
Induktivitäten

Ein Vergleich von analytischen Näherungsformeln
und Simulationen für Selbst- und
Gegeninduktivitäten linearer Leiter

STUDIENGANG	Elektrotechnik und Informationstechnologie
MODUL	Hochfrequenztechnik 1
DOZENT	Peter Niklaus
AUTOR	Raphael Frey
DATUM	16. Februar 2017
VERSION	0.2

Content © 2017 Raphael Frey

Design © 2017 Raphael Frey

Erstellt im Herbstsemester 2016 an der Schule für Technik der FHNW

Dies ist die elektronische Version dieses Dokuments. Hyperlinks sind farbig hervorgehoben und klickbar. Eine Version mit nicht-kolorierten Hyperlinks kann auf Anfrage bei rmfrey@runbox.com erhalten werden.

Dieses Dokument ist bisher 1408 mal kompiliert worden.

Version 0.1 14.10.2016 Beginn Arbeit

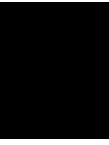
Version 0.2 16.02.2017 Theorieteil, Einleitung

Abstract

Phase 2 ...

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Analytische Lösungen	3
2.1	Selbstinduktivität eines geraden, zylindrischen Drahtes	3
2.2	Gegenseitige Induktivität von zwei parallelen Drähten	6
2.3	Selbstinduktivität eines Stromkreises	7
2.4	Gegenseitige Induktivität zweier linearer Leiter in einer geraden Linie	7
2.5	Selbstinduktivität einer geraden Rechteckstange	8
2.6	Zwei parallele Rechteckstangen – Gegenseitige und Eigeninduktivität	10
2.7	Selbstinduktivität eines Quadrats	11
2.8	Selbstinduktivität eines Rechtecks	12
2.8.1	Runder Drahtquerschnitt	12
2.8.2	Rechteckiger Drahtquerschnitt	13
2.9	Gegenseitige Induktivität zweier gleicher paralleler Rechtecke . . .	15
2.10	Eigeninduktivität und gegenseitige Induktivität dünner Streifen . .	17
2.11	Selbstinduktivität eines kreisförmig gewickelten Streifens	19
2.12	Konzentrische Leiter	21
2.13	Mehrere Leiter	23
2.14	Selbstinduktivität einer “nichtinduktiven” Anordnung Runder Drähte	27
2.15	Nichtinduktive Windung um einen kreisförmigen Zylinder	30
3	Numerische Beispiele und Simulationen	31
4	Schlussfolgerungen	32
5	Literatur	33
	Appendices	34
A	Mathematische Exkurse	35
A.1	Die mittlere geometrische Distanz eines Streifens	35
A.2	Die mittlere arithmetische Distanz eines Streifens	36
A.3	Arithmetische durchschnittliche Distanzen eines Kreises	37



Einleitung

Zur Bestimmung von verschiedenen Eigenschaften physikalischer Systeme werden heute üblicherweise Simulationstools eingesetzt. Genügend Rechenleistung vorausgesetzt, lassen sich so beinahe beliebig komplexe Probleme lösen. Vor der Ankunft moderner Rechner und der zugehörigen mächtigen Simulationssoftware waren Wissenschaftler und Ingenieure aber darauf angewiesen, ihre komplexen Probleme auf möglichst clevere Art und Weise zu herunterzuberechnen und zu vereinfachen, um entweder analytische Näherungslösungen zu erhalten, oder zumindest numerische Methoden zu entwickeln, deren Lösungen ohne moderne Computer berechnet werden konnten.

Ein beliebtes Feld solcher Ansätze war die Bestimmung von Induktivitäten verschiedener Leiterkonfigurationen, mit vielen Veröffentlichungen verschiedener Autoren im Verlaufe der Jahre. Im Herbst 1907 wurde im *Bulletin of the Bureau of Standards* von Edward B. Rosa ein solcher Artikel veröffentlicht, in dem er sich mit den Selbstinduktivitäten und gegenseitigen Induktivitäten linearer Leiter beschäftigte [1].

In dieser Arbeit sollen seine Methoden mithilfe moderner Tools auf ihre Genauigkeit überprüft werden. Dazu wird der Grossteil des Artikels in Kapitel 2 zuerst übersetzt und ein bisschen zusammengefasst, um anschliessend in Kapitel 3 numerische Beispiele mit Simulationsergebnissen zu vergleichen.

Die Entstehungsgeschichte dieser Arbeit gliedert sich in zwei Teile:

Phase 1 (Herbstsemester 2016)

Um das Verständnis für die Materie zu erarbeiten, wird Rosa's Artikel übersetzt, leicht zusammengefasst und die Grafiken reproduziert. Dabei werden die meisten Herleitungen ebenfalls übernommen, und nicht nur die Endergebnisse seiner Überlegungen. Dies stellt sicher, dass die Arbeit nicht einfach ein Copy-Paste-Exzess von Resultaten wird, sondern dass ich mich auch wirklich mit der Materie auseinandersetze und versuche, die Gedankengänge nachzuvollziehen. Das Eintippen der

Gleichungen ist glücklicherweise ein ziemlich langsamer Prozess, sodass das Gehirn dabei Zeit hat, sich seine Gedanken zum Getippten zu machen (statt einfach robotisch Zeichenketten zu reproduzieren). Das Übersetzen des Textes hilft ebenfalls dabei, den Inhalt gedanklich zu verarbeiten.

Ich betrachte die Arbeit in dieser Phase als Arbeitsdokument. Folglich sind an verschiedenen Orten Unklarheiten, Unsauberkeiten oder andere Dinge notiert, die in der zweiten Phase noch meiner Aufmerksamkeit bedürfen (orange Boxen). Ebenfalls fehlen natürlich noch das Abstract und die Schlussfolgerungen, und das Layout bedarf noch einiger Optimierung.

Hauptergebnis dieses Teils ist das Kapitel [2](#).

Phase 2 (Frühlingssemester 2017)

Die analytischen Lösungen werden vom *cgs*-System ins *SI*-System konvertiert, mit numerischen Beispielen ergänzt und die Resultate mit Simulationen verglichen.

Hauptergebnis dieses Teils ist das Kapitel [3](#). Ebenfalls werden die in Phase 1 noch nicht geschriebenen Abschnitte verfasst und der allgemeine Feinschliff am Dokument angebracht.

Allgemeine TODOs (per 16. Februar 2017)

Zeichenstil und -konventionen einheitlicher machen.

\log oder \ln ?

cgs \rightarrow *SI*

Allenfalls einen Abschnitt mit ein wenig Grundlagenwissen über elektromagnetische Felder verfassen.

Begriffliche Konsistenz schaffen betreffend *mittlere geometrische Distanz*, *mittlere arithmetische Distanz* etc.

Titelbild

Analytische Lösungen

Dieses Kapitel fasst die analytischen Herleitungen und Lösungen aus Rosa's Artikel [\[1\]](#) für die im nächsten Kapitel zu simulierenden Beispiele zusammen.

2.1 Selbstinduktivität eines geraden, zylindrischen Drahtes

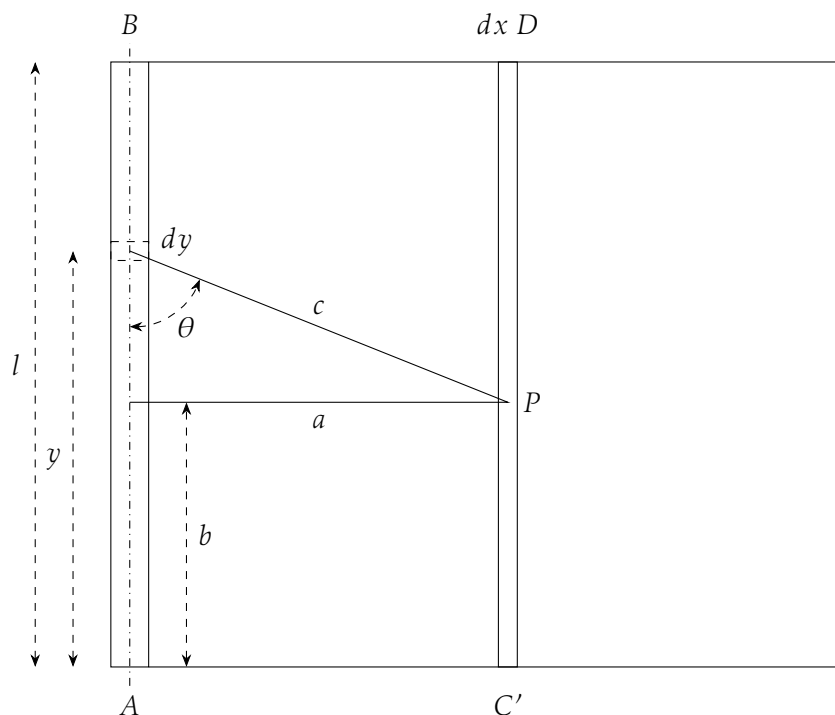


Abbildung 2.1

Die magnetische Feldstärke am Punkt P aufgrund eines Längenelements dy des Drahtes mit Strom i durchflossenen Drahtes ist:

$$i \cdot \frac{dy}{c^2} \cdot \sin \theta = \frac{i \cdot a \cdot dy}{[a^2 + (y - b)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.1)$$

Über die gesamte Länge l des Drahtes und normiert auf den Strom i integriert ergibt dies:

$$\frac{H}{i} = \int_0^l \frac{a \cdot dy}{[a^2 + (y - b)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{l - b}{a \cdot \sqrt{a^2 - (l - b)^2}} + \frac{b}{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.2)$$

