ЗАДАЧИ ПО
СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ
(първа част)

Ангел Г. Ангелов

25. IV. 2010 г.

Съдържание

Предговор

Включени са приблизително всички упражнения до Марковски вериги. В глава 0. Вероятности са разгледани накратко основните понятия и резултати от теорията на вероятностите, които е необходимо да се знаят, за да се разберат новите понятия, свързани със случайни процеси. Тези, които считат, че са наясно с теорията на вероятностите, могат да я пропуснат. Към всяка тема има и малко теория – това, което е необходимо за решаване на задачите. Само част от задачите са решени, като част от решенията са подробни.

Твърде вероятно е да има случайни печатни грешки. Ако откриете такива, ще се радвам да ми кажете.

* * *

...the most important questions of life are indeed
for the most part only problems of probability.
Pierre Simon Laplace

Like geometry, probability is a way of looking at nature. [...] The purpose of this course is to learn to think probabilistically. Unfortunately, the only way to to learn to think probabilistically is to learn the theorems of probability. Only later, as one has mastered the theorems, the probabilistic point of view begins to emerge, while the specific theorems fade in one's memory.

K. Baclawski, G.-C. Rota

The advanced reader who skips parts that appear to him too elementary may miss more than the less advanced reader who skips parts that appear to him too complex.

G. Polya

0. ВЕРОЯТНОСТИ

Ще изложим основни понятия и резултати от теорията на вероятностите, които ще ни бъдат необходими по-нататък.

► *Събития и техните вероятности*

(1) Определена последователност от действия ще наричаме **експеримент**. Предполагаме, че са известни всички възможни резултати от дадения експеримент. Когато не знаем предварително какъв ще бъде резултата (изхода) от нашия експеримент, го наричаме **случаен експеримент**.

(2) Множеството от всички възможни изходи от даден експеримент наричаме **пространство на елементарните събития** и означаваме с Ω, а елементите му с ω и наричаме елементарни събития или **изходи**.

а) Хвърляне на зар

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

б) Стрелба в кръгова мишена

$$\Omega = \{\text{всички точки от мишената}\}$$

в) Конно надбягване

$$\Omega = \{\text{всички пермутации на конете}\}$$

г) Въпрос от социологическо проучване

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

д) Измерване на пулса

$$\Omega \text{ е подмножество на естествените числа}$$

(3) Произволно подмножество на Ω наричаме случайно събитие или само **събитие**. Събитията означаваме с $A, B, C, \ldots$

а) Хвърляне на зар

$$A = \{\text{не се пада шестица}\}$$

б) Стрелба в кръгова мишена

$$A = \{\text{точките от даден венец}\}$$

в) Конно надбягване

$$A = \{\text{спечелил е кон с номер 3}\}$$

г) Въпрос от социологическо проучване

$$A = \{\text{отговори 4 или 5}\}$$

д) Измерване на пулса

$$A = \{\text{пулс над 100}\}$$

(4) Празното множество $\emptyset$ ще наричаме **невъзможно събитие**, а Ω **достоверно (сигурно) събитие**. Събитието $A^c = \Omega \setminus A$ наричаме допълнение или **отрицание** на A.

$A \cap B \iff$ сбъднали са се събитията A и B.
$A \cup B \iff$ сбъднало се е поне едно от събитията A и B.
$A \subseteq B \iff$ събитието A влече събитието B.
$A^c \iff$ не се е сбъднало събитието A.
Използваме означението $AB = A \cap B$.
Събитията A и B наричаме **несъвместими**, ако $AB = \emptyset$.
Когато A и B са несъвместими изполваме записа $A + B = A \cup B$.

(5) Съвкупността от събития $H_1, H_2, \ldots, H_n$ наричаме **пълна група от събития** или **разделяне** на Ω, ако $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

(6) Нека $\mathcal{F}$ е съвкупност от събития. $\mathcal{F}$ се нарича σ**-алгебра** ако са изпълнени условията:
(a1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(a2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
(a3) $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, 3, \ldots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

(7) Функцията $\mathbf{P}$, дефинирана върху $\mathcal{F}$, наричаме **вероятност** ако:
(m1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
(m2) $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1,\ \forall A \in \mathcal{F}$
(m3) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \Longrightarrow \mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots$.

