DENEY 2: Ayrık Zamanlı Sinyaller ve Sistemler

AMAÇ: MATLAB programı kullanılarak ayrık zamanlı işaret üretilmesi, ayrık sistemlerin özelliklerinin ve konvolüsyon işleminin incelenmesi.

ÖN HAZIRLIK

1) Ayrık zamanlı işaret ile sayısal (dijital) işaret arasındaki fark nedir? Bu soruyu; örnekleme, kuantalama, kanal kapasitesi ve bant genişliği gibi kavramları düşünerek cevaplayın.

2) Sistem nedir? Sistem özellikleri olan doğrusallık, ötelemeyle değişmezlik, nedensellik, kararlılık kavramlarını araştırınız. Matematiksel ifadelerle açıklayınız.

3) `plot` komutu ile `stem` komutu arasındaki fark nedir?

4) `square` ve `sawtooth` komutlarının kullanımını öğreniniz. Her iki komut için kısa bir örnek kod yazınız.

2.1 AYRIK ZAMANLI İŞARETLER

Ayrık zamanlı işaretler sürekli zaman işareti *x(t)*'nin $t=n.T_s$ anlarında örneklenmesi ile elde edilir. Sürekli zaman işareti *x(t)*'nin bağımsız değişkeni ''*t*''dir. Ard arda gelen her T_s anında örnek değer alınmasıyla *x(nTs)=x(n)* işareti elde edilir.

$$x(n) = x(nT_s) = x(t)\Big|_{t=n.T_s}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{A/D} \longrightarrow x(n)$$

Burada T_s örnekleme periyodudur. **<u>Teorik olarak *B* bant genişlikli bir temel bant işareti, bozulmasız olarak yeniden elde edebilmek için örnekleme frekansı</u>** $f_s = 1/T_s \geq 2B$ **<u>olmalıdır</u>**. Ancak MATLAB ortamında işaretleri düzgün gözlemleyebilmek için $f_s \geq 100B$ olarak seçilmelidir.

2.2 AYRIK PERİYODİK İŞARETLER

Sürekli zaman işareti *x(t),* her *t* değeri için $x(t) = x(t+T)$ şartını sağlıyorsa periyodiktir ve periyodu *T*'dir. Sürekli bir işaretin örneklenmiş hali *x(n)* ise her zaman periyodik olmayabilir.

Örnek:

x(t) periyodik bir işaret olsun,

$$x(t) = \cos \Omega t$$
$$x(n) = x(t)\,|_{t=nT_s}$$
$$x(n) = \cos(\Omega n T_s) \qquad , \Omega = 2\pi f \quad , T_s = \frac{1}{f_s}$$
$$x(n) = \cos(2\pi n \frac{f}{f_s}) = \cos wn$$

f : sürekli zaman işaretinin frekansı [cycle/sn]

f_s : örnekleme frekansı [sample/sn]

$w = 2\pi \frac{f}{fs}$ olup normalize açısal frekansı olarak adlandırılır. Normalize denmesinin nedeni paydasında bulunan f_s'tir.

x(n)'in periyodik olması için *x(n) = x(n+kN)* şartı sağlanmalıdır. Sinüsoidal işaret üzerinde görelim:

$$\cos wn = \cos 2\pi f n Ts$$
$$\cos wn = \cos 2\pi n \frac{Ts}{T} = \cos 2\pi \frac{Ts}{T}(n + kN_0)$$

Şartını sağlayabilmek için $N = \frac{2\pi}{w} = \frac{T}{T_S}$ ifadesinin **tam sayı** olması gerekmektedir.

2.3 AYRIK SİSTEMLER

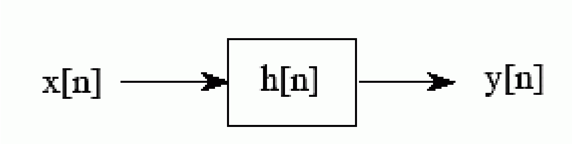
2.3.1 DOĞRUSALLIK (Lineerlik)

Ölçeklenebilirlik (çarpımsallık) ve toplamsallık özelliklerine aynı anda sahip olan sistemler doğrusaldır. Eğer bir sistem *x(n)* girişine *y(n)*, *a.x(n)* girişine *a.y(n)* çıkışını üretiyorsa ölçeklenebilirdir. Bir sistem $x_1(n)$ girişine $y_1(n)$, $x_2(n)$ girişine $y_2(n)$ çıkışını üretirken $x_1(n)+x_2(n)$ girişine $y_1(n)+y_2(n)$ çıkışını üretiyorsa toplamsaldır.

2.3.2 ÖTELEMEYLE DEĞİŞMEZLİK

x(n) girişine *y(n)* çıkışını üreten bir sistem **k ne olursa olsun *x(n-k)* girişine *y(n-k)* çıkışını üretiyorsa ötelemeyle değişmezdir**.