Als nächstes soll der magnetische Fluss bestimmt werden. Dieser berechnet sich über das Flächenintegral der magnetischen Flussdichte B , welche wiederum aus der magnetischen Feldstärke H bestimmt wird gemäss:

$$B = H \cdot \mu \quad (2.3)$$

Wobei μ die magnetische Permeabilität des Mediums ist, welches vom magnetischen Feld durchflossen wird. Somit kann ein Streifen $d\Phi$ der Breite dx des magnetischen Gesamtflusses berechnet werden durch Aufintegrieren des H-Feldes über den Streifen der Länge l und der Breite dx :

$$\frac{d\Phi}{i} = \frac{dx}{a} \cdot \int_0^l \left[\frac{l - b}{\sqrt{a^2 - (l - b)^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] db = \frac{2dx}{a} [\sqrt{a^2 + l^2} - a] \quad (2.4)$$

Ersetzt man die Koordinate a durch x und integriert anschliessend über die Gesamtfläche ausserhalb des Drahtes (also vom Radius ρ bis unendlich) ergibt dies:

$$\frac{\Phi}{i} = 2 \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{x} - 1 \right] dx = 2 \left[\sqrt{x^2 + l^2} - x - l \log \frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{x} \right]_{\rho}^{\infty} \quad (2.5)$$

$$= 2 \left[l \cdot \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} - \sqrt{l^2 + \rho^2} + \rho \right] \quad (2.6)$$

$$\approx 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right] \quad (2.7)$$

Dies ist der Anteil an der Selbstinduktivität, welcher vom magnetischen Feld ausserhalb des Leiters verursacht wird. Zusätzlich muss jedoch auch das Feld im Innern des Leiters berücksichtigt werden.

Herleitung im Artikel
noch nicht ganz klar

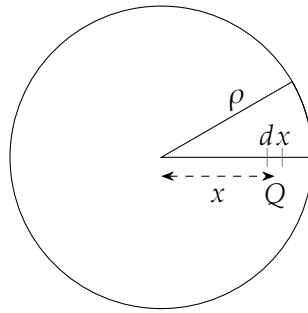


Abbildung 2.2

Die Feldstärke am Punkt $Q(x, 0)$ im Innern des Drahtes ist $\frac{2ix\mu}{\rho^2}$. Der auf den Strom normierte Fluss in einem Element des Drahtes mit Länge l und der Breite dx ist somit

$$\frac{d\Phi}{i} = \frac{2ilxdx}{\rho^2} \quad (2.8)$$

Integration dieses Ausdrucks von 0 bis ρ ergibt den Gesamtfluss innerhalb des Drahtes:

$$\frac{\Phi}{i} = \frac{li}{\rho^2} \cdot \int_0^\rho 2xdx = li \quad (2.9)$$

Da die Feldlinien innerhalb des Leiters nicht den gesamten Querschnitt des Leiters schneiden müssen sie gewichtet werden, proportional zu der Fläche des Leiters, die geschnitten wird:

$$i \cdot L_2 = l \cdot \int_0^\rho \frac{2ix}{\rho^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} dx = \frac{li}{2} \quad (2.10)$$

Somit:

$$L_2 = \frac{l}{2} \quad (2.11)$$

Wenn die Permeabilität des Drahtes μ ist, ist der Teil der Selbstinduktivität, welcher vom internen Feld verursacht wird

$$L_2 = \frac{\mu l}{2} \quad (2.12)$$

Zusammenfügen der Gleichungen 2.11 und 2.6 respektive 2.7 ergibt:

$$L = 2l \left[l \cdot \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} - \sqrt{l^2 + \rho^2} + \frac{l}{4} + \rho \right] \quad (2.13)$$

$$\approx 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - \frac{3}{4} \right] \quad \text{mit } L_2 = \frac{l}{2} \quad (2.14)$$

$$\approx 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 + \frac{\mu}{4} \right] \quad \text{mit } L_2 = \frac{\mu l}{2} \quad (2.15)$$

Wenn das Magnetfeld innerhalb des Leiters vernachlässigt werden kann (hohe Frequenzen \rightarrow Skin-Effekt, vernachlässigbarer Drahtdurchmesser), vereinfacht sich 2.14 zu:

$$L_2 \approx 2 \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right] \quad (2.16)$$

2.2 Gegenseitige Induktivität von zwei parallelen Drähten

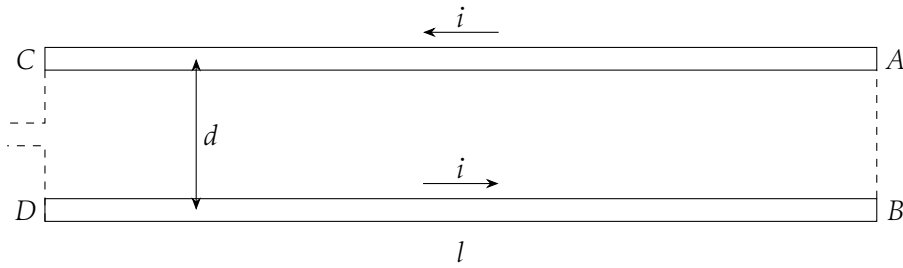


Abbildung 2.3

Die gegenseitige Induktivität zweier Drähte im Abstand d mit gegenläufigem Strom i berechnet sich über den auf i normierten Fluss, welcher den jeweils anderen Leiter durchfließt. Dazu integriert man Gleichung 2.5 von d bis ∞ anstatt von ρ bis ∞ , was folgenden Ausdruck ergibt:

$$M = 2 \left[l \cdot \log \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} - \sqrt{l^2 + d^2} + d \right] \quad (2.17)$$

$$\approx 2 \left[\log \frac{2l}{d} - 1 + \frac{d}{l} \right] \quad (2.18)$$

2.17 und 2.18 sind sehr genau, solange der Leiterquerschnitt im Vergleich zum Abstand d vernachlässigbar klein ist. Ihre Genauigkeit ist ebenfalls noch zufriedenstellend, solange l gross im Vergleich zu d , selbst wenn der Leiterquerschnitt gross ist im Vergleich zu d .

2.3 Selbstinduktivität eines Stromkreises

Zur Bestimmung der Selbstinduktivität eines geschlossenen Stromkreis gemäss Abbildung 2.3 muss man die Selbstinduktivität jeder einzelnen Litze und ihre gegenseitige Induktivitäten miteinander verrechnen:

$$L_{tot} = 2L_{Litze} - 2M \quad (2.19)$$

Nimmt man die approximierten Werte aus den entsprechenden Gleichungen, erhält man hierfür:

$$L = 4l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{\mu}{4} \right] \quad (2.20)$$

2.4 Gegenseitige Induktivität zweier linearer Leiter in einer geraden Linie

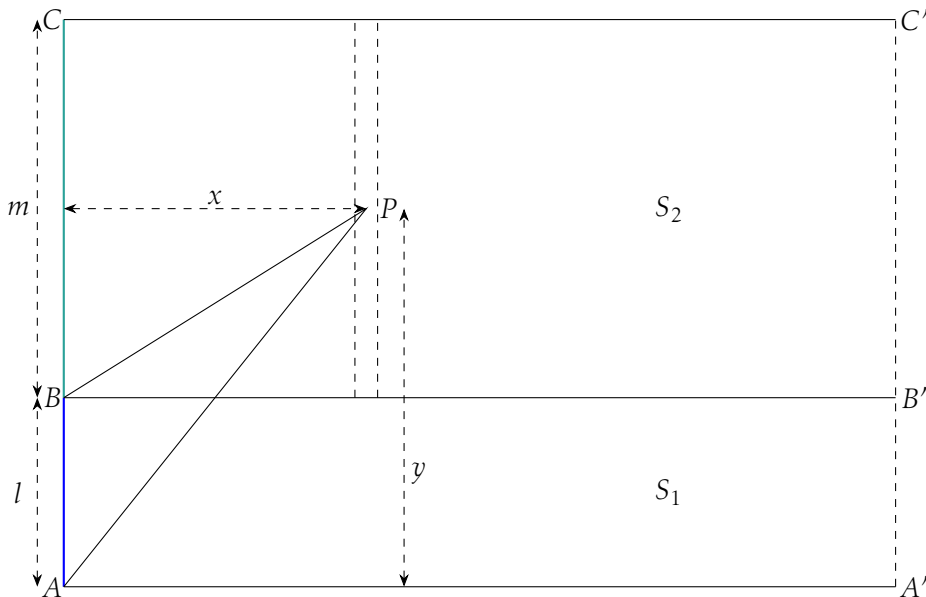


Abbildung 2.4

Die Selbstinduktivität der Leitung AB wurde in Abschnitt 2.1 bestimmt durch die Integration des Magnetfelds über der Fläche ABB'A, wobei A' und B' ins Unendliche verschoben werden.

Analog dazu kann die gegenseitige Induktion der Leiter AB und BC bestimmt werden, indem das vom Strom in AB verursachte Magnetfeld in der Fläche S₂ = BCC'B' integriert wird (wobei B' und C' ebenfalls ins Unendliche verschoben werden).

