

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl auf zwei Strahlen auf und ein Spiegel sorgt dafür, dass zwei parallele Strahlen entstehen, die anschliessen durch eine Linse L_1 mit Brennweite f_1 wieder zusammengeführt werden. Fliesst ein Streuteilchen durch diesen Schnittpunkt, ergeben sich für die beiden Teilstrahlen zwei unterschiedliche Frequenzen aufgrund des Dopplereffekts:

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (3)$$

$$f_2 = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (4)$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Die beiden Wellenzüge werden anschliessend in einem einzelnen Empfänger zusammengeführt. Die durch diese Überlagerung erzeugte Schwebung errechnet sich nach einigen trigonometrischen Umformungen zu (beachte, dass beide Signale die gleiche Amplitude haben, was die Sache etwas vereinfacht):

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = 2A \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (6)$$

1.2 Grundlagen aus der Fluid-Dynamik

1.2.1 Vorbereitung auf Messaufgaben

3.1 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im laminaren Fall

fix: avg over flaeche

$$\frac{v(r)}{v_{max}} = \frac{1}{v_{max} \cdot R} \cdot \int_0^R v(r) \, dr = \frac{1}{R} \cdot \int_0^R 1 - \frac{r^2}{R^2} \, dr = \frac{1}{2} \quad (7)$$

3.2 – Zusammenhang zwischen maximaler und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit im turbulenten Fall:

$$v(r) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (8)$$

$$v_m = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (9)$$

$$\frac{v_m}{v_{max}} = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot r \, dr = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1) \cdot (2k+1)} \quad (10)$$

3.3 – Vergleich von laminarem und turbulentem Strömungsprofil

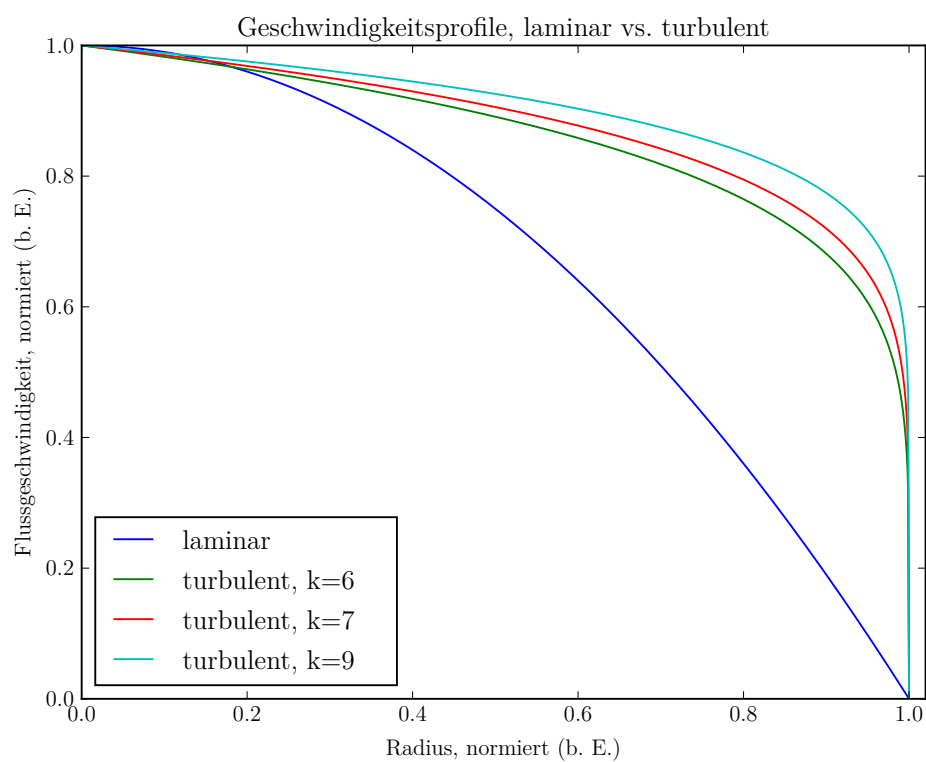


Abbildung 3: Laminares vs. turbulente Strömungsprofile, normiert

3.4 – Volumenstrom und Rohrradius bei gleichem Druckgefälle (via Sympy)

