ОТГОВОРИ

ВЕРОЯТНОСТ НА СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ.

§1. 1. $\Omega = \{ \Gamma, J\Pi\Gamma, JJ\Pi\Gamma, JJ\Pi\Pi\Gamma, ... \}$, $A = \{ JJ\Pi\Gamma \}$, $B = \{ JJ\Pi\Gamma, JJ\Pi\Pi\Gamma, ... \}$. 3. $B \setminus A =$ числото завършва на 5; $A \cap B =$ числото завършва на 0; $A \cup B =$ числото се дели на 5.

§2. 1. 11/12. 3. Тъй като A влече B, то $A=A \cap B$ и $P(A)=P(A\cap B)=P(B).P(A|B) \Rightarrow P(A)=3P(A).P(A|B) \Rightarrow P(A|B)=1/3$. Освен това $P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \Rightarrow \frac{1}{3}P(A)=3P(A)P(B|A) \Rightarrow P(B|A)=1/9$. Събитията A и B са зависими.

§3. 1. 0,25.

§4. 1. 1/8. **3.** 1/90. **5.**
$$n = \frac{10!}{2!2!2!3!} = 75620$$
, $p = \frac{1}{n} = 0.000013$.

7.
$$p = \frac{C_x^2}{C_{10}^2} = \frac{x(x-1)}{10.9} = \frac{2}{15} \implies x^2 - x - 12 = 0$$
. Otr. $x = 4$. **9.** a) $\frac{ac + bd}{(a+b)(c+d)}$, 6)

$$\frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}. \quad \mathbf{11.} \ \frac{C_n^{k-m}}{C_{n+m}^k}.$$

§5. 1. a) 0,68; б) 0,4624; в) 0,4614; г) 0,043.

Общи задачи. 1. $\Omega = \{\omega_{ij}\}$, i,j=1,...,6; $P(A) = \frac{V_6^2}{\widetilde{V}_6^2} = 0.833$; P(B) = 0.0555,

$$P(C)=0,1111$$
, $P(D)=0,1389$, $P(F)=0,0833$. **3.** a) $p=\frac{3.V_9^2}{\tilde{V}_0^3}=0,2963$;

6)
$$p = \frac{9 + 3.V_9^2 + 2.9}{\tilde{V}_{13}^3 - \tilde{V}_{02}^2} = 0.27$$
. **5.** $p = \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6} \frac{2}{5} \frac{2}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} = 0.0079$. **9.** $\frac{C_8^5}{\tilde{C}_8^5} = 0.071$.

11. a)
$$\frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} = 0,390$$
; 6) $\frac{C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} = 0,055$.**13.** a) $p = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 0,665$; 6) $\frac{6.\tilde{V}_5^5}{\tilde{V}_6^6} = 0,402$.

в)
$$\frac{C_6^2 \widetilde{V}_5^4}{\widetilde{V}_6^6}$$
 =0,201. **15.** $\frac{8!3!}{10!}$ =0,0667. **17.** а) не; б) 0,4082; 0,1633; 0,5918; 0,8367;

0,0816; 0,4897. **19.** 0,02, 0,375, 0,46. **21.** a) 0,6, 6) 0,222, в) 0,4161, 0,0994. **23.** a) 0,35; б) 0,4; в) 2/3; 25. Не по-малко от 25. *Решение.* Сума 12 се пада с вероятност 1/12. Ако $A={$ от n опита поне веднъж се падне сума 12}, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \ge 0.5$$
, от където $n \ge \ln 0.5 / (\ln 35 - \ln 36)$. **27.** a) 0,5775; б) 0,0043. **29.** 0,1939.

СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ.

§7. 1.
$$\frac{\xi}{P} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{vmatrix}$$
 . 3. $\frac{\xi_1}{P} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, $\frac{\xi_2}{P} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$, $\frac{\xi_3}{P} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$.