Das Magnetfeld im Punkt $P(x, y)$, verursacht durch Strom i in AB , lautet:

$$H_P = \frac{i}{x} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + y + 2}} - \frac{y - l}{\sqrt{x^2 + (y - l)^2}} \right] \quad (2.21)$$

Der Gesamte auf i normierte magnetische Fluss in S_2 ist somit:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{i} &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^{l+m} \left[\frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(y - l) dy}{\sqrt{x^2 + (y - l)^2}} \right] \\ &= \int_0^\infty \left[\sqrt{x^2 + (l + m)^2} - \sqrt{x^2 + l^2} - \sqrt{x^2 + m^2} + x \right] \frac{dx}{x} \\ &= \left[\sqrt{x^2 + (l + m)^2} - \sqrt{x^2 + l^2} - \sqrt{x^2 + m^2} \right. \\ &\quad \left. + x - l \cdot \log \frac{l + m + \sqrt{x^2 + (l + m)^2}}{l + \sqrt{x^2 + l^2}} \right. \\ &\quad \left. - m \cdot \log \frac{l + m + \sqrt{x^2 + (l + m)^2}}{m + \sqrt{x^2 + l^2}} \right]_0^\infty \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\approx \left[l \cdot \log \frac{l + m}{l} + m \cdot \log \frac{l + m}{m} \right] \quad (2.23)$$

Die Annäherung 2.23 ist von guter Qualität, solange m nicht allzu gross wird und der Radius des Leiters BC klein ist.

2.5 Selbstinduktivität einer geraden Rechteckstange

Die Selbstinduktivität einer geraden Rechteckstange entspricht der gegenseitigen Induktivität zweier gerader Filamente gleicher Länge, welche im Abstand der geometrischen Mitteldistanz R der Querschnittsfläche zueinander liegen.

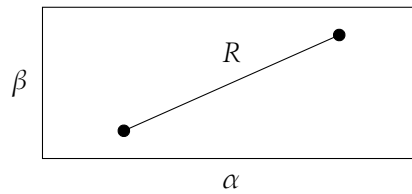


Abbildung 2.5

Die approximierte Formel für die Selbstinduktivität einer Rechteckstange ist somit:

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{R} - 1 + \frac{R}{l} \right] \quad (2.24)$$

Tabelle 2.1 α und β sind die Seiten des Rechtecks, R die mittlere geometrische Distanz seiner Querschnittsfläche.

α	\div	β	R	$\frac{R}{\alpha+\beta}$
1	\div	1	0.44705α	0.22353
1.25	\div	1	0.40235α	0.22353
1.5	\div	1	0.37258α	0.22355
2	\div	1	0.33540α	0.22360
4	\div	1	0.27961α	0.22369
10	\div	1	0.24596α	0.22360
20	\div	1	0.23463α	0.22346
1	\div	0	0.22315α	0.22315

Maxwell gibt die Formel für R für ein Rechteck mit Seiten a und b im zweiten Band von *A Treatise on Electricity and Magnetism* [2] mit dem folgenden Ausdruck an:

$$\begin{aligned} \log R = & \log \sqrt{a^2 + b^2} \\ & - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \log \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} - \frac{25}{12} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es kann gezeigt werden, dass im Falle eines Rechtecks die folgende Beziehung stets in sehr guter Näherung für alle α und β zutrifft:

$$R = 0.2235(\alpha + \beta) \quad (2.26)$$

Tabelle 2.1 fasst einige Seitenverhältnisse in einem Vergleich mit R und dem Verhältnis $\frac{R}{\alpha+\beta}$ zusammen.

Es ist somit möglich, die komplizierte Formel 2.25 für R ohne grossen Verlust an Präzision durch die Vereinfachte Formel in Gleichung 2.26 zu ersetzen. Eingesetzt ergibt dies:

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{\alpha + \beta} + \frac{1}{2} + \frac{0.2235(\alpha + \beta)}{l} \right] \quad (2.27)$$

2.6 Zwei parallele Rechteckstangen – Gegenseitige und Eigeninduktivität

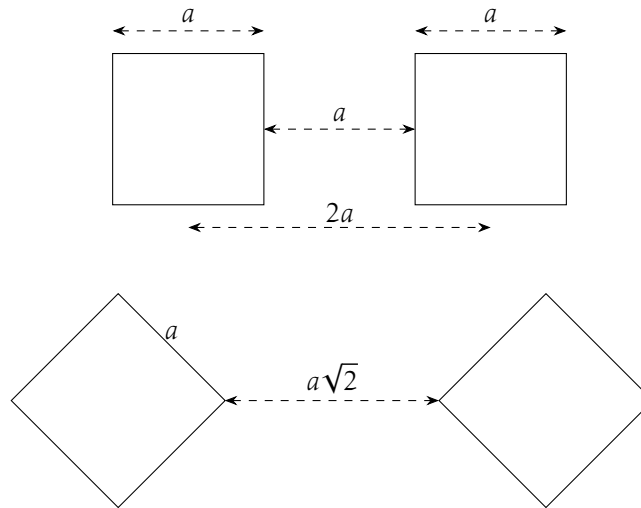


Abbildung 2.6

Die gegenseitige Induktivität zweier quadratischer oder rechteckiger Leiter ist gleich der gegenseitigen Induktivität zweier paralleler Drähte gleicher Länge im Abstand der mittleren geometrischen Distanz der zwei Flächen voneinander. Wir nehmen somit Gleichung 2.18 und ersetzen d durch die m.g.D. R der beiden Rechteckstangen.

$$M = 2l \left[\log \frac{2l}{R} - 1 + \frac{R}{l} \right] \quad (2.28)$$

Im Falle von quadratischen Querschnitten entspricht die g.m.D. in guter Näherung der Distanz der Zentren der beiden Quadrate. Im Falle von parallelen Quadraten (oberer Fall in Abbildung 2.6) ist die g.m.D. ein bisschen grösser als der Abstand der Zentren, im Falle von diagonal gewinkelten Quadraten ist die g.m.D. ein wenig kleiner als der Abstand der Zentren.

2.7 Selbstinduktivität eines Quadrats

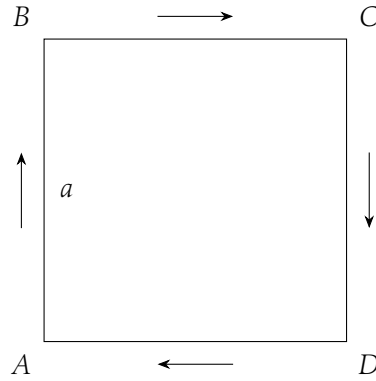


Abbildung 2.7

Die Selbstinduktivität eines Quadrates setzt sich zusammen aus der Summe der Selbstinduktivität der einzelnen Seiten weniger ihre gegenseitigen Induktivitäten, wobei die gegenseitige Induktivität zweier rechtwinklig stehender Seiten verschwindet¹:

$$L = 4L_1 - 4M \quad (2.29)$$

Wir benötigen also die Gleichungen 2.13 und 2.17, wobei l , respektive d durch a ersetzt werden. Es folgt:

$$L = 2a \left[\log \frac{a + \sqrt{a^2 + \rho^2}}{\rho} - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} + \frac{1}{4} + \frac{\rho}{a} \right] \quad (2.31)$$

$$M = 2a \left[\log \frac{a + \sqrt{2a^2}}{a} - \sqrt{2} + 1 \right] \quad (2.32)$$

Wenn die Seitenlänge a des Quadrats gross ist im Vergleich zum Drahtdurchmesser ρ , kann $\frac{\rho^2}{a^2}$ vernachlässigt werden.

¹Gemäss der Neumann'schen Formel für die gegenseitige Induktivität zweier Ströme \vec{I}_1 und \vec{I}_2 , welche durch separate Stromkreise fliessen:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{I}_1 \cdot d\vec{I}_2}{r} \quad (2.30)$$

Das Skalarprodukt zweier normal zueinander stehender Vektoren ist natürlich null.

$$L_1 - M = 2a \left[\log \frac{2a}{\rho(1 + \sqrt{2})} - 1.75 + \sqrt{2} + \frac{\rho}{a} \right] \quad (2.33)$$

$$L = 4(L_1 - M) = 8a \left[\log \frac{a}{\rho} - \log \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\rho}{a} - 0.3358 \right] \quad (2.34)$$

$$L = 8a \left[\log \frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a} - 0.524 \right] \quad (2.35)$$

2.8 Selbstinduktivität eines Rechtecks

Es werden die beiden Fälle eines Rechtecks aus rundem Draht und eines Rechtecks aus rechteckigem Draht betrachtet.

2.8.1 Runder Drahtquerschnitt

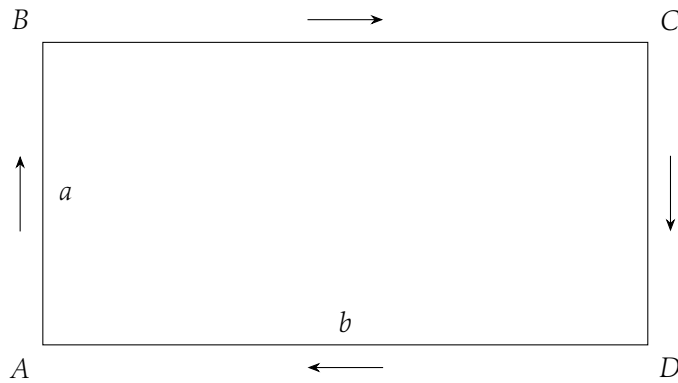


Abbildung 2.8

Die Selbstinduktivität eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b ist:

$$L = 2[L_a + L_b - M_a - M_b] \quad (2.36)$$

Wobei L_a und L_b die Selbstinduktivitäten der beiden Seiten a respektive b sind, und M_a und M_b die gegenseitigen Induktivitäten der beiden jeweils einander gegenüberliegenden Seiten a respektive b (also linke Seite a auf rechte Seite a und umgekehrt, daher noch mit Faktor 2 multipliziert; analog für b).