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \quad (11)$$

3.5 – Reynoldszahlen

$$Re = \frac{\rho \cdot v_m \cdot L}{\eta} \quad (12)$$

$$\dot{V}_{min} = 0.5 \text{ L min}^{-1} = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (13)$$

$$\dot{V}_{max} = 7.5 \text{ L min}^{-1} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

$$A = \pi \cdot R^2 = 0.00126 \text{ m}^2 \quad (15)$$

$$v_{m,min} = \frac{\dot{V}_{min}}{A} = 0.0066 \text{ m s}^{-1} \quad (16)$$

$$v_{m,max} = \frac{\dot{V}_{max}}{A} = 0.099 \text{ m s}^{-1} \quad (17)$$

$$Re_{min} = \frac{\rho \cdot v_{m,min} \cdot 2R}{\eta} = 264 \quad (18)$$

$$Re_{max} = \frac{\rho \cdot v_{m,max} \cdot 2R}{\eta} = 3960 \quad (19)$$

$$\Delta f = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot v}{\lambda} = \{13.11 \text{ Hz}, 197.5 \text{ Hz}\} \text{ für } \varphi = 30^\circ \quad (20)$$

2 Durchführung

Da ein Grossteil dieses Versuch in der korrekten Justierung und Durchführung besteht, ist dieses Kapitel etwas umfangreicher als üblich.

2.1 Versuchsanordnung

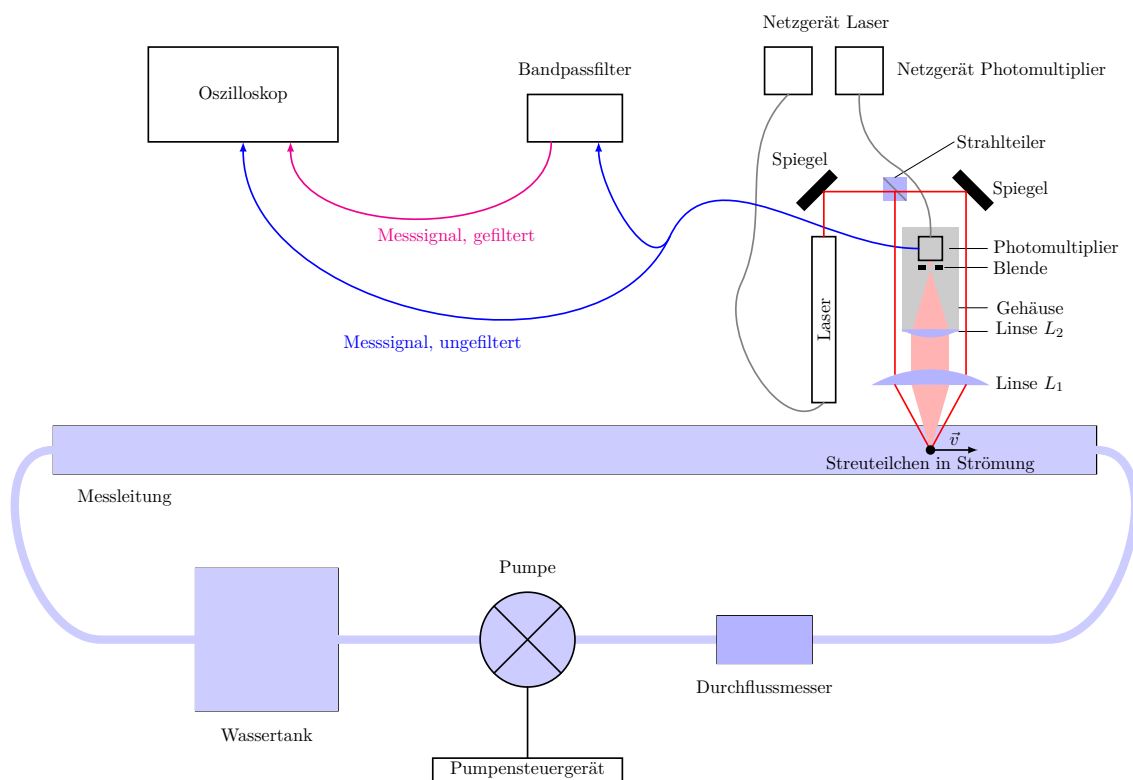


Abbildung 4: Versuchsanordnung, schematisch

Grundsätzlich folgt der Versuchsaufbau den in den Arbeitsgrundlagen beschriebenen Angaben. Die gesamte Anordnung ist schematisch in Abbildung 4 dargestellt, Abbildung 5 ist die entsprechende photographische Dokumentation. Abbildung 6 zeigt einen anderen Blickwinkel auf die Apparaturen.