Възможните стойности на ξ_n са -n, -n+2,..., n-2, n, а вероятностите им са

съответните събираеми от развитието $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ако възможните

стойности означим като $x_k = 2k - n, \ k = 0, ..., n$, то $p_{\xi_n}(x_k) = P(\xi_n = 2k - n) = \frac{C_n^k}{2^n}$.

§8. 1.
$$\frac{\xi - 1}{P} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
, $\frac{\xi^2}{P} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{(\xi - 1)^2}{P} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. $E\xi = \frac{2}{3}$, $D\xi = \frac{5}{9}$,

$$E(\xi-1)=-1/3$$
, $D(\xi-1)=5/9$, $E\xi^2=1$, $D\xi^2=2$, $E(\xi-1)^2=2/3$, $D(\xi-1)^2=2/9$.

3.
$$\frac{\xi - 1}{P} = \frac{1}{38} \frac{1}{38}$$
, $E\xi = -1/19$. **5.** 11/16, 1, 0,8125, 21/16, 0,652.

§9. 1. a)
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1, \ p_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x \notin (0,1] \end{cases}$$
; 6) $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ x+1 & -1 < x \le 0; \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

B)
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$
 3. 0,5, $1 - 0.5(e^{-1} + e^{-2})$. 5. a) 0,25, 6)

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{16} (8x^2 - x^4) & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \text{B)} \quad \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = 1,0824 \; ; \; \text{r}) \; 9/16.$$

Общи задачи. 1. a) 0,1; б) 0,7; в) $F_{\mathcal{E}}(3,4) = 0,9$; г) 1,2. **3.** a) 4/9, 20/27; б)

$$\frac{\xi \mid 1 \quad 2 \quad 3}{P \mid 0,2 \quad 0,6 \quad 0,2}$$
, 2, 2/5, 0,632; **5.** a) 0,5; 6) $1-\sqrt{2}/2$; B) 0; r)

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < \pi/2 \\ 0.5(\sin x + 1) & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \text{ . 7. a} \end{cases} \text{ 3/8, } F_{\xi}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^3/8 & 0 < t \le 2 \text{ ; 6) 2,67\%; B) \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

11.98%; г) 5% от зрителите остават не повече от 44 минути; д) 1 място. **9.** а) 3/8; б) 0; в) $2/\sqrt{10}$; г) 0,5375.

НЯКОИ ПО-ВАЖНИ ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ.

§11. 1. B(4,p) . **3.** a) 0,6651; б)0,4019; в) 0,2009. **5.** a) 0,0613; б) 0,919; в) 0,019; г) 0,632. **7.** 0,0902. **9.**. 300. Да означим с ξ броя на печелившите билети от n закупени. Тъй като n е голямо, а вероятността 0,01 за печалба от един билет е малка, то $\xi \sim Po(\lambda)$, където $\lambda = 0,01n$ определяме от условието $P(\xi \ge 1) \ge 0,95$,

т.е. $1-\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$ = 0.95 с решение $\lambda \ge -\ln 0,05 \approx 3$. **11.** $p_{\xi}(k) = C_5^k 0,75^k.0,25^{5-k}$, k = 0,1,...,5 , p = 0,352. (Решаваме системата np = 3,75 , np(1-p) = 0,25 2 .15). **13.** а) Тъй като белите топки се връщат, то величината ξ_1 - брой на опитите до поява на черна топка е геометрично разпределена величина с параметър $p_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, т.е.

 $p_{\xi_1}(k)=rac{2}{5}.rac{3}{5}^{k-1}$, $E\xi_1=rac{5}{2}$. Аналогично ξ_2 , ξ_3 и ξ_4 са геометрично разпределени, но с параметри съответно $p_2=rac{3}{9}=rac{1}{3}$, $p_3=rac{2}{8}=rac{1}{4}$ и $p_4=rac{1}{7}$ (черните топки се отстраняват) и математически очаквания $E\xi_2=3$, $E\xi_3=4$, $E\xi_4=7$; б) ξ - брой на опитите до изтегляне на всички черни топки, а $E\xi=16,5$ - среден брой опити. **15.** 0,02. Решение. Ако p – вероятността за повреда на елемент, то P(поне една повреда) е $1-q^{10}=0,2\Rightarrow q^{10}=0,8\Rightarrow q=rac{10}{0,8}=0,98\Rightarrow p=1-q=0,02$.