Erneut bedienen wir uns der Formeln 2.13 und 2.17, unter Vernachlässigung der quadratischen Terme. Eingesetzt in 2.36:

$$\begin{aligned}
L = & 4 \left[a \log \frac{2a}{\rho} - \frac{3}{4}a + \rho \right] + 4 \left[b \log \frac{2b}{\rho} - \frac{3}{4}b + \rho \right] \\
& - 4 \left[a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} - \sqrt{a^2 + b^2} + b \right] \\
& - 4 \left[b \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} - \sqrt{a^2 + b^2} + a \right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Ersetzt man den Term $\sqrt{a^2 + b^2}$ durch die Diagonale d , lässt sich dies vereinfachen zu:

$$L = \left[(a + b) \log \frac{2ab}{\rho} - a \log(a + d) - b \log(b + d) - \frac{7}{4}(a + b) + 2(d + \rho) \right] \tag{2.38}$$

2.8.2 Rechteckiger Drahtquerschnitt

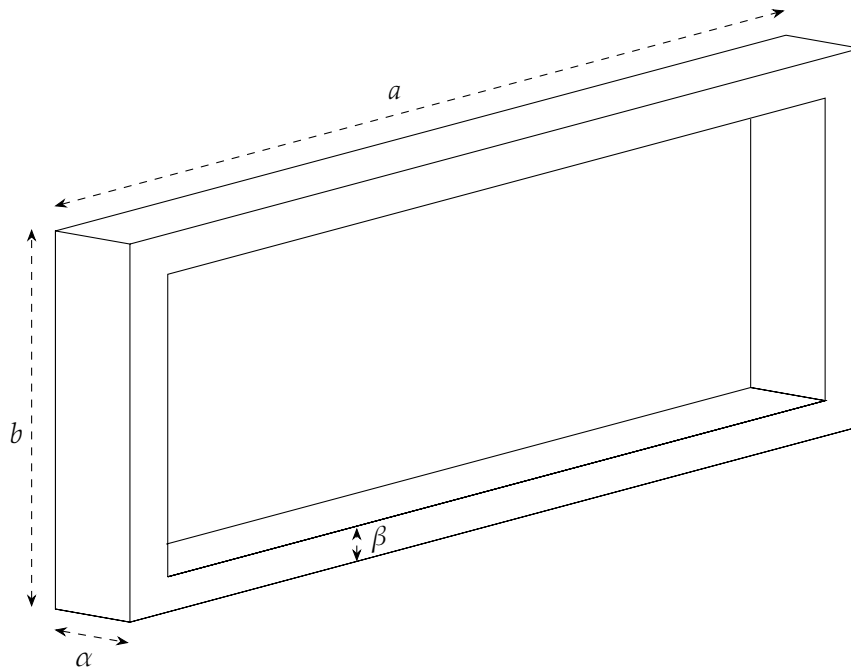


Abbildung 2.9

Gemäss Abbildung 2.9 besteht der Leiter aus einem Rechteck mit äusseren Seitenlängen a und b , und der Querschnitt hat die Kantenlängen α und β .

Setzt man a und b in den Gleichungen 2.27 und 2.17 für die Länge der Leiter bzw. deren Abstand ein, ergeben sich für die Selbstinduktivität und die Gegeninduktivität für die Seiten a^2 :

$$L_a = 2 \left[a \log \frac{2a}{\alpha + \beta} + \frac{a}{2} + 0.2235(\alpha + \beta) \right] \quad (2.39)$$

$$M_a = 2 \left[a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} - \sqrt{a^2 + b^2} + b \right] \quad (2.40)$$

Wie im Falle des runden Leiterquerschnitts gilt $L = 2(L_a + L_b - M_a - M_b)$, womit die gesamte Induktivität auf folgenden Ausdruck kommt:

$$\begin{aligned} L = 4 & \left[a \log \frac{2ab}{(\alpha + \beta)(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + \frac{a}{2} - b + \sqrt{a^2 + b^2} + 0.2235(\alpha + \beta)_a \right] \\ & + 4 \left[b \log \frac{2ab}{(\alpha + \beta)(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + \frac{b}{2} - a + \sqrt{a^2 + b^2} + 0.2235(\alpha + \beta)_b \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$(\alpha + \beta)_a$ und $(\alpha + \beta)_b$ sind dabei die Leiterquerschnitte entlang der Rechtecksseiten a respektive b . Substituiert man $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ und setzt voraus, dass $(\alpha + \beta)_a = (\alpha + \beta)_b$ (dass also der Leiterquerschnitt über das gesamte Rechteck uniform ist), vereinfacht sich Gleichung 2.41 zu:

$$L = 4 \left[(a + b) \log \frac{2ab}{\alpha + \beta} - a \log(a + d) - b \log(b + d) - \frac{a + b}{2} + 2d + 0.447(\alpha + \beta) \right] \quad (2.42)$$

Im Falle eines Quadrats ($a = b$) ergibt sich:

$$L = 8a \left[\log \frac{a}{\alpha + \beta} + 0.2235 \frac{\alpha + \beta}{a} + 0.726 \right] \quad (2.43)$$

Im zusätzlichen Falle eines quadratischen Leiterquerschnitts ($\alpha = \beta$):

$$L = 8a \left[\log \frac{a}{\alpha} + 0.447 \frac{\alpha}{a} + 0.33 \right] \quad (2.44)$$

²Analog werden natürlich L_b und M_b berechnet.

2.9 Gegenseitige Induktivität zweier gleicher paralleler Rechtecke

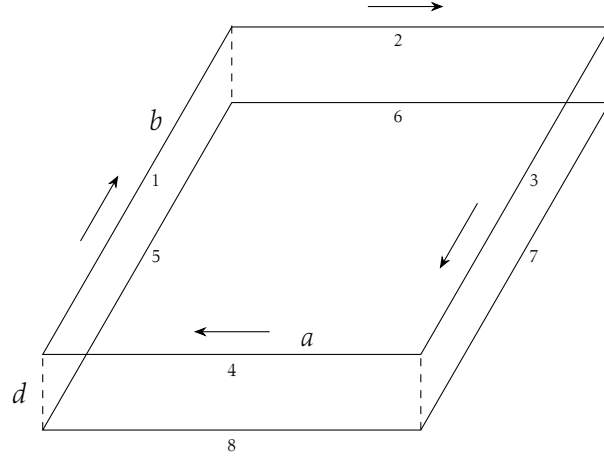


Abbildung 2.10

Die gegenseitige Induktivität zweier gleicher Rechtecke 1, 2, 3, 4 und 5, 6, 7, 8 im konstanten Abstand d setzt sich aus den gegenseitigen Induktivitäten der verschiedenen Seiten zusammen. Auch hier wird Formel 2.17 als Ausgangspunkt genommen. Für die verschiedenen gegenseitigen Induktivitäten erhält man:

$$M = 2(M_{15} - M_{17}) + 2(M_{26} - M_{28}) \quad (2.45)$$

$$M_{15} = 2 \left[b \log \frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{d} - \sqrt{b^2 + d^2} + d \right] \quad (2.46)$$

$$M_{17} = 2 \left[b \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \sqrt{a^2 + b^2 + d^2} + \sqrt{a^2 + d^2} \right] \quad (2.47)$$

$$M_{26} = 2 \left[a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} - \sqrt{a^2 + d^2} + d \right] \quad (2.48)$$

$$M_{28} = 2 \left[a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}}{\sqrt{b^2 + d^2}} - \sqrt{a^2 + b^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \right] \quad (2.49)$$

Man beachte, dass es hier um die gegenseitige Induktivität der beiden Rechteckschleifen geht, und nicht um die Selbstinduktivität. Daher interessieren M_{13} , M_{24} , M_{57} und M_{68} nicht.

Fügt man die Terme zusammen, ergibt sich für M :

$$\begin{aligned}
M = 4 & \left[a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{d} \right) \right. \\
& \left. + b \log \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{b + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{d} \right) \right] \\
& + \left[\sqrt{a^2 + b^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + d^2} - \sqrt{b^2 + d^2} + d \right]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.51)

Im Falle eines Quadrats mit $b = a$ vereinfacht sich dies zu:

$$\begin{aligned}
M = 8a \log & \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{a + \sqrt{2a^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{d} \right) \\
& + 8 \left[\sqrt{2a^2 + d^2} - 2\sqrt{a^2 + d^2} + d \right]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

(2.53)

2.10 Eigeninduktivität und gegenseitige Induktivität dünner Streifen

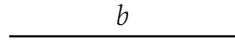


Abbildung 2.11

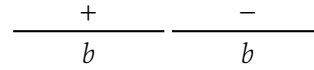


Abbildung 2.12

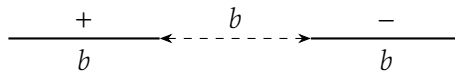


Abbildung 2.13

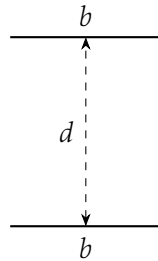


Abbildung 2.14

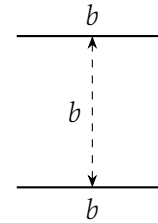


Abbildung 2.15

Die Selbstinduktivität eines dünnen Streifens vernachlässigbarer Dicke mit Länge l und Breite b ist gleich der gegenseitigen Induktivität zweier Leiter im Abstand der mittleren geometrischen Distanz R des Querschnitts des Streifens (siehe Abschnitt 2.5 ab Seite 8). Es gilt $\log R_1 = \log b - \frac{3}{2}$ bzw. $R_1 = 0.22313b$.