Um Überlastung durch Umgebungslicht zu verhindern, ist der Photomultiplier zusammen mit der Blende und der Linse L_2 in einem Gehäuse eingelassen. Um die Blende einzustellen und die Lage der Laserstrahlen zu überprüfen, kann dieses abgenommen werden, es sollte aber bei Aktivierung des Detektors montiert sein. Der Detektor wird zwar nicht sofort zerstört, falls er ohne Gehäuse eingeschaltet wird, der Vorgang ist aber der Lebensdauer des Geräts nicht zuträglich.

Das Gehäuse kann in den Abbildungen 5 und 6 gesehen werden.

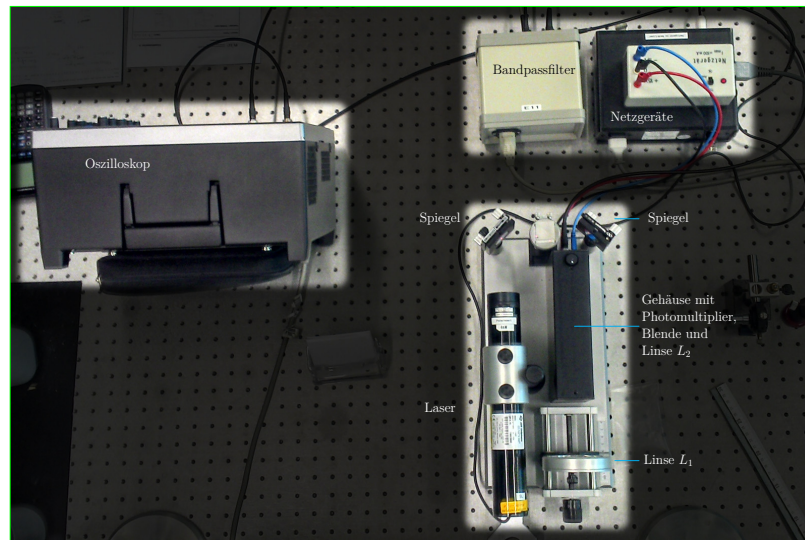


Abbildung 5: Versuchsanordnung, Vogelperspektive. Anordnung ist grösstenteils mit dem Schema aus Abbildung 4 identisch.

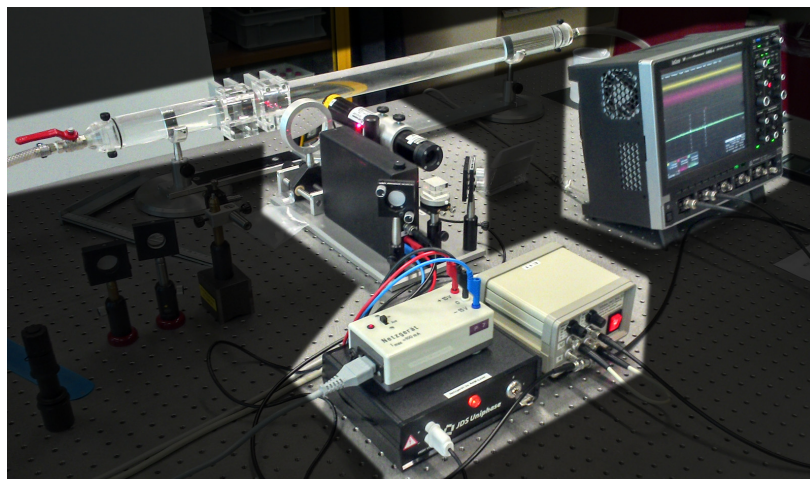


Abbildung 6: Versuchsanordnung, andere Perspektive. Messleitung Sichtbar im Hintergrund.