(8) Тройката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наричаме **вероятностно пространство**.

Свойства:
(а) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$
(б) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
(в) $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B)$
(г) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

(9) Нека A и B са събития и $\mathbf{P}(B) \neq 0$. **Условна вероятност** на A при условие B наричаме

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Формула за умножение на вероятности:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A \mid B)\, \mathbf{P}(B)$$

$$\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbf{P}(A_3 \mid A_1A_2)\ldots\mathbf{P}(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е разделяне на Ω.

Формула за пълната вероятност:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \mid B^c)\,\mathbf{P}(B^c)$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\,\mathbf{P}(H_i)$$

Формула на Бейс:

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\,\mathbf{P}(H_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\,\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A \mid H_i)\,\mathbf{P}(H_i)}$$

(10) Събитията A и B наричаме **независими** ако $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.

Ако A и B са независими, то $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$.

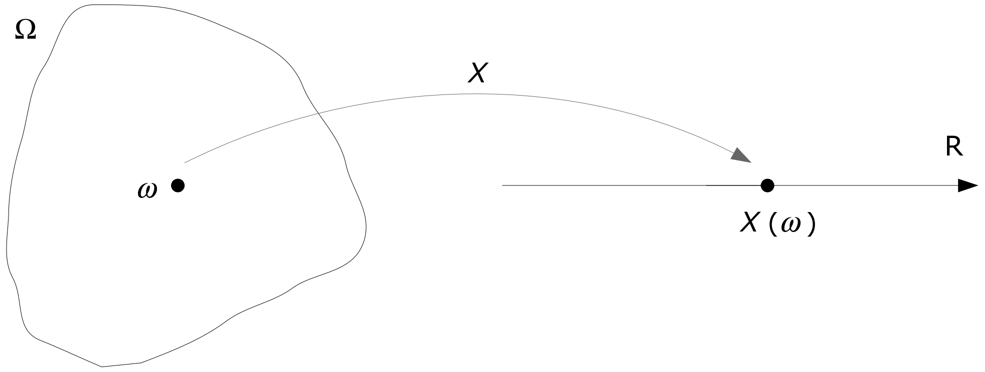
► *Случайни величини*

(1) Нека $X(\omega)$ е функция, дефинирана върху Ω и приемаща реални стойности $X:\ \Omega \mapsto \mathbb{R}$, за която е вярно, че множествата $B_x = \{\omega :\ X(\omega) \le x\}$ са събития от $\mathcal{F}$, т.е. $B_x \in \mathcal{F}$. Функцията $X = X(\omega)$ наричаме **случайна величина**.

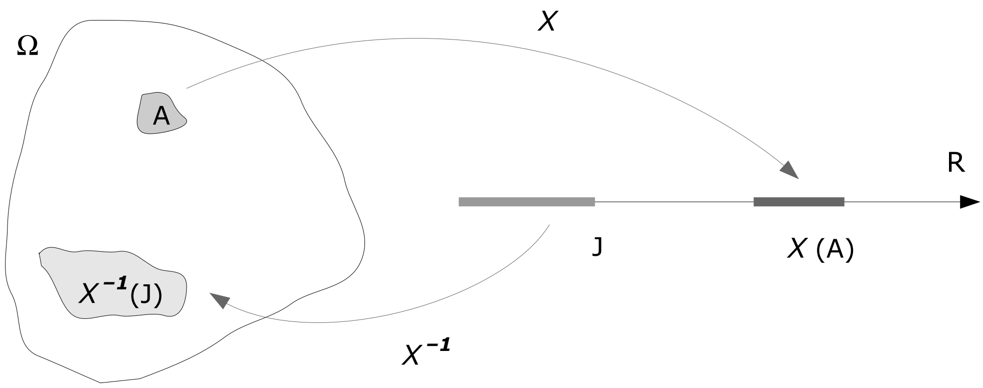
(2) Функцията

$$F_X(x) = \mathbf{P}(B_x) = \mathbf{P}(X \le x)$$

наричаме **функция на разпределение** на случайната величина X.