Vernachlässigt man die Breite des Streifens im Verhältnis zu seiner Länge in Formel 2.18, und setzt R_1 für d ein, ergibt dies für die Situation aus Abbildung 2.11:

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{R_1} - 1 \right] = 2l \left[\log \frac{2l}{b} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.54)$$

Sind zwei Streifen in der gleichen Ebene Kante an Kante platziert, ohne dabei leitenden Kontakt herzustellen, wie in Abbildung 2.12 gezeigt, muss die mittlere geometrische Distanz des einen Streifens zum anderen eingesetzt werden ($R_2 = 0.89252b$).

$$M = 2l \left[\log \frac{2l}{R_2} - 1 \right] = 2l \left[\log \frac{2l}{b} - 0.8863 \right] \quad (2.55)$$

Für einen geschlossenen Stromkreis aus zwei Streifen ist die gesamte Selbstinduktivität:

$$\begin{aligned}
L = 2L_1 - 2M &= 4l \log \frac{R_2}{R_1} \\
&= 4l \log 4 = 5.545l
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Wenn die beiden Streifen nicht in der gleichen Ebene liegen, sondern in zwei verschiedenen zueinander parallelen Ebenen, wie in Abbildung 2.14 dargestellt, berechnet sich die geometrische mittlere Distanz R_2 zwischen den beiden Streifen gemäss:

$$\log R_2 = \frac{d^2}{b^2} \log d + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d^2}{b^2} \right) \log (b^2 + d^2) + 2 \frac{d}{b} \tan^{-1} \frac{b}{d} - \frac{3}{2} \tag{2.57}$$

Im vereinfachten Fall von Abbildung 2.15 mit $d = b$ ergibt sich für Formel 2.57:

$$\log R_2 = \log b + \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \tag{2.58}$$

Mit der nach wie vor gültigen Beziehung $\log R_1 = \log b - \frac{3}{2}$ für den Fall eines einzelnen Streifens erhält man:

$$\log \frac{R_2}{R_1} = \frac{\pi}{2} \tag{2.59}$$

Womit sich für die gesamte Induktivität ergibt:

$$L = 2L_1 - 2M = 4l \log \frac{R_2}{R_1} = 4l \frac{\pi}{2} = 2\pi l \tag{2.60}$$

Unter Benutzung der mittleren geometrischen Distanz und der mittleren arithmetischen Distanz kann noch eine genauere Formel für die Induktivität eines Streifens hergeleitet werden. Die mathematischen Herleitungen für die mittlere geometrische und die mittlere arithmetische Distanz sind in den Anhängen A.1 und A.2 ab Seite 35 zu finden.

Setzt man die dort erhaltenen Werte für S_1^2 und S_2^2 in Formel A.1 ein, und berücksichtigt man, dass l viel kleiner als d ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
L &= 2 \left[l \log \left(2l \left[1 + \frac{d^2}{4l^2} \right] \right) - l \log d - l - \frac{d^2}{2l} + d \right] \\
&= 2l \left[\log 2l - \log d - 1 - \frac{d^2}{4l^2} + \frac{d}{l} \right]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Substituiere:

$$\log d = \log R_1 = \log b - \frac{3}{2}$$

$$d^2 = S_2^2 = \frac{b^2}{6}$$

$$d = S_1^2 = \frac{b}{3}$$

Dies ergibt eine genauere Formel für die Selbstinduktivität eines dünnen Streifens als Formel 2.54.

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{b} + \frac{1}{2} + \frac{b}{3l} - \frac{b^2}{24l^2} \right] \quad (2.62)$$

2.11 Selbstinduktivität eines kreisförmig gewickelten Streifens

Die Konzepte der mittleren geometrischen und arithmetischen Distanz sollen nun dazu benutzt werden, die Selbstinduktivität eines kreisförmig gewickelten Streifens gemäss Abbildung 2.16 zu bestimmen.

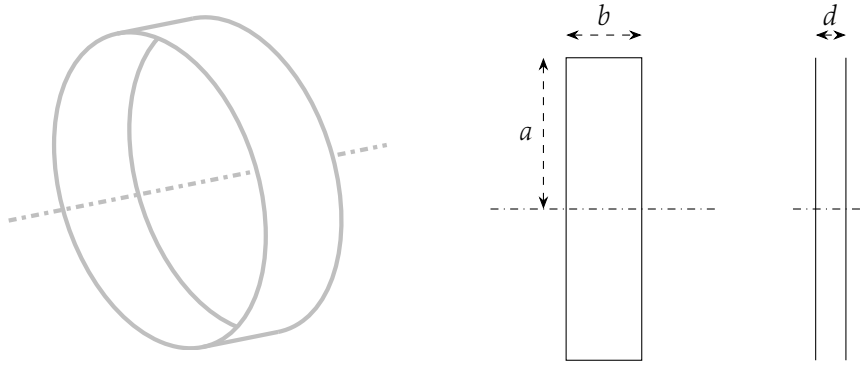


Abbildung 2.16

Für einen kurzen zylindrischen Strom in einem flachen Streifen gibt Rayleigh folgende Formel, welche genau genug für die meisten Fälle ist, solange b nicht zu gross wird im Verhältnis zum Zylinderradius a :

$$L = 4\pi a \left[\log \frac{8a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{b^2}{32a^2} \left(\log \frac{8a}{b} + \frac{1}{4} \right) \right] \quad (2.63)$$

Wir werden diese Formel als Überprüfung zur Herleitung der Methode via geometrische und arithmetische mittlere Distanzen benutzen.

Die gegenseitige Induktivität zweier paralleler, konzentrischer Kreise (ganz rechts in Abbildung 2.16) unter Vernachlässigung von Termen vierter und höherer Ordnung lautet:

$$M = 4\pi a \left[\left(1 + \frac{3d^2}{16a^2} \right) \log \frac{8a}{d} - \left(2 + \frac{d^2}{16a^3} \right) \right] \quad (2.64)$$

Dies kann man umformen zu:

$$M = 4\pi a \left[\left(1 + \frac{3d^2}{16a^2} \right) \log 8a - \log d - \frac{3d^2}{16a^2} \log d - 2 + \frac{d^2}{16a^3} \right] \quad (2.65)$$

Um diese Formel auf den Fall eines kurzen Zylinders anwenden zu können, muss im ersten und letzten Term das quadratische arithmetische Mittel, im zweiten Term das geometrische Mittel und im dritten Term das Produkt des quadratischen arithmetischen Mittels mit dem geometrischen Mittel bestimmt werden (ein Term der Form $S_2^2 \cdot \log R_2$).

Zur Bestimmung dieses Produkts integriert man wie folgt:

$$\begin{aligned} bS_1^2 \log R_1 &= \int_0^b (x-c)^2 \log(x-c) dx = \\ &= \frac{(b-c)^3}{3} \left[\log(b-c) - \frac{1}{3} \right] + \frac{c^3}{3} \left[\log c - \frac{1}{3} \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} b^2 S_2^2 \log R_2 &= \frac{1}{3} \int_0^b (b-x)^3 \log(b-x) dx + \frac{1}{3} \int_0^b x^3 \log x dx \\ &\quad - \frac{1}{9} \int_0^b (b-x)^3 dx - \int_0^b x^2 dx \\ &= \frac{b^4}{6} \left(\log b - \frac{7}{12} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$S_2^2 \log R_2 = \frac{b^2}{6} \left(\log b - \frac{7}{12} \right) \quad (2.68)$$

Nun substituieren wir in Formel 2.64 gemäss:

$$\begin{aligned} \log d &= \log b - \frac{3}{2} \\ 3d^2 &= \frac{b^2}{2} \\ 3d^2 \log d &= \frac{b^2}{2} \left(\log b - \frac{7}{12} \right) \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} L &= 4\pi a \left[\left(1 + \frac{b^2}{32a^2} \right) \log 8a - \log b + \frac{3}{2} - \frac{b^2}{32a^2} \left(\log b - \frac{7}{12} \right) - 2 - \frac{b^2}{96a^3} \right] \\ &= 4\pi a \left[\left(1 + \frac{b^2}{32a^2} \right) \log \frac{8a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{b^2}{128a^2} \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

was, ein wenig umgeformt, Rayleigh's Formel 2.63 entspricht. Der Weg über zwei parallele Kreise führt via geometrische und arithmetische Mittelwerte also ebenfalls zum gewünschten Ergebnis.

2.12 Konzentrische Leiter

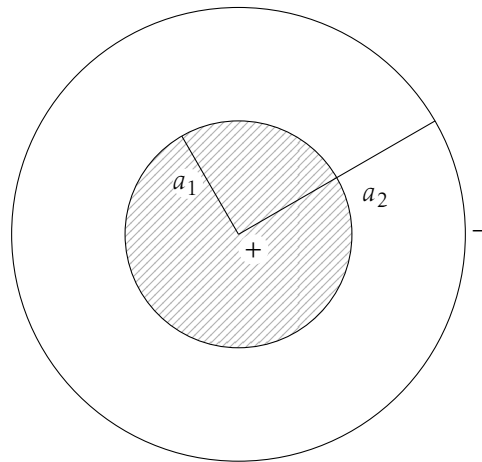


Abbildung 2.17

Die Selbstinduktivität eines dünnen, geraden Rohres der Länge l und Radius a_2 ist, wenn $\frac{a_2}{l}$ klein ist,

$$L_2 = 2l \left[\log \frac{2l}{a_2} - 1 \right] \quad (2.70)$$

Die gegenseitige Induktivität eines solchen Rohres auf einen massiven, runden Leiter innerhalb des Rohres wie in Abbildung 2.17 dargestellt, ist gleich der Selbstinduktion des Rohres, da das gesamte magnetische Feld des durch das Rohr verursachten Stromes durch den Innenleiter fließt.

Selbstinduktivität eines zylindrischen Innenleiters ist

$$L_1 = 2l \left[\log \frac{2l}{a_1} - \frac{3}{4} \right] \quad (2.71)$$

Falls der Strom durch den Innenleiter durch den Aussenleiter zurückfließt, ergibt sich für die Induktivität der Gesamtkonfiguration

$$L = L_1 + L_2 - 2M = L_1 - L_2 \quad (2.72)$$

Da $M = L_2$. Somit:

$$L = 2l \left[\log \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{4} \right] \quad (2.73)$$

Überlegung betreffend der Feldlinien noch nicht ganz anschaulich verstanden. Klarheit schaffen.