2.2 Messgeräte

Tabelle 1: Geräteliste

GERÄT	TYP
Oszilloskop	LeCroy WaveRunner 64MXi-A
Laser	JDS Uniphase 1122P, 4 mW, polarisiert, $\lambda = 632.8$ nm
Pumpe	
Durchflussmesser	
Detektor	Hamamatsu H9656-02 Photomultiplier
Linse L_1	
Linse L_2	
Messleitung	Plexiglasrohr, Innendurchmesser (40.0 ± 0.5) mm
Bandpassfilter	Tiefpass: 3 kHz bis 300 kHz, Hochpass: 0.3 kHz bis 30 kHz

2.3 Ablauf

Wie erwähnt, ist eine korrekte Justierung dieses Versuches für eine erfolgreiche Durchführung von grosser Wichtigkeit. Sie beanspruchte einen beträchtlichen Teil der zur Verfügung stehenden Zeit (beinahe die Hälfte) und soll hier entsprechend auch gut dokumentiert werden.

Die Krux am Ganzen ist, dass die Laserstrahlen sich sauber in der Messleitung kreuzen und anschliessend korrekt in den Detektor geführt werden.

Dazu wurden zuerst an den in Abbildung 7 mit blauen Kreuzen markierten Punkten die Höhe der Laserstrahlen gemessen und mittels der Spiegel (siehe auch Abbildung 8) und der Linse L_1 auf die gleiche Höhe eingestellt (so gut als möglich, dieses Verfahren alleine ist noch nicht genau genug).

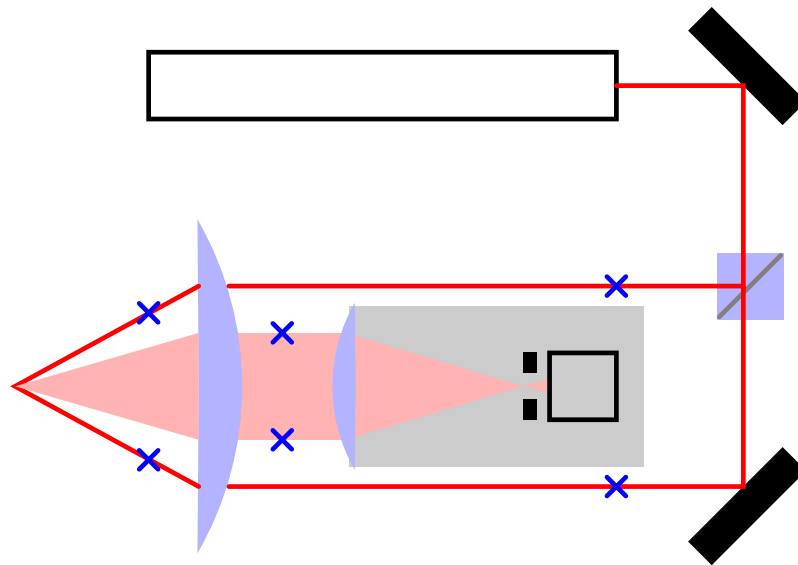


Abbildung 7: Referenzpunkte für Kalibrierung (blau markiert)

Anschliessend wurde benutzt, um die beiden Laserstrahlen auf eine Wand gegenüber der Versuchsanordnung zu projizieren. Dies ermöglichte eine exakte Zusammenführung der Laserstrahlen. Danach wurde sichergestellt, dass die Streuungen und Reflexionen der Strahlen, welche zurück in Richtung Detektor gingen, alle auf gleicher Höhe lagen, indem Höhe und Winkel der Messleitung korrekt eingestellt wurden. Abbildung 9 zeigt diese Strahlen vor ihrer Justierung.

Letzlich wurde überprüft, dass der Kreuzungspunkt der gestreuten Strahlen genau in der Blende (sichtbar in Abbildung 10) lag, und die Blende so weit als möglich geschlossen.

Die Kreuzung der Laserstrahlen in der Messleitung kann in Abbildung 11 gesehen werden.