Случайната величина е функция, която съпоставя на всеки изход $\omega \in \Omega$ реално число $X(\omega)$.



Ако J е множество от реалната права, $X^{-1}(J) = \{\omega : \ X(\omega) \in J\}$ е праобраза на J, $X^{-1}(J) \subset \Omega$. Изискването $B_x = \{\omega : \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ може да се запише $B_x = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$, т.е. искаме праобразите на интервалите $(-\infty, x]$ да са събития от $\mathcal{F}$. По този начин функцията на разпределение $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ е коректно дефинирана (знаем вероятностите на събитията $\{X \leq x\}$).

Изпълнени са следните:

$$\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(X \leq a) + \mathbf{P}(a < X \leq b)$$

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(3) Две случайни величини X и Y наричаме **независими**, ако $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x)\, \mathbf{P}(Y \leq y)$$

(4) Дискретна сл.в. Случайната величина X наричаме дискретна, ако възможните стойности, които приема са крайно или изброимо множество. Функцията

$$p(x_k) = p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$$

наричаме **вероятностно разпределение** на X или дискретна плътност.

$$\sum_k p_k = 1$$

$$F(x) = \sum_{k \leq x} p_k$$

Обикновено разпределението на дискретна сл.в. се представя в таблица:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k & \dots \end{array}$$

(5) **Математическо очакване** на дискретната сл.в. X дефинираме по следния начин:

$$EX = \sum_k x_k \, \mathbf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k$$

$$Y = h(X) \Longrightarrow EY = Eh(X) = \sum_k h(x_k) p_k$$

Дискретната сл.в. X наричаме целочислена, ако приема стойности от множеството на целите числа $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Тогава горните формули приемат вида:

$$p(k) = p_k = \mathbf{P}(X = k)$$

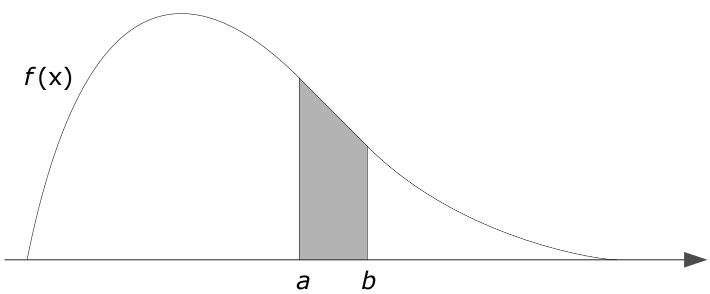
$$EX = \sum_k k \, \mathbf{P}(X = k) = \sum_k k p_k$$

$$Eh(X) = \sum_k h(k) p_k$$

(6) **Непрекъсната сл.в.** Случайната величина X наричаме непрекъсната, ако съществува неотрицателна функция $f(x)$, такава че

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

(7) Функцията $f(x)$ наричаме **плътност** на сл.в. X.



Изпълнени са следните:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

(8) Математическо очакване на непрекъснатата сл.в. X дефинираме по следния начин:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$Y = h(X) \Longrightarrow EY = Eh(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

(9) Моменти Нека X е произволна сл.в.
EX^k наричаме k-ти момент на X,
$E(X - EX)^k$ наричаме k-ти централен момент на X.

(10) Вторият централен момент се нарича **дисперсия** на X:

$$VarX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

Ако X и Y са независими:

$$Var(aX + bY) = a^2 VarX + b^2 VarY$$

(11) Нека X е произволна случайна величина. **Пораждаща функция на моментите** на X наричаме функцията $M_X(t) = Ee^{tX}$

$$EX^k = M_X^{(k)}(0)$$

Ако X и Y са независими $\Longrightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(12) Нека X е целочислена случайна величина. **Вероятностна пораждаща функция** (пораждаща функция) на X наричаме функцията $G_X(s) = Es^X$

$$G(s) = \sum_k s^k \, \mathbf{P}(X = k) = \sum_k s^k p_k$$

$$EX = G'(1)$$

$$E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G^{(k)}(1)$$

$$VarX = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$G_{X+a}(s) = Es^{X+a} = s^a G_X(s)$$

