目录

使用隐式欧拉法求解常微分方程问题

Alphabetium

2023 年 3 月 26 日

1 问题

对于下列微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 + 2y \\ y(0) = -5 \end{cases}$$

使用隐式欧拉法求解其在$0 < x < 5$时的数值解。

2 求解方程：解析解

透过python的sympy库求解

```python
from sympy import Function, dsolve, Eq, Derivative, sin, cos, symbols
from sympy.abc import x
f = Function('f')
dsolve(Derivative(f(x), x) - x * f(x)**2 -2 * f(x), f(x), ics={f(0): -5})
```

Listing 1: 0.1s

可以得到方程解为：

$$f(x) = \frac{4e^{2x}}{-2xe^{2x}+e^{2x}-\frac{9}{5}}$$

3 透过三种不同方法求解微分方程

3.1 隐式欧拉法

```
x0 = 0;
y0 = -5;
a = 0;
b = 5;
h = 0.2;
y = Euler_Implicit(@f, y0, a, b, h);

x = linspace(a, b, length(y));
hold on
plot(x, y, '-o');
plot(x,RealFunc(x),"-b");
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Numerical Solution and error');

function y = Euler_Implicit(f, y0, a, b, h)
    n = round((b-a)/h);
    y = zeros(1, n+1);
    y(1) = y0;

    for i = 2:n+1
        xi = a + (i-1) * h;
        yi = y(i-1);
```

```
            for j = 1:100
                yi = y(i-1) + h * f(xi, yi);
            end
            y(i) = yi;
        end
    end

    function f = f(x, y)
         f= x.*y.^2 + 2.*y;
    end

    function ye = RealFunc(x)
        ye = (20.*exp(2.*x))./(exp(2.*x)-10.*x.*exp(2.*x)-9);
    end
```

Listing 2: 隐式欧拉法

其中$functionye = RealFunc(x)$部分是文章第一部分所解出的解析解；$functionf = f(x,y)$部分是原方程，将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$替换为f； $functiony = Euler_Implicit(f, y0, a, b, h)$是函数主体，解释如下：

1. 根据步长 h 计算需要多少个点n，并初始化结果数组；
2. 将初始值赋给第一个元素；
3. 循环从 i=2 到 i=n+1，每次计算 xi 和 yi；
4. 在内部循环中进行100次迭代，利用欧拉隐式法更新 yi 的数值；
5. 将最终得到的 yi 赋给结果数组。

3.2 显式欧拉法

[H]

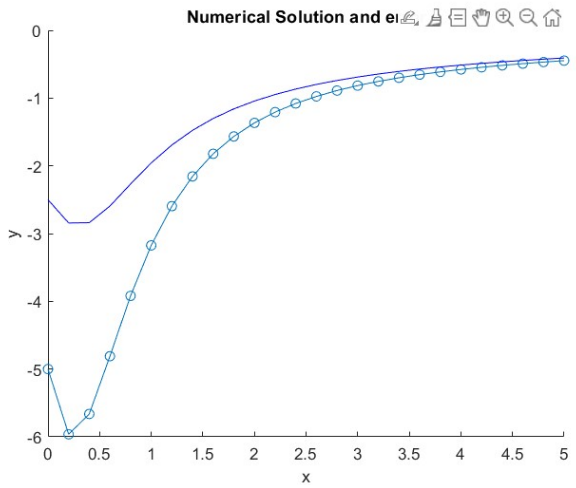


图 1: 隐式欧拉法

```
x0 = 0;
y0 = -5;
h = 0.1;
y = Euler_Explicit(@f, y0, h);

x = linspace(0, 5, length(y));
hold on
plot(x, y, '-o');
plot(x,RealFunc(x),"-b");

xlabel('x');
ylabel('y');
title('Numerical Solution and Error');
legend('Numerical Solution');


function y = Euler_Explicit(f, y0, h)
    t0 = 0;
    tp = 5;
```

```
        t = t0:h:tp;
        y = zeros(size(t));
        y(1) = y0;

        for i = 1:length(t)-1
            y(i+1) = y(i) + h * f((i+1) * h, y(i));
        end
    end

    function fullderi = f(x, y)
        fullderi = x.*y.^2 + 2*y;
    end

    function ye = RealFunc(x)
        ye = (20.*exp(2.*x))./(exp(2.*x)-10.*x.*exp(2.*x)-9);
    end
```