Nachdem die Apparatur justiert war, wurden vier Messungen durchgeführt:

- Eine experimentelle Überprüfung der Brennweite von Linse L_1 ,
- das Verhalten der Strömungsgeschwindigkeit auf der Achse der Messleitung bei Durchflussraten zwischen 0.5 L min^{-1} und 7.5 L min^{-1} ,
- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 0.5 L min^{-1} (laminarer Fall) und

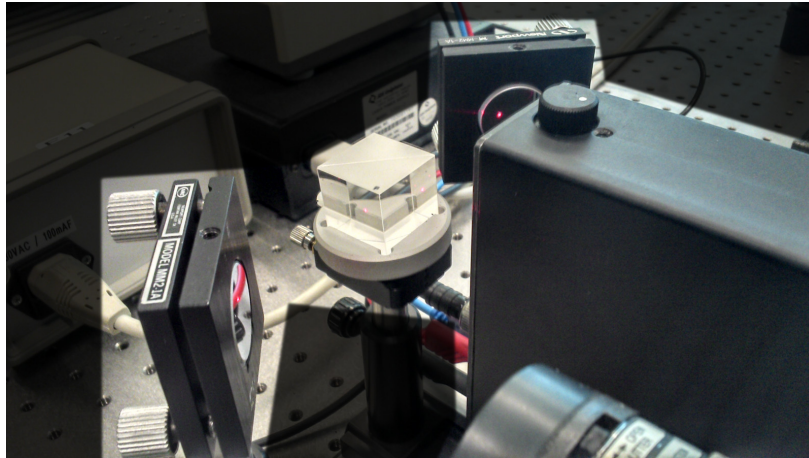


Abbildung 8: Die beiden Spiegel und der Strahlteiler. Die Spiegel können verstellt werden, um die Verläufe der Strahlen aufeinander abzustimmen.

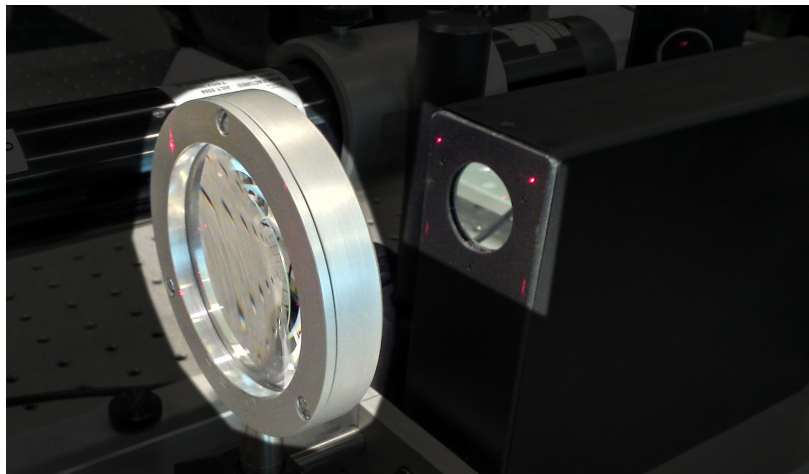


Abbildung 9: Die Linsen L_1 (links, gross) und L_2 (rechts, im schwarzen rechteckigen Rahmen). Ebenfalls sichtbar sind einige Reflexionen der Laserstrahlen am Rahmen von L_2 , bevor sie justiert worden sind. Nach der Justierung liegen alle vier Punkte auf gleicher Höhe.

- das Geschwindigkeitsprofil über den gesamten Querschnitt der Messleitung bei 7.5 L min^{-1} (turbulenter Fall).

Zur Auswertung wurde dabei das Oszilloskop benutzt. Es erhielt sowohl das ungefilterte Messsignal direkt vom Photomultiplier (sehr verrauscht) wie auch das gefilterte Signal aus dem Bandpassfilter.

Um den Bandpassfilter korrekt einstellen zu können, musste natürlich bekannt sein, in welcher Größenordnung sich die zu erwartenden Frequenzen ungefähr befinden würden.