2.4 KONVOLÜSYON



Bir sistemin çıkışı, sistemin dürtü yanıtı ile girişin konvolüsyonudur.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Konvolüsyon işleminin uygulanabilmesi için bir sistemin lineer olması ve zamanla değişmezlik özelliğini sağlaması gerekmektedir. Bu sistemlere kısaca *DZD* yani doğrusal zamanla değişmeyen (Linear Time Invariant, *LTI*) sistemler denir.

Eğer sistemin girişine $x(n) = \delta(n)$ uygulanırsa çıkış $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)h(n-k) = h(n)$ olur.

h(n) sistemin **dürtü yanıtı** olarak adlandırılır.

3. Deneyde Yapılacaklar

Örnek-1) Ayrık Zamanlı İşaret

Aşağıdaki programı farklı *fs* değerleri (*fs*=10*fm*, *fs*=5*fm*, *fs*=2*fm*) için çalıştırarak çıkan sonuçlar arasındaki farklılıkları gözlemleyiniz.

```
%----------------------------------------------------------------------
close all;
clear all;
fm=10;
fs=100*fm;
n=[0:1/fs:1];
faz=0;
x=cos(2*pi*n*fm+faz);
plot(n,x,'k');
title('ayrik sinuzoidal');
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
%----------------------------------------------------------------------
```

Yukarıdaki uygulamalarda 4 farklı *fs* değeri için örnek değerler alınmaktadır. Her f_s değeri için oluşan örneklenmiş işaretleri *x1, x2, x3* ve *x4* olarak atayıp `subplot` komutu ile aynı ekranda görün.

`plot` komutunu `stem` komutu ile değiştirerek yukarıdaki kodu tekrar çalıştırın.

Örnek-2) Ayrık Periyodik İşaret

1. İlk deneyi (f_S = 4,05**fm*) olarak yeniden deneyin.

2. Açık olan çizimleri kapayın (`close all`). Bellekteki tüm değişkenleri silin (`clear all`).

3. 64 noktadan oluşan bir kare dalga oluşturun. Kare dalganın periyodu 16 nokta, darbe boşluk oranı ise %50 olsun. (`square` komutunu kullanabilirsiniz)

4. `sawtooth` komutunu kullanarak 64 nokta uzunluklu, 16 periyotlu bir testere dişli dalga üretin.

5. `subplot` komutunu kullanarak 4 alt çizimli bir şekil oluşturun. İlk iki alt çizimde kare ve testere dişi dalgaları, 3. çizimde bu iki dalganın toplamını, son alt çizimde ise çarpımlarını çizdirin.

6. Önceki adımda çizdirilen 3. ve 4. işaretler periyodik midir? Evet ise periyotları nedir?

   Bir sonraki aşama için belleği temizleyin.

Örnek-3) Doğrusallık

1. N = 150 olmak üzere, v = 0.1*rand(1,N) ve s = 0.1*cos (pi*0.5*(1:N)) gürültülerini ve x = cos(pi*0.05*(1:N)) bilgi işaretini üretin.

   x1(n) = x(n)+v(n) ve x2(n) = x(n)+s(n) gürültülü işaretlerini `subplot` ile çizdirin.

2. Çıkışı y(n) = (x(n)+x(n–1)+x(n–2))/3olan bir sistem olsun. x1(n) ve x2(n) işaretlerini sırasıyla bu sisteme uygulayarak y1(n) ve y2(n) çıkışlarını elde edin. Bu sistem ne iş yapmaktadır?

3. x3(n) = x1(n)+x2(n) işaretini elde edin. Bu işareti sisteme uygulayarak *y3* çıkışını elde edin. *y3 = y1+y2* midir? Sistem ölçeklenebilir olduğuna göre doğrusal mıdır?

   Yukarıdaki değişkenler ileride kullanılacaktır. Lütfen bellekten silmeyin.

4) Ötelemeyle Değişmezlik

Burada da N = 150 ve x = cos(pi*0.05*(1:N)) olsun. Buna göre,

1. x4(n) = x(n–1) olan işareti elde edin.

2. Sisteme *x4(n)* işaretini uygulayarak *y4(n)* işaretini elde edin. Sisteme *x(n)* işaretini uygulayarak *y(n)* işaretini elde edin, *y4(n) = y(n–1)* midir? Çizerek karşılaştırın.

   Yukarıdaki değişkenler ileride kullanılacaktır. Lütfen bellekten silmeyin.

5) Konvolüsyon

1. 150 uzunluklu bir işaret üretin. İşaretin ilk 3 terimi 1/3, diğerleri 0 olsun. Bu işareti *DZD* bir sistemin dürtü yanıtı olarak kabul edin (*h(n)*).

2. Bir önceki uygulamada (Örnek-3. Doğrusallık) elde ettiğiniz *x1* ve *x2* işaretlerini bu sisteme uygulayarak *y5* ve *y6* çıkışlarını elde ediniz.

   ```
   y5 = conv(x1,h);
   y6 = conv(x2,h);
   ```

   Bulduğunuz sonuçları daha önceki sonuçlarla karşılaştırın. *y5*'in uzunluğu ile *x1* ve *h*'ın uzunlukları arasındaki ilişki nedir?