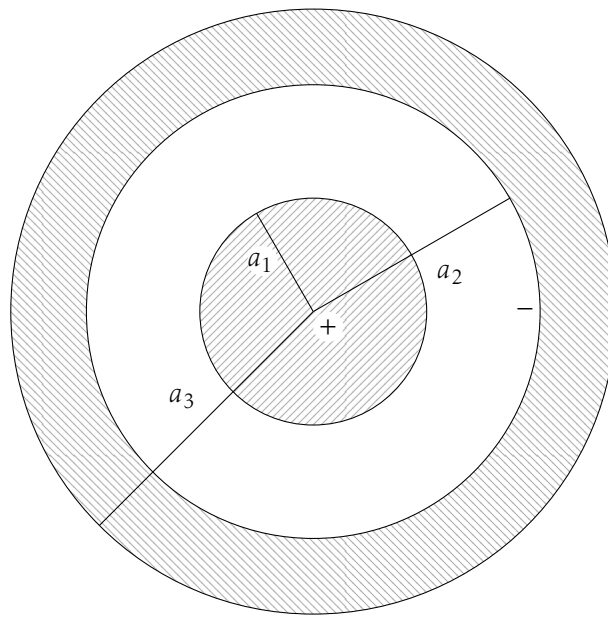


Abbildung 2.18

Falls der äussere Leiter eine nicht vernachlässigbare Dicke $a_3 - a_2$ aufweist (Abbildung 2.18), muss $\log a$ in Gleichung 2.73 durch folgenden Ausdruck ersetzt werden:

$$\log a_g = \frac{a_3^2 \log a_3 - a_2^2 \log a_2}{a_3^2 - a_2^2} - \frac{1}{2} \quad (2.74)$$

Falls der Strom ein Wechselstrom von genügend hoher Frequenz ist, verlagern sich die Ströme auf die Aussenseite des Innenleiters und die Innenseite des Aussenleiters, und die Induktivität des gesamten Stromkreises wird zu

$$L = 2l \log \frac{a_3}{a_1} \quad (2.75)$$

Hier ist der Artikel ein bisschen unklar. Nirgends vorher ist a_g aufgetaucht. Ebenfalls ist $\log a$ nicht als solches in Gleichung 2.73 vorhanden, sondern ein Verhältnis. Nachrechnen erforderlich.

2.13 Mehrere Leiter

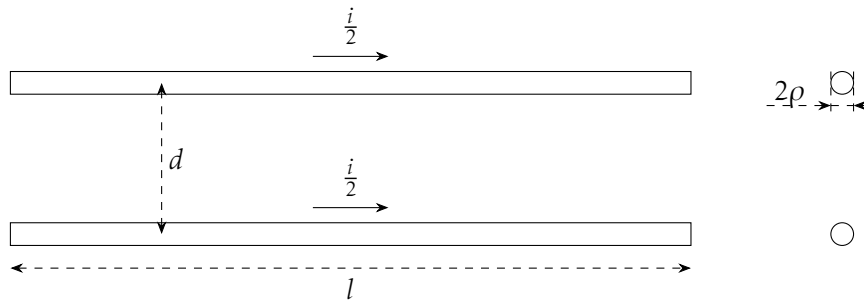


Abbildung 2.19

Wird ein Strom in gleichen Teilen auf Leiter der Länge l und Radius ρ verteilt, die sich im Abstand d befinden (Abbildung 2.19), ist die Selbstinduktivität des geteilten Leiters gleich der Summe der separaten Selbstinduktivitäten plus zweimal ihre Gegenseitige Induktivität. Falls $\frac{d}{l}$ klein ist, folgt:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \left\{ \frac{l}{2} \left[\log \frac{2l}{\rho} - \frac{3}{4} \right] + \frac{l}{2} \left[\log \frac{2l}{d} - 1 \right] \right\} \\
 &= 2l \left[\log \frac{2l}{(\rho d)^{\frac{1}{2}}} - \frac{7}{8} \right] = 2l \left[\log \frac{2l}{(r_g d)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

wobei r_g die mittlere geometrische Distanz des Leiters ist: $r_g = 0.7788\rho$.

Quelle für r_g

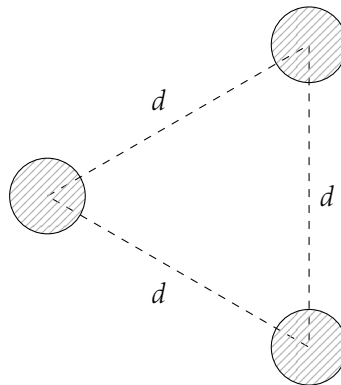


Abbildung 2.20

Im Falle von drei Leitern, wie in Abbildung 2.20 dargestellt, ist die Selbstinduktivität analog

$$2l \left[\log \frac{2l}{(r_g d)^{\frac{1}{3}}} - 1 \right] \quad (2.77)$$

Hierbei ist $(r_g d^2)^{\frac{1}{3}}$ die mittlere geometrische Distanz des Mehrfachleiters.

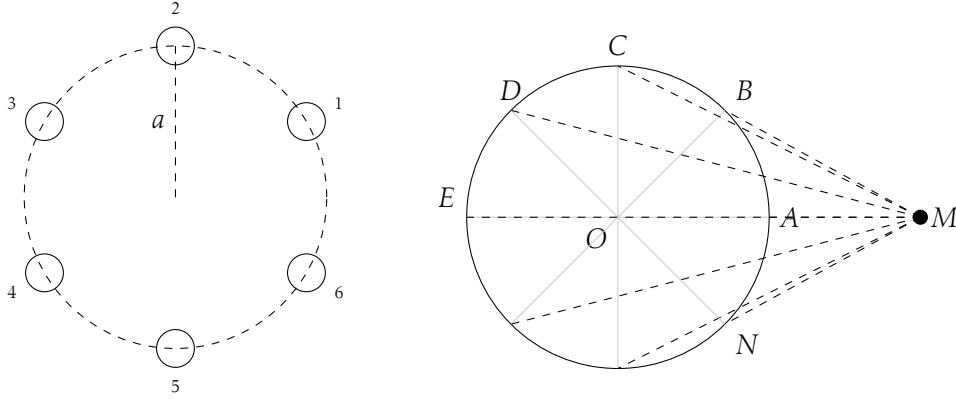


Abbildung 2.21

Mit dem Prinzip der geometrischen mittleren Distanz kann man auch eine Leiterkonfiguration mit beliebig vielen Leitern in einer kreisförmigen Anordnung durchrechnen, wie gezeigt in Abbildung 2.21.

Für n äquidistant auf den Umfang verteilte Leiter ist die geometrische mittlere Distanz

$$\begin{aligned} \log R &= \frac{n \log r_1 + n \log (r_{12} \cdot r_{13} \cdot \dots \cdot r_{1n})}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \left(\log r_1 + \log (r_{12} \cdot r_{13} \cdot \dots \cdot r_{1n}) \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dabei ist r_1 die geometrische mittlere Distanz eines einzelnen Leiters (0.7788ρ , wobei ρ der Radius des Leiters ist) und r_{12} ist die Distanz zwischen den Mitten der Leiter 1 und 2 usw.

Falls a der Radius des Kreises ist, entlang dessen die Leiter angeordnet sind, erhält man

$$\begin{aligned} \log R &= \frac{1}{n} \log (r_1 n a^{n-1}) \\ \text{oder} \quad R &= \left(r_1 n a^{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Der Beweis für Gleichung 2.79 sieht wie folgt aus: Unterteilt man den Kreisumfang in n gleiche Segmente mit Endpunkten A, B, C, D, E, \dots, N und setzt den Punkt

M auf der Geraden OA (innerhalb oder ausserhalb des Kreises), um anschliessend $\overline{OM} = x$ zu setzen, erhält man

$$x^n - a^n = \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \dots \cdot \overline{MN} \quad (2.80)$$

Nach Division durch $\overline{MA} = x - a$ ergibt sich

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \dots a^{n-1} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cdot \dots \cdot \overline{MN} \quad (2.81)$$

Setzt man M auf A , gilt $x = a$, und somit folgt

$$\begin{aligned} na^{n-1} &= \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \dots \cdot \overline{AN} \\ &= a_{12} \cdot a_{13} \cdot \dots \cdot a_{1n} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Eingesetzt in Formel 2.78 ergibt dies 2.79, wie erwünscht.