Das Oszilloskop führte am eingehenden Zeitsignal eine Fourier-Zerlegung durch (unterstes Signal in Abbildung). In diesem Signal wurden dann mittels der beiden Cursor eine obere und

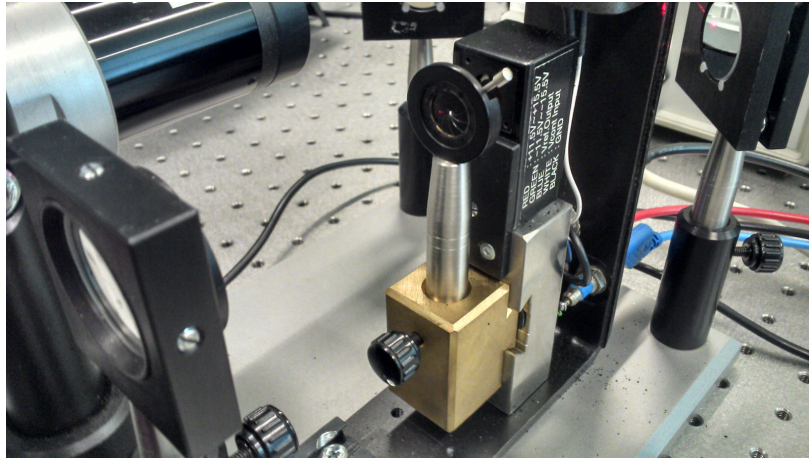


Abbildung 10: Linse L_2 , Blende und Photomultiplier. Die Blende kann verstellt werden, um möglichst nur das vom Strömungsteilchen gestreute Laserlicht in den Photomultiplier zu lassen.

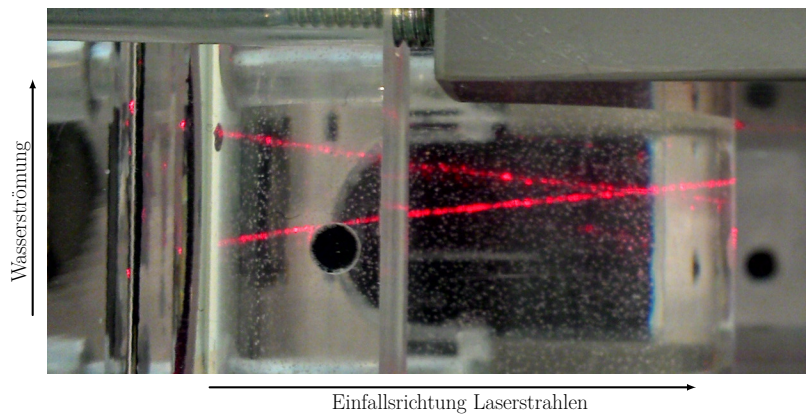


Abbildung 11: Aufnahme der sich kreuzenden Strahlen in der Messleitung. Wasserströmung geht von unten nach oben, die Laserstrahlen treffen von links auf die Messleitung.

untere Limite der bei einer Einstellung (Position des Schnittpunkts der Laserstrahlen in der Messleitung, Flussgeschwindigkeit) auftretenden Frequenzen abgelesen. Zur Auswertung wird aus diesen der Mittelwert mit Unsicherheit gebildet (siehe Abschnitt. auf Seite).

Bei ändernden Einstellungen musste jeweils darauf geachtet werden, den Bandpass entsprechend anzupassen. Geht dies vergessen, werden zwar die Messresultate nicht verfälscht, es macht aber das Erkennen der gesuchten Streu-Ereignisse zunehmend schwierig oder verhindert sie vollkommen, je nach Frequenzbereich.

3 Auswertung

Zuerst wurde die Brennweite von Linse L_1 experimentell überprüft. Anschliessend wurde die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Messohres für verschiedene Durchflussraten gemessen. Zuletzt wurden die Strömungsprofile für den laminaren Fall und den turbulenten Fall aufgenommen.

3.1 Schnittwinkel der Laserstrahlen

Die Brennweite der Linsen sind zwar angegeben, wir wollen uns aber nicht darauf verlassen, und diese experimentell überprüfen. Daraus ergibt sich dann auch der Schnittwinkel φ der Laserstrahlen.

Es wurden die Distanzen d_L zwischen den beiden Strahlen beim Eintreten in die Linse und die Distanz d_f zwischen der Linse und dem Kreuzungspunkt der Laserstrahlen gemessen. Die Bestimmung des Schnittwinkels ist dann nur noch eine Sache von ein wenig Trigonometrie.