§13. 1. 0,8849, 0,0227, 0,9903, 0,2266. **3.** а) 0,1151; б) 0,3159; в) 0,2638; г) 0,0227. **5.** 49,851, 4,227. **7.** 0,7247. **9.** а) **0,696; б) 0,0099.**

Общи задачи. 1. а) Po(1/20) ; б) B(5,0,8) ; в) N(10,3) ; г) показателно разпределение с параметър 1/2; д) N(0,10) . **3.** а) $p_{\xi}(k) = \frac{0.5^k \, e^{-0.5}}{k!}$, $k = 0.1, 2, \dots$; б) 0,0126; в) 0,0017. **5.** а) N(80,8) ; б) 0,1056; в) 0,0062. **7.** а) 0,1686; б) 130 мин. (квантил от ред 0,99 на величината $\xi \sim N(60,30)$. Намира се като се реши равенството $F\left(\frac{x-60}{30}\right) = 0,99$). **9.** а) $\frac{\xi \mid 0}{P\mid 0,512\mid 0,384\mid 0,096\mid 0,008\mid}$; б) 0,6,0,6928. **11.** 8/3 (виж зад. **11, §11)**. **13.** 11 пакета. В първия пакет има една от картинките. Вероятността във следващите да има различна картинка е 4/5. Нека ξ_1 е броят на пакетите, които купуваме до поява на нова картинка. $P(\xi_1 = k) = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{5}$, $E\xi_1 = \frac{5}{4}$. Продължаваме да купуваме ξ_2 пакета, докато се появи трета картинка, $P(\xi_2 = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{5}$, $E\xi_2 = \frac{5}{3}$ и т.н. Брой на закупените пакети до събиране на всички картинки е $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$, а средният им брой е число, близко до

§15. 1.
$$B(5;1/6)$$
 $Po(5/6)$ $N(5/6;5/6)$ $O(5/6)$ $O(5/$

 $E\xi = \frac{5}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 10,42$. **15.** 21,03, 1,77, 3,23.

0,6212. **5. Решение.** Нека ξ_i е положението на частицата в i-тата милисекунда,

относно положението й в (i-1)-вата милисекунда. Тогава имаме $\frac{\xi_i}{P} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix}$, $E\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$. Разстоянието, което ще измине частицата за n милисекунди е $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 0$, $D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = n$, Съгласно забележка **15.2** ξ има разпределение, близко до $N(0,\sqrt{n})$. а) $10\sec = 10000m\sec \quad \sigma\xi = \sqrt{10000} = 100$ и $\xi \sim N(0,100)$. Следователно, $P(|\xi| > 50) = 1 - P(|\xi| \le 50) = 1 - \left(2F\left(\frac{50}{100}\right) - 1\right) = 0,617$. 6) Търси n така, че $P(|\xi| > 50) = 0,5$, където $\xi \sim N(0,\sqrt{n})$. Отг. $n \approx 5487m\sec \approx 5.5\sec$.

ДВУМЕРНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ.

§17. 1. a)
$$\frac{\xi}{P} = \frac{1}{5/24} + \frac{2}{7/48} + \frac{3}{7/48} + \frac{4}{7/48} + \frac{5}{7/48} + \frac{6}{5/6}$$
; $\frac{\eta}{P} = \frac{1}{0.5} + \frac{1$

$$\frac{\xi \mid 0 \quad 1 \quad 2}{P \mid \frac{61}{432} \frac{154}{432} \frac{27}{432}}, \quad \mathbf{3.} \quad \mathbf{a}) \quad \frac{\xi \mid 0 \quad 1}{P \mid 0, 3 \quad 0, 4}, \quad \frac{\xi \mid 0 \quad 1}{P \mid 0, 5 \quad 0, 5}, \quad \frac{\eta \mid -1 \quad 1}{P \mid 0, 7 \quad 0, 3}.$$