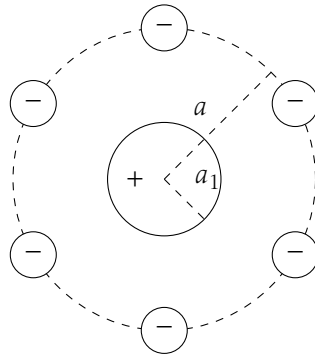


Abbildung 2.22

Im Falle eines Stromkreises mit einem grösseren zentralen Leiter und mehreren kleineren äusseren Leitern (Abbildung 2.22) ist die gegenseitige Induktivität des grösseren Leiters auf die kleineren

$$M = 1l \left[\log \frac{2l}{a} - 1 \right] \quad (2.83)$$

Da die mittlere geometrische Distanz des grossen Leiters zum Rest a ist. Die Selbstinduktivität des äusseren Leitersystems ist

Notation in Paper ist etwas widersprüchlich hier. Überprüfen (Cotes's Theorem)

$$\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 - 2M \\
\text{wobei} \quad L_1 &= 2l \left[\log \frac{2l}{a_1} - \frac{3}{4} \right] \\
L_2 &= 2l \left[\log 2l - \log \left(r_1 n a^{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \\
M &= 2l \left[\log \frac{2l}{a} - 1 \right] \\
\text{somit} \quad L &= 2l \left[\log \frac{a^2}{a_1} - \log \left(r_1 n a^{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{4} \right] \quad (2.84)
\end{aligned}$$

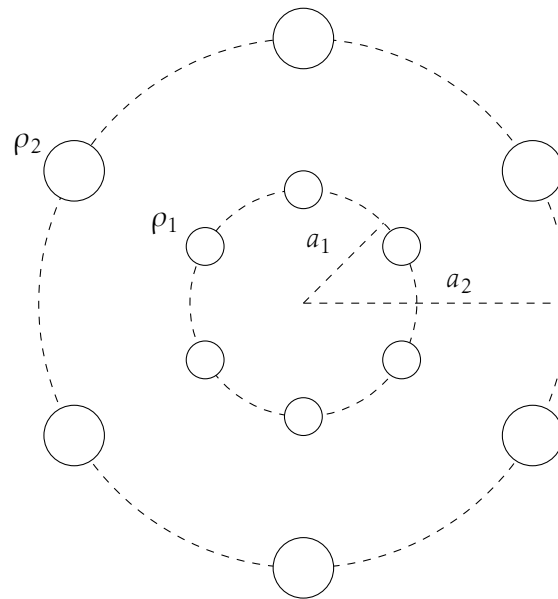


Abbildung 2.23

Ist der Innenleiter ebenfalls ein Mehrleitersystem (Abbildung 2.23), kann bei symmetrischer Anordnung mit dem Theorem von Cotes (siehe oben) die mittlere geometrische Distanz R_{12} hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\log R_{12} &= \frac{1}{n} \log (a_2^n - a_1^n) \\
\text{oder} \quad R_{12} &= (a_2^n - a_1^n)^{\frac{1}{n}} \quad (2.85)
\end{aligned}$$

Herleitung noch nicht ganz klar. Nochmals versuchen, nachzuvollziehen.

Im Grenzfalle von $n \rightarrow \infty$ ergibt sich der Fall von zwei konzentrischen Röhren.

Nimmt man Formel 2.79 zur Berechnung von R_1 und R_2 und Formel 2.85 zur Berechnung von R_{12} , kann man die Selbstinduktivität des Stromkreises bestimmen zu

$$L = 2l \log \frac{R_{12}^2}{R_1 R_2} \quad (2.86)$$

2.14 Selbstinduktivität einer “nichtinduktiven” Anordnung Runder Drähte

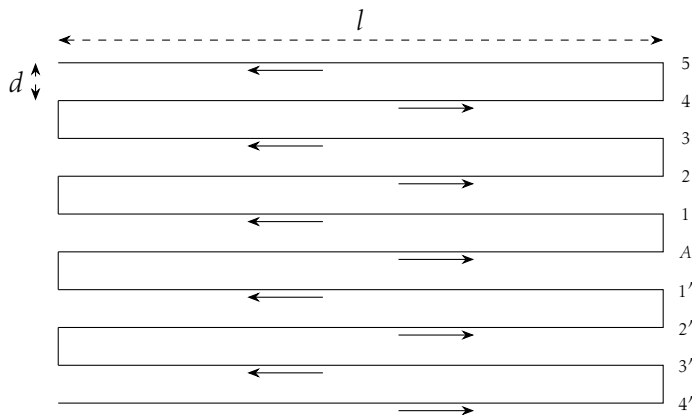


Abbildung 2.24

Man nehme eine schlangenförmige Leiteranordnung wie in [Abbildung 2.24](#) gezeigt. Die Länge einer Querverbindung³ sei l , der Abstand der Windungen d , der Leiter habe einen runden Querschnitt mit Radius ρ .

Die resultierende Selbstinduktivität eines Drahtes A ist gleich der Induktivität des Drahtes auf sich selbst plus die gegenseitigen Induktivitäten aller Drähte auf ihn. Dabei werden die Drähte 2, 2', 4, 4' etc. die Selbstinduktivität von A erhöhen, wogegen die Drähte 1, 1', 3, 3' etc. diese reduzieren. Wenn also L_1 die Selbstinduktivität des Drahtes A auf sich selbst und M_1 etc. die gegenseitigen Induktivitäten der Drähte 1 etc. auf A sind, erhält man für die gesamte Induktivität L_A des Drahtes A

³im Folgenden werden die einzelnen Querverbindungen der Einfachheit halber als Drähte bezeichnet, obwohl die gesamte Windung natürlich ein durchgehendes Stück Leiter ist.

$$\begin{aligned}
L_A &= L_1 + 2M_2 + 2M_4 + 2M_6 + \dots + 2M_{n-1} - 2M_1 - 2M_3 - 2M_5 \dots - M_n \\
&= (L_1 - M_1) - (M_1 - M_2) - (M_3 - M_4) - (M_5 - M_6) \dots \\
&\quad + (M_2 - M_3) + (M_4 - M_5) + (M_6 - M_7) + \dots \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} \right] - 2l \log \frac{2}{1} - 2l \log \frac{4}{3} - 2l \log \frac{6}{5} - \dots \\
&\quad + 2l \log \frac{3}{2} + 2l \log \frac{5}{4} + 2l \log \frac{7}{6} + \dots \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} \right] - 2l \log \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \right) + 2l \log \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots} \right) \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} \right] - 2l \log \left(\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot \dots}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot \dots} \right) \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - 2 \log \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-2) \sqrt{n}} \right) \right] \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Wobei die gesamte Anzahl Drähte $2n$ ist. Wir führen nun für den letzten Term in der Klammer die Konstante A ein, welche die Anzahl Drähte in der Gleichung parametrisiert, und schreiben 2.90 wie folgt:

$$L_A = 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - A \right] \tag{2.88}$$

Im Fall von unendlich vielen Drähten erhält man

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \dots \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
L &= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - \log \frac{\pi}{4} \right] \\
&= 2l \left[\log \frac{2d}{\pi \rho} + \frac{1}{4} \right] \tag{2.89}
\end{aligned}$$

Einige Werte für die Konstante A :

$$\begin{aligned}
\text{Für } 2n = 2, A &= 0 \\
2n = 4, A &= \log 2 = 0.6931 \\
2n = 6, A &= \log \frac{4}{3} = 0.2876 \\
2n = 10, A &= \log \frac{64}{45} = 0.3522 \\
2n = 14, A &= \log \frac{256}{175} = 0.3804 \\
2n = 18, A &= \log \frac{128}{105} = 0.3961 \\
2n = 38, A &= \dots = 0.4253 \\
2n = 70, A &= \dots = 0.4373 \\
2n = \infty, A &= \dots = 0.4516
\end{aligned}$$

Die Selbstinduktivität eines solchen Systems ist also stets um $2Al$ kleiner als die Selbstinduktivität eines einzelnen Drahtpaares.

Betrachtet man einen der Drähte am Ende der Konfiguration, ergibt sich für L

$$\begin{aligned}
L &= L_1 - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - \dots \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} \right] + (M_2 - M_3) + (M_4 - M_5) + \dots \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} + \log \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots} \right) \right] \\
&= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} + A_1 \right] \\
\text{wobei } A_1 &= -\log \frac{3}{2} \quad \text{für } 2n = 4 \\
A_1 &= -\log \frac{15}{8} \quad \text{für } 2n = 6 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Für den zweitletzten Draht erhält man

$$\begin{aligned}
L &= 2l \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - A_2 \right] \\
\text{wobei } A_2 &= \log \frac{8}{3} \quad \text{für } 2n = 4 \\
A_2 &= \log \frac{16}{5} \quad \text{für } 2n = 6 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Und für den drittletzten Draht ergibt sich

$$A_3 = \log \frac{16}{5} \quad \text{für } 2n = 8$$

Dies sollte ausreichen, um für eine beliebige Konfiguration die Induktivität eines beliebigen Drahtes berechnen zu können.

2.15 Nichtinduktive Windung um einen kreisförmigen Zylinder

Die Selbstinduktivität einer einzelnen Windung ist ungefähr

$$L_1 = 4\pi a \left[\log \frac{8a}{\rho} - 1.75 \right] \quad (2.90)$$

wobei a der Radius der Windung und ρ der Radius des Drahtes ist. Die gegenseitige Induktivität zweier nebeneinander liegender Windungen ist ungefähr

$$M_1 = 4\pi a \left[\log \frac{8a}{d} - 2 \right] \quad (2.91)$$

wobei d die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Windungen ist. 2.91 gilt, solange d klein ist im Vergleich zu a . Analog dazu gilt

$$\begin{aligned} M_2 &= 4\pi a \left[\log \frac{8a}{2d} - 2 \right] \\ M_1 - M_2 &= 4\pi a (\log 2) \\ M_3 - M_4 &= 4\pi a \left(\log \frac{4}{3} \right) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Für eine Windung A ergibt sich somit

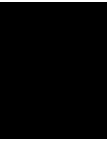
$$\begin{aligned} L_A &= L_1 - 2M_1 + 2M_2 - 2M_3 + 2M_4 + \dots \\ &= L_1 - M_1 - (M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) - (M_3 - M_4) \dots \\ &= 4\pi a \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - \log 2 + \log \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3} \right] \quad \text{für } 2n = 8 \text{ Windungen} \\ &= 4\pi a \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - 2 \log \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-2) \sqrt{2}} \right) \right] \quad \text{für } 2n = 8 \text{ Windungen} \\ &= 4\pi a \left[\log \frac{d}{\rho} + \frac{1}{4} - A \right] \quad (2.92) \end{aligned}$$

Wobei A die gleichen Werte wie für den Fall der Schlangenlinie im vorigen Abschnitt aufweist, solange die Länge der Spule klein ist im Vergleich zu ihrem Radius und somit die Formel für die gegenseitige Induktivität M genau genug ist. Die Werte für A sind positiv, ausser für die äussersten Drähte, und hängen von der Anzahl Drähte und der Position des Drahtes ab.