Für die Distanzen ergaben sich folgende Werte, mit geschätzten Unsicherheiten:

- $d_L = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
- $d_f = (130 \pm 1) \text{ mm}$

Der halbe Schnittwinkel ergibt sich dann zu:

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{\frac{d_L}{2}}{d_f} \quad (21)$$

Der kleinstmögliche Winkel ergibt sich aus der Kombination von $d_L = 52 \text{ mm}$ und $d_f = 131 \text{ mm}$ und beläuft sich auf $\frac{\varphi}{2} = 11.23^\circ$, der grösstmögliche Winkel korrespondiert mit $d_L = 53 \text{ mm}$ und $d_f = 129 \text{ mm}$ und ergibt $\frac{\varphi}{2} = 11.61^\circ$, was sich zusammenführen lässt auf einen Schnittwinkel von:

$$\varphi = (11.42 \pm 0.19)^\circ \cdot 2 = (22.8 \pm 0.4)^\circ \quad (22)$$

Der Vorgang ist schematisch in Abbildung 12 dargestellt.

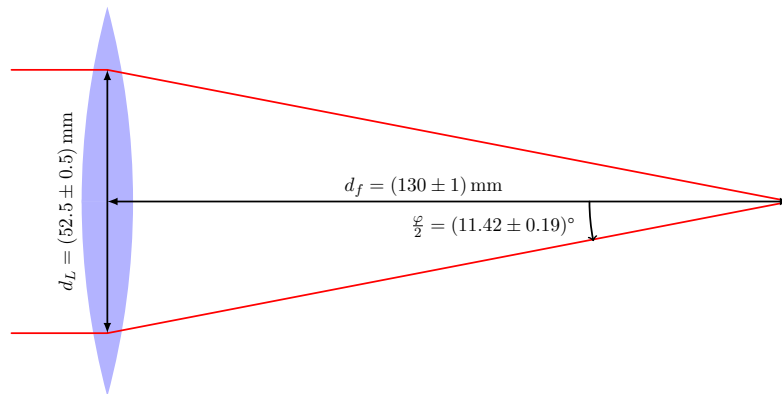


Abbildung 12: Bestimmung des Schnittwinkels der Laserstrahlen aus der Geometrie der Versuchsanordnung. *Beachte:* Da diese Abbildung primär der Illustration der Bestimmung von φ und nicht der akkuraten Darstellung der Linse dient, ist hier nicht das gleiche Symbol für die Linse wie in der Versuchsanleitung benutzt worden.

3.2 Strömungsgeschwindigkeit auf Achse der Messleitung

Gemessen wurden zwar Frequenzen, es sollen in den Regressionen jedoch direkt die zugehörigen Geschwindigkeiten angegeben werden. Diese können mit der folgenden Formel ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_0 \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{c}{\lambda_{Laser}} \cdot \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{2 \cdot v}{\lambda_{Laser}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}\tag{23}$$

Aufgelöst nach v ergibt dies:

$$v = \frac{\Delta f \cdot \lambda_{Laser}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\tag{24}$$

Wobei:

- v : Flussgeschwindigkeit des Streuteilchens
- Δf : Gemessene Streufrequenz
- λ_{Laser} : Wellenlänge des Lasers
- φ : Kreuzungswinkel der Laserstrahlen ($(22.8 \pm 0.4)^\circ$ gemäss vorigem Abschnitt)

Da die Flussgeschwindigkeit v für die Auswertung selbst verwendet werden soll, werden zur besseren Leserlichkeit hier auch gleich die entsprechenden Unsicherheiten bestimmt, anstatt diese in ein separates Kapitel auszulagern.