Ако X и Y са независими $\Longrightarrow G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$

Неравенство на Марков. Ако X е сл.в. с крайно очакване, тогава за всяко $a > 0$

$$\mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}.$$

Ако X е неотрицателна сл.в., тогава за всяко $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}.$$

Неравенство на Чебишев. Ако X е сл.в. с очакване μ и дисперсия σ^2, тогава за всяко $c > 0$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

При $c = k\sigma$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

(13) Две случайни величини X и Y наричаме **еднакво разпределени**, $X \stackrel{d}{=} Y$, ако $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \leq u) = \mathbf{P}(Y \leq u),$$

т.е. функциите им на разпределение съвпадат.

(14) Две случайни величини X и Y наричаме **стохастично еквивалентни**, ако

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \ X(\omega) = Y(\omega)\right\} = 1,$$

или, записано по друг начин,

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \ X(\omega) \neq Y(\omega)\right\} = 0.$$

► *Някои дискретни разпределения*

А. Разпределение на Бернули

Разглеждаме експеримент (опит) с два възможни изхода — *успех* и *неуспех*, като вероятността за *успех* е p (такъв опит наричаме Бернулиев опит). Дефинираме сл.в. X

$$X = \begin{cases} 1, & \text{при } \textit{успех} \\ 0, & \text{при } \textit{неуспех} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p = q$$

Казваме, че случайната величина X има Бернулиево разпределение с параметър p.

За очакването и дисперсията намираме:

$$EX = 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X = 1) = 1p + 0q = p$$

$$EX^2 = 1^2p + 0^2q = p$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Забележка. Нека A е събитие. Може да дефинираме X по следния начин:

$$X = \mathbb{I}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

Така дефинираната сл.в. обикновено се нарича индикаторна сл.в. (индикатор на събитието A) и очевидно е еквивалентна на първоначално дефинираната, ако наречем A *"успех"*.

Б. Биномно разпределение

Разглеждаме поредица (серия) от n независими Бернулиеви опити с вероятност за *успех* p и нека $q = 1 - p$. Нека X е броя успехи в серия от n Бернулиеви опити.

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Случайната величина X наричаме биномно разпределена с параметри $n, p:\ X \in Bi(n, p)$

Бернулиевата сл.в. е $Bi(1, p)$. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими Бенулиеви сл.в. с параметър p, то е в сила представянето

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

От линейността на очакването получаваме:

$$EX = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = nEX_1 = np$$

Използваме, че $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими:

$$VarX = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = nVarX_1 = npq$$

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} = (ps + q)^n$$

В. Геометрично разпределение

Разглеждаме поредица (серия) от независими Бернулиеви опити с вероятност за *успех* p и нека $q = 1 - p$. Нека X е броя опити до първия успех.

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Случайната величина X наричаме геометрично разпределена с параметър $p:\ X \in Ge(p)$.

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} s^k q^{k-1} p$$

$$= ps \sum_{k=1}^{\infty} (sq)^{k-1} = \frac{ps}{1-qs}$$

$$G'(s) = \frac{p(1-qs)+psq}{(1-qs)^2} = \frac{p}{(1-qs)^2}$$

$$G''(s) = \frac{2pq(1-qs)}{(1-qs)^4}$$

Така лесно пресмятаме очакването и дисперсията на X:

$$EX = G'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$VarX = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = \frac{2p^2q}{p^4} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Забележка. Понякога случайната величина $Y =$ брой неуспехи преди първия успех в серия от независими Бернулиеви опити, също се нарича геометрично разпределена. Очевидно $X = Y + 1$.