Listing 3: 显式欧拉法

$functiony = Euler_Explicit(f, y0, h)$是函数主体，解释如下： 1.初始化变量$x_0$、$y_0$和$h$

2.调用$Euler_Explicit$函数计算数值解y

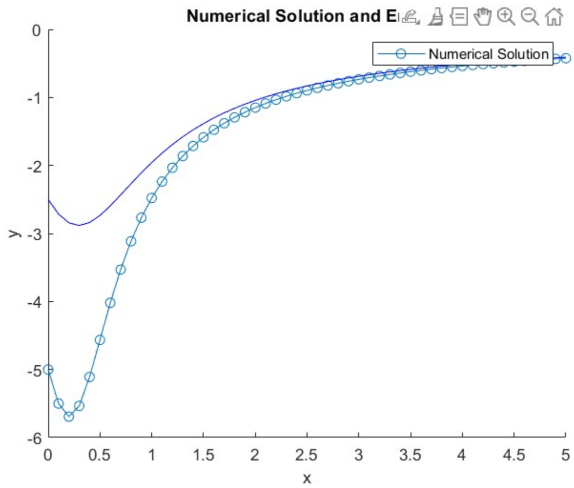
3.生成等间隔的自变量x

4.绘制数值解曲线和真实解曲线，并添加标签、标题及图例。

其中，$Euler_Explicit$函数使用欧拉显式法对微分方程进行离散化处理并求出数值近似解；$f(x, y)$为给定的微分方程右侧；$RealFunc(x)$为该微分方程的真实解。

3.3 4th-order Runge-Kutta

```
    y0 = -5;
    t0 = 0;
```



[H]

图 2: 显式欧拉法

```
tn = 5;
h = 0.2;

result = Runge_Kutta41(@f, t0, y0, tn, h);
x = linspace(0, 5, length(result));
hold on
plot(x, result, '-o');
plot(x,RealFunc(x),"-b");

xlabel('x');
legend();

function res = Runge_Kutta41(f, t0, y0, tn, h)
    res = [y0];
    t = t0;
    for i = 1:floor((tn-t0)/h)
        k1 = f(t, res(end));
        k2 = f(t + h / 2, res(end) + h * k1 / 2);
        k3 = f(t + h / 2, res(end) + h * k2 / 2);
```

```
        k4 = f(t + h, res(end) + h * k3);
        y_next = res(end) + h*(k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
        res = [res, y_next];
        t = t + h;
    end
end

function y = f(x, y)
    y = x*y^2 + 2*y;
end

function ye = RealFunc(x)
    ye = (20.*exp(2.*x))./(exp(2.*x)-10.*x.*exp(2.*x)-9);
end
```

Listing 4: 4th-order Runge-Kutta

[H]

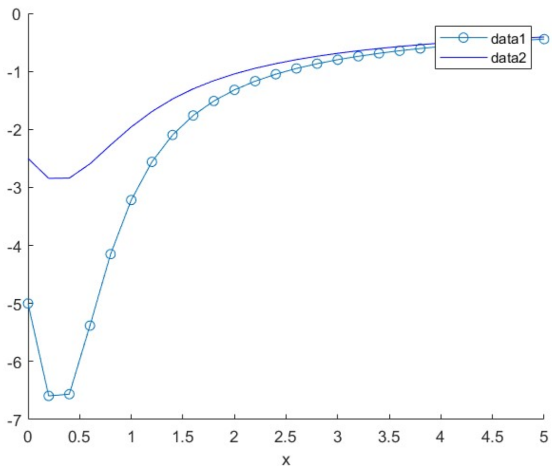


图 3: 4th-order Runge-Kutta

这部分比较简单，主要是透过以下公式进行循环而得：

$$k_1 = \ f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = \ f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + h\tfrac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = \ f\big(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + h\tfrac{k_2}{2}\big),$$

$$k_4 = \ f(t_n + h, y_n + hk_3).$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\mathrm{h},$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