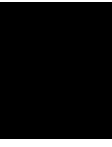
Numerische Beispiele und Simulationen

Phase 2 ...



Schlussfolgerungen

Phase 2 ...



Literatur

- [1] E. B. Rosa, “The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors,” September 1907. [Online]. Available: http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/bulletin/04/nbsbulletinv4n2p301_A2b.pdf
- [2] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism – Vol. II*, 1st ed. Macmillan and Co., 1878, ch. XIII, pp. 294–296.

Anhänge

Mathematische Exkurse

“Appendices” im Inhaltsverzeichnis irgendwie herausbringen.

A.1 Die mittlere geometrische Distanz eines Streifens

Zur Bestimmung der Selbstinduktivität eines dünnen, geraden Streifens kann man sich der Tatsache behelfen, dass die gesamte Induktivität einer Leiterkonfiguration gleich der Summe aller einzelnen Induktivitäten ihrer Komponenten ist (die Summe der Induktivitäten aller Komponenten auf sich selbst und auf alle anderen Komponenten).

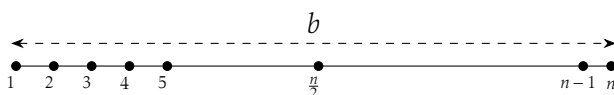


Abbildung A.1

Zerlegt man den Streifen in n Teilstreifen, wie in Abbildung A.1 dargestellt, trägt jedes Element $\frac{1}{n}$ des gesamten Stromes und es ergeben sich n^2 Induktivitäten insgesamt. Diese müssen nun auf vernünftige Art miteinander verrechnet werden.

Die exakte Formel 2.17 für die gegenseitige Induktivität zweier Leiter kann umgeschrieben werden als

$$M = 2\mu \left[l \cdot \log l + \sqrt{l^2 + d^2} - l \log d - \sqrt{l^2 + d^2} + d \right] \quad (\text{A.1})$$

Es stellt sich heraus, dass diese Gleichung zur Bestimmung des gesuchten Ausdrucks gemittelt werden muss. Der Mittelwert von $\log d$ resultiert in der bereits angetroffenen mittleren *geometrischen* Distanz, wogegen die Mittelung von d und d^2

Noch unklar, weshalb dies die Mittelwerte sind

über die *arithmetische* respektive die *quadratische arithmetische* Mittelung bestimmt wird.

Der Durchschnitt von $\log d$ für n Teilstreifen berechnet sich gemäss:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\log d_1 + \log d_2 + \log d_3 + \dots + \log d_n \right] &= \frac{1}{n} \log \left(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_n \right) \\ &= \log \sqrt[n]{d_1 d_2 d_3 \dots d_n} \\ &= \log R \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Die mittlere arithmetische Distanz eines Streifens

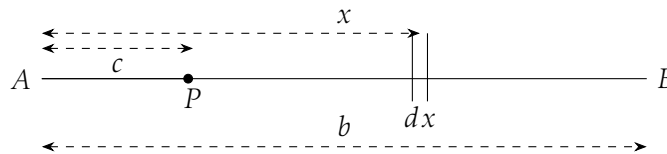


Abbildung A.2

Zuerst bestimmen wir die arithmetische mittlere Distanz S_1 des Punktes P von allen anderen Punkten der Linie AB . Zuerst betrachten wir das Liniensegment links von P . Die mittlere arithmetische Distanz von P zu allen Punkten dieses Segments ist $\frac{c}{2}$. Die mittlere arithmetische Distanz von P zu allen Punkten im rechten Segment PB ist $\frac{b-c}{2}$. Für die gesamte Linie AB ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} b \cdot S_1 &= \frac{b-c}{2}(b-c) + \frac{c}{2}c = \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{c^2}{2} \\ S_1 &= \frac{b}{2} - c + \frac{c^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Woher diese Gleichung plötzlich kommt, ist mir noch nicht ganz klar: Begründung suchen.

Zur Bestimmung der mittleren arithmetischen Distanz aller Punkte des Streifens vom Streifen bzw. der mittleren arithmetischen Distanz des Streifens von sich selbst muss S_1 über den Streifen integriert werden. Substituiert man $c = x$:

$$\begin{aligned} b S_2 &= \int_0^b \left(\frac{b}{2} - x + \frac{x^2}{b} \right) dx = \left[\frac{bx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3b} \right]_0^b = \frac{b^2}{3} \\ S_2 &= \frac{b}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Als nächstes wollen wir die mittlere quadratische arithmetische Distanz S_1^2 des Punktes P vom Streifen bestimmen. Man integriere wie folgt:

$$\begin{aligned}
 bS_1^2 &= \int_0^b (x-c)^2 dx = \frac{b^3}{3} - cb^2 + c^2b \\
 S_1^2 &= \frac{b^2}{3} - cb + c^2
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Für $c = 0$, also die m.a.q.D eines Endpunktes des Streifens vom Streifen, ergibt sich $S_1^2 = \frac{b^2}{3}$.

Um die m.a.q.D des Streifens von sich selbst zu finden, integrieren wir analog zu vorher:

$$\begin{aligned}
 bS_2^2 &= \int_0^b \left(\frac{b^2}{3} - bx + x^2 \right) dx = \frac{b^3}{6} \\
 S_2^2 &= \frac{b^2}{6}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.3 Arithmetische durchschnittliche Distanzen eines Kreises

Referenzen in Haupttext

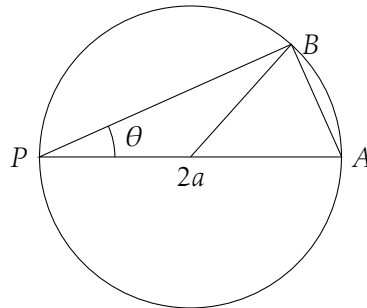


Abbildung A.3

Die arithmetische mittlere Distanz eines Punktes P (Abbildung A.3 auf einem Kreis vom Kreis selbst wird berechnet, indem über den Kreis integriert wird. Mit $PB = 2a \cos \theta$ ergibt dies:

$$\begin{aligned}
 \pi a S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a \cos \theta \cdot 2a d\theta = 4a^2 \\
 S_1 &= \frac{4a}{\pi}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Da die arithmetische mittlere Distanz für alle Punkte des Kreises gleich ist, gilt auch $S_2 = \frac{4a}{\pi}$.

Für die quadratische arithmetische mittlere Distanz erhält man:

$$\begin{aligned}\pi a S_2^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^2 \theta \cdot 2ad\theta = 2\pi a^3 \\ S_1^2 &= S_2^2 = 2a^2\end{aligned}\tag{A.8}$$

Für einen Punkt P ausserhalb oder innerhalb des Kreises (Abbildung A.4 ergibt sich aufgrund von $\overline{PB}^2 = a^2 + d^2 + 2ad \cos \theta$:

$$\begin{aligned}\pi a S_1^2 &= a \int_0^\pi (a^2 + d^2 + 2ad \cos \theta) d\theta = \pi a (d^2 + a^2) \\ S_1^2 &= d^2 + a^2\end{aligned}\tag{A.9}$$

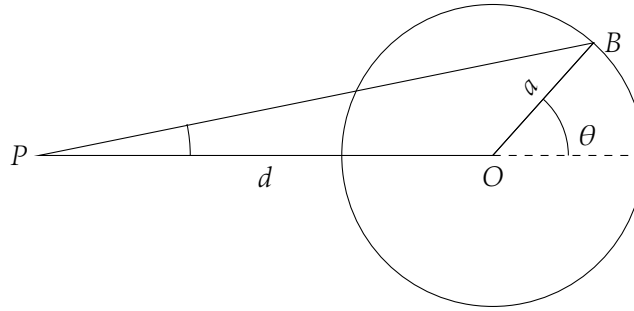


Abbildung A.4

Für die gesamte Kreisfläche bezogen auf Punkt P :

$$\begin{aligned}\pi a^2 S_1^2 &= \int_0^a (d^2 + r^2) 2\pi r dr = 2\pi \left[\frac{a^2 d^2}{2} + \frac{a^4}{4} \right] \\ S_1^2 &= d^2 + \frac{a^2}{2}\end{aligned}\tag{A.10}$$

Im Falle von $d = 0$ ist $S_1^2 = \frac{a^2}{2}$, die quadratische arithmetische mittlere Distanz der Fläche des Kreises bezogen auf sein Zentrum.

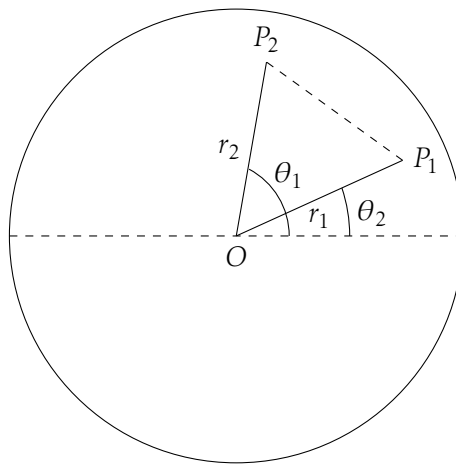


Abbildung A.5

Zur Bestimmung der q.a.m.D. einer Kreisfläche von sich selbst kann man $\overline{P_1 P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2 - \theta_1$ über die Kreisläche zweimal integrieren. Darauf soll aber an dieser Stelle verzichtet werden.