6)
$$\frac{\xi + \eta}{P} = \frac{-1}{0.3} \frac{0.1}{0.4} \frac{2}{0.2} \frac{\xi \eta}{0.1} = \frac{-1}{0.35} \frac{0.1}{0.5} \frac{1}{0.05}$$

§18. 1. 3a
$$k=1,6$$
 $\frac{\eta|\xi=k|}{P} \frac{0}{3/5} \frac{1}{2/5}$, $E(\eta|\xi=k)=2/5$, sa $k=2,3,4,5$;

$$\frac{\eta|\xi=k|\ 0\ 1}{P\ |3/7\ 4/7},\ E(\eta|\xi=k)=4/5\,;\ \frac{\xi|\eta=0|\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{P\ |1/4\ 1/8\ 1/8\ 1/8\ 1/4},\ E(\xi|0)=3,5\ .$$

3.
$$p_{\eta|x}(y|x) = \frac{2(x+y)}{2x+1}$$
, $E(\eta|x) = \frac{2+3x}{3(2x+1)}$, $p_{\xi|y}(x|y) = \frac{2(x+y)}{2y+1}$, $E(\xi|y) = \frac{2+3y}{3(2y+1)}$

§19. 1. Тъй като
$$E(2\xi-5)=2E\xi-5$$
, $E(4\eta+2)=4E\eta+2$, то $\cos(2\xi-5,4\eta+2)=E[(2\xi-5-2E\xi+5)(4\eta+2-4E\eta-2)]=E[2(\xi-E\xi)4(\eta-E\eta)]=8E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]=8\cos(\xi,\eta)=8.3=24$. **3.** a) 0, 0; б) 0,081; 0,439.

СТАТИСТИКА

СТАТИСТИЧЕСКА ОБРАБОТКА НА ДАННИ.

§21. 1. a) 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.4 + 0.1(x - 4) & 0 \le x < 4 \\ 1.3 + 0.117(x - 8) & 4 \le x < 8 \\ 1 + 0.033(x - 12) & 8 \le x < 12 \\ 1 & x > 12 \end{cases} \quad \textbf{3.} \quad F^*(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.4 + 0.133(x - 5) & 2 \le x < 5 \\ 0.6 + 0.1(x - 7) & 5 \le x < 7 \\ 1 + 0.4(x - 8) & 7 \le x < 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

5.
$$\frac{[x_{i-1}, x_i)}{m_i} \begin{vmatrix} [10,20) & [20.30) & [30,40) & [40,50) & [50,60) \\ 7 & 7 & 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

§22. 1. a) $Q_1 = 41.2$, $Q_2 = 50.71$, $Q_3 = 56.67$; 6) $x_{30\%} = 43.2$, B) $x_{0.45}^{(kp)} = x_{0.65} = 51.5$. **3.** a) $Q_1 = 3.53$, $Q_2 = 4.75$, $Q_3 = 6.15$; 6) $x_{64\%} = 5.47$, $x_{0.2}^{(kp)} = 6.54$.

§23. 1. $Q_1 = 2,4$, $Q_2 = 2,8$, Q = 3,5, нетипични са 6,5 и 7; б) 3,06.

3. a)
$$\frac{(x_{i-1}, x_i)[80,100] (100,120] (120,140] (140,160]}{m_i}$$
; 6) (100,120];

r)
$$x_{40\%} = 108,4$$
, $x_{0,6} = 115,6$.
5.
$$\frac{\overline{x}}{a} \quad s_x^2 \quad s_x^{(3)} \quad s_x^{(4)}$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 1,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 1,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 1,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 1,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,3711 \quad 0,8042 \quad 4,5439$$

$$\frac{3}{a} \quad -0.5625 \quad 3,9424 \quad -0.9876 \quad 52.0860$$

§25. 3. \overline{x} = 2,74 , \widetilde{s}_x^2 = 1,6657 , \widetilde{s}_x = 1,2906 ; 3) 41,56 мин.