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k+1) = q^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$EY = E(X-1) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$$

$$VarY = Var(X-1) = VarX = \frac{q}{p^2}$$

Г. Поасоново разпределение

Казваме, че сл.в. X има Поасоново разпределение с параметър $\lambda > 0$, $X \in Po(\lambda)$, ако

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Не е трудно да се покаже, че:

$$EX = VarX = \lambda$$

Теорема (Поасон). Нека $n \to \infty$, $p_n \to 0$ по такъв начин, че $np_n = \lambda > 0$, тогава

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

Най-лесно това се показва с помощта на пораждащи функции:

$$(p_n s + q_n)^n = \left(1 + \frac{(s-1)\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow e^{\lambda(s-1)}$$

	p_k	k	$G(s)$	E	Var
$Bi(n,p)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0,1,2,\ldots,n$	$(ps+q)^n$	np	npq
$Ge(p)$	$q^{k-1}p$	$1,2,3,\ldots$	$\dfrac{ps}{1-qs}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
$Po(\lambda)$	$e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$0,1,2,\ldots$	$e^{\lambda(s-1)}$	λ	λ

Задача. Хвърляме последователно зар. Да се намерят:

а) Вероятността в първите 5 хвърляния да не се падне шестица;
б) Вероятността в първите 6 хвърляния да се паднат 2 шестици;
в) Вероятността първата шестица да се падне на 3-тото хвърляне;
г) Средния брой хвърляния докато се падне шестица.

► *Някои непрекъснати разпределения*

А. Равномерно разпределение

Случайната величина X наричаме равномерно разпределена в интервала (a,b), $X \in U(a,b)$, ако има плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$VarX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Б. Експоненциално разпределение

Случайната величина X наричаме експоненциално разпределена с параметър $\lambda > 0$, $X \in Exp(\lambda)$, ако има плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

$$VarX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Б. Гама разпределение

Случайната величина X наричаме гама разпределена с параметри n, λ: $\lambda > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $X \in \Gamma(n, \lambda)$, ако има плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{n}{\lambda}$$

$$VarX = \frac{n}{\lambda^2}$$

Очевидно $X \in Exp(\lambda) \iff X \in \Gamma(1, \lambda)$

Г. Нормално разпределение

Случайната величина X наричаме нормално разпределна с параметри μ, σ^2, $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ако има плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$EX = \mu$$

$$VarX = \sigma^2$$

► *Пълна вероятност. Пълно математическо очакване*

Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е разделяне на Ω.

Формула за пълната вероятност

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\,\mathbf{P}(H_i)$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{y} \mathbf{P}(A \mid Y = y)\,\mathbf{P}(Y = y) \qquad \text{ако } Y \text{ е дискретна сл.в.}$$

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid Y = y)\ f_Y(y)dy \qquad \text{ако } Y \text{ е непрекъсната сл.в.}$$

Формула за пълното математическо очакване

Нека X е дискретна сл.в. и A е събитие с ненулева вероятност. Очакване на X при условие A дефинираме така:

$$E(X \mid A) = \sum_k x_k\, \mathbf{P}(X = x_k \mid A)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_k x_k\, \mathbf{P}(X = x_k\,, A)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_{x_k \in X(A)} x_k\, \mathbf{P}(X = x_k)$$

Нека X е непрекъсната сл.в. с плътност $f(x)$ и A е събитие с ненулева вероятност. Очакване на X при условие A дефинираме така:

$$E(X \mid A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{X(A)} x f(x) dx$$

В сила е следната **формула за пълното математическо очакване:**

$$EX = \sum_k E(X \mid H_k)\, \mathbf{P}(H_k).$$

Задача 1. Нека $X \in Exp(\lambda)$ и $Y \in Exp(\mu)$ са независими сл.в. Да се намери $\mathbf{P}(X < Y)$.

$$\triangleright \qquad \mathbf{P}(X < Y) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X < Y \mid X = x)\ \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbf{P}(x < Y)\ \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(Y > x)\ \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \square$$

Задача 2. Броят на пътно-транспортни произшествия (ПТП) в даден град при дъждовен ден е Поасоново разпределена сл.в. със средно 17, а при сух ден — Поасоново разпределена сл.в. със средно 5. Нека X е броя на ПТП утре. Ако вероятността утре деня да е сух е 0.4, а вероятността да вали дъжд е 0.6, да се намерят:

а) EX;

$$A = \{\text{утре вали дъжд}\}$$
$$EX = E(X \mid A)\,\mathbf{P}(A) + E(X \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c)$$
$$= 17(0.6) + 5(0.4) = 12.2$$

б) $VarX$;

$$EX^2 = E(X^2 \mid A)\,\mathbf{P}(A) + E(X^2 \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c)$$
$$= (17^2 + 17)(0.6) + (5^2 + 5)(0.4) = 195.6$$
$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = 195.6 - (12.2)^2 = 46.76$$

$X \in Po(\lambda) \Longrightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda$

в) $\mathbf{P}(X \geq 1)$.

$$\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 1 \mid A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(X \geq 1 \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c)$$
$$= (1 - e^{-17})(0.6) + (1 - e^{-5})(0.4) = 0.997$$

Задача 3. Ръкопис е даден за набор във фирма, в която работят 3 машинописки. Първата машинописка прави случаен брой грешки, като броят им е Посоново разпределен със средно 2.5 на страница от набрания текст. Броят грешки на втората е Поасоново разпределен със средно 3.1 на страница, а на третата машинописка — Поасоново разпределен със средно 3.5 на страница. Ръкописът се набира от една от машинописките, като всяка от тях има равен шанс да го получи за набор. Нека X е броя грешки в набрания текст. Да се намери EX, ако дължината на набрания текст е:

а) 1 страница;

б) 7 страници.

► *Многомерни сл.в.*

(1) Нека X и Y са случайни величини. Функцията

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x,\, Y \leq y)$$

наричаме **съвместна функция на разпределение** на X и Y.

(2) Нека X и Y са дискретни, функцията

$$p_{ij} = p(x_i, x_j) = \mathbf{P}(X = x_i\,,\, Y = x_j)$$

наричаме **съвместно разпределение** на X и Y.

Изпълнени са следните:

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$$

$$Eh(X, Y) = \sum_{i,j} h(x_i, x_j) p_{ij}$$

(3) Нека X и Y са непрекъснати, функцията $f(x,y)$ наричаме **съвместна плътност** на X и Y, ако за всяко $A \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}((X,Y) \in A) = \int\int_A f(x,y)dxdy.$$

Изпълнени са следните:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$Eh(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

(4) **Ковариация** на случайните величини X и Y наричаме:

$$cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = EXY - EXEY.$$

(5) **Корелация (коефициент на корелация)** на случайните величини X и Y наричаме:

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

а) ако X и Y са независими, то $cov(X,Y) = 0, \quad \rho_{XY} = 0.$
б) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
в) $cov(X,X) = VarX$

► *Гранични теореми*

Нека $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots, X$ са случайни величини в пространството $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Казваме, че

(1) редицата X_n клони **почти сигурно** към X, записваме $X_n \xrightarrow{\text{п.с.}} X$, ако

$$\mathbf{P}\{\omega: \ X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \quad \text{при} \quad n \to \infty\} = 1;$$

(2) редицата X_n клони **в средно от ред** r към X, записваме $X_n \xrightarrow{L_r} X$, ако $E|X_n^r| < \infty$ и

$$E|X_n - X|^r \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

(3) редицата X_n клони **по вероятност** към X, записваме $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

(4) редицата X_n клони **по разпределение** към X, записваме $X_n \xrightarrow{d} X$, ако за всички x, в които $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ е непрекъсната, е изпълнено

$$\mathbf{P}(X_n \leq x) \longrightarrow \mathbf{P}(X \leq x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ са независими еднакво разпределени сл.в. с очакване $EX_i = \mu$ и дисперсия $VarX_i = \sigma^2$. Тогава при $n \to \infty$ са в сила:

Слаб закон за големите числа

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu.$$

Усилен закон за големите числа

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.с.}} \mu.$$

Централна гранична теорема

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \longrightarrow \Phi(a),$$

т.е. сл.в. $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ има стандартно нормално разпределение при $n \to \infty$.

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$