4 处理三种方法的误差-代码实现

时间太赶实在是学不完也写不出来了，一直报错也看得不是很懂，下面的都是python，主要是分析误差。

4.1 隐式欧拉法

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def Euler_Implicit(f, y0, a, b, h):
    n = round((b-a)/h)
    y = np.zeros(n+1)
    y[0] = y0

    for i in range(1, n+1):
        xi = a + i * h
        yi = y[i - 1]
        for j in range(10):
            yi = y[i - 1] + h * f(xi, yi)
        y[i] = yi

    return y
```

```


def error(f, y0, a, b, h):

    def y_exact(x):
        return 20*np.exp(2*x)/(np.exp(2*x) - 10*x*np.exp(2*x) - 9)

    y_num = Euler_Implicit(f, y0, a, b, h)
    x = np.arange(a, b + h, h)[:len(y_num)]
    e = y_num - y_exact(x)

    return x, e


def f(x, y):
    return x*y**2+2*y


x0 = 0
y0 = -5
a = 0
b = 5
h = 0.1
y = Euler_Implicit(f, y0, a, b, h)

error_list = []
ha = np.arange(0.1, 0.7, 0.01)
for h in np.arange(0.1, 0.7, 0.01):

```

```
        y = Euler_Implicit(f, y0, a, b, h)
        x, e = error(f, y0, a, b, h)
        x = np.linspace(0, 5, len(y))
        error_list.append(e[-1])
        print(h,e[-1])


    plt.plot(ha, error_list)
    plt.xlabel('h')
    plt.ylabel('e[-1]')
    plt.title('Error vs. Step Size')
    plt.show()
```

Listing 5: 隐式欧拉法

4.2 显式欧拉法

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Euler_Explicit(f, y0, h):
    t0 = 0
    tp = 5
    t = np.arange(t0, tp+h, h)
    y = np.zeros(len(t))
    y[0] = y0

    for i in range(0, len(t)-1):
        y[i+1] = y[i] + h * f((i+1) * h, y[i])
    return y
```

```

def error(f, y0, h):
    t0 = 0
    tp1 = 5

    def y_exact(x):
        return 20*np.exp(2*x)/(np.exp(2*x) - 10*x*np.exp(2*x) - 9)

    y_num = Euler_Explicit(f, y0, h)
    x = np.arange(t0, tp1 + h, h)
    e = y_num - y_exact(x)

    return x, e

def f(x, y):
    return x*y**2+2*y
x0 = 0
y0 = -5

error_list = []
ha = np.arange(0.26, 1.5, 0.01)
for h in np.arange(0.26, 1.5, 0.01):

    y = Euler_Explicit(f, y0, h)
    x, e = error(f, y0, h)
    x = np.linspace(0, 5, len(y))
    error_list.append(e[-1])
    print(h,e[-1])

```

```
    xdata = ha
    ydata = np.array(error_list)
    coef = np.polyfit(xdata, ydata, 2)
    f_fit = np.poly1d(coef)
    xfit = np.linspace(xdata[0], xdata[-1], 100)
    yfit = f_fit(xfit)

    plt.plot(ha, error_list, 'bo', label='data')
    plt.plot(xfit, yfit, 'r-', label='fit')
    plt.xlabel('h')
    plt.ylabel('e[-1]')
    plt.title('Error vs. Step Size')
    plt.legend()
    plt.show()
    plt.plot(ha, error_list)
    plt.xlabel('h')
    plt.ylabel('e[-1]')
    plt.title('Error vs. Step Size')
    plt.show()
```

Listing 6: 显式欧拉法

4.3 4th-order Runge-Kutta

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Runge_Kutta4(f, t0, y0, tn, h):
    res = [y0]
    t = t0
```

```
    for i in range(int((tn-t0)/h)):
        k1 = f(t, res[-1])
        k2 = f(t + h / 2, res[-1] + h * k1 / 2)
        k3 = f(t + h / 2, res[-1] + h * k2 / 2)
        k4 = f(t + h, res[-1] + h * k3)
        y_next = res[-1] + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6
        res.append(y_next)
        t += h
    return res

def f(x, y):
    return x*y**2+2*y

def error(f, y0, t0, tn, h):

    def y_exact(t):
        return 20*np.exp(2*x)/(np.exp(2*x) - 10*x*np.exp(2*x) - 9)

    y_num = Runge_Kutta4(f, t0, y0, tn, h)
    t = np.arange(t0, tn + h, h)
    e = y_num - y_exact(t)