Общи задачи. 1. а) 36, 8,29; б) (33,59; 38,41). **3.** а) (8,82; 19,01); б) налага настройка на автомата; **5.** а) δ =4,92; б) n \ge 81. **7.** а) (953,97; 958,03); б) (11,82; 42.62).

ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ.

§30. 1. $\chi^2_{\text{набл.}} = 20$, $\chi^2_{kp.} = 13,28$, нулевата хипотеза се отхвърля.

Общи задачи. 1. $\chi^2_{ha6\bar{n}}=2,1667$, $\chi^2_{kp.}=9,49$, нулевата хипотеза се приема. **3.** При $H_1=\{EX\neq 1000\}$: а) $Z_{ha6\bar{n}}=1,25$, $Z_{kp.}=1,64$, нулевата хипотеза се приема. **5.** $H_0=\{DX=50\}$, $H_1=\{DX\leq 50\}$. $\chi^2_{ha6\bar{n}}=20$, $\chi^2_{kp.}=3,94$, нулевата хипотеза се приема. **7.** $\lambda=EX=0,4667$, $\chi^2_{ha6\bar{n}}=11,7199$. а) $\chi^2_{kp.}=13,82$, нулевата хипотеза се приема; б) $\chi^2_{kp.}=9,21$. Нулевата хипотеза се отхвърля.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДВЕ ИЗВАДКИ.

§32. 1. (-1,22; 2,55). $0 \in (-1,22; 2,55) \Rightarrow$ еднаква ефективност.

§33. 1.
$$Z_{\text{набл.}} = \frac{\overline{y} - \overline{x}}{\sqrt{\sigma_x^2/n_x + \sigma_y^2/n_y}} = 5,2793 \text{ м}$$
 $Z_{\kappa p.} = 1,96$. Нулевата хипотеза се

отхвърля. **3.**
$$F_{kp_1} = F_{0.95}^{(kr)}(20,10) = \frac{1}{F_{0.05}(10,20)} = 0,42$$
, $F_{kp_2} = F_{0.05}^{(kr)}(20,10) = 2,77$

$$F_{nabl.}=rac{\widetilde{s}_x^2}{\widetilde{s}_y^2}=3$$
 , H_0 се отхвърля. **5.** а) зависими са X_1 , Y_1 и X_2 , Y_2 , всички

останали двойки извадки са независими. б) (14,49; 26,51). в) По система 2 посредствените студенти усвояват средно между 14 и 26 процента повече от предадения материал. в) (-10,71; -1,49). Система 1 е по-ефективна за отличните студенти - средно от 1 до 12 процента по-добра усвояемост. г) Ако X - процент усвоени знания по система 1, а Y процент усвоени знания по система 2, то проверяваме хипотезата $H_0 = \{\sigma_x^2 = \sigma_y^2\}$ при $H_1 = \{\sigma_y^2 > \sigma_x^2\}$. $F_{kr} = 5,35$,

$$F_{nabl.}=rac{\widetilde{s}_y^2}{\widetilde{s}_x^2}=rac{633,25}{148,77}=4,26$$
 , H_0 се приема \Rightarrow няма различие в равномерността на

усвояване по двете системи. д) Търси се доверителен интервал за $\mu_x - \mu_y$ при условие на неизвестни $\sigma_x = \sigma_y$. Отг. (-11,18; 25,58) – с вероятност 0,95 обучавания по система 1 студент може да усвои от 11% по-малко до 25% повече учебен материал, отколкото ако е обучаван по система 2.

КОРЕЛАЦИОНЕН И РЕГРЕСИОНЕН АНАЛИЗ.

§35. 1. 0.86, (-0,20; 0,99), виж фиг.1.

§36. Общи задачи. **1.** a) 0,3; б) в) y = 0,43x - 1,43;г) x = 1,5y + 5 (виж фиг.

2). **3.** y=1,4x-3; 3,3, виж фиг. 3. **5.** a) y=2,905x-1.888; б) 12.678; в) (10,186, 16,252).