Es sind hier sowohl Unsicherheiten im Winkel φ wie auch in der gemessenen Frequenz vorhanden. Somit ist für die Bestimmung der Unsicherheit der Teilchengeschwindigkeit die Verwendung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes erforderlich. Zur Erinnerung:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots}\tag{25}$$

Angewandt auf die Formel der Teilchengeschwindigkeit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial v}{\partial f}\right|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2}\tag{26}$$

Mit:

$$\frac{\partial v}{\partial f} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\tag{27}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\tag{28}$$

Ergibt sich somit:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right|_{\bar{v}} \cdot s_{\bar{f}}\right)^2 + \left(\left.\frac{-f \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right|_{\bar{\varphi}} \cdot s_{\bar{\varphi}}\right)^2} \quad (29)$$

Formel 29 und die Messwerte wurden in einem Python-Script ausgewertet, das in Anhang A.1 auf Seite 18 zu finden ist. Die resultierenden Flussgeschwindigkeiten mit ihren Unsicherheiten sind in Tabelle 2 zu finden.

Tabelle 2: Messwerte für verschiedene Durchflussraten in Rohrmitte

\dot{V} (L min ⁻¹)	f_{low} (kHz)	f_{high} (kHz)	\bar{f} (kHz)	$s_{\bar{f}}$ (kHz)	v (cm s ⁻¹)
0.5	7.07	7.71	7.39	0.32	2.4 ± 0.1
1.01	13.43	14.38	13.905	0.475	4.4 ± 0.2
1.52	17.59	19.77	18.68	1.09	5.9 ± 0.4
2.02	23.19	25.32	24.255	1.065	7.7 ± 0.4
2.5	26.66	30.29	28.475	1.815	9.1 ± 0.6
3.0	30.18	35.09	32.585	2.505	10.4 ± 0.8
3.5	34.85	39.3	37.075	2.225	11.8 ± 0.7
4.0	36.21	43.12	39.665	3.455	12.6 ± 1.1
4.5	40.95	49.48	45.215	4.265	14.4 ± 1.4
5.0	45.51	52.75	49.13	3.62	15.6 ± 1.2
5.5	51.34	58.30	54.82	3.48	17.4 ± 1.1
6.0	57.16	61.91	59.535	2.375	18.9 ± 0.8
6.5	60.78	70.84	65.81	5.03	20.9 ± 1.6
7.0	64.44	72.48	68.46	4.02	21.8 ± 1.3
7.5	67.12	77.42	72.27	5.15	23.0 ± 1.7

3.3 Strömungsprofil im laminaren Fall

3.4 Strömungsprofil im turbulenten Fall

4 Fehlerrechnung

5 Resultate und Diskussion

Unterschrift

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig gemäss Vorschriften des Dozenten ausgeführt habe.

Raphael Frey: _____

Ort, Datum: _____, _____

Anhang A Python-Code

A.1 Geschwindigkeit in Rohrmitte

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  # Known Parameters
6  lambd = 632.8e-9
7  phi_avg = 11.41 * np.pi / 180;
8  phi_err = 0.19 * np.pi / 180;
9
10 # Measurements
11 f_low = np.array([7.07e3, 13.43e3, 17.59e3, 23.19e3, 26.66e3, 30.18e3, 34.85e3, 36.21e3, 40.95e3,
12                  45.51e3, 51.34e3, 57.16e3, 60.78e3, 64.44e3, 67.12e3])
13 f_high = np.array([7.71e3, 14.38e3, 19.77e3, 25.32e3, 30.29e3, 35.09e3, 39.3e3, 43.12e3, 49.48e3,
14                  52.75e3, 58.3e3, 61.91e3, 70.84e3, 72.48e3, 77.42e3])
15 idx = np.arange(f_low.size)
16
17 # Calculate average frequencies and errors
18 f_avg = (f_low[idx] + f_high[idx])/2
19 f_err = (f_high[idx] - f_low[idx])/2
20
21 # Calculate average flow velocities
22 v_avg = f_avg[idx] * lambd / (2 * np.sin(phi_avg/2))
23
24 # Gaussian law of error propagation
25 s_gauss = lambda f, phi, s_f, s_phi: np.sqrt((lambd/(2*np.sin(phi/2)) * s_f)**2 + ((-f * lambd *
26                  np.cos(phi/2))/(4 * (np.sin(phi/2))**2) * s_phi)**2)
27
28 s_v = s_gauss(f_avg[idx], phi_avg, f_err[idx], phi_err)
29
30 v = np.array([v_avg], [s_v])
31 v = v.transpose()
32 print(v)

```