    return t, e

y0 = -5
t0 = 0
tn = 5
h = 0.1

```

```
result = Runge_Kutta4(f, t0, y0, tn, h)
x = np.linspace(0, 5, len(result))
plt.plot(x, result, '-o',label='Numerical Solution')

t, e = error(f, y0, t0, tn, h)

plt.plot(t, e, '-o', label='Error')

plt.xlabel('t')
plt.title('Numerical Solution and Error')
plt.legend()
plt.show()
```

Listing 7: 4th-order Runge-Kutta

5 处理三种方法的误差-比较

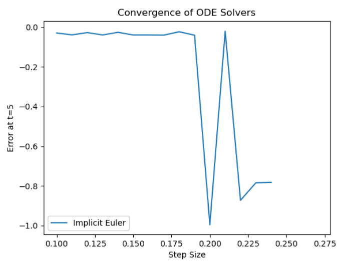


图 4: 隐式欧拉法的误差

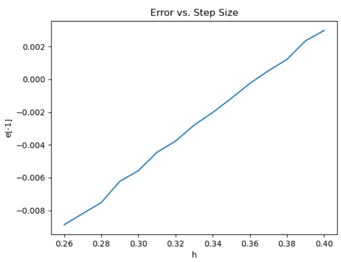


图 5: 显式欧拉法的误差

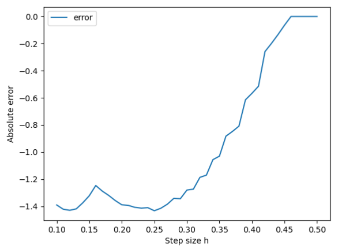


图 6: 4th-order Runge-Kutta的误差

5.1 误差分析

我将数据处理的档案加到附件里输出结果为：

EE.txt: 最接近 0 的值是 [0.26, -0.008873641307191593]，其距离为 0.2688736413071916。

EIM.txt: 最接近 0 的值是 [0.1, -0.03759539961851743]，其距离为 0.13759539961851744。

runge.txt: 最接近 0 的值是 [0.44999999999999984, -0.06431906956574363]，其距离为 0.5143190695657435。

比较上面三张图片及处理完的数据可以看出隐式欧拉法(EIM)在步长的选取上可以选择的精度最小，说明在这三种方法中最为精确。同时，我们也可以通过这个图形来选择一个合适的步长，使得数值解的绝对误差达到一个满意的精度水平。

5.2 收敛性分析

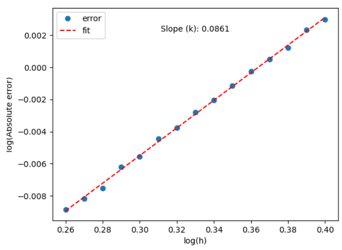


图 7: 显式欧拉法

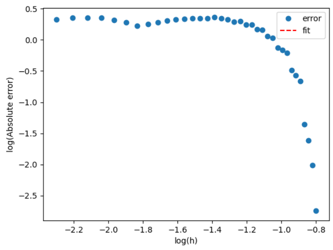


图 8: Runge

收敛应该指的是随着步长 h 的减小，数值解 y_n 逐渐接近精确解 $y(x_n)$，即 $\lim_{h\to 0} = y(x_n)$。

为了判断一个数值方法是否收敛，可以考虑不同步长 h 下的数值解和精确解之间的误差，并观察误差随着步长 h 的变化情况。

如果误差随着 h 的减小而减小，那么这个数值方法就是收敛的。

图形反映了步长(h)和数值解的误差之间的关系。横轴表示步长(h)，纵轴表示数值解的绝对误差。通过这个图形，我们可以了解到，当步长减小时，数值解的绝对误差会逐渐减小。

拟合直线的斜率可以表示误差随步长h的变化率，因此可以通过拟合直线来估计误差的收敛阶。其绝对值越小，误差随步长h的变化越慢，收敛阶就越高。拟合直线截距的意义则是误差的常数项。如果误差本身存在常数项，那么通过拟合直线的截距就可以得到误差的常数项大小。也就是误差与步长的关系，从而评估数值方法的收敛速度和精度。通过拟合出的直线，我们可以得到收敛阶的估计，也就是该数值方法在每次步长减小一半时误差的减小速率。一般来说，收敛阶越高，数值方法的收敛速度越快，精